САНКТ–ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Лебедев Никита Михайлович

РЕНОРМАЛИЗАЦИОННАЯ ГРУППА В НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ КРИТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ И СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

01.04.02 — теоретическая физика

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико–математических наук

Научный руководитель
доктор физико–математических наук
Антонов Н. В.

Санкт–Петербург — 2018

Оглавление

Введение

Актуальность темы. Многочисленные физические системы обнаруживают интересное сингулярное асимптотическое поведение. Их термодинамические и корреляционные функции демонстрируют степенное поведение с универсальными критическими размерностями [1, 2]. В соответствии с общепринятыми взглядами, в большинстве случаев, критические размерности (показатели) зависят только от нескольких глобальных характеристик системы, таких как симметрия или размерность пространства. Тем самым, зачастую можно говорить о типах критического поведения (классах универсальности) безотносительно к конкретной природе изучаемой физической системы.

Подобное поведение, в частности, демонстрируют системы находящиеся в окрестности своих критических точек (точек фазового перехода второго рода). Наиболее изученные фазовые переходы (жидкость-пар, бинарные смеси, ферро- и антиферромагнетики) описываются $O(n)$-симметричными моделями со взаимодействием типа ϕ^4 и n-компонентным векторным параметром порядка. На данный момент критическое поведение подобных моделей считается хорошо изученным: в рамках теории возмущений удается надежно установить к какому классу универнсальности принадлежит модель, а различные дополнительные техники пересуммирования рядов позволяют получить надежные численные оценки критических показателей [1–7].

Однако во многих случаях описание с помощью подобных, сравнительно простых, моделей оказывается неадекватным и приходится рассматривать более сложные симметрии или более сложные типы параметров порядка с матричной или тензорной природой. Сюда относятся системы со сложной кристаллографической структурой, со случайно распределенными примесями, жидкие кристаллы, системы фермионов с высшими спинами и многие другие [8–18]. Как правило, соответствующие модели включают несколько различных типов взаимодействий и соответственно несколько констант связи (зарядов), а их асимптотическое поведение оказывается неуниверсальным, в том смысле, что оно зависит от начального состояния изучаемой системы. В таком случае даже задача надежного определения возможности фазового перехода в системе и его типа оказывается достаточно сложной. Поэтому изучение подобных моделей до сих пор продолжает оставаться актуальным.

Подобная ситуация имеет место и для многочисленных моделей описывающих рост, и кинетическое огрубление различных границ [19]. Такие модели строятся по аналогии с моделями критической динамики на основе различных феноменологиских соображений, учитывающих различные симметрии системы и свойства анизотропии [20, 21]. При этом оказывается, что в некоторых случаях для доказательства мультипликативной ренормируеости модели требуется включение в нее бесконечного числа констант взаимодействия [22,23]. В результате даже однопетлевые вычисления в подобных моделях требуют специального подхода, а скейлинговое поведение корреляционных функций, предсказываемое в рамках такого анализа, оказывается хоть и возможным, но неуниверсальным. Другим интересным примером являются модели, описывающие возникающую в некоторых системах самоогранизованную критичность (СОК). В таких моделях принципиально отсутствуют параметры контролирующие корреляционную длину, время корреляций, а так же выход в критический режим [24].

В отличие от равновесных моделей критического поведения, динамические модели роста зависят не только от своих внутренних характеристик, но и от типа случайного внешнего воздействия. Известно, что одна и та же модель под действием шумов различного вида может проявлять асимптотическое поведение, принадлежащее различным классам универсальности [25, 26].

Таким образом, актуальным оказывается изучение не только различных модификаций уже существующих моделей роста, но и вопрос о выборе случайного шума, наиболее полно и точно описывающего различные аспекты реальных физических систем, а так же изучение завиимости поведения системы от конкретного выбора.

Степень разработанности темы исследования. Наиболее успешное последовательное количественное описание критического поведения дается с помощью методов теоретико-полевой ренормгруппы. При таком подходе возможные типы критического поведения определяются наличием и характером неподвижных точек соответствующей теоретико-полевой модели, а критические размерности вычисляются в рамках регулярной теории вомущений.

Применение данного подхода к различным моделям равновесного критического поведения позволило надежно установить принадлежность к тому или иному классу универсальности множества различных систем с n-компонентным векторным параметром порядка и различными типами симметрии, а также некоторых систем с тензорным параметром порядка. Критические показатели в некоторых моделях были вычислены вплоть до шестого порядка теории возмущений включительно.

Изучение феноменов связанных с эволюцией границ позволило построить множество полуфеноменологических моделей, установить в них начилие критического скейлинга и вычислить соответствующие показатели, чаще всего в главном (однопетлевом) приближении. В некоторых случаях подробный анлиз симметрий системы позволил получить точные результаты.

Целью натоящей работы является изучение критического поведения равновесных моделей с антисимметричным тензорным параметром порядка: $O(n)$-симметричной модели с чисто вещесвенным параметром порядка и $U(n)$-симметричной модели с комплексным параметром порядка в присутствии магнитного поля. Также проводится изучение скейлинговых режимов нескольких неравновесных моделей: изотропной модели роста и ее бесконечно-зарядного обобщения, непрерывной анизотропной модели СОК и бесконечно-зарядной модели эрозии ландшафтов. Во всех случаях используется “статическая” форма случайного шума, коррелятор которого не зависит от времени.

В соответствии с целью исследования были поставлениы следующие основные задачи:

(1) Построить квантовополевую формулировку изучаемой модели, исследовать тип и структуру ультрафиолетовых расходимостей, показать мультипликативную ренормируемость модели.

(2) Найти неподвижные точки уравнений ренормгруппы и установить их характер.

(3) В случае, если в модели возможно скейлинговое поведение, получить численные значения соответствующих ему критических размерностей.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации получены впервые, что подтверждается их публикацией в ведущих отечественных и международных журналах, и включают следующее:

(1) Исследовано критическое поведение систем, роль параметра порядка в которых играет вещественный антисимметричный тензор.

(2) Исследовано критическое поведение систем с комплексным антисимметричным параметром порядка, взаимодействующим с магнитным полем.

(3) Показано, что стохастическая модель кинетического огрубления Кардара-Паризи-Занга (КПЗ), ее бесконечно-зарядное обобщение, бесконечно-зарядная модель эрозии ландшафтов и непрерывная модель СОК Хуа-Кардара со "статическим" случайным шумом могут быть переформулированны в виде мультипликативно ренормируемых теоретико-полевых моделей, а также исследовано их асимптотическое поведение.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные в данной работе результаты могут быть использованы для описания критического поведения систем фермионов с дополнительными степенями свободы, а также жидких кристаллов и ферроэластиков. Результаты полученные при изучении стохастических моделей могут использоваться для описания роста различных границ раздела, описания эрозии ландшафтов, а также феномена самоорганизованной критичности. Разработанные методы могут применяться для анализа других многозарядных моделей, а также стохастических моделей со “статическим” случайным шумом. Кроме того, результаты работы могут послужить стимулом для проведения новых экспериментальных измерений критических показателей в различных системах, проявляющих скейлинговое поведение.

Методология и методы исследования. В работе систематически применяется метод ренормализационной группы, позволяющий доказать перенормируемость изучаемых моделей, изучить асимптотическое поведение корреляционных функций, установить возможность их скейлингового поведения в инфракрасной (ИК) асимптотике, а так же вычислить скейлинговые показатели в рамках регулярной теории возмущений. Кроме того, используются различные функциональные методы позволяющие определить асимптотические свойства коэффициентов рядов теории возмущений, а также найти некоторые точные соотношения (тождества Уорда), связывающие различные корреляционные функции.

Достоверность результатов обеспечивается использованием мощного и хорошо развитого математического аппарата квантовополевой ренормгруппы, а также сравнением полученных результатов с результатами известными ранее для некоторых частных случаев и родственных задач.

Основные положения, выносимые на защиту:

(1) Для $U(n)$-симметричной модели с комплексным антисимметричным тензорным параметром порядка установлено, что в случае $n > 19$ взаимодействие с магнитным полем приводит к появлению двух новых фиксированных точек в физической области параметров. На однопетле-

вом уровне обе точки являются седловидными точками, а единственным возможным поведением модели в рамках теории возмущений оказывается фазовый переход первого рода.

(2) Для $O(n)$-симметричной модели с вещественным антисимметричным тензорным параметром порядка обнаружено, что при $n > 4$ существует седловидная фиксированная точка, а единственным возможным поведением модели в рамках теории возмущений является фазовый переход первого рода. Кроме того, установлено, что в случае $n = 4$ в модели присутствуют две дополнительные фиксированные точки, одна из которых является инфракрасно притягивающей. В этом случае поведение модели оказывается неуниверсальным: в случае, если начальные данные лежат в ее области притяжения, в модели реализуется фазовый переход второго рода.

(3) Показана мультипликативная перенормируемость модели Кардара-Паризи-Занга со "статическим" случайным шумом. На однопетлевом уровне обнаружена фиксированная точка, которая лежит в нефизической области и не может отвечать за скейлинговое поведение корреляционных функций модели. Также показана мультипликативная перенормируемость непрерывной модели самоогранизованной критичности Хуа-Кардара со "статическим" случайным шумом. На однопетлевом уровне обнаружена инфракрасно притягивающая фиксированная точка и вычислены критические размерности.

(4) Исследованы бесконечно-зарядные модели роста и эрозии ландшафтов со "статическим" случайным шумом. Для обеих моделей показана их мультипликативная перенормируемость, а контрчлен явно вычислен в

однопетлевом приближении. В обоих случаях обнаружена двумерная поверхность фиксированных точек, которая может содержать инфракрасно притягивающие области. Показано, что соответствующий этим областям скейлинг является неуниверсальным, но подчиняется точному соотношению на критические размерности.

Апробация работы. Результаты и положения работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и школах:

1. Международная студенческая конференция «Физика и Прогресс — 2013» (Санкт-Петербург, Россия, 2013 г.).

   http://www.phys.spbu.ru/grisc/science-and-progress/archive.html

2. Международная школа «Advanced Methods of Modern Theoretical Physics: Integrable and Stochastic Systems» (Дубна, Россия, 2015 г.).

   http://www.dubnaschool.cz/2015/

3. 5я международная конференция «Модели квантовой теории поля» (Санкт-Петербург, Россия, 2015 г.).

   http://hep.phys.spbu.ru/conf/mqft2015/index.htm

4. Международная студенческая конференция «Физика и Прогресс — 2015» (Санкт-Петербург, Россия, 2015 г.).

   http://www.phys.spbu.ru/grisc/science-and-progress/archive.html

5. 19я международная конференция по физике высоких энергий «QUARKS — 2016» (Пушкин, Россия, 2016 г.).

   http://quarks.inr.ac.ru/2016/

6. 54я Международная школа по субатомной физике (Эричи, Италия,

2016 г.).

http://www.ccsem.infn.it/issp2016/index.html

7. Международная студенческая конференция «Физика и Прогресс — 2017» (Санкт-Петербург, Россия, 2017 г.).

http://www.phys.spbu.ru/grisc/science-and-progress/archive.html

8. 51-я Зимняя Школа Петербургского Института Ядерной Физики (Санкт-Петербург, Россия, 2017 г.).

http://hepd.pnpi.spb.ru/WinterSchool/archive/2017/program_school.html

Публикации. По теме диссертации опубликовано 5 научных работ в изданиях, рекомендованных ВАК РФ и входящих в базы данных РИНЦ, Web of Science и Scopus:

1. N.V. Antonov, M.V. Kompaniets, N.M. Lebedev, "Critical behaviour of the $O(n)$-ϕ^4 model with an antisymmetric tensor order parameter", J.Phys. A: Math. Theor. 46:40, 405002, (2013)

2. Н.В. Антонов, М.В. Компаниец, Н.М. Лебедев, "Критическое поведение $O(n)$-ϕ^4-модели с антисимметричным тензорным параметром порядка: трехпетлевое приближение", ТМФ, 190:2, P. 239–253, (2017); Theoret. and Math. Phys., 190:2, P. 204–216, (2017)

3. N.V. Antonov, M.V. Kompaniets, N.M. Lebedev, "Critical behavior of $U(n)$-χ^4-model with antisymmetric tensor order parameter coupled with magnetic field", EPJ Web of Conferences 125, 05021 (2016)

4. П.И. Какинь, Н.М. Лебедев, "Критическое поведение некоторых

неравновесных систем с “замороженным” случайным шумом", Вестник СПбГУ. Физика и Химия. Том 4(62), выпуск 4, P. 398, (2017)

5. М.В. Компаниец, Н.М. Лебедев, "Критическое поведение $O(n)$-симметричной модели с антисимметричным тензорным параметром порядка: ренормгруппа в реальном пространстве", Вестник СПбГУ. Физика и Химия. Том 4(62), выпуск 4, P. 417, (2017)

Личный вклад автора. Все основные результаты получены соискателем лично или при его прямом неотделимом участии в соавторстве.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, и списка литературы из 107 наименований. Работа изложена на 134 страницах и содержит 8 таблиц.

<u>В первой главе</u> содержится краткое изложение основных методов квантовополевой ренормгруппы. Приводится общий вид исследуемой модели, описывается способ анализа структуры расходимостей, приводится вывод общего вида уравнения ренормгруппы и классификация возможных типов асимптотического поведения его решений.

<u>Вторая глава</u> посвящена ренормгрупповому анализу критических режимов двух равновесных моделей с антисимметричным тензорным параметром порядка.

<u>В третьей главе</u> приводится стандартная формулировка стохастической задачи и описан метод ее сведения к теоретико-полевой модели с дополнительным полем. Обсуждается вопрос о выборе формы шума и приводятся важные для дальнейшего детали анализа структуры расходимостей в динамических моделях со “статическим” случайным шумом.

Червертая глава посвящена ренормгрупповому анализу асимптотических режимов четырех моделей роста со "статическим" случайным шумом.

В заключении суммируются основные результаты работы.

1. Стандартная техника квантовополевой ренормгруппы

1.1. Введение

В данной главе приводятся необходимые для дальнейшего изложения сведения об аппарате квантовополевой ренормгруппы применительно к задачам критического поведения. Применение данного подхода позволяет сформулировать модель классического случайного поля в виде, эквивалентном некоторой модели квантовых полей, и использовать для анализа ее критических режимов мощный и хорошо разработанный математический аппарат квантовой теории поля, включающий функциональные методы, диаграмные разложения в теории возмущений, теорию перенормировок, а так же ряд методов асимптотического анализа. Для подробного и последовательного изложения данного аппарата см. например [1, 2].

1.2. Постановка задачи и правила Фейнмана

Флуктуационная теория критического поведения представляет собой теорию системы классических случайных полей $\hat{\Phi}(x) = \{\hat{\phi}_i(x)\}$, для которых вес некоторой конкретной конфигурации $\Phi(x)$ определяется как $e^{S(\Phi)}$, где $S(\Phi)$ - функционал действия задающий конкретную модель. Здесь x – краткое обозначение полного набора непрерывных аргументов поля, пробегающих свои значения в некотором d-мерном векторном Евклидовом пространстве, а i – краткое обозначение некоторого набора дискретных аргументов. Функционал действия является полиномиальным по полям и может быть представлен в следующем виде:

$$S(\Phi) = -\frac{1}{2}\Phi K \Phi + V(\Phi). \tag{1.1}$$

Здесь и всюду далее необходимые интегрирования по повторяющимся непрерывным, и суммирования по повторяющимся дискретным аргументам подразумеваются. В подробных обозначениях квадратичная часть действия записывается как:

$$S(\Phi) = -\frac{1}{2}\int dx \int dx' \sum_{i,j} \phi_i(x) K_{i,j}(x,x') \phi_j(x'). \tag{1.2}$$

В формулах выше $K(x,x')$ – некоторая линейная симметричная $K^T(x,x') = K(x',x)$ операция в пространстве полей Φ. $V(\Phi)$ – взаимодействие: неквадратичная по полям часть функционала (1.2), имеющая вид

$$V(\Phi) = \sum_i g_i V_i(\Phi), \tag{1.3}$$

где $g = \{g_i\}$ - полный набор констант взаимодействия, $V_i(\Phi)$ – некие локальные мономы по полям Φ.

По известному функционалу действия определяется производящий функционал корреляционных функций (функций Грина) полей:

$$G(A) = C^{-1}\int D\Phi \; e^{S(\Phi)+A\Phi}, \tag{1.4}$$

$$C = \int D\Phi \; e^{S(\Phi)}.$$

Здесь $A = \{A_i(x)\}$ – полный набор источников полей Φ. Для сходимости подобных функциональных интегралов необходимо, чтобы функционал взаимодействия (1.3) был отрицательно определен на любой конфигурации полей Ф. Данное требование обычно приводит к наложению некоторых ограничений на значения, которые могут принимать константы взаимодействия. Такие ограничения выделяют в пространстве параметров модели некую область устойчивости, в которой, в дальнейшем, и рассматривается модель.

Производящий функционал связных функций Грина определяется как:

$$W(A) = ln\ G(A). \tag{1.5}$$

А производящий функционал 1-неприводимых функций Грина как его преобразование Лежандра:

$$\Gamma(\alpha) = W(A) - \alpha A;\ \alpha = \delta W(a)/\delta A; \tag{1.6}$$

Здесь $\alpha = \{\alpha_i(x)\}$ – набор сопряженных к A переменных. Так же из (1.6) следует соотношение:

$$\delta\Gamma(\alpha)/\delta\alpha = -A. \tag{1.7}$$

При выполнении конкретных расчетов функционалы G, W и Γ вычисляются в форме рядов теории возмущения по константам связи g с помощью диаграммной техники. При этом роль линий в диаграммах играет операция определяемая соотношением:

$$\Delta(x, x') = K^{-1}(x, x') \tag{1.8}$$

и называемая свободным пропагатором. Вершинам в диаграммах сопоставляются соответствующие вершинные множители, определяемые как:

$$V(x_1 \cdots x_n) = \delta V(\Phi)/\delta\Phi(x_1)\dots\delta\Phi(x_n). \tag{1.9}$$

Получающиеся интегралы, соответствующие диаграммам теории возмущений, могут расходиться в области больших импульсов. Подобные расходимости называют ультрафиолетовыми расходимостями, а их устранение требует введения процедуры перенормировки.

1.3. Ультрафиолетовые расходимости и перенормировка

Анализ ультрафиолетовых (УФ) расходимостей базируется на анализе канонических размерностей полей, параметров и корреляционных функций модели. Значения канонических размерностей полей и параметров определяется из нормировочного условия:

$$d_p = -d_x = 1 \tag{1.10}$$

и требования безразмерности функционала действия. Тогда каноническая размерность 1-неприводимой n-точечной функции Грина $\Gamma_n = \langle \Phi_1 \ldots \Phi_n \rangle_{1-\text{неприв.}}$ в импульсном представлении дается выражением:

$$d_\Gamma = d - \sum_\Phi N_\phi d_\phi, \tag{1.11}$$

в котором значок суммы обозначает суммирование по всем компонентам из полного набора полей Φ, входящим в данную функцию Грина, N_ϕ – количество раз, которое конкретная компонента поля встречается в данной функции Грина, d_ϕ – соответствующую каноническую размерность.

Значение размерности пространства в котором некоторый моном $\int dx V_i(\Phi)$, входящий в функционал (1.3) оказывается безразмерным называется логарифмическим для данного взаимодействия. При этом соответствующая константа взаимодействия g_i также оказывается безразмерной.

Модель является логарифмичной в пространстве размерности $d = d^*$, если все константы взаимодействия модели одновременно становятся безразмерными. Формальным индексом УФ расходимости для функций Γ_n является их каноническая размерность в логарифмической теории. Поверхностные УФ расходимости могут содержаться только в тех функция Грина, для которых

$$\delta_\Gamma = d_\Gamma|_{d=d^*} \tag{1.12}$$

является целым неотрицательным числом. Однако, если по какой-либо причине некоторое число размерных параметров (например внешних импульсов) возникает в качестве общего множителя для всех диаграмм какой-либо функции Грина, то реальный индекс расходимости данной функции будет отличаться от (1.12) на каноническую размерность внешнего множителя в логарифмической размерности.

Устранение УФ расходимостей производится за счет процедуры перенормировки. Модель является мультипликативно ренормируемой если все функции Грина можно сделать УФ конечными с помощью подходящей перенормировки полей и перехода от затравочных параметров модели e_0 к e – их ренормированным аналогам:

$$\Phi \to \Phi Z_\Phi; \quad e_0 = eZ_e. \tag{1.13}$$

Данная процедура возможна если в действии присутствуют слагаемые, соответствующие всем расходящимся контрчленам. При таком подходе ренормированное действие получается из исходного как:

$$S_R(\Phi, e, \mu) = S(Z_\Phi \Phi, e_0). \tag{1.14}$$

Соответствующие ренормированные 1-неприводимые функции Грина задаются соотношениями:

$$\Gamma_n(e_0) = \prod_{\Phi} Z_{\phi}^{-N_{\phi}} \Gamma_{nR}(e, \mu). \qquad (1.15)$$

В данных соотношениях значок произведения обозначает произведение по всем компонентам из полного набора полей, входящих в конкретную функцию Грина. Обычно с целью обезразмеривания ренормированных констант взаимодействия вводится ренормировочная масса μ

$$g_{i0} = g_i \mu^{d_{g_{io}}} Z_{g_i}, \qquad (1.16)$$

которая играет роль произвольного параметра ренормировки и имеет каноническую размерность $d_\mu = 1$.

Вычисление расходящихся частей функций Грина требует введения некоторой регуляризации. В качестве примера рассмотрим наиболее удобный с технической точки зрения случай размерной регуляризации. Данная регуляризация осуществляется за счет так называемого ε-сдвига, когда модель рассматривается в пространстве размерности $d = d^* - \varepsilon$, где параметр $\varepsilon > 0$. Тогда снятию регуляризации соответствует взятие предела $\varepsilon \to 0$. В рамках размерной регуляризации поверхностные УФ расходимости в диаграммах имеют вид полюсов по ε, а процедура устранения расходимостей сводится к сокращению данных полюсов подходящим выбором констант перенормировки. Требование лишь УФ конечности всех функций Грина не фиксирует данную процедуру однозначно. Однозначность достигается за счет выбора конкретной схемы ренормировки. В качестве примера, ниже мы рассмотрим подробнее схему минимальных вычитаний (MS). Другим примером может служить схема ренормировки в фиксированной размерности пространства (см. например [5, 27–29]), или ее модификация подробнее изложенная в разделе 2.2.3.

В рамках схемы MS все константы ренормировки имеют вид:

$$Z_i = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} A_{ip}(g_i)\, \varepsilon^{-p} \tag{1.17}$$

и вычитают в контрчленах исключительно полюсную часть по ε.

1.4. Уравнение ренормгруппы

Уравнение ренормгруппы для ренормированной функции Грина Γ_{nR} выводится на основе неоднозначности процедуры ренормировки. Одним из проявлений данной неоднозначности является произвольность ренормировочной массы μ. Поскольку затравочные параметры модели, а так же неренормированные функции Грина не зависят от выбора конкретной процедуры перенормировки они, в частности, должны оставаться неизменными при вариациях ренормировочной массы. Данное утверждение выражается равенством:

$$\widetilde{D}_\mu \Gamma_n(e_0) = 0, \quad \widetilde{D}_\mu = \mu \partial_\mu|_{e_0}. \tag{1.18}$$

Здесь дифференцирование производится при фиксированных затравочных параметрах, $\partial_i = \partial/\partial x_i$ для любой переменной x. Действуя оператором $\widetilde{D}_\mu$ на обе части равенства (1.15) получаем:

$$(\widetilde{D}_\mu - \sum_{\Phi} N_\phi \widetilde{D}_\mu ln Z_\phi)\Gamma_{nR}(e, \mu) = 0. \tag{1.19}$$

Раскрывая оператор $\widetilde{D}_\mu$ в терминах ренормированных переменных e, μ, имеем:

$$(D_\mu + \sum_{e} (\widetilde{D}_\mu e_i)\partial_{e_i} - \sum_{\Phi} N_\phi \widetilde{D}_\mu ln Z_\phi)\Gamma_{nR}(e, \mu) = 0. \tag{1.20}$$

Здесь и всюду далее оператор $D_x \equiv x\partial_x$ для любой переменной x. Наконец, учитывая определения (1.13) и (1.16), а так же вводя обозначения:

$$\gamma_a \equiv \widetilde{D}_\mu \ln Z_a, \quad \beta_i \equiv \widetilde{D}_\mu g_i = -g_i(d_{g_{io}} + \gamma_{g_i}), \tag{1.21}$$

получаем:

$$(D_\mu + \sum_g \beta_i \partial_{g_i} - \sum_{e'} \gamma_{e'_i} D_{e'_i} - \sum_\Phi N_\phi \gamma_\phi)\Gamma_{nR}(e, \mu) = 0. \tag{1.22}$$

Здесь через e' обозначены все параметры модели не являющиеся константами взаимодействия (в рамках размерной регуляризации это параметры имеющие фиксированную каноническую размерность), γ_a называется аномальной размерностью ренормируемой величины a, β_i есть бета-функции, соответствующие ренормированным константам связи. Уравнение (1.22) представляет собой общий вид стандартного уравнения ренормгруппы. Для краткости записи, введем обозначение:

$$D_{RG} = D_\mu + \sum_g \beta_i \partial_{g_i} - \sum_{e'} \gamma_{e'_i} D_{e'_i}. \tag{1.23}$$

Где оператор D_{RG} есть оператор $\widetilde{D}_\mu$ выраженный в терминах ренормированных переменных и ренормировочной массы. Тогда уравнение (1.22) переписывается в виде:

$$(D_{RG} - \sum_\Phi N_\phi \gamma_\phi)\Gamma_{nR}(e, \mu) = 0. \tag{1.24}$$

Аналогичным образом выводятся РГ уравнения для связных функций Грина:

$$(D_{RG} + \sum_\Phi N_\phi \gamma_\phi)W_{nR}(e, \mu) = 0. \tag{1.25}$$

Можно показать что в рамках размерной регуляризации и схемы MS выражение для аномальных размерностей упрощается и принимает следующий вид:

$$\gamma_a = -(\sum_g d_{g_{io}} D_{g_i}) \frac{A_{1a}}{\varepsilon}, \tag{1.26}$$

где A_{1a} коэффициент при полюсе первого порядка в (1.17). Данное упрощение является следствием УФ конечности аномальных размерностей, а так же того факта, что в рамках схемы MS в константы ренормировки входят только полюса по ε. Как результат, соотношение (1.26) может не выполняться для других ренормировочных схем.

1.5. Фиксированные точки и критические режимы

В качестве простого, но важного для дальнейшего изложения примера рассмотрим ИК асимптотику парного коррелятора в модели ϕ^4. Данная модель является моделью с одним скалярным полем, одним зарядом и одним размерным параметром m^2. Соответственно уравнение ренормгруппы для парного коррелятора записывается в форме:

$$(D_\mu + \beta(g)\partial_g - \gamma_{m^2} D_{m^2} + 2\gamma_\phi) W_{2R}(p, g, m^2, \mu) = 0 \tag{1.27}$$

Каноническая размерность парного коррелятора равна $d_{W_{2R}} = -2$, поэтому будем искать решение данного уравнения в виде:

$$W_{2R}(p, g, m^2, \mu) = p^{-2} F(s, g, z). \tag{1.28}$$

Здесь $s \equiv p/\mu$, а $z \equiv m^2/\mu^2$. Раскрывая операторы D_μ и D_{m^2} в терминах новых переменных, получаем:

$$(-D_s + \beta(g)\partial_g - (2 + \gamma_{m^2}) D_z + 2\gamma_\phi) F(s, g, z) = 0. \tag{1.29}$$

Решение данного уравнения может быть записано в терминах так называемых инвариантных переменных: инвариантного заряда $\bar{g}$ и инвариантного аналога $\bar{z}$ параметра z. Данные переменные определяются как решения задачи Коши системы обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной s:

$$\bar{g} = \bar{g}(s, g), \quad D_s \bar{g} = \beta(\bar{g}), \quad \bar{g}|_{s=1} = g, \tag{1.30}$$

$$\bar{z} = \bar{z}(s, g, z), \quad D_s \bar{z} = -\bar{z}(2 + \gamma_{m^2}), \quad \bar{z}|_{s=1} = z. \tag{1.31}$$

Первое уравнение легко интегрируется и дает:

$$ln\ s = \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)}. \tag{1.32}$$

Второе уравнение так же может быть проинтегрировано если перейти в нем от переменой s к переменной $\bar{g}$. В результате имеем:

$$\bar{z}(s, g, z) = zs^{-2} \exp\left[-\int_g^{\bar{g}} dx\ \frac{\gamma_{m^2}(x)}{\beta(x)}\right]. \tag{1.33}$$

Теперь решение уравнения (1.29) может быть записано в терминах инвариантных переменных следующим образом:

$$F(s, g, z) = F(1, \bar{g}, \bar{z}) \exp\left[2\int_g^{\bar{g}} dx\ \frac{\gamma_\phi(x)}{\beta(x)}\right]. \tag{1.34}$$

Найдем ИК асимптотику ($s \to 0$) данного решения. Для этого рассмотрим поведение решения (1.32) в окрестности фиксированных точек. Фиксированными точками g_* называются решения уравнения $\beta(g_*) = 0$. На практике одним из них всегда является так называемая тривиальная (Гауссова) точка $g_* = 0$. Нетривиальные фиксированные точки делят область устойчивости модели на интервалы, в каждом из которых β-функция знакопостоянна. Если g и $\bar{g}$ принадлежат одному из таких интервалов, то интеграл

(1.32) существует и определяет $ln\ s(\bar{g})$ как однозначную, и монотонную функцию переменной $\bar{g}$.

В малой окрестности нетривиальной фиксированной точки β-функция может быть представлена в виде:

$$\beta(g) \simeq \omega(g - g_*), \quad w = \beta'(g_*) \tag{1.35}$$

Зная поведение β-функции в окрестности фиксированной точки, можно найти асимптотику интеграла (1.32) при $\bar{g} \to g_*$:

$$ln\ s \simeq \omega^{-1} ln|\bar{g} - g_*|. \tag{1.36}$$

Из данного представления следует, что в пределе $\bar{g} \to g_*$ величина $ln\ s \to -\infty$, если $\omega > 0$ и $ln\ s \to \infty$ если $\omega < 0$. В силу однозначности и монотонности функции $s(g_*)$, отсюда можно заключить, что ИК асимптотика инвариантных переменных и решения (1.34) уравнения РГ для парного коррелятора определяются фиксированными точками g_*, для которых показатель $w = \beta'(g_*) > 0$.

ИК асимптотику интегралов входящих в (1.33), (1.34) можно получить представив в них $\gamma_a(x) = \gamma_a(g_*) + (\gamma_a(x) - \gamma_a(g_*))$. После подстановки этого выражения в интегралы, член в скобках сокращает нуль β-функции в числителе и тем самым делает интегралы регулярными по верхнему пределу, который в результате можно просто заменить на g_*:

$$\int_g^{\bar{g}} dx\ \frac{\gamma_a(x)}{\beta(x)} = \gamma_a^* ln\ s + \int_g^{g_*} dx\ \frac{\gamma_a(x) - \gamma_a(g_*)}{\beta(x)} + \ldots \tag{1.37}$$

Здесь многоточием обозначены отброшенные поправки порядка $O(|\bar{g} - g_*|)$, а $\gamma_a^* = \gamma_a(g_*)$. Подставляя данное асимптотическое выражение в интеграл (1.34) получаем

$$F(s, g, z) \simeq C(g) F(1, g_*, \bar{z}) s^{2\gamma_\phi^*}. \tag{1.38}$$

В итоге для ИК асимптотики парного коррелятора имеем:

$$W_{2R}(p, g, m^2, \mu) = p^{-2}(p/\mu)^{2\gamma_\phi^*}C(g)f(\bar{z}). \tag{1.39}$$

Сравнивая полученное выражение с представлением парного коррелятора написанным из феноменологических соображений (см. например [1, 2])

$$\langle\phi\phi\rangle(p, r_c) = Ap^{-2+\eta}f(pr_c) \tag{1.40}$$

где r_c - корреляционная длина, получаем выражение для критического показателя η, называемого индексом Фишера:

$$\eta = 2\gamma_\phi^*. \tag{1.41}$$

Приведенные выше рассуждения обобщаются на случай многозарядных теорий. В случае если в теории присутствует набор $g = \{g_i\}$ констант взаимодействия, то фиксированными точками являются такие наборы $g_* = \{g_{i*}\}$, для которых происходит одноверменное зануление всех β-функций:

$$\beta_i(g_*) = 0. \tag{1.42}$$

В таком случае уравнения для инвариантных зарядов принимают вид

$$D_s\bar{g}_i = \beta_i(\bar{g}), \quad \bar{g}_i|_{s=1} = g_i, \tag{1.43}$$

а тип фиксированной точки определяется собственными числами матрицы:

$$\omega_{ik} = \partial\beta_i(g)/\partial g_k|_{g=g_*}. \tag{1.44}$$

Точка является ИК притягивающей, если вещественная часть всех собственных чисел положительна, ИК отталкивающей, если вещественная часть всех собственных чисел отрицательна, седловидной, если вещественная часть различных собственных чисел имеет различные знаки.

Критический скейлинг в модели будет наблюдаться только в том случае, если в модели присутствуют ИК притягивающие фиксированные точки, а начальные данные РГ потоков (решений системы (1.43)) лежат в области притяжения одной из них. Отсутствие ИК притягивающей неподвижной точки предполагает, что для любого РГ потока существует только два варианта развития событий: он либо уйдет на бесконечность не покидая физической области, либо пересечет границу области стабильности модели. Первая ситуация означает, что к системе, находящейся в подобном режиме не применима теория возмущений. Вторая ситуация трактуется как реализация фазового перехода первого рода.

В общем случае, также справедливо утверждение, что уравнение РГ записанное в терминах канонически безразмерных переменных при $g = g_*$ представляет собой уравнение критического скейлинга, а коэффициенты оператора D_{RG} определяют критические размерности всех ИК существенных величин. Практически данное утверждение используется следующим образом. Пусть F - некоторая мультипликативно ренормируемая величина: $F = Z_F F_R$. Тогда соответствующее ей уравнение ренормнруппы имеет вид:

$$(D_{RG} + \gamma_F) F_R = 0. \tag{1.45}$$

В фиксированной точке оно может быть переписано как:

$$(D_\mu - \sum_{e'} \gamma^*_{e'} D_{e'} + \gamma^*_F) F_R = 0. \tag{1.46}$$

С другой стороны каноническая масштабная инвариантность данной величины выражается уравнением:

$$(\sum_i d_i D_i + d_F) F_R = 0, \tag{1.47}$$

где индекс i нумерует все параметры имеющие ненулевую каноническую размерность. Подобные уравнения описывают скейлинг, возникающий при растяжении тех переменных, производные по котором в них содержатся. Поэтому если нас интересует ситуация, в которой некоторый набор заданных переменных не растягивается, то соответствующие им производные надо исключить, комбинируя имеющиеся уравнения. В случае критического скейлинга таким параметром обычно является ренормировочная масса.

2. Критическое поведение моделей с антисимметричным тензорным параметром порядка

2.1. $U(n)$-симметичная модель с магнитным полем

2.1.1. Формулировка модели

На протяжении всего двадцатого века неослабевающий интерес исследователей вызывали вопросы связанные с явлением сверхпроводимости. Среди прочего, активно обсуждался вопрос о зависимости типа и свойств фазового перехода в сверхпроводящее состояние от структуры вещества и воздействия магнитного поля. В рамках данного исследования, всестороннему изучению подвергалось критическое поведение систем нерелятивистских фермионов. Можно выделить два основных подхода к проблеме. Первый основывается на микроскопическом описании нерелятивистского квантового газа при помощи некоторого модельного действия со взаимодействием фермионов типа плотность-плотность. Такой подход позволяет обнаружить явление сверхпроводимости в рамках теории возмущений и получить оценки на температуру фазового перехода [30].

Второй подход применяется для описания малой окрестности точки фазового перехода и основан на анализе эффективного лагранжиана Ландау-Гинзбурга методами квантовополевой ренормгруппы [1, 31]. В его рамках, на основе предположения о природе и свойствах параметра порядка строится эффективное действие типа ϕ^4, учитывающее основные симметрии системы. Так, для системы взаимодействующих электронов, подобный подход приводит к заключению, что фазовый переход принадлежит к классу универсальности, описываемому хорошо изученной $O(2)$-симметричной моделью ϕ^4.

Тем не менее, поскольку построение теории среднего поля в терминах грассмановых переменных является невозможным, существует проблема поиска соотношения этих двух подходов. Искомая связь была обнаружена в работе [18]. В ней авторы рассматривали поведение системы нерелятивистских ферми частиц с n возможными проекциями спина, описываемой микромоделью:

$$S = \psi_i^+(\partial_t - \frac{1}{2m}\partial^2 - \mu)\psi_i - \frac{\lambda}{2}(\psi_i^+\psi_i)(\psi_j^+\psi_j). \tag{2.1}$$

Здесь $\psi = (\psi_1 \dots \psi_n)^T$, $\psi^+ = (\psi_1^* \dots \psi_n^*)$ - фермионные поля, компоненты которых ψ_i, ψ_i^* комплексно сопряженные элементы грассмановой алгебры, $t \in [0, 1/T]$ – мнимое время, T – температура системы, m – масса фермиона, μ – химический потенциал, λ – положительная константа связи, ∂^2 – оператор Лапласа. С помощью преобразования Хаббарда–Стратоновича были введены бозонные поля $\chi = \chi_{ik}$, $\chi^+ = \chi^{+ik}$, являющиеся комплексными, антисимметричными тензорами второго ранга $\chi_{ik} = -\chi_{ki}$ и $\chi^{+ik} = -\chi^{+ki}$, $i, k = 1, \dots, n$. С помощью уравнений Швингера было показано, что для данных полей выполняются соотношения:

$$\langle \chi_{ik}^+ - \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\psi_i^+\psi_k^+ \rangle = A_{\chi_{ik}^+}, \tag{2.2}$$

$$\langle \chi_{ik} - \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\psi_i\psi_k \rangle = A_{\chi_{ik}}, \tag{2.3}$$

где A_χ - источники соответствующих полей (физическое значение $A = 0$).

Данные соотношения демонстрируют, что новые поля χ, χ^+ непосредственно связаны с параметром порядка сверхпроводящего фазового перехода. В результате взятия гауссова функционального интеграла по исходным фермионным полям и отбрасывания инфракрасно несущественных членов в работе [18] было построено эффективное действие для данных полей в окрестности точки фазового перехода:

$$S = tr(\chi^+(-\partial^2+\tau)\chi) + \frac{g_1}{4}(tr(\chi\chi^+))^2 + \frac{g_2}{4}tr(\chi\chi^+\chi\chi^+). \tag{2.4}$$

Отметим, что интегрирование в (2.4) осуществляется лишь по координатам d-мерного векторного Евклидова пространства, т.к. в критической области поля $\chi(\mathbf{x})$, $\chi^+(\mathbf{x})$ не зависят от t. Взаимодействие с зарядом g_1 не возникло в результате данной процедуры, но было включено в модель для ее мультипликативной ренормируемости. В частных случаях $n = 2, 3$ такая модель совпадает с $O(2)$- и $O(6)$-симметричными моделями ϕ^4 соответственно с точностью до конечного растяжения параметров и предсказывает такое же критическое поведение.

В случае фермионов с высшими спинами ($n > 3$) модель (2.4) является подлинно двухзарядной моделью. В работах [18,32] она была исследована при помощи квантовополевой ренормгруппы в пятипетлевом приближении. Было показано, что РГ уравнения для функций Грина модели не имеют ИК притягивающих фиксированных точек, а соответствующие РГ потоки (решения РГ уравнений для инвариантных зарядов) всегда покидают область устойчивости модели. Подобная ситуация обычно интерпретируется как фазовый переход первого рода.

С другой стороны, естественно ожидать что поле параметра порядка сверхпроводящего фазового перехода должено взаимодействовать с электромагнитным полем. Для n-компонентного векторного параметра порядка соответствующее эффективное действие, в котором взаимодействие с магнитным полем введено минимальным образом, было рассмотрено в работах [33–35]. Было установлено, что заряженная (соответствующая ненулевому значению эффективного электрического заряда) фиксированная точка может существовать только для достаточно больших значений $n > 365$.

В данном разделе изучается модель (2.4), в которую минимальным образом введено взаимодействие с магнитным полем. В случаях $n = 2, 3$ такая модель совпадает с аналогичными $O(2)$ и $O(6)$-симметричными моделями ϕ^4, и должна давать такие же предсказания. Данный факт можно использовать для дополнительной проверки полученных результатов. Также, при $n = 2$ и $d = 4$ модель формально близка к модели Хиггса [36–38]. При $n > 2$ изучаемая модель является независимой двухзарядной моделью, функционал действия которой имеет вид:

$$S(\Phi) = tr((\nabla + ie_0\mathbf{A})\chi^+(\nabla - ie_0\mathbf{A})\chi) + \tau_0 tr(\chi^+\chi) + \frac{g_{10}}{4}(tr(\chi\chi^+))^2 +$$
$$+\frac{g_{20}}{4} tr(\chi\chi^+\chi\chi^+) + \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{A})^2 + \frac{1}{2\xi_0}(\nabla\mathbf{A})^2. \qquad (2.5)$$

Здесь, $\mathbf{A} = \{A_\mu(\mathbf{x})\}$ - векторный потенциал магнитного поля, $\Phi = \{\chi, \chi^+, \mathbf{A}\}$ - универсальное обозначение полного набора полей, e_0 - эффективный заряд, g_{10}, g_{20} - константы взаимодействия, τ_0 - отклонение температуры от ее критического значения и ξ_0 - параметр, фиксирующий калибровку.

Поле χ является дважды ковариантным ($\chi \to \mathcal{U}\mathcal{U}\chi$), в то время как поле χ^+ дважды контравариантно ($\chi^+ \to \chi^+\mathcal{U}^+\mathcal{U}^+$) по отношению к преобразованиям $\mathcal{U} \in U(n)$.

Для обеспечения устойчивости модели необходимо наложение следующих ограничений на константы взаимодействия:

$$2g_{10} + g_{20} > 0, \quad ng_{10} + g_{20} > 0, \quad e^2 > 0. \tag{2.6}$$

По виду действия (2.5) определяются правила Фейнмана для построения соответствующей диаграмной техники. Затравочные пропагаторы в импульсном представлении имеют вид:

$$\langle \chi\chi^+ \rangle_0 = \frac{J_{ab}^{cd}}{(k^2 + \tau_0)}, \quad \langle \mathbf{A}\mathbf{A} \rangle_0 = \frac{P_{\mu\nu}^{\perp}(k) + \xi P_{\mu\nu}^{\parallel}(k)}{k^2}. \tag{2.7}$$

Здесь и всюду далее у выражений вида $\langle \dots \rangle_0$, обозначающих свободные пропагаторы и вершинные множители, необходимые тензорные значки опущены для краткости и подразумеваются. Тензор J_{ab}^{cd} определяется соотношением:

$$J_{ab}^{cd} = \frac{1}{2}(\delta_a^c \delta_b^d - \delta_a^d \delta_b^c), \tag{2.8}$$

и играет роль единичной операции на множестве антисимметричных тензоров в том смысле, что $J_{ik}^{lm}\chi_{lm} = \chi_{ik}$; $J_{ik}^{lm}\chi^{+ik} = \chi^{+lm}$ и $J_{ik}^{lm}J_{lm}^{ef} = J_{ik}^{ef}$. Поперечный и продольный проектор на направления импульса здаются стандартными выражениями $P_{\mu\nu}^{\perp}(k) = (\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu)/k^2$ и $P_{\mu\nu}^{\parallel}(k) = k_\mu k_\nu/k^2$.

Структура неквадратичной части действия (2.5) приводит к следующему виду вершинных множителей:

$$\langle \mathbf{A}\chi^+\chi \rangle_0 = ie_0 p_\mu J_{ab}^{cd}, \quad \langle \mathbf{A}\mathbf{A}\chi^+\chi \rangle_0 = e^2 J_{ab}^{cd} \tag{2.9}$$

$$\langle \chi\chi^+\chi\chi^+ \rangle_0 = g_{10} V_{ab;ef}^{cd;mn} + g_{20} W_{ab;ef}^{cd;mn} \tag{2.10}$$

Где тензора V и W определяются так, чтобы выполнялись условия:

$$V_{ab;ef}^{cd;mn}\chi^{+ab}\chi_{cd}\chi^{+ef}\chi_{mn} = (tr(\chi\chi^+))^2,$$
$$W_{ab;ef}^{cd;mn}\chi^{+ab}\chi_{cd}\chi^{+ef}\chi_{mn} = tr(\chi\chi^+\chi\chi^+),$$

и могут быть явно выражены с помощью тензора J_{ab}^{cd}:

$$V_{ab;ef}^{cd;mn} = \frac{1}{2}(J_{ab}^{cd}J_{mn}^{ef} + J_{ab}^{ef}J_{mn}^{cd}), \tag{2.11}$$
$$W_{ab;ef}^{cd;mn} = \frac{1}{2}(J_{ab}^{ij}J_{jk}^{cd}J_{ef}^{kp}J_{pi}^{mn} + J_{ab}^{ij}J_{jk}^{mn}J_{ef}^{kp}J_{pi}^{cd}). \tag{2.12}$$

2.1.2. Ультрафиолетовая перенормировка

Таблица 2.1. Канонические размерности полей и параметров в модели (2.5).

F	χ	χ^+	$\mathbf{A}$	τ_0	g_{i0}	e_0	ξ_0	μ
d_F^k	$(d-2)/2$	$(d-2)/2$	$(d-2)/2$	2	$4-d$	$(4-d)/2$	0	0

Анализ канонических размерностей полей и параметров модели, представленных в таблице 2.1, показывает, что модель является логарифмичной для $d = 4$ и мультипликативно ренормируемой. В рамках метода размерной регуляризации соответствующее ренормированное действие может быть получено с помощью мультипликативной перенормировки полей

$$\chi \to \chi Z_\chi; \quad \chi^+ \to \chi^+ Z_\chi; \quad \mathbf{A} \to \mathbf{A}Z_A; \tag{2.13}$$

и параметров модели:

$$\tau_0 = \tau Z_\tau; \quad g_{0i} = g_i\mu^{2\varepsilon}Z_{g_i}; \quad e_0 = e\mu^\varepsilon Z_e; \quad \xi_0 = \xi Z_\xi, \tag{2.14}$$

и имеет вид:

$$S_R(\Phi) = tr((\nabla + ie\mu^\varepsilon\mathbf{A}Z_eZ_A)\chi^+(\nabla - ie\mu^\varepsilon\mathbf{A}Z_eZ_A)\chi)Z_\chi^2 +$$

$$+\tau tr(\chi^+\chi)Z_\tau Z_\chi^2+\frac{1}{2}(\nabla\times\mathbf{A})^2Z_A^2+\frac{1}{2\xi}(\nabla\mathbf{A})^2Z_A^2Z_\xi^{-1}+$$

$$+\frac{g_1\mu^{2\varepsilon}}{4}(tr(\chi\chi^+))^2Z_\chi^4Z_{g_1}+\frac{g_2\mu^{2\varepsilon}}{4}tr(\chi\chi^+\chi\chi^+)Z_\chi^4Z_{g_2}. \qquad (2.15)$$

Здесь τ, g_i, e, ξ - ренормированные аналоги затравочных параметров, а μ - ренормировочная масса, $\varepsilon=(4-d)/2$ есть отклонение размерности пространства от его логарифмичесткого значения. В данном разделе мы используем схему минимальных вычитаний, в рамках которой все константы ренормировки имеют вид (1.17).

Ренормированное действие также может быть получено в результате добавления контрчленов к базовому действию:

$$S_B(\Phi)=tr((\nabla+ie\mu^\varepsilon\mathbf{A})\chi^+(\nabla-ie\mu^\varepsilon\mathbf{A})\chi)+\tau tr(\chi^+\chi)+\frac{1}{2}(\nabla\times\mathbf{A})^2+$$

$$+\frac{1}{2\xi}(\nabla\mathbf{A})^2+\frac{g_1\mu^{2\varepsilon}}{4}(tr(\chi\chi^+))^2+\frac{g_2\mu^{2\varepsilon}}{4}tr(\chi\chi^+\chi\chi^+). \qquad (2.16)$$

Иными словами:

$$S_R(\Phi)=S_B(\Phi)-L\Gamma(\Phi), \qquad (2.17)$$

где L - контрчленная операция для схемы MS, а $\Gamma(\Phi)$ - производящий функционал 1-неприводимых функций Грина.

Покажем, что вклад контрчленов в ренормированное действие (2.15) является инвариантным относительно калибровочного преобразования [39]:

$$\chi_\alpha=\chi e^{i\alpha(\mathbf{x})};\quad \chi_\alpha^+=\chi^+e^{-i\alpha(\mathbf{x})};\quad \mathbf{A}_\alpha=\mathbf{A}+\frac{1}{e}\nabla\alpha(\mathbf{x}). \qquad (2.18)$$

Для этого рассмотрим производящий функционал полных функций Грина. В базовой теории он имеет вид:

$$G(a)=C\int D\Phi\ e^{S_B(\Phi)+a\Phi} \qquad (2.19)$$

Здесь $a = \{a_\chi, a_{\chi^+}, \mathbf{a_A}\}$ - источники соответствующих полей, C - нормировочная константа. Сделаем в интеграле (2.19) замену переменных соответствующую калибровочному преобразованию (2.18). Якобиан такой замены равен единице, а пространство интегрирования в (2.19) при этом перейдет само в себя. В результате, варьируя полученное выражение по калибровочному параметру α получаем равенство:

$$\int D\Phi \; \delta_\alpha e^{S_B(\Phi)+a\Phi} = 0. \tag{2.20}$$

Из (2.18) находим вариации полей и базового действия (2.16):

$$\delta_\alpha \chi = i\alpha\chi; \quad \delta_\alpha \chi^+ = -i\alpha\chi^+; \quad \delta_\alpha \mathbf{A} = \frac{1}{e}\nabla\alpha;$$

$$\delta_\alpha S_B(\Phi) = \frac{\alpha}{e\xi}\Delta(\nabla \times \mathbf{A}). \tag{2.21}$$

Подставляя эти выражения в (2.20) получаем:

$$\int D\Phi \; (i\alpha tr(a_\chi \chi) - i\alpha tr(a_{\chi^+}\chi^+) + \frac{1}{e}(\mathbf{a_A}\cdot\nabla\alpha) + \frac{\alpha}{e\xi}\Delta(\nabla\times\mathbf{A}))e^{S_B(\Phi)+a\Phi} = 0. \tag{2.22}$$

Представляя поля стоящие перед экспонентой в виде производных по соответствующим источникам и переходя к производящему функционалу связных функций Грина (1.5), получаем:

$$i\alpha tr(a_\chi \frac{\delta W}{\delta a_\chi}) - i\alpha tr(a_{\chi^+}\frac{\delta W}{\delta a_{\chi^+}}) + \frac{1}{e}(\mathbf{a_A}\cdot\nabla\alpha) + \frac{\alpha}{e\xi}\Delta(\nabla\times\frac{\delta W}{\delta \mathbf{a_A}}) = 0. \tag{2.23}$$

Перейдем теперь к производящему функционалу 1-неприводимых функций Грина. С учетом соотношений (1.6), (1.7) перепишем уравнение (2.23) в виде:

$$-i\alpha tr(\chi\frac{\delta\Gamma}{\delta\chi}) + i\alpha tr(\chi^+\frac{\delta\Gamma}{\delta\chi^+}) - \frac{1}{e}(\nabla\alpha\cdot\frac{\delta\Gamma}{\delta\mathbf{A}}) + \frac{\alpha}{e\xi}\Delta(\nabla\times\mathbf{A}) = 0. \tag{2.24}$$

Из (2.21) видно, что первые три слагаемых представляют собой, с точностью до знака, первую вариацию функционала $\Gamma(\Phi)$ по параметру калибровки при калибровочном преобразовании его аргументов, в то время как последнее слагаемое является первой вариацией базового действия. В результате имеем:

$$\delta_\alpha \Gamma(\Phi) = \delta_\alpha S_B(\Phi). \tag{2.25}$$

Поскольку функционал $\Gamma(\Phi)$ представляется в виде:

$$\Gamma(\Phi) = S_B(\Phi) + \bar{\Gamma}(\Phi) \tag{2.26}$$

где $\bar{\Gamma}(\Phi)$ - петлевые вклады, а так же в силу того факта что в схеме MS операции δ_α и L коммутируют получаем:

$$\delta_\alpha L \bar{\Gamma}(\Phi) = 0. \tag{2.27}$$

Иными словами вклад контрчленов является калибровочно инвариантным. Отсюда следует, что вклады в действие неинвариантные относительно калибровочного преобразования (2.18) не ренормируются. Данное утверждение эквивалентно тому, что константы ренормировки заряда и параметра фиксирующего калибровку должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$Z_e = Z_A^{-1};\ Z_\xi = Z_A^2, \tag{2.28}$$

а соответствующие им аномальные размерности могут быть однозначно выражены через аномальную размерность магнитного поля. Оставшиеся константы ренормировки вычисляются непосредственно из требования устранения расходимостей в 1-неприводимых функциях Грина $\langle AA \rangle$, $\langle \chi^+ \chi \rangle$,

$\langle\chi^+\chi\chi^+\chi\rangle$. Однопетлевые вычисления дают:

$$Z_A^2 = 1 - \frac{e^2 n(n-1)}{6\varepsilon}; \quad Z_\chi^2 = 1 - \frac{e^2(3-\xi)}{\varepsilon}; \tag{2.29}$$

$$Z_\chi^2 Z_{g_1} = 1 + \frac{n^2-n+8}{4} g_1 + (n-1) g_2 + \frac{3}{4}\frac{g_2^2}{g_1} - \frac{2e^2\xi}{\varepsilon} + \frac{12e^4}{g_1\varepsilon}; \tag{2.30}$$

$$Z_\chi^2 Z_{g_2} = 1 + 3g_1 + \frac{2n-5}{4} g_2 - \frac{2e^2\xi}{\varepsilon}. \tag{2.31}$$

Для удобства здесь и далее была сделана замена: $g_{1,2} \to g_{1,2}/(16\pi^2)$, $e^2 \to e^2/(16\pi^2)$.

2.1.3. РГ функции и фиксированные точки

РГ функции модели в рамках схемы MS определяются стандартными соотношениями (1.21), (1.26). Отсюда, а так же из явных выражений (2.29)-(2.31) и соотношений (2.28) получаем:

$$\gamma_A = -\gamma_e = \frac{1}{2}\gamma_\xi = \frac{e^2 n(n-1)}{6}; \tag{2.32}$$

$$\gamma_\chi = -e^2(3-\xi); \tag{2.33}$$

$$\beta_{g_1} = -2\varepsilon g_1 + \frac{n^2-n+8}{2} g_1^2 + 2(n-1) g_1 g_2 + \frac{3}{2} g_2^2 - 12e^2 g_1 + 24e^4; \tag{2.34}$$

$$\beta_{g_2} = -2\varepsilon g_2 + 6 g_1 g_2 + \frac{2n-5}{2} g_2^2 - 12e^2 g_2; \tag{2.35}$$

$$\beta_e = -\varepsilon e + \frac{e^3 n(n-1)}{6}. \tag{2.36}$$

Анализ выражений (2.34)–(2.36) обнаруживает два набора фиксированных точек, соответствующих тривиальному (равному нулю) и нетривиальному значению e_*. В оба набора входит по четыре фиксированных точки.

Первый набор полностью совпадает с набором фиксированных точек модели (2.4). Все они были найдены и описаны в работе [18]. Для полноты изложения приведем явные выражения для точек из этого набора. В него входят следующие точки. Тривиальная точка:

$$g_1^* = 0; \quad g_2^* = 0, \tag{2.37}$$

которая всегда является ИК отталкивающей. Точка:

$$g_1^* = \frac{4\varepsilon}{8 - n + n^2}; \quad g_2^* = 0, \tag{2.38}$$

которая является ИК притягивающей для $n = 2$, и седловидной точкой для любого $n > 2$. А так же две точки с обеими незануляющимися координатами:

$$g_1^* = \frac{2\left(77 + 8n - 4n^2 \pm \sqrt{(-5+2n)^2\,(49 + 16n - 8n^2)}\right)\varepsilon}{392 + 151n - 19n^2 - 24n^3 + 4n^4};$$

$$g_2^* = \frac{4\left(14 - 15n - 7n^2 + 2n^3 \mp 6\sqrt{(49 + 16n - 8n^2)}\right)\varepsilon}{392 + 151n - 19n^2 - 24n^3 + 4n^4}. \tag{2.39}$$

Однако, они являются вещественными только в случае $n = 2$, при котором они либо ИК нестабильны либо лежат вне физической области параметров, что означает что они не могут быть достигнуты РГ потоками.

Второй набор фиксированных точек является оригинальным результатом данной работы. Набор соответствует нетривиальному значению e_*, равному:

$$e_*^2 = \frac{6\varepsilon}{n(n-1)}, \tag{2.40}$$

и состоит из четырех фиксированных точек двух типов. Две точки с координатами:

$$g_1^* = \frac{-2\varepsilon(2n-11)(2n+7)(n^2-n+36) \pm \varepsilon\sqrt{-(2n-5)^2 C_n}}{n(n-1)(4n^4 - 24n^3 - 19n^2 + 151n + 392)}, \tag{2.41}$$

$$g_2^* = \frac{4\varepsilon(2+n)(n^2-n+36)(2n^2-11n+7) \mp 6\varepsilon\sqrt{-(2n-5)^2 C_n}}{n(n-1)(4n^4 - 24n^3 - 19n^2 + 151n + 392)}, \tag{2.42}$$

где введено обозначение:

$$C_n = 8n^6 - 32n^5 + 2295n^4 - 12014n^3 - 265n^2 + 48024n + 105840. \quad (2.43)$$

Для любого $n > 1$ они имеют нетривиальную мнимую часть и не могут быть достигнуты РГ потоками. Оставшиеся две точки имеют координаты:

$$g_1^* = \frac{2\left(n^2 - n + 36 \pm \sqrt{E_n}\right)\epsilon}{n(n-1)\left(n^2 - n + 8\right)},$$

$$g_2^* = 0, \quad (2.44)$$

где введено обозначение:

$$E_n = n^4 - 2n^3 - 359n^2 + 360n - 2160. \quad (2.45)$$

Они являются вещественными для $n > 19$, но при этом оказываются седловидными точками. Собственные числа матрицы производных (1.44), определющие их тип ИК устойчивости даются выражениями:

$$\omega_1 = -\frac{2\varepsilon\left((n^2 - n + 36)(n^2 - n + 2) \mp 6\sqrt{E_n}\right)}{n(n-1)\left(n^2 - n + 8\right)}, \quad (2.46)$$

$$\omega_2 = \pm\frac{2\varepsilon\sqrt{E_n}}{n(n-1)}, \quad \omega_e = 2\varepsilon. \quad (2.47)$$

Собственное число ω_1 является отрицательным для любого значения n, в то время как знак ω_2 совпадает со знаком перед квадратным корнем в (2.44).

2.1.4. Критический режим

Учет взаимодействия с магнитным полем в однопетлевом приближении приводит к появлению четырех дополнительных фиксированных точек с нетривиальной координатой e_*. Две из них имеют вещественные координаты при $n > 19$. Тем не менее обе они оказываются седловидными точками. Это означает, что взаимодействие с магнитным полем не меняет качественную картину полученную в работах [18, 32].

Более того, в рамках ε-разложения коэффициент при каждой следующей степени ε будет линейно выражаться через уже вычисленные коэффициенты, поэтому в рамках такого подхода непосредственный учет старших порядков теории возмущений не может привести к появлению новых нетривиальных фиксированных точек с вещественными координатами для $n \leq 19$.

С другой стороны в случае $O(n)$-симметричной векторной модели различные попытки пересуммирования двухпетлевых выражений для РГ функций основанные на построении Паде аппроксимант [40] показывают, что присутсвие фиксированной точки с ненулевым значением эффективного электрического заряда возможно даже для случая $n = 2$. В связи с этим, для того чтобы окончательно установить факт наличия или отсутствия фиксированных точек с ненулевым значением эффективного заряда для малых n в модели (2.5) изучаемой в данном разделе, требуется вычисление старших вкладов теории возмущений и применение различных процедур перессумирования. Эта задача остается открытой для дальнейшего исследования.

Еще одним интересным результатом является то, что аномальная размерность γ_χ оказываются калибровочно зависимой (2.33). В результате калибровочно зависимым оказывается и критический показатель $\eta = 2\gamma_\chi^*$ для случая заряженной фиксированной точки. Это неудивительно, потому что именно такая ситуация имеет место и в случае векторного параметра порядка [35]. В то же время перенормировка параметра ξ приводит к тому, что его РГ поток должен удовлетворять уравнению :

$$D_s\bar{\xi} = \bar{\xi}\gamma_\xi. \tag{2.48}$$

Видно что калибровка $\xi = 0$ является фиксированной точкой данного уравнения. Это в свою очередь означает, что данная калибровка является инвариантной по отношению к процедуре ренормировки.

2.2. O(n)-симметричная модель

2.2.1. Формулировка модели

Действие (2.4) не допускает разделения на две независимые части $S = S_{RE} + S_{IM}$, в одну из которых входили бы только чисто вещественные, а в другую чисто мнимые части полей χ, χ^+. Как следствие, модель, роль параметра порядка в которой играет вещественное антисимметричное тензорное поле $\phi = \phi_{ik}(\boldsymbol{x})$ второго ранга ($\phi_{ik} = -\phi_{ki}, i, k = 1, ..., n$), является независимой и требует отдельного рассмотрения.

При переходе к чисто вещественному параметру порядка требование инвариантности функционала действия относительно группы преобразований $U(n)$ естественным образом переходит в требование $O(n)$-симметричности: действие такой модели должно быть инвариантно относительно преобразования $\phi \to \mathcal{O}\phi\mathcal{O}^\dagger$, где $\mathcal{O} \in O(n)$ ортогональные матрицы.

Общий вид функционала действия, описывающего поведение такой модели в окрестности точки фазового перехода дается выражением:

$$S(\phi) = \frac{1}{2}tr(\phi(-\partial^2 + m_0^2)\phi) - \frac{g_{10}}{4!}(tr(\phi^2))^2 - \frac{g_{20}}{4!}tr(\phi^4). \tag{2.49}$$

Здесь m_0^2 обозначает отклонение температуры (или ее аналога) от критического значения, а g_{10}, g_{20} – константы взаимодействия.

Заметим, что вклады старших степеней поля являются ИК несущественными, а кубический по полю член не возникает из-за антисимметричности поля ϕ_{ik}. В силу последнего, можно заключить, что прямое применение теории Ландау предсказывает для данной модели возможность фазового перехода второго рода.

Полученная модель формально близка и может иметь отношение к моделям, описывающим переходы между нематической, холестерической и голубой фазами жидких кристаллов [41–46], а так же переход в диссиметричную фазу в ферроэластиках [47–51].

В случаях $n = 2$ и $n = 3$ модель сводится к однозарядным скалярной и $O(3)$-симметричной векторным моделям ϕ^4 соответственно. Эквивалентность вытекает из свойства антисимметрии поля ϕ_{ik} и может быть установлена с помощью замены $\phi_{ik} = \varepsilon_{ik}\phi$ для $n = 2$ и $\phi_{ik} = \varepsilon_{ikl}\phi_l$ для $n = 3$; здесь ε_{ik} и ε_{ikl} – полностью антисимметричные тензора.

Требование стабильности модели приводит к следующим ограничениям на значения, которые могут принимать константы взаимодействия в случае четных и нечетных значений n соответственно:

$$2g_{10} + g_{20} > 0, \quad ng_{10} + g_{20} > 0; \tag{2.50}$$

$$2g_{10} + g_{20} > 0, \quad (n-1)g_{10} + g_{20} > 0. \tag{2.51}$$

По виду действия (2.49) определяются правила Фейнмана для построения соответствующей диаграмной техники. Свободный пропагатор в импульсном представлении имеет вид:

$$\langle\phi\phi\rangle_0 = \frac{J_{ab;cd}}{(k^2 + \tau_0)}. \tag{2.52}$$

Здесь тензор $J_{ab;cd}$ определяется соотношением:

$$J_{ab;cd} = \frac{1}{2}(\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc}), \tag{2.53}$$

и играет роль единичной операции на множестве антисимметричных тензоров в том смысле, что $J_{ik;lm}\phi_{lm} = \phi_{ik}$ и $J_{ik;lm}J_{lm;ef} = J_{ik;ef}$.

Тензорная природа поля ϕ_{ik}, а так же структура взаимодействия в (2.49) приводят к следующей структуре вершинных множителей:

$$\langle\phi\phi\phi\phi\rangle_0 = -g_{10}V^{(1)}_{ab;cd;ef;mn} - g_{20}V^{(2)}_{ab;cd;ef;mn}. \tag{2.54}$$

Соответствующие тензорные структуры определяются так, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{aligned} &V^{(1)}_{ab;cd;ef;mn}\phi_{ab}\phi_{cd}\phi_{ef}\phi_{mn} = (tr(\phi^2))^2, \\ &V^{(2)}_{ab;cd;ef;mn}\phi_{ab}\phi_{cd}\phi_{ef}\phi_{mn} = tr(\phi^4), \end{aligned}$$

и могут быть явно выражены с помощью тензора $J_{ab;cd}$:

$$V^{(1)}_{ab;cd;ef;mn} = \frac{1}{3}(J_{ab;cd}J_{ef;mn} + J_{ab;ef}J_{cd;mn} + J_{ab;mn}J_{cd;ef}), \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned} V^{(2)}_{ab;cd;ef;mn} = \frac{1}{6}\Big(&J_{ab;ij}J_{cd;jk}J_{ef;kp}J_{mn;pi} + J_{ab;ij}J_{cd;jk}J_{mn;kp}J_{ef;pi} + \\ &+J_{ab;ij}J_{ef;jk}J_{mn;kp}J_{cd;pi} + J_{ab;ij}J_{ef;jk}J_{cd;kp}J_{mn;pi} + \\ &+J_{ab;ij}J_{mn;jk}J_{ef;kp}J_{cd;pi} + J_{ab;ij}J_{mn;jk}J_{cd;kp}J_{ef;pi}\Big). \end{aligned} \tag{2.56}$$

Таким образом любая диаграмма рассматриваемой модели представляется в виде произведения двух частей: соответствующей диаграммы скалярной модели ϕ^4 и дополнительного множителя, который возникает как результат свертки тензорных частей пропагаторов и вершинных множителей, и представляет собой полином по параметру n, задающему число компонент поля.

Отметим также, что модель с дополнительным соотношением $g_2 = 0$ является замкнутой по отношению к процедуре ренормировки. В случае $n = 4$ то же можно сказать и про модель с дополнительным соотношением $4g_1 + 3g_2 = 0$. Следствием этого является тот факт, что для координат неподвижных точек, обозначаемых в дальнейшем как **A** и **C** соотношения $g_{2*} = 0$ и $4g_{1*} + 3g_{2*} = 0$ соответственно, должны выполняться точно, а по отношению к соответствующим однозарядным моделям эти точки должны быть ИК притягивающими. Данный факт можно использовать для дополнительной проверки полученных в данной работе результатов. Кроме того, отсюда вытекает утверждение, что РГ потоки не могут пересекать соответствующие этим условиям прямые на плоскости инвариантных зарядов, так как соответствующие комбинации β-функций будут зануляться на этих прямых.

2.2.2. Размерная регуляризация

2.2.2.1. Ультрафиолетовая перенормировка

Таблица 2.2. Канонические размерности полей и параметров в модели (2.49).

F	ϕ	m_0^2	g_{i0}	μ
d_F^k	$(d-2)/2$	2	$4-d$	1

Стандартный анализ симметрий функционала (2.49) и канонических размерностей полей и параметров модели, представленных в таблице 2.2, показывает, что модель является логарифмичной для $d = 4$, а поверхностные УФ расходимости, требующие устранения перенормировкой, содержатся только в двух- и четырехточечных 1-неприводимых функциях Грина. Как следствие, модель является мультипликативно ренормируемой. В рамках размерной регуляризации ренормированное действие может быть получено ренормировкой поля и параметров модели:

$$\phi \to \phi Z_\phi; \quad m_0^2 = m^2 Z_{m^2}; \quad g_{0i} = g_i \mu^\varepsilon Z_{g_i}, \tag{2.57}$$

и имеет вид:

$$S_R(\phi) = \frac{1}{2} tr(\phi(-Z_1 \partial^2 + Z_2 m^2)\phi) - \frac{g_1 \mu^\varepsilon}{4!} Z_3 (tr(\phi^2))^2 - \frac{g_2 \mu^\varepsilon}{4!} Z_4 tr(\phi^4). \tag{2.58}$$

Здесь $g_{1,2}$, m^2 – ренормированные аналоги затравочных параметров, μ – ренормировочная масса, $\varepsilon = 4 - d$ обозначает отклонение размерности пространства от его логарифмического значения. Связь констант ренормировки зарядов и поля с нумерованными константами дается соотношениями:

$$Z_\phi = Z_1^{1/2}, \quad Z_{m^2} = Z_2 Z_1^{-1}, \quad Z_{g_1} = Z_3 Z_1^{-2}, \quad Z_{g_2} = Z_4 Z_1^{-2}. \tag{2.59}$$

Константы Z_i вычисляются из требования сокращения расходимостей непосредственно в функциях Грина, однако в силу их громоздкости ниже приводятся сразу выражения для РГ функций, которые выражаются через эти константы стандартным образом (1.21), (1.26).

2.2.2.2. РГ функции

В рамках схемы минимальных вычитаний РГ функции модели были вычислены с четырехпетлевой точностью. Расчет был выполнен на основе известных значений расходимостей диаграмм скалярной модели ϕ^4, которые в настоящий момент известны с шестипетлевой точностью. В рамках подхода квантовополевой ренормгруппы четырехпетлевые ответы были получены в [52, 53], полный аналитический расчет критических индексов был проведен с использованием методов развитых в [54–56]. Аномальная размерность γ_ϕ, индекс η а также β-функции с пятипетлевой точностью были вычислены в работах [57–63]. Наконец недавно были опубликованы полностью аналитические выражения с шестипетлевой точностью [3, 4]. Непосредственно использовавшиеся при вычислениях значения расходимостей диаграмм в схеме MS были взяты в [4]. Вычисление тензорных сверток было произведено с помощью программы FORM [64, 65].

В рамках подхода ε-разложения, для всех РГ-функций были получены полностью аналитические выражения, однако в силу их громоздкости и того факта, что после применения процедуры пересуммирования значения критических индексов могут быть найдены лишь численно, здесь мы тоже приводим лишь численные значения коэффициентов разложения. Для удобства в этом разделе всюду сделана замена $g_{1,2} \to g_{1,2}/(8\pi^2)$.

$$
\begin{aligned}
\beta_1 = {} & -\varepsilon g_1 + (0.083333n^2 - 0.083333n + 1.333333)g_1^2 + (0.333333n - 0.166666)g_1 g_2 + 0.25g_2^2 + \\
& + (-0.125n^2 + 0.125n - 1.166666)g_1^3 + (-0.611111n + 0.305555)g_1^2 g_2 + (-0.017361n^2 + \\
& + 0.017361n - 0.569444)g_1 g_2^2 + (-0.041666n + 0.020833)g_2^3 + (0.004774n^4 - 0.009548n^3 + \\
& + 0.438509n^2 - 0.433734n + 3.182143)g_1^4 + (0.045717n^3 - 0.068576n^2 + 2.616816n - \\
& - 1.296978)g_1^3 g_2 + (0.000108n^4 - 0.000217n^3 + 0.291803n^2 - 0.291694n + 2.951300)g_1^2 g_2^2 + \\
& + (0.004340n^3 - 0.006510n^2 + 0.549735n - 0.273782)g_1 g_2^3 + (0.011154n^2 - 0.010926n + \\
& + 0.128877)g_2^4 + (0.000010n^6 - 0.000030n^5 - 0.0643234n^4 + 0.128698n^3 - 2.144418n^2 + \\
& + 2.080064n - 12.557898)g_1^5 + (-0.000246n^5 + 0.000614n^4 - 0.623339n^3 + 0.934395n^2 - \\
& - 14.215095n + 6.951835)g_1^4 g_2 + (-0.012994n^4 + 0.025988n^3 - 3.180664n^2 + 3.167670n - \\
& - 18.497684)g_1^3 g_2^2 + (-0.000042n^5 + 0.000106n^4 - 0.125824n^3 + 0.188630n^2 - 6.142543n + \\
& + 3.039837)g_1^2 g_2^3 + (-0.000969n^4 + 0.001937n^3 - 0.339387n^2 + 0.338281n - 2.275556)g_1 g_2^4 + \\
& + (-0.002666n^3 + 0.003963n^2 - 0.151275n + 0.074705)g_2^5 + O(g^6); \qquad (2.60)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\beta_2 = &-\varepsilon g_2 + 2.0 g_1 g_2 + (0.166666n - 0.083333)g_2^2 + (-0.069444n^2 + 0.069444n - 2.277777)g_1^2 g_2 + \\
&+ (-0.611111n + 0.305555)g_1 g_2^2 + (-0.010416n^2 + 0.010416n - 0.208333)g_2^3 + (-0.003761n^4 + \\
&+ 0.007523n^3 + 0.342763n^2 - 0.346524n + 7.540658)g_1^3 g_2 + (-0.010127n^3 + 0.015190n^2 + \\
&+ 3.439114n - 1.722088)g_1^2 g_2^2 + (0.172105n^2 - 0.172105n + 2.055763)g_1 g_2^3 + (0.000940n^3 - \\
&- 0.001524n^2 + 0.136028n - 0.068178)g_2^4 + (0.000173n^6 - 0.000519n^5 - 0.009335n^4 + \\
&+ 0.019536n^3 - 2.212644n^2 + 2.202790n - 34.982149)g_1^4 g_2 + (0.001444n^5 - 0.003609n^4 - \\
&- 0.239656n^3 + 0.363094n^2 - 23.046496n + 11.462612)g_1^3 g_2^2 + (0.003395n^4 - 0.006790n^3 - \\
&- 2.713640n^2 + 2.717035n - 18.023949)g_1^2 g_2^3 + (-0.058531n^3 + 0.087865n^2 - 3.043559n + \\
&+ 1.507386)g_1 g_2^4 + (-0.000168n^4 + 0.000317n^3 - 0.069960n^2 + 0.070323n - 0.454975)g_2^5 + O(g^6);
\end{aligned} \tag{2.61}$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_\phi = \ & (0.003472n^2 - 0.003472n + 0.013888)g_1^2 + (0.013888n - 0.006944)g_1 g_2 + (0.000868n^2 - \\
& - 0.000868n + 0.003472)g_2^2 + (-0.000072n^4 + 0.000144n^3 - 0.001519n^2 + 0.001446n - \\
& - 0.004629)g_1^3 + (-0.000434n^3 + 0.000651n^2 - 0.007161n + 0.003472)g_1^2 g_2 + (-0.001519n^2 + \\
& + 0.001519n - 0.002821)g_1 g_2^2 + (-0.000036n^3 + 0.000054n^2 - 0.000596n + 0.000289)g_2^3 + \\
& + (0.000007n^6 + 0.000023n^5 + 0.000219n^4 - 0.000475n^3 + 0.004340n^2 - 0.004099n + \\
& + 0.012056)g_1^4 + (-0.000060n^5 + 0.000151n^4 + 0.002050n^3 - 0.003225n^2 + 0.025198n - \\
& - 0.012056)g_1^3 g_2 + (-0.000090n^4 + 0.000181n^3 + 0.009087n^2 - 0.009178n + 0.013744)g_1^2 g_2^2 + \\
& + (0.000422n^3 - 0.000633n^2 + 0.006420n - 0.003105)g_1 g_2^3 + (0.000002n^4 - 0.000004n^3 + \\
& + 0.000339n^2 - 0.000337n + 0.000640)g_2^4 + O(g^5). \qquad (2.62)
\end{aligned}
$$

2.2.2.3. Фиксированные точки

Анализ приведенных разложений обнаруживает три нетривиальные фиксированные точки. Для начала приведем для них точные однопетлевые выражения.

Точка с одной ненулевой координатой:

$$g_{1*} = 12\varepsilon/(n^2 - n + 16), \quad g_{2*} = 0 \tag{2.63}$$

является вещественной при любом положительном значении n. В дальнейшем будем обозначать эту точку как **A**. На однопетлевом уровне данная точка является седловидной для любого значения параметра n с собственными числами $\omega_1 = \varepsilon$ и $\omega_2 = -\varepsilon(n^2 - n - 8)/(n^2 - n + 16)$.

Так же обнаруживаются две фиксированные точки:

$$\begin{aligned} g_{1*} &= -6\varepsilon\frac{(4n^2 - 4n - 143) \pm (2n-1)\sqrt{(-8n^2 + 8n + 97)}}{(4n^4 - 8n^3 - 123n^2 + 127n + 1696)}, \\ g_{2*} &= 12\varepsilon\frac{(2n-1)(n^2 - n - 20) \pm 12\sqrt{(-8n^2 + 8n + 97)}}{(4n^4 - 8n^3 - 123n^2 + 127n + 1696)}. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Точку, в координатах которой перед корнем стоит знак плюс будем обозначать как **B**, а точку для которой перед корнем стоит знак минус как **C**. Координаты данных фиксированных точек являются вещественными только при значениях параметра $n \leq 4$. Поскольку при $n = 2, 3$ рассматриваемая модель сводится к однозарядной, то единственным нетривиальным случаем требующим рассмотрения оказывается случай $n = 4$. В этом случае на однопетлевом уровне точка **B** является ИК притягивающей $\omega_1 = \varepsilon$, $\omega_2 = \varepsilon/17$, а точка **C** седловидной $\omega_1 = \varepsilon$, $\omega_2 = -\varepsilon/11$.

Поскольку в рамках ε-разложения коэффициент при каждой следующей степени ε будет линейно выражаться через уже вычисленные коэффициенты, в рамках такого подхода непосредственный учет старших порядков теории возмущений не может привести к появлению новых нетривиальных фиксированных точек с вещественными координатами для $n > 4$. Это означает, что в данном случае ИК-притягивающие точки в модели отсутствуют, а РГ-потоки уходят либо на бесконечность, либо в нефизическую область. Таким образом, в рамках теории возмущений учет влияния флуктуаций в окрестности критической точки приводит к смене природы фазового перехода с перехода второго рода, предсказываемого теорией Ландау, на переход первого рода.

В случае $n = 4$ по известным разложениям РГ функций, координаты обнаруженных фиксированных точек и соответствующие им критические индексы вычисляются в форме ε-разложения с точностью до $O(\varepsilon^5)$. Ниже приводятся данные разложения для каждой из трех фиксированных точек.

Точка **A**:

$$\begin{aligned}
g_1 &= 0.428571\varepsilon + 0.209912\varepsilon^2 - 0.100507\varepsilon^3 + 0.178258\varepsilon^4 \\
g_2 &= 0 \\
\omega_1 &= \varepsilon - 0.489795\varepsilon^2 + 0.948832\varepsilon^3 - 2.521871\varepsilon^4 \\
\omega_2 &= -0.142858\varepsilon - 0.151603\varepsilon^2 + 0.117489\varepsilon^3 - 0.331731\varepsilon^4 \\
\eta &= 0.020408\varepsilon^2 + 0.014889\varepsilon^3 - 0.006576\varepsilon^4 \qquad (2.65)
\end{aligned}$$

Точка **B**:

$$\begin{aligned}
g_1 &= 0.705882\varepsilon + 0.818237\varepsilon^2 - 0.310641\varepsilon^3 + 0.626898\varepsilon^4 \\
g_2 &= -0.705882\varepsilon - 1.69021\varepsilon^2 + 0.205344\varepsilon^3 - 1.294462\varepsilon^4 \\
\omega_1 &= \varepsilon - 0.541522\varepsilon^2 + 1.019739\varepsilon^3 - 2.619199\varepsilon^4 \\
\omega_2 &= 0.058823\varepsilon - 0.106554\varepsilon^2 - 0.195408\varepsilon^3 + 0.040578\varepsilon^4 \\
\eta &= 0.020761\varepsilon^2 + 0.017295\varepsilon^3 - 0.003487\varepsilon^4, \qquad (2.66)
\end{aligned}$$

Точка **C**:

$$\begin{aligned}
g_1 &= 0.818182\varepsilon + 0.466567\varepsilon^2 - 0.258762\varepsilon^3 + 0.484615\varepsilon^4 \\
g_2 &= -1.09091\varepsilon - 0.622089\varepsilon^2 + 0.345019\varepsilon^3 - 0.646153\varepsilon^4 \\
\omega_1 &= \varepsilon - 0.570248\varepsilon^2 + 1.28289\varepsilon^3 - 3.78111\varepsilon^4 \\
\omega_2 &= -0.090909\varepsilon + 0.311796\varepsilon^2 - 0.230143\varepsilon^3 + 0.587198\varepsilon^4 \\
\eta &= 0.020661\varepsilon^2 + 0.018398\varepsilon^3 - 0.00744947\varepsilon^4 \qquad (2.67)
\end{aligned}$$

2.2.2.4. Асимптотика высоких порядков

Ряды теории возмущений по константе связи для функций Грина, а как следствие ряды для РГ функций и ряды по ε для критических индексов, могут не являться сходящимися [66–68]. В частности, именно такая ситуация реализуется, например, для $O(n)$-симметричной векторной модели ϕ^4, асимптотические свойства рядов в которой достаточно хорошо изучены [53, 69]. В подобном случае, численные значения критических индексов не могут быть получены путем прямого суммирования членов ряда при конкретном значении параметра ε. Вместо этого, для придания смысла подобным выражениям, должна быть использована процедура пересуммирования асимптотического ряда [8, 70].

Для того, чтобы однозначно ответить на вопрос о характере поведения рядов теории возмущения изучаемой модели, необходимо исследовать асимптотическое поведение их коэффициентов в разложениях по паре зарядов $g_{1,2}$. При проведении данного анализа, мы следуем работе [32, 71], в которой рассматривается модель (2.4) с комплексным параметром порядка.

Заметим, что в действительности, нас интересует поведение разложения не по каждому заряду в отдельности, а лишь по числу петель [8, 72]. Таким образом, мы можем сделать переобозначение $g_i \to zg_i$, и исследовать поведение рядов по степеням параметра z.

По определению, ренормированные функции Грина рассматриваемой модели могут быть записаны в следующем виде:

$$G_k(z, x_1, \ldots, x_k) = C^{-1} \int D\phi \; \phi(x_1) \ldots \phi(x_k) e^{S_R} \tag{2.68}$$

$$C = \int D\phi \; e^{S_R}$$

где S_R - действие (2.58). N-й коэффициент разложения такой функции Грина по параметру z представляется в интегральном виде с помощью формулы Коши:

$$G_k^N(x_1, \ldots, x_k) = \oint_\gamma dz \; \frac{G_k(z, x_1, \ldots, x_k)}{(-z)^{N+1}} \tag{2.69}$$

где γ - контур вокруг нуля.

После подстановки (2.69) в (2.68) получаем для N-го коэффициента разложения выражение:

$$G_k^N(x_1, \ldots, x_k) = C^{-1} \int D\phi \; dz \; \phi(x_1) \ldots \phi(x_k) e^{S-(N+1)\ln(-z)}, \tag{2.70}$$

асимптотика которого может быть найдена с помощью метода перевала [66–68, 71]. Для того, чтобы воспользоваться им, сделаем растяжение полей $\phi \to \sqrt{N}\phi$ и зарядов $g_i \to g_i/(N\mu^\varepsilon)$, после осуществления которого, в показателе экспоненты собирается функционал $N(S - \ln(-z))$. Точка стационарности данного функционала в пространстве поля и параметра z и определяет искомую асимптотику.

Соответствующие уравнения стационарности имеют вид:

$$-\partial^2\phi_{st} - \frac{z_{st}g_1}{3!}\phi_{st}tr(\phi_{st}^2) - \frac{z_{st}g_2}{3!}\phi_{st}\phi_{st}\phi_{st} = 0 \tag{2.71}$$

$$\int d\mathbf{x}\{\frac{z_{st}g_1}{4!}(tr(\phi_{st}^2))^2 + \frac{z_{st}g_2}{4!}tr(\phi_{st}^4)\} = -1. \tag{2.72}$$

Поскольку нетривиальный вклад в константы ренормировки Z_i дают лишь старшие степени зарядов, наличие контрчленов в действии приводит лишь к поправкам порядка $1/N$ в решении уравнений стационарности. Как следствие они могут не учитываться при поиске главного члена асимптотики [68].

Без ограничения общности можно считать, что с помощью преобразований $\mathcal{O} \in O(n)$, поля ϕ приведены к блочно-диагональному виду с $p = n/2$ блоками:

$$\phi = \begin{pmatrix} s_1\sigma & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2\sigma & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_p\sigma \end{pmatrix} \tag{2.73}$$

где

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (2.71) сводится к системе из p дифференциальных уравнений на функции $s_i(\mathbf{x})$:

$$-\partial^2 s_i(\mathbf{x}) + \frac{zg_1}{3} s_i(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^{p} s_j^2(\mathbf{x}) + \frac{zg_2}{6} s_i^3(\mathbf{x}) = 0. \tag{2.74}$$

При $d = 4$ решение данной системы может быть найдено в форме:

$$s_i(\mathbf{x}) = \frac{\alpha_i y}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 + y^2}, \tag{2.75}$$

где $\mathbf{x}_0$ и y - произвольные параметры. Подстановка (2.75) в (2.74) приводит к системе алгебраических уравнений на коэффициенты α_i:

$$8\alpha_i + \frac{zg_1}{3} \alpha_i \sum_{j=1}^{p} \alpha_j^2 + \frac{zg_2}{6} \alpha_i^3 = 0. \tag{2.76}$$

Нетривиальными решениями данной системы являются такие наборы коэффициентов $\{\alpha_i\}$, в которых $k = 1, \ldots, p$ коэффициентов задаются выражением:

$$\alpha_k^2 = \frac{-48}{(2kzg_1 + zg_2)}, \tag{2.77}$$

остальные $m = 0, \ldots, p-1$ коэффициентов $\alpha_m = 0$, и при этом выполняется условие $k + m = p$. Таким образом решениями уравнения (2.71) являются инстантоны вида (2.73) содержащие $k = 1, \ldots, p$ ненулевых блоков.

Подставив полученное решение ϕ_{st} в уравнение (2.72) найдем явное выражение для точки стационарности:

$$z_k^{st} = -\frac{4k}{2kg_1 + g_2} \tag{2.78}$$

По известным инстантону и стационарному значению параметра разложения может быть определена асимптотика коэффициентов разложения функций Грина и, как следствие, β-функций рассматриваемой модели [71, 73]. Она будет иметь вид:

$$\beta_i^{(N)}(g_1, g_2) = C_i \cdot N! N^b (-a(g_1, g_2))^N (1 + O(\frac{1}{N})), \tag{2.79}$$

где $b = (n^2 - 2n + 22)/4$, C_i - некоторые константы. Особенностью задачи является тот факт, что $a_k(g_1, g_2) = -1/z_k^{st}$ меняется с изменением $g_{1,2}$ и k. Поэтому главный вклад в асимптотику (2.79) при каждом конкретном значении g_1, g_2 дается наибольшим по модулю значением $a(g_1, g_2) = max_k |a_k(g_1, g_2)|$. Остальные вклады дают лишь экспоненциально малую поправку и должны быть отброшены.

Зная асимптотику коэффициентов β-функции и определения (1.41), (1.42), (1.44) можно показать, что интересующая нас асимптотика коэффициентов ε-разложений координат неподвижных точек, и соответствующих им критических индексов, ведет себя следующим образом:

$$g_{1,2*}^{(N)} = Const \cdot N! N^{b+1} (-a(g_{1*}^{(1)}, g_{2*}^{(1)}))^N (1 + O(\frac{1}{N})) \tag{2.80}$$

$$\omega_{1,2}^{(N)} = Const \cdot N! N^{b+1} (-a(g_{1*}^{(1)}, g_{2*}^{(1)}))^N (1 + O(\frac{1}{N})) \tag{2.81}$$

$$\eta^{(N)} = Const \cdot N! N^{b} (-a(g_{1*}^{(1)}, g_{2*}^{(1)}))^N (1 + O(\frac{1}{N})) \tag{2.82}$$

где $g_{1,2*}^{(1)}$ - однопетлевые значения координат неподвижных точек (вклады старших порядков теории возмущений дают лишь поправки порядка $1/N$).

Полученные результаты показывают, что ряды ε-разложений являются асимптотическими, поэтому для получения численного значения критических индексов в настоящей работе использовалось пересуммирование методом конформного преобразования Бореля, содержание которого описано в следующем пункте.

2.2.2.5. Пересуммирование методом конформного Бореля

Приведем здесь краткое изложение техники пересуммирования методом конформного Бореля. Для подробного изложения см. например [8].

Рассмотрим некую функцию $f(z)$ задаваемую в виде степенного ряда по переменной z с известными коэффициентами:

$$f(z) = \sum_{N\geq 0} f_N z^N. \tag{2.83}$$

Преобразование Бореля-Лероя сопоставляет ей функцию $F(z)$, называемую борелевским образом функции $f(z)$ и определяемую следующим образом [2]:

$$F(t) = \sum_{N\geq 0} F_N t^N = \sum_{N\geq 0} \frac{f_N}{\Gamma(N+b_0+1)}\, t^N, \tag{2.84}$$

где Γ(x) - гамма-функция Эйлера, а b_0 - произвольный параметр. Обратное преобразование определяется как:

$$f^{res}(z) = \int_0^\infty dt\ e^{-t} t^{b_o} F(zt). \tag{2.85}$$

В случае, если ряд функции $f(z)$ является равномерно сходящимся, функция $f^{res}(z) = f(z)$ совпадает с исходной. Однако, в данном случае, нас интересует ситуация, когда ряд (2.83) является асимптотическим и его коэффициенты при $N \to \infty$ ведут себя как $f_N \sim N! N^b (-a)^N (1 + O(\frac{1}{N}))$. В таком случае ряд (2.84) сходится в круге радиусом $1/a$, так как его коэффициенты $F_N \sim (-a)^N N^{b-b_0} (1 + O(\frac{1}{N}))$ при $N \to \infty$. Это означает, что функция $F(z)$ является аналитичной в этом круге и, как следствие, допускает аналитическое продолжение, необходимое для придания смысла выражению (2.85).

Для построения искомого продолжения, можно совершить конформное отображение плоскости, которое переведет область интегрирования в (2.85) внутрь области аналитичности функции $F(z)$. Функцию, осуществляющую подобное отображение, выберем в виде:

$$u(t) = \frac{\sqrt{1+at}-1}{\sqrt{1+at}+1} \quad \Leftrightarrow \quad t(u) = \frac{4u}{a(u-1)^2}. \tag{2.86}$$

При таком выборе ряд (2.84) может быть переразложен по переменной u:

$$F(t) = \sum_{N\geq 0} F_N t^N = \sum_{N\geq 0} \widetilde{F}_N u(t)^N \tag{2.87}$$

в силу того факта, что $u(z) \to 0$ при $z \to 0$. После осуществления описанной процедуры обратное преобразование (2.85) приобретает смысл, и может быть записано как:

$$f^{res}(z) = \sum_{N\geq 0} \widetilde{F}_N \int_0^\infty dt\ e^{-t} t^{b_o} u(zt)^N. \tag{2.88}$$

Для ускорения сходимости получившегося ряда произвольный параметр пересуммирования b_0 принято [53, 74] фиксировать условием $b_0 = b + 3/2$.

Используя формулу (2.88) и зная параметры асимптотики ε-разложений (2.80)-(2.82) можно получить пересуммированные значения координат неподвижных точек и соответствующих им критических индексов.

2.2.2.6. Критические режимы

В таблице 2.3 приведены численные значения координат фиксированных точек и соответствующих им критических индексов, полученные путем суммирования ε-разложений (2.65)-(2.67) методом конформного Бореля для физически интресных размерностей пространства $d = 2, 3$. Видно, что в обоих случаях все три фиксированные точки удовлетворяют соотношениям (2.50)-(2.51) и, следовательно, лежат в физической области параметров. При этом точки **A** и **C**, как и ожидалось, лежат на прямых

Таблица 2.3. Критические индексы, полученные пересуммированием ε-разложений методом конформного Бореля при $n = 4$

Индекс	Точка **A**		Точка **B**		Точка **C**	
	d=3	d=2	d=3	d=2	d=3	d=2
g_1	0.542	1.102	1.145	2.401	1.027	2.019
g_2	0	0	-1.747	-3.954	-1.369	-2.692
ω_1	0.781	1.347	0.755	1.277	0.762	1.298
ω_2	-0.226	-0.487	-0.055	-0.198	0.077	0.245
η	0.018	0.052	0.017	0.045	0.017	0.114

$g_{2*} = 0$ и $4g_{1*} + 3g_{2*} = 0$ и являются ИК притягивающими по отношению в соответствующим однозарядным моделям.

С точки зрения полной двухзарядной модели точки **A** и **B** являются седловидными, так как соответствующие им индексы ω_1 и ω_2 имеют разный знак, в то время как точка **C** является ИК-притягивающей для обеих размерностей пространства. Последнее означает что при $n = 4$ в модели возможен фазовый переход второго рода, в окрестности которого все функции Грина модели проявляют скейлинговое поведение, критические показатели которого (например η в случае парного коррелятора (1.41)) определяются координатами фиксированной точки **C**.

В итоге, поведение модели качественно изменяется в сравнении с результатами главного (однопетлевого) приближения, в рамках которого точка **C** являлась седловидной, а асимптотические свойства функций Грина задавались ИК притягивающей точкой **B**. Таким образом учет четырехпетлевых поправок и асимптотического характера рядов теории возмущений оставляет в модели возможность фазового перехода второго рода, но приводит к “смене ролей” нетривиальных фиксированных точек в сравнении с однопетлевым приближением.

2.2.3. Ренормировка в фиксированной размерности пространства

2.2.3.1. Ультрафиолетовая перенормировка

Для того, чтобы убедится в достоверности результатов, полученных в рамках пересуммирования ε-разложений необходимо исследовать чувствительность поведения модели по отношению к процедуре пересуммирования, а так же выбору конкретной схемы ренормировки. Для этого РГ функции и критические индексы модели были вычислены в рамках подхода ренормгруппы в фиксированной размерности пространства (“реальном пространстве”) и метода псевдо-ε-разложения (τ-разложения). Известно, что τ-разложение является эффективным методом изучения характеристик критического поведения различных систем. Более того, данный подход позволяет получать надежные численные оценки критических индексов путем непосредственного суммирования τ-разложений без применения сложных техник пересуммирования, чувствительных к особенностям асимптотического поведения рядов теории возмущений [5, 6, 27–29, 74–76].

В данном разделе мы будем использовать схему ренормировки, аналогичную используемой в работе [7]. Данная схема формулируется иначе нежели стандартный подход используемый, например, в работах [5, 6, 27]. Тем не менее, она приводит в точности к таким же константам ренормировки. При этом преимуществом подхода [7] является введение ренормировочной массы в ренормированное действие. Ее присутствие в качестве произвольного параметра позволяет вместо уравнения Калана-Симанчика использовать стандартное уравнение ренормгруппы (1.24), которое выводится стандартным образом (см. раздел 1.4).

В рамках используемого подхода, ренормированное действие модели (2.49) имеет вид:

$$S_R(\phi) = \frac{1}{2}tr(\phi(-Z_1\partial^2 + Z_2m^2)\phi) - \frac{g_1\mu^{(4-d)}}{4!}Z_3(tr(\phi^2))^2 - \frac{g_2\mu^{(4-d)}}{4!}Z_4 tr(\phi^4). \tag{2.89}$$

Оно так же может быть получено в результате мультипликативной перенормировки полей и параметров модели, аналогичной (2.57). При этом связь констант ренормировки параметров и поля с нумерованными константами дается соотношениями (2.59). Нумерованные константы ренормировки вычисляются непосредственно в физических размерностях пространства $d = 2, 3$ исходя из следующих нормировочных условий на двух- и четырехточечные 1-неприводимые функции Грина:

$$\Gamma_2^R|_{p=0,m=\mu} = -m^2; \quad \Gamma_2^R|_{p=0,m=\mu} = 0; \quad \partial_{p^2}\Gamma_2^R|_{p=0,m=\mu} = -1;$$
$$\Gamma_4^R|_{p=0,m=\mu} = -g_1V^{(1)}m^{(4-d)} - g_2V^{(2)}m^{(4-d)}. \tag{2.90}$$

Здесь $V^{(1)}$ и $V^{(2)}$ - тензорные структуры (2.55), (2.56).

В силу того, что константы ренормировки Z_i безразмерны, они могут зависеть только от безразмерных параметров: констант связи g_i и соотношения μ^2/m^2. Однако, в выбранной нами точке ренормировки $\mu^2/m^2 = 1$. В итоге ренормировочные константы, получаемые в рамках такой схемы, так же как и в схеме MS зависят только от ренормированных зарядов.

Как уже было сказано уравнение ренормгруппы и входящие в него РГ функции в рамках такого подхода определяются стандартным образом. Выражения связывающие РГ функции и ренормировочные константы получаются в результате решения системы уравнений (1.21) относительно РГ функций, и принимают более сложный вид чем в схеме MS:

$$\beta_{g_1} = \frac{(4-d)g_1(D_{g_2}lnZ_{g_1} - D_{g_2}lnZ_{g_2} - 1)}{1 + D_{g_1}lnZ_{g_1} - D_{g_1}lnZ_{g_2}D_{g_2}lnZ_{g_1} + D_{g_2}lnZ_{g_2} + D_{g_1}lnZ_{g_1}D_{g_2}lnZ_{g_2}}, \tag{2.91}$$

$$\beta_{g_2} = \frac{(4-d)g_2(D_{g_1}lnZ_{g_2} - D_{g_1}lnZ_{g_1} - 1)}{1 + D_{g_1}lnZ_{g_1} - D_{g_1}lnZ_{g_2}D_{g_2}lnZ_{g_1} + D_{g_2}lnZ_{g_2} + D_{g_1}lnZ_{g_1}D_{g_2}lnZ_{g_2}}, \tag{2.92}$$

$$\gamma_a = (\beta_{g_1}\partial_{g_1} + \beta_{g_2}\partial_{g_2})lnZ_a. \tag{2.93}$$

2.2.3.2. РГ функции и фиксированные точки

В рамках подхода ренормгруппы в фиксированной размерности пространства РГ функции были вычислены с четырехпетлевой точностью. Расчет был выполнен на основе известных значений диаграмм скалярной модели, которые к настоящему моменту вычислены с шестипетлевой точностью. Для размерности пространства $d = 3$ значения диаграмм были вычислены в работах [5, 6]. Там же были с четырех петлевой точностью вычислены интегралы для размерности $d = 2$. Пяти петлевые ответы в данной размерности были получены в работе [27]. Наконец недавно были опубликованы результаты вычисления критического индекса η с шестипетлевой точностью [7]. Непосредственно использовавшиеся при вычислениях значения диаграмм были взяты в [5] для случая $d = 3$ и в [7] для $d = 2$.

Для каждого коэффициента указана погрешность вычисления, складывающаяся из погрешности численного расчета интегралов (данные погрешности взяты в тех же работах что и сами значения интегралов), а так же погрешности возникающей при разложении в ряд выражений (2.59) и (2.91)-(2.93).

Случай $\mathbf{d = 3}$. Для случая $d = 3$ были получены следующие выражения для РГ функций. При выполнении расчета для удобства всюду была сделана замена $g_{1,2} \to g_{1,2}/(8\pi^2)$.

$$
\begin{aligned}
\beta_1 = &-g_1 + (n^2/12 - n/12 + 4/3)g_1^2 + (n/3 - 1/6)g_1g_2 + g_2^2/4 + (-0.08436213993(6)n^2 + 0.08436213993(6)n- \\
&- 0.7818930043(5))g_1^3 + (-0.4115226338(3)n + 0.2057613169(1))g_1^2g_2 + (-0.011831275722(9)n^2 + 0.011831275722(9)n- \\
&- 0.3806584363(2))g_1g_2^2 + (-0.02777777778(2)n + 0.013888888892(8))g_2^3 + (0.00156127634(2)n^4 - 0.00312255267(5)n^3+ \\
&+ 0.1287380471(7)n^2 - 0.1271767708(7)n + 0.924260945(4))g_1^4 + (0.0153862924(2)n^3 - 0.0230794387(3)n^2+ \\
&+ 0.769794122(4)n - 0.381050488(2))g_1^3g_2 + (0.000179944793(3)n^4 - 0.000359889586(6)n^3 + 0.0926712819(7)n^2- \\
&- 0.0924913371(7)n + 0.859047421(3))g_1^2g_2^2 + (0.00189311764(2)n^3 - 0.00283967645(2)n^2 + 0.1635575540(8)n- \\
&- 0.0813054976(4))g_1g_2^3 + (0.00344359141(2)n^2 - 0.00341706606(2)n + 0.0378710428(1))g_2^4 + (0.000015012142(8)n^6- \\
&- 0.00004503643(2)n^5 - 0.0068647729(3)n^4 + 0.0138046066(6)n^3 - 0.239365174(4)n^2 + 0.232455365(4)n- \\
&- 1.41374650(2))g_1^5 + (0.00026097260(7)n^5 - 0.0006524315(2)n^4 - 0.069723049(3)n^3 + 0.105237005(4)n^2- \\
&- 1.62785420(2)n + 0.79636585(1))g_1^4g_2 + (-0.0003485776(3)n^4 + 0.0006971552(7)n^3 - 0.374186218(9)n^2+ \\
&+ 0.373837641(9)n - 2.09997585(2))g_1^3g_2^2 + (-0.000020753237(6)n^5 + 0.00005188309(1)n^4 - 0.0132933041(9)n^3+ \\
&+ 0.019888073(1)n^2 - 0.70714326(1)n + 0.350258679(5))g_1^2g_2^3 + (-0.00012825798(2)n^4 + 0.00025651597(3)n^3- \\
&- 0.036161114(1)n^2 + 0.036069722(1)n - 0.264548280(3))g_1g_2^4 + (-0.00023239073(1)n^3 + 0.00035134317(2)n^2- \\
&- 0.0163548664(3)n + 0.0081151008(1))g_2^5 + O(g^6);
\end{aligned}
\tag{2.94}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_2 = & -g_2 + 2g_1g_2 + (n/6 - 1/12)g_2^2 + (-0.04732510289(4)n^2 + 0.04732510289(4)n - 1.5226337452(9))g_1^2g_2 + \\
& + (-0.4115226338(3)n + 0.2057613169(1))g_1g_2^2 + (-0.007201646092(6)n^2 + 0.007201646092(6)n - 0.13991769550(9))g_2^3 + \\
& + (-0.00144804087(1)n^4 + 0.00289608174(2)n^3 + 0.0954359696(6)n^2 - 0.0968840105(6)n + 2.172841831(9))g_1^3g_2 + \\
& + (-0.00521627386(7)n^3 + 0.0078244108(1)n^2 + 0.984543763(4)n - 0.493575950(2))g_1^2g_2^2 + (0.0470027781(4)n^2 - \\
& - 0.0470027781(4)n + 0.591662345(2))g_1g_2^3 + (0.000324177778(5)n^3 - 0.000499529342(9)n^2 + 0.0385699777(2)n - \\
& - 0.0192503638(1))g_2^4 + (-0.000055425590(2)n^6 + 0.000166276771(7)n^5 - 0.0001147718(1)n^4 - 0.0000475843(3)n^3 - \\
& - 0.225369481(5)n^2 + 0.225420986(5)n - 3.88326909(4))g_1^4g_2 + (-0.00029929240(2)n^5 + 0.00074823101(5)n^4 - \\
& - 0.015290257(1)n^3 + 0.022187154(2)n^2 - 2.53195929(3)n + 1.26230673(2))g_1^3g_2^2 + (-0.00041133380(8)n^4 + \\
& + 0.0008226676(2)n^3 - 0.283862584(6)n^2 + 0.283451251(6)n - 2.01558119(2))g_1^2g_2^3 + (-0.0076149632(3)n^3 + \\
& + 0.0114040115(5)n^2 - 0.333321155(5)n + 0.164692320(2))g_1g_2^4 + (-0.000023964475(3)n^4 + 0.000046077689(6)n^3 - \\
& - 0.0082517459(2)n^2 + 0.0082297913(2)n - 0.0524770414(5))g_2^5 + O(g^6); \qquad (2.95)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_\phi = {} & (0.002057613169(3)n^2 - 0.002057613169(3)n + 0.00823045268(1))g_1^2 + (0.00823045268(1)n - \\
& - 0.004115226339(6))g_1 g_2 + (0.0005144032924(7)n^2 - 0.0005144032924(7)n + 0.002057613169(3))g_2^2 + \\
& + (0.0000142847230(8)n^4 - 0.000028569446(2)n^3 + 0.00029997918(2)n^2 - 0.00028569446(2)n + \\
& + 0.00091422227(5))g_1^3 + (0.000085708338(5)n^3 - 0.000128562507(7)n^2 + 0.00141418758(8)n - \\
& - 0.00068566671(4))g_1^2 g_2 + (0.00029997918(2)n^2 - 0.00029997918(2)n + 0.00055710420(3))g_1 g_2^2 + \\
& + (0.0000071423615(4)n^3 - 0.0000107135423(6)n^2 + 0.000117848965(7)n - 0.000057138892(3))g_2^3 + \\
& + (-0.0000002072995(2)n^6 + 0.0000006218985(5)n^5 + 0.000063805756(5)n^4 - 0.000128648009(9)n^3 + \\
& + 0.00095355209(5)n^2 - 0.00088912443(5)n + 0.0025123881(1))g_1^4 + (-0.000001658396(1)n^5 + \\
& + 0.000004145990(4)n^4 + 0.00051873803(3)n^3 - 0.00078225303(5)n^2 + 0.0052858036(3)n - \\
& - 0.0025123881(1))g_1^3 g_2 + (0.000013326068(5)n^4 - 0.000026652137(9)n^3 + 0.0019973667(1)n^2 - \\
& - 0.0019840406(1)n + 0.0027986483(1))g_1^2 g_2^2 + (0.00012719691(1)n^3 - 0.00019079537(1)n^2 + \\
& + 0.00132476769(6)n - 0.00063058462(3))g_1 g_2^3 + (0.0000012108219(1)n^4 - 0.0000024216438(3)n^3 + \\
& + 0.000078634627(5)n^2 - 0.000077423805(4)n + 0.000124477175(5))g_2^4 + O(g^5);
\end{aligned}
\tag{2.96}
$$

По известным разложениям РГ функций, координаты неподвижных точек и соответствующие им критические индексы были вычислены в форме τ-разложения. Для этого в (2.94), (2.95) была осуществлена замена линейного члена $g_{1,2} \to \tau g_{1,2}$. Поскольку нетривиальные фиксированные точки существуют только в случае $n = 4$, в приведенных ниже выражениях сделана соответствующая подстановка.

Точка **A**:

$$
\begin{aligned}
g_1 &= 3\tau/7 + 0.14123744739(8)\tau^2 + 0.0028401462(5)\tau^3 + 0.002766042(2)\tau^4 \\
g_2 &= 0 \\
\omega_1 &= \tau - 0.3295540439(2)\tau^2 + 0.203957720(2)\tau^3 - 0.14724061(1)\tau^4 \\
\omega_2 &= -\tau/7 - 0.1015009178(3)\tau^2 - 0.001257930(1)\tau^3 - 0.023150649(5)\tau^4 \\
\eta &= 0.01209372638(2)\tau^2 + 0.00897858313(6)\tau^3 + 0.0039610404(1)\tau^4
\end{aligned}
\tag{2.97}
$$

Точка **B**:

$$
\begin{aligned}
g_1 &= 12\tau/17 + 0.547662664(6)\tau^2 + 0.12756358(7)\tau^3 - 0.0454560(6)\tau^4 \\
g_2 &= -12\tau/17 - 1.12897754(2)\tau^2 - 0.5123020(2)\tau^3 - 0.049290(2)\tau^4 \\
\omega_1 &= \tau - 0.364090734(1)\tau^2 + 0.18381798(3)\tau^3 - 0.1183773(4)\tau^4 \\
\omega_2 &= \tau/17 - 0.070855101(6)\tau^2 - 0.12603407(9)\tau^3 - 0.0644756(9)\tau^4 \\
\eta &= 0.01230296040(7)\tau^2 + 0.0099837290(5)\tau^3 + 0.005667051(3)\tau^4
\end{aligned}
\tag{2.98}
$$

Точка **C**:

$$
\begin{aligned}
g_1 &= 9\tau/11 + 0.313548710(9)\tau^2 + 0.0088184(1)\tau^3 + 0.007838(2)\tau^4 \\
g_2 &= -12\tau/11 - 0.41806495(3)\tau^2 - 0.0117578(5)\tau^3 - 0.010450(5)\tau^4 \\
\omega_1 &= \tau - 0.383226201(2)\tau^2 + 0.27216859(6)\tau^3 - 0.224951(1)\tau^4 \qquad (2.99) \\
\omega_2 &= -\tau/11 + 0.20758550(1)\tau^2 + 0.0090241(2)\tau^3 + 0.031832(2)\tau^4 \\
\eta &= 0.0122436486(1)\tau^2 + 0.010404174(1)\tau^3 + 0.005026654(6)\tau^4
\end{aligned}
$$

Случай $\mathbf{d = 2}$. Для случая $d = 2$ были получены следующие выражения для РГ функций. При выполнении расчета для удобства всюду была сделана замена $g_{1,2} \to g_{1,2}/(2\pi)$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\beta_1}{2} &= -g_1 + (0.0833333n^2 - 0.0833333n + 1.33333)g_1^2 + (0.333333n - 0.166667)g_1 g_2 + 0.25g_2^2 + (-0.1435418131392(6)n^2+ \\
&+ 0.1435418131392(6)n - 1.324307020281(5))g_1^3 + (-0.699190547177(3)n + 0.349595273589(1))g_1^2 g_2+ \\
&+ (-0.02025754145721(9)n^2 + 0.02025754145721(9)n - 0.643634991622(2))g_1 g_2^2 + (-0.0468837354827(2)n+ \\
&+ 0.02344186774137(8))g_2^3 + (0.0057873564(4)n^4 - 0.0115747128(7)n^3 + 0.35104629(1)n^2 - 0.34525893(1)n+ \\
&+ 2.42766946(8))g_1^4 + (0.050538566(3)n^3 - 0.075807848(4)n^2 + 2.03655928(7)n - 1.00564500(4))g_1^3 g_2+ \\
&+ (0.00045568608(3)n^4 - 0.00091137215(6)n^3 + 0.25955822(1)n^2 - 0.25910254(1)n + 2.23028686(7))g_1^2 g_2^2+ \\
&+ (0.0048333765(2)n^3 - 0.0072500648(3)n^2 + 0.43470638(2)n - 0.216144846(8))g_1 g_2^3 + (0.0095171836(4)n^2- \\
&- 0.0094960592(3)n + 0.096220908(3))g_2^4 + (-0.0000085689(1)n^6 + 0.0000257068(4)n^5 - 0.034689592(7)n^4+ \\
&+ 0.06933634(1)n^3 - 1.0420538(1)n^2 + 1.0073899(1)n - 5.8573368(5))g_1^5 + (0.000073387(1)n^5 - 0.000183469(4)n^4- \\
&- 0.33695329(6)n^3 + 0.50561340(9)n^2 - 6.8168851(7)n + 3.3241676(3))g_1^4 g_2 + (-0.007112655(7)n^4 + 0.01422531(1)n^3- \\
&- 1.6551532(2)n^2 + 1.6480405(2)n - 8.5729453(7))g_1^3 g_2^2 + (-0.00007538480(8)n^5 + 0.0001884620(2)n^4 - 0.07024825(2)n^3+ \\
&+ 0.10518391(3)n^2 - 2.9717472(3)n + 1.4683492(1))g_1^2 g_2^3 + (-0.0006667478(3)n^4 + 0.0013334957(5)n^3 - 0.16794359(3)n^2+ \\
&+ 0.16730379(2)n - 1.05388589(8))g_1 g_2^4 + (-0.0013931662(3)n^3 + 0.0020916174(5)n^2 - 0.069839009(7)n+ \\
&+ 0.034566491(4))g_2^5 + O(g^6);
\end{aligned}
\tag{2.100}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\beta_2}{2} &= -g_2 + 2g_1g_2 + (0.166667n - 0.0833333)g_2^2 + (-0.0810301658289(4)n^2 + 0.0810301658289(4)n - \\
&- 2.574539966487(9))g_1^2g_2 + (-0.699190547177(3)n + 0.349595273589(1))g_1g_2^2 + (-0.01244358554342(6)n^2 + \\
&+ 0.01244358554342(6)n - 0.2373092841047(9))g_2^3 + (-0.0021198571323(1)n^4 + 0.0042397142645(2)n^3 + \\
&+ 0.27219374(1)n^2 - 0.27431360(1)n + 5.6880979(2))g_1^3g_2 + (-0.0018878066(7)n^3 + 0.002831710(1)n^2 + 2.61841899(9)n - \\
&- 1.30968145(5))g_1^2g_2^2 + (0.146412680(7)n^2 - 0.146412680(7)n + 1.52264206(5))g_1g_2^3 + (0.00115511431(9)n^3 - \\
&- 0.0017432337(2)n^2 + 0.106368171(4)n - 0.052932275(2))g_2^4 + (-0.00007953847810(2)n^6 + 0.00023861543429(6)n^5 - \\
&- 0.005154787(3)n^4 + 0.009911881(6)n^3 - 1.0434981(1)n^2 + 1.0385820(1)n - 15.990014(1))g_1^4g_2 + (-0.0003133338(2)n^5 + \\
&+ 0.0007833345(4)n^4 - 0.12050981(4)n^3 + 0.17998138(5)n^2 - 10.658422(1)n + 5.2992401(5))g_1^3g_2^2 + (-0.000951905(1)n^4 + \\
&+ 0.001903809(2)n^3 - 1.3141029(2)n^2 + 1.3131510(2)n - 8.1654073(7))g_1^2g_2^3 + (-0.034892040(7)n^3 + 0.05232458(1)n^2 - \\
&- 1.4307080(2)n + 0.70658381(7))g_1g_2^4 + (-0.00013697546(6)n^4 + 0.0002724496(2)n^3 - 0.036431306(5)n^2 + \\
&+ 0.036298903(5)n - 0.21175734(2))g_2^5 + O(g^6); \qquad (2.101)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_\phi = {} & (0.00636865256832(6)n^2 - 0.00636865256832(6)n + 0.0254746102733(2))g_1^2 + (0.0254746102733(2)n- \\
& - 0.0127373051366(1))g_1 g_2 + (0.00159216314208(1)n^2 - 0.00159216314208(1)n + 0.00636865256832(6))g_2^2+ \\
& + (-0.00003160241758(2)n^4 + 0.00006320483516(3)n^3 - 0.0006636507691(3)n^2 + 0.0006320483516(3)n- \\
& - 0.002022554725(1))g_1^3 + (-0.0001896145055(1)n^3 + 0.0002844217582(1)n^2 - 0.003128639340(2)n+ \\
& + 0.0015169160438(8))g_1^2 g_2 + (-0.0006636507691(3)n^2 + 0.0006636507691(3)n - 0.0012324942856(6))g_1 g_2^2+ \\
& + (-0.000015801208789(8)n^3 + 0.00002370181318(1)n^2 - 0.0002607199450(1)n + 0.00012640967031(6))g_2^3+ \\
& + (-0.000004469739534(3)n^6 + 0.00001340921860(1)n^5 + 0.00037783407(3)n^4 - 0.00077801684(6)n^3+ \\
& + 0.0060338294(4)n^2 - 0.0056425861(4)n + 0.016024388(1))g_1^4 + (-0.00003575791627(3)n^5+ \\
& + 0.00008939479069(7)n^4 + 0.0032014621(2)n^3 - 0.0048915880(4)n^2 + 0.033685266(2)n - 0.016024388(1))g_1^3 g_2+ \\
& + (0.000019412486(9)n^4 - 0.00003882497(2)n^3 + 0.0126742715(9)n^2 - 0.0126548590(9)n + 0.017870796(1))g_1^2 g_2^2+ \\
& + (0.00074672866(6)n^3 - 0.00112009299(9))n^2 + 0.0084928323(6)n - 0.0040597340(3))g_1 g_2^3 + (0.0000070575768(8)n^4- \\
& - 0.000014115154(2)n^3 + 0.00048435358(4)n^2 - 0.00047729601(3)n + 0.00081960117(5))g_2^4 + O(g^5); \qquad (2.102)
\end{aligned}
$$

Как и в предыдущем случае, по известным разложениям РГ функций координаты трех нетривиальных неподвижных точек и соответствующие им критические индексы вычислены в форме τ-разложения для единственного нетривиального случая $n = 4$.

Точка **A**:

$$\begin{aligned}
g_1 &= 3\tau/7 + 0.2398362594900(8)\tau^2 + 0.018647159(9)\tau^3 + 0.00847826(5)\tau^4 \\
g_2 &= 0 \\
\frac{\omega_1}{2} &= \tau - 0.559617938809(2)\tau^2 + 0.53932440(4)\tau^3 - 0.5899320(3)\tau^4 \\
\frac{\omega_2}{2} &= -\tau/7 - 0.171799268938(3)\tau^2 - 0.00901592(3)\tau^3 - 0.0857764(1)\tau^4 \\
\eta &= 0.0374320804017(3)\tau^2 + 0.039666389499(1)\tau^3 + 0.020167925(2)\tau^4
\end{aligned} \tag{2.103}$$

Точка **B**:

$$\begin{aligned}
g_1 &= 12\tau/17 + 0.92678864432(6)\tau^2 + 0.423377(1)\tau^3 - 0.22244(2)\tau^4 \\
g_2 &= -12\tau/17 - 1.9079403128(2)\tau^2 - 1.580563(4)\tau^3 - 0.21383(6)\tau^4 \\
\frac{\omega_1}{2} &= \tau - 0.61796814759(1)\tau^2 + 0.4488576(5)\tau^3 - 0.517774(9)\tau^4 \\
\frac{\omega_2}{2} &= \tau/17 - 0.11938729258(6)\tau^2 - 0.362933(2)\tau^3 - 0.31113(2)\tau^4 \\
\eta &= 0.038079694249(1)\tau^2 + 0.04479657543(1)\tau^3 + 0.03469533(2)\tau^4
\end{aligned} \tag{2.104}$$

Точка **C**:

$$\begin{aligned}
g_1 &= 9\tau/11 + 0.53202160729(9)\tau^2 + 0.066832(3)\tau^3 + 0.04501(4)\tau^4 \\
g_2 &= -12\tau/11 - 0.7093621430(3)\tau^2 - 0.08911(1)\tau^3 - 0.0600(1)\tau^4 \\
\frac{\omega_1}{2} &= \tau - 0.65024863114(2)\tau^2 + 0.682279(1)\tau^3 - 0.89301(2)\tau^4 \\
\frac{\omega_2}{2} &= -\tau/11 + 0.3500536341(1)\tau^2 + 0.034867(4)\tau^3 + 0.11713(5)\tau^4 \\
\eta &= 0.037896114456(2)\tau^2 + 0.04702722378(2)\tau^3 + 0.02896554(6)\tau^4
\end{aligned} \tag{2.105}$$

2.2.3.3. Критические режимы

По известным τ-разложениям координат неподвижных точек и критических индексов (2.98)-(2.100) и (2.104)-(2.106) можно получить их численные значения. Для этого ряды τ-разложений могут быть просуммированы напрямую, путем подстановки в них значения $\tau = 1$. Полученные таким путем численные значения приведены в таблице 2.4.

Таблица 2.4. Критические индексы, полученные прямым суммированием τ-разложений при $n = 4$

Индекс	Точка **A**		Точка **B**		Точка **C**	
	d=3	d=2	d=3	d=2	d=3	d=2
g_1	0.575	0.695	1.336	1.834	1.148	1.462
g_2	0	0	-2.396	-4.408	-1.531	-1.949
ω_1	0.727	0.780	0.701	0.626	0.664	0.278
ω_2	-0.269	-0.819	-0.203	-1.469	0.158	0.822
η	0.025	0.097	0.028	0.118	0.028	0.114

Из таблицы видно, что для всех трех неподвижных точек результаты суммирования τ-разложений качественно согласуются с результатами обработки ε-разложений. В обеих физически интересных размерностях пространства точки **A** и **B** оказываются седловидными, в то время как точка **C** – ИК притягивающей. Таким образом, подтверждается вывод о том, что при $n = 4$ в модели возможен фазовый переход второго рода и именно точка **C** определяет соответствующее критическое поведение функций Грина.

В результате можно заключить, что в случае $n = 4$ поведение модели оказывается не универсальным в том смысле, что оно зависит от выбора начальных значений констант взаимодействия. Фазовый переход второго рода реализуется в том случае, если они принадлежат области притяжения точки **C**. В частности для этого необходимо чтобы начальные данные лежали в физической области параметров, определяемой неравенством (2.50), а так же чтобы выполнялось условие $g_2 < 0$, так как РГ поток оказывается не в состоянии пересечь данную прямую.

Несмотря на качественное сходство картин критического поведения, полученных в рамках ε- и τ-разложений, численные значения критических индексов полученные в рамках разных подходов могут, тем не менее, довольно существенно отличаться (см. таблицу 2.3). Особенно сильно численные значения критических показателей различаются в случае $d = 2$. Более того, результаты непосредственного суммирования τ-разложений координат неподвижной точки **B** приводят к тому, что для нее перестают выполняться неравенства (2.50)-(2.51) и в результате она покидает границу физической области параметров. Возможным объяснением данного факта может служить более сильная расходимость рядов теории возмущений в случае $d = 2$, которая приводит к необходимости учитывать асимптотические свойства τ-разложений уже на уровне четырех петель. Этим же может объясняться и более существенное расхождение численных значений индексов, в сравнении со случаем $d = 3$. Кроме того, необходимо так же учитывать тот факт, что размерность $d = 2$ находится дальше от логарифмической размерности, а значит для нее ухудшается так же и сходимость ε-разложений.

3. Ренормгрупповой анализ задач стохастической динамики

3.1. Постановка задачи и выбор шума

Одной из важных, нерешенных проблем современной теоретической физики является проблема построения эффективных моделей систем, для которых лежащие в их основе уравнения эволюции неизвестны. Наглядный пример такой системы представляет собой мокрый песок [77]. Точное описание такой системы должно не только содержать в себе всю сложность уравнений Навье-Стокса, но так же включать в себя описание взаимодействия между частицами песка, которое в общем случае неизвестно, и возникающие в результате этого взаимодействия напряжения внутри песчаной массы. В результате, для построения теоретического описания, обладающего предсказательной силой, необходимо построение неких эффективных моделей, основанных на известных симметриях и макроскопических свойствах изучаемых систем.

Примером другой подобной проблемы, вызывающей в последние несколько десятилетий интерес исследователей, является проблема описания процессов роста границ в различных физических системах. Далеко не полный список таких процессов включает выпадение осадка на подложку и рост соответствующей фазовой границы, эволюцию фронтов отвердевания и пламени, поведение дыма и коллоидных агрегатов, рост опухолей, эволюцию ландшафтов и т.д. (для подробного обзора см. [20, 78–86] и литературу цитируемую в них). Для описания подобных явлений был выдвинут целый ряд микроскопических моделей, таких, например, как модели Идена [83], Эдвардса–Вилкинсона [84], ограниченные модели твердое тело-на твердом теле [85], баллистическое выпадение [86] и другие.

Оказывается, что все перечисленные процессы имеют важную общую черту: на достаточно больших (в сравнении с размерами составляющих систему частиц) расстояниях и временных масштабах все они обнаруживают скейлинговое поведение (степенные зависимости корреляторов и функций отклика) с достаточно универсальными (не зависящим от особенностей конкретного процесса) скейлинговыми показателями. Как обсуждалось выше, похожее поведение демонстрируют корреляционные функции различных систем, находящихся в окрестности своих точек фазового перехода второго рода [1, 2]. В свою очередь, для их описания используется хорошо развитая техника ренормгруппового анализа упрощенных эффективных моделей, которая позволяет успешно установить наличие и тип фазового перехода, а также дать надежные оценки критических индексов.

Подобная аналогия естественным образом подводит к идее описания универсальных асимптотических свойств процессов роста на основе определенных упрощенных моделей для сглаженного поля высоты границы. Однако, в отличие от теории критического поведения, где большинство типичных систем принадлежат классу универсальности, описываемому классической моделью φ^4 или ее модификациями, в качестве крупно-зернистой модели роста обычно используется модель Кадара-Паризи-Занга [19], задаваемая стахостическим дифференциальным уравнением:

$$\partial_t h = \nu\, \partial^2 h + \lambda(\partial h)^2/2 + f, \tag{3.1}$$

а также ее различные модификации, наилучшим способом учитывающие глобальные характеристики системы. Здесь и всюду далее $h(x) = h(t, \boldsymbol{x})$ обозначает поле высоты границы, зависящее от времени и d-мерной координаты подложки $\boldsymbol{x}$; $f(x) = f(t, \boldsymbol{x})$ обозначает случайный шум.

В оригинальной работе [19] в качестве шума использовался так называемый "тепловой" шум – Гауссов случайный шум с нулевым средним и парным коррелятором, задаваемым соотношением:

$$\langle f(x)f(x')\rangle = 2D_0\delta(t-t')\delta^{(d)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}) \tag{3.2}$$

с положительным амплитудным множителем $D_0 > 0$. Символ $\langle \ldots \rangle$ обозначает усреднение по гауссову распределению случайного шума. С точки зрения различных моделей роста данный шум соответствует случайным неоднородностям в выпадении субстанции, граница которой рассматривается, например неоднородность в выпадении осаждающегося на подложку вещества, или осадков, в случае моделей эрозии.

Позднее, в работе [20], посвященной стохастической модели эрозии ландшафтов, был поднят вопрос о выборе шума, лучше всего описывающего все то разнообразие процессов, которое приводит к размыванию речных и океанических ландшафтов. Одним из возможных шумов был предложен, так называемый, "замороженный" шум [87], не зависящий явно от времени. Данный шум так же задается Гауссовым распределением с коррелятором:

$$\langle f(\boldsymbol{x}, h)f(\boldsymbol{x'}, h')\rangle = 2F(h-h')\delta^{(d)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}). \tag{3.3}$$

Такая форма шума позволяет учитывать различные неоднородности изучаемой субстанции, влияющие на рост ее границы. Например, с точки зрения наиболее наглядной модели эрозии ландшафтов, данный шум позволяет за счет выбора конкретного вида функционала F учитывать случайные неоднородности почвы, влияющие на ее склонность к эрозии. Тем не менее, даже в случае когда функционал F выбран в виде δ-функции:

$$\langle f(\boldsymbol{x}, h) f(\boldsymbol{x'}, h')\rangle = 2D_0 \delta(h - h')\delta^{(d)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}), \tag{3.4}$$

данный вид шума оказывается слишком сложным для получения аналитических результатов [20,88] (здесь функциональная дельта функция определяется как $\delta(h - h') \equiv \prod_x \delta\left[h(x) - h'(x)\right]$). В результате в [20] определение шума было ослаблено и была предложена следующая "статическая" форма шума, с коррелятором:

$$\langle f(x) f(x')\rangle = 2D_0 \delta^{(d)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}). \tag{3.5}$$

Отметим, что здесь $x = (\boldsymbol{x}, t)$, т.е. задача сохраняет свою динамику. Определенный таким образом шум описывает ситуацию, в которой внешнее воздействие на субстанцию, граница которой рассматривается, в среднем постоянно, и источником шума служит только неоднородность самой субстанции.

В рамках модели эрозии ландшафтов данный шум использовался вместе с различными модификациями модели КПЗ для изучения эволюции речного рельефа с помощью численного моделирования [89,90], а так же в рамках подхода функциональной ("непертурбативной") ренормгруппы [26]. В результате данных исследований было установлено, что выбор конкретной формы шума имеет существенное влияние на асимптотическое поведение модели: переход от “теплового” к “статическому” шуму может привести к смене класса универсальности, к которому принадлежит изучаемая модель. Как итог, инфракрасное поведение моделей задаваемых одним и тем же стохастическим уравнением, но с различной формой коррелятора шума может определяться совершенно различными скейлинговыми (так же называемыми критическими, по аналогии с теорией критического поведения) показателями.

3.2. Квантовополевая формулировка стохастических моделей

В данной работе методами квантовополевой ренормгруппы будут изучаться четыре модели типа (3.1) со “статическим” шумом (3.5). Поэтому для полноты изложения приведем краткую информацию об общих свойствах стохастических задач данного типа и методе их переформулировки в виде некоторой модели квантовой теории поля, поведение которой, в дальнейшем может изучаться стандартными методами. Детальное описание данного подхода можно найти, например в [1].

Стандартная задача стохастической динамики в общем случае формулируется следующим образом:

$$\partial_t h(x) = U(x,h) + f(x), \quad \langle f(x) f(x') \rangle = D(x,x'). \tag{3.6}$$

Здесь $h(x)$ – изучаемое поле, $U(x,h)$ обозначает заданный локальный по времени и не содержащий производных поля по времени функционал, $f(x)$ – Гауссово распределенный случайный шум с нулевым средним, задаваемый коррелятором $D(x,x')$. Функционал:

$$U(h) = Lh + n(h) \tag{3.7}$$

состоит из некоторого линейного по полю вклада, задающегося операцией L, и вклада нелинейных по полю членов $n(h)$. Вычисляемыми объектами в рамках такой задачи являются корреляционные функции поля $\langle h(x_1)\dots h(x_k)\rangle$, а также функции отклика поля на внешнюю силу $\langle \delta^m h(x_1)\dots h(x_k)/\delta f(x'_1)\dots\delta f(x'_m))\rangle$. Линейная часть задачи (3.6) может быть решена точно:

$$h = \Delta_{12}\left[f + n(h)\right] \tag{3.8}$$

с помощью запаздывающей функции Грина $\Delta_{12} \equiv (\partial_t - L)^{-1}$. После этого учет нелинейности $n(h)$ осуществляется по теории возмущений путем итерирования уравнения (3.6). При выполнении данной процедуры можно ввести графические обозначения, сходные с обозначениями вводимыми для Фейнмановских диаграмм в теории поля. Если, например, обозначить функцию Грина Δ_{12} линией с чертой на одном из концов, а вкладам нелинейности $n(h)$ сопоставить вершины с вершинными множителями определяемыми по правилу (1.9), то решение $h(x)$ уравнения (3.6) может быть представлено в виде суммы бесконечного ряда “деревьев” с корнем в точке x и случайным шумом f на конце всех ветвей. Тогда корреляционные функции получаются в результате перемножения соответствующего числа подобных бесконечных сумм и усреднения по случайной силе. При этом диаграммы в которые случайный шум входит нечетное число раз занулятся. Также в результате данного усреднения появится новый графический элемент:

$$\Delta_{11} \equiv \Delta_{12} D \Delta_{12}^T, \tag{3.9}$$

для обозначения которого необходимо ввести еще один тип линии. Аналогичным образом получаются и разложения для функций отклика.

Полученные диаграммные представления можно буквально отождествить с диаграммными разложениями функций Грина некоторой полевой модели вида (1.2), с дополнительным полем $h'(x)$, которому соответствует нулевой свободный пропагатор $\langle h'h'\rangle_0$. Тогда функции Грина Δ_{12} должен быть сопоставлен свободный пропагатор $\langle hh'\rangle_0$, а функции Δ_{11} свободный пропагатор $\langle hh\rangle_0$.

Для обоснования данного утверждения рассмотрим производящий функционал $G(a)$ корреляционных функций поля h. Обозначим решение уравнения (3.6) с некоторой конкретной реализацией случайной силы как $\bar{h} = \bar{h}(x,f)$. Тогда производящий функционал корреляционных функций принимает вид:

$$G(a) = \frac{\int Df \ \exp\left[-\frac{1}{2}fD^{-1}f + a\bar{h}\right]}{\int Df \ \exp\left[-\frac{1}{2}fD^{-1}f\right]}. \tag{3.10}$$

Представим экспоненту, содержащую источник a в интегральной форме:

$$\exp\left[a\bar{h}\right] = \int Dh \ \delta(h-\bar{h}) \ \exp\left[a\bar{h}\right]. \tag{3.11}$$

Дельта функция в последнем тождестве не зануляется только в том случае, когда $h = \bar{h}$. В рамках теории возмущений решение стандартной задачи (3.6) всегда единственно, в общем случае единственность решения обеспечивается наложением на поле h дополнительных асимптотических условий при $t \to -\infty$, $|\mathbf{x}| \to \infty$. В результате получаем, что условие $h = \bar{h}$ эквивалентно следующему утверждению:

$$Q(h,f) \equiv -\partial_t h + U(h) + f = 0, \tag{3.12}$$

которое позволяет предствить дельта функцию как:

$$\delta(h-\bar{h}) = detM \ \delta\left[Q(h,f)\right]. \tag{3.13}$$

Здесь $M(x,x') = \delta Q(x)/\delta h(x')$. Далее, представим дельта функцию в правой части тождества (3.13) с помощью функционального интеграла по вспомогательному полю h':

$$\delta\left[Q(h,f)\right] = \int Dh' \ \exp\left[h'Q(h,f)\right]. \tag{3.14}$$

Теперь, если подставить выражения (3.11)-(3.14) в (3.10), то интеграл по случайной силе стоящий в числителе окажется Гауссовым и может быть явно вычислен. В результате получаем:

$$G(a) = \int\int DhDh' \ detM \ \exp\left[\frac{1}{2}h'Dh' + h'(-\partial_t h + U(h)) + ah\right]. \tag{3.15}$$

Таким образом, производящий функционал корреляционных функций стахостической задачи (3.6) оказывается равен производящему функционалу функций Грина поля h квантовополевой модели с функционалом действия:

$$S(h,h') = \frac{1}{2}h'Dh' + h'(-\partial_t h + Lh + n(h)), \tag{3.16}$$

с точностью до множителя $detM$, стоящего перед экспонентой в (3.15). Роль данного детерминанта сводится к сокращению диаграмм с закороченными циклами линий Δ_{12}, которые не возникали при итерационном решении стахостической задачи (3.6), но могут возникать в функциях Грина модели (3.16). С другой стороны, $M = -\Delta_{12}^{-1} + \delta n(h)/\delta h$, поэтому справедливо $detM = det\left[-\Delta_{12}^{-1}\right] det\left[1 - \Delta_{12}(\delta n(h)/\delta h)\right]$. Здесь первый множитель - несущественная константа, а для логарифма второго имеем:

$$-tr\left[\Delta_{12}(\delta n(h)/\delta h) + \frac{1}{2}\Delta_{12}(\delta n(h)/\delta h)\Delta_{12}(\delta n(h)/\delta h) + \ldots\right]. \tag{3.17}$$

В данном выражении все слагаемые кроме первого зануляются, т.к. в силу свойства запаздывания функции Δ_{12} содержат замкнутые циклы θ-функций, а первое слагаемое оказывается кратно θ-функции в нуле, в силу временной локальности $n(h)$. Если ввести доопределение $\theta(0) = 0$, то с одной стороны $detM$ превратится в несущественную константу которую можно отбросить, а с другой стороны стороны такое доопределение приведет к автоматическому сокращению диаграмм модели (3.16), содержащих замкнутые циклы линий Δ_{12}.

Рассмотрим теперь полный производящий функционал функций Грина модели (3.16), включающий источники обоих полей:

$$G(a, a') = \int D\Phi \; e^{S(h,h')+ah+a'h'}. \tag{3.18}$$

Выше было показано, что его варьирование по источнику a порождает корреляционные функции поля h. Теперь отметим, что поскольку источник a' играет роль неслучайной силы в модели (3.6), то варьирование по нему должно воспроизводить не что иное, как функции отклика.

Отметим так же, что поскольку квадратичная по полям часть действия (3.16) задается матрицей:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & (\partial_t - L)^T \\ \partial_t - L & -D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta_{21}^{-1} \\ \Delta_{12}^{-1} & -D \end{pmatrix}, \tag{3.19}$$

то по общему правилу (1.8) свободные пропагаторы модели определяются обратной матрицей:

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} \Delta_{12} D \Delta_{21} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.20}$$

что согласуется со сделанными ранее предположениями.

3.3. Анализ расходимостей

Анализ асимптотического поведения модели (3.16) производится с помощью стандартного подхода ренормгруппы, изложенного в главе 1. Остановимся подробнее на некоторых особенностях данного анализа, не возникавших ранее при анализе равновесных моделей критического состояния.

В изотропных динамических моделях типа (3.16) имеется один дополнительный независимый масштаб, связанный со временной переменной t. Соответствующие ему дополнительные временные и частотные размерности полей и параметров модели определяются из требования безразмерности действия независимо по отношению ко временной и координатным переменным, а также из нормировочный условий:

$$d_k^k = -d_{\boldsymbol{x}}^k = 1, \quad d_k^\omega = -d_{\boldsymbol{x}}^\omega = 0, \tag{3.21}$$

$$d_\omega^\omega = -d_t^\omega = 1, \quad d_\omega^k = -d_t^k = 0. \tag{3.22}$$

Поскольку в свободной теории $\partial_t \propto \partial^2$, полная каноническая размерность естественным образом вводится как:

$$d_F = d_F^k + 2d_F^\omega. \tag{3.23}$$

При дальнейшем анализе перенормируемости модели данная величина играет ту же роль, что и импульсная размерность в статических задачах.

Некоторые рассматриваемые ниже модели предназначены для описания систем обладающих ярко выраженной анизотропией. Примером системы, для описания которой необходимо введение в модель анизотропии может служить выпадение осадка на подложку с фиксированным наклоном или разрушаемый эрозией берег реки с неизменным направлением выноса размытых масс [20]. Для рассмотрения таких систем будем вводить анизотропию следующим образом: пусть константа $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор, определяющий выбранное направление (направление в сторону наклона). Тогда любой вектор можно разложить на компоненты, ортогональные и параллельные к $\boldsymbol{n}$. Для d-мерной координаты $\boldsymbol{x}$ имеем $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_\perp + \boldsymbol{n}x_\parallel$, где $\boldsymbol{x}_\perp \cdot \boldsymbol{n} = 0$. Производную ∂_i в полном d-мерном $\boldsymbol{x}$ пространстве можно разделить на производную в подпространстве, ортогональном к $\boldsymbol{n}$, обозначая ее как $\partial_\perp = \partial/\partial x_{\perp i}$, где $i = 1 \dots d-1$, и производную вдоль параллельного направления, записываемую как $\partial_\parallel = \boldsymbol{n} \cdot \partial$.

При таком подходе возникают два независимых координатных масштаба, связанных с продольным и ортогональным направлениями и требуется безразмерность действия независимо по отношению к каждому из них. Соответствующие условия нормировки принимают вид:

$$d^\perp_{k_\perp} = -d^\perp_{\boldsymbol{x}_\perp} = 1, \quad d^\parallel_{k_\perp} = -d^\parallel_{\boldsymbol{x}_\perp} = 0, \quad d^\omega_{k_\perp} = -d^\omega_{\boldsymbol{x}_\perp} = 0, \tag{3.24}$$

$$d^\parallel_{k_\parallel} = -d^\parallel_{\boldsymbol{x}_\parallel} = 1, \quad d^\perp_{k_\parallel} = -d^\perp_{\boldsymbol{x}_\parallel} = 0, \quad d^\omega_{k_\parallel} = -d^\omega_{\boldsymbol{x}_\parallel} = 0, \tag{3.25}$$

$$d^\omega_\omega = -d^\omega_t = 1, \quad d^\perp_\omega = -d^\perp_t = 0, \quad d^\parallel_\omega = -d^\parallel_t = 0. \tag{3.26}$$

Итоговая импульсная размерность может быть найдена из соотношения $d^k_F = d^\perp_F + d^\parallel_F$, после чего полная каноническая размерность вводится по обычному правилу $d_F = d^k_F + 2d^\omega_F$.

В итоге из (1.11) получаем, что каноническая размерность произвольной 1-неприводимой функции Грина $\Gamma = \langle \Phi \cdots \Phi \rangle_{1-\text{н}}$, в частотно-импульсном представлении дается соотношением:

$$d_\Gamma = d + 2 - d_h N_h - d_{h'} N_{h'}, \tag{3.27}$$

где $N_h, N_{h'}$ – показывают сколько соответствующих полей входит в функцию Г. Согласно общему утверждению (1.12) значение данного выражения в логарифмической размерности пространства являет собой формальный индекс расходимости функции Г. На практике в моделях типа (3.16) все 1-неприводимые функции без полей отклика тождественно исчезают т.к. их диаграммы всегда содержат замкнутые циклы запаздывающих линий (см., например, [1]). Таким образом, в (3.27) оказывается достаточно рассматривать только случай $N_{h'} > 0$

Рассмотрим подробнее первое слагаемое в действии (3.16). В случае произвольного коррелятора шума в подробной записи оно имеет вид:

$$\frac{1}{2}h'Dh' = \int dt \int dt' \int d\boldsymbol{x} \int d\boldsymbol{x'}\ \frac{1}{2}h'(t',\boldsymbol{x})\,D(t,\boldsymbol{x},t',\boldsymbol{x'})\,h'(t,\boldsymbol{x'}). \tag{3.28}$$

Отсюда видно, что для частного случая "статического" шума (3.5), который будет рассматриваться всюду далее, данное слагаемое приобретает форму:

$$\frac{1}{2}h'Dh' = \int dt \int dt' \int d\boldsymbol{x}\ h'(t',\boldsymbol{x})\,D_0\,h'(t,\boldsymbol{x}). \tag{3.29}$$

Наличие в нем дополнительного интеграла по времени приводит к тому, что вне зависимости от конкретного вида функционала (3.7) в пропагаторе $\langle hh\rangle_0$ будет появляться дополнительная δ-функция частоты. Поэтому во всех рассмотренных ниже моделях данный пропагатор в частотно-импульсном представлении будет иметь вид:

$$\Delta_{11}(k,\omega) \equiv \Delta_{12}(k,\omega)D_o\delta(\omega)\Delta_{12}^T(k,\omega). \tag{3.30}$$

Это приводит к тому, что диаграммы некоторых функций Г содержат в качестве общего множителя дельта-функцию от внешней частоты, что, в свою очередь, может приводить к отрицательному индексу расходимости (1.12), поэтому для таких функций индекс расходимости корректно отражает сходимость, если его изменить:

$$\delta'_\Gamma = \delta_\Gamma + 2N_{\delta(\omega)}. \tag{3.31}$$

4. Ренормгрупповой анализ стохастических моделей со "статическим" шумом

4.1. Модель Кардара-Паризи-Занга

4.1.1. Формулировка модели

Модель КПЗ, задающаяся уравнением (3.1) со случайным шумом (3.2), была введена в работе [19], посвященной изучению скейлинговых свойств роста поверхностей. Данная модель является достаточно общим способом описания растущей поверхности. Первое слагаемое в правой части уравнения (3.1) описывает релаксацию поверхности под действием поверхностного натяжения. Второе слагаемое $\lambda(\partial h)^2$ являет собой член минимального порядка в разложении по степеням градиента и поля h который мог возникнуть в уравнении роста, и описывает рост границы вдоль локальной нормали к поверхности. Данный член ИК существенен для $d \leq 2$, и логарифмичен для $d = 2$. Соответствующая теоретико-полевая модель с действием типа (3.16) является мультипликативно перенормируемой и, таким образом, подобную модель можно изучать методом ренормгруппового анализа [19, 91–93]. В результате такого анализа было показано, что соответствующие РГ уравнения обладают нетривиальной неподвижной точкой, которой соответствуют критические показатели: кинетический коэффициент огрубления $\chi = 0$, динамический индекс $z = 2$ (точное соотношение $\chi + z = 2$ продиктовано галилеевой симметрией). Тем не менее, данная неподвижная точка является ИК отталкивающей для $\varepsilon < 0$, тогда как для физически интересного случая $\varepsilon > 0$ она не лежит в физической области параметров модели (D_0, $\kappa_0 > 0$) и не может отвечать за асимптотическое поведение системы. Все эти результаты являются "пертурбативно точными", то есть выполняются во всех порядках теории возмущений.

Общий характер стохастической задачи (3.1), (3.2) позволил построить множество ее обобщений и модификаций, описывающих самые разные системы. Подобные модификации включают в себя модели в которых поле h имеет тензорную природу [94–96], модели с измененной формой нелинейности (некоторые из них будут рассмотрены подробнее в следующих разделах), модели, в которых рассматривался шум с конечным временем корреляций [25, 97].

В данном разделе в рамках однопетлевого анализа рассматривается модель (3.1) со "статическим" случайным шумом (3.5). Согласно общему утверждению данная модель эквивалентна теоретико-полевой модели двух полей $\Phi = \{h, h'\}$ с функционалом действия типа (3.16) который в данном случае принимает вид:

$$S(\Phi) = h' D_0 h' + h'(-\partial_t h + \nu_0\, \partial^2 h + \frac{1}{2}(\partial h)^2). \tag{4.1}$$

Здесь коэффициент $\nu_0 > 0$, а параметр λ_0, входивший в стохастическое уравнение (3.1) полагается равным единице. Затравочные пропагаторы данной модели, определяемые свободной частью действия (4.1), в частотно-импульсном представлении даются соотношениями:

$$\langle h h' \rangle_0 = \langle h' h \rangle_0^* = \left\{ -i\omega + \nu_0 k^2 \right\}^{-1}, \quad \langle h h \rangle_0 = 4 D_0 \pi \delta(\omega) / \nu_0^2 k^4. \tag{4.2}$$

Наличие производной в неквадратичной по полям части действия приводит к следующему выражению для вершины в диаграммах:

$$\langle h'hh\rangle_0 = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}, \tag{4.3}$$

где $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ - импульсы соответствующие полям h. Роль константы взаимодействия, являющейся параметром разложения в теории возмущений, играет параметр, определяемый из соображений размерности как $g_0 = D_0/\nu_0^4$. Требование стабильности модели накладывает условие $g > 0$ на физические значения константы взаимодействия.

4.1.2. Ультрафиолетовая перенормировка

В таблице 4.1 представлены канонические размерности полей и параметров модели (4.1), а также ренормировочной массы μ. Видно, что модель логарифмична при $d = 4$. При анализе функций Грина модели на наличие в них поверхностных УФ расходимостей необходимо учитывать что в действии (4.1) поле h входит в вершину $h'(\partial h)^2/2$ только в форме пространственной производной. Поэтому любое появление h в какой-либо функции Г приводит к выделению его импульса в качестве внешнего множителя и реальный индекс расходимости дается выражением $\delta''_\Gamma = \delta'_\Gamma - N_h$. Более того, h может возникнуть в соответствующем контрчлене только в форме производной. В результате приходим к заключению, что модель является мультипликативно ренормируемой, а поверхностные УФ расходимости содержатся только в 1-неприводимых функциях: $\langle h'hh\rangle_{1-\text{н}}$, $\langle h'h\rangle_{1-\text{н}}$, $\langle h'h'\rangle_{1-\text{н}}$. Диаграммы последней расходятся за счет присутствия в них δ-функции от внешней частоты.

В данном разделе используется размерная регуляризация в рамках

Таблица 4.1. Канонические размерности полей и параметров в модели (4.1).

F	h'	h	ν_0	g_0	μ
d_F^ω	-1	1	1	0	0
d_F^k	$d+2$	-2	-2	$4-d$	1
d_F	d	0	0	$4-d$	1

которой все УФ расходимости в функциях Грина предстают в виде полюсов по отклонению размерности пространства от его логарифмического значения, в данном случае равного $\varepsilon = 4 - d$.

Ренормированное действие получается из исходного (4.1) перенормировкой полей и параметров модели:

$$h \to Z_h h, \quad h' \to Z_{h'} h', \quad \nu_0 \to \nu Z_{nu}, \quad D_0 \to D = Z_g Z_\nu^4 g \nu^4 \mu^\varepsilon \tag{4.4}$$

и имеет вид:

$$S_R(\Phi) = Z_1 h' D h' + h' \left\{ -\partial_t h + Z_2 \nu \partial^2 h + \frac{1}{2} Z_3 (\partial h)^2 \right\}. \tag{4.5}$$

Отсюда получаем выражения, связывающие нумерованные константы с константами перенормировки полей и параметров модели:

$$Z_g = Z_1 Z_2^{-4} Z_3^2, \quad Z_\nu = Z_2, \quad Z_h = Z_{h'}^{-1} = Z_3. \tag{4.6}$$

Константы Z_i вычисляются непосредственно из требования сокращения расходимостей в диаграммных представлениях функций Грина. Для удобства далее всюду сделана замена $g \to g S_4/(2\pi)^4$. Здесь и всюду далее $S_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ – площадь поверхности единичной сферы в пространстве размерности d. Тогда однопетлевое вычисление дает:

$$Z_1 = 1 - \frac{g}{\varepsilon}, \quad Z_2 = Z_3 = 1 + \frac{g}{2\varepsilon}. \tag{4.7}$$

4.1.3. РГ функции и фиксированные точки

РГ функции модели в рамках схемы MS определяются стандартными соотношениями (1.21), (1.26). В результате имеем:

$$\gamma_\nu = -g/4, \quad \beta_g = -g(g+\varepsilon). \tag{4.8}$$

Анализ данного выражения обнаруживает две неподвижных точки.

Гауссова (свободная) неподвижная точка:

$$g^* = 0, \quad \omega = -\varepsilon. \tag{4.9}$$

Неподвижная точка:

$$g^* = -\varepsilon, \quad \omega = \varepsilon. \tag{4.10}$$

Точка (4.10) является ИК притягивающей в физически интересной размерности пространства $d = 2$, но при этом лежит в нефизической области значений (т.к. $g^* < 0$), что характерно для модели КПЗ [19].

4.1.4. Критические размерности

Критическая размерность Δ_F некоторой ИК существенной величины F может быть найдена с помощью стандартного подхода. Для этого рассмотрим уравнение ренормгруппы в фиксированной точке (1.46), а также два соотношения типа (1.47), выражающих масштабную инвариантность величины F относительно растяжений координат и времени. Так как нас интересует асимптотика больших времен и расстояний, то при описании соответствующего скейлинга параметры μ и ν считаются фиксированными, а значит производные по ним должны быть исключены из этих уравнений.

В купе с нормировочным условием $\Delta_k = 1$ в итоге получаем:

$$\Delta_F = d_F^k + \Delta_\omega d_F^\omega + \gamma_F^*, \tag{4.11}$$

где критическая размерность частоты выражается как:

$$\Delta_\omega = 2 - \gamma_\nu^*. \tag{4.12}$$

Тогда из таблицы 4.1 для размерностей полей находим:

$$\Delta_h = -2 + \Delta_\omega + \gamma_h^*, \quad \Delta_{h'} = d + 2 - \Delta_\omega + \gamma_h^*. \tag{4.13}$$

С учетом соотношений (4.8)-(4.10) в однопетлевом приближении получаем

$$\Delta_h = 0, \quad \Delta_{h'} = d, \quad \Delta_\omega = 2 \tag{4.14}$$

для гауссовой неподвижной точки и

$$\Delta_h = 0, \quad \Delta_{h'} = d, \quad \Delta_\omega = 2 - \varepsilon/4 \tag{4.15}$$

для неподвижной точки (4.10).

4.2. Бесконечно-зарядная модель роста.

4.2.1. Формулировка модели

Одна из возможных модификаций модели КПЗ была предложена в работе [98]. В частности, было предложено рассматривать модель задаваемую уравнением:

$$\partial_t h = \nu_0 \, \partial^2 h + \partial^2 h^2/2 + f. \tag{4.16}$$

Если раскрыть производную в нелинейной части $\partial^2 h^2 = 2(\partial h)^2 + 2h\partial^2 h$, то легко видеть, что суть данной модификации сводится к добавлению случайной поправки, к члену описывающему релаксацию за счет поверхностного натяжения. Однако, как было указано в работе [22], подобная модель не является ренормируемой, поскольку нелинейность в (4.16) неизбежно порождает бесконечное число контрчленов вида $\partial^2 h^n$. В силу данного факта, для корректного анализа следует рассматривать следующую модификацию модели (4.16):

$$\partial_t h = \nu_0 \, \partial^2 h + \partial^2 V(h) + f, \tag{4.17}$$

где функция $V(h)$ задается своим рядом Тейлора:

$$V(h) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_{n0} h^n}{n!}. \tag{4.18}$$

Несмотря на наличие в подобной модели бесконечного числа констант ренормировки, в [22] было показано, что в случае “теплового” случайного шума она является мультипликативно ренормируемой, а также был предложен способ явного вычисления однопетлевого контрчлена. В результате данного анализа было установлено, что на однопетлевом уровне в модели имеется двумерная поверхность фиксированных точек, на которой могут быть ИК притягивающие области. Если они действительно существуют, это означает, что модель может проявлять ИК скейлинг с неуниверсальными критическими показателями, которые в общем случае зависят от двух параметров, задающих координаты конкретной неподвижной точки в данной области.

В настоящем разделе рассматривается модель (4.17) со случайным шумом (3.5). В данном анализе мы будем следовать схеме ренормировки, изложенной в работе [22]. Функционал действия теоретико-полевой модели эквивалентной данной стохастической задаче будет иметь вид:

$$S(\Phi) = h'h' + h' \left\{ -\partial_t h + \nu_0 \, \partial^2 h + \partial^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_{n0} h^n}{n!} \right\}, \tag{4.19}$$

где роль бесконечного набора констант взаимодействия играют параметры, вид которых определяется размерными соображениями как:

$$g_{n0} = \lambda_{n0} \nu_0^{-n}. \tag{4.20}$$

4.2.2. Ультрафиолетовая перенормировка

В таблице 4.2 представлены канонические размерности полей и параметров изучаемой модели. Видно, что в размерности $d = 4$ весь бесконечный набор констант взаимодействия одновременно становится безразмерным, то есть данная размерность пространства является логарифмической для рассматриваемой модели. Анализ размерности полей h, h', а так же дополнительный учет производной, входящей во все вершины, позволяет заключить, что поверхностные УФ расходимости содержатся во всех 1-неприводимых функциях Грина, содержащих одно поле h' и любое количество полей h. При этом контрчлены во всех случаях имеют вид $(\partial^2 h') h^n$. Такая ситуация является естественной, в силу безразмерности поля h в логарифмической размерности пространства.

Таким образом, так же как и в работе [22] модель оказывается мультипликативно ренормируема. Ренормированное действие имеет вид:

$$S_R(\Phi) = h'h' + h' \left\{ -\partial_t h + Z_1 \nu \partial^2 h + \partial^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Z_n \lambda_n h^n}{n!} \right\}. \tag{4.21}$$

И может быть получено мультипликативной перенормировкой параметров:

$$\nu_0 \to \nu Z_\nu, \quad \lambda_{n0} \to \lambda_n = \mu^{\varepsilon(n-1)/2} Z_{g_n} Z_\nu^{-n} g_n \nu^n, \tag{4.22}$$

Таблица 4.2. Канонические размерности полей и параметров в модели (4.19).

F	h'	h	ν_0	λ_{n0}	g_{n0}	μ
d_F^ω	1	-1	1	n	0	0
d_F^k	$d/2$	$d/2$	-2	$-2-(n-1)d/2$	$(1-n)(d-4)/2$	1
d_F	$d/2+2$	$d/2-2$	0	$(1-n)(d-4)/2$	$(1-n)(d-4)/2$	1

где μ – ренормировочная масса. Связь нумерованных констант с константами ренормировки параметров дается соотношениями:

$$Z_\nu = Z_1, \quad Z_{g_n} = Z_n Z_1^{-n}. \tag{4.23}$$

В данном разделе используется размерная регуляризация с $\varepsilon = 4 - d$.

Рассмотрим петлевое разложение 1-неприводимых функций Грина [1]:

$$\Gamma_R(\Phi) = \sum_{p=0}^{\infty} \Gamma^{(p)}(\Phi). \tag{4.24}$$

Как уже упоминалось ранее, беспетлевой вклад в это разложение представляет собой просто базовое действие модели $\Gamma^{(0)}(\Phi) = S_B(\Phi)$. Следующий, однопетлевой, вклад в даное разложение дается соотношением:

$$\Gamma^{(1)}(\Phi) = -(1/2)Tr\ ln(W/W_0). \tag{4.25}$$

Здесь:

$$W(x,y) = -\delta^2 S_R(\Phi)/\delta\Phi(x)\delta\Phi(y), \tag{4.26}$$

а W_0 - аналогичное выражение для свободной части действия. Для внутренней самосогласованности приближения будем считать что $g_n \simeq g_2^{(n-1)}$. Операция W есть обратный пропагатор модели, в который кроме операции

(1.8) включена так же операция обратная к $\delta^2 V(\Phi)/\delta\Phi(x)\delta\Phi(y)$. Поэтому $D = W^{-1}$ есть ни что иное, как обыкновенный пропагатор модели (4.21) с $Z = 1$ и с выражением $\nu\partial^2 + \partial^2 V''$, стоящим всюду вместо $\nu\partial^2$. Здесь и всюду далее мы будем интерпретировать ряд (4.18) и его ренормированный аналог:

$$V_R(h) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Z_n \lambda_n h^n(x)}{n!} \tag{4.27}$$

как функции одной переменной h и понимать V', V'' как соответствующие производные по этой переменной. В таких обозначениях операцию (4.26) можно явно записать в виде матрицы:

$$W = \begin{pmatrix} -\partial^2 h' \cdot V'' & L^T \\ L & -2 \end{pmatrix}, \tag{4.28}$$

где $L \equiv \partial_t - \nu\partial^2 - \partial^2 V'$ и $L^T \equiv -\partial_t - \nu\partial^2 - V'\partial^2$ – транспонированный оператор. Отметим, что для вычисления констант перенормировки нам необходима только расходящаяся часть выражения (4.24). В силу того, что все контрчлены имеют вид $(\partial^2 h')h^n$, данная расходящаяся часть модет быть найдена в форме $\partial^2 h' R(h)$, где R - функция подобная V. Данное утверждение означает, что $Trln$ в (4.25) достаточно сосчитать только в первом порядке по hh-элементу матрицы (4.28). Воспользовавшись формулой

$$\delta(Tr\ lnK) = Tr(K^{-1}\delta K) \tag{4.29}$$

и варьируя только hh элемент матрицы W получаем:

$$\partial^2 h' R(h) \simeq -Tr\left[D_{hh} V'' \partial^2 h'\right] = -\int dx\ D_{hh}(x,x) V''(h(x)) \partial^2 h'(x), \tag{4.30}$$

Наконец учтем, что после того, как ∂^2 превращается во внешний множитель для h' в контрчлене остается только логарифмически расходящаяся часть. Как следствие, при ее вычислении можно положить все внешние импульсы равными нулю. Иными словами, можно игнорировать неоднородность $\partial^2 h'(x)$ и $h(x)$ в (4.30) и при отборе полюсов по ε считать оба поля константами. В итоге, для расходящейся части $D^{(hh)}(x,x)$ в частотно импульсном представлении получаем:

$$D^{(hh)}(x,x) = \int\int \frac{d\omega d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^{d+1}} \frac{4\pi\delta(\omega)}{(\nu+V')^2 k^4} = \frac{S_d}{(2\pi)^d}\frac{\mu^{-\varepsilon}}{\varepsilon}\frac{2}{(\nu+V')^2}. \qquad (4.31)$$

Соответствующая УФ конечная часть была при этом отброшена как несущественная. Подставляя полученное выражение в (4.30) получаем для расходящейся части (4.25) следующее выражение:

$$L\Gamma^{(1)}(\Phi) = \frac{S_d}{(2\pi)^d}\frac{\mu^{-\varepsilon}}{\varepsilon}\int dx \frac{V''(h(x))}{(\nu+V'(h(x)))^2}\,\partial^2 h'(x), \qquad (4.32)$$

в котором L – контрчленная операция. Для того, чтобы найти выражения для констант перенормировки потребуем, чтобы полюса по ε, входящие в (4.32) и беспетлевые вклады в (4.25), сокращали друг друга. Разложим подынтегральную дробь в ряд Тейлора, введя обозначения:

$$\frac{V''(h(x))}{(\nu_{\|}+V'(h(x)))^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{\varepsilon(n+1)/2}\nu^n \frac{r_n h^n}{n!}, \qquad (4.33)$$

в которых r_n – полностью безразмерные полиномы по зарядам g_n. Тогда, из требования сокращения полюсов, получаем искомые выражения:

$$Z_1 = 1 - \frac{r_1 c}{2\varepsilon}, \quad Z_n = 1 - \frac{r_n}{g_n}\frac{c}{2\varepsilon}. \qquad (4.34)$$

где $c \equiv 2S_4/(2\pi)^4$ – множитель, определяющий нормировку констант связи.

4.2.3. РГ функции и фиксированные точки

Из общего выражения (1.21), а так же связей (4.23), получаем следующие выражения для β-функций и аномальных размерностей модели:

$$\gamma_\nu = cD_g r_1/2; \qquad (4.35)$$

$$\beta_n = -\varepsilon\frac{n-1}{2}g_n + ng_n\gamma_\nu - \frac{c}{2}(D_g - n + 1)r_n, \tag{4.36}$$

где $D_g \equiv \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)g_n\partial_{g_n}$ –бесконечномерный аналог обычного оператора $D_x = x\partial_x$.

Явные выражения для полиномов r_n находятся из определений (4.22), (4.27), (4.33). Отметим, что первый член r_0 в (4.33) не дает вклада в (4.32), т.к. стоит при полной производной. Приведем в качестве примера выражения для первых четырех коэффициентов r_n:

$$r_1 = g_3 - 2g_2^2, \quad r_2 = g_4 - 6g_2g_3 + 6g_2^3,$$

$$r_3 = g_5 - 8g_2g_4 - 6g_3^2 + 36g_2^2g_3 - 24g_2^4,$$

$$r_4 = g_6 - 10g_2g_5 + 60g_2^2g_4 - 20g_3g_4 + 90g_2g_3^2 - 240g_2^3g_3 + 120g_2^5.$$

При подстановке в (4.35), (4.36) они дают:

$$\begin{aligned}
\gamma_\nu &= c(g_3 - 2g_2^2), \qquad (4.37)\\
\beta_2 &= -\frac{\varepsilon}{2}g_2 + c(-g_4 + 8g_2g_3 - 10g_2^3),\\
\beta_3 &= -\varepsilon g_3 + c(-g_5 + 8g_2g_4 + 9g_3^2 - 42g_2^2g_3 + 24g_2^4),\\
\beta_4 &= -\frac{3}{2}\varepsilon g_4 + c(-g_6 + 10g_5g_2 + 24g_4g_3 - 68g_4g_2^2 + 240g_3g_2^3 - 90g_3^3g_2 - 120g_2^5).
\end{aligned}$$

4.2.4. Критические режимы

Неподвижные точки РГ уравнений находятся из требования одновременного зануления всех функций $\beta_n(g_*) = 0$. При этом, из явной формы β-функций (4.37) следует, что можно выбрать параметры g_{2*} и g_{3*} произвольно, тогда как все g_{n*} с $n \geq 4$ будут однозначно определяться через них с помощью уравнений $\beta_k(g_{2*}, g_{3*}) = 0$, $k \geq 2$. Это означает, что так же, как и в случае рассмотренном в [22], в изучаемой модели в бесконечномерном пространстве констант взаимодействия существует двумерная поверхность фиксированных точек.

Для того, чтобы на этой поверхности существовали области ИК притяжения, необходимо чтобы вещественные части всех собственных чисел матрицы ω_{nm}, задаваемой условием (1.44) были бы положительны. Необходимым, но не достаточным, условием для этого является требование, чтобы сумма всех диагональных элементов ω_{nn} данной матрицы была положительной величиной. Покажем, что данное требование выполняется в случае рассматриваемой модели.

Из явного вида β-функций (4.37), а так же выражения (4.36) получаем:

$$\omega_{22} = -\frac{\varepsilon}{2} + c\left[8g_{3*} - 30g_{2*}^2\right], \quad \omega_{33} = -\varepsilon + c\left[18g_{3*} - 84g_{2*}^2\right], \tag{4.38}$$

а также:

$$\omega_{nn} = -\varepsilon\frac{n-1}{2} + cn(n+2)g_{3*} - cn(3n+5)g_{2*}^2, \tag{4.39}$$

для случая $n \geq 4$. Видно, что во всех случаях условие $\omega_{nn} > 0$ сводится к выполнению неравенства вида:

$$g_{3*} > A(n)\varepsilon + B(n)g_{2*}^2. \tag{4.40}$$

Коэффициенты $A(n)$ ограничены сверху и стремятся к нулю при $n \to \infty$, а коэффициенты $B(n)$ всегда положительны, ограничены сверху и с ростом n стремятся к предельному значению $B(\infty) = 3$. Отсюда следует, что существует такая область на плоскости параметров g_{3*} и g_{2*}^2 для которой данная система неравенств выполняется.

Если область ИК притяжения на поверхности фиксированных точек действительно существует, то так же как и в работе [22] исследуемая модель может проявлять ИК скейлинг с неуниверсальными критическими размерностями, зависящими от конкретного выбора параметров g_{3*} и g_{2*}^2. В частности, так как поле h не ренормируется, имеем $\gamma_h^* = 0$. Соотношения (4.11) вместе с каноническими размерностями из таблицы 4.2 дают в результате точное соотношение $2\Delta_h = d - 2\Delta_\omega$, а из (4.37) находим в однопетлевом приближении, что $\Delta_\omega = 2 - c(g_{3*} - 2g_{2*}^2)$, $\Delta_h = d/2 - 2 + c(g_{3*} - 2g_{2*}^2)$.

4.3. Непрерывная модель СОК Хуа-Кардара

4.3.1. Формулировка модели

Считается, что феномен самоорганизованной критичности (СОК) широко распространен в природе и встречается во множестве самых различных неравновесных систем с диссипативным переносом [99–102]. Примерами могут выступать лавины на склонах куч сыпучих веществ, различные распределения возникающие при формировании капель, вероятности некоторых процессов связанных с землетрясениями, изменение числа видов или представителей вида в процессе эволюции и т.д. (см. [103] для подробного обзора всех примеров). Отличительной особенностью подобных систем является отсутствие в них управляющих параметров: аналогов температуры или внешнего поля в случае теории фазовых переходов. Считается, что подобные системы достигают критического состояния исключительно за счет своей внутренней динамики.

Обычно анализ подобных систем основывается на построении неких дискретных моделей. Однако в работе [24] была предложена непрерывная модель СОК возникающей при рассмотрении эволюции некоторой границы в анизотропной системе. Примером такой системы может выступать эрозия песчаного ландшафта на склоне, имеющем некоторое выделенное направление [20,26,104]. Также модель рассматривалась под влиянием турбулентного перемешивания [105]. Данная модель задается стохастическим дифференциальным уравнением:

$$\partial_t h = \nu_{\perp 0}\, \partial_\perp^2 h + \nu_{\parallel 0}\, \partial_\parallel^2 h - \partial_\parallel h^2/2 + f. \tag{4.41}$$

Нелинейный член нарушает инвариантность детерминистической части уравнения относительно отражения выделенного направления $x_\parallel \to -x_\parallel$. Однако при этом сохраняется инвариантность относительно преобразований вида $x_\parallel, h \to -x_\parallel, -h$.

Детерминистическая часть данного уравнения выражает собой локальный закон сохранения. Поэтому в отсутствие шума уравнение (4.41) сводится к уравнению неразрывности для поля высоты:

$$\partial_t h + \nabla \cdot \mathbf{j} = \mathbf{0}. \tag{4.42}$$

Такое представление запрещает включение в уравнение членов типа τh, которые ввели бы в модель управляемые характерные размеры и времена корреляций. Подобные члены не возникают в модели и после включения случайного шума. На языке теории поля это соответствует тому, что подобные члены не возникают в петлевых вкладах.

В данном разделе рассматривается модель СОК (4.41) со "Статическим" случайным шумом (3.5). Модель эквивалентна теоретико-полевой модели с функционалом действия:

$$S(\Phi) = h' D_0 h' + h' \left\{ -\partial_t h + \nu_{\perp 0}\, \partial_\perp^2 h + \nu_{\parallel 0}\, \partial_\parallel^2 h - \partial_\parallel h^2/2 \right\}. \tag{4.43}$$

Здесь $\nu_{\perp 0} > 0$, $\nu_{\| 0} > 0$ - коэффициенты вязкости вдоль соответствующих направлений. Свободные пропагаторы модели в частотно-импульсном представлении имеют вид:

$$\langle hh' \rangle_0 = \langle h'h \rangle_0^* = \left\{ -i\omega + \nu_{\|0} k_\|^2 + \nu_{\perp 0} k_\perp^2 \right\}^{-1}, \tag{4.44}$$

$$\langle hh \rangle_0 = 4D_0 \pi \delta(\omega) / \left\{ \nu_{\|0} k_\|^2 + \nu_\perp k_{\perp 0}^2 \right\}^2 \tag{4.45}$$

Структура нелинейности приводит к следующей форме вершины в диаграммах:

$$\langle h'hh \rangle_0 = i\mathbf{p}_\|, \tag{4.46}$$

где $\mathbf{p}_\|$ – продольная часть импульса поля h'. Роль константы взаимодействия играет параметр определяемый как:

$$g_0 = D_0 \nu_{\|0}^{-3/2} \nu_{\perp 0}^{-5/2}. \tag{4.47}$$

Требование стабильности модели накладывает на него стандартное ограничение $g_0 > 0$.

4.3.2. Ультрафиолетовая перенормировка

Анализ канонических размерностей полей и параметров модели (4.43), представленных в таблице 4.3 показывает, что модель является логарифмичной при $d = 6$. При этом поверхностные УФ расходимости содержатся только в 1-неприводимых функциях $\langle h'hh \rangle_{1-\text{н}}$ и $\langle h'h \rangle_{1-\text{н}}$. Отметим также, что функция $\langle h'h \rangle_{1-\text{н}}$ не содержит контрчленов к члену действия с производной $\partial_\perp^2$, т.к. поле h' всегда входит в функции Грина только в форме производной $\partial_\| h'$. Это приводит к тому, что скалярные произведения соответствующих импульсов зануляются во всех диаграммах. Таким образом, модель (4.43) мультипликативно ренормируема.

Таблица 4.3. Канонические размерности полей и параметров в модели (4.43).

F	h'	h	$\nu_{\perp 0}$	$\nu_{\parallel 0}$	D_0	g_0	μ
d_F^ω	-1	1	1	1	4	0	0
$d_F^\parallel$	2	-1	0	-2	-3	0	0
$d_F^\perp$	$d-1$	0	-2	0	$1-d$	$6-d$	1
d_F	$d-1$	1	0	0	$6-d$	$6-d$	1

Как следствие, ренормируемое действие получается путем перенормировки полей и параметров модели:

$$h \to Z_h h, \quad h' \to Z_{h'} h', \quad \nu_{\parallel 0} \to \nu_\parallel Z_{\nu_\parallel}, \tag{4.48}$$

$$D_0 \to D = Z_g Z_{\nu_\parallel}^{3/2} Z_{\nu_\perp}^{5/2} g \nu_\parallel^{3/2} \nu_\perp^{5/2} \mu^\varepsilon, \tag{4.49}$$

и имеет вид:

$$S_R(\Phi) = h' D h' + h' \left\{ -\partial_t h + \nu_\perp \partial_\perp^2 h + Z_1 \nu_\parallel \, \partial_\parallel^2 h - Z_2 \partial_\parallel h^2/2 \right\}. \tag{4.50}$$

Связь нумерованных констант, вычисляемых из требования сокращения расходимостей в 1-неприводимых функциях Грина с константами перенормировки параметров, дается соотношениями:

$$Z_g = Z_1^{-3/2} Z_2^2, \quad Z_{\nu_\parallel} = Z_1, \quad Z_{\nu_\perp} = 1, \quad Z_h = Z_{h'}^{-1} = Z_2. \tag{4.51}$$

В данном разделе используется схема минимальных вычитаний с $\varepsilon = 6 - d$. Для удобства далее сделана замена $g \to g S_6/(2\pi)^6$. Тогда однопетлевой расчет дает:

$$Z_1 = 1 - \frac{4g}{3\varepsilon}, \quad Z_2 = 1 + \frac{g}{3\varepsilon}, \tag{4.52}$$

4.3.3. РГ функции и фиксированные точки

Из определения РГ функций (1.21), (1.26) имеем:

$$\gamma_{\nu_\parallel} = 4g/3, \quad \gamma_{\nu_\perp} = 0, \quad \beta_g = -g(\varepsilon - 8g/3). \tag{4.53}$$

Анализ данных выражний показывает, что в модели (4.43) присутствуют две неподвижных точки:

Гауссова неподвижная точка:

$$g^* = 0, \quad \omega = -\varepsilon. \tag{4.54}$$

Неподвижная точка:

$$g^* = 3\varepsilon/8, \quad \omega = \varepsilon. \tag{4.55}$$

Вторая точка является ИК притягивающей в физически интересной размерности пространства $d = 2$, что предполагает скейлинговое поведение функций Грина модели (4.43), с универсальными критическими показателями.

4.3.4. Критические размерности

В анизотропном случае критическая размерность Δ_F ИК существенной величины F ищется на основе уравнения ренормгруппы в фиксированной точке (1.46), а также трех соотношений типа (1.47), выражающих масштабную инвариантность величины F относительно растяжений времени и координат, независимо, вдоль вектора $\mathbf{n}$ и в ортогональном ему направлении. При этом нас интересует асимптотика больших времен и расстояний, поэтому при описании соответствующего скейлинга фиксированными считаются параметры μ, $\nu_{\|}$ и $\nu_{\perp}$. Производные по ним должны быть исключены из этих уравнений. В купе с нормировочным условием $\Delta_{k_{\perp}}=1$ в итоге получаем:

$$\Delta_F = d_F^{\perp} + d_F^{\|}\Delta_{\|} + \Delta_{\omega} d_F^{\omega} + \gamma_F^*, \tag{4.56}$$

где

$$\Delta_{\omega} = 2 - \gamma^*_{\nu_{\perp}}, \quad \Delta_{\|} = 1 + \gamma^*_{\nu_{\|}}/2. \tag{4.57}$$

Пользуясь данными определениями, в однопетлевом приближении находим для гауссовой точки:

$$\Delta_h = 1, \quad \Delta_{h'} = 5 - \varepsilon, \quad \Delta_{\omega} = 2, \quad \Delta_{\|} = 1 \tag{4.58}$$

и для ИК притягивающей неподвижной точки (4.55)

$$\Delta_h = 1 - 3\varepsilon/8, \quad \Delta_{h'} = 5 + 5\varepsilon/8, \quad \Delta_{\omega} = 2, \quad \Delta_{\|} = 1 + \varepsilon/4. \tag{4.59}$$

Отметим, что хотя в модели и была обнаружена ИК притягивающая фиксированная точка, оценки на критические размерности получаемые на основе однопетлевого приближения в физически интересной размерности $d=2$ едва ли могут считаться надежными. Причина состоит в том, что в данной размерности формальный параметр разложения ε оказывается отнюдь не мал, а потому учет следующих порядков теории возмущений и асимптотических свойств коэффициентов рядов по параметру ε может существенно сказаться на характере ИК устойчивости данной фиксированной точки и численных оценках критических размерностей.

В силу вышесказанного, мы можем заключить лишь, что в физически интересной размерности пространства $d=2$ в модели имеется фиксировнная точка, потенциально способная отвечать за скейлинг. Однако для надежного установления ее ИК характеристик в данной размерности требуется вычисление старших порядков теории возмущений, асимптотический анализ их коэффициентов и применение подходящих техник суммирования.

4.4. Бесконечно-зарядная модель эрозии ландшафтов

4.4.1. Модель

Непосредственное измерение топографии ландшафтов показывает, что критический показатель огрубления χ существенно различается на различных масштабах [106, 107]. На масштабах меньше одного километра значения данного показателя лежат в интервале $0.3 - 0.5$, в то время как на больших масштабах он достаточно существенно возрастает и попадает в интервал $0.7 - 0.8$. В работах [20, 21] авторы связали данное явление с существенным влиянием анизотропии на малых масштабах. На масштабах больше одного километра ландшафт обычно не имеет выделенного направления наклона и поэтому может описываться изотропной моделью типа КПЗ. Значения показателя огрубления, предсказываемые такими моделями, находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными. На масштабах же меньших чем один километр, может оказаться существенной, например, холмистая природа местности: направление вдоль склона оказывается выделенным для потока, переносящего вещество. Данный эффект может существенно изменить критические показатели корреляционных функций модели.

В работах [20, 21] была предложена анизотропная модель, описывающая процессы переноса на малых масштабах. В качестве симметрии модели авторы выбрали $x_{\parallel}, h, f \to -x_{\parallel}, -h, -f$, что отличает ее от модели Хуа-Кардара (4.41) и приводит к другой форме нелинейности. В результате данная модель задается стохастическим уравнением:

$$\partial_t h = \nu_{\perp}\, \partial_{\perp}^2 h + \nu_{\parallel}\, \partial_{\parallel}^2 h + \frac{\lambda}{3} \partial_{\parallel}^2 h^3 + f. \tag{4.60}$$

Так как направление наклона в данной модели фиксированно, она применима только локально, на масштабе некоторого конкретного склона. РГ анализ модели был выполнен авторами [20, 21]. Полученные при этом результаты находились в хорошем согласии с результатами наблюдений. Однако, в работе [23] было показано, что в случае "теплового" шума (3.2) такая модель не является мультипликативно перенормируемой, так как нелинейность в (4.60) порождает бесконечное число контрчленов вида $\partial_{\parallel}^2 h^n$. Поэтому в той же работе было сформулировано бесконечно-зарядное обобщение модели эрозии, задающееся уравнением:

$$\partial_t h = \nu_{\perp}\, \partial_{\perp}^2 h + \nu_{\parallel}\, \partial_{\parallel}^2 h + \partial_{\parallel}^2 V(h) + f. \tag{4.61}$$

Такая модель является мультипликативно перенормируемой в том же смысле, что и модель рассмотренная в разделе 4.2. Выполненный в [23] РГ анализ модели привел к выводу, что в модели существует двумерная поверхность фиксированных точек, на которой могут быть ИК притягивающие области, ответственные за неуниверсальный критический скейлинг. Позднее данные результаты были подтверждены в работе [26], где бесконечно-зарядная модель эрозии исследовалась в рамках подхода "непертурбативной" ренормгруппы. В рамках того же подхода авторы [26] рассмотрели и модель (4.61) со “статическим” шумом (3.5). В данном случае ими была обнаружена линия фиксированных точек, так же приводящих к неуниверсальности критического показателя огрубления.

В данном разделе стохастическая задача (4.61) со “статическим” шумом (3.5) изучается методом квантовополевой ренормгруппы в рамках размерной регуляризации. Эта задача эквивалентна квантовополевой модели с функционалом действия:

$$S(\Phi) = h'h' + h' \left\{ -\partial_t h + \nu_{\perp 0}\, \partial_\perp^2 h + \nu_{\parallel 0}\, \partial_\parallel^2 h + \partial_\parallel^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_{n0} h^n}{n!} \right\}. \qquad (4.62)$$

При этом роль бесконечного набора констант взаимодействия играют параметры, вид которых определяется из соображений размерности как:

$$\lambda_{n0} = g_{n0} \nu_{\parallel 0}^{(n+3)/4} \nu_{\perp 0}^{3(n-1)/4}. \qquad (4.63)$$

4.4.2. Ультрафиолетовая перенормировка

Канонические размерности полей и параметров изучаемой модели представлены в таблице 4.4. Модель является логарифмичной в пространстве размерности $d = 4$. Анализ размерности полей h, h', с учетом производной входящей во все вершины, приводит к выводу, что поверхностные УФ расходимости содержатся во всех 1-неприводимых функциях Грина, содержащих одно поле h' и любое количество полей h. При этом контрчлены во всех случаях имеют вид $(\partial_\parallel^2 h')h^n$.

Таким образом, полученная модель является мультипликативно ренормируемой, а соответствующее ренормированое действие может быть записано в форме:

$$S_R(\Phi) = h'h' + h' \left\{ -\partial_t h + \nu_\perp \partial_\perp^2 h + Z_\parallel \nu_\parallel\, \partial_\parallel^2 h + \partial_\parallel^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Z_n \lambda_n h^n}{n!} \right\}. \qquad (4.64)$$

Таблица 4.4. Канонические размерности полей и параметров в модели (4.62).

F	h'	h	$\nu_{\perp 0}$	$\nu_{\parallel 0}$	λ_{n0}	g_0	μ
d_F^{ω}	1	-1	1	1	n	0	0
$d_F^{\parallel}$	$1/2$	$1/2$	0	-2	$-(n+3)/2$	0	0
$d_F^{\perp}$	$(d-1)/2$	$(d-1)/2$	-2	0	$(d-1)(1-n)/2$	$(1-n)(d-4)/2$	1
d_F	$d/2+2$	$d/2-2$	0	0	$(1-n)(d-4)/2$	$(1-n)(d-4)/2$	1

Оно может быть получено мультипликативной перенормировкой параметров:

$$\nu_{\parallel 0} \to \nu_{\parallel} Z_{\nu_{\parallel}}, \quad \lambda_{n0} \to \lambda_n = Z_{g_n} Z_{\nu_{\parallel}}^{(n+3)/4} g_n \nu_{\parallel}^{(n+3)/4} \nu_{\perp}^{3(n-1)/4} \mu^{\varepsilon(n-1)/2}, \tag{4.65}$$

где μ – ренормировочная масса, $\varepsilon = 4 - d$. Отметим, что член действия с производной $\partial_{\perp}^2$ не ренормируется, т.к. поле h' всегда входит в функции Грина только в форме производной $\partial_{\parallel} h'$. Связь нумерованных констант с константами ренормировки параметров дается соотношениями:

$$Z_{\nu_{\parallel}} = Z_{\parallel}, \quad Z_{g_n} = Z_n Z_1^{-n} \tag{4.66}$$

Для получения явных однопетлевых выражений для бесконечного набора констант ренормировки воспользуемся схемой описанной в разделе 4.2. Для внутренней самосогласованности приближения будем считать что $g_n \simeq g_2^{(n-1)}$. Поскольку все контрчлены в изучаемой модели имеют вид $(\partial_{\parallel}^2 h')h^n$, то расходящаяся часть выражения (4.25) может быть найдена в форме $\partial_{\parallel}^2 h' R(h)$. Это означает что матрицу (4.26) снова достаточно вычислить только в первом порядке по ее hh элементу. Воспользовавшись формулой (4.29) и учитывая, что в силу логарифмической расходимости контрчлена можно игнорировать неоднородность выражений $\partial_{\|}^{2} h'(x)$ и $h(x)$ получаем для расходящейся части $D^{(hh)}(x,x)$ следующее выражение:

$$D^{(hh)}(x,x) = \int\int \frac{d\omega d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^{d+1}} \frac{4\pi\delta(\omega)}{(\nu_{\perp}k_{\perp}^{2} + (\nu_{\|} + V')k_{\|}^{2})^{2}} = \\ = \frac{S_d}{(2\pi)^d}\frac{\mu^{-\varepsilon}}{\varepsilon}\frac{2}{\sqrt{(\nu_{\perp}(\nu_{\|} + V'))}}. \tag{4.67}$$

В результате, для расходящейся части (4.25) получаем:

$$L\Gamma^{(1)}(\Phi) = \frac{S_d}{(2\pi)^d}\frac{\mu^{-\varepsilon}}{\varepsilon}\int dx \frac{V''(h(x))}{\sqrt{\nu_{\perp}(\nu_{\|} + V'(h(x)))}}\,\partial^2 h'(x), \tag{4.68}$$

Где L - контрчленная операция. Введя представление:

$$\frac{V''(h(x))}{\sqrt{\nu_{\perp}(\nu_{\|} + V'(h(x)))}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{\varepsilon(n+1)/2}\nu_{\perp}^{(n-1)/4}\nu_{\|}^{(n+3)/4}\frac{r_n h^n}{n!}, \tag{4.69}$$

и потребовав, чтобы полюса по ε входящие в (4.69) и беспетлевые вклады в (4.25) сокращали друг друга, получаем константы ренормировки в однопетлевом приближении:

$$Z_{\|} = 1 - \frac{r_1 c}{2\varepsilon}, \quad Z_n = 1 - \frac{r_n}{g_n}\frac{c}{2\varepsilon}, \tag{4.70}$$

где $c \equiv 2S_4/(2\pi)^4$ – множитель, определяющий нормировку констант связи.

4.4.3. РГ функции и фиксированные точки

Из общего выражения (1.21) а так же связей (4.66) получаем следующие выражения для β-функций и аномальных размерностей модели:

$$\gamma_{\nu} = cD_g r_1/2; \tag{4.71}$$

$$\beta_n = -\varepsilon\frac{n-1}{2}g_n + ng_n\gamma_{\nu} - \frac{c}{2}(D_g - n + 1)r_n, \tag{4.72}$$

где $D_g \equiv \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)g_n\partial_{g_n}$.

Явные выражения для полиномов r_n находятся из определений (4.27), (4.65), (4.68). Отметим что коэффициент r_0 не дает вклада в (4.69), так как стоит при полной производной вдоль продольного направления. Приведем явные выражения для первых четырех коэффициентов r_n

$$
\begin{gathered}
r_1 = g_3 - \frac{1}{2}g_2^2, \quad r_2 = g_4 - \frac{3}{2}g_2g_3 + \frac{3}{4}g_2^3, \\
r_3 = g_5 - 2g_2g_4 - \frac{3}{2}g_3^2 + \frac{9}{2}g_2^2g_3 - \frac{15}{8}g_2^4, \\
r_4 = g_6 - \frac{5}{2}g_2g_5 + \frac{15}{2}g_2^2g_4 - 5g_3g_4 + \frac{45}{4}g_2g_3^2 - \frac{75}{4}g_2^3g_3 + \frac{105}{16}g_2^5.
\end{gathered}
$$

Подставляя данные выражения в (4.71), (4.72) для ренормгрупповых функций получаем:

$$
\begin{aligned}
\gamma_{\|} &= c(2g_3 - g_2^2), \qquad (4.73) \\
\beta_2 &= -\frac{\varepsilon}{2}g_2 + c(-g_4 + \frac{11}{2}g_2g_3 - \frac{11}{4}g_2^3), \\
\beta_3 &= -\varepsilon g_3 + c(-2g_5 + 4g_2g_4 + 6g_3^2 - \frac{21}{2}g_2^2g_3 + \frac{15}{4}g_2^4), \\
\beta_4 &= -\frac{3\varepsilon}{2}g_4 + c(-2g_6 + 5g_2g_5 + \frac{27}{2}g_4g_3 - \frac{67}{4}g_4g_2^2 - \frac{45}{2}g_3^2g_2 + \frac{75}{2}g_2^3g_3 - \frac{105}{8}g_2^5).
\end{aligned}
$$

4.4.4. Критические размерности

Из явного вида β-функций (4.73) следует, что при поиске координат фиксированных точек, мы можем выбрать координаты g_{2*} и g_{3*} произвольно, тогда как все g_{n*} с $n \geq 4$ будут однозначно определяться через них с помощью уравнений $\beta_k(g_{2*}, g_{3*}) = 0$, $k \geq 2$. Так же как и ранее это означает, что на однопетлевом уровне в изучаемой модели в бесконечномерном пространстве констант взаимодействия существует двумерная поверхность фиксированных точек. Их свойства ИК устойчивости, определяются собственными числами бесконечной матрицы ω_{mn}, диагональные элементы которой имеют следующий вид:

$$\omega_{22} = -\frac{\varepsilon}{2} + c\left[\frac{11}{2}g_{3*} - \frac{33}{4}g_{2*}^2\right], \quad \omega_{33} = -\varepsilon + c\left[12g_{3*} - \frac{21}{2}g_{2*}^2\right], \qquad (4.74)$$

а также:

$$\omega_{nn} = -\varepsilon\frac{n-1}{2} + c\frac{(n+1)^2+2}{2}g_{3*} - \frac{c}{4}(n(3n+4)+3)g_{2*}^2. \qquad (4.75)$$

для случая $n \geq 4$. Для данных элементов выполняется условие, необходимое для существования ИК притягивающих областей фиксированных точек. И действительно, условие $\omega_{nn} > 0$ сводится к выполнению неравенства вида:

$$g_{3*} > A(n)\varepsilon + B(n)g_{2*}^2. \qquad (4.76)$$

Коэффициенты $A(n)$ ограничены сверху и стремятся к нулю при $n \to \infty$, а коэффициенты $B(n)$ всегда положительны, ограничены сверху, и с ростом n стремятся к предельному значению $B(\infty) = 3/2$. Отсюда следует, что существует такая область на плоскости параметров g_{3*} и g_{2*}^2, для которой данная система неравенств выполняется. В свою очередь возможное существование таких областей означает, что модель может проявлять ИК скейлинг с неуниверсальными критическими размерностями. Соотношения (4.11) вместе с каноническими размерностями из таблицы 4.4 и тем фактом, что $\gamma_h^* = 0$ дают в результате точное соотношение $2\Delta_h = d - 1 + \Delta_\parallel - \Delta_\omega;$, а из (4.73) находим в однопетлевом приближении, что $\Delta_\parallel = 1 + c(2g_{3*} - g_{2*}^2)/2$, $\Delta_h = c(2g_{3*} - g_{2*}^2)/4$.

Заключение

В настоящей работе, методом квантовополевой ренормгруппы, было изучено асимптотическое поведение нескольких моделей критического состояния и стохастической динамики. Для всех рассмотренных моделей было установлено, что они являются мультипликативно ренормируемыми, а так же были вычислены и исследованы аномальные размерности входящих в них полей и параметров.

Ренормгрупповой анализ $U(n)$-симметричной модели χ^4 с заряженным антисимметричным тензорным параметром порядка, позволил обнаружить в модели четыре фиксированные точки, соответствующие нетривиальному фиксированному значению эффективного электрического заряда. Было установлено, что координаты двух из них всегда имеют нетривиальную мнимую часть и не могут быть достигнуты РГ потоками. Оставшиеся две точки лежат в физически интересной области параметров лишь в случае $n > 19$, и являются при этом седловидными точками. Таким образом, учет взаимодействия параметра порядка с магнитным полем сохраняет качественную картину, полученную в работах [18, 32] и единственным возможным поведением модели в рамках теории возмущений является фазовый переход первого рода. Для случая $n \leq 19$ данное поведение модели сохраняется во всех порядках ε разложения. Еще одним результатом, полученным для этой модели, стал факт калибровочной зависимости аномальной размерности параметра порядка. При этом было показано, что поперечная калибровка является ренорминвариантной.

Для O(n)-симметричной модели с чисто вещественным антисимметричным тензорным параметром порядка РГ функции были вычислены в рамках подхода размерной регуляризации и ε-разложения, а также в рамках подхода ренормгруппы в фиксированной размерности пространства и псевдо-ε-разложения. Для полученных ε-разложений был установлен их асимптотический характер, а параметры асимптотики найдены в явном виде. В результате, в модели были обнаружены три нетривиальные фиксированные точки. В случае $n > 4$ две из них имеют мнимую часть, а последняя является седловидной точкой. Таким образом в данном случае в рамках теории возмущений единственной возможной ситуацией является выход РГ потока за границу устойчивости модели, что интерпретируется как фазовый переход первого рода. В случае $n = 4$ в модели присутствует ИК притягивающая фиксированная точка. Тем не менее, ИК поведение модели является неуниверсальным и зависит от выбора начальных данных. Если они лежат в области притяжения данной фиксированной точки, то в модели осуществляется фазовый переход второго рода. В такой ситуации функции Грина модели, в частности парный коррелятор, испытывают скейлинговое поведение. Для соответствующего ему критического индекса Фишера была получена численная оценка.

Так же в работе были рассмотрены четыре стохастических модели со "статическим" случайным шумом (3.5). Во всех четырех случаях их удалось переформулировать в виде теоретико-полевой модели двух полей, при этом логарифмическая размерность полученной модели оказалась равна $d^* = d^{**} + 2$, где d^{**} – логарифмическая размерность соответствующей модели с “тепловым” шумом (3.2).

Для модели Кардара-Паризи-Занга в результате РГ анализа была обнаружена нетривиальная фиксированная точка, которая тем не менее, лежит вне физической области параметров т.к. соответствует отрицательному значению амплитудного множителя парного коррелятора, задающего форму шума.

Для непрерывной модели самоорганизованной критичности Хуа-Кардара в рамках подхода размерной регуляризации и ε-разложения была обнаружена нетривиальная фиксированная точка, которая на однопетлевом уровне оказалась ИК притягивающей и были вычислены соответствующие ей критические размерности. Тем не менее, в силу того, что для физически интересной размерности пространства $d = 2$ параметр ε-разложения оказывается велик, результаты однопетлевого приближения едва ли могут считаться надежными, поэтому вопрос о наличии скейлинга в данной модели в случае двумерного пространства во многом остается открытым.

Кроме того, были рассмотрены две бесконечно-зарядных модели: изотропная модель роста и анизотропная модель эрозии ландшафтов. Несмотря на присутствие в моделях бесконечного количества констант перенормировки, в обоих случаях удалось явно вычислить однопетлевой контрчлен. Анализ соответствующих РГ функций показал, что в однопетлевом приближении в обеих моделях имеется двумерная поверхность фиксированных точек, на которой могут присутствовать ИК притягивающие области. Если они действительно существуют, то корреляционные функции будут испытывать скейлинговое поведение с неуниверсальными критическими показателями, зависящими от выбора конкретной фиксированной точки внутри области ИК притяжения. В обеих моделях было получено точное соотношение на критические размерности поля и параметров, которое может непосредственно проверяться на эксперименте.

Благодарности

Диссертант выражает благодарность Антонову Николаю Викторовичу за научное руководство, терпение и неоценимую помощь при выполнении данной работы.

Автор благодарит Компанийца Михаила Владимировича за многочисленные советы и полезные обсуждения.

Также диссертант благодарит преподавателей и сотрудников кафедры физики высоких энергий и элементарных частиц Санкт–Петербургского Государственного Университета и преподавателей Кировского Физико-Математического Лицея за развитие интереса к теоритической физике а также за годы преподавания и наставлений.

Кроме того, автор благодарит своих родителей и друзей за неоценимую помощь и моральную поддержку.

Литература

1. *Васильев, А. Н.* Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике / А. Н. Васильев. — СПб: ПИЯФ, 1998.

2. *Zinn-Justin, J.* Quantum Field Theory and Critical Phenomena / J. Zinn-Justin. — Clarendon, Oxford, 1989.

3. *Batkovich, D. V.* Six loop analytical calculation of the field anomalous dimension and the critical exponent η in $O(n)$-symmetric ϕ^4 model / D. V. Batkovich, K. G. Chetyrkin, M. V. Kompaniets // *http://arxiv.org/abs/1601.01960.* — 2016.

4. *Kompaniets, M. V.* Minimally subtracted six-loop renormalization of $O(n)$-symmetric ϕ^4-theory and critical exponents / M. V. Kompaniets, E. Panzer // *Phys. Rev. D.* — 2017. — Vol. 96. — P. 036016.

5. *Nickel, B. G.* Compilation of 2-pt and 4-pt graphs for continuous spin model / B. G. Nickel, D. I. Meiron, G. A. Baker // *University of Guelph report.* — 1977.

6. *Baker, G. A.* Critical indices from perturbation analysis of the Callan-Symanzik equation / G. A. Baker, B. G. Nickel, D. I. Meiron // *Phys. Rev. B.* — 1978. — Vol. 17. — Pp. 1365–1374.

7. *Adzhemyan, L. Ts.* Critical exponent η in $2D$ $O(N)$-symmetric ϕ^4-model

up to 6 loops / L. Ts. Adzhemyan, Yu. V. Kirienko, M. V. Kompaniets // *ArXiv:1602.02324v1.* — 2016.

8. *Прудников, В.В.* Теоретико-полевые и численные методы описания критических явлений в структурно неупорядоченных системах / В.В. Прудников, П.В. Прудников, А.Н. Вакилов. — Изд-во Омского гос. Ун-та им. Ф. М. Достоевского, 2012.

9. *Zia, R.K.P.* Critical behaviour of the continuous n-component Potts model / R.K.P. Zia, D.J. Wallace // *J. Phys. A.* — 1975. — Vol. 8. — P. 1495.

10. *Priest, R.G.* Critical properties of two tensor models with application to the percolation problem / R.G. Priest, T.C. Lubensky // *Phys. Rev. B.* — 1976. — Vol. 13, no. 4159.

11. *Korzhenevskii, A.L.* Effect of fluctuations on the properties of the phase transition from a nematic liquid crystal to an isotropic liquid / A.L. Korzhenevskii, B.N. Shalaev // *Sov. Phys. JETP.* — 1979. — Vol. 49, no. 6. — P. 1094.

12. *Anderson, P. W.* Anisotropic Superfluidity in ^3He: A Possible Interpretation of Its Stability as a Spin-Fluctuation Effect / P. W. Anderson, W.F. Brinkman // *Phys. Rev. Lett.* — 1973. — Vol. 30. — P. 1108.

13. *Brinkman, W.F.* Spin-fluctuation stabilization of anisotropic superfluid states / W.F. Brinkman, J. Serene, P.W. Anderson // *Phys. Rev. A.* — 1974. — Vol. 10. — P. 2386.

14. *Sokolov, A.I.* Phase diagram of superfluid He_3 / A.I. Sokolov // *Sov. Phys. JETP.* — 1980. — Vol. 51, no. 5. — P. 998.

15. *Sokolov, A.I.* Thermodynamic potentials of the superfluid phases of helium-3 in the region of strong critical fluctuations / A.I. Sokolov // *Sov. Phys. JETP.* — 1983. — Vol. 57, no. 4. — P. 798.

16. *Sauls, J.A.* $^3P_2$ pairing near the transition temperature in neutron-star matter / J.A. Sauls, J.W. Serene // *Phys. Rev. D.* — 1978. — Vol. 17. — P. 1524.

17. *Sokolov, A.I.* Phase transitions in a superfluid neutron liquid / A.I. Sokolov // *Sov. Phys. JETP.* — 1980. — Vol. 52, no. 4. — P. 575.

18. *Nalimov, M. Yu.* Temperature Green's functions in Fermi systems: The superconducting phase transition / M. Yu. Nalimov, M. V. Komarova, J. Honkonen // *Theor. Math. Phys.* — 2013. — Vol. 176, no. 1. — Pp. 906–912.

19. *Kardar, M.* Dynamic Scaling of Growing Interfaces / M. Kardar, G. Parisi, Y. C. Zhang // *Phys. Rev. Lett.* — 1986. — Vol. 56. — P. 889.

20. *Pastor-Satorras, R.* Scaling of a slope: The erosion of tilted landscapes / R. Pastor-Satorras, D. H. Rothman // *J. Stat. Phys.* — 1998. — Vol. 93, no. 3-4. — Pp. 477–500.

21. *Pastor-Satorras, R.* Stochastic Equation for the Erosion of Inclined Topography / R. Pastor-Satorras, D. H. Rothman // *Phys. Rev. Lett.* — 1998. — Vol. 80. — Pp. 4349–4352.

22. *Antonov, N. V.* The quantum-field renormalization group in the problem of a growing phase boundary / N. V. Antonov, A. N. Vasil'ev // *JETP.* — 1995. — Vol. 81. — Pp. 485–489.

23. *Антонов, Н. В.* Скейлинг в эрозии ландшафтов: ренормгрупповой анализ бесконечнозарядной модели / Н. В. Антонов, П. И. Какинь // *ТМФ.* — 2017. — Vol. 190, no. 2. — Pp. 226–238.

24. *Hwa, T.* Dissipative transport in open systems: An investigation of self-organized criticality / T. Hwa, M. Kardar // *Phys. Rev. Lett.* — 1989. — Vol. 62, no. 16. — Pp. 1813–1816.

25. Burgers equation with correlated noise: Renormalization-group analysis and applications to directed polymers and interface growth / E. Medina, T. Hwa, M. Kardar, Y. C. Zhang // *Phys. Rev. A.* — 1989. — Vol. 39, no. 6. — Pp. 3053–3075.

26. *Duclut, C.* Nonuniversality in the erosion of tilted landscapes / C. Duclut, B. Delamotte // *Phys. Rev. E.* — 2017. — Vol. 96. — P. 012149.

27. *Orlov, E. V.* Critical thermodynamics of two-dimensional systems in the ve-loop renormalization-group approximation / E. V. Orlov, A. I. Sokolov // *Physics of the Solid State.* — 2000. — Vol. 42, no. 11. — Pp. 2151–2158.

28. *Folk, R.* Pseudo-ε expansion of six-loop renormalization-group functions of an anisotropic cubic model / R. Folk, Yu. Holovatch, T. Yavorskii // *Phys. Rev. B.* — 2000. — Vol. 62. — P. 12195.

29. *Holovatch, Yu.* On the criticality of frustrated spin systems with non-collinear order / Yu. Holovatch, D. Ivaneiko, B. Delamotte // *J. Phys. A.* — 2004. — Vol. 37. — P. 3569.

30. *Абрикосов, А. А.* Методы квантовой теории поля в статистической физике / А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский. — Добросвет, 1998.

31. *Larkin, A. I.* Fluctuation phenomena in superconductors, Handbook on Superconductivity: Conventional and Unconventional Superconductors / A. I. Larkin, A. A. Varlamov. — Springer, Berlin, 2002.

32. *Kalagov, G. A.* Renormalization-group investigation of a superconducting $U(r)$-phase transition using five loops calculations / G. A. Kalagov, M. V. Kompaniets, M. Yu. Nalimov // *Nucl. Phys. B.* — 2016. — Vol. 905. — Pp. 16–44.

33. *Halperin, B. I.* First-Order Phase Transitions in Superconductors and Smectic-A Liquid Crystals / B. I. Halperin, T.C. Lubensky, S. K. Ma // *Phys. Rev. Lett.* — 1974. — Vol. 32. — P. 292.

34. *Lannert, C.* Critical Dynamics of Superconductors in the Charged Regime / C. Lannert, S. Vishveshwara, M. P. A. Fisher // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 92. — P. 097004.

35. *Dudka, M.* Gauge dependence of the critical dynamics at the superconducting phase transition / M. Dudka, R. Folk, G. Moser // *Condensed Matter Physics.* — 2007. — Vol. 10, no. 2. — Pp. 189–200.

36. *Higgs, P. W.* Broken symmetries, massless particles and gauge fields / P. W. Higgs // *Phys.Lett.* — 1964. — Vol. 12. — P. 132.

37. *Higgs, P. W.* Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons / P. W. Higgs // *Phys.Rev.Lett.* — 1964. — Vol. 13. — P. 508.

38. *Higgs, P. W.* Spontaneous Symmetry Breakdown without Massless Bosons / P. W. Higgs // *Phys.Rev.* — 1966. — Vol. 145. — P. 1156.

39. *Бъёркен, Дж.Д.* Релятивистская квантовая теория / Дж.Д. Бьёркен, С.Д. Дрелл. — М., Наука, 1978.

40. *Folk, R.* On the critical fluctuations in superconductors / R. Folk, Yu. Holovatch // *J. Phys. A.* — 1996. — Vol. 29, no. 13. — Pp. 3409–3425.

41. *Belyakov, V. A.* The blue phase of liquid crystals / V. A. Belyakov, V. E. Dmitrienko // *Sov. Phys. Uspekhi.* — 1985. — Vol. 28. — P. 535.

42. *Brazovski, S. A.* Phase transitions in cholesteric liquid crystals / S. A. Brazovski, L. D. Dmitriev // *Sov. Phys. JETP.* — 1975. — Vol. 42, no. 3. — P. 497.

43. *Brazovski, S. A.* Critical phenomena in cholesteric liquid crystals / S. A. Brazovski, V. M. Filev // *Sov. Phys. JETP.* — 1978. — Vol. 48, no. 3. — Pp. 497–573.

44. *Grebel, H.* Landau theory of cholesteric blue phases / H. Grebel, R. M. Hornreich, S. Shtrikman // *Phys. Rev. A.* — 1983. — Vol. 28. — P. 1114.

45. *Grebel, H.* Landau theory of cholesteric blue phases: The role of higher harmonics / H. Grebel, R. M. Hornreich, S. Shtrikman // *Phys. Rev. A.* — 1984. — Vol. 30. — P. 3264.

46. *Hornreich, R. M.* Some open questions in cholesteric blue phases / R. M. Hornreich, S. Shtrikman // *Z. Phys. B. – Cond. Mat.* — 1987. — Vol. 68. — P. 369.

47. *Izyumov, Yu. A.* Phase Transitions and Crystal Symmetry / Yu. A. Izyumov, V. N. Syromyatnikov. — Nauka, 1984.

48. *Watson, G. W.* Dynamical instabilities in a-quartz and a-berlinite: A mechanism for amorphization / G. W. Watson, S. C. Parker // *Phys. Rev. B.* — 1995. — Vol. 52. — P. 13306.

49. *Dove, M. T.* Lattice simulation studies of the ferroelastic phase transitions in $(Na, K)AISi_3O_8$ and $(Sr, Ca)AI_2Si_2O_8$ feldspar solid solutions / M. T. Dove, S. A. T. Redfern // *Am. Mineral.* — 1997. — Vol. 82. — P. 8.

50. *Goryainov, S. V.* Twisting of a-quartz tetrahedra at pressures near the transition to the amorphous state / S. V. Goryainov, N. N. Ovsyuk // *JETP Lett.* — 1999. — Vol. 69. — P. 467.

51. *Goryainov, S. V.* Mechanism of the formation of a soft mode in ferroelastic phase transition / S. V. Goryainov, N. N. Ovsyuk // *JETP Lett.* — 2001. — Vol. 73. — Pp. 456—-459.

52. Higher order contributions to critical exponents / E. Brezin, J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, B. G. Nickel // *Phys. Lett. A.* — 1973. — Vol. 44. — P. 227.

53. *Vladimirov, A. A.* On the calculation of critical exponents by the methods of quantum field theory / A. A. Vladimirov, D. I. Kazakov, O. V. Tarasov // *Sov.Phys, JETP.* — 1979. — Vol. 50. — P. 521.

54. *Владимиров, А. А.* Об инвариантной регуляризации / А. А. Владимиров // *ТМФ.* — 1978. — Vol. 35, no. 3. — P. 392.

55. *Владимиров, А. А.* Методы вычисления многопетлевых диаграмм и ренормгрупповой анализ теории φ^4 / А. А. Владимиров // *ТМФ.* — 1978. — Vol. 36, no. 2. — P. 271.

56. *Владимиров, А. А.* Метод вычисления ренормгрупповых функций в схеме размерной ренормировки / А. А. Владимиров // *ТМФ.* — 1980. — Vol. 43, no. 2. — P. 210.

57. *Chetyrkin, K. G.* Five-loop calculations in the $g\phi^4$ model and the critical index η / K. G. Chetyrkin, A. L. Kataev, F. V. Tkachev // *Phys.Lett. B.* — 1981. — Vol. 99. — P. 147.

58. *Chetyrkin, K. G.* Eratum / K. G. Chetyrkin, A. L. Kataev, F. V. Tkachev // *Phys.Lett. B.* — 1981. — Vol. 101. — P. 457(E).

59. Five-loop renormalization group calculations in the $g\phi^4$ theory / K. G. Chetyrkin, S. G. Gorishny, S. A. Larin, F. V. Tkachov // *Phys. Lett. B.* — 1983. — Vol. 132. — P. 351.

60. Аналитическое вычисление многопетлевых приближений ренормгрупповых функций модели $g\phi^4$ в MS-схеме: подиаграмный анализ / K. G. Chetyrkin, S. G. Gorishny, S. A. Larin, F. V. Tkachov // *Preprint INR.* — 1986. — Vol. P-0453.

61. *Kazakov, D. I.* The method of uniqueness, a new powerful technique for multiloop calculations / D. I. Kazakov // *Phys. Lett. B.* — 1983. — Vol. 133. — P. 406.

62. *Казаков, Д. И.* Вычисление фейнмановских интегралов методом

"уникальностей" / Д. И. Казаков // *ТМФ.* — 1984. — Vol. 58, no. 3. — Pp. 343–353.

63. Five-loop renormalization group functions of $O(n)$-symmetric ϕ^4-theory and ϵ-expansions of critical exponents up to ϵ^5 / H. Kleinert, J. Neu, V. Shulte-Frohlinde et al. // *Phys.Lett. B.* — 1991. — Vol. 272. — P. 39.

64. *Vermaseren, J. A. M.* New features of FORM / J. A. M. Vermaseren // *arXiv:math-ph/0010025.* — 2000.

65. FORM version 4.0 / J. Kuipers, T. Ueda, J. A. M Vermaseren, J. Vollinga // *Comp. Phys. Comm.* — 2013. — Vol. 184, no. 5. — Pp. 1453–1467.

66. *Bender, C. M.* Anharmonic Oscillator / C. M. Bender, T. Wu // *Phys. Rev.* — 1969. — Vol. 184. — P. 1231.

67. *Васильев, А. Н.* Способ суммирования ряда теории возмущений в скалярных теориях / А. Н. Васильев, А. Г. Басуев // *ТМФ.* — 1974. — Vol. 18, no. 2. — Pp. 181–189.

68. *Липатов, Л.Н.* Расходимость ряда теории возмущений и квазиклассика / Л.Н. Липатов // *ЖЭТФ.* — 1997. — Vol. 72. — P. 411.

69. *Brezin, E.* Perturbation theory at large order. I. The φ^{2N} interaction / E. Brezin, J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin // *Phys. Rev. D.* — 1977. — Vol. 15. — Pp. 1544–1557.

70. *Kazakov, D. I.* Asymptotic series of quantum field theory and their sum-

mation / D. I. Kazakov, D. V. Shirkov // *Fortsch. Phys.* — 1980. — Vol. 28. — P. 465.

71. *Kalagov, G. A.* Renormalization-group study of a superconducting phase transition: Asymptotic behavior of higher expansion orders and results of three-loop calculations / G. A. Kalagov, M. V. Kompaniets, M. Yu. Nalimov // *Theor. Math. Phys.* — 2014. — Vol. 181, no. 2. — P. 1448–1458.

72. *Antonenko, S.A.* Phase transitions in anisotropic superconducting and magnetic systems with vector order parameters: Three-loop renormalization-group analysis / S.A. Antonenko, Sokolov A.I. // *Phys. Rev. B.* — 1991. — Vol. 49, no. 22. — Pp. 15901–15912.

73. *Комарова, М. В.* Асимптотика старших порядков теории возмущений: константы ренормировки $O(n)$-симметричной теории ϕ^4 в $(4-\epsilon)$-разложении / М. В. Комарова, М. Ю. Налимов // *ТМФ.* — 2001. — Vol. 126, no. 3. — Pp. 409–426.

74. *Le Guillou, J. C.* Critical exponents from field theory / J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin // *Phys. Rev. B.* — 1980. — Vol. 21, no. 9. — Pp. 3976–3998.

75. *Sololov, A.I.* Pseudo-ε-expansion and the two-dimensional Ising model / A.I. Sololov // *Physics of the Solid State.* — 2005. — Vol. 47, no. 11. — Pp. 2144–2147.

76. *Guida, R.* Critical exponents of the N-vector model / R. Guida, J. Zinn-Justin // *J. Phys. A.* — 1998. — Vol. 31. — P. 8103.

77. What keeps sandcastles standing? / D. J. Hornbaker, R. Albert, I. Albert et al. // *Nature.* — 1997. — Vol. 387. — P. 765.

78. *Krug, J.* Solids far from equilibrium / J. Krug, H. Spohn; Ed. by C. Godreche. — Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

79. *Halpin-Healy, T.* Kinetic roughening phenomena, stochastic growth, directed polymers and all that. Aspects of multidisciplinary statistical mechanics / T. Halpin-Healy, Y. C. Zhang // *Phys. Rep.* — 1995. — Vol. 254. — Pp. 215–414.

80. *Barabási, A. L.* Fractal Concepts in Surface Growth / A. L. Barabási, H. E. Stanley. — Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

81. *Krug, J.* Origins of scale invariance in growth processes / J. Krug // *Adv. Phys.* — 1997. — Vol. 46. — Pp. 139–282.

82. *Lässig, M.* On growth, disorder, and field theory / M. Lässig // *Journ. Phys.: Condens. Matter.* — 1998. — Vol. 10. — P. 9905.

83. *Eden.* A two-dimensional growth process / Eden // *Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. Proc. Fourth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. Cambridge University Press.* — 1961. — Vol. 4. — P. 223.

84. *Edwards, S. F.* The Surface Statistics of a Granular Aggregate / S. F. Edwards, D. R. Wilkinson // *Proc. R. Soc. London (A).* — 1982. — Vol. 381. — P. 17.

85. *Kim, J. M.* Surface growth and crossover behaviour in a restricted solid-on-solid model / J. M. Kim, J. M. Kosterlitz, T. Ala-Nissila // *J. Phys. (A).* — 1991. — Vol. 24. — P. 5569.

86. *Penrose, M. D.* Growth and Roughness of the Interface for Ballistic De-

position / M. D. Penrose // *J. Stat. Phys.* — 2008. — Vol. 131. — Pp. 247–268.

87. *Dotsenko, V. S.* Critical phenomena and quenched disorder / V. S. Dotsenko // *Physics-Uspekhi.* — 1995. — Vol. 38, no. 5. — P. 457.

88. Threshold critical dynamics of driven interfaces in random media / T. Natterman, S. Stepanow, L. H. Tang, H. Leschhorn // *J. Physique II.* — 1992. — Vol. 2. — P. 1483.

89. Randomly pinned landscape evolution / G. Caldarelli, A. Giacometti, A. Maritan et al. // *Phys. Rev. E.* — 1997. — Vol. 55. — P. R4865.

90. *Pelletier, J. D.* Fractal behavior in space and time in a simplified model of fluvial landform evolution / J. D. Pelletier // *Geomorphology.* — 2007. — Vol. 91. — P. 291.

91. *Forster, D.* Large-distance and long-time properties of a randomly stirred fluid / D. Forster, D. R. Nelson, M. J. Stephen // *Phys. Rev.* — 1977. — Vol. 16. — P. 732.

92. *Frey, E.* 2-loop renormalization-group analysis of the Burgers-Kardar-Parisi-Zhang equation / E. Frey, U. C. Täuber // *Phys. Rev. E.* — 1994. — Vol. 50. — Pp. 1024–1045.

93. *Lässig, M.* On the renormalization of the Kardar—Parisi—Zhang equation / M. Lässig // *Nucl. Phys. B.* — 1995. — Vol. 448. — P. 559.

94. Generalizations of the Kardar-Parisi-Zhang equation / J. P. Doherty, M. A. Moore, J. M. Kim, A. J. Bray // *Phys. Rev. Lett.* — 1994. — Vol. 72, no. 13. — Pp. 2041–2044.

95. *Kardar, M.* Matrix generalizations of some dynamic field theories / M. Kardar, A. Zee // *Nucl. Phys. B.* — 1996. — Vol. 464, no. 3. — Pp. 449–462.

96. *Bork, L. V.* The Kardar-Parisi-Zhang equation and its matrix generalization / L. V. Bork, S. L. Ogarkov // *Theor. Math. Phys.* — 2014. — Vol. 178, no. 3. — Pp. 359–373.

97. *Lam, C. H.* Surface growth with temporally correlated noise / C. H. Lam, L. M. Sander, D. E. Wolf // *Phys. Rev. A.* — 1992. — Vol. 46, no. 10. — P. R6128–R6131.

98. *Pavlik, S. I.* Scaling for a growing phase boundary with nonlinear diffusion / S. I. Pavlik // *JETP.* — 1994. — Vol. 79. — Pp. 303–306.

99. *Bak, P.* Self-organized criticality: An explanation of the 1/f noise / P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld // *Phys. Rev. Lett.* — 1987. — Vol. 59, no. 4. — Pp. 381—-384.

100. *Tang, C.* Critical exponents and scaling relations for self-organized critical phenomena / C. Tang, P. Bak // *Phys. Rev. Lett.* — 1988. — Vol. 60, no. 23. — Pp. 2347—-2350.

101. *Bak, P.* Punctuated equilibrium and criticality in a simple model of evolution / P. Bak, K. Sneppen // *Phys. Rev. Lett.* — 1993. — Vol. 71, no. 24. — Pp. 4083—-4086.

102. *Bak, P.* How Nature Works: The Science of Self-Organised Criticality / P. Bak. — NY: Copernicus Press, 1996.

103. *Jensen, H. J.* Emergent Complex Behavior in Physical and Biological Systems / H. J. Jensen. — Cambridge Univercity Press, 1998.

104. *Antonov, N. V.* Scaling in erosion of landscapes: renormalization group analysis of a model with turbulent mixing / N. V. Antonov, P. I. Kakin // *J. Phys. A.* — 2017. — Vol. 50. — P. 085002.

105. *Antonov, N. V.* Effects of random environment on a self-organized critical system: Renormalization group analysis of a continuous model / N. V. Antonov, P. I. Kakin // *EPJ Web of Conferences.* — 2016. — Vol. 108. — P. 02009.

106. *Newman, W. I.* Cascade Model for Fluvial Geomorphology / W. I. Newman, D. L. Turcotte // *Geophysical Journal International.* — 1990. — Vol. 100, no. 3. — Pp. 433–439.

107. *Czirok, A.* Experimental evidence for self-affine roughening in a micromodel of geomorphological evolution / A. Czirok, E. Somfai, T. Vicsek // *Phys. Rev. Lett.* — 1993. — Vol. 71. — P. 2154–2157.