

Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Плотников Сергей Александрович

**Управление синхронизацией и бифуркации в системах  
ФитцХью-Нагумо**

01.01.09 Дискретная математика и математическая кибернетика

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук,  
профессор Фрадков А.Л.

Санкт-Петербург

2016

# Содержание

<b>Введение</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>1 Предварительные сведения</b> . . . . .	<b>10</b>
1.1 Уравнения модели ФитцХью-Нагумо . . . . .	10
1.2 Алгоритм скоростного градиента . . . . .	11
1.3 Устойчивость систем с запаздыванием . . . . .	13
1.4 Устойчивость гибридных систем . . . . .	16
1.5 Вспомогательные понятия из теории графов . . . . .	20
<b>2 Бифуркации в кольцевых неоднородных сетях ФитцХью-Нагумо</b> . .	<b>21</b>
2.1 Анализ бифуркаций для двух систем ФитцХью-Нагумо с различ- ными пороговыми параметрами . . . . .	21
2.2 Анализ бифуркаций для неоднородной кольцевой сети систем ФитцХью-Нагумо . . . . .	25
<b>3 Управление синхронизацией двух связанных систем ФитцХью- Нагумо</b> . . . . .	<b>31</b>
3.1 Синхронизация двух связанных систем ФитцХью-Нагумо с раз- личными пороговыми параметрами . . . . .	31
3.1.1 Неадаптивный случай . . . . .	32
3.1.2 Адаптивный случай . . . . .	35
3.1.3 Синхронизация двух связанных систем ФитцХью-Нагумо с помощью настройки силы связи . . . . .	39

3.2	Анализ синхронизации двух связанных систем ФитцХью-Нагумо с дискретными связями . . . . .	41
3.3	Управление синхронизацией двух связанных систем ФитцХью-Нагумо с переменной задержкой . . . . .	44
3.3.1	Случай с медленно-меняющейся задержкой . . . . .	45
3.3.2	Общий случай . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Управление синхронизацией в сетях систем ФитцХью-Нагумо . . . . .</b>	<b>56</b>
4.1	Синхронизация в неоднородных сетях систем ФитцХью-Нагумо . . . . .	56
4.2	Управление синхронизацией в неоднородных сетях систем ФитцХью-Нагумо . . . . .	61
4.3	Синхронизация кольца связанных систем ФитцХью-Нагумо с помощью настройки силы связи . . . . .	65
	<b>Заключение . . . . .</b>	<b>70</b>
	<b>Список рисунков . . . . .</b>	<b>75</b>
	<b>Литература . . . . .</b>	<b>76</b>

# Введение

В последнее время возрастает интерес к задачам исследования динамики систем из связанных осцилляторов [6, 64, 91, 110, 111]. Это связано с тем, что такие системы используются в различных областях науки, например, таких как нелинейные динамические системы, графы и сети, и статистическая физика, и имеют приложения в физике, биологии и технике [1, 30, 32, 80, 81, 83, 117, 129].

Одной из центральных тем исследования динамики связанных осцилляторов является синхронизация, которую определяют как «совпадение или сближение переменных состояний двух или нескольких систем, либо согласованное изменение некоторых количественных характеристик систем» [15]. Явление синхронизации возникает в различных областях науки [115]. Примерами синхронизации в области биологии являются работа генетических осцилляторов [52], исследование биологических колебаний (циркадных ритмов) [64, 83, 110, 119, 128], работа сердечных клеток, и разработка кардиостимуляторов [38, 82], а также синхронное излучение световых импульсов популяций светлячков [23, 107]. В компьютерных науках синхронизация используются, например, для анализа данных в больших базах данных [71]. В теории автоматов и распределенных вычислениях синхронизация также играет важную роль [78]. Другими инженерными приложениями, где имеет место синхронизация, являются работа массивов сверхпроводников, соединенных джозефсоновским контактом [120, 125, 126], лазеров [49, 50, 77], энергетических сетей [27, 92] и ансамблей электрохимических осцилляторов [62, 118].

Явление синхронизации имеет большое значение в работе головного мозга, где оно связано с несколькими когнитивными возможностями [44, 76]. Одной из таких возможностей является обработка воспринимаемого визуального сигнала [36, 105, 106]. Согласно гипотезе связывания синхронизация нейронов нужна для того, чтобы связать различные характеристики объекта, такие как форма, цвет, расстояние до объекта, и сформировать целостное представление об этом объекте. Другие исследования указывают на то, что синхронизация нейронов играет определенную роль в предсказании событий и концентрации внимания на этих событиях [72, 124]. Так как синхронизация имеет огромное значение в нормальном функционировании головного мозга, то неудивительно, что некоторые патологические состояния мозга связаны с аномальной синхронизацией. Примерами таких аномальных состояний являются болезнь Паркинсона, эпилепсия, болезнь Альцгеймера, шизофрения и аутизм [37, 53, 76, 90, 121]. Разработка технологий подавления нежелательной синхронной мозговой активности является важнейшей клинической задачей. Технически эта задача может быть решена, например, посредством вживления микроэлектродов в пораженную часть головного мозга с последующей стимуляцией через эти электроды [24, 25, 66], либо при помощи нейрообратной связи [12, 26, 97, 108]. Математическое описание условий синхронизации нейронов и управление ей могут помочь улучшить результаты такого лечения и в то же время уменьшить его побочные эффекты.

На данный момент разработано большое количество моделей единичных нейронов. Самой первой моделью нейрона считается модель, предложенная Луи Лапиком «integrate-and-fire» [19, 33]. Однако она имеет недостаток – отсутствие учета биофизических механизмов генерации импульса. Данный недостаток снимает математическая модель, предложенная Ходжкиным и Хаксли [59, 60]. Особенностью модели является то, что она построена с учетом экспериментальных данных и позволяет с большой точностью описывать появление импульсов на нейроне. Также известны и другие модели нейронов, например, модель Морриса-Лекара [70] и модель Хиндмарш-Роуз [58].

Исследование синхронизации в сетях из различных моделей нейронов было в основном сфокусировано на сетях с одинаковыми узлами [21, 29, 55, 68, 75, 101, 109, 131]. Однако в реальных сетях существует большое разнообразие нейронов, т.е. параметры различных узлов в сети различны. Хорошо известно, что неоднородности в узлах мешают синхронизации, и, более того, в большинстве случаев идеальная синхронизация – в том смысле, что состояние всех узлов в одинаковые моменты времени одинаково – недостижима из-за наличия неоднородностей. Для того чтобы лучше понять сложные взаимодействия нейронов в больших неоднородных сетях, нужно начать исследование с простейшей модели нейрона. Одной из таких моделей является двумерная модель ФитцХью-Нагумо (ФХН) [40, 73].

Целью диссертационной работы является исследование и управление синхронизацией в неоднородных сетях ФХН, а также анализ поведения сети. Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие задачи.

1. Получить условия, характеризующие поведение связанных систем ФХН с различными пороговыми параметрами.
2. Синтезировать алгоритмы управления синхронизацией двух связанных систем ФХН с различными пороговыми параметрами с помощью внешнего стимула и с помощью настройки силы связи.
3. Синтезировать алгоритмы управления синхронизацией двух связанных систем ФХН с переменной задержкой при помощи внешнего стимула.
4. Найти оценки шага дискретизации в зависимости от силы связи, необходимые для синхронизации двух систем ФХН, в случае дискретной связи между двумя системами.
5. Получить условие синхронизации неоднородной сети из систем ФХН и разработать алгоритм управления синхронизацией при помощи одинако-

вого для всех узлов внешнего стимула и алгоритмы управления синхронизацией при помощи настройки силы связи.

В первой главе диссертационной работы приводятся вспомогательные сведения, необходимые для формулировки и доказательства основных результатов.

Во второй главе изучается поведение связанных систем ФХН. Модель ФХН является образцом возбудимой системы с суперкритической бифуркацией Андронова-Хопфа [22, 35]. Основное свойство возбудимой системы заключается в том, что она остается в состоянии покоя до тех пор, пока воздействие на нее не превысит некоторый (определяемый параметрами системы) порог. Когда это происходит, возбудимая система генерирует отклик определенной формы и длительности уже вне зависимости от того, прекратился ли сигнал возбуждения, или же все еще длится [8]. Таким образом, в зависимости от параметров система ФХН может вести себя по-разному: либо находиться в колебательном режиме, т.е. в режиме, при котором траектории системы сходятся к устойчивому предельному циклу, либо в возбудимом, когда траектории системы сходятся к предельной точке. При рассмотрении нескольких связанных систем ФХН количество бифуркационных параметров возрастает: сила связи и задержка при передаче сигнала в этом случае также являются бифуркационными параметрами. Поэтому представляет интерес исследование поведения связанных систем ФХН в зависимости от параметров. Для нахождения возможных бифуркаций используется подход, предложенный в работах [34, 122], который был применен для случая двух связанных систем ФХН с одинаковыми параметрами. Результатом этой главы является нахождение условий бифуркации для случая двух связанных систем ФХН с различными параметрами, а также для случая неоднородного однонаправленного кольца систем ФХН.

В третьей главе исследуется задача управления синхронизацией простейшей сети – двух связанных систем ФХН с неоднородностями. В первой части главы в качестве неоднородности рассматриваются различные пороговые параметры

систем ФХН. В этом случае идеальная синхронизация, т.е. полное совпадение состояний двух систем, невозможна. Поэтому ставится задача синхронизации состояний систем со сдвигом в значениях, который зависит от разности пороговых параметров систем. Результатом первой части третьей главы является синтез алгоритмов управления синхронизацией и обоснование достижения целей управления. Первый алгоритм применим в случае известных параметров систем. Если же параметры систем неизвестны, что является адекватным требованием, так как нейроны различны, и их число велико, то необходимо применять адаптивный алгоритм управления. Также был предложен алгоритм синхронизации двух систем с помощью настройки силы связи, основанный на методе скоростного градиента [13, 15]. Такой подход также находит применение в некоторых случаях [111, 112, 114, 130].

Во второй части третьей главы рассматривается задача синхронизации двух связанных систем ФХН с дискретными связями. Дискретные связи рассматриваются по той причине, что нейроны передают сигнал друг другу при помощи так называемых спайков, т.е. импульсов, в некоторые моменты времени. Данная гибридная система сводится к системе с непрерывным временем методом, предложенным в работе [5]. Плюсом такого подхода является то, что при нем не происходит потери данных, в отличие от стандартных методов дискретизации. Результатом этой части является нахождение оценок шага дискретизации в зависимости от силы связи, при котором имеет место синхронизация. Для этого используется метод, предложенный Сейфуллаевым Р. Э. и Фрадковым А. Л. [11], который является обобщением метода Фридман Э. [46] для нелинейных систем.

В третьей части третьей главы рассматривается задача управления синхронизацией двух связанных систем ФХН с переменной задержкой. Для построения регуляторов и доказательств достижения целей управления используются функционал Ляпунова-Красовского [4, 57] и неравенство Халаяна [56]. Результатом этой части является синтез алгоритмов управления синхронизацией двух связанных систем ФХН для случаев с медленно-меняющейся задержкой и произволь-



ной задержкой. Вторым алгоритмом управления можно применять для управления синхронизацией систем с дискретными связями, более того, при выполнении некоторых условий алгоритм управления является дискретным.

В четвертой главе исследуется задача синхронизации неоднородной сети систем ФХН. Главным результатом этой главы является получение достаточных условий синхронизации неоднородной сети, которые являются обобщением результатов работ [75, 109] для однородных сетей систем ФХН и базируются на теореме статьи [91]. На основе полученных условий предлагается алгоритм управления синхронизацией в сети при помощи одинакового для всех узлов внешнего стимула. Отметим, что задачи синхронизации в сетях привлекают большое внимание специалистов в различных областях науки и техники. В работах [2, 9, 16, 94, 102, 103] приводятся различные алгоритмы управления синхронизацией в сетях. Однако, все они используют различные компоненты управления для каждого узла в сети. Так как управлять каждым нейроном в отдельности затруднительно в силу очевидных причин, то одинаковое значение управления для каждого узла является преимуществом предлагаемого алгоритма. Другим его преимуществом является то, что в отличие от алгоритма управления средним [98, 99], возможно задавать желаемое поведение сети, т.е. выбирать режим функционирования: возбудимый или колебательный. Также были разработаны алгоритмы синхронизации систем ФХН с помощью настройки силы связи для случая кольцевой сети. В качестве подтверждения работоспособности полученных алгоритмов представлены результаты численного моделирования.

В Заключение перечислены основные результаты работы.

По теме диссертации опубликовано 10 работ [7, 20, 28, 84–89, 116], в том числе 4 в изданиях из перечня научных журналов, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией для публикации основных научных результатов диссертаций, а именно в изданиях из баз цитирования Web of Science и Scopus. Основные результаты представлены на 6 всероссийских и международных конференциях.

# Глава 1

## Предварительные сведения

### 1.1 Уравнения модели ФитцХью-Нагумо

В этом разделе описываются уравнения модели ФХН [40, 73]. Эта двумерная нейроподобная модель является результатом упрощения четырехмерных моделей Ходжкина-Хаксли [59, 60] и сведения их к форме двумерного осциллятора с кубической нелинейностью, одной быстрой и одной медленной переменными. Модель ФХН хорошо подходит для описания динамики нейронов головного мозга, однако ее можно также использовать в контексте других систем, начиная с электронных схем [113] и заканчивая описанием сердечнососудистых тканей [74, 127] и климатических систем [51]. Модель ФХН описывается уравнениями в следующей форме

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{u}(t) &= u(t) - \frac{u^3(t)}{3} - v(t), \\ \dot{v}(t) &= u(t) - bv(t) + a,\end{aligned}\tag{1.1}$$

где  $u$  и  $v$  – переменные, качественно соответствующие трансмембранному напряжению и переменной активации ионного тока, соответственно (будем также называть их активатором и ингибитором, соответственно);  $\varepsilon$  – параметр соотношения временных масштабов, характеризующий относительную скорость активации (деактивации) ионного тока;  $a$ ,  $b$  – постоянные параметры системы.

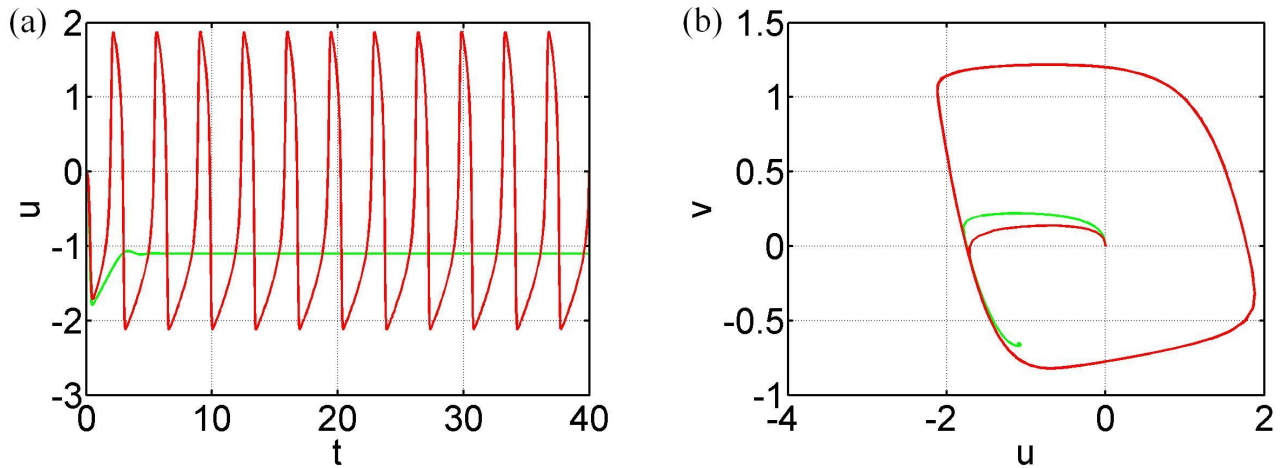


Рис. 1.1: Динамика системы ФХН (1.1). Зеленой линией обозначен возбудимый режим, а красной линией – колебательный. (a): динамика активатора; (b): фазовая плоскость.

В частном случае при  $b = 0$ , параметр  $a$  является пороговым параметром системы. Значениям  $|a| > 1$  соответствует возбудимый режим, при котором траектории системы стремятся к предельной точке, а значениям  $|a| < 1$  – автоколебательная динамика (устойчивый предельный цикл на фазовой плоскости), возникающая через суперкритическую бифуркацию Андронова-Хопфа (см. рис. 1.1(b), где зеленой линией обозначен возбудимый режим, а красной линией – колебательный режим). Во втором случае нейрон испускает спайки, т.е. имеют место колебания, тогда как в первом случае он находится в покое, т.е. колебания отсутствуют (см. рис. 1.1(a)).

## 1.2 Алгоритм скоростного градиента

В этом разделе описывается алгоритм скоростного градиента, предложенный Фрадковым А. Л. [13, 15]. Рассмотрим нелинейную динамическую систему

$$\dot{x} = f(t, x, \theta), \quad (1.2)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния,  $\theta \in \mathbb{R}^m$  – вектор входных переменных. Вектор-функция  $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  предполагается кусочно-непрерывной по  $t$

и непрерывно дифференцируемой по  $x, \theta$ . Алгоритм скоростного градиента используется для решения задач управления непрерывными по времени системами, в которых цель управления задана при помощи целевой функции. Опишем построение алгоритмов скоростного градиента для непрерывной нестационарной системы (1.2). Для этого определим цель управления

$$Q(t, x(t)) \leq \Delta, \quad \text{при } t \geq t^*, \quad (1.3)$$

где  $Q(t, x)$  – гладкая скалярная целевая функция, а  $\Delta$  – желаемый уровень точности.

Для построения алгоритма сначала вычисляется скорость изменения целевой функции  $Q$  на траекториях системы (1.2)

$$\omega(t, x, \theta) = \frac{\partial Q(t, x)}{\partial t} + [\nabla_x Q(t, x)]^T f(t, x, \theta).$$

Затем находится градиент функции  $\omega(t, x, \theta)$  по входным переменным

$$\nabla_{\theta} \omega(t, x, \theta) = \left[ \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right]^T = \left[ \frac{\partial f}{\partial \theta} \right]^T \nabla_x Q(t, x).$$

И, наконец, задается алгоритм изменения  $\theta(t)$  дифференциальным уравнением

$$\dot{\theta} = -\Gamma \nabla_{\theta} \omega(t, x, \theta), \quad (1.4)$$

где  $\Gamma = \Gamma^T \succ 0$  – произвольная положительно определенная матрица, например  $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ ,  $\gamma_i > 0$ . Здесь и далее знаки  $\succ$  и  $\prec$  будут использоваться для обозначения положительно и отрицательно определенных матриц, соответственно. Алгоритм (1.4) называется *алгоритмом скоростного градиента в дифференциальной форме* (АСГ), поскольку в нем изменение  $\theta(t)$  происходит пропорционально градиенту скорости изменения целевой функции.

Происхождение алгоритма (1.4) можно объяснить следующим образом. Для достижения цели управления (1.3) желательно изменять управление  $\theta$  в направлении уменьшения целевой функции  $Q(t, x)$ . Однако функция  $Q(t, x)$  не зависит от  $\theta$ , поэтому найти такое направление затруднительно. Вместо этого можно

попытаться уменьшить ее производную  $\dot{Q}$ , стремясь к выполнению неравенства  $\dot{Q} < 0$ , означающего, в свою очередь, уменьшение самой функции  $Q(t, x)$ . Функция  $\dot{Q} = \omega(t, x, \theta)$  уже явно зависит от  $\theta$ , что и позволяет написать алгоритм (1.4).

Аналогичным образом строится так называемый *алгоритм скоростного градиента в конечной форме*

$$\theta(t) = \theta_0 - \Gamma \nabla_{\xi} \omega(t, x(t), \theta(t)), \quad (1.5)$$

где  $\theta_0$  – некоторое начальное (опорное) значение управления (обычно берется  $\theta_0 = 0$ ).

Аналитические условия, гарантирующие достижение цели управления (1.3) в системе (1.2) и (1.4) или (1.5) могут быть найдены, например, в работах [14, 104].

### 1.3 Устойчивость систем с запаздыванием

В данном разделе опишем два подхода к исследованию устойчивости систем с запаздыванием. Зафиксируем некоторое  $h > 0$ , которое в дальнейшем будет иметь смысл максимальной величины запаздывания. Через  $x_t$  обозначим сужение функции  $x(\cdot)$  на промежуток  $[t - h, t]$ :

$$x_t(s) = x(t + s), \quad s \in [-h, 0].$$

Рассмотрим нелинейную систему с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad t \geq t_0, \quad (1.6)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f: [t_0, +\infty) \times \mathcal{C}[-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Начальные данные для (1.6) зададим функцией  $\varphi(\cdot)$ :

$$x_{t_0}(\cdot) = \varphi(\cdot), \quad \varphi(\cdot) \in \mathcal{C}[t_0 - h, t_0]. \quad (1.7)$$

**Теорема 1.1** (Существования и единственности). *Пусть для  $f$  выполнены условия:*

(i)  $\forall H > 0 \quad \exists M(H) > 0$ :

$$\|\varphi\|_C \leq H \Rightarrow \|f(t, \varphi)\| \leq M(H);$$

(ii) Функционал  $f$  непрерывен по обоим аргументам;

(iii) Функционал  $f$  удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу:

$\forall H > 0 \exists L(H)$ : если  $\|\varphi'\| \leq H, \|\varphi''\| \leq H$ , то

$$\|f(t, \varphi') - f(t, \varphi'')\| \leq L(H) \|\varphi' - \varphi''\|_C.$$

Тогда для некоторого  $\tau > 0$  на промежутке  $[t_0 - h, t_0 + \tau]$  существует единственное решение задачи Коши (1.6), (1.7).

Доказательство можно найти в [61].

**Теорема 1.2** (о продолжимости решений). Пусть для системы (1.6) выполнены условия Теоремы 1.1. Предположим, что  $f$  удовлетворяет неравенству

$$\|f(t, \varphi)\| \leq \eta(\|\varphi\|_C),$$

где  $\eta \in \mathcal{C}[0, +\infty)$  неубывающая функция такая, что  $\forall r_0 \geq 0$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{r_0}^R \frac{dr}{\eta(r)} = +\infty.$$

Тогда на  $[t_0, +\infty)$  существует единственное решение задачи Коши (1.6), (1.7).

Доказательство можно найти в [61].

Далее будем предполагать, что  $f(t, 0) = 0$ , что гарантирует существование нулевого решения  $x(t) \equiv 0$  у системы (1.6).

**Определение 1.1.** Нулевое решение уравнения (1.6) равномерно асимптотически устойчиво, если

(i) для любого  $\varepsilon > 0$  и любого  $t_0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что если

$$\|x_{t_0}\|_C < \delta(\varepsilon), \text{ то } |x(t)| < \varepsilon \text{ для } t \geq t_0;$$

(ii) существует  $\delta_a > 0$  такое, что для любого  $\eta > 0$  существует  $T(\delta_a, \eta)$  такое, что если  $\|x_{t_0}\|_C < \delta_a$ , то  $|x(t)| < \eta$  для  $t \geq t_0 + T(\eta)$  и  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

Тривиальное решение называется глобально равномерно асимптотически устойчивым, если в (ii)  $\delta_a$  может быть произвольно большим конечным числом. Система называется равномерно асимптотически устойчивой, если её нулевое решение равномерно асимптотически устойчиво.

Для исследования устойчивости системы (1.6) можно использовать функционал Ляпунова-Красовского [3, 4, 18, 47, 48, 54] или функцию Ляпунова-Разумихина [10, 47, 48, 54]. С помощью этих методов можно получать условия, независимые от задержки (т.е.  $h$ -независимые).

Функционалы Ляпунова-Красовского – это естественное обобщение прямого метода Ляпунова для систем, у которых состояние является функцией. Пусть  $V: \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывный функционал и  $x_t$  удовлетворяет (1.6). Тогда определим производную  $V$  вдоль траектории  $x_t$ :

$$\dot{V}(t, x_t) = \overline{\lim}_{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{s} [V(t + s, x_{t+s}) - V(t, x_t)].$$

**Теорема 1.3** (Ляпунова-Красовского). Пусть  $f: \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$  отображает  $\mathbb{R} \times$  (ограниченные множества в  $C$ ) в ограниченные множества в  $\mathbb{R}^n$ ,  $u, v, w: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  непрерывные неубывающие положительные для  $s > 0$  функции и  $u(0) = v(0) = 0$ . Нулевое решение уравнения (1.6) равномерно асимптотически устойчиво, если существует непрерывный функционал  $V: \mathbb{R} \times C \rightarrow [0, +\infty)$ , который положительно определён

$$u(|\varphi(0)|) \leq V(t, \varphi) \leq v(\|\varphi\|_C),$$

и производная которого вдоль траекторий (1.6) отрицательна

$$\dot{V}(t, x_t) \leq -w(|x(t)|).$$

Если к тому же  $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = \infty$ , то нулевое решение глобально равномерно асимптотически устойчиво.

Доказательство можно найти в [54].

Такие функционалы можно использовать для исследования устойчивости систем с *медленно-меняющейся задержкой*  $\tau$  [47, 48], т.е. с дифференцируемой функцией с ограниченной сверху производной ( $\dot{\tau} \leq d < 1$ ). Для получения достаточных условий устойчивости систем с *быстро-меняющейся задержкой* можно использовать *неравенство Халая* [56], которое расширяет подход Ляпунова-Разумихина до экспоненциальной устойчивости.

Для непрерывной функции  $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  определим

$$\dot{V}(t, x(t)) = \overline{\lim}_{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{s} [V(t+s, x(t+s)) - V(t, x(t))]. \quad (1.8)$$

**Лемма 1.1** (Неравенство Халая). Пусть  $V : [t_0 - h, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}_+$  ограничена на  $[t_0 - h, t_0]$  и локально абсолютно непрерывна на  $[t_0, \infty)$ . Предположим, что для некоторых положительных констант  $\delta_1 < \delta_0$  выполнено следующее неравенство:

$$\text{Hal} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{V}(t) + 2\delta_0 V(t) - 2\delta_1 \sup_{-h \leq \theta \leq 0} V(t + \theta) \leq 0, \quad t \geq t_0. \quad (1.9)$$

Тогда

$$V(t) \leq e^{-2\delta(t-t_0)} \sup_{-h \leq \theta \leq 0} V(t_0 + \theta), \quad t \geq t_0,$$

где  $\delta > 0$  – единственное положительное решение уравнения  $\delta = \delta_0 - \delta_1 e^{2\delta h}$ .

Доказательство можно найти в [56].

Выполнение неравенства Халая  $\text{Hal} \leq 0$  для функции Ляпунова  $V$  с производной (1.8) гарантирует экспоненциальную устойчивость системы (1.6).

## 1.4 Устойчивость гибридных систем

Рассмотрим следующую нелинейную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + q\xi(t) + Bu(t), \\ \sigma(t) &= r^T x(t), \quad \xi(t) = \varphi(\sigma(t), t), \end{aligned} \quad (1.10)$$



где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  – вектор входных переменных,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  – постоянные матрицы,  $q \in \mathbb{R}^n$ ,  $r \in \mathbb{R}^n$  – постоянные векторы.

Предположим, что для всех  $t \geq 0$  график функции  $\xi = \varphi(\sigma(t), t)$  (где  $t$  рассматривается как параметр, а  $\sigma$  – как аргумент функции) расположен в двуполостном секторе между прямыми  $\xi_1 = \mu_1 \sigma$  и  $\xi_2 = \mu_2 \sigma$ , где  $\mu_1 < \mu_2$  – некоторые вещественные числа, т.е. выполнено неравенство

$$\mu_1 \sigma^2 \leq \sigma \xi \leq \mu_2 \sigma^2.$$

Пусть задана последовательность моментов времени  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$  и кусочно-постоянная функция входа

$$u(t) = u_d(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1},$$

где  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ .

Предположим, что для некоторого  $h \in \mathbb{R}$  ( $h > 0$ ) выполнены неравенства

$$t_{k+1} - t_k \leq h \quad \forall k \geq 0,$$

тогда функцию входа можно представить в виде

$$u(t) = Kx(t - \tau(t)),$$

где  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\tau(t) = t - t_k$ ,  $t_k \leq t < t_{k+1}$ .

Таким образом, систему (1.10) можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + q\xi(t) + BKx(t - \tau(t)), & \tau(t) &= t - t_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \\ \sigma(t) &= r^T x(t), & \xi(t) &= \varphi(\sigma(t), t). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Для исследования устойчивости полученной системы (1.11) можно использовать метод, предложенный Сейфуллаевым Р. Э. и Фрадковым А. Л. [11].

Пусть  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $X_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – некоторые матрицы. Также рассмотрим следующие матрицы

$$\begin{aligned}
 \Theta &= \begin{bmatrix} P + h\frac{X+X^T}{2} & hX_1 - hX \\ * & -hX_1 - hX_1^T + h\frac{X+X^T}{2} \end{bmatrix}, \\
 \Psi_{H0} &= \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12|\tau(t)=0} & \Phi_{13} & \Phi_{14} \\ * & \bar{\Phi}_{22|\tau(t)=0} & \bar{\Phi}_{23|\tau(t)=0} & \bar{\Phi}_{24} \\ * & * & \bar{\Phi}_{33} & \bar{\Phi}_{34} \\ * & * & * & \bar{\Phi}_{44} \end{bmatrix}, \\
 \Psi_{H1} &= \begin{bmatrix} \Phi_{11a} & \Phi_{12|\tau(t)=h} & \Phi_{13} & \Phi_{14a} & hY_1^T \\ * & \bar{\Phi}_{22|\tau(t)=h} & \bar{\Phi}_{23|\tau(t)=h} & \bar{\Phi}_{24} & hY_2^T \\ * & * & \bar{\Phi}_{33} & \bar{\Phi}_{34} & hT^T \\ * & * & * & \bar{\Phi}_{44a} & hq^T Y_3^T \\ * & * & * & * & -hQ \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi_{11}(t) &= A^T P_2 + P_2^T A - Y_1 - Y_1^T - \frac{X + X^T}{2} - \chi_0 \mu_1 \mu_2 r r^T, \\
\Phi_{12}(t) &= P - P_2^T + A^T P_3 - Y_2 + (h - \tau(t)) \frac{X + X^T}{2}, \\
\Phi_{13}(t) &= Y_1^T + P_2^T B K - T + X - X_1, \\
\Phi_{14}(t) &= P_2^T q - Y_3 q + \frac{1}{2} \chi_0 (\mu_1 + \mu_2) r, \\
\Phi_{22}(t) &= -P_3 - P_3^T + (h - \tau(t)) Q, \\
\Phi_{23}(t) &= Y_2^T + P_3^T B K - (h - \tau(t)) (X - X_1), \\
\Phi_{24}(t) &= P_3^T q, \\
\Phi_{33}(t) &= T + T^T - \frac{X + X^T - 2X_1 - 2X_1^T}{2}, \\
\Phi_{34}(t) &= Y_3 q, \\
\Phi_{44}(t) &= -\chi_0, \\
\Phi_{11a}(t) &= A^T P_2 + P_2^T A - Y_1 - Y_1^T - \frac{X + X^T}{2} - \chi_1 \mu_1 \mu_2 r r^T, \\
\Phi_{14a}(t) &= P_2^T q - Y_3 q + \frac{1}{2} \chi_1 (\mu_1 + \mu_2) r, \\
\Phi_{44a}(t) &= -\chi_1.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

**Теорема 1.4.** Пусть существуют матрицы  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ( $P \succ 0$ ),  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ( $Q \succ 0$ ),  $P_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $X_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и  $Y_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , а также положительные вещественные числа  $\chi_0, \chi_1$  такие, что система матричных неравенств

$$\Theta \succ 0, \quad \Psi_{H0} \prec 0, \quad \Psi_{H1} \prec 0$$

разрешима, где эти матрицы описываются уравнениями (1.12), (1.13). Тогда система (1.11) экспоненциально устойчива в целом.

Доказательство можно найти в [11].

## 1.5 Вспомогательные понятия из теории графов

*Ориентированным* графом называется упорядоченная пара  $\Gamma = (V, E)$  из двух конечных множеств  $V$  (множества *узлов*, или *вершин*) и  $E \subseteq V \times V$  (множество *дуг*, или *ребер* графа). Узел  $v$  соединен с узлом  $w$  в графе  $\Gamma$ , если  $(v, w) \in E$ . Конечная последовательность узлов  $v_1, \dots, v_k$ , в которой любой ее член соединен со следующим ( $(v_i, v_{i+1}) \in E$  при  $i < k$ ), называется *путем* из  $v_1$  в  $v_k$ . Граф называется *связным*, если между любой парой его вершин существует как минимум один путь. *Зеркальным* графом для графа  $\Gamma = (V, E)$  называется граф  $\hat{\Gamma} = (V, \hat{E})$ , получаемый добавлением всех дуг, обратных к дугам  $\Gamma$ , т.е.  $\hat{E} = E \cup \{(w, v) : (v, w) \in E\}$ . *Неориентированным* графом называется граф, совпадающий со своим зеркальным графом (в этом случае пару противоположенных ребер между двумя вершинами обычно считают одним неориентированным ребром). Матрица смежности  $(a_{jk}(\Gamma))$  графа  $\Gamma$  определяется соотношениями  $a_{jk}(\Gamma) := 1$  при  $(j, k) \in E$  и  $a_{jk}(\Gamma) := 0$  в противном случае. *Лапласианом* графа  $\Gamma$  называется матрица следующего вида

$$L(\Gamma) := \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N a_{1j} & -a_{12} & \dots & -a_{1N} \\ -a_{21} & \sum_{j=1}^N a_{2j} & \dots & -a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{N1} & -a_{N2} & \dots & \sum_{j=1}^N a_{Nj} \end{bmatrix}.$$

Для неориентированного графа  $\Gamma$  матрица Лапласа является симметричной, т.е.  $L(\Gamma) = L(\Gamma)^T$ , и наименьшее собственное число этой матрицы  $\lambda_1(G)$  равно 0, в частности  $L(\Gamma) \succeq 0$  [17, 79]. Второе собственное число лапласиана  $\lambda_2(\Gamma)$  называется *алгебраической связностью*  $\Gamma$  [39]. Алгебраическая связность графа  $\lambda_2(\Gamma)$  больше нуля в том и только в том случае, когда неориентированный граф  $\Gamma$  связан [17, 78, 96].

## Глава 2

# Бифуркации в кольцевых неоднородных сетях ФитцХью-Нагумо

### 2.1 Анализ бифуркаций для двух систем ФитцХью- Нагумо с различными пороговыми параметра- ми

Сначала рассмотрим самый простой случай сети – две связанные системы ФХН. Анализ бифуркаций для такой системы основан на подходе, предложенном в работах [34, 122]. Отличием же является то, что здесь рассматриваются две связанные системы ФХН с различными пороговыми параметрами  $a_i$ . Уравнения этих

систем выглядят следующим образом

$$\begin{aligned}
\varepsilon \dot{u}_1(t) &= u_1(t) - \frac{u_1^3(t)}{3} - v_1(t) + C[u_2(t - \tau) - u_1(t)], \\
\dot{v}_1(t) &= u_1(t) + a_1, \\
\varepsilon \dot{u}_2(t) &= u_2(t) - \frac{u_2^3(t)}{3} - v_2(t) + C[u_1(t - \tau) - u_2(t)], \\
\dot{v}_2(t) &= u_2(t) + a_2,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где  $C$  – сила связи между нейронами,  $\tau$  – постоянная задержка, т.е. время, необходимое сигналу для достижения соседнего нейрона.

Единственным положением равновесия системы (2.1) является точка  $\mathbf{x}^* \equiv (u_1^*, v_1^*, u_2^*, v_2^*)^T$  с координатами  $u_1^* = -a_1$ ,  $u_2^* = -a_2$ ,  $v_1^* = -a_1 + a_1^3/3 + C(a_1 - a_2)$  и  $v_2^* = -a_2 + a_2^3/3 + C(a_2 - a_1)$ . Линеаризуя систему (2.1) около положения равновесия  $\mathbf{x}^*$  и производя замену  $\mathbf{x}(t) = [u_1(t), v_1(t), u_2(t), v_2(t)]^T \equiv \mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}(t)$ , получим следующее уравнение

$$\delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \xi_1 & -1 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_2 & -1 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \delta\mathbf{x}(t) + \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta\mathbf{x}(t - \tau), \tag{2.2}$$

где  $\xi_i = 1 - a_i^2 - C$ ,  $i = 1, 2$ . Для получения характеристического уравнения линеаризованной системы (2.2) сделаем следующую замену

$$\delta\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{q},$$

где  $\mathbf{q}$  – собственный вектор матрицы Якоби. Тогда характеристический многочлен системы (2.2) можно представить в следующем виде

$$(1 - \xi_1\lambda + \varepsilon\lambda^2)(1 - \xi_2\lambda + \varepsilon\lambda^2) - (\lambda C e^{-\lambda\tau})^2 = 0. \tag{2.3}$$

Необходимым условием для бифуркации Андронова-Хопфа является наличие мнимых собственных чисел  $\lambda$ . Поэтому подставим  $\lambda = i\omega$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$  в уравнение (2.3) и найдем значения параметров  $\xi_1, \xi_2$ , при которых уравнение (2.3) не имеет

мнимых корней. Разделим уравнение (2.3) на мнимую и вещественную части и получим

$$\begin{aligned}(1 - \varepsilon\omega^2)^2 - \xi_1\xi_2\omega^2 &= -\omega^2C^2 \cos(2\omega\tau), \\ \omega(1 - \varepsilon\omega^2)(\xi_1 + \xi_2) &= -\omega^2C^2 \sin(2\omega\tau).\end{aligned}\tag{2.4}$$

Так как  $\varepsilon \ll 1$ , то членами порядка  $\varepsilon$  можно пренебречь, т.е. будем считать в дальнейшем, что  $\varepsilon \sim 0$ . Возводя в квадрат и суммируя уравнения (2.4), получим следующее выражение

$$\omega^2(\xi_1 + \xi_2)^2 + (1 - \xi_1\xi_2\omega^2)^2 = \omega^4C^4,$$

которое преобразуется к виду

$$(\xi_1^2\xi_2^2 - C^4)\omega^4 + (\xi_1^2 + \xi_2^2)\omega^2 + 1 = 0.\tag{2.5}$$

Уравнение (2.5) является биквадратным. Поэтому можно использовать формулы Виета для того, чтобы определить, имеет ли оно действительные корни. Согласно формулам Виета получаем

$$z_1 + z_2 = -\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{\xi_1^2\xi_2^2 - C^4}, \quad z_1z_2 = \frac{1}{\xi_1^2\xi_2^2 - C^4},$$

где  $z_1 = \omega_1^2$ ,  $z_2 = \omega_2^2$  – корни квадратного уравнения (2.5). Если выполнено неравенство  $\xi_1^2\xi_2^2 > C^4$ , то корни квадратного уравнения отрицательны, т.е.  $z_1 < 0$  и  $z_2 < 0$ , а значит, уравнение (2.5) не имеет вещественных корней, т.е. бифуркация Андронова-Хопфа в данном случае невозможна. Возьмем квадратный корень из этого неравенства, подставим  $\xi_i = 1 - a_i^2 - C$  и получим следующее неравенство

$$|(1 - C - a_1^2)(1 - C - a_2^2)| > C^2,\tag{2.6}$$

которое гарантирует невозможность бифуркации Андронова-Хопфа для линеаризованной системы (2.2).

Таким образом, имеет место следующая теорема

**Теорема 2.1.** *Если выполнено неравенство (2.6), то бифуркация Андронова-Хопфа невозможна, т.е. положение равновесия линеаризованной системы (2.2) асимптотически устойчиво.*

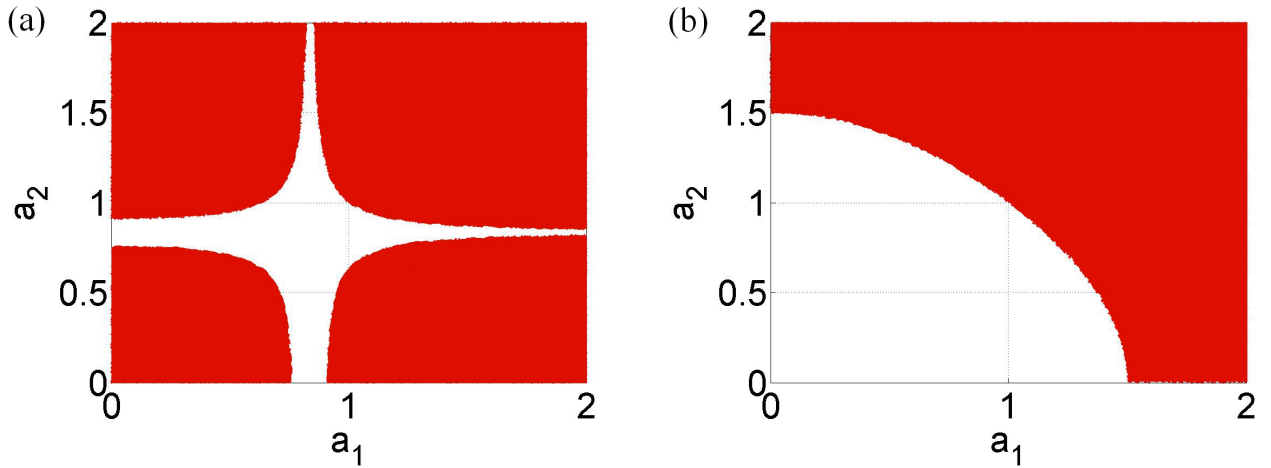


Рис. 2.1: Бифуркация Андронова-Хопфа двух связанных линейризованных систем ФХН (2.2); (a): малая сила связи  $C$  ( $C = 0.3$ ); (b): большая сила связи ( $C = 5$ ). Красным цветом обозначены области параметров, для которых неравенство (2.6) выполнено, т.е. бифуркация Андронова-Хопфа невозможна, и положение равновесия устойчиво.

На рис. 2.1 области параметров, для которых выполнено неравенство (2.6), выделены красным цветом (на рис. 2.1(a) для малой силы связи, а на рис. 2.1(b) – для большой). Этот результат является обобщением условий, полученных для двух однородных систем ФХН [34, 122]. Как и ожидалось, при  $a_1 > 1$ ,  $a_2 > 1$  бифуркация Андронова-Хопфа невозможна, так как обе системы находятся в возбуждимом режиме. Однако, отметим также, что колебания в двух связанных системах ФХН могут иметь место и в случае устойчивого положения равновесия [67, 122].

Рассмотрим случай с достаточно большой силой связи ( $C > 1$ ) и предположим, что изначально одна из систем находится в возбуждимом режиме ( $a_1 > 1$ ), а вторая – в колебательном ( $a_2 < 1$ ). Тогда можно раскрыть модуль в неравенстве (2.6):

$$[C + (a_1^2 - 1)][C - (1 - a_2^2)] > C^2. \quad (2.7)$$



Обозначим  $\alpha = (a_1^2 - 1) - (1 - a_2^2) = a_1^2 + a_2^2 - 2$ , тогда неравенство (2.7) можно записать в виде

$$[C + (1 - a_2^2)][C - (1 - a_2^2)] + \alpha[C - (1 - a_2^2)] > C^2, \quad (2.8)$$

в котором первый член можно заменить на разность квадратов, затем подставить в неравенство  $\alpha$  и получить следующее выражение

$$a_1^2 + a_2^2 > 2 + \delta, \quad (2.9)$$

где  $\delta = (1 - a_2^2)^2/[C - (1 - a_2^2)]$  — малая величина, так как  $C > 1$ , и значение  $a_2$  близко к 1. Таким образом, неравенство (2.9) определяет значения пороговых параметров  $a_i$ , при которых бифуркация Андронова-Хопфа невозможна при  $C > 1$ .

С другой стороны неравенство (2.8) может быть представлено в виде

$$(a_1^2 + a_2^2 - 2)[C - (1 - a_2^2)] > (1 - a_2^2)^2. \quad (2.10)$$

Так как правая часть неотрицательна, и  $C > 1$ , а  $a_2 < 1$ , то условие  $a_1^2 + a_2^2 > 2$  является необходимым для выполнения неравенства (2.10). Поэтому можно получить следующую оценку для значений силы связи  $C$

$$C > (1 - a_2^2) + \frac{(1 - a_2^2)^2}{a_1^2 + a_2^2 - 2}, \text{ и } C > 1 \text{ при } a_1^2 + a_2^2 > 2,$$

при которых бифуркация Андронова-Хопфа невозможна.

## 2.2 Анализ бифуркаций для неоднородной кольцевой сети систем ФитцХью-Нагумо

Теперь рассмотрим случай неоднородной кольцевой сети из  $N$  систем ФХН. Уравнения сети можно записать в следующей форме

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{u}_i(t) &= u_i(t) - \frac{u_i^3(t)}{3} - v_i(t) + C[u_{(i+1) \bmod N}(t - \tau) - u_i(t)], \\ \dot{v}_i(t) &= u_i(t) + a_i, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.11)$$

Единственным положением равновесия системы (2.11) является точка  $\mathbf{x}^* \equiv (u_1^*, v_1^*, \dots, u_N^*, v_N^*)^T$  с координатами  $u_j^* = -a_j$ ,  $v_j^* = -a_j + a_j^3/3 + C(a_j - a_{(j+1) \bmod N})$ , где  $j = 1, \dots, N$ . Линеаризуя систему (2.11) около положения равновесия  $\mathbf{x}^*$  и делая замену  $\mathbf{x}(t) = [u_1(t), v_1(t), u_2(t), v_2(t)]^T \equiv \mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}(t)$ , получим

$$\delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \xi_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \xi_N & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \delta\mathbf{x}(t) +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 & 0 & C & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta\mathbf{x}(t - \tau), \quad (2.12)$$

где  $\xi_j = 1 - a_j^2 - C$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Сделаем следующую замену

$$\delta\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{q},$$

где  $\mathbf{q}$  – собственный вектор матрицы Якоби, и получим следующий характеристический многочлен линеаризованной системы (2.12)

$$\begin{vmatrix} \xi_1 - \varepsilon\lambda & -1 & Ce^{-\lambda\tau} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \varepsilon & -\varepsilon\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_2 - \varepsilon\lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & -\varepsilon\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Ce^{-\lambda\tau} & 0 & 0 & 0 & \dots & \xi_N - \varepsilon\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon & -\varepsilon\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2.13)$$

Вычислим полученный определитель матрицы (2.13). Для этого разложим ее  $(2N - 1)$ -ю строку на сумму двух строк

$$\begin{vmatrix} \xi_1 - \varepsilon\lambda & -1 & Ce^{-\lambda\tau} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \varepsilon & -\varepsilon\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_2 - \varepsilon\lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & -\varepsilon\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \xi_N - \varepsilon\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon & -\varepsilon\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_1 - \varepsilon\lambda & -1 & Ce^{-\lambda\tau} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \varepsilon & -\varepsilon\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_2 - \varepsilon\lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & -\varepsilon\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Ce^{-\lambda\tau} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon & -\varepsilon\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2.14)$$

Обозначим через  $I_1$  первую матрицу в сумме (2.14), а через  $I_2$  – вторую, соответственно. Сначала вычислим значение определителя матрицы  $I_1$ . Разложим

ее первую строку на сумму двух следующих строк  $(\xi_1 - \varepsilon\lambda, -1, 0, 0, \dots, 0, 0)$  и  $(0, 0, Ce^{-\lambda\tau}, 0, \dots, 0, 0)$ . Определитель матрицы  $I_1$  равен сумме двух определителей, в которой значение первого равно произведению определителей двух блоков. Таким образом, определитель матрицы  $I_1$  можно представить в следующем виде

$$\det I_1 = \varepsilon(1 - \xi_1\lambda + \varepsilon\lambda^2) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \xi_2 - \varepsilon\lambda & -1 & Ce^{-\lambda\tau} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \varepsilon & -\varepsilon\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 - \varepsilon\lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & -\varepsilon\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \xi_N - \varepsilon\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon & -\varepsilon\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & Ce^{-\lambda\tau} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \varepsilon & -\varepsilon\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_2 - \varepsilon\lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & -\varepsilon\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \xi_N - \varepsilon\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon & -\varepsilon\lambda \end{vmatrix}. \quad (2.15)$$

Очевидно, что значение второго определителя в сумме (2.15) равно 0. Повторяя эту же процедуру с первым определителем в (2.15) еще  $(N - 2)$  раз, получим

$$\det I_1 = \varepsilon^N \prod_{j=1}^N (1 - \xi_j\lambda + \varepsilon\lambda^2). \quad (2.16)$$

Теперь перейдем к вычислению значения определителя матрицы  $I_2$ . Для этого разложим ее по  $(2N - 1)$ й строке и получим

$$\det I_2 = Ce^{-\lambda\tau} \begin{vmatrix} -1 & Ce^{-\lambda\tau} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\varepsilon\lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 - \varepsilon\lambda & -1 & Ce^{-\lambda\tau} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & -\varepsilon\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon & -\varepsilon\lambda \end{vmatrix}.$$

Это определитель матрицы размера  $(2N - 1) \times (2N - 1)$ , которую можно разложить по последнему столбцу

$$\det I_2 = -\varepsilon\lambda Ce^{-\lambda\tau} \begin{vmatrix} -1 & Ce^{-\lambda\tau} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\varepsilon\lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 - \varepsilon\lambda & -1 & Ce^{-\lambda\tau} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & -\varepsilon\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & Ce^{-\lambda\tau} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\varepsilon\lambda & 0 \end{vmatrix}.$$

Продолжим раскладывать полученную матрицу по последнему столбцу до тех пор, пока не получим следующее выражение

$$\det I_2 = -\varepsilon^N C^N \lambda^N e^{-\lambda\tau N}. \quad (2.17)$$

Используя полученные выражения (2.16) и (2.17), можно представить характеристический полином системы (2.12) в следующем виде

$$\prod_{j=1}^N (1 - \xi_j \lambda + \varepsilon \lambda^2) - (C \lambda e^{-\lambda\tau})^N = 0. \quad (2.18)$$

В дальнейшем будем считать, что  $\varepsilon \sim 0$ , так как обычно значение  $\varepsilon$  выбирается малым, т.е.  $\varepsilon \ll 1$ . Подставим  $\lambda = i\omega$  в уравнение (2.18) и получим

$$\prod_{j=1}^N (1 - \xi_j i\omega) = (Ci\omega e^{-i\omega\tau})^N. \quad (2.19)$$

Возведя в квадрат уравнение (2.19), получим следующее выражение

$$\prod_{j=1}^N (1 + \xi_j^2 \omega^2) = (C\omega)^{2N},$$

которое можно представить в виде

$$\left( \prod_{j=1}^N \xi_j^2 - C^{2N} \right) \omega^{2N} + \mathbf{P}(\omega^2) = 0, \quad (2.20)$$

где  $\mathbf{P}(\omega^2)$  – полином  $(N - 1)$ й степени с положительными коэффициентами. При  $\prod_{j=1}^N \xi_j^2 > C^{2N}$  уравнение (2.20), а, следовательно, и уравнение (2.19) не имеют решения для действительных значений  $\omega$ . Таким образом, бифуркация Андронова-Хопфа невозможна. Возьмем квадратный корень из этого неравенства и сделаем подстановку  $\xi_j = 1 - a_j^2 - C$

$$\left| \prod_{j=1}^N (1 - C - a_j^2) \right| > |C|^N. \quad (2.21)$$

Полученное неравенство определяет значения параметров  $C$ ,  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , при которых бифуркация Андронова-Хопфа невозможна. Таким образом, имеет место следующая теорема

**Теорема 2.2.** *Если выполнено неравенство (2.21) то бифуркация Андронова-Хопфа невозможна, т.е. положение равновесия линеаризованной системы (2.12) асимптотически устойчиво.*

Полученное неравенство является обобщением неравенства (2.6) для случая однонаправленного кольца систем ФХН.

## Глава 3

# Управление синхронизацией двух связанных систем ФитцХью-Нагумо

### 3.1 Синхронизация двух связанных систем ФитцХью-Нагумо с различными пороговыми параметрами

Рассмотрим две связанные системы ФХН с различными пороговыми параметрами

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{u}_1(t) &= u_1(t) - \frac{u_1^3(t)}{3} - v_1(t) + C[u_2(t) - u_1(t)] + I(t), \\ \dot{v}_1(t) &= u_1(t) - bv_1(t) + a_1, \\ \varepsilon \dot{u}_2(t) &= u_2(t) - \frac{u_2^3(t)}{3} - v_2(t) + C[u_1(t) - u_2(t)], \\ \dot{v}_2(t) &= u_2(t) - bv_2(t) + a_2,\end{aligned}\tag{3.1}$$

где  $C$  – сила связи между нейронами, а  $I(t)$  – внешний стимул, используемый в качестве управления. Так как рассматриваются системы с различными параметрами, то полная синхронизация (равенство векторов состояний двух систем)

невозможна. Поэтому будем ставить задачу синхронизации векторов состояний с некоторым сдвигом. Введем следующие обозначения

$$\delta_1 = u_1 - u_2, \quad \delta_2 = v_1 - v_2. \quad (3.2)$$

Тогда цель управления можно определить как

$$|\delta_1(t)| \leq \Delta_1, \quad |\delta_2(t)| \leq \Delta_2, \quad \text{при } t > t^*, \quad (3.3)$$

где  $\Delta_1, \Delta_2$  – уровни точности, которые определим позднее. Вычтем третье уравнение из первого системы (3.1) и четвертое из второго, соответственно, имея в виду обозначения (3.2), и получим

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{\delta}_1(t) &= (1 - 2C)\delta_1(t) - \delta_2(t) - \delta_1(t)\varphi(t) + I(t), \\ \dot{\delta}_2(t) &= \delta_1(t) - b\delta_2(t) + a_1 - a_2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где  $\varphi = (u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2)/3$  и  $\varphi(t) \geq 0$  для любого  $t$ .

### 3.1.1 Неадаптивный случай

Предположим, что все параметры системы (3.4) известны. Выберем управление в следующем виде

$$I(t) = -\gamma\delta_1(t), \quad (3.5)$$

где  $\gamma \geq 0$  – коэффициент усиления, и подставим его в систему (3.4)

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{\delta}_1(t) &= (1 - 2C - \gamma)\delta_1(t) - \delta_2(t) - \delta_1(t)\varphi(t), \\ \dot{\delta}_2(t) &= \delta_1(t) - b\delta_2(t) + a_1 - a_2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Для анализа устойчивости замкнутой системы (3.6) введем следующую функцию Ляпунова

$$V(\mathbf{z}(t)) = \frac{\varepsilon}{2}\delta_1^2(t) + \frac{1}{2}\delta_2^2(t),$$



где  $\mathbf{z} = (\delta_1, \delta_2)$ , и найдем ее производную в силу системы

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{z}(t)) &= (1 - 2C - \gamma)\delta_1^2(t) - \delta_1(t)\delta_2(t) - \varphi(t)\delta_1^2(t) + \delta_1(t)\delta_2(t) - b\delta_2^2(t) + \\ &+ (a_1 - a_2)\delta_2(t) = (1 - 2C - \gamma)\delta_1^2(t) - \varphi(t)\delta_1^2(t) - b\delta_2^2(t) + (a_1 - a_2)\delta_2(t) \leq \\ &\leq -(2C + \gamma - 1)\delta_1^2(t) - \left(\sqrt{b}\delta_2(t) - \frac{a_1 - a_2}{2\sqrt{b}}\right)^2 + \frac{(a_1 - a_2)^2}{4b}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Первый член в производной функции Ляпунова (3.7) неположителен при  $\gamma > 1 - 2C$ . Отсюда получим следующие значения уровней точности

$$\Delta_1 = \frac{|a_1 - a_2|}{2\sqrt{b(2C + \gamma - 1)}}, \quad \Delta_2 = \frac{|a_1 - a_2|}{b}. \quad (3.8)$$

Таким образом, управление  $I(t)$  в виде (3.5), где  $\gamma > 1 - 2C$ , а  $\delta_1$  и  $\delta_2$  выражаются формулами (3.2), обеспечивает цель управления (3.3) с уровнями точности (3.8).

Имеет место следующая теорема

**Теорема 3.1.**  $\forall u_1(0), u_2(0), v_1(0), v_2(0)$  системы (3.1) управление  $I(t)$  в виде (3.5), где  $\gamma > 1 - 2C$ , а  $\delta_1$  и  $\delta_2$  выражаются формулами (3.2), обеспечивает цель управления (3.3) с уровнями точности (3.8).

**Следствие 3.1.** Если выполнено неравенство  $C > 0.5$ , то система (3.1) синхронизируется без управления, т.е.  $I(t) = 0$ .

Перейдем к моделированию работы полученного алгоритма управления в системе *Matlab* [69]. Сначала рассмотрим поведение системы (3.1) без управления ( $I(t) = 0$ ). Пусть параметры системы заданы следующим образом:  $a_1 = 1.1$ ,  $a_2 = 0.7$ ,  $b = 0.1$ ,  $C = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.1$ . Результаты моделирования динамики свободной системы (3.1) представлены на рис. 3.1. Можно заметить, что две системы не синхронизированы (см. рис. 3.1(а) и (б), где представлена динамика активаторов и ингибиторов, соответственно, и рис. 3.1(с), где представлена динамика ошибки синхронизации активаторов, а также рис. 3.1(д) с изображением фазовой плоскости). Отметим, что при том, что первая система без связей находится

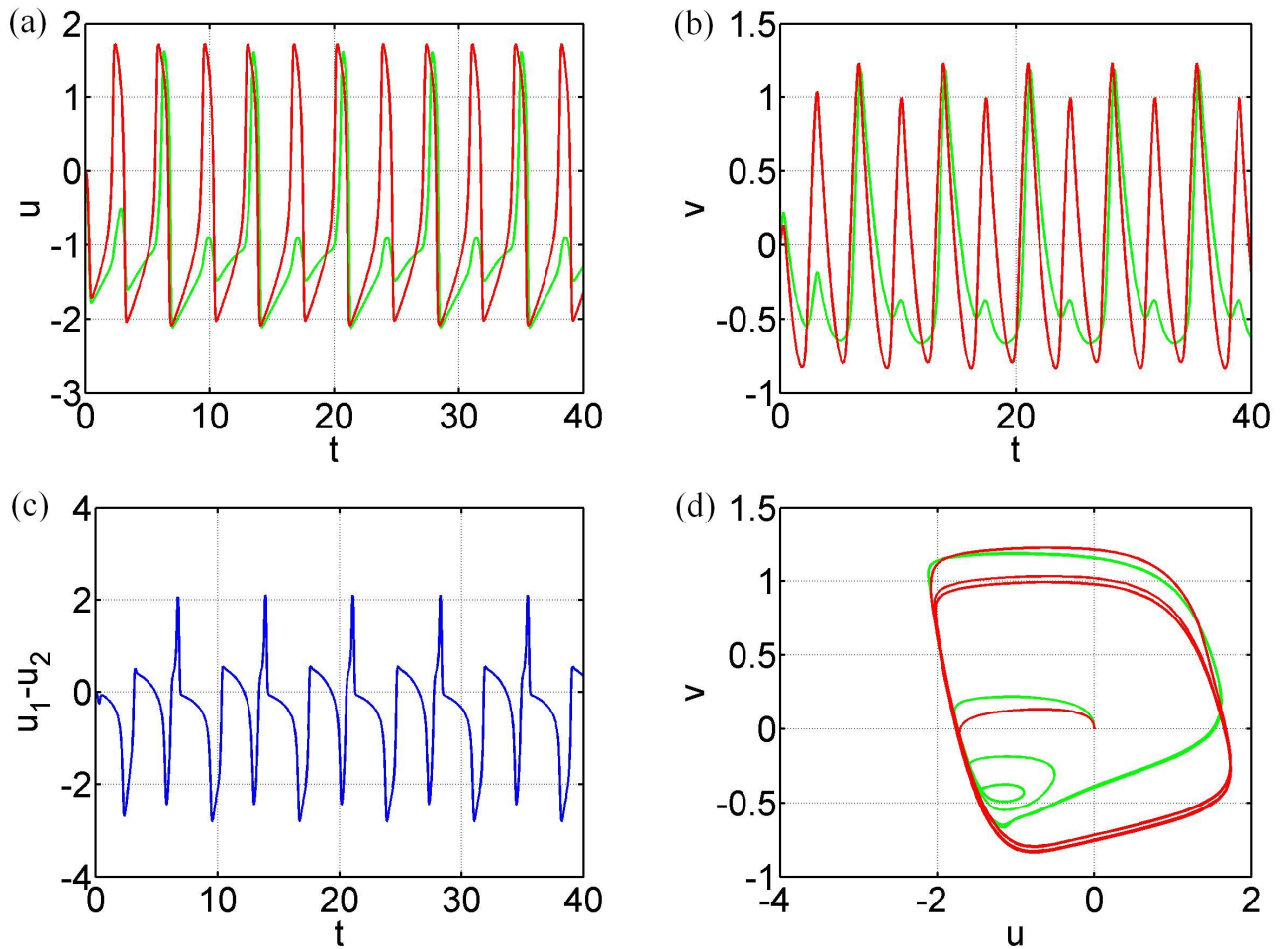


Рис. 3.1: Поведение двух связанных систем ФХН (3.1) без управления  $I(t) = 0$ .

Зеленой линией обозначена первая система, а красной – вторая. (a) и (b): динамика активаторов и ингибиторов, соответственно; (c): разница между значениями активаторов; (d): фазовая плоскость. Параметры системы:  $\varepsilon = 0.1$ ,  $a_1 = 1.1$ ,  $a_2 = 0.7$ ,  $b = 0.1$ ,  $C = 0.1$ . Начальные условия:  $u_1(0) = 0$ ,  $v_1(0) = 0$ ,  $u_2(0) = 0$ ,  $v_2(0) = 0$ .

в возбужденном режиме, обе системы испускают спайки из-за наличия ненулевой силы связи  $C$ .

Теперь рассмотрим работу алгоритма управления (3.5) для синхронизации двух систем. На рис. 3.2 приведены результаты моделирования. После переходного периода примерно в 20 единиц времени обе системы достигают желаемого синхронного режима (см. динамику активаторов и ингибиторов на рис. 3.2(a) и (b), соответственно). Таким образом, данный алгоритм обеспечивает достижение цели управления (3.3). Отметим, что управление ограничено и имеет такой же порядок амплитуды колебаний, как и активатор (см. рис. 3.2(f)). Также отметим, что аналитические оценки уровней точности  $\Delta_1 = 0.23$ ,  $\Delta_2 = 4$  по формулам (3.8) совпадают с экспериментальными (см. динамику разницы значений активаторов и ингибиторов, соответственно, на рис. 3.2(c) и (d)).

### 3.1.2 Адаптивный случай

Теперь предположим, что параметры  $C$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  и  $b$  системы (3.1) неизвестны. Также предположим, что сила связи  $C$  может быть отрицательной. Коэффициент усиления  $\gamma$  в управлении, которое мы использовали в предыдущем разделе 3.1.1 (3.5), зависит от неизвестного параметра  $C$ . Для оценки этого неизвестного параметра можно использовать алгоритм скоростного градиента.

Выберем управление в следующем виде

$$\begin{aligned} I(t) &= -\gamma\delta_1(t) + \theta(t)\delta_1(t), \\ \dot{\theta}(t) &= -\gamma_0\delta_1^2(t), \end{aligned} \tag{3.9}$$

где  $\gamma > 0$ ,  $\gamma_0 > 0$  – коэффициенты усиления, а  $\theta$  – настраиваемый параметр, используемый для оценки неизвестной силы связи  $C$ . Подставим управление в систему (3.4)

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{\delta}_1(t) &= (1 - 2C - \gamma + \theta(t))\delta_1(t) - \delta_2(t) - \delta_1(t)\varphi(t), \\ \dot{\delta}_2(t) &= \delta_1(t) - b\delta_2(t) + a_1 - a_2. \end{aligned} \tag{3.10}$$

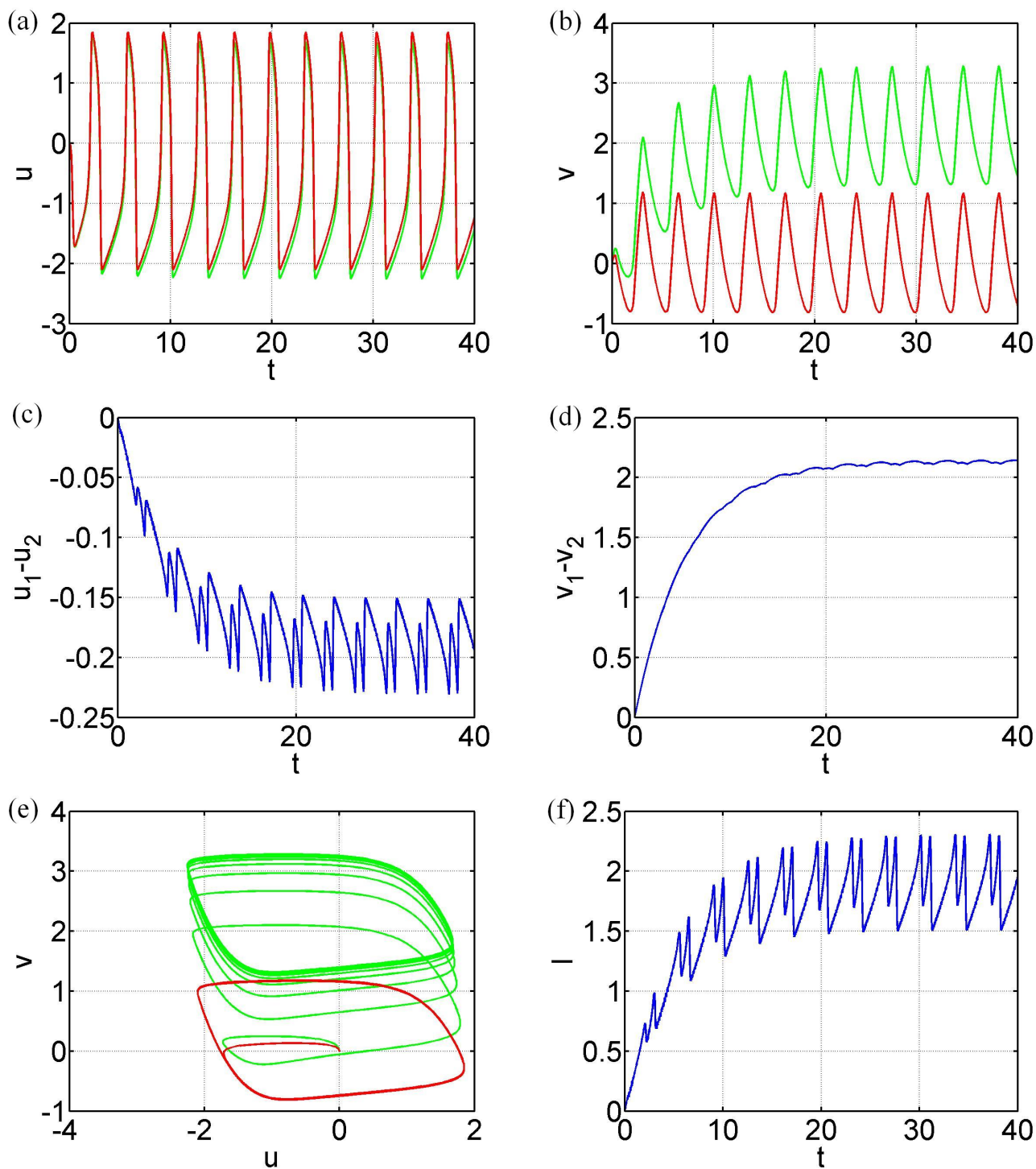


Рис. 3.2: Синхронизация двух связанных систем ФХН (3.1) при помощи внешнего стимула (3.5) (неадаптивный случай). (a) и (b): динамика активаторов и ингибиторов, соответственно; (c) и (d): разница между значениями активаторов и ингибиторов, соответственно; (e): фазовая плоскость; и (f): динамика управления. Параметры системы:  $\gamma = 10$ . Остальные параметры и начальные условия такие же, как и на рис. 3.1.

Для анализа устойчивости замкнутой системы (3.10) введем следующую функцию Ляпунова

$$V(\mathbf{z}(t)) = \frac{\varepsilon}{2}\delta_1^2(t) + \frac{1}{2}\delta_2^2(t) + \frac{1}{2\gamma_0}(\theta(t) - 2C)^2,$$

где  $\mathbf{z} = (\delta_1, \delta_2)$ , найдем ее производную в силу системы и сделаем некоторые преобразования, учитывая формулу (3.9)

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{z}(t)) &= (1 - 2C - \gamma + \theta(t))\delta_1^2(t) - \varphi(t)\delta_1^2(t) - b\delta_2^2(t) + (a_1 - a_2)\delta_2(t) + \\ &+ \gamma_0^{-1}\dot{\theta}(t)(\theta(t) - 2C) = (1 - \gamma)\delta_1^2(t) + (\theta(t) - 2C)\delta_1^2(t) - \varphi(t)\delta_1^2(t) - b\delta_2^2(t) + \\ &+ (a_1 - a_2)\delta_2(t) - \delta_1^2(t)(\theta(t) - 2C) \leq \\ &\leq -(\gamma - 1)\delta_1^2(t) - \left( \sqrt{b}\delta_2(t) - \frac{a_1 - a_2}{2\sqrt{b}} \right)^2 + \frac{(a_1 - a_2)^2}{4b}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Первый член в производной функции Ляпунова (3.11) неположителен при  $\gamma > 1$ . Отсюда получим следующие значения уровней точности

$$\Delta_1 = \frac{|a_1 - a_2|}{2\sqrt{b(\gamma - 1)}}, \quad \Delta_2 = \frac{|a_1 - a_2|}{b}.$$

Отметим, что из-за неизвестных параметров  $a_1$ ,  $a_2$  и  $\gamma$  аналитически вычислить уровни точности  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  не получится. Таким образом, управление  $I(t)$  в виде (3.5), где  $\gamma > 1$ ,  $\gamma_0 > 0$ , а  $\delta_1$  и  $\delta_2$  выражаются формулами (3.2), обеспечивает цель управления (3.3) с некоторыми уровнями точности.

Имеет место следующая теорема

**Теорема 3.2.**  $\forall u_1(0), u_2(0), v_1(0), v_2(0)$  системы (3.1) управление  $I(t)$  в виде (3.9), где  $\gamma > 1$ ,  $\gamma_0 > 0$ , а  $\delta_1$  и  $\delta_2$  выражаются формулами (3.2), обеспечивает цель управления (3.3) с некоторыми уровнями точности.

Рассмотрим работу предложенного адаптивного алгоритма управления (3.9). На рис. 3.3 представлены результаты моделирования. Переходный период составляет примерно 20 единиц времени, после которого обе системы достигают желаемого синхронного режима (см. динамику активаторов и ингибиторов на

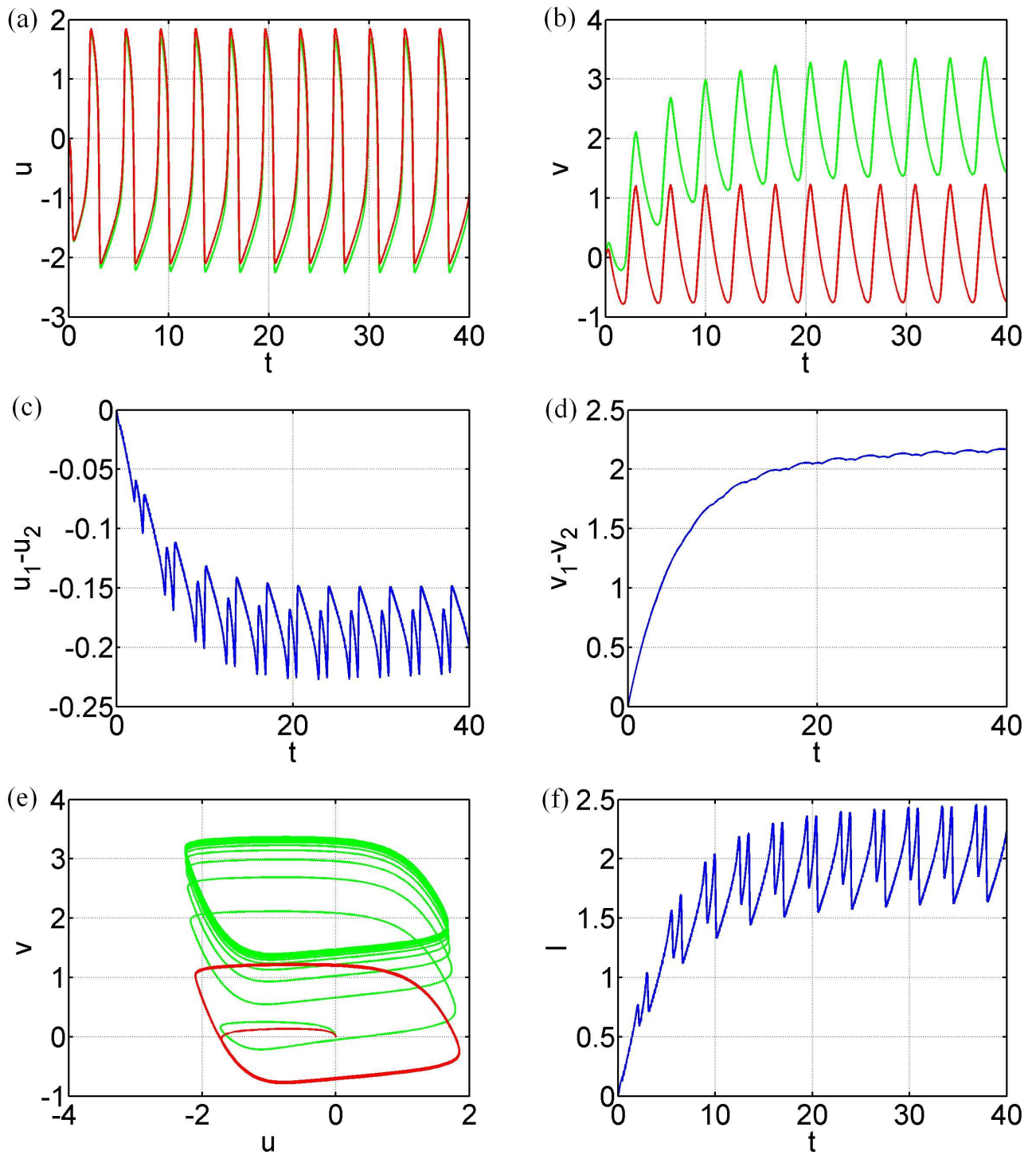


Рис. 3.3: Синхронизация двух связанных систем ФХН (3.1) при помощи внешнего стимула (3.9) (адаптивный случай). (а) и (b): динамика активаторов и ингибиторов, соответственно; (с) и (d): разница между значениями активаторов и ингибиторов, соответственно; (е): фазовая плоскость; и (f): динамика управления. Параметры системы:  $\gamma = 10$ ,  $\gamma_0 = 1$ ,  $C = -0.2$ . Остальные параметры и начальные условия такие же, как и на рис. 3.1.

рис. 3.3(a) и (b), соответственно, а также динамику их разницы на рис. 3.3(c) и (d)). Таким образом, данный алгоритм также обеспечивает достижение цели управления (3.3) и не использует данные о параметрах системы. Отметим, что управление также ограничено и имеет такой же порядок амплитуды колебаний, как и активатор (см. рис. 3.3(f)).

### 3.1.3 Синхронизация двух связанных систем ФитцХью-Нагумо с помощью настройки силы связи

Управлять синхронизацией можно также с помощью настройки силы связи  $C$ . Настраивать коэффициент силы связи будем с помощью алгоритма скоростного градиента. Для этого положим  $I \equiv 0$  в системе (3.1) и введем следующую целевую функцию

$$Q(\mathbf{z}(t)) = \frac{\varepsilon}{2}(\delta_1(t) + a_1 - a_2)^2,$$

где  $\mathbf{z} = (\delta_1, \delta_2)$ . В целевую функцию входит только разность значений активаторов со сдвигом, так как сила связи  $C$  входит только в первое уравнение системы (3.4). Сдвиг равный разности пороговых параметров используется по той причине, что целевая функция должна стремиться к нулю. Для построения АСГ найдем производную целевой функции в силу системы (3.4)

$$\dot{Q}(\mathbf{z}(t)) = (\delta_1(t) + a_1 - a_2)[(1 - 2C)\delta_1(t) - \delta_1(t)\varphi(t) - \delta_2(t)],$$

тогда, вычислив градиент производной целевой функции по переменной  $C$ , получим следующий закон управления

$$\dot{C}(t) = 2\gamma\delta_1(t)(\delta_1(t) + a_1 - a_2), \quad (3.12)$$

где  $\gamma > 0$  – коэффициент усиления. Подходящее значение коэффициента усиления можно определить с помощью моделирования. Отметим, что похожий подход используется при настройке силы связи в сети систем Рёсслера [55].

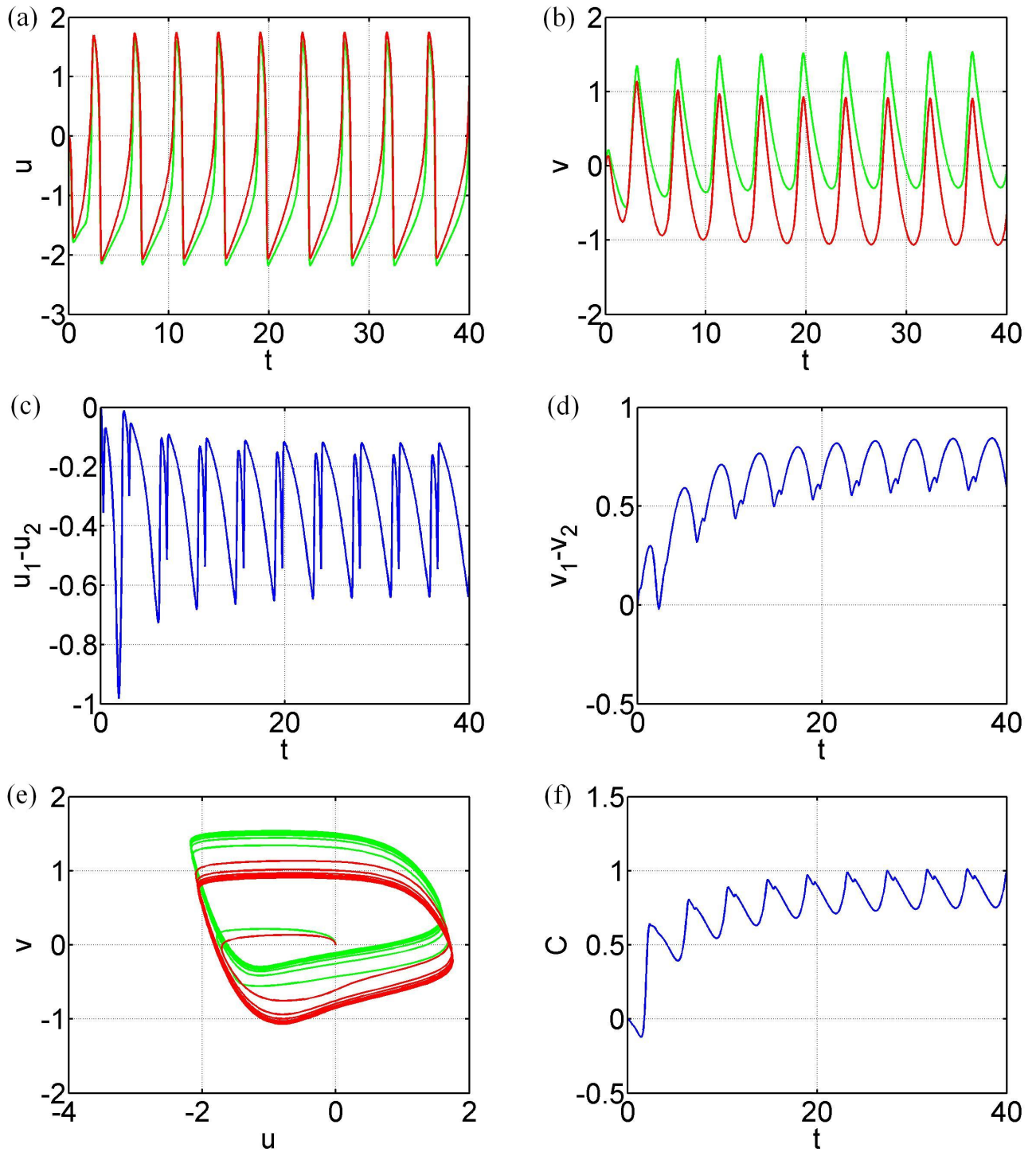


Рис. 3.4: Синхронизация двух связанных систем ФХН (3.1) при помощи настройки силы связи по алгоритму (3.12). (a) и (b): динамика активаторов и ингибиторов, соответственно; (c) и (d): разница между значениями активаторов и ингибиторов, соответственно; (e): фазовая плоскость; и (f): динамика силы связи. Параметры системы:  $\gamma = 3$ . Остальные параметры и начальные условия такие же, как и на рис. 3.1.



Сейчас мы будем настраивать силу связи для синхронизации двух систем ФХН по алгоритму (3.12). Результаты моделирования можно увидеть на рис. 3.4. После переходного периода примерно в 15 единиц времени обе системы достигают желаемого синхронного состояния (см. динамику активаторов и ингибиторов на рис. 3.4(a) и (b), соответственно, а также динамику их разницы на рис. 3.4(c) и (d)). Таким образом, этот алгоритм можно также применять для управления синхронизацией двух систем.

## 3.2 Анализ синхронизации двух связанных систем ФитцХью-Нагумо с дискретными связями

В данном разделе будем рассматривать две связанные системы ФХН с дискретными связями. Уравнения систем описываются следующим образом

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \dot{u}_1(t) &= u_1(t) - \frac{u_1^3(t)}{3} - v_1(t) + C[u_2(t_k) - u_1(t)], \\
 \dot{v}_1(t) &= u_1(t) + a - bv_1(t), \\
 \varepsilon \dot{u}_2(t) &= u_2(t) - \frac{u_2^3(t)}{3} - v_2(t) + C[u_1(t_k) - u_2(t)], \\
 \dot{v}_2(t) &= u_2(t) + a - bv_2(t), \quad t_k \leq t < t_{k+1},
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

где  $C$  – сила связи между нейронами. Параметры  $a$  и  $b$  примем равными 0.7 и 0.8, соответственно, а параметр масштаба  $\varepsilon = 0.1$ . Такой выбор параметров использовался, например, в работах [41, 60, 63, 93]. Распространяющийся между нейронами сигнал задан кусочно-постоянной функцией с последовательностью промежутков времени  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$ , где  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ .

Причина рассмотрения дискретного сигнала заключается в том, что нейрон воздействует на своих соседей путем испускания спайков, т.е. импульсов, которые возникают между периодами восстановления. Предположим, что неравенства

$$t_{k+1} - t_k \leq h \quad \forall k \geq 0,$$

выполнены для некоторого  $h > 0$ . Пользуясь идеей статьи [5], представим цифровой сигнал как сигнал с задержкой следующим образом

$$\begin{aligned} u_i(t_k) &= u_i(t - \tau(t)), \quad i = 1, 2 \\ \tau(t) &= t - t_k, \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Теперь сформулируем задачу синхронизации значений переменных двух систем ФХН. Для этого вычтем третье уравнение системы (3.13) из первого, а четвертое из второго, соответственно, произведя замену

$$\delta_1 = u_1 - u_2, \quad \delta_2 = v_1 - v_2,$$

и получим

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{\delta}_1(t) &= (1 - C - \varphi(t))\delta_1(t) - C\delta(t - \tau(t)) - \delta_2(t), \\ \dot{\delta}_2(t) &= \delta_1(t) - b\delta_2(t), \\ t \in [t_k, t_{k+1}), \quad \tau(t) &= t - t_k, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где  $\varphi = 1/3(u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2)$ ,  $\varphi(t) \geq 0$ ,  $\forall t$ . Нашей целью является изучить влияния шага дискретизации  $h$  на устойчивость системы (3.15). Для этого будем использовать теорему 1.4. Для ее применения нужно определить сектор, в котором лежит нелинейность. Для этого введем следующую функцию Ляпунова

$$V(t, \mathbf{z}_t) = \frac{1}{2} \left[ \varepsilon (u_1^2(t) + u_2^2(t)) + v_1^2(t) + v_2^2(t) + C \int_{t-\tau(t)}^t (u_1^2(s) + u_2^2(s)) ds \right],$$

где  $\mathbf{z} = (u_1, v_1, u_2, v_2)$ . Найдем ее производную в силу системы (3.13)

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \mathbf{z}_t) &= -u_1^4(t)/3 + u_1^2(t) - u_1(t)v_1(t) + Cu_1(t)u_2(t - \tau(t)) - Cu_1^2(t) - \\ &\quad - u_2^4(t)/3 + u_2^2(t) - u_2(t)v_2(t) + Cu_2(t)u_1(t - \tau(t)) - Cu_2^2(t) + \\ &\quad + u_1(t)v_1(t) + av_1(t) - bv_1^2(t) + u_2(t)v_2(t) + av_2(t) - bv_2^2(t) + \\ &\quad + Cu_1^2(t)/2 + Cu_2^2(t)/2 - Cu_1^2(t - \tau(t))/2 - Cu_2^2(t - \tau(t))/2 = \\ &= -C(u_1(t - \tau(t)) - u_2(t))^2/2 - C(u_2(t - \tau(t)) - u_1(t))^2/2 - \\ &\quad - (u_1^2(t) - 3/2)^2/3 - (u_2^2(t) - 3/2)^2/3 - b(v_1(t) - a/2b)^2 - b(v_2(t) - a/2b)^2 + \\ &\quad + 3/2 + a^2/2b, \end{aligned}$$

откуда получим оценку

$$u_i^2(t) \leq \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{3a^2}{2b}} + \frac{3}{2}, \quad i = 1, 2,$$

поэтому для рассматриваемых параметров системы  $b = 0.8$ ,  $a = 0.7$ ,  $\varepsilon = 0.1$  имеет место следующая оценка на нелинейность  $0 \leq \varphi(t) < 3.83$ .

Таким образом, систему (3.15) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + q\xi(t) + BKx(t - \tau(t)), \\ \sigma(t) &= r^T x(t), \quad \xi(t) = -\delta_1(t)\varphi(t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} \delta_1(t) \\ \delta_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} (1 - C)/\varepsilon & -1/\varepsilon \\ 1 & -b \end{bmatrix}, \quad BK = \begin{bmatrix} -C/\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ r &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} 1/\varepsilon \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Для всех  $t \geq 0$  нелинейная функция  $\xi(\sigma(t), t)$  лежит в секторе между двумя прямыми линиями  $\xi_1 = 0$  и  $\xi_2 = 3.83\sigma$ , поэтому выполнено неравенство

$$0 \leq \sigma\xi \leq 3.83\sigma^2.$$

Мы свели систему (3.15) к форме (1.11) и можем применять к ней теорему 1.4 для оценки шага дискретизации  $h$ .

Разрешимость линейных матричных неравенств была подтверждена с помощью моделирования в системе *Matlab* [69] с использованием пакета *Yalmip* (*Sedumi solver*) [65]. Результаты моделирования представлены на рис. 3.5 и отмечены зеленым цветом. Минимальная сила связи  $C$ , необходимая для синхронизации, равна 0.48. Максимальное значение шага дискретизации  $h$ , необходимое для разрешимости линейных матричных неравенств, равно 1.26 и достигается при  $C = 0.67$ . Также устойчивость системы (3.15) была проверена с помощью моделирования (см. красную область на рис. 3.5). Отметим, что для достаточно больших значений силы связи  $C$  данный подход дает хорошую оценку шага дискретизации  $h$ .

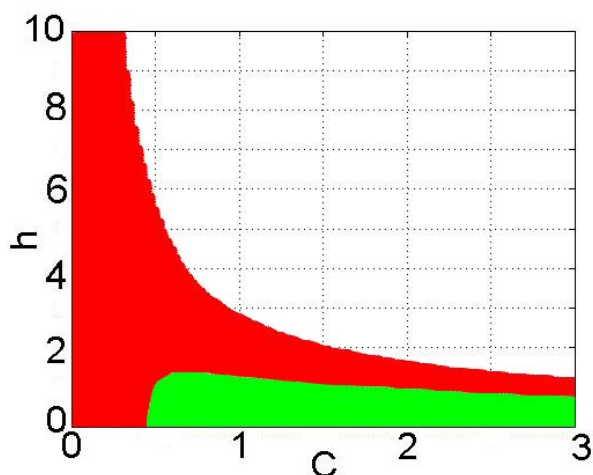


Рис. 3.5: Разрешимость линейных матричных неравенств по теореме 1.4 для системы (3.15) (зеленый цвет), и область синхронизации системы (3.15), полученная с помощью моделирования (красный цвет). Параметры системы:

$$b = 0.8, a = 0.7, \varepsilon = 0.1.$$

### 3.3 Управление синхронизацией двух связанных систем ФитцХью-Нагумо с переменной задержкой

В данном разделе рассмотрим задачу управления синхронизацией в двух связанных системах ФХН с переменной задержкой. Необходимость управления возникает, например, в случае, если рассматривается система с дискретными связями, как в разделе 3.2, и шаг дискретизации настолько велик, что системы ведут себя несинхронизированно.

### 3.3.1 Случай с медленно-меняющейся задержкой

Рассмотрим две связанные системы ФХН

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \dot{u}_1(t) &= u_1(t) - \frac{u_1^3(t)}{3} - v_1(t) + C[u_2(t - \tau(t)) - u_1(t)] + I(t), \\
 \dot{v}_1(t) &= u_1(t) - bv_1(t) + a, \\
 \varepsilon \dot{u}_2(t) &= u_2(t) - \frac{u_2^3(t)}{3} - v_2(t) + C[u_1(t - \tau(t)) - u_2(t)], \\
 \dot{v}_2(t) &= u_2(t) - bv_2(t) + a,
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

где  $C$  – сила связи между нейронами,  $I(t)$  – внешний стимул, рассматриваемый в качестве управления,  $\tau$  – переменная задержка, т.е. время необходимое для передачи сигнала от одного нейрона к другому. Предположим, что задержка  $\tau$  – дифференцируемая функция с ограниченной сверху производной  $\dot{\tau} \leq d < 1$  (случай медленно-меняющихся задержек). Сформулируем задачу синхронизации двух связанных систем ФХН. Для этого вычтем третье уравнение системы (3.16) из первого, а четвертое из второго, соответственно, предварительно сделав следующую замену

$$\delta_1 = u_1 - u_2, \quad \delta_2 = v_1 - v_2, \tag{3.17}$$

и получим

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \dot{\delta}_1(t) &= (1 - C)\delta_1(t) - \varphi(t)\delta_1(t) - C\delta_1(t - \tau(t)) - \delta_2(t) + I(t), \\
 \dot{\delta}_2(t) &= \delta_1(t) - b\delta_2(t),
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

где  $\varphi = 1/3(u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2)$ ,  $\varphi(t) \geq 0 \forall t$  – неотрицательная функция. Тогда цель управления можно представить следующим образом

$$\delta_1(t) \rightarrow 0, \quad \delta_2(t) \rightarrow 0, \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \tag{3.19}$$

Для достижения цели управления (3.19) выберем управление  $I$  в следующей форме

$$I_t = -\theta_1\delta_1(t) + \theta_2\delta_1(t - \tau(t)), \tag{3.20}$$

где  $\theta_1 \geq 0$ ,  $\theta_2$  – параметры управления. Подставим выбранное управление в систему (3.18) и получим уравнение замкнутой системы

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{\delta}_1(t) &= (1 - C - \theta_1)\delta_1(t) - \varphi(t)\delta_1(t) + (\theta_2 - C)\delta_1(t - \tau(t)) - \delta_2(t), \\ \dot{\delta}_2(t) &= \delta_1(t) - b\delta_2(t).\end{aligned}\quad (3.21)$$

Цель управления (3.19) может быть достигнута при выборе подходящих параметров управления  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ . Для их нахождения введем следующий функционал Ляпунова-Красовского

$$V(t, \mathbf{z}_t) = \varepsilon \delta_1^2(t) + \delta_2^2(t) + \theta_0 \int_{t-\tau(t)}^t \delta_1^2(s) ds,$$

где  $\mathbf{z} = (\delta_1, \delta_2)$ , а  $\theta_0 > 0$  – некоторый положительный параметр. Найдем его производную в силу системы (3.21)

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, \mathbf{z}_t) &= 2(1 - C - \theta_1 + 0.5\theta_0)\delta_1^2(t) - 2\varphi(t)\delta_1^2(t) + \\ &+ 2(\theta_2 - C)\delta_1(t)\delta_1(t - \tau(t)) - b\delta_2^2(t) - \theta_0(1 - \dot{\tau})\delta_1^2(t - \tau(t)).\end{aligned}\quad (3.22)$$

Нужно выбрать параметры управления таким образом, чтобы сделать производную функционала Ляпунова-Красовского отрицательной для всех  $\delta_1(t)$ ,  $\delta_1(t - \tau)$ ,  $\delta_2(t)$ , кроме нуля. Член  $-2\varphi(t)\delta_1^2(t)$  неположительный, следовательно его можно опустить и получить следующее неравенство

$$2(1 - C - \theta_1 + 0.5\theta_0)\delta_1^2(t) + 2(\theta_2 - C)\delta_1(t)\delta_1(t - \tau) - \theta_0(1 - \dot{\tau})\delta_1^2(t - \tau) - b\delta_2^2(t) < 0,$$

которое можно представить в форме

$$\begin{bmatrix} \delta_1(t) & \delta_1(t - \tau) & \delta_2(t) \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} \delta_1(t) \\ \delta_1(t - \tau) \\ \delta_2(t) \end{bmatrix} < 0,$$

где

$$W = \begin{bmatrix} 2(1 - C - \theta_1 + 0.5\theta_0) & \theta_2 - C & 0 \\ \theta_2 - C & -\theta_0(1 - \dot{\tau}) & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \prec 0.$$

Задача сводится к разрешимости следующего линейного матричного неравенства

$$\begin{bmatrix} 2(1 - C - \theta_1 + 0.5\theta_0) & \theta_2 - C \\ \theta_2 - C & -\theta_0(1 - \dot{\tau}) \end{bmatrix} \prec 0. \quad (3.23)$$

Нужно подобрать параметры управления  $\theta_0$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , чтобы матрица (3.23) была отрицательно определена. Для решения полученного матричного неравенства используем критерий Сильвестра. Так как  $\theta_0 > 0$  и  $\dot{\tau} \leq d < 1$ , то нижний главный минор матрицы (3.23) отрицателен. Значит эта матрица отрицательно определена тогда и только тогда, когда ее определитель положителен, т.е. параметры управления должны удовлетворять следующему неравенству

$$-2(1 - C - \theta_1 + 0.5\theta_0)\theta_0(1 - d) - (\theta_2 - C)^2 > 0,$$

которое можно привести к виду

$$-(1 - d)\theta_0^2 + 2(1 - d)(\theta_1 + C - 1)\theta_0 - (\theta_2 - C)^2 > 0.$$

Это неравенство выполнено для некоторого положительного  $\theta_0$ , когда следующее квадратное уравнение имеет вещественные корни

$$-(1 - d)\theta_0^2 + 2(1 - d)(\theta_1 + C - 1)\theta_0 - (\theta_2 - C)^2 = 0, \quad (3.24)$$

и имеет место следующее неравенство по теореме Виета

$$\theta_1 + C - 1 > 0. \quad (3.25)$$

Таким образом, дискриминант уравнения (3.24) должен быть положительным

$$4(1 - d)^2(\theta_1 + C - 1)^2 - 4(1 - d)(\theta_2 - C)^2 > 0. \quad (3.26)$$

Учитывая формулу (3.25), представим неравенство (3.26) в виде

$$\theta_1 > \frac{|\theta_2 - C|}{\sqrt{1 - d}} - C + 1. \quad (3.27)$$

Если параметры управления  $\theta_1, \theta_2$  удовлетворяют полученному неравенству (3.27), то производная функционала Ляпунова-Красовского (3.22) неположительна, т.е. цель управления (3.19) достигается.

Таким образом, можно сформулировать следующую теорему

**Теорема 3.3.** Пусть задержка  $\tau$  – медленно-меняющаяся дифференцируемая функция в системе (3.16), т.е.  $\dot{\tau} \leq d < 1$ . Тогда управление  $I(t)$  в форме (3.20), где параметры  $\theta_1 \geq 0$  и  $\theta_2$  удовлетворяют неравенству (3.27), а  $\delta_1, \delta_2$  выражаются формулами (3.17), обеспечивает цель управления (3.19).

Теперь проведем моделирование работы предложенного алгоритма. Для начала рассмотрим поведение двух систем (3.16) без управления ( $I(t) = 0$ ). Рассмотрим систему со следующими параметрами  $a = 0.7, b = 0.1, C = 1, \varepsilon = 0.1, \tau(t) = 3 + 1/2 \cos(t)$ . На рис. 3.6 представлена динамика такой системы. Очевидно, что системы не синхронизированы (см. рис. 3.6(a) и (b), где представлена динамика активаторов и ингибиторов, соответственно, и рис. 3.6(c), где представлена динамика ошибки синхронизации активаторов, а также рис. 3.6(d) с изображением фазовой плоскости).

Для того чтобы синхронизировать две системы ФХН (3.16) применим алгоритм управления в форме (3.20) с параметрами  $\theta_1 = 5, \theta_2 = 1$ . На рис. 3.7 представлены результаты моделирования. После переходного периода примерно в 20 единиц времени две системы достигают желаемого синхронного состояния (см. динамику активаторов и ингибиторов на рис. 3.7(a) и (b), соответственно, а также динамику их разницы на рис. 3.7(c) и (d)). Таким образом, цель управления достигается. Отметим, что управление  $I(t)$  ограничено и стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$  (см. рис. 3.7(f)).

### 3.3.2 Общий случай

В случае, если задержка не является медленно-меняющейся функцией, нужно применять другой подход для управления синхронизацией. Предположим те-



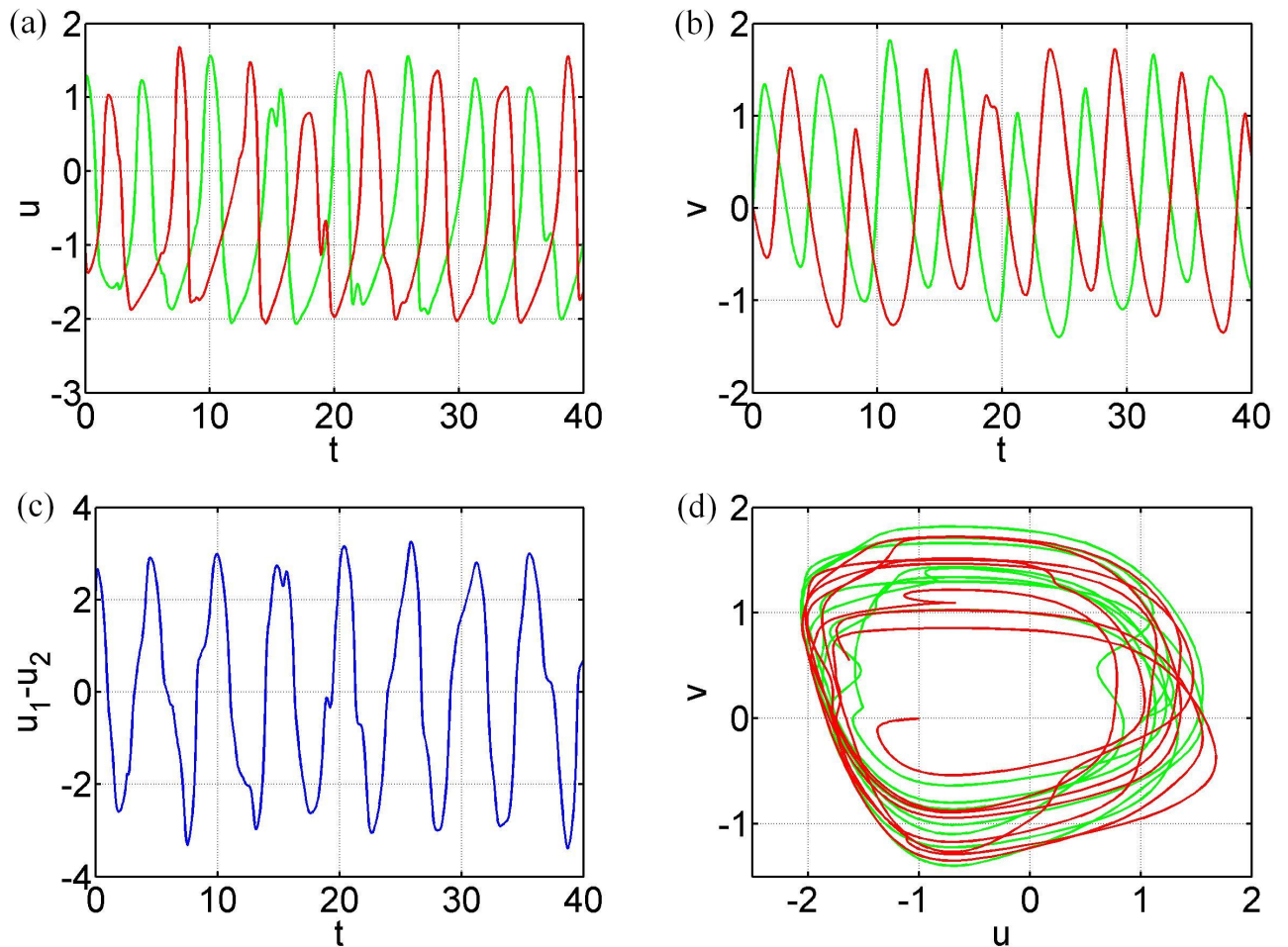


Рис. 3.6: Поведение двух связанных систем ФХН с медленно-меняющейся задержкой (3.16) без управления. Зеленой линией обозначена первая система, а красной – вторая. (a) и (b): динамика активаторов и ингибиторов, соответственно; (c): разница между значениями активаторов; и (d): фазовая плоскость. Параметры системы:  $a = 0.7$ ,  $b = 0.1$ ,  $C = 1$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\tau(t) = 3 + 1/2 \cos(t)$ . Начальные условия:  $u_1(t) = \cos(t)$ ,  $v_1(t) = \sin(t)$ ,  $u_2(t) = -\cos(t)$ ,  $v_2(t) = -\sin(t)$  при  $t \in [-\tau, 0]$ .

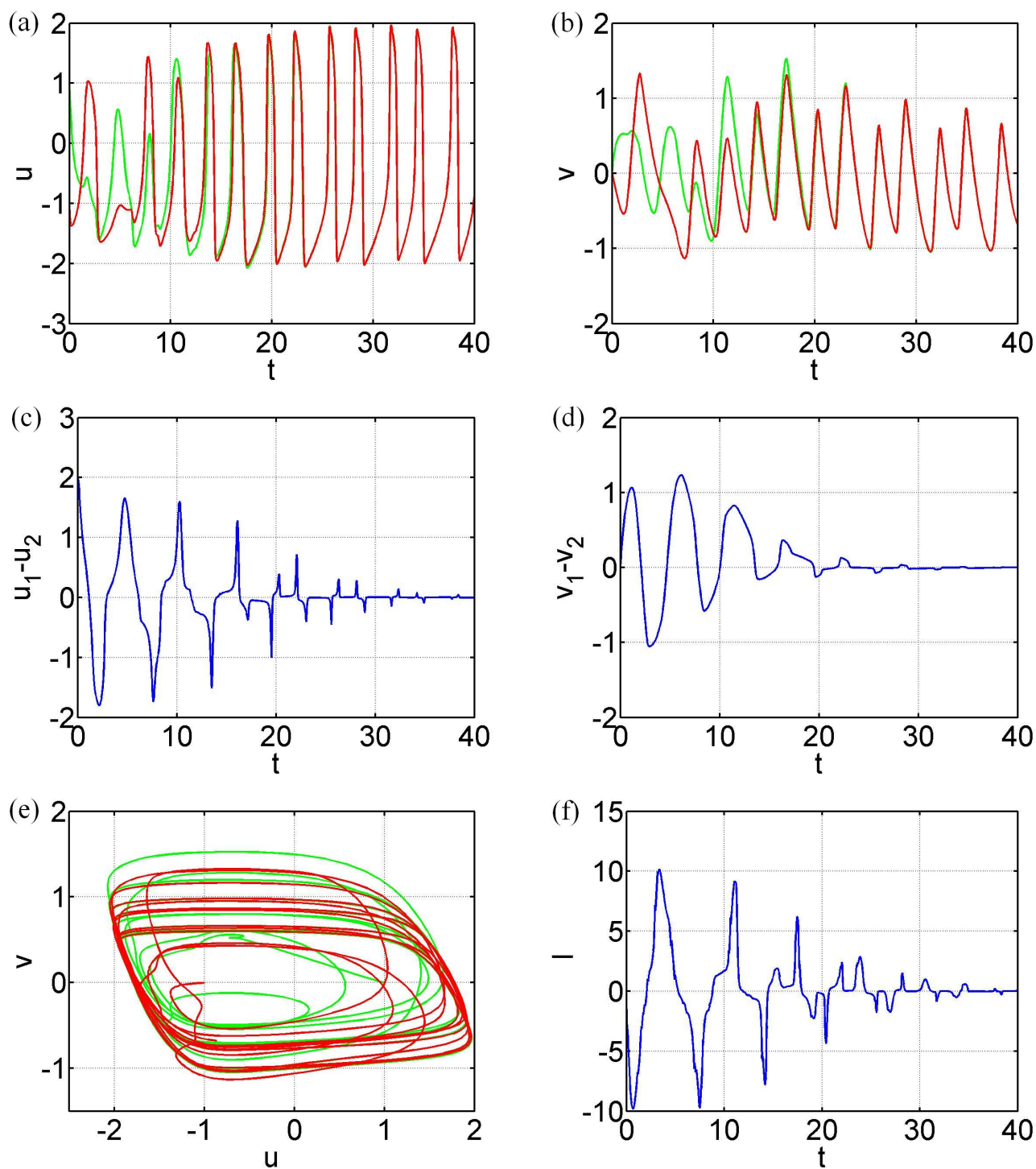


Рис. 3.7: Управление синхронизацией в двух связанных системах ФХН (3.16) с помощью алгоритма в форме (3.20). (a) и (b): динамика активаторов и ингибиторов, соответственно; (c) и (d): разница между значениями активаторов и ингибиторов, соответственно; (e): фазовая плоскость; и (f): динамика управления. Параметры системы:  $\theta_1 = 5$ ,  $\theta_2 = 1$ . Остальные параметры и начальные условия такие же, как и на рис. 3.6.

перь, что в системе (3.16) функция задержки  $\tau(t)$  – произвольная. Выберем такой же закон управления (3.20), как и в предыдущем разделе 3.3.1, и рассмотрим уравнения замкнутой системы (3.21). Для исследования устойчивости этой системы введем следующую функцию Ляпунова

$$V(\mathbf{z}(t)) = \frac{1}{2} (\varepsilon \delta_1^2(t) + \delta_2^2(t)),$$

где  $\mathbf{z} = (\delta_1, \delta_2)$ . Для получения независимых от задержки условий экспоненциальной устойчивости системы (3.21) используем неравенство Халая (1.9)

$$\begin{aligned} \text{Hal} \leq & (1 - C - \theta_1) \delta_1^2(t) - \varphi(t) \delta_1^2(t) - b \delta_2^2(t) + (\theta_2 - C) \delta_1(t) \delta_1(t - \tau) + \\ & + q(1 + o)(\varepsilon \delta_1^2(t) + \delta_2^2(t)) - q(\varepsilon \delta_1^2(t - \tau) + \delta_2^2(t - \tau)) \leq 0, \end{aligned}$$

где  $q > 0$ , а  $o > 0$  – некоторая малая величина. Разрешимость следующего линейного матричного неравенства гарантирует для достаточно малого  $o > 0$  выполнение неравенства Халая  $\text{Hal} \leq 0$ , а значит и экспоненциальную устойчивость системы (3.21)

$$\begin{bmatrix} 1 - C - \theta_1 + q\varepsilon & 0 & (\theta_2 - C)/2 & 0 \\ 0 & q - b & 0 & 0 \\ (\theta_2 - C)/2 & 0 & -q\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q \end{bmatrix} \prec 0.$$

Это неравенство эквивалентно следующему

$$\begin{bmatrix} 1 - C - \theta_1 + q\varepsilon & 0 & (\theta_2 - C)/2 \\ 0 & q - b & 0 \\ (\theta_2 - C)/2 & 0 & -q\varepsilon \end{bmatrix} \prec 0. \quad (3.28)$$

Используя критерий Сильвестра, получим, что для разрешимости матричного неравенства (3.28) должны быть выполнены неравенства

$$\begin{cases} q - b < 0, \\ -(q - b)q\varepsilon(1 - C - \theta_1 + q\varepsilon) - (\theta_2 - C)^2(q - b)/4 < 0, \end{cases}$$

которые можно привести к виду

$$\begin{cases} 0 < q < b, \\ -4q\varepsilon(1 - C - \theta_1 + q\varepsilon) > (\theta_2 - C)^2. \end{cases} \quad (3.29)$$

Таким образом, имеет место следующая теорема

**Теорема 3.4.** Пусть в системе (3.16) задержка  $\tau(t)$  – произвольная функция. Алгоритм управления в форме (3.20) с параметрами, удовлетворяющими неравенствам (3.29) и  $\delta_1, \delta_2$  равными (3.17), обеспечивает цель управления (3.19).

Если выполнено неравенство  $(1 - C + q\varepsilon) < 0$  для  $q \in (0, b)$ , то можно использовать управление в форме (3.20) с параметром  $\theta_1 = 0$ , т.е. для кусочно-постоянной задержки  $\tau(t)$  (3.14) алгоритм управления – дискретный.

**Следствие 3.2.** Если выполнено неравенство  $\Theta = -4q\varepsilon(1 - C + q\varepsilon) > 0$  для  $q \in (0, b)$  системы (3.13), то дискретный алгоритм управления в форме

$$I(t) = \theta_2(u_1(t_k) - u_2(t_k)), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad (3.30)$$

где  $(\theta_2 - C)^2 < \Theta$ , обеспечивает синхронизацию систем (3.13).

Отметим, что при  $b = 0$  линейное матричное неравенство (3.28) неразрешимо.

Рассмотрим две связанные системы ФХН (3.13) с дискретной связью, где сила связи  $C = 3$ , а шаг дискретизации  $t_{k+1} - t_k = \bar{h} = 5$ . Из рис. 3.5 видно, что теорема 1.4 не гарантирует синхронизацию систем для таких параметров. На рис. 3.8 представлена динамика системы (3.13). Очевидно, что системы не синхронизированы (см. рис. 3.8(a) и (b), где представлена динамика активаторов и ингибиторов, соответственно, и рис. 3.8(c), где представлена динамика ошибки синхронизации активаторов, а также рис. 3.8(d) с изображением фазовой плоскости).

Для того чтобы синхронизировать две системы ФХН (3.13) используем дискретный алгоритм управления в форме (3.30) с параметрами  $\theta_2 = 1, q = 0.5$ .

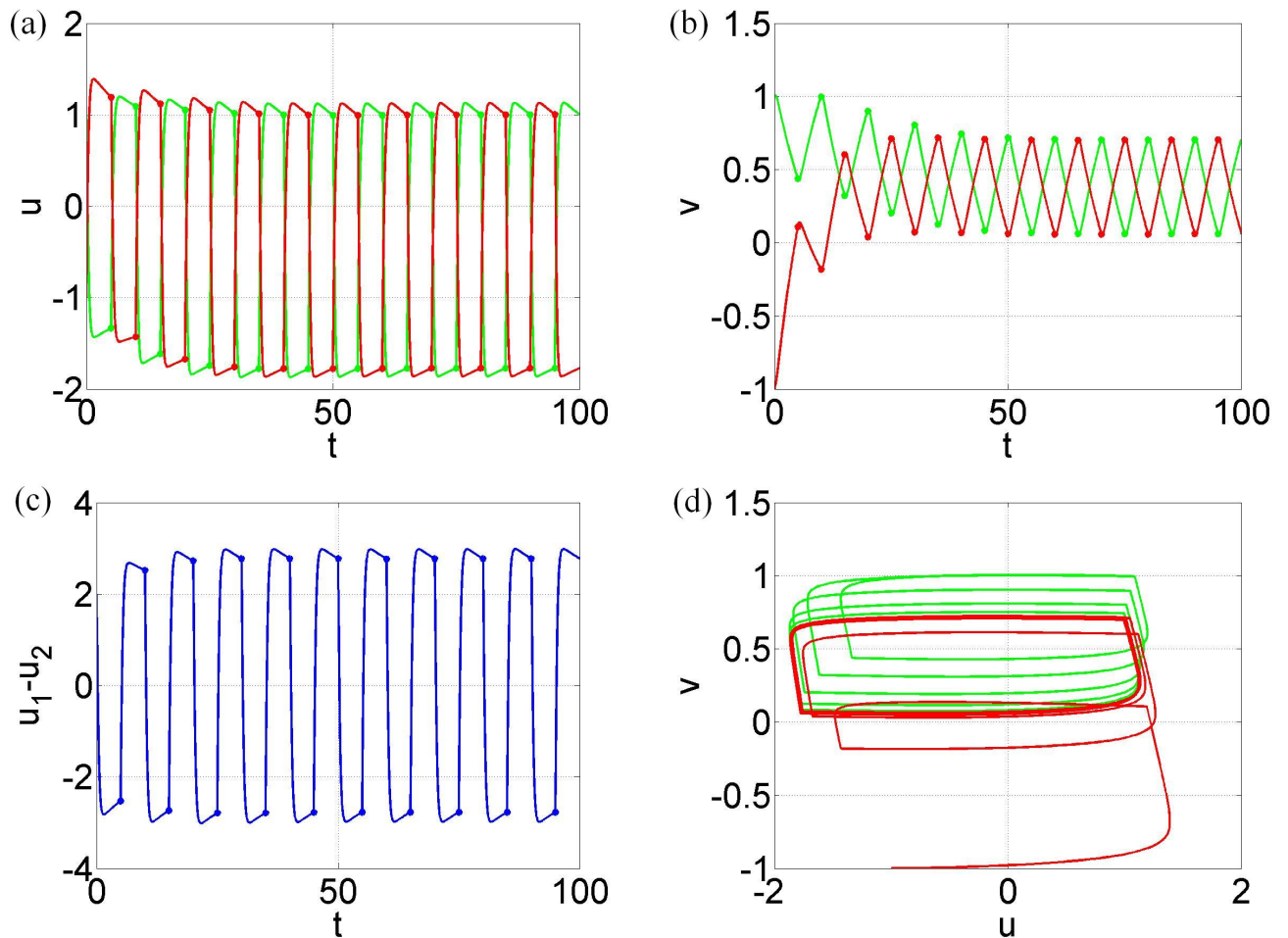


Рис. 3.8: Поведение двух связанных систем ФХН с дискретной связью (3.13) без управления. Зеленой линией обозначена первая система, а красной – вторая.

(a) и (b): динамика активаторов и ингибиторов, соответственно; (c): разница между значениями активаторов; и (d): фазовая плоскость. Параметры системы:

$a = 0.7, b = 0.8, C = 3, \varepsilon = 0.1, t_{k+1} - t_k = \bar{h} = 5$ . Начальные условия:

$$u_1(0) = 1, v_1(0) = 1, u_2(0) = -1, v_2(0) = -1.$$

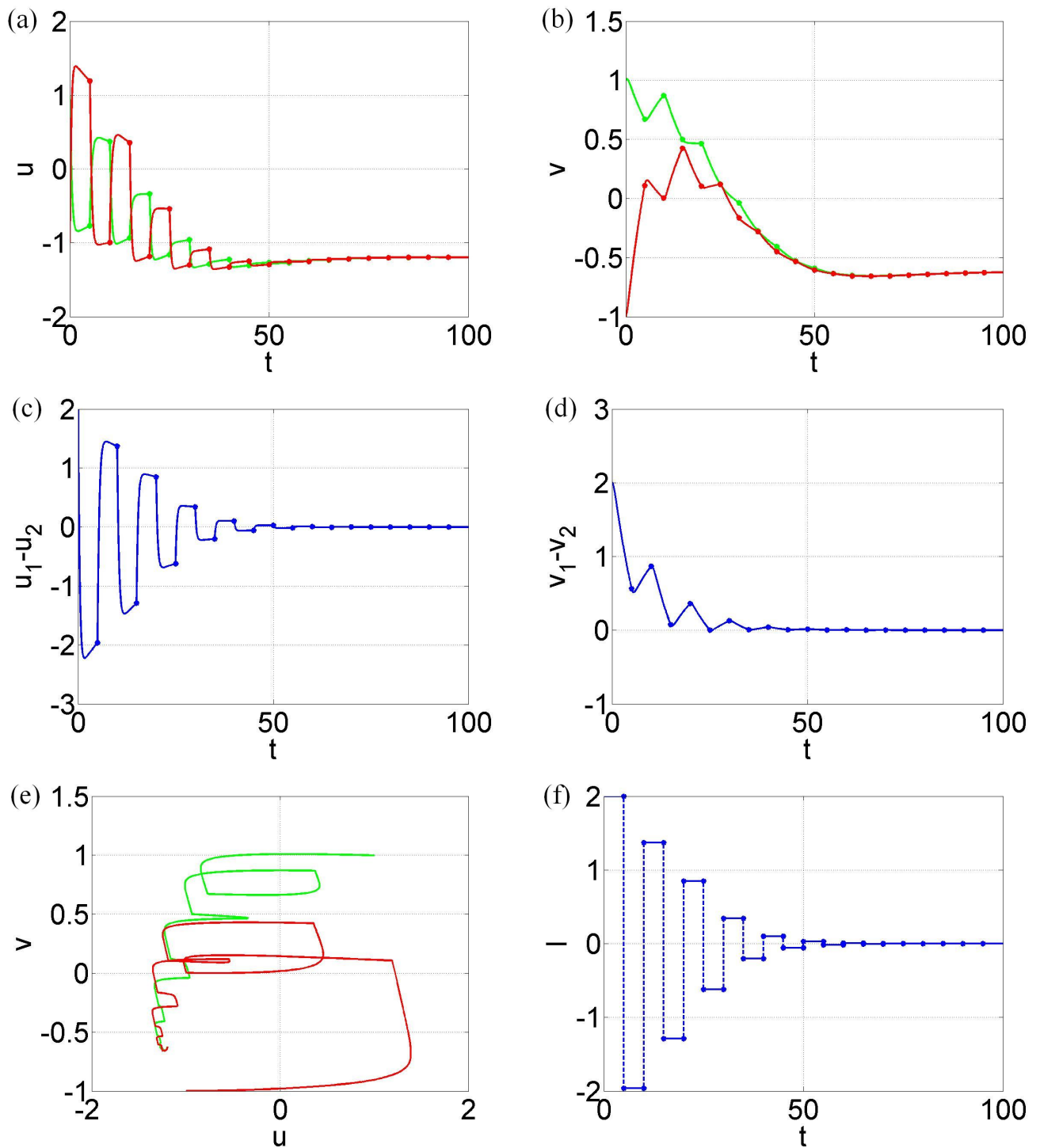


Рис. 3.9: Управление синхронизацией в двух связанных системах ФХН (3.13) с помощью дискретного алгоритма в форме (3.30). (a) и (b): динамика активаторов и ингибиторов, соответственно; (c) и (d): разница между значениями активаторов и ингибиторов, соответственно; (e): фазовая плоскость; и (f): динамика управления. Параметры системы:  $q = 0.5$ ,  $\theta_2 = 1$ . Остальные параметры и начальные условия такие же, как и на рис. 3.8.

На рис. 3.9 приведены результаты моделирования. После переходного периода примерно в 60 единиц времени две системы достигают желаемого синхронного состояния (см. динамику активаторов и ингибиторов на рис. 3.9(a) и (b), соответственно, а также динамику их разницы на рис. 3.9(c) и (d)). Таким образом, цель управления достигается. Отметим, что управление  $I(t)$  ограничено и стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$  (см. рис. 3.9(f)).

## Глава 4

# Управление синхронизацией в сетях систем ФитцХью-Нагумо

### 4.1 Синхронизация в неоднородных сетях систем ФитцХью-Нагумо

В этом разделе исследуются условия синхронизации неоднородной сети систем ФХН. Будет показано, что сила связи является ключевым параметром для синхронизируемости сети. Сфокусируемся на случае с нулевой задержкой  $\tau(t) \equiv 0$ , чтобы упростить решение поставленной задачи. Рассмотрим сеть неоднородных систем ФХН, описываемую уравнениями

$$\varepsilon \dot{u}_i(t) = u_i(t) - \frac{u_i^3(t)}{3} - v_i(t) + C \sum_{j=1}^N G_{ij} [u_j(t) - u_i(t)], \quad (4.1)$$

$$\dot{v}_i(t) = u_i(t) - bv_i(t) + a_i,$$

где  $C$  – сила связи между узлами,  $\mathbf{G} = (G_{ij})$  – матрица смежности,  $i = 1, \dots, N$ . Предположим, что значения пороговых параметров  $a_i$  лежат в некотором отрезке, т.е.  $|a_i - a_j| \leq \sigma$ ,  $\forall i, j = 1, \dots, N$ .



Предположим, что граф связей  $\Gamma$  сети (4.1) связный и неориентированный, т.е. его матрица смежности  $\mathbf{G} = (G_{ij})$  симметричная. Сложим все первые и вторые уравнения системы (4.1), соответственно, и разделим на  $N$ , тогда получим среднюю траекторию, описываемую уравнениями

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{\bar{u}}(t) &= \bar{u}(t) - \psi(u_1(t), \dots, u_N(t)) - \bar{v}(t), \\ \dot{\bar{v}}(t) &= \bar{u}(t) - b\bar{v}(t) + \bar{a},\end{aligned}\tag{4.2}$$

где

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u_j, & \bar{v} &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N v_j, & \bar{a} &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_j, \\ \psi(u_1, \dots, u_N) &= \frac{1}{3N} \sum_{j=1}^N u_j^3.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Если сеть (4.1) синхронизирована, то  $\psi = \bar{u}^3/3$ .

Вычтем первое уравнение системы (4.2) из первого уравнения системы (4.1), а второе из второго, соответственно, и получим

$$\begin{aligned}\varepsilon [\dot{u}_i(t) - \dot{\bar{u}}(t)] &= u_i(t) - \bar{u}(t) - \frac{u_i^3(t)}{3} + \psi(t) - v_i(t) + \bar{v}(t) + \\ &+ C \sum_{j=1}^N G_{ij} [u_j(t) - u_i(t)],\end{aligned}\tag{4.4}$$

$$\dot{v}_i(t) - \dot{\bar{v}}(t) = u_i(t) - \bar{u}(t) - b[v_i(t) - \bar{v}(t)] + a_i - \bar{a}.$$

Так как рассматривается неоднородная сеть, то цель управления можно определить как

$$|u_i(t) - \bar{u}(t)| \leq \Delta_1, \quad |v_i(t) - \bar{v}(t)| \leq \Delta_2, \quad \text{при } t > t^*, \quad i = 1, \dots, N,\tag{4.5}$$

где  $\Delta_1, \Delta_2$  – уровни точности, которые определим позднее.

Для анализа устойчивости системы (4.4) введем следующую функцию Ляпунова

$$V(\mathbf{z}(t)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\varepsilon [u_i(t) - \bar{u}(t)]^2 + [v_i(t) - \bar{v}(t)]^2),$$

где  $\mathbf{z} = (u_1, v_1, \dots, u_N, v_N)$ . Найдем ее производную в силу системы (4.4) и сделаем некоторые преобразования, учитывая формулы (4.3)

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{z}(t)) &= \sum_{i=1}^N \left\{ [u_i(t) - \bar{u}(t)] \left[ u_i(t) - \bar{u}(t) - \frac{u_i^3(t)}{3} + \psi(t) - v_i(t) + \bar{v}(t) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + C \sum_{j=1}^N G_{ij} [u_i(t) - u_j(t)] \right] + \right. \\
&\quad \left. + [v_i(t) - \bar{v}(t)] (u_i(t) - \bar{u}(t) - b[v_i(t) - \bar{v}(t)] + a_i - \bar{a}) \right\} = \\
&= - \sum_{i=1}^N [u_i(t) - \bar{u}(t)] [u_i^3(t)/3 - \psi(t)] + \sum_{i=1}^N [u_i(t) - \bar{u}(t)]^2 + \\
&\quad + C \sum_{i=1}^N [u_i(t) - \bar{u}(t)] \sum_{j=1}^N G_{ij} [u_i(t) - u_j(t)] - \\
&\quad - \sum_{i=1}^N (b[v_i(t) - \bar{v}(t)]^2 - [a_i - \bar{a}][v_i(t) - \bar{v}(t)]) . \quad (4.6)
\end{aligned}$$

Используя обозначения (4.3), получим следующее выражение

$$\sum_{i=1}^N [u_i(t) - \bar{u}(t)] = 0. \quad (4.7)$$

Рассмотрим первую сумму в выражении (4.6). Используя полученное выражение (4.7), добавим слагаемое  $\bar{u}^3(t)/3 \sum_{i=1}^N [u_i(t) - \bar{u}(t)] = 0$  в уравнение (4.6), тогда первую сумму в этом уравнении можно представить как

$$\begin{aligned}
- \sum_{i=1}^N [u_i(t) - \bar{u}(t)] [u_i^3(t)/3 - \psi(t)] &= \psi(t) \sum_{i=1}^N [u_i(t) - \bar{u}(t)] - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N [u_i(t) - \bar{u}(t)] u_i^3(t) + \\
+ \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N [u_i(t) - \bar{u}(t)] \bar{u}^3(t) &= - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N [u_i(t) - \bar{u}(t)]^2 [u_i^2(t) + u_i(t)\bar{u}(t) + \bar{u}^2(t)] \leq 0.
\end{aligned}$$

Она неположительна и равна нулю при  $u_i(t) = \bar{u}(t)$ ,  $\forall i = 1, \dots, N$ , следовательно, ее можно опустить.

Сумму второго и третьего членов в уравнении (4.6) можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N [u_i(t) - \bar{u}(t)]^2 + C \sum_{i=1}^N [u_i(t) - \bar{u}(t)] \sum_{j=1}^N G_{ij} [u_i(t) - u_j(t)] = \\
& = \sum_{i=1}^N u_i^2(t) - \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N u_i(t) u_j(t) - C \sum_{i=1}^N n_i u_i^2(t) + C \sum_{i,j=1}^N G_{ij} u_i(t) u_j(t) = \\
& = \begin{pmatrix} u_1(t) & \cdots & u_N(t) \end{pmatrix} \left[ \frac{1}{N} L(\Gamma_0) - CL(\Gamma) \right] \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

где  $n_i$  – степень  $i$ й вершины графа,

$$L(\Gamma_0) = \begin{pmatrix} N-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & N-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & N-1 \end{pmatrix},$$

$L(\Gamma_0)$  – матрица Лапласа полного графа  $\Gamma_0$ , который, очевидно, является связным и неориентированным, и

$$L(\Gamma) = \begin{pmatrix} n_1 & -G_{12} & \cdots & -G_{1N} \\ -G_{21} & n_2 & \cdots & -G_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -G_{N1} & -G_{N2} & \cdots & n_N \end{pmatrix},$$

$L(\Gamma)$  – матрица Лапласа графа связей  $\Gamma$ , который тоже является связным и неориентированным по предположению.

Четвертая сумма в уравнении (4.6) отрицательна при  $|v_i(t) - \bar{v}(t)| > |a_i - \bar{a}|/b$  для всех  $i = 1, \dots, N$ . Имеет место неравенство  $|a_i - \bar{a}| \leq \sigma$  по предположению. Значит уровень точности  $\Delta_2$  равен  $\sigma/b$ . Из второго уравнения системы (4.4), получим, что второй уровень точности  $\Delta_1$  равен  $2\sigma$ .

Таким образом, мы свели задачу синхронизируемости сети (4.1) к разрешимости линейного матричного неравенства

$$\left[ \frac{1}{N}L(\Gamma_0) - CL(\Gamma) \right] \preceq 0. \quad (4.8)$$

Минимальное собственное число матрицы Лапласа равно 0 (см. раздел 1.5). Все остальные собственные числа матрицы Лапласа полного графа  $L(\Gamma_0)$  равны  $N$  [31]. Таким образом, имеют место неравенства

$$L(\Gamma_0) \preceq NI_n, \quad L(\Gamma) \succeq \lambda_2(\Gamma)I_n,$$

где  $\lambda_2(\Gamma)$  – алгебраическая связность графа  $\Gamma$ , а

$$I_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Значит, если выполнено неравенство

$$I_n \preceq C\lambda_2(\Gamma)I_n,$$

то будет выполнено и неравенство (4.8). В свою очередь, полученное матричное неравенство разрешимо, если  $C > 1/\lambda_2(\Gamma)$ .

Таким образом, если выполнено неравенство  $C > 1/\lambda_2(\Gamma)$ , то линейное матричное неравенство (4.8) разрешимо, а, значит, цель управления (4.5) достигается.

Имеет место следующая теорема

**Теорема 4.1.** Пусть граф связей  $\Gamma$  неоднородной сети систем ФХН (4.1) неориентированный и связный. Также пусть значения пороговых параметров  $a_i$  лежат в некотором отрезке, т.е.  $|a_i - a_j| \leq \sigma$ ,  $\forall i, j = 1, \dots, N$ . Если выполнено неравенство  $C > 1/\lambda_2(\Gamma)$ , где  $\lambda_2(\Gamma)$  – алгебраическая связность графа связей  $\Gamma$ , то цель управления (4.5) достигается с уровнями точности  $\Delta_1 = 2\sigma$ ,  $\Delta_2 = \sigma/b$ .

Данный результат является обобщением теоремы 3.1 для сети из  $N$  узлов со связным неориентированным графом.

Имеет место следующее неравенство  $\lambda_2(\Gamma) \leq \delta(\Gamma)$  [39], где  $\delta(\Gamma)$  – минимальная степень вершины графа связей  $\Gamma$ .

**Следствие 4.1.** Пусть значения пороговых параметров  $a_i$  системы (4.1) лежат в некотором отрезке, т.е.  $|a_i - a_j| \leq \sigma$ ,  $\forall i, j = 1, \dots, N$ , и граф связей сети (4.1) – неориентированный и связный. Если выполнено неравенство  $C > 1/\delta(\Gamma)$ , где  $\delta(\Gamma)$  – минимальная степень вершины графа связей  $\Gamma$ , то цель управления (4.5) достигается с уровнями точности  $\Delta_1 = 2\sigma$ ,  $\Delta_2 = \sigma/b$ .

## 4.2 Управление синхронизацией в неоднородных сетях систем ФитцХью-Нагумо

Если для рассматриваемой сети систем ФХН неравенство  $C > 1/\delta(\Gamma)$  не выполнено, то можно добавить дополнительные связи ко всем узлам, чтобы обеспечить его выполнение. Это можно сделать с помощью добавления одинакового для всех узлов внешнего стимула  $I(t)$ . Для этой цели можно использовать алгоритм управления средним, т.е. добавить член  $I(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i(t)$  к каждому узлу, что было сделано, например, в работах [98, 99]. Однако такой закон требует наличия обратных связей, поэтому вместо него мы можем использовать управление в форме

$$I(t) = \gamma u(t), \quad (4.9)$$

где  $\gamma$  – коэффициент усиления, а  $u$  – значение активатора системы мастера, которая описывается следующими уравнениями

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{u}(t) &= u(t) - \frac{u^3(t)}{3} - v(t), \\ \dot{v}(t) &= u(t) - bv(t) + a. \end{aligned} \quad (4.10)$$

С помощью выбора параметров  $a$ ,  $b$  можно регулировать поведение сети. Например, если сеть находилась в возбуждимом режиме, то путем добавления внешнего стимула, описываемого уравнениями (4.9), (4.10) с колебательным режимом, можно перевести всю сеть в колебательный режим.

Для применения предложенного алгоритма управления рассмотрим неоднородное кольцо систем ФХН

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{u}_i(t) &= u_i(t) - \frac{u_i(t)^3}{3} - v_i(t) + C \sum_{j=1}^N G_{ij} [u_j(t) - u_i(t)] + I(t), \\ \dot{v}_i(t) &= u_i(t) - bv_i(t) + a_i, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где матрица смежности  $\mathbf{G} = (G_{ij})$  имеет вид

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Для моделирования рассмотрим сеть из  $N = 500$  узлов. Пусть  $C = 0.1$ ,  $b = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $a_i$  – пороговые параметры, имеющие нормальное распределение со средним  $\mu = 1$  и стандартным отклонением  $\sigma = 0.1$  и принадлежащие отрезку  $a_i = \mu \pm \sigma$ . Без управления сеть не синхронизируется, что можно увидеть на рис. 4.1. Очевидно, что нет синхронизации между значениями активаторов и ингибиторов.

Для синхронизации сети используем алгоритм управления в форме (4.9), (4.10). Результат показан на рис. 4.1: цель управления достигнута, и синхронизация имеет место как для активаторов (см. рис. 4.1(a)), так и для ингибиторов (см. рис. 4.1(b)).

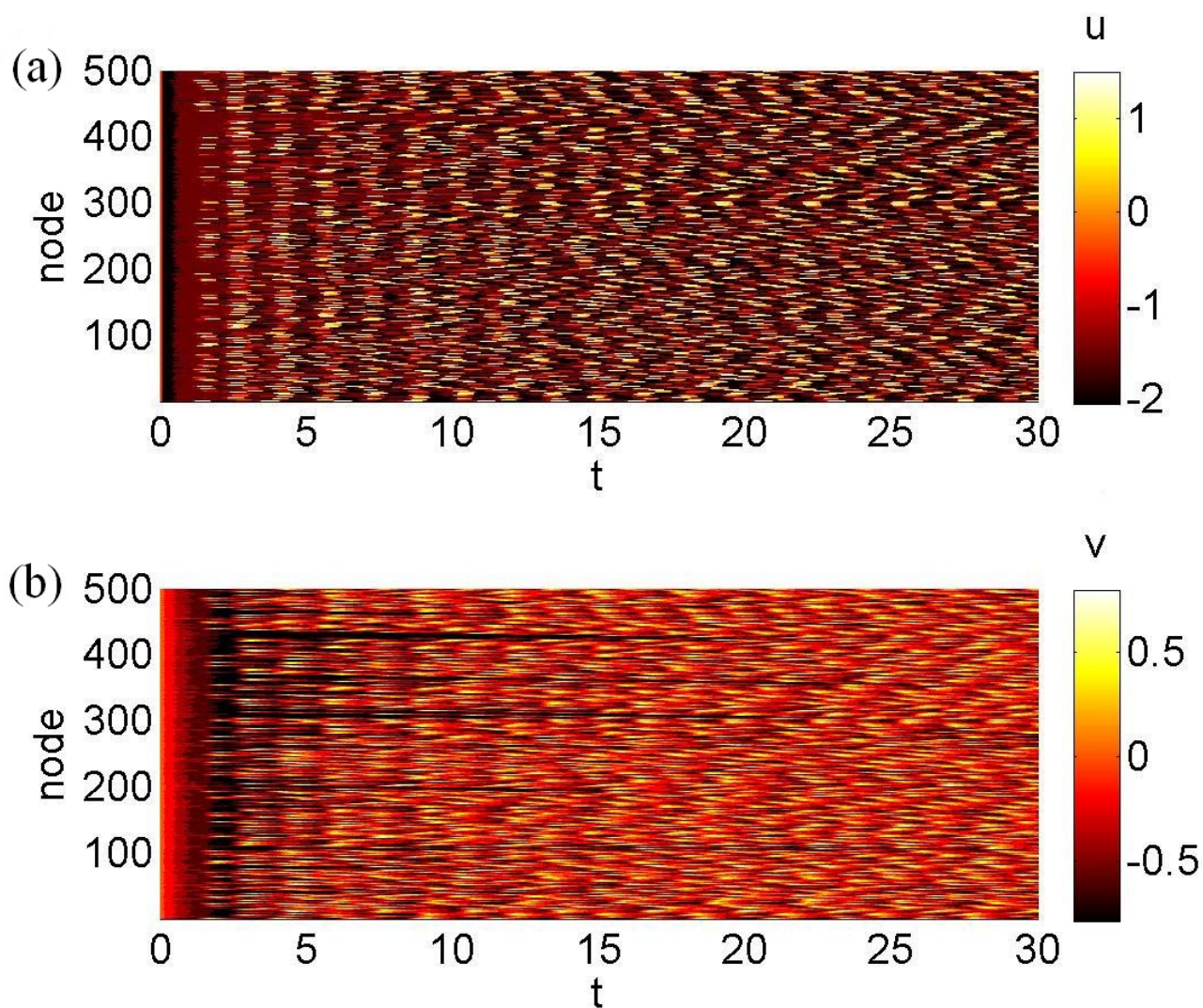


Рис. 4.1: Поведение кольцевой сети из 500 систем ФХН (4.11), (4.12) без управления ( $I(t) = 0$ ). (a) и (b): динамика активаторов и ингибиторов всех узлов, соответственно. Параметры системы:  $N = 500$ ,  $C = 0.1$ ,  $b = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$ . Пороговые параметры  $a_i$  имеют нормальное распределение со средним  $\mu = 1$  и стандартным отклонением  $\sigma = 0.1$  и принадлежат отрезку  $a_i = \mu \pm \sigma$ . Начальные условия:  $u_i(0) = 0$ ,  $v_i(0) = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

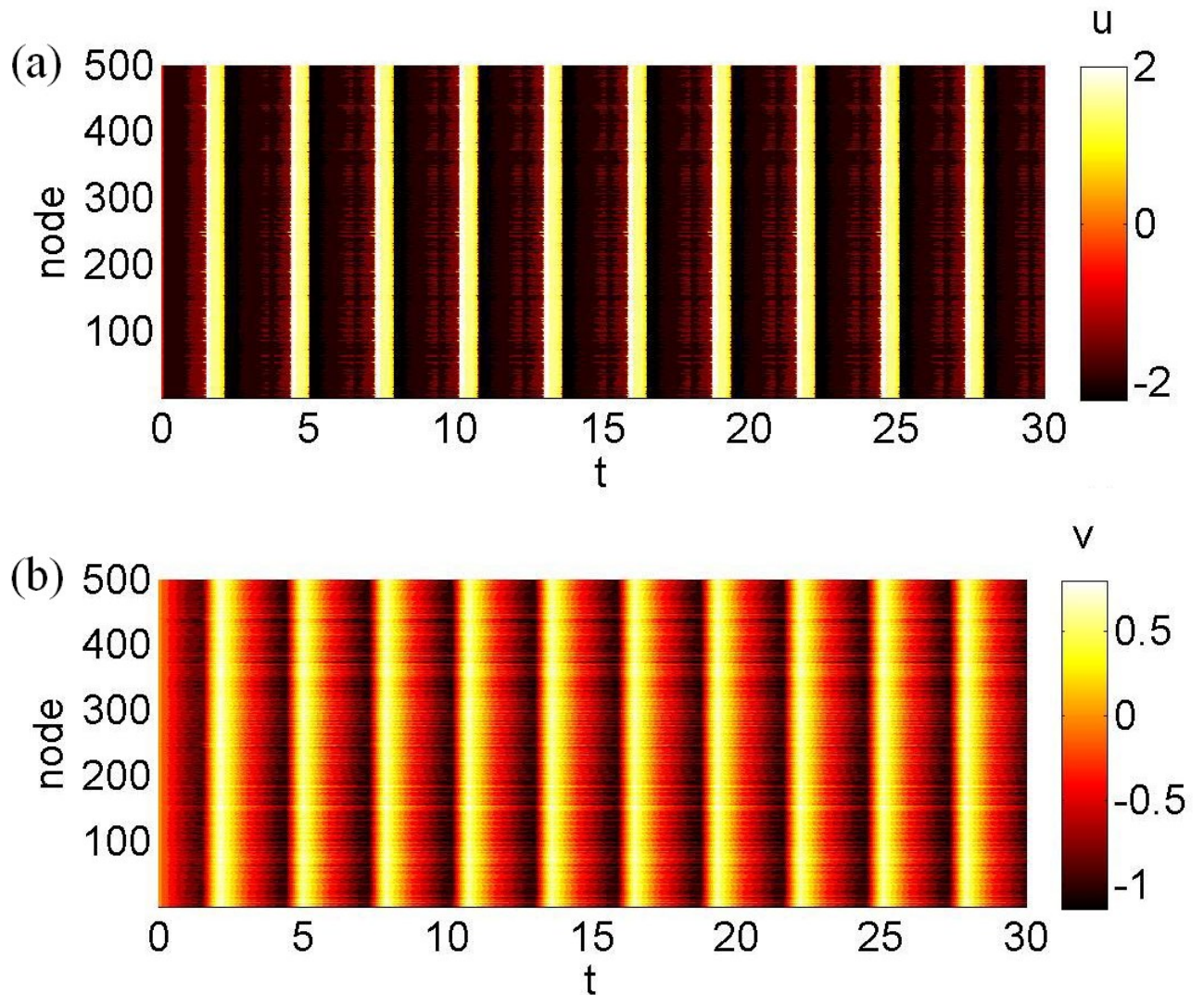


Рис. 4.2: Управление синхронизацией в кольцевой сети из 500 систем ФХН (4.11), (4.12) с помощью внешнего стимула  $I(t)$  (4.9), (4.10). (a) и (b): динамика активаторов и ингибиторов всех узлов, соответственно. Параметры системы:  $\gamma = 0.3$ ,  $a = 0.9$ ,  $b = 0$ . Остальные параметры и начальные условия такие же как на рис. 4.1.



## 4.3 Синхронизация кольца связанных систем ФитцХью-Нагумо с помощью настройки силы связи

Здесь рассматривается обобщение алгоритма, предложенного в разделе 3.1.3 на случай однонаправленного кольца из систем ФХН. Рассмотрим сеть систем ФХН из  $N$  узлов (4.1), где матрица смежности  $\mathbf{G}$  имеет следующую форму

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Подход основан на том, чтобы синхронизировать два узла в кольце; в этом случае другие узлы также синхронизируются. Такая же идея используется для управления движением волны в цепи маятников [43]. Однако, есть ограничение для использования этого подхода, установленное в ходе моделирования: узлы с самым большим и с самым маленьким пороговым параметром в сети должны быть соседними.

Предположим, что  $k$  – узел с самым большим пороговым параметром, а  $l$  – с самым маленьким, т.е.

$$a_k = \max_{i=1,\dots,N} a_i, \quad a_l = \min_{i=1,\dots,N} a_i,$$

и они являются соседними, т.е.  $k = (l + 1) \bmod N$  или  $k = (l - 1) \bmod N$ . Используем закон управления из раздела 3.1.3 (3.12) для синхронизации этих двух узлов. Тогда он будет выглядеть следующим образом

$$\dot{C}(t) = \gamma [u_k(t) - u_l(t) + a_k - a_l] [u_k(t) - u_l(t)], \quad (4.14)$$

где  $\gamma$  – коэффициент усиления. Заметим, что закон изменения силы связи будет одинаковым между каждыми соединенными узлами в кольце. Как и в разде-

ле 3.1.3, управление (4.14) обеспечивает приближенную синхронизацию

$$\begin{aligned}u_i(t) - u_j(t) &\approx -a_i + a_j, \\v_i(t) - v_j(t) &\approx c_i,\end{aligned}$$

при  $t \geq t^*$ , где  $c_i$  – константы, и  $i, j = 1, \dots, N$ .

На рис. 4.3 представлены результаты моделирования поведения десяти систем ФХН, где настройка силы связи производится по закону (4.14). Можно заметить, что после переходного периода примерно в 80 единиц времени узлы синхронизируются в колебательном режиме (см. рис. 4.3(a) и (b), где показана динамика активаторов и ингибиторов, соответственно). Таким образом, цель управления достигается.

Мы рассмотрели случай, когда узлы с самым большим и самым маленьким пороговым параметром являются соседями. Если для рассматриваемой системы это неверно, то закон управления (4.14) не даст результата. Однако, если управлять каждой силой связи отдельно, то можно достичь цели управления. Тогда кольцевую сеть систем ФХН можно описать уравнениями

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{u}_i(t) &= u_i(t) - \frac{u_i^3(t)}{3} - v_i(t) + C_i(t)[u_{(i+1) \bmod N}(t) - u_i(t)], \\ \dot{v}_i(t) &= u_i(t) - bv_i(t) + a_i, \quad i = 1, \dots, N,\end{aligned}\tag{4.15}$$

где  $C_i(t)$  – сила связи с узлом  $i$ . Далее, как и для случая двух узлов 3.1.3, применяя алгоритм скоростного градиента к системе (4.15) с целевой функцией

$$Q(\mathbf{z}(t)) = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^N [u_i(t) - u_{(i+1) \bmod N}(t) + a_i - a_{(i+1) \bmod N}]^2,$$

где  $\mathbf{z} = (u_1, \dots, u_N)$  можно получить следующий закон управления

$$\begin{aligned}C_i(t) &= \gamma [u_i(t) - u_{(i+1) \bmod N}(t)] \times [2u_i(t) - u_{(i-1) \bmod N}(t) - \\ &- u_{(i+1) \bmod N}(t) + 2a_i - a_{(i-1) \bmod N}(t) - a_{(i+1) \bmod N}(t)], \quad i = 1, \dots, N,\end{aligned}\tag{4.16}$$

где  $\gamma$  – коэффициент усиления.

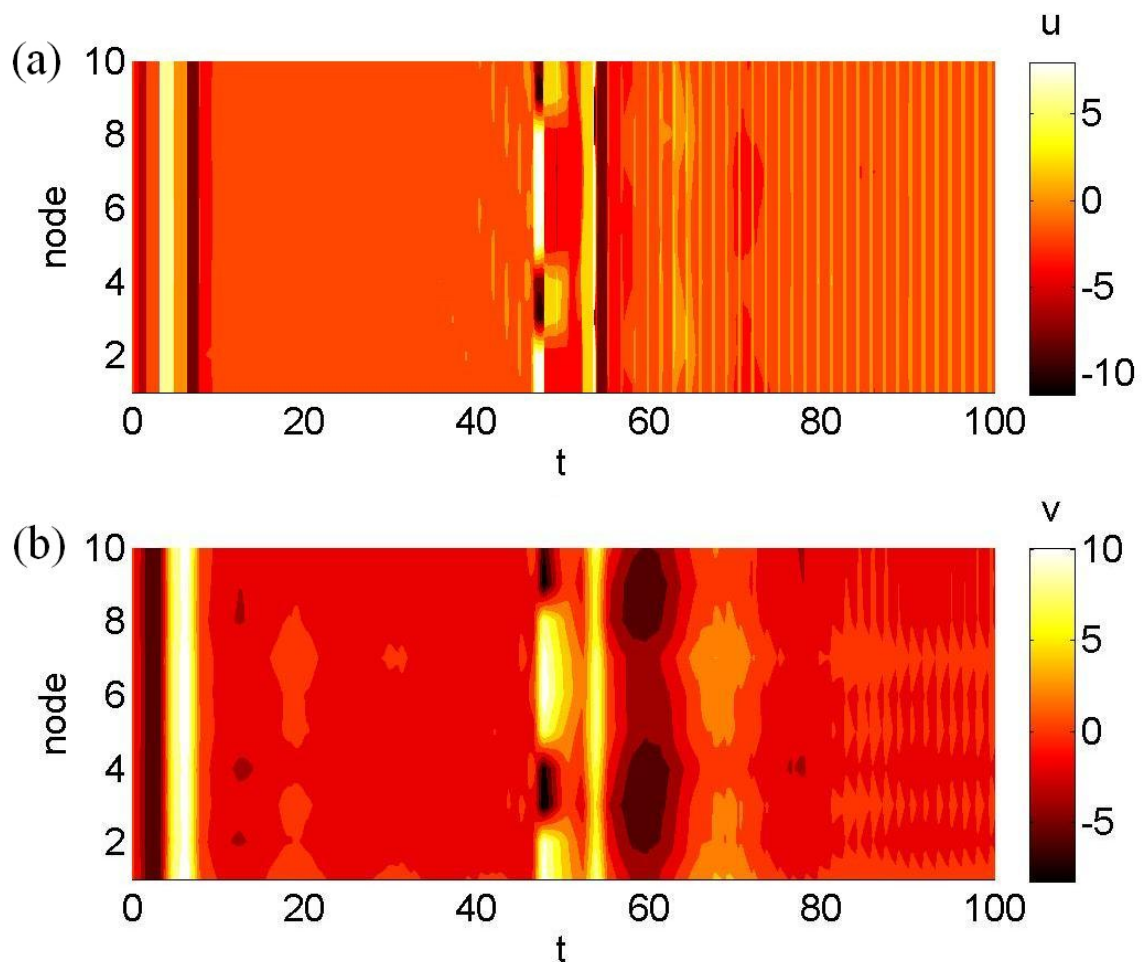


Рис. 4.3: Управление синхронизацией в кольце из десяти систем ФХН (4.1) с матрицей смежности (4.13) с помощью настройки силы связи, одинаковой для всех узлов, в виде (4.14). (a) и (b): динамика активаторов и ингибиторов всех узлов, соответственно. Параметры системы:  $N = 10$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $b = 0.1$ ,  $\gamma = 100$ .

Пороговые параметры  $a_i$  выбраны случайно из отрезка  $[0.8, 1.1]$ , тогда как наибольший пороговый параметр, здесь  $a_1$ , равен 1.1, а наименьший, здесь  $a_2$ , равен 0.8. Начальные условия:  $u_i(0) = 0$ ,  $v_i(0) = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

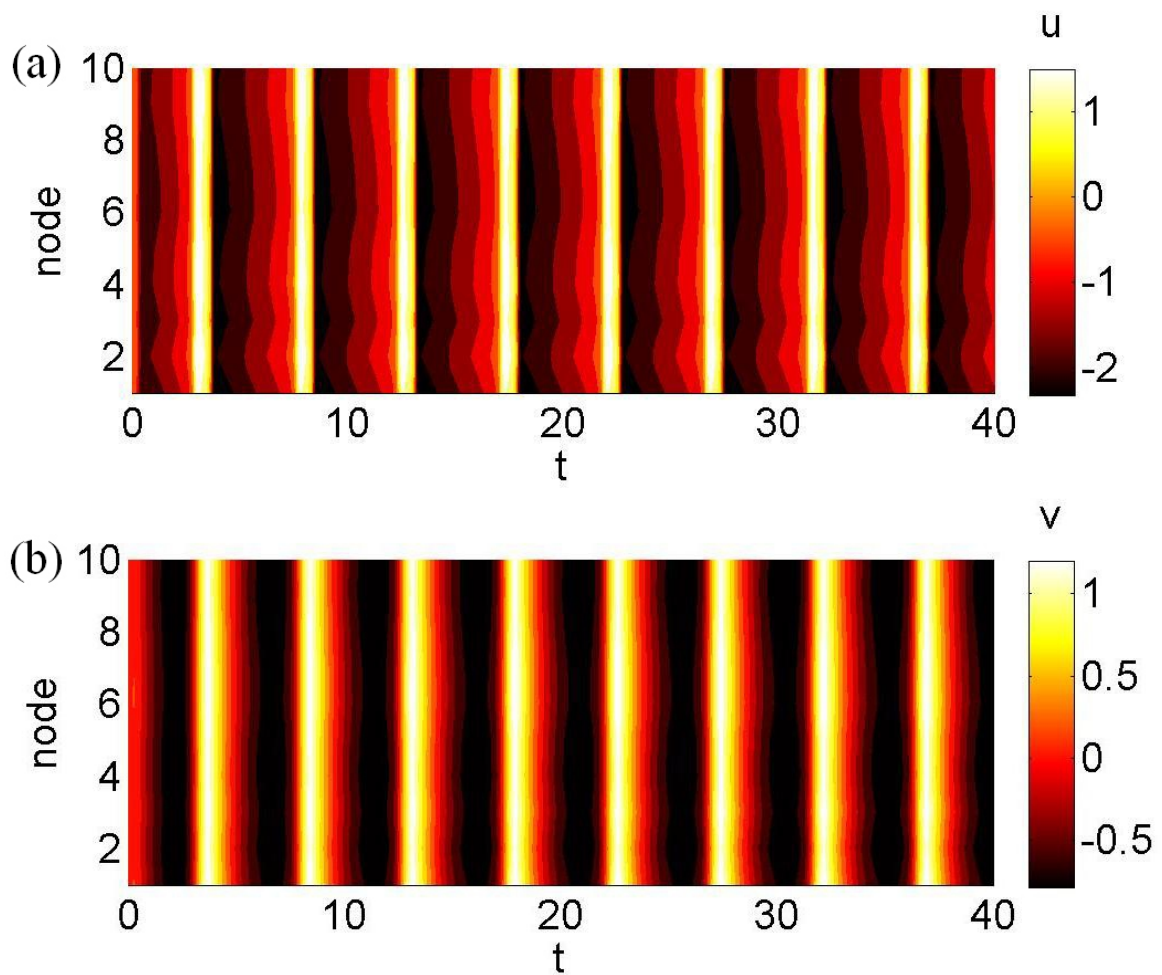


Рис. 4.4: Управление синхронизацией в кольце из десяти систем ФХН (4.15) с помощью настройки силы связи (4.16). (a) и (b): динамика активаторов и ингибиторов всех узлов, соответственно. Параметры системы:  $\gamma = 1$ . Остальные параметры и начальные условия такие же, как на рис. 4.3.

На рис. 4.4 приведены результаты моделирования поведения системы (4.15) с законом управления (4.16). Цель управления достигается, и синхронизация имеет место. Этот метод требует меньшего коэффициента усиления, чем алгоритм (4.14) и, более того, обеспечивает синхронизацию ингибиторов с пренебрежимо малым сдвигом (см. рис. 4.4(b)).

# Заключение

В заключение перечислим основные научные результаты работы.

1. Получены неравенства, устанавливающие невозможность бифуркации Андронова-Хопфа, для случая двух систем ФХН и для случая однонаправленного кольца систем ФХН с различными пороговыми параметрами. Показано, что, если неравенства выполнены, то траектории систем стремятся к устойчивой предельной точке (Теоремы 2.1, 2.2) [20, 116].
2. Синтезированы алгоритмы управления синхронизацией двух систем ФХН с различными пороговыми параметрами с помощью внешнего стимула и с помощью настройки силы связи. Сформулированы теоремы о достижении целей управления при управлении с помощью внешнего стимула (Теоремы 3.1, 3.2) [20, 28, 84, 85].
3. Синтезированы алгоритмы управления синхронизацией двух систем ФХН с переменной задержкой при помощи внешнего стимула. Сформулированы теоремы о достижении цели управления (Теоремы 3.3, 3.4) [86, 87, 89].
4. Найдены оценки шага дискретизации в зависимости от силы связи, необходимые для синхронизации двух систем ФХН, в случае дискретной связи между двумя системами [89].
5. Получено условие синхронизации неоднородной сети из систем ФХН со связным неориентированным графом. Предложен алгоритм управления

синхронизацией при помощи одинакового для всех узлов внешнего стимула и алгоритмы управления синхронизацией при помощи настройки силы связи (Теорема 4.1) [7, 20, 28, 84, 88, 116].

# Список рисунков

- 1.1 Динамика системы ФХН (1.1). Зеленой линией обозначен возбудимый режим, а красной линией – колебательный. (а): динамика активатора; (б): фазовая плоскость. . . . . 11
- 2.1 Бифуркация Андронова-Хопфа двух связанных линеаризованных систем ФХН (2.2); (а): малая сила связи  $C$  ( $C = 0.3$ ); (б): большая сила связи ( $C = 5$ ). Красным цветом обозначены области параметров, для которых неравенство (2.6) выполнено, т.е. бифуркация Андронова-Хопфа невозможна, и положение равновесия устойчиво. . . . . 24
- 3.1 Поведение двух связанных систем ФХН (3.1) без управления  $I(t) = 0$ . Зеленой линией обозначена первая система, а красной – вторая. (а) и (б): динамика активаторов и ингибиторов, соответственно; (с): разница между значениями активаторов; (д): фазовая плоскость. Параметры системы:  $\varepsilon = 0.1$ ,  $a_1 = 1.1$ ,  $a_2 = 0.7$ ,  $b = 0.1$ ,  $C = 0.1$ . Начальные условия:  $u_1(0) = 0$ ,  $v_1(0) = 0$ ,  $u_2(0) = 0$ ,  $v_2(0) = 0$ . . . . . 34



- 3.2 Синхронизация двух связанных систем ФХН (3.1) при помощи внешнего стимула (3.5) (неадаптивный случай). (a) и (b): динамика активаторов и ингибиторов, соответственно; (c) и (d): разница между значениями активаторов и ингибиторов, соответственно; (e): фазовая плоскость; и (f): динамика управления. Параметры системы:  $\gamma = 10$ . Остальные параметры и начальные условия такие же, как и на рис. 3.1. . . . . . 36
- 3.3 Синхронизация двух связанных систем ФХН (3.1) при помощи внешнего стимула (3.9) (адаптивный случай). (a) и (b): динамика активаторов и ингибиторов, соответственно; (c) и (d): разница между значениями активаторов и ингибиторов, соответственно; (e): фазовая плоскость; и (f): динамика управления. Параметры системы:  $\gamma = 10$ ,  $\gamma_0 = 1$ ,  $C = -0.2$ . Остальные параметры и начальные условия такие же, как и на рис. 3.1. . . . . . 38
- 3.4 Синхронизация двух связанных систем ФХН (3.1) при помощи настройки силы связи по алгоритму (3.12). (a) и (b): динамика активаторов и ингибиторов, соответственно; (c) и (d): разница между значениями активаторов и ингибиторов, соответственно; (e): фазовая плоскость; и (f): динамика силы связи. Параметры системы:  $\gamma = 3$ . Остальные параметры и начальные условия такие же, как и на рис. 3.1. . . . . . 40
- 3.5 Разрешимость линейных матричных неравенств по теореме 1.4 для системы (3.15) (зеленый цвет), и область синхронизации системы (3.15), полученная с помощью моделирования (красный цвет). Параметры системы:  $b = 0.8$ ,  $a = 0.7$ ,  $\varepsilon = 0.1$ . . . . . 44

- 3.6 Поведение двух связанных систем ФХН с медленно-меняющейся задержкой (3.16) без управления. Зеленой линией обозначена первая система, а красной – вторая. (a) и (b): динамика активаторов и ингибиторов, соответственно; (c): разница между значениями активаторов; и (d): фазовая плоскость. Параметры системы:  $a = 0.7$ ,  $b = 0.1$ ,  $C = 1$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\tau(t) = 3 + 1/2 \cos(t)$ . Начальные условия:  $u_1(t) = \cos(t)$ ,  $v_1(t) = \sin(t)$ ,  $u_2(t) = -\cos(t)$ ,  $v_2(t) = -\sin(t)$  при  $t \in [-\tau, 0]$ . . . . . 49
- 3.7 Управление синхронизацией в двух связанных системах ФХН (3.16) с помощью алгоритма в форме (3.20). (a) и (b): динамика активаторов и ингибиторов, соответственно; (c) и (d): разница между значениями активаторов и ингибиторов, соответственно; (e): фазовая плоскость; и (f): динамика управления. Параметры системы:  $\theta_1 = 5$ ,  $\theta_2 = 1$ . Остальные параметры и начальные условия такие же, как и на рис. 3.6. . . . . 50
- 3.8 Поведение двух связанных систем ФХН с дискретной связью (3.13) без управления. Зеленой линией обозначена первая система, а красной – вторая. (a) и (b): динамика активаторов и ингибиторов, соответственно; (c): разница между значениями активаторов; и (d): фазовая плоскость. Параметры системы:  $a = 0.7$ ,  $b = 0.8$ ,  $C = 3$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $t_{k+1} - t_k = \bar{h} = 5$ . Начальные условия:  $u_1(0) = 1$ ,  $v_1(0) = 1$ ,  $u_2(0) = -1$ ,  $v_2(0) = -1$ . . . . . 53
- 3.9 Управление синхронизацией в двух связанных системах ФХН (3.13) с помощью дискретного алгоритма в форме (3.30). (a) и (b): динамика активаторов и ингибиторов, соответственно; (c) и (d): разница между значениями активаторов и ингибиторов, соответственно; (e): фазовая плоскость; и (f): динамика управления. Параметры системы:  $q = 0.5$ ,  $\theta_2 = 1$ . Остальные параметры и начальные условия такие же, как и на рис. 3.8. . . . . 54

- 4.1 Поведение кольцевой сети из 500 систем ФХН (4.11), (4.12) без управления ( $I(t) = 0$ ). (a) и (b): динамика активаторов и ингибиторов всех узлов, соответственно. Параметры системы:  $N = 500$ ,  $C = 0.1$ ,  $b = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$ . Пороговые параметры  $a_i$  имеют нормальное распределение со средним  $\mu = 1$  и стандартным отклонением  $\sigma = 0.1$  и принадлежат отрезку  $a_i = \mu \pm \sigma$ . Начальные условия:  $u_i(0) = 0$ ,  $v_i(0) = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ . . . . . 63
- 4.2 Управление синхронизацией в кольцевой сети из 500 систем ФХН (4.11), (4.12) с помощью внешнего стимула  $I(t)$  (4.9), (4.10). (a) и (b): динамика активаторов и ингибиторов всех узлов, соответственно. Параметры системы:  $\gamma = 0.3$ ,  $a = 0.9$ ,  $b = 0$ . Остальные параметры и начальные условия такие же как на рис. 4.1. . . . 64
- 4.3 Управление синхронизацией в кольце из десяти систем ФХН (4.1) с матрицей смежности (4.13) с помощью настройки силы связи, одинаковой для всех узлов, в виде (4.14). (a) и (b): динамика активаторов и ингибиторов всех узлов, соответственно. Параметры системы:  $N = 10$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $b = 0.1$ ,  $\gamma = 100$ . Пороговые параметры  $a_i$  выбраны случайно из отрезка  $[0.8, 1.1]$ , тогда как наибольший пороговый параметр, здесь  $a_1$ , равен 1.1, а наименьший, здесь  $a_2$ , равен 0.8. Начальные условия:  $u_i(0) = 0$ ,  $v_i(0) = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ . . . 67
- 4.4 Управление синхронизацией в кольце из десяти систем ФХН (4.15) с помощью настройки силы связи (4.16). (a) и (b): динамика активаторов и ингибиторов всех узлов, соответственно. Параметры системы:  $\gamma = 1$ . Остальные параметры и начальные условия такие же, как на рис. 4.3. . . . . 68

# Литература

1. Блехман, И. И. Синхронизация в природе и технике / И. И. Блехман. — М.: Наука, 1981. — 352 с.
2. Джунусов, И. А. Синхронизация в сетях линейных агентов с обратными связями по выходам / И. А. Джунусов, А. Л. Фрадков // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 8. — С. 41–52.
3. Красовский, Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения / Н. Н. Красовский. — М.: Гос. изд-во физико-математической лит-ры, 1959. — 211 с.
4. Красовский, Н. Н. Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени / Н. Н. Красовский // Прикладная математика и механика. — 1962. — Т. 26, № 8. — С. 39–51.
5. Михеев, Ю. В. Асимптотический анализ цифровых систем управления / Ю. В. Михеев, В. А. Соболев, Э. М. Фридман // Автоматика и телемеханика. — 1988. — № 9. — С. 83–88.
6. Осипов, Г. В. Синхронизация в неоднородных сетях осцилляторов / Г. В. Осипов. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2006. — 135 с.
7. Плотников, С. А. Управление синхронизацией в сетях ФитцХью-Нагумо / С. А. Плотников // XIII Международная конференция «Устойчивость и ко-

- лебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого). — 2016. — С. 286–288.
8. Постнов, Д. Резонансный механизм возбуждения в динамике связанных нейронов [Электронный ресурс] / Д. Постнов, Д. Сецинский, Л. Рязанова // Известия ВУЗов, ПНД. — 2004. — № 8. — Режим доступа : [http://chaos.sgu.ru/science\\_work/publications/live\\_systems/res\\_fire\\_noise4.pdf](http://chaos.sgu.ru/science_work/publications/live_systems/res_fire_noise4.pdf), свободный.
  9. Проскурников, А. В. Частотные критерии консенсуса в многоагентных системах с нелинейными секторными связями / А. В. Проскурников // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 11. — С. 110–126.
  10. Разумихин, Б. С. Об устойчивости систем с запаздыванием / Б. С. Разумихин // Прикладная математика и механика. — 1956. — Т. 20. — С. 500–512.
  11. Сейфуллаев, Р. Э. Анализ дискретно-непрерывных нелинейных многосвязных систем на основе линейных матричных неравенств / Р. Э. Сейфуллаев, А. Л. Фрадков // Автоматика и телемеханика. — 2015. — № 6. — С. 57–74.
  12. Формирование нейрообратной связи на основе адаптивной модели активности головного мозга / И. В. Овод, А. Е. Осадчий, А. А. Пупышев, А. Л. Фрадков // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. — 2012. — № 2. — С. 36–41.
  13. Фрадков, А. Л. Схема скоростного градиента и его применения в задачах адаптивного управления / А. Л. Фрадков // Автоматика и телемеханика. — 1979. — № 9. — С. 90–101.
  14. Фрадков, А. Л. Адаптивное управление в сложных системах: беспоисковые методы / А. Л. Фрадков. — М.: Наука, 1990. — 292 с.

15. Фрадков, А. Л. Кибернетическая физика: принципы и примеры / А. Л. Фрадков. — СПб.: Наука, 2003. — 208 с.
16. Фрадков, А. Л. Децентрализованное адаптивное управление синхронизацией сетей динамических систем при ограниченных возмущениях / А. Л. Фрадков, Г. К. Григорьев // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 5. — С. 137–155.
17. Чеботарёв, П. Ю. Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов / П. Ю. Чеботарёв, Р. П. Агаев // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 3. — С. 136–151.
18. Эльсгольц, Л. Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л. Э. Эльсгольц, С. В. Норкин. — М.: Наука, 1971. — 296 с.
19. Abbott, L. F. Lapique's introduction of the integrate-and-fire model neuron (1907) / L. F. Abbott // Brain Research Bulletin. — 1999. — Vol. 50, Issue 5/6. — P. 303–304.
20. Adaptive control of synchronization in delay-coupled heterogeneous networks of FitzHugh-Nagumo nodes / S. A. Plotnikov, J. Lehnert, A. L. Fradkov, E. Schöll // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2016. — Vol. 26, Issue 4. — 1650058.
21. Adaptive synchronization in delay-coupled networks of Stuart-Landau oscillators / A. A. Selivanov, J. Lehnert, T. Dahms et al. // Physical Review E. — 2012. — Vol. 85, Issue 1. — 016201.
22. Ballarò, B. Mathematical models for excitable systems in biology and medicine / B. Ballarò, P. G. Reas, R. Riccardi // Rivista di biologia. — 2007. — Vol. 100, Issue 2. — P. 247–266.

23. Buck, J. Mechanism of rhythmic synchronous flashing of fireflies / J. Buck, E. Buck // *Science*. — 1968. — Vol. 159. — P. 1319–1327.
24. Chkhenkeli, S. A. The inhibitory influence of the nucleus caudatus electrostimulation on the human's amygdalar and hippocampal activity at temporal lobe epilepsy / S. A. Chkhenkeli // *Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences*. — 1978. — Vol. 90. — P. 406–411.
25. Chkhenkeli, S. A. Direct deep-brain stimulation: first steps towards the feedback control of seizures / S. A. Chkhenkeli // *Epilepsy as a dynamic disease* / ed. by J. Milton, P. Jung. — Berlin: Springer, 2003. — P. 249–261.
26. Coben, R. Assessment-guided neurofeedback for autistic spectrum disorder / R. Coben, I. Padlosky // *Journal of Neurotherapy: Investigations in Neuro-modulation, Neurofeedback and Applied Neuroscience*. — 2007. — Vol. 11, Issue 1. — P. 5–23.
27. Control of DFIG-based wind generation for power network support / F. M. Hughes, O. Anaya-Lara, N. Jenkins, G. Strbac // *IEEE Transactions on Power Systems*. — 2005. — Vol. 20, Issue 4. — P. 1958–1966.
28. Control of synchronization in delay-coupled neural heterogeneous networks [Электронный ресурс] / S. Plotnikov, J. Lehnert, A. Fradkov, E. Schöll // *International Conference «Physics and Control»*. — 2015. — Режим доступа : <http://lib.physcon.ru/doc?id=227ddba0ebd3>, свободный.
29. Controlling cluster synchronization by adapting the topology / J. Lehnert, P. Hövel, A. A. Selivanov et al. // *Physical Review E*. — 2014. — Vol. 90. — 042914.
30. Controlling synchrony by delay coupling in networks: from in-phase to splay and cluster states / C. U. Choe, T. Dahms, P. Hövel, E. Schöll // *Physical Review E*. — 2010. — Vol. 81. — 025205(R).

31. de Abreu, N. M. M. Old and new results on algebraic connectivity of graphs / N. M. M. de Abreu // *Linear Algebra and its Applications*. — 2007. — Vol. 423, Issue 3. — P. 53–73.
32. Dhamala, M. Enhancement of neural synchrony by time delay / M. Dhamala, V. K. Jirsa, M. Ding // *Physical Review Letters*. — 2004. — Vol. 92. — 074104.
33. Dynamical principles in neuroscience / M. I. Rabinovich, P. Varona, A. I. Selverston, H. D. I. Abarbanel // *Reviews of Modern Physics*. — 2006. — Vol. 78, Issue 4. — P. 1213–1265.
34. Dynamics of delay-coupled excitable neural systems / M. A. Dahlem, G. Hiller, A. Panchuk, E. Schöll // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2009. — Vol. 19, Issue 2. — P. 745–753.
35. Effects of noise in excitable systems / B. Lindner, J. García-Ojalvo, A. B. Neiman, L. Schimansky-Geier // *Physics Reports*. — 2004. — Vol. 392, Issue 6. — P. 321–424.
36. Engel, A. Dynamic predictions: oscillations and synchrony in top-down processing / A. Engel, P. Fries, W. Singer // *Nature Reviews Neuroscience*. — 2001. — Vol. 2. — P. 704–716.
37. *Epilepsy as a dynamic disease* / ed. by J. Milton, P. Jung. — Berlin: Springer, 2003. — 417 p.
38. Evaluation of 3D cognitive fatigue using heart–brain synchronization / S. Park, M. J. Won, E. C. Lee et al. // *International Journal of Psychophysiology*. — 2015. — Vol. 97, Issue 2. — P. 120–130.
39. Fiedler, M. Algebraic connectivity of graphs / M. Fiedler // *Czechoslovak Mathematical Journal*. — 1973. — Vol. 23. — P. 298–305.



40. FitzHugh, R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane / R. FitzHugh // *Biophysical Journal*. — 1961. — Vol. 1, Issue 6. — P. 445–466.
41. FitzHugh, R. Mathematical models of excitation and propagation in nerve / R. FitzHugh // *Biological engineering* / ed. by H. P. Schwan. — New York: McGraw-Hill Book Co., 1969. — P. 1–85.
42. Fradkov, A. L. Introduction to control of oscillations and chaos / A. L. Fradkov, A. Y. Pogromsky. — Singapore: World Scientific Publishers, 1998. — 408 p.
43. Fradkov, A. L. Control of wave motion in the chain of pendulums / A. L. Fradkov, B. Andrievsky // *IFAC Proceedings Volumes*. — 2008. — Vol. 41, Issue 2. — P. 3136–3141.
44. Fries, P. A mechanism for cognitive dynamics: neuronal communication through neuronal coherence / P. Fries // *Trends in cognitive sciences*. — 2005. — Vol. 9, Issue 10. — P. 474–480.
45. Fridman, E. Stability of linear descriptor systems with delay: a Lyapunov-based approach / E. Fridman // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. — 2002. — Vol. 273, Issue 1. — P. 24–44.
46. Fridman, E. A refined input delay approach to sampled-data control / E. Fridman // *Automatica*. — 2010. — Vol. 46. — P. 421–427.
47. Fridman, E. Tutorial on Lyapunov-based methods for time-delay systems / E. Fridman // *European Journal of Control*. — 2014. — Vol. 20. — P. 271–283.
48. Fridman, E. Introduction to time-delay systems: analysis and control / E. Fridman. — Basel: Birkhäuser, 2014. — 362 p.

49. From synchronisation to persistent optical turbulence in laser arrays / N. Blackbeard, S. Wieczoreka, H. Erzgräbera, P. S. Dutta // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2014. — Vol. 286–287. — P. 43–58.
50. Fürst, C. Mechanism for self-synchronization of femtosecond pulses in a two-color Ti:sapphire laser / C. Fürst, A. Leitenstorfer, A. Laubereau // *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*. — 1996. — Vol. 2, Issue 3. — P. 473–479.
51. Ganopolski, A. Abrupt glacial climate changes due to stochastic resonance / A. Ganopolski, S. Rahmstorf // *Physical Review Letters*. — 2002. — Vol. 88. — 038501.
52. García-Ojalvo, J. Modeling a synthetic multicellular clock: repressilators coupled by quorum sensing / J. García-Ojalvo, M. B. Elowitz, S. H. Strogatz // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. — 2004. — Vol. 101. — 10955.
53. Golomb, D. Mechanisms of synchrony of neural activity in large networks / D. Golomb, D. Hansel, G. Mato // *Neuro-informatics and neural modeling, Handbook of biological physics Vol. 4* / ed. by F. Moss, S. Gielen. — Amsterdam: Elsevier, 2001. — P. 887–968.
54. Gu, K. Stability of time-delay systems / K. Gu, V. Kharitonov, J. Chen. — Boston: Birkhäuser, 2003. — 356 p.
55. Guzenko, P. Y. Application of adaptive methods to chaos control of networks of Rössler systems / P. Y. Guzenko, J. Lehnert, E. Schöll // *Cybernetics and Physics*. — 2013. — Vol. 2, Issue 1. — P. 15–24.
56. Halanay, A. Differential equations: stability, oscillations, time lags / A. Halanay. — New York: Academic Press, 1966. — 528 p.

57. Hale, J. K. Introduction to functional differential equations / J. K. Hale, S. M. V. Lunel. — New York: Springer, 1993. — 450 p.
58. Hindmarsh, J. L. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations / J. L. Hindmarsh, R. M. Rose // Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences. — 1984. — Vol. 221. — P. 87–102.
59. Hodgkin, A. L. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve / A. L. Hodgkin, A. F. Huxley // The Journal of Physiology. — 1952. — Vol. 117, Issue 4. — P. 500–544.
60. Izhikevich, E. M. Dynamical systems in neuroscience: the geometry of excitability and bursting. / E. M. Izhikevich. — Cambridge: The MIT press, 2007. — 497 p.
61. Kharitonov, V. Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices / V. Kharitonov. — Boston: Birkhäuser, 2012. — 311 p.
62. Kiss, I. Z. Collective dynamics of chaotic chemical oscillators and the law of large numbers / I. Z. Kiss, Y. Zhai, J. L. Hudson // Physical Review Letters. — 2002. — Vol. 88, Issue 23. — 238301.
63. Koch, C. Biophysics of computation: information processing in single neurons / C. Koch. — Oxford: Oxford University Press, 1999. — 562 p.
64. Kuramoto, Y. Chemical oscillations, waves, and turbulence / Y. Kuramoto. — New York: Dover Publications, 2003. — 176 p.
65. Löfberg, J. YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in MATLAB [Электронный ресурс] / J. Löfberg. — Электрон. прогр. — Proceedings of the CACSD Conference, Taipei, Taiwan, 2004. — Режим доступа к прогр. : <http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/>.

66. Long-term suppression of tremor by chronic stimulation of the ventral intermediate thalamic nucleus / A. L. Behabid, P. Pollak, C. Gervason et al. // *Lancet*. — 1991. — Vol. 337. — P. 403–406.
67. Loss of synchronization in complex neuronal networks with delay / J. Lehnert, T. Dahms, P. Hövel, E. Schöll // *Europhysics Letters*. — 2011. — Vol. 96. — 60013.
68. Lu, X. B. Adaptive cluster synchronization in complex dynamical networks / X. B. Lu, B. Z. Qin // *Physics Letters A*. — 2009. — Vol. 373, Issue 40. — P. 3650–3658.
69. MathWorks – makers of MATLAB and simulink [Электронный ресурс]. — Электрон. прогр. — The MathWorks, Inc., 1994. — Режим доступа к прогр. : <http://www.mathworks.com>.
70. Morris, C. Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber / C. Morris, H. Lecar // *Biophysical Journal*. — 1981. — Vol. 35, Issue 1. — P. 193–213.
71. Miyano, T. Data synchronization in a network of coupled phase oscillators / T. Miyano, T. Tsutsui // *Physical Review Letters*. — 2007. — Vol. 98. — 024102.
72. Murthy, V. N. Oscillatory activity in sensorimotor cortex of awake monkeys: synchronization of local field potentials and relation to behavior / V. N. Murthy, E. E. Fetz // *Journal of Neurophysiology*. — 1996. — Vol. 76, Issue 6. — P. 3949–3967.
73. Nagumo, J. An active pulse transmission line simulating nerve axon / J. Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshizawa // *Proceedings of the IRE*. — 1962. — Vol. 50. — P. 2061–2070.

74. Nash, M. P. Electromechanical model of excitable tissue to study reentrant cardiac arrhythmias. / M. P Nash, A. V. Panfilov // Progress in Biophysics and Molecular Biology. — 2004. — Vol. 85, Issues 2–3. — P. 501–522.
75. Networks of diffusively time-delay coupled systems: conditions for synchronization and its relation to the network topology / E. Steur, W. Michiels, H. Huijberts, H. Nijmeijer // Physica D. — 2014. — Vol. 277. — P. 22–39.
76. Neural synchrony in cortical networks: history, concept and current status [Электронный ресурс] / P. J. Uhlhaas, G. Pipa, B. Lima et al. // Frontiers in Integrative Neuroscience. — 2009. — Vol. 3. — Режим доступа : [https://www.scienceopen.com/document\\_file/efeeea8d-7e07-4d61-8ee7-10e193e0424f/PubMedCentral/efeeea8d-7e07-4d61-8ee7-10e193e0424f.pdf](https://www.scienceopen.com/document_file/efeeea8d-7e07-4d61-8ee7-10e193e0424f/PubMedCentral/efeeea8d-7e07-4d61-8ee7-10e193e0424f.pdf), свободный.
77. Observation of antiphase states in a multimode laser / K. Wiesenfeld, C. Bracikowski, G. James, R. Roy // Physical Review Letters. — 1990. — Vol. 65, Issue 14. — P. 1749–1752.
78. Olfati-Saber, R. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays / R. Olfati-Saber, R. M. Murray // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2004. — Vol. 49, Issue 9. — P. 1520–1533.
79. Olfati-Saber, R. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems / R. Olfati-Saber, J. A. Fox, R. M. Murray // Proceedings of the IEEE. — 2007. — Vol. 95, Issue 1. — P. 215–233.
80. Osipov, G. V. Synchronization in oscillatory networks / G. V. Osipov, J. Kurths, C. Zhou. — Berlin: Springer Verlag, 2007. — 370 p.
81. Pakshin, P. V. Robust stability and stabilization of the family of jumping stochastic systems / P. V. Pakshin // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. — 1997. — Vol. 30, Issue 5. — P. 2855–2866.

82. Peskin, C. S. *Mathematical aspects of heart physiology* / C. S. Peskin. — New York: Courant Institute of Mathematical Sciences, 1975. — 278 p.
83. Pikovsky, A. *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences* / A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths. — Cambridge: Cambridge University Press, 2003. — 432 p.
84. Plotnikov, S. Control of synchronization in neural delay-coupled networks with heterogeneous threshold parameters / S. Plotnikov // Conference abstracts. International student conference «Science and progress». — SPb.: SOLO, 2014. — P. 46.
85. Plotnikov, S. A. Control of synchronization in two delay-coupled FitzHugh-Nagumo systems with heterogeneities / S. A. Plotnikov // IFAC-PapersOnLine. — 2015. — Vol. 48, Issue 11. — P. 887–891.
86. Plotnikov, S. Controlled synchronization in two dynamical systems with sector bounded nonlinearities [Электронный ресурс] / S. Plotnikov, A. Fradkov // International Conference «Physics and Control». — 2015. — Режим доступа : <http://lib.physcon.ru/doc?id=9c71f5378325>, свободный.
87. Plotnikov, S. Controlled synchronization in two FitzHugh-Nagumo systems with slowly-varying delays / S. Plotnikov // Cybernetics and Physics. — 2015. — Vol. 4, Issue 1. — P. 21–25.
88. Plotnikov, S. Synchronization in heterogeneous FitzHugh-Nagumo networks / S. Plotnikov // Conference abstracts. International student conference «Science and progress». — SPb.: SOLO, 2015. — P. 56.
89. Plotnikov, S. A. Controlled synchronization in two hybrid FitzHugh-Nagumo systems / S. A. Plotnikov, A. L. Fradkov // IFAC-PapersOnLine. — 2016. — Vol. 49, Issue 14. — P. 137–141.

90. Poeck, K. Neurologie / K. Poeck, W. Hacke. — 11th edition. — Heidelberg: Springer, 2001. — 761 p.
91. Pogromsky, A. Cooperative oscillatory behavior of mutually coupled dynamical systems / A. Pogromsky, H. Nijmeijer // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. — 2001. — Vol. 48, Issue 2. — P. 152–162.
92. Power-electronic systems for the grid integration of renewable energy sources: a survey / J. M. Carrasco, L. G. Franquelo, J. T. Bialasiewicz et al. // IEEE Transactions on Industrial Electronics. — 2006. — Vol. 53, Issue. 4. — P. 1002–1016.
93. Proposal and analysis of a FitzHugh-Nagumo neuronal circuit / D. C. Soriano, M. Machado, E. Z. Nadalin et al. // IFAC Proceedings Volumes. — 2012. — Vol. 3, Issue 1. — P. 220–225.
94. Proskurnikov, A. V. Average consensus in networks with nonlinearly delayed couplings and switching topology / A. V. Proskurnikov // Automatica. — 2013. — Vol. 49. — P. 2928–2932.
95. Pyragas, K. Control of chaos via extended delay feedback / K. Pyragas // Physics Letters A. — 1995. — Vol. 206, Issues 5–6. — P. 323–330.
96. Ren, W. Distributed consensus in multi-vehicle cooperative control: theory and applications / W. Ren, R. Beard. — London: Springer-Verlag, 2008. — 319 p.
97. Reversed cortical over-activity during movement imagination following neurofeedback treatment for central neuropathic pain / M. A. Hasan, M. Fraser, B. A. Conway et al. // Clinical Neurophysiology. — 2016. — Vol. 127, Issue 9. — P. 3118–3127.

98. Rosenblum, M. G. Delayed feedback control of collective synchrony: an approach to suppression of pathological brain rhythms / M. G. Rosenblum, A. Pikovsky // *Physical Review E*. — 2004. — Vol. 70. — 041904.
99. Rosenblum, M. G. Controlling synchronization in an ensemble of globally coupled oscillators / M. G. Rosenblum, A. Pikovsky // *Physical Review Letters*. — 2004. — Vol. 92, Issue 11. — 114102.
100. Schöll, E. *Handbook of chaos control* / E. Schöll, H. G. Schuster. — Weinheim: Wiley-VCH, 2007. — 849 p.
101. Schöll, E. *Control of self-organizing nonlinear systems* / E. Schöll, S. H. L. Klapp, P. Hövel. — Berlin: Springer, 2016. — 496 p.
102. Selivanov, A. Passification-based adaptive control: uncertain input and output delays / A. Selivanov, E. Fridman, A. Fradkov // *Automatica*. — 2015. — Vol. 54. — P. 107–113.
103. Selivanov, A. Passification-based decentralized adaptive synchronization of dynamical networks with time-varying delays / A. Selivanov, A. Fradkov, E. Fridman // *Journal of The Franklin Institute*. — 2015. — Vol. 352. — P. 52–72.
104. Shiriaev, A. S. Stabilization of invariant sets for nonlinear non-affine systems / A. S. Shiriaev, A. L. Fradkov // *Automatica*. — 2000. — Vol. 36, Issue 11. — P. 1709–1715.
105. Singer, W. Neuronal synchrony: a versatile code review for the definition of relations? / W. Singer // *Neuron*. — 2000. — Vol. 24, Issue 1. — P. 49–65.
106. Singer, W. Binding by synchrony [Электронный ресурс] / W. Singer // *Scholarpedia*. — 2007. — Vol. 2. — Режим доступа : [http://www.scholarpedia.org/article/Binding\\_by\\_synchrony](http://www.scholarpedia.org/article/Binding_by_synchrony), свободный.



107. Smith, H. M. Synchronous flashing of fireflies / H. M. Smith // Science. — 1935. — Vol. 82. — P. 151–152.
108. Source-space EEG neurofeedback links subjective experience with brain activity during effortless awareness meditation [Электронный ресурс] / R. Lutterveld, S. D. Houlihan, P. Pal et al. // NeuroImage. — 2016. — Режим доступа : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1053811916001567>.
109. Steur, E. Semi-passivity and synchronization of diffusively coupled neuronal oscillators / E. Steur, I. Tyukin, H. Nijmeijer // Physica D. — 2009. — Vol. 328. — P. 2119–2128.
110. Strogatz, S. Coupled oscillators and biological synchronization / S. H. Strogatz, I. Stewart // Scientific American. — 1993. — Vol. 269, Issue 6. — P. 102–109.
111. Strogatz, S. H. From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators / S. H. Strogatz // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2000. — Vol. 143, Issue 1. — P. 1–20.
112. Sun, J. Master stability functions for coupled nearly identical dynamical systems / J. Sun, E. M. Bollt, T. Nishikawa // Europhysics Letters Association. — 2009. — Vol. 85, Issue 6. — 60011.
113. Symmetry-breaking transitions in networks of nonlinear circuit elements / M. Heinrich, T. Dahms, V. Flunkert et al. // New Journal of Physics. — 2010. — Vol. 12, Issue 11. — 113030.
114. Synchronization analysis of delayed complex networks via adaptive time-varying coupling strengths / L. Huang, Z. Wang, Y. Wang, Y. Zuo // Physics Letters A. — 2009. — Vol. 373. — P. 3952–3958.

115. Synchronization in complex networks / A. Arenas, A. Díaz-Guilera, J. Kurths et al. // *Physics Reports*. — 2008. — Vol. 469, Issue 3. — P. 93–153.
116. Synchronization in heterogeneous FitzHugh-Nagumo networks with hierarchical architecture / S. A. Plotnikov, J. Lehnert, A. L. Fradkov, E. Schöll // *Physical Review E*. — 2016. — Vol. 94, Issue 1. — 012203.
117. Synchronization is enhanced in weighted complex networks / M. Chavez, D. U. Hwang, A. Amann et al. // *Physical Review Letters*. — 2005. — Vol. 94. — 218701.
118. Synchronization of chemical micro-oscillators / M. Toiya, H. O. González-Ochoa, V. K. Vanag et al. // *The Journal of Physical Chemistry Letters*. — 2010. — Vol. 8, Issue 1. — P. 1241–1246.
119. Synchronization of plant circadian oscillators with a phase delay effect of the vein network / H. Fukuda, N. Nakamichi, M. Hisatsune et al. // *Physical Review Letters*. — 2007. — Vol. 99. — 098102.
120. Synchronization of underdamped Josephson-junction arrays / G. Filatrella, N. F. Pedersen, C. J. Lobb, P. Barbara // *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*. — 2003. — Vol. 34, Issue 1. — P. 3–8.
121. Tass, P. A. Phase resetting in medicine and biology: stochastic modelling and data analysis / P. A. Tass. — Berlin: Springer, 1999. — 329 p.
122. Time-delayed feedback in neurosystems / E. Schöll, G. Hiller, P. Hövel, M. A. Dahlem // *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. — 2009. — Vol. 367, Issue 1891. — P. 1079–1096.
123. The control of chaos: theory and applications / S. Boccaletti, C. Grebogi, Y.-C. Lai et al. // *Physics Reports*. — 2000. — Vol. 329. — P. 103–197.

124. Visuomotor integration is associated with zero time-lag synchronization among cortical areas / P. Roelfsema, A. Engel, P. König, W. Singer // *Nature*. — 1997. — Vol. 385. — P. 157–161.
125. Vlasov, V. Synchronization of a Josephson junction array in terms of global variables / V. Vlasov, A. Pikovsky // *Physical Review E*. — 2013. — Vol. 88. — 022908.
126. Wiesenfeld, K. Averaged equations for Josephson junction series arrays / K. Wiesenfeld, J. W. Swift // *Physical Review E*. — 1995. — Vol. 51, Issue 2. — P. 1020–1025.
127. Winfree, A. T. Varieties of spiral wave behavior in excitable media / A. T. Winfree // *Chaos*. — 1991. — Vol. 1. — P. 303–334.
128. Winfree, A. T. *The geometry of biological time* / A. T. Winfree. — 2nd edition. — Berlin: Springer, 2001. — 803 p.
129. Zero-lag synchronization of chaotic units with time-delayed couplings / M. Zigzag, M. Butkovski, A. Englert et al. // *Europhysics Letters*. — 2009. — Vol. 85. — 60005.
130. Zhang, R. Synchronization in complex networks with adaptive coupling / R. Zhang, M. Hu, Z. Xu // *Physics Letters A*. — 2007. — Vol. 368. — P. 276–280.
131. Zhou, J. Pinning adaptive synchronization of a general complex dynamical network / J. Zhou, J. Lu, J. Lü // *Automatica*. — 2008. — Vol. 44, Issue 4. — P. 996–1003.