

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Костенко Мария Михайловна

РЕНОРМГРУППА И АНОМАЛЬНЫЙ СКЕЙЛИНГ В
МОДЕЛЯХ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА СЖИМАЕМОЙ
ЖИДКОСТЬЮ

01.04.02 — теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель
доктор физико–математических наук
Антонов Н. В.

Санкт-Петербург — 2018

Оглавление

Введение		6
1	РГ анализ стохастического уравнения НС с сильной сжимаемостью	21
1.1	Описание модели	21
1.2	Теоретико-полевая формулировка и правила Фейнмана	24
1.3	УФ расходимости, ренормировка и мультипликативная ренормируемость	26
1.4	Уравнения РГ и РГ функции	33
1.5	ИК притягивающая неподвижная точка	36
1.6	ИК поведение и критические размерности	38
2	Пассивные скалярные поля: ренормировка, РГ функции и неподвижная точка	41
2.1	Модели и их теоретико-полевые формулировки	41
2.2	УФ расходимости, ренормировка и мультипликативная ренормируемость	44
2.3	Явные ответы в главном порядке. Неподвижные точки и скейлинговые размерности	46
2.4	Составные поля и их размерности	50

2.5	Ренормировка составных полей θ^n . Явные ответы в главном порядке	50
2.6	Ренормировка составных полей $(\partial\theta)^n$ в модели трейсера. Явные решения в главном порядке	54
2.7	Операторное разложение и аномальный скейлинг	59
2.7.1	Модель плотности	59
2.7.2	Модель трейсера	63
2.8	Влияние крупномасштабной анизотропии	65
3	Перенос пассивного магнитного поля	68
3.1	Описание модели	68
3.1.1	Ансамбль скорости	68
3.1.2	Уравнение МГД	70
3.1.3	Теоретико-полевая формулировка	71
3.2	УФ расходимости и ренормировка	73
3.2.1	Канонические размерности, контрчлены и ренормируемость	73
3.2.2	Расчёт ренормализационной постоянной Z_κ в главном порядке	75
3.3	РГ уравнения, неподвижная точка и критические размерности	80
3.4	Составные поля и их размерности	84
3.5	Операторное разложение и аномальный скейлинг	90
3.5.1	Общие обсуждения и изотропный случай	90
3.5.2	Эффекты крупномасштабной анизотропии	94
3.5.3	Структурные функции	95

4	РГ анализ вблизи "особой" размерности $d=4$: Уравнение НС и перенос скалярных полей	98
4.1	Описание модели	98
4.2	Теоретико-полевая формулировка модели	99
4.2.1	Функционал действия и правила Фейнмана	99
4.2.2	Канонические размерности, УФ расходимости и ренормализационные постоянные	101
4.3	Ренормировка модели	107
4.3.1	Теория возмущений для 1-неприводимых функций Грина	107
4.3.2	Ренормализационные постоянные	109
4.4	Ренормгруппа и критический скейлинг	111
4.4.1	РГ уравнения и РГ функции	111
4.4.2	РГ функции и ИК притягивающие неподвижные точки	113
4.4.3	ИК притягивающие неподвижные точки и критические размерности	119
4.5	Перенос пассивного скалярного поля плотности	121
4.5.1	Теоретико-полевая формулировка	122
4.5.2	Ренормировка модели	123
4.5.3	Вычисление диаграмм, положение неподвижных точек, критические размерности	125
4.5.4	Ренормировка и критические размерности составных операторов	127
4.5.5	Операторное разложение и аномальный скейлинг	132
4.6	Перенос поля трейсера. Ответы в главном порядке	137

4.7 Перенос магнитного поля	139
Заключение	141
Благодарности	149
Литература	150

Введение

Диссертация посвящена исследованию ряда стохастических моделей развитой гидродинамической турбулентности сильно сжимаемой жидкости и турбулентного переноса методами квантовой теории поля, в особенности ренормализационной группы и операторного разложения. Рассмотрен перенос скалярных и векторных полей (температура, поле примеси, магнитное поле в кинематическом приближении в магнитной гидродинамике). Во всех случаях обосновано наличие аномального скейлинга для различных корреляционных функций, а сами аномальные показатели явно вычислены в главном (однопетлевом) приближении в двух схемах ренормализационной группы. Особое внимание уделено эффектам сжимаемости и крупномасштабной анизотропии.

Актуальность темы. Явление перемежаемости и аномального скейлинга в развитой гидродинамической турбулентности, вызывавшее перемежающийся интерес с начала 60-х годов, недавно вновь привлекло большое внимание как математиков, так и физиков, в связи с появлением интересных аналитических результатов для некоторых модельных систем [1]. Явление это проявляется в сингулярном (предположительно степенном) поведении различных статистических величин, зависящих от интегрального масштаба турбулентности с бесконечным количеством независимых аномальных показателей. Несмотря на относительный успех, задача остаётся, по существу, не решённой: для нахождения аномальных показателей поля

скорости не было построено вычислительной схемы, основанной на базовой динамической модели и надёжной теории возмущений (как, например, ε разложение для критических показателей).

Как эксперименты, так и численное моделирование показывают, что отклонения от классической теории Колмогорова-Обухова [1, 2] более ярко выражены для пассивного переноса скалярных полей (например, поля температуры или плотности примеси), чем для самого поля скорости [3–6]. В то же время различные упрощённые модели, описывающие пассивный перенос “синтетическим” полем скорости с заданной статистикой, оказываются более удобными и позволяют получить аналитические результаты [7]. Поэтому проблему пассивного переноса, значимую саму по себе, можно рассматривать в качестве отправной точки для изучения аномального скейлинга в турбулентности жидкости. И в самое последнее время задача аномального скейлинга в турбулентности вновь приобрела повышенное внимание [8–10].

В данной работе также проводится исследование для магнитогидродинамической турбулентности, которая также является на сегодняшний день актуальной проблемой; см. [1, 11–36] и ссылки в них. Давно известно, что магнитогидродинамическая (далее МГД) турбулентность в т.н. альфвенском режиме демонстрирует поведение, похожее на обычную развитую турбулентность жидкости: энергия распределяется от инфракрасного (далее ИК) масштаба в направлении малых масштабов, где преобладает эффект диссипации и самоподобное (скейлинговое) поведение энергетических спектров в промежуточном (инерционном) интервале. Более того, не гауссовый (прерывистый) характер флуктуаций в МГД турбулентности вы-

ражен сильнее, чем в обычной турбулентной жидкости или в задаче с пассивным скалярным полем.

Солнечный ветер – поток ионизированных частиц (в основном гелиево-водородной плазмы) – распространяющаяся в межпланетном пространстве, покрывает широкий спектр пространственных и температурных масштабов, и появляется “лаборатория”, в которой можно проверять многие эффекты МГД турбулентности [20–32]. В солнечной короне высокоэнергетичные и анизотропные крупномасштабные события (с магнитными полями в 500 Гс) сосуществуют с мелкомасштабными стохастическими флуктуациями и когерентными структурами, приводящими к диссипации. Так что моделирование процесса, описывающего такое распределение и перенос энергии, является очень сложной задачей.

Переменяемость сильно влияет на ИК поведение корреляционных функций высоких порядков, и приводит к аномальному скейлингу с бесконечным набором независимых аномальных показателей [23].

Степень разработанности темы исследования.

Самый значительный прогресс в изучении аномального скейлинга был достигнут для модели Крейчнана [37], где поле скоростей переноса является гауссовым, не коррелированным по времени, а парная корреляционная функция имеет вид $\sim \delta(t-t')/k^{d+\xi}$, где d – это размерность пространства, k – волновое число, а ξ – произвольный показатель. В этой работе существование аномального скейлинга было основано на микроскопической модели [37]; соответствующие аномальные показатели были вычислены в контролируемом приближении [38] и, наконец, в форме систематической теории возмущений по формально малому параметру ξ [39]. Подробный

обзор теоретических исследований задачи пассивного скалярного поля, а также библиографию можно найти в работе [7].

В исходной модели Крейчнана ансамбль скорости гауссов, некоррелированный по времени, изотропный, а жидкость подразумевалась несжимаемой. Более реалистичные модели должны учитывать конечное время корреляции и негауссовость ансамбля скорости, анизотропию экспериментальной установки и сжимаемость жидкости. Итак, появляются две ключевые задачи: формулировка более реалистичной модели и её аналитическое исследование.

По видимому, самый эффективный способ изучения аномального скейлинга основан на методах теоретико-полевой ренормгруппы (далее РГ) и операторного разложения (ОР). Для сценария РГ+ОР предложено дальнейшее развитие в [40]. Сингулярная зависимость от интегрального масштаба возникает как следствие существования в модели составных полей (“составных операторов” в теоретико-полевой терминологии) с отрицательными скейлинговыми размерностями, так называемых “опасных операторов”; для более подробных объяснений и ссылок можно посмотреть [40–43]. Для модели Крейчнана можно определить скейлинговые размерности галилеево-инвариантных операторов и их аномальные показатели. Это позволяет дать самосогласованный вывод аномального скейлинга, построить систематическую теорию возмущений для аномальных показателей по ξ и вычислить показатели во втором [39] и третьем [44] порядках. РГ подход можно применить и к случаю корреляционной функции с конечным временем корреляции [45] и не гауссовым ансамблем скорости, регулируемой уравнением Навье-Стокса [46]. Общий обзор РГ подхода в модели

Крейчнана и её модификаций можно найти в [47].

Были проведены многочисленные исследования, посвящённые влиянию сжимаемости на явление аномального скейлинга [11–17, 48–57]. Из анализа упрощённых моделей следует, что сжимаемость сильно влияет на пассивно переносимые поля. В частности, в отличие от несжимаемого случая, при переносе чисто потенциальным потоком диффузия может быть полностью подавлена [50]. Когда степень сжимаемости возрастает, может произойти фазовый переход из турбулентного в некоторое чисто хаотическое состояние [53]. Также показано, что аномальные показатели, благодаря зависимости от параметра сжимаемости, не универсальны. Таким образом, аномальный скейлинг усиливается, в то время как иерархия анизотропных вкладов подавляется [54–57]; для пассивного векторного (например, магнитного) поля, см. [11–13, 57].

Существенное достоинство модели Крейчнана заключается в возможности легко моделировать сжимаемость [48–54]. Также можно обобщить модель на случай гауссового ансамбля скорости с конечным временем корреляции [17, 56, 57]. Как бы то ни было, синтетические модели с ненулевым временем корреляции страдают от отсутствия галилеевой симметрии, что может привести к “интересным патологиям” [4]. В РГ подходе одна из таких патологий проявляется в виде ультрафиолетовой (далее УФ) расходимости в вершине [56], которая в более реалистичных моделях запрещена галилеевой инвариантностью, а для несжимаемой гауссовой модели она отсутствует по “техническим” причинам [45]. Таким образом, желательно описать переносимое поле скорости соответствующими уравнениями Навье-Стокса [58] со случайной перемешивающей силой. И это оказалось трудной

задачей.

В статьях [59, 60] изучалась главная поправка по числу Маха Ma для несжимаемого скейлингового режима; обобщение на все порядки разложения получено в [61]. Поправки малы для очень малых Ma и не очень малых импульсов k , но они становятся сколь угодно большими (ИК существенными в смысле Вильсона) и разрушают несжимаемый скейлинговый режим при достаточно малом импульсе и фиксированном Ma . Таким образом, несжимаемый режим становится неустойчивым, и происходит переход к другому неизвестному режиму. Случай сильной сжимаемости был изучен в статьях [62–64]. Результаты довольно противоречивые, но во всех исследованиях подтверждается существование стационарного “сжимаемого” режима, отличного от несжимаемого.

В настоящей работе мы применили подход статьи [64], где стандартная теоретико-полевая РГ была применена к задаче перемешивания в гидродинамике сжимаемой жидкости, и полученный стационарный скейлинговый режим связан с ИК притягивающей неподвижной точкой соответствующей мультипликативно ренормируемой теоретико-полевой модели. Этот подход позже применён к задаче распределения массы в самогравитирующей материи в рамках непрерывной стохастической формулировки модели Власова–Пуассона [65]. Проблема аномального скейлинга поля скорости в этой модели остаётся открытой, по сравнению с “несжимаемыми” предшественниками, но перенос пассивного скалярного поля можно с помощью такого ансамбля описать аналитически. Это и есть цель настоящей работы.

Большое число работ было также посвящено изучению МГД турбу-

лентности. Упрощенное описание ситуации представлено в [22]: крупномасштабное поле $B_i^0 = n_i B^0$ определяет динамику в определённом направлении вдоль единичного постоянного вектора $\mathbf{n} = \{n_i\}$, а флуктуации в перпендикулярной плоскости определяются как почти двумерные. Такая картина поддаётся некоторому численному расчёту (симуляции), которая показывает нам, что турбулентные флуктуации организуются в редкие когерентные структуры, разделённые тонкими “листами” токов. С другой стороны, спутниковые наблюдения [20] и численные симуляции [21, 23] говорят о том, что скейлинговое поведение в солнечном ветре ближе к аномальному скейлингу в трёхмерной полностью развитой турбулентности, чем к простому скейлингу Ирошникова-Крейчнана [18, 19], в котором рассматривается двумерная картина с инвертированным энергетическим каскадом.

Так что очень важно в дальнейшем анализировать более реалистичные трехмерные модели.

В нескольких статьях задача изучалась в кинематическом подходе, где магнитное поле пассивно (в том смысле, что оно не влияет на поле скорости жидкости) [11–36]. Это приближение будет адекватным, если градиент магнитных полей не очень велик. Ренормгрупповой анализ модели [66] говорит нам о том, что такой “кинематический режим” может точно описать возможное ИК поведение полномасштабной проблемы. Тогда возможно моделировать поле скорости “руками”: например, простым статистическим ансамблем с известными свойствами. Самое популярное описание – ансамбль Казанцева-Крейчнана [37, 67]: случайное поле скорости Гауссово, не коррелированное по времени, имеющее степенной спектр.

Для скалярных и векторных полей, переносимых ансамблем скорости

Казанцева-Крейчнана, ранее были получены аналитические и численные результаты, см. [7] для пояснений. Главные результаты, полученные для аномального скейлинга для магнитного случая таковы [11–33]:

(i) Аномальный скейлинг существует, и появляется он даже для парных корреляционных функций.

(ii) В случае крупномасштабной анизотропии (внесённой в систему, например, фоновым полем B^0), аномальные показатели для заданной корреляционной функции демонстрируют некоторую иерархию: в разложении корреляционных функций по сферическим гармоникам Y_{lm} соответствующие показатели степени возрастают с ростом l (степени анизотропии). Так, для функций четного порядка главные члены в инерционном интервале задаются изотропным вкладом ($l = 0$). Что даёт подтверждение гипотезы Колмогорова о локальном восстановлении изотропии.

(iii) Однако, анизотропия выживает на малых масштабах и проявляется в корреляционных функциях нечетного порядка или в безразмерных отношениях, включающих такие функции.

Важное преимущество ансамбля Казанцева-Крейчнана заключается в возможности легко моделировать анизотропию и сжимаемость. Важность включения сжимаемости в МГД турбулентность видна уже в классическом рассмотрении в [18]. В рамках ансамбля Казанцева-Крейчнана эффекты сжимаемости были изучены в работах [12, 15, 68]. Было показано, что:

(iv) Аномальные показатели зависят от степени сжимаемости. Когда она растёт, иерархия анизотропных вкладов становится менее выраженной и влияние анизотропных вкладов в глубине инерционного интервала становится всё более заметным.

Конечно, необходимо обобщение этого анализа на более реалистичную динамику скорости: в случае, если мы рассмотрим простую модель, результаты могут оказаться неприменимыми к реальным системам.

Возможно напрямую обобщить ансамбль Казанцева-Крейчнана на случай с конечным временем корреляции; см., например, [45, 56, 57] для пассивного скалярного и [17] для пассивного векторного полей. Однако, такой “синтетический” метод с неиз исчезающим временем корреляции страдает от отсутствия галилеевой симметрии, что приводит к “интересным патологиям”, замеченным авторами в [4]. Одна из таких патологий заключается в том, что появляются ультрафиолетовые (УФ) расходимости в вершине [56], хотя в более реалистичных моделях они запрещены галилеевой инвариантностью.

Так что хотелось бы описывать перенос скорости уравнением Навье-Стокса со случайной силой и работать в галилеево ковариантном формализме. Для несжимаемого случая анализ пассивного векторного поля был сделан в [36].

Разумеется, некоторые интересные вопросы остались за пределами данного исследования. Так, рассматривая анизотропную турбулентность (что предполагает нарушение симметрии по отношению к группе вращений $SO(d)$), мы всегда предполагаем сохранение симметрии по отношению к пространственным отражениям. Тем самым, из рассмотрения исключается т.н. гиротропная турбулентность (“helical turbulence”), см. например работы [2, 69–75] и ссылки в них. Аппарат РГ применим и к этому явлению [76, 77], и было бы интересно использовать его в случае сильно сжимаемой жидкости. Также было бы интересно выйти за рамки главного (одно-

петлевого) приближения, что является непростой задачей даже для несжимаемого случая [78]. Эти задачи остаются на будущее.

Целью работы является изучение физического явления – развитой турбулентности и турбулентного переноса скалярных и векторных полей в сжимаемой жидкости. Для этого рассмотрен ряд моделей: перенос пассивного скалярного поля потоком сжимаемой турбулентной жидкости в размерности пространства $d = 3$; перенос пассивного скалярного поля тем же потоком в окрестности исключительной размерности $d = 4$; перенос магнитогидродинамического поля турбулентным потоком без учёта обратного влияния на жидкость. Эти модели ренормированы; найдены неподвижные точки, определяющие асимптотическое поведение систем; при наличии скейлинга вычислены критические размерности; установлено наличие аномального скейлинга в перечисленных моделях.

Научная новизна. Все научные результаты получены впервые, что подтверждается их публикациями в ведущих международных журналах. Основные результаты данной работы заключаются в следующем:

(1) Во всех изучаемых моделях было установлено наличие аномального скейлинга, найдены критические показатели в главном, однопетлевом приближении.

(2) Установлено, что аномальный скейлинг проявляется сильнее с ростом сжимаемости. Также установлено наличие иерархии анизотропных вкладов.

(3) Для модели переноса скалярного поля вблизи особой размерности $d = 4$ найдены два возможных типа скейлингового поведения. Изучена возможность кроссовера между трехмерной и четырёхмерной моделями.

Теоретическая и практическая значимость.

Результаты данной работы должны стимулировать экспериментальные исследования по измерению аномальных показателей в турбулентности. Результаты, полученные в третьей главе, могут быть использованы при описании различных процессов в солнечной короне. С теоретической точки зрения ренормгрупповой подход к турбулентности можно применить к различным более сложным моделям турбулентного переноса (например, переноса поля при наличии обратного влияния на жидкость). Также решение подобных задач приближает нас к пониманию явления турбулентности как таковой и, в частности, к решению проблемы аномального скейлинга для самой развитой турбулентности.

Методология и методы исследования. Стохастические задачи переформулируются на функционально-полевой язык. Далее с помощью последовательного применения хорошо разработанного метода ренормгруппы (РГ) и операторного разложения (ОР) устанавливается наличие неподвижных точек, в также вычисляются аномальные показатели.

Достоверность результатов обеспечивается тем, что в работе применяется мощный и гибкий аппарат квантовополевой ренормализационной группы, а полученные результаты сравниваются с уже известными для частных случаев.

Основные положения, выносимые на защиту:

(1) Для двух моделей турбулентного переноса пассивного скалярного поля (плотность и трейсер) ансамблем скорости Навье-Стокса для вязкой сжимаемой жидкости установлена их мультипликативная ренормируемость, наличие аномального скейлинга в инерционном интервале, вы-

числены аномальные показатели в главном, однопетлевом приближении. Аномальный скейлинг становится более заметным при увеличении степени сжимаемости; анизотропные вклады формируют иерархию по степени анизотропии. Иерархия становится более выраженной с ростом степени сжимаемости.

(2) Для модели переноса пассивного МГД поля тем же ансамблем установлена мультипликативная ренормируемость, вычислены координаты ИК притягивающей неподвижной точки, получены выражения для аномальных размерностей в главном, однопетлевом приближении. Аномальный скейлинг становится более заметным при увеличении степени сжимаемости; анизотропные вклады формируют иерархию по степени анизотропии. Иерархия становится более выраженной с ростом степени сжимаемости.

(3) Изучена специальная модель переноса пассивного поля тем же ансамблем скорости вблизи особой размерности $d = 4$ с дополнительной ультрафиолетовой расходимостью. Она мультипликативно ренормируема, имеет две неподвижные точки, то есть может демонстрировать два типа скейлингового поведения. Между режимами $d = 3$ и $d = 4$ определена линия кроссовера.

Апробация работы. Полученные результаты докладывались и обсуждались на международных конференциях и школах. Далее следует список основных докладов:

1. Международная школа “Advanced Methods of Modern Theoretical Physics: Integrable and Stochastic Systems”, oral talk “Renormalization Group approach to turbulence” 16 августа - 21 августа, 2015, Дубна, Россия

<http://www.dubnaschool.cz/2015/>

2. International conference “Models in Quantum Field Theory”, oral talk “Anomalous scaling of passive scalar fields advected by the Navier-Stokes velocity ensemble” 21 сентября - 25 сентября, 2015, Петергоф, Россия
http://hep.phys.spbu.ru/conf/mqft2015/common_e.htm
3. 50-я международная зимняя школа Санкт-Петербургского Института Ядерной Физики, устный доклад “Anomalous scaling in magnetohydrodynamics” 27 февраля – 4 марта, 2016, Рощино, Россия
<http://hepd.pnpi.spb.ru/WinterSchool/archive/2016/index.shtml>
4. 19-й международный семинар “Quarks 2016”, устный доклад “Renormalization Group approach to turbulence” 29 мая – 4 июня, 2016, Пушкин, Россия
<http://quarks.inr.ac.ru/2016/>
5. 51-я международная зимняя школа Санкт-Петербургского Института Ядерной Физики, постерный доклад “Statistical restoration of broken symmetries in fully developed turbulence” 27 февраля – 4 марта, 2017, Рощино, Россия
<http://hepd.pnpi.spb.ru/WinterSchool/archive/2017/index.shtml>
6. 10th CHAOS 2017 International Conference, устный доклад “Turbulent advection of passive scalar field near two dimensions” 30 мая – 2 июня, 2017, Барселона, Испания
<http://www.cmsim.org/chaos2017.html>

Публикации. По теме диссертации опубликовано 6 научных работ в

изданиях, рекомендованных ВАК РФ и входящих в базы данных РИНЦ, Web of Science и Scopus:

1. N. V. Antonov and M. M. Kostenko “Anomalous scaling of passive scalar fields advected by the Navier-Stokes velocity ensemble: Effects of strong compressibility and large-scale anisotropy”, *Physical Review E* 90, 063016 (2014)
2. N. V. Antonov and M. M. Kostenko “Anomalous scaling in magnetohydrodynamic turbulence: Effects of anisotropy and compressibility in the kinematic approximation”, *Physical Review E* 92, 053013 (2015)
3. N. V. Antonov, N.M. Gulitskiy, M. M. Kostenko, and T. Lūcivjanský “Renormalization group analysis of a turbulent compressible fluid near $d = 4$: Crossover between local and non-local scaling regimes”, *European Physical Journal: Web of Conferences* 125, 05006 (2016)
4. N. V. Antonov, N. M. Gulitskiy, M. M. Kostenko, and T. Lūcivjanský “Advection of a passive scalar field by turbulent compressible fluid: renormalization group analysis near $d = 4$ ”, *Journal: Web of Conferences* 137, 10003 (2017)
5. N. V. Antonov, N.M. Gulitskiy, M. M. Kostenko, and T. Lūcivjanský “Turbulent compressible fluid: Renormalization group analysis, scaling regimes, and anomalous scaling of advected scalar fields”, *Physical Review E* 95, 033120 (2017)
6. N. V. Antonov, N.M. Gulitskiy, M. M. Kostenko, and T. Lūcivjanský “Stochastic Navier-Stokes equation and advection of a tracer field: One-

loop renormalization near $d = 4$ " EPJ Web of Conferences 164, 07044 (2017)

Личный вклад автора. Все основные результаты, изложенные в диссертации, получены соискателем лично либо при ее прямом неотделимом участии в соавторстве.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы из 102 наименований. Работа изложена на 159 страницах и содержит 20 рисунков и 2 таблицы.

Первая глава посвящена исследованию стохастической задачи переноса вязкой сжимаемой жидкости уравнением Навье-Стокса. В ней подробно рассказывается о построении функциональной теории из начальной стохастической, исследуется ее ренормируемость, показана последовательность поиска критических размерностей полей и параметров.

Вторая глава посвящена переносу пассивного скалярного поля ансамблем скорости Навье-Стокса для вязкой сжимаемой жидкости. К модели применяются методы ренормгруппы и операторного разложения.

Третья глава посвящена ренормгрупповому анализу модели переноса пассивного магнитного поля, поиску неподвижных точек, аномальных размерностей.

Четвертая глава посвящена исследованию динамики жидкости для особенного случая $d = 4$. Глава разделена на несколько частей: в первой проводится исследование для самого поля скорости, в остальных – для переноса пассивных полей (плотности, трейсера и магнитного поля).

В заключении перечисляются основные результаты.

1. РГ анализ стохастического уравнения НС с сильной сжимаемостью

1.1. Описание модели

Уравнение Навье-Стокса (далее НС) для вязкой сжимаемой жидкости имеет вид [58]

$$\rho \nabla_t v_i = \nu_0 [\delta_{ik} \partial^2 - \partial_i \partial_k] v_k + \mu_0 \partial_i \partial_k v_k - \partial_i p + \eta_i, \quad (1.1)$$

где

$$\nabla_t = \partial_t + v_k \partial_k \quad (1.2)$$

это лагранжева (галилеево-ковариантная) производная, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, и $\partial^2 = \partial_i \partial_i$ – оператор Лапласа.

Уравнение (1.1) получено из уравнения:

$$\partial_t(\rho v_i) + \partial_k \Pi_{ik} = \eta_i, \quad (1.3)$$

где

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + \delta_{ik} p + \{\text{вязкие члены}\} \quad (1.4)$$

тензор напряжений, и уравнения неразрывности

$$\partial_t \rho + \partial_i(\rho v_i) = 0. \quad (1.5)$$

В этих уравнениях v_i – скорость, ρ – массовая плотность, p – давление, и η_i – плотность внешней силы (на единицу объёма). Все эти величины

зависят от $x = \{t, \mathbf{x}\}$, причём $\mathbf{x} = \{x_i\}$, $i = 1 \dots d$, где d – произвольная (для общности) размерность пространства. Постоянные ν_0 и μ_0 являются двумя независимыми молекулярными коэффициентами вязкости; в вязких членах в (1.1) мы явно разделили поперечную и продольную части. Суммирование по повторяющимся значкам подразумевается сейчас и будет подразумеваться в дальнейшем.

К уравнениям (1.1), (1.5) необходимо добавить уравнение состояния, $p = p(\rho)$. В самой простой форме, в линейном приближении оно выглядит как соотношение

$$(p - \bar{p}) = c_0^2(\rho - \bar{\rho}) \quad (1.6)$$

между разностями давления и плотности с их средними значениями. Постоянная величина c_0 имеет значение (адиабатической) скорости звука.

Руководствуясь статьёй [64], мы поделим (1.1) на ρ , а в вязких членах заменим ρ её средним значением. Это приближение (которое и нужно для получения локальной полевой модели) неявно оправдано в работе [61]; также заметим, что вязкость в инерционном интервале меняется не существенно. Оставим те же обозначения ν_0 и μ_0 для полученных постоянных коэффициентов кинематической вязкости. Тогда уравнения (1.1), (1.5) можно переписать в виде

$$\nabla_t v_i = \nu_0[\delta_{ik}\partial^2 - \partial_i\partial_k]v_k + \mu_0\partial_i\partial_kv_k - \partial_i\phi + f_i, \quad (1.7)$$

$$\nabla_t\phi = -c_0^2\partial_iv_i, \quad (1.8)$$

где введено новое скалярное поле

$$\phi = c_0^2 \ln(\rho/\bar{\rho}) \quad (1.9)$$

а $f_i = f_i(x)$ является плотностью внешней силы (приходящейся на единицу массы).

В стохастической формулировке задачи внешнюю силу следует понимать как случайное внешнее поле, моделирующее поступление в систему энергии, полученной при перемешивании на больших масштабах. Принято считать, что детали её статистики не важны, так что распределение будем считать Гауссовым с нулевым средним, не коррелированным по времени (для галилеевой симметрии), и включающим в себя некоторый типичный ИК масштаб L (интегральный масштаб). С другой стороны, для использования стандартной техники РГ важно, чтобы её корреляционная функция при больших значениях аргумента убывала степенным образом. Более детальные рассуждения можно найти в [42, 43, 79]. В настоящей работе корреляционная функция выбрана следующим образом [64]

$$\langle f_i(x) f_j(x') \rangle = \delta(t - t') \int_{k>m} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} D_{ij}^f(\mathbf{k}) \exp\{i\mathbf{k}\mathbf{x}\}, \quad (1.10)$$

где

$$D_{ij}^f(\mathbf{k}) = g_0 \nu_0^3 k^{4-d-y} \left[P_{ij}^\perp(\mathbf{k}) + \alpha P_{ij}^\parallel(\mathbf{k}) \right]. \quad (1.11)$$

Здесь $P_{ij}^\perp(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ и $P_{ij}^\parallel(\mathbf{k}) = k_i k_j / k^2$ – поперечный и продольный проекторы, $k = |\mathbf{k}|$ – волновое число, g_0 и α положительные параметры; множитель ν_0^3 выделен для удобства. Параметр $m = L^{-1}$ обеспечивает ИК регуляризацию; её точная форма несущественна и для простоты вычислений будем использовать резкую "отсечку". Величина $0 < y \leq 4$ играет роль, подобную $\varepsilon = 4 - d$ в РГ теории критического поведения [41, 80]: это обеспечивает УФ регуляризацию (так что УФ расходимости являются полюсами по y), и координаты устойчивых точек, и различные параметры

вычисляются как ряд по y . Наиболее реальное (физическое) значение достигается в пределе $y \rightarrow 4$, где функции в (1.11) могут быть рассмотрены (с надлежащим выбором амплитуды) как степенное представление функции $\delta(\mathbf{k})$: это соответствует идеальной картине: энергия вводится в систему на бесконечно больших масштабах.

1.2. Теоретико-полевая формулировка и правила Фейнмана

Согласно общей теореме [41, 80], стохастическая задача (1.7), (1.8), (1.10), (1.11), эквивалентна теоретико-полевой модели с удвоенным набором полей $\Phi = \{v'_i, \phi', v_i, \phi\}$ и функционалом действия

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\Phi) = & \frac{1}{2} v'_i D_{ik}^f v'_k + v'_i \left\{ -\nabla_t v_i + \nu_0 [\delta_{ik} \partial^2 - \partial_i \partial_k] v_k + u_0 \nu_0 \partial_i \partial_k v_k - \partial_i \phi \right\} + \\ & + \phi' \left[-\nabla_t \phi + v_0 \nu_0 \partial^2 \phi - c_0^2 (\partial_i v_i) \right], \end{aligned} \quad (1.12)$$

где D^f – корреляционная функция (1.10), (1.11). По повторяющимся значкам подразумевается суммирование, а по переменной $x = \{t, \mathbf{x}\}$ – интегрирование, например,

$$v'_i \nabla_t v_i = \int dt \int d\mathbf{x} v'_i(x) [\partial_t + v_k(x) \partial_k] v_i(x). \quad (1.13)$$

В выражении (1.12) мы перешли к новому безразмерному параметру $u_0 = \mu_0/\nu_0 > 0$ и ввели новый член $\phi' v_0 \nu_0 \partial^2 \phi$ с другим положительным безразмерным коэффициентом v_0 . Этот член не запрещён ни из соображений симметрии, ни из соображений размерности, поэтому он обязательно появится в процедуре ренормировки. С физической точки зрения, это соответствует переопределению связи между скоростью и импульсом [58]. С другой стороны, технически, этот член необходим для обеспечения мультипликативной ренормируемости теории (1.12), что позволяет легко получить

уравнение РГ. Можно изучать исходную модель (1.7), (1.8) без добавочного члена. Тогда уравнения РГ необходимо решать с исходным условием $v_0 = 0$. В ренормированных переменных это соответствует общей ситуации с ненулевым значением соответствующего перенормированного параметра. Поскольку ИК притягивающая точка всего одна (см. ниже), начальное условие не является существенным.

Теоретико-полевая формулировка подразумевает, что различные корреляционные функции исходной стохастической задачи представляются в виде функциональных средних по всему набору полей с весом $\exp \mathcal{S}(\Phi)$. Поэтому они могут быть рассмотрены, как функции Грина полевой модели для действия (1.12). Эта модель соответствует стандартной фейнмановской диаграммной технике с двумя вершинами: $-v'(v\partial)v$ и $-\phi'(v\partial)\phi$; и свободными пропагаторами, которые определяются квадратичной частью действия; в импульсно-частотном $(\mathbf{k}-\omega)$ представлении, они выглядят так:

$$\begin{aligned}
\langle vv' \rangle_0 &= \langle v'v \rangle_0^* = P^\perp \epsilon_1^{-1} + P^\parallel \epsilon_3 R^{-1}, \\
\langle vv \rangle_0 &= P^\perp \frac{d^f}{|\epsilon_1|^2} + P^\parallel \alpha d^f \left| \frac{\epsilon_3}{R} \right|^2, \\
\langle \phi v' \rangle_0 &= \langle v' \phi \rangle_0^* = -\frac{i c_0^2 \mathbf{k}}{R}, \quad \langle v \phi' \rangle_0 = \langle \phi' v \rangle_0^* = \frac{i \mathbf{k}}{R}, \\
\langle \phi \phi' \rangle_0 &= \langle \phi' \phi \rangle_0^* = \frac{\epsilon_2}{R}, \quad \langle \phi \phi \rangle_0 = \frac{\alpha c_0^4 k^2 d^f}{|R|^2}, \\
\langle v \phi \rangle_0 &= \langle \phi v \rangle_0^* = \frac{i \alpha c_0^2 d^f \epsilon_3 \mathbf{k}}{|R|^2}, \\
\langle \phi' \phi' \rangle_0 &= \langle v' \phi' \rangle_0 = \langle v' v' \rangle_0 = 0,
\end{aligned} \tag{1.14}$$

где мы ввели обозначения

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= -i\omega + \nu_0 k^2, \quad \epsilon_2 = -i\omega + u_0 \nu_0 k^2, \quad \epsilon_3 = -i\omega + v_0 \nu_0 k^2, \\
R &= \epsilon_2 \epsilon_3 + c_0^2 k^2, \quad d^f = g_0 \nu_0^3 k^{4-d-y}
\end{aligned} \tag{1.15}$$

и опустили тензорные значки полей и проекторов.

В пределе $c_0 \rightarrow \infty$, пропагаторы $\langle vv' \rangle_0$ и $\langle vv \rangle_0$ становятся чисто поперечными, в то время как пропагатор $\langle v\phi \rangle_0$ исчезает. Это значит, что скалярное поле ϕ перестаёт быть связанным с v, v' (оно не входит в вершину в (1.7)). В итоге мы приходим к хорошо известным правилам Фейнмана для несжимаемой жидкости [41–43].

1.3. УФ расходимости, ренормировка и мультипликативная ренормируемость

Изучение УФ расходимостей основано на анализе канонических размерностей, в чём можно убедиться, заглянув в [41, 80]. У динамических моделей типа (1.12) есть две независимые шкалы: временная T и пространственная L . Поэтому каноническая размерность любой величины F (поле или параметр) описывается двумя числами (частотной размерностью d_F^ω и импульсной d_F^k) и определяется так: $[F] \sim [T]^{-d_F^\omega} [L]^{-d_F^k}$. Исходя из определения, легко понять, что:

$$d_k^k = -d_{\mathbf{x}}^k = 1, \quad d_k^\omega = d_{\mathbf{x}}^\omega = 0, \quad d_\omega^k = d_t^k = 0, \quad d_\omega^\omega = -d_t^\omega = 1. \quad (1.16)$$

Другие размерности находятся из того соображения, что каждое слагаемое действия безразмерно (отдельно для импульсной и частотной размерностей). Далее можно ввести полную каноническую размерность:

$$d_F = d_F^k + 2d_F^\omega, \quad (1.17)$$

которая в нашей теории ренормировок для динамических моделей играет такую же роль, как и обычная размерность в статистических задачах.

Канонические размерности модели (1.12) представлены в таблице 1.1. В таблицу не включены ренормированные параметры (без индекса “о”), но уже сейчас можно сказать, что их канонические размерности будут такими же, как у неренормированных аналогов.

Таблица 1.1. Канонические размерности полей и параметров для модели (1.12), (2.4), (2.5), (2.8).

F	v'	v	ϕ'	ϕ	θ'	θ	m, μ, Λ	ν_0	c_0	g_0	u_0, v_0, w_0, α
d_F^k	$d + 1$	-1	$d + 2$	-2	d	0	1	-2	-1	y	0
d_F^ω	-1	1	-2	2	$1/2$	$-1/2$	0	1	1	0	0
d_F	$d - 1$	1	$d - 2$	2	$d + 1$	-1	1	0	1	y	0

Выбор выражения (1.17) для полной канонической размерности стоит пояснить более подробно. Коэффициенты вязкости и диффузии для нашей модели безразмерны (в смысле полной канонической размерности), а временные и пространственные переменные измеряются в одних и тех же единицах; см. [41, 80]. Заметим, что для релятивистской системы единиц $c = 1$ все расстояния измеряются во временных единицах (световых годах). Здесь мы вводим полную размерность именно таким образом (1.17), потому что закон дисперсии диффузного режима такой: $\omega \sim k^2$. Как бы то ни было, в нашей модели другой закон дисперсии: $\omega \sim k$, связанный со звуковой модой. Если положить размерность скорости звука c_0 равной нулю, выбор полной размерности должен быть такой: $d_F = d_F^k + d_F^\omega$.

Выбор (1.17) подразумевает, что мы заинтересованы в асимптотическом поведении функций Грина, при $\omega \sim k^2 \rightarrow 0$; РГ обработка преобразует выражение к колмогоровскому закону $\omega \sim k^{2/3} \rightarrow 0$ (увидим ниже).

Именно так выбирали полную каноническую размерность в моделях несжимаемой жидкости (где такой выбор является единственно возможным, потому что скорость звука устремляется к бесконечности). Альтернативный вариант $d_F = d_F^k + d_F^\omega$ значил бы, что мы заинтересованы в асимптотическом поведении (тех же) функций Грина при $\omega \sim k \rightarrow 0$ (звуковые режимы в турбулентной среде); этот вопрос, конечно, крайне интересен, но до сих пор не доступен для РГ рассмотрения и в данной работе обсуждаться не будет.

Из таблицы 1.1 следует, что модель становится логарифмичной (константа связи $g_0 \sim L^{-y}$ становится безразмерной) при $y = 0$, так что УФ расходимости имеют вид полюсов по y в функциях Грина. Полная каноническая размерность 1-неприводимой функции Грина Γ (формальный индекс УФ расходимости):

$$\delta_\Gamma = d + 2 - \sum_{\Phi} N_\Phi d_\Phi, \quad (1.18)$$

где N_Φ - число полей, входящих в функцию Γ , d_Φ - их канонические размерности. Суммирование по всем типам полей Φ подразумевается. Поверхностные УФ расходимости, устранение которых подразумевает введение контрчленов, могут присутствовать только в функциях Γ с неотрицательным целым δ_Γ . Контрчлены представляют из себя полиномы по частотам и импульсам степени δ_Γ , с соглашением: $\omega \sim k^2$.

Размерный анализ модели (1.12) должен быть дополнен следующими соображениями [64]:

(i) Все 1-неприводимые функции Грина, не содержащие полей отклика ($N_{\nu'} = N_{\phi'} = 0$), включают диаграммы с замкнутым циклом запаз-

дывающих пропагаторов. И поэтому они тождественно равны нулю и не требуют контрчленов [41].

(ii) Если по какой-то причине число внешних импульсов входит как общий множитель во все диаграммы заданной функции Грина, реальный индекс расходимости δ'_Γ меньше, чем δ_Γ на соответствующее число [41, 43]. В модели (1.12) поле ϕ входит в вершину $\phi'(v\partial)\phi$ только в виде пространственной производной, что снижает реальный индекс расходимости:

$$\delta'_\Gamma = \delta_\Gamma - N_\phi. \quad (1.19)$$

От поля ϕ контрчлены могут появиться только в виде производной $\partial\phi$. В частности, для 1-неприводимой функции $\langle\phi'\phi\rangle_{1-\text{ir}}$ получим $\delta_\Gamma = 2$, $\delta'_\Gamma = 0$. Поэтому контрчлен $\phi'\partial_t\phi$, хотя и разрешён анализом размерностей, на самом деле запрещён. И единственная возможная структура такая: $\phi'\Delta\phi$.

(iii) Галилеева инвариантность модели (1.12) подразумевает, что вклады от контрчленов тоже инвариантны. В частности, это значит, что ковариантная производная (1.2) входит в контрчлены как одно целое. Как следствие, контрчлен, требующийся для 1-неприводимой функции $\langle\phi'v\phi\rangle_{1-\text{ir}}$, где $\delta_\Gamma = 1$, $\delta'_\Gamma = 0$, обязан иметь форму $\phi'(v\partial)\phi$ и появляется в комбинации $\phi'\nabla_t\phi$ с контрчленом $\phi'\partial_t\phi$, который обсуждался выше. Поэтому он также запрещён.

Расходимости в функциях $\langle v'v \rangle_{1-\text{ir}}$, где $\delta_\Gamma = 2$ и $\langle v'vv \rangle_{1-\text{ir}}$, где $\delta_\Gamma = 1$ могут быть устранены двумя контрчленами: $v'\partial^2v$ и комбинацией $v'\nabla_tv$. На самом деле, последний тоже запрещён, благодаря *обобщённой* галилеевой инвариантности с зависящим от времени параметром скорости $\mathbf{w}(t)$ [81, 82]:

$$\mathbf{v}_w(x) = \mathbf{v}(x_w) - \mathbf{w}(t), \quad \Phi_w(x) = \Phi(x_w),$$

$$x = \{t, \mathbf{x}\}, \quad x_w = \{t, \mathbf{x} + \mathbf{u}(t)\}, \quad \mathbf{u}(t) = \int^t \mathbf{w}(t') dt'. \quad (1.20)$$

Φ означает 3 поля v', ϕ', ϕ . Функционал действия *не* инвариантен относительно таких трансформаций: $\mathcal{S}(\Phi_v) = \mathcal{S}(\Phi) + v' \partial_t w$. Можно показать, как бы то ни было, что производящий функционал 1-неприводимой функции Грина изменяется также, $\Gamma(\Phi_v) = \Gamma(\Phi) + v' \partial_t w$. Поскольку в общем случае $\Gamma(\Phi) = \mathcal{S}(\Phi)$ плюс диаграммы с петлями (которые содержат УФ расходимости), контрчлены должны быть инвариантными относительно (1.20). Это исключает контрчлен $v' \nabla_t v$, инвариантный относительно обычных преобразований Галилея с постоянной \mathbf{w} , но не инвариантный относительно (1.20). Более детальное обсуждение использования обобщенной галилеевой инвариантности, особенно для составных полей, можно найти в [41, 43, 82].

(iv) Выражения (1.14) показывают, что пропагаторы $\langle v' \phi \rangle_0$ и $\langle v \phi \rangle_0$ содержат множитель c_0^2 , а $\langle v' \phi \rangle_0$ содержит c_0^4 . Эти множители появляются как дополнительные числовые множители в любой диаграмме, содержащей эти пропагаторы. И их реальный индекс расходимости уменьшается на соответствующее число единиц. В частности, любая диаграмма 1-неприводимой функции с $N_{\phi'} > N_{\phi}$ содержит множитель $c_0^{2(N_{\phi'} - N_{\phi})}$. Отсюда следует, что контрчлен к 1-неприводимой функции $\langle \phi' v \rangle_{1-\text{ir}}$, где $\delta_{\Gamma} = 3$ обязательно сводится к $c_0^2 \phi'(\partial v)$, тогда как слагаемые $\phi' \partial^2(\partial v)$ и *т.п.* запрещены. Другое следствие - это конечность функции $\langle \phi' v v \rangle_{1-\text{ir}}$, у которой $\delta_{\Gamma} = 2$. Каждая диаграмма этой функции содержит множитель c_0^2 , который запрещает контрчлены типа $\phi'(\partial v)(\partial v)$ и т.п., а оставшаяся конструкция $c_0^2 \phi' v^2$ запрещена галилеевой симметрией.

С учётом всех этих соображений, ясно, что все УФ расходимости в модели (1.12) устраняются контрчленами:

$$v'_i \partial^2 v_i, \quad v'_i \partial_i \partial_k v_k, \quad v'_i \partial_i \phi, \quad c_0^2 \phi' \partial_i v_i, \quad \phi' \partial^2 \phi. \quad (1.21)$$

Все эти конструкции есть в расширенном функционале действия (1.12), где $v_0 > 0$, так что модель мультипликативно ренормируема.

Как и для несжимаемого случая [83], в функции $\langle v'v' \rangle_{1\text{-ir}}$ для $d = 2$ появляется новая УФ расходимость, и надо включить новый контрчлен $v' \partial^2 v'$. Этот случай требует отдельного рассмотрения, и в дальнейшем мы предполагаем $d > 2$. Тогда ренормированный функционал действия имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^R(\Phi) = & \frac{1}{2} v'_i D_{ik}^f v'_k + \phi' [-\nabla_t \phi + Z_3 v \nu \partial^2 \phi - Z_5 c^2 (\partial_i v_i)] \\ & + v'_i \{ -\nabla_t v_i + Z_1 \nu [\delta_{ik} \partial^2 - \partial_i \partial_k] v_k + Z_2 u \nu \partial_i \partial_k v_k - Z_4 \partial_i \phi \} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Здесь g, ν, u, v, c - это ренормированные изначальные параметры (с индексом “о”), функция D^f выражена в ренормированных параметрах с использованием соотношения $g_0 \nu_0^3 = g \mu^y \nu^3$, “нормированная масса” μ - это дополнительный свободный параметр ренормированной теории; константы ренормировки Z_i зависят только от полностью безразмерных параметров g, u, v, α, d, y . Ренормированное действие (1.22) получено из начального (1.12) ренормировкой полей $\phi \rightarrow Z_\phi \phi$, $\phi' \rightarrow Z_{\phi'} \phi'$ и параметров

$$g_0 = g \mu^y Z_g, \quad \nu_0 = \nu Z_\nu, \quad u_0 = u Z_u, \quad v_0 = v Z_v, \quad c_0 = c Z_c. \quad (1.23)$$

Ренормированные постоянные в (1.22) и (1.23) связаны так:

$$Z_\nu = Z_1, \quad Z_u = Z_2 Z_1^{-1}, \quad Z_v = Z_3 Z_1^{-1},$$

$$Z_\phi = Z_{\phi'}^{-1} = Z_4, \quad Z_c = (Z_4 Z_5)^{1/2}, \quad Z_g = Z_\nu^{-3}. \quad (1.24)$$

Последнее соотношение следует из отсутствия ренормировки нелокального члена в случайной силе в (1.22); по такой же причине параметры m, α из корреляционной функции (1.10) не ренормированы: $Z_m = Z_\alpha = 1$. Для полей v, v' не требуется ренормировка: $Z_v = Z_{v'} = 1$ поскольку отсутствует ренормировка члена $v' \nabla_t v$.

Константы ренормировки находятся из того соображения, что функции Грина ренормированной модели (1.22), выраженные через ренормированные переменные, должны быть УФ конечны (в нашем случае конечны в пределе $y \rightarrow 0$). В схеме минимальных вычитаний (МВ), которая всегда используется в дальнейшем, они имеют форму “ $Z = 1 +$ только полюса по y ”. Расчёт в первом порядке по g (одно-петлевое приближение) даёт [64]

$$\begin{aligned} Z_1 &= 1 + \frac{\hat{g}}{y} A, & Z_2 &= 1 + \frac{\hat{g}}{uy} B, \\ Z_3 &= 1 + \frac{\hat{g}}{y} \frac{(d-1)}{2dv(v+1)} - \frac{\alpha \hat{g}}{y} \frac{(u-v)}{2duv(u+v)^2}, \\ Z_4 &= 1 + \frac{\hat{g}}{y} \frac{(d-1)}{2d(u+1)(v+1)}, & Z_5 &= 1, \end{aligned} \quad (1.25)$$

с поправками порядка \hat{g}^2 и выше. Здесь мы перешли к новой константе связи

$$\hat{g} = g S_d / (2\pi)^d, \quad (1.26)$$

где

$$S_d = 2\pi^{d/2} / \Gamma(d/2) \quad (1.27)$$

это площадь поверхности единичной сферы в d -мерном пространстве, $\Gamma(\dots)$

это гамма функция Эйлера, и введены обозначения

$$\begin{aligned} A &= \frac{d(d-1)u^2 - 2(d^2 + d - 4)u - d(d+3)}{4d(d+2)(1+u)^2} + \frac{\alpha(1-u)}{2du(1+u)^2}, \\ B &= (1-d) \frac{(d-1)u^2 + (d+4)u + 1}{2d(d+2)(1+u)^2}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Далее следует одна важная техническая ремарка. Константы ренормировки в схеме минимальных вычитаний не зависят от размерного параметра c_0 . С другой стороны, все пропагаторы (1.14), и, как следствие, все диаграммы Фейнмана, имеют хорошо определённый предел при $c_0 \rightarrow 0$. Поэтому в расчёте постоянных Z_1-Z_4 можно положить $c_0 = 0$ в (1.14) и (1.15). Тогда пропагаторы $\langle \phi v' \rangle_0$, $\langle v \phi \rangle_0$, $\langle \phi \phi \rangle_0$ исчезают, тогда как форма остальных существенно упрощается. В расчёте постоянной Z_5 перед членом $c_0^2 \phi'(\partial v)$ достаточно учитывать только диаграммы с одним из двух пропагаторов: $\langle \phi v' \rangle_0$ или $\langle v \phi \rangle_0$. Тогда нужный c_0^2 появляется как дополнительный множитель, и в оставшемся выражении можно положить $c_0 = 0$. Простое выражение $Z_5 = 1$ получается из-за взаимного сокращения нетривиальных вкладов трёх диаграмм Фейнмана; мы не видим никаких оснований полагать, что это справедливо во всех порядках по g .

Чтобы избежать возможных недоразумений, мы подчёркиваем, что мы заинтересованы в расчёте с конечным и произвольным c_0 , и что трудоёмкий расчёт с пропагаторами (1.14) дал бы те же результаты (1.25), (4.94) для констант ренормировки.

1.4. Уравнения РГ и РГ функции

Вспомним простой вывод уравнений РГ; более детально этот вопрос обсуждается в [41, 80]. Уравнения РГ написаны для ренормированных кор-

реляционных функций $G_R = \langle \Phi \cdots \Phi \rangle_R$, которые отличаются от исходных (не ренормированных) $G = \langle \Phi \cdots \Phi \rangle$ только нормировкой и выбором параметров. Поэтому их можно использовать для анализа критического поведения. Связь $\mathcal{S}_R(\Phi, e, \mu) = \mathcal{S}_R(\Phi, e_0)$ между функционалами (1.12) и (1.22) приводит к соотношениям

$$G(e_0, \dots) = Z_\phi^{N_\phi} Z_{\phi'}^{N_{\phi'}} G_R(e, \mu, \dots) \quad (1.29)$$

между корреляционными функциями. Где, как обычно, N_ϕ и $N_{\phi'}$ число соответствующих полей, входящих в Γ (здесь использовано соотношение $Z_v = Z_{v'} = 1$); $e_0 = \{\nu_0, g_0, u_0, v_0\}$ - полный набор исходных (не ренормированных) параметров и $e = \{\nu, g, u, v\}$ - их ренормированные аналоги; зависимость от других аргументов явно не указана (время, координаты, импульсы и т. д.).

Мы используем обозначение $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$ для дифференциальной операции $\mu \partial_\mu$ для фиксированного e_0 и действуем ей на обе части уравнения (1.29). Получаем дифференциальные уравнения РГ:

$$\{\mathcal{D}_{RG} + N_\phi \gamma_\phi + N_{\phi'} \gamma_{\phi'}\} G^R(e, \mu, \dots) = 0, \quad (1.30)$$

где \mathcal{D}_{RG} - операция $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$, выраженная через ренормированные переменные:

$$\mathcal{D}_{RG} = \mathcal{D}_\mu + \beta_g \partial_g + \beta_u \partial_u + \beta_v \partial_v - \gamma_\nu \mathcal{D}_\nu - \gamma_c \mathcal{D}_c. \quad (1.31)$$

Используется обозначение $\mathcal{D}_x \equiv x \partial_x$. Аномальная размерность γ_F соответствующей величины F (поле или параметр) определяется так:

$$\gamma_F = Z_F^{-1} \tilde{\mathcal{D}}_\mu Z_F = \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_F, \quad (1.32)$$

и β функции для трёх безразмерных констант связи g , u и v такие:

$$\beta_g = \tilde{\mathcal{D}}_\mu g = g[-y - \gamma_g], \quad \beta_u = \tilde{\mathcal{D}}_\mu u = -u \gamma_u, \quad \beta_v = \tilde{\mathcal{D}}_\mu v = -v \gamma_v, \quad (1.33)$$

где вторые знаки равенства обуславливаются соотношениями (1.29).

Исходя из (1.24), получаем:

$$\beta_g = g[-y + 3\gamma_1], \quad \beta_u = u[\gamma_1 - \gamma_2], \quad \beta_v = v[\gamma_2 - \gamma_3], \quad (1.34)$$

откуда для аномальных размерностей получаем:

$$\begin{aligned} \gamma_\phi = -\gamma_{\phi'} = \gamma_4, \quad \gamma_c = (\gamma_4 + \gamma_5)/2, \quad \gamma_\nu = \gamma_1, \\ \gamma_v = \gamma_{v'} = \gamma_\alpha = \gamma_m = 0. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Соотношения во второй строчке следуют из отсутствия ренормировки соответствующих полей и параметров; см. замечания к уравнению (1.24).

В схеме минимальных вычитаний все константы ренормировки имеют вид:

$$Z_F = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^{(n)} y^{-n}, \quad (1.36)$$

где коэффициенты $z^{(n)}$ не зависят от y . Тогда из определения и выражений (1.33) следует, что соответствующие аномальные размерности определяются коэффициентом при первом порядке:

$$\gamma_F = -\mathcal{D}_g z^{(1)}, \quad (1.37)$$

более подробно обсуждение этого вопроса можно найти в [41, 80]. Тогда в однопетлевом приближении из явных выражений (1.25) можно найти:

$$\begin{aligned} \gamma_1 = -A\hat{g}, \quad \gamma_1 = -B\hat{g}/u, \\ \gamma_3 = \hat{g} \frac{(d-1)}{2dv(v+1)} + \alpha\hat{g} \frac{(u-v)}{2duv(u+v)^2}, \\ \gamma_4 = \hat{g} \frac{(1-d)}{2d(u+1)(v+1)}, \quad \gamma_5 = 0 \end{aligned} \quad (1.38)$$

где A и B определяются в (4.94), выражение для \hat{g} можно найти в (1.26). Поправки порядка \hat{g}^2 и выше опущены.

1.5. ИК притягивающая неподвижная точка

Хорошо известно, что возможные режимы ИК асимптотики ренормируемой модели теории поля связаны с ИК притягивающими неподвижными точками соответствующих уравнений РГ. Координаты g_* точки найдены из уравнений

$$\beta_i(g_*) = 0, \quad (1.39)$$

где $g = \{g_i\}$ – полный набор констант связи, а β_i – соответствующие β функции. Тип неподвижной точки определяется матрицей

$$\Omega_{ij} = \partial\beta_i/\partial g_j|_{g=g_*}. \quad (1.40)$$

Для ИК устойчивых точек матрица Ω положительно определена, (вещественные части всех их собственных чисел положительны).

Для нашей модели $g = \{\hat{g}, u, w\}$ и β -функции заданы соотношениями (1.33); явные однопетлевые выражения: (1.38). Мы не включаем безразмерный параметр α в список констант связи, потому что он не ренормируется ($\alpha_0 = \alpha$, то есть $Z_\alpha = 1$), а соответствующая функция $\beta_\alpha = -\alpha\gamma_\alpha$ тождественно равна нулю. Поэтому уравнение $\beta_\alpha = 0$ не накладывает никаких ограничений на значение α , и этот параметр остаётся свободным.

Анализируя выражения (1.33), (1.38) и (4.94), легко понять, что в физической области параметров ($\hat{g}, u, v, \alpha > 0$) есть только одна ИК притягивающая неподвижная точка с координатами:

$$\hat{g}_* = \frac{4dy}{3(d-1)}, \quad u_* = v_* = 1, \quad (1.41)$$

с возможными поправками высших порядков по y .

Кратко объясним вывод (1.41). Любая ИК неподвижная точка с $\hat{g}_* = 0$ не может быть ИК притягивающей, потому что одно из собственных значений матрицы Ω совпадает с диагональным элементом $\partial_g \beta_g = -y < 0$. Для $\hat{g}_* \neq 0$ из уравнения $\beta_g = 0$ мы получаем соотношение $\gamma_1^* = \gamma_v^* = y/3$, во всех порядках по y (здесь и далее $\gamma_F^* = \gamma_F(g_*)$ для любого F это значение аномальной размерности в неподвижной точке). Учитывая это соотношение в $\beta_u = 0$, получаем уравнение на u_* с единственным положительным решением $u_* = 1$.

Подстановка в уравнение $\beta_g = 0$ дает значение \hat{g}_* (здесь важно, что функции β_g и β_u в однопетлевом приближении не зависят от v). Наконец, подстановка известных значений \hat{g}_* и u_* в соотношение $\beta_v = 0$ приводит к уравнению на v_* , имеющему только одно положительное решение $v_* = 1$. Теперь легко видеть, что матрица (1.40) в неподвижной точке (1.41) является треугольной, поэтому ее собственные числа совпадают с диагональными элементами и могут быть легко получены из явных выражений (1.38). Эти числа являются положительными при всех $y > 0$, $\alpha > 0$ и $d > 2$.

Кроме того, стоит заметить, что так называемые “РГ потоки” (решения РГ уравнений для РГ-инвариантных “бегущих” констант связи) не могут выходить за пределы “физической” области $\hat{g}, u, v > 0$ (при осмысленных начальных данных). Это следует из того факта, что все β -функции зануляются при $g = 0$, а функции β_u и β_v отрицательны при $u = 0$ и $v = 0$ соответственно:

$$\beta_u|_{u=0} = -\hat{g} \frac{(d-1)}{2d(d+2)}, \quad \beta_v|_{v=0} = -\hat{g} \left\{ \frac{(d-1)}{2d} + \frac{1}{du^2} \right\}.$$

Это приводит к тому, что ИК асимптотическое поведение функции Грина

в данной модели может быть описано только неподвижной точкой (1.41): даже если и существуют какие-то другие неподвижные точки в нефизичной области, они не могут быть достигнуты РГ потоком (более детально см. [64]).

1.6. ИК поведение и критические размерности

Из решения уравнения РГ (1.30) следует, что, когда ИК неподвижная точка существует, главный член ИК асимптотического поведения функции Грина G^R удовлетворяет уравнению (1.30) с учётом замены $g \rightarrow g_*$ для полного набора констант связи; см. монографию [41]. Для нашего случая это условие приводит к уравнению:

$$\left\{ \mathcal{D}_\mu - \gamma_\nu^* \mathcal{D}_\nu - \gamma_c^* \mathcal{D}_c + \sum_{\Phi} N_{\Phi} \gamma_{\Phi}^* \right\} G^R = 0. \quad (1.42)$$

Вспомним, что $\mathcal{D}_x \equiv x \partial_x$ для любой переменной x , γ_F^* – значение γ_F в неподвижной точке. Также подразумевается сумма по всем типам полей Φ . В однопетлевом приближении, исходя из (1.38) и (1.41) легко получить:

$$\gamma_\nu^* = y/3 \text{ (точно)}, \quad \gamma_\phi^* = -\gamma_{\phi'}^* = -y/6 + O(y^2), \quad \gamma_c^* = -y/12 + O(y^2). \quad (1.43)$$

Каноническая масштабная инвариантность выражается двумя уравнениями

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_F d_F^k \mathcal{D}_F - d_G^k \right\} G^R &= 0, \\ \left\{ \sum_F d_F^\omega \mathcal{D}_F - d_G^\omega \right\} G^R &= 0, \end{aligned} \quad (1.44)$$

суммирование по всем аргументам функции G^R подразумевается. Из таб-

лицы 1.1 легко получить

$$\left\{ -\mathcal{D}_x + \mathcal{D}_\mu + \mathcal{D}_m - 2\mathcal{D}_\nu - \mathcal{D}_c - \sum_{\Phi} N_{\Phi} d_{\Phi}^k \right\} G^R = 0,$$

$$\left\{ -\mathcal{D}_t + \mathcal{D}_\nu + \mathcal{D}_c - \sum_{\Phi} N_{\Phi} d_{\Phi}^{\omega} \right\} G^R = 0, \quad (1.45)$$

где размерности полей $d_{\Phi}^{k,\omega}$ тоже можно увидеть в таблице. Уравнения (1.42), (1.45) описывают скейлинг с растяжением переменных, производные которых входят в дифференциальный оператор. Нас интересует скейлинг с фиксированными “ИК несущественными” параметрами μ и ν ; см. [41–43]. Чтобы получить соответствующее уравнение масштабирования, объединим (1.42), (1.45). Таким образом, устраняются производные по этим параметрам; тогда:

$$\left\{ -\mathcal{D}_x + \Delta_t \mathcal{D}_t + \Delta_c \mathcal{D}_c + \Delta_m \mathcal{D}_m - \sum_{\Phi} N_{\Phi} \Delta_{\Phi} \right\} G^R = 0 \quad (1.46)$$

а также

$$\Delta_F = d_F^k + \Delta_{\omega} d_F^{\omega} + \gamma_F^*, \quad \Delta_{\omega} = -\Delta_t = 2 - \gamma_{\nu}^*. \quad (1.47)$$

Где Δ_F – критическая размерность величины F (как и в [41–43], мы используем этот термин, чтобы отличать эти величины от канонических размерностей), Δ_t и Δ_{ω} – критические размерности времени и частоты.

Из таблицы 1.1 и выражений (1.43) легко получить

$$\Delta_v = 1 - y/3, \quad \Delta_{v'} = d - \Delta_v, \quad \Delta_{\omega} = 2 - y/3, \quad \Delta_m = 1 \quad (1.48)$$

(результаты точные, поскольку $\gamma_{\nu}^* = y/3$ и $\gamma_{v',v',m}^* = 0$) а также

$$\Delta_{\phi} = d - \Delta_{\phi'} = 2 - 5y/6 + O(y^2), \quad \Delta_c = 1 - 5y/12 + O(y^2). \quad (1.49)$$

Заметим, что аналоги выражениям (1.48), (1.49) в статье [64] содержат некоторые опечатки.

Удивительно, но все результаты (1.41), (1.43), (1.48), (1.49) не зависят от α (а некоторые не зависят даже от d). Они действительны для всех $\alpha > 0$, но случай $\alpha \rightarrow \infty$ (чисто потенциальной случайной силы) требует особого внимания. Для его изучения надо перейти к новым константам связи $g' = g\alpha$, $b = 1/\alpha$ и затем положить $b = 0$ для конечной g' . Тогда получим:

$$\beta_{g'} = -yg', \quad \beta_u = g' \frac{(u-1)}{2du(1+u)^2}, \quad \beta_v = g' \frac{(v-u)}{du(u+v)^2}. \quad (1.50)$$

У системы (1.50) нет ИК притягивающей неподвижной точки, потому что уравнение $\beta_{g'} = 0$ имеет единственное решение $g' = 0$, а такая точка не может быть ИК притягивающей, потому что $\partial_{g'}\beta_{g'} = -y < 0$. В принципе, нужная неподвижная точка с $g'_* \sim y^{1/2}$ может появиться в двухпетлевом приближении, если член порядка $(g')^3$ появится в $\beta_{g'}$. Тогда результаты (1.48) остаются в силе, тогда как (1.49) следует пересмотреть.

2. Пассивные скалярные поля: ренормировка, РГ функции и неподвижная точка

2.1. Модели и их теоретико-полевые формулировки

Существует две основные задачи конвекции-диффузии для сжимаемого поля [58]. Пассивный перенос поля плотности $\theta(x) \equiv \theta(t, \mathbf{x})$ (например, плотности примеси) описывается уравнением:

$$\partial_t \theta + \partial_i (v_i \theta) = \kappa_0 \partial^2 \theta + f, \quad (2.1)$$

а перенос “трейсера” (температуры, удельной энтропии или концентрации частиц примеси) описывается уравнением:

$$\partial_t \theta + (v_i \partial_i) \theta = \kappa_0 \partial^2 \theta + f. \quad (2.2)$$

Здесь $\partial_t \equiv \partial/\partial t$, $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$, κ_0 – молекулярные коэффициенты диффузии, $\partial^2 = \partial_i \partial_i$ – оператор Лапласа, $\mathbf{v}(x)$ – поле скорости и $f \equiv f(x)$ – гауссовый шум с нулевым средним и заданным коррелятором,

$$\langle f(x) f(x') \rangle = \delta(t - t') C(\mathbf{r}/L), \quad \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}', \quad (2.3)$$

$C(\mathbf{r}/L)$ – некоторая функция, конечная при $(\mathbf{r}/L) \rightarrow 0$ и быстро убывающая при $(\mathbf{r}/L) \rightarrow \infty$. В дальнейшем мы не будем различать интегральный масштаб L , относящийся к шуму, и его аналог $L = m^{-1}$ в корреляционной функции перемешивающей силы (1.11). Не умаляя общности, положим $C(0) = 1$ (коэффициент можно убрать перемасштабированием θ и f). Шум

нужно понимать как "заменитель" начальных и/или граничных условий: он поддерживает стационарное состояние системы (корреляционные функции не зависят от времени) и служит в качестве источника крупномасштабной анизотропии. (Последний термин означает, что анизотропия вводится на масштабах порядка L , в то время как статистика поля скорости остаётся изотропной. Случай анизотропной статистики скорости обсуждается (в приближении $PG + OP$) в [84].) В более реалистичной формулировке шум может возникать вследствие введённого линейного градиента поля (температуры). Однако, оказывается, что конкретный вид случайного перемешивания не важен, и в будущем мы используем искусственный шум в корреляционной функции (2.3).

В отсутствие шума уравнение (2.1) имеет вид уравнения неразрывности (закона сохранения); причём θ является плотностью соответствующей сохраняющейся величины. Для модели (2.2), сохраняется вспомогательное поле (отклика) θ' , которое появляется в теоретико-полевой постановке задачи; увидим это ниже. Если функция в (2.3) выбрана так, что её Фурье-образ $C(\mathbf{k})$ исчезает при $\mathbf{k} = 0$, поля θ или θ' сохраняются только в статистическом смысле, в присутствии внешнего шума.

Задачи (2.1) и (2.2) тщательно изучены для случая модели Крейчана [49–54, 85]; случай гауссовой статистики скорости с конечным временем корреляции изучен в работе [56].

Стохастические задачи (2.1), (2.3) эквивалентны полевой модели для удвоенного набора полей $\Phi \equiv \{\theta', \theta, v', v, \phi', \phi\}$ с функционалом действия

$$\mathcal{S}_\Phi(\Phi) = \mathcal{S}_\theta(\theta', \theta, v) + \mathcal{S}(v', v, \phi', \phi), \quad (2.4)$$

где

$$\mathcal{S}_\theta(\theta', \theta, v) = \frac{1}{2}\theta' D_f \theta' + \theta' \{-\partial_t \theta - \partial_i(v_i \theta) + \kappa_0 \partial^2 \theta\} \quad (2.5)$$

так называемое действие де Доминисиса-Янсена для стохастической задачи (2.1), (2.3) при фиксированном \mathbf{v} , а второй член задаётся с помощью (1.12) и “отвечает” за статистику скорости; D_f – корреляционная функция (2.3), и, как обычно, подразумеваются соответствующие интегрирования и суммирования по векторным индексам.

В дополнение к (1.14), диаграммная техника для полной задачи включает ещё два пропагатора

$$\langle \theta \theta' \rangle_0 = \langle \theta' \theta \rangle_0^* = \frac{1}{(-i\omega + \kappa_0 k^2)}, \quad \langle \theta \theta \rangle_0 = \frac{C(\mathbf{k})}{|-i\omega + \kappa_0 k^2|^2} \quad (2.6)$$

и новую вершину $-\theta' \partial_i(v_i \theta) = V_i \theta' v_i \theta$. В импульсном представлении вершинный множитель V_i в диаграммах имеет вид

$$V_i(\mathbf{k}) = i k_i, \quad (2.7)$$

где \mathbf{k} – импульс поля θ' (используя интегрирование по частям, производную в вершине можно “перебросить” на поле θ').

Задача (2.2) соответствует действию (2.4), где слагаемое \mathcal{S}_θ задаётся так:

$$\mathcal{S}_\theta(\theta', \theta, v) = \frac{1}{2}\theta' D_f \theta' + \theta' \{-\partial_t \theta - (v_i \partial_i) \theta + \kappa_0 \partial^2 \theta\}. \quad (2.8)$$

Новые пропагаторы задаются теми же выражениями (2.6), а вершинный множитель (2.7) необходимо изменить:

$$V_i(\mathbf{k}) = -i k_i, \quad (2.9)$$

где \mathbf{k} – импульс поля θ .

2.2. УФ расходимости, ренормировка и мультипликативная ренормируемость

Канонические размерности новых полей и параметров, которые появляются в моделях (2.4), (2.5), (2.8) приведены в таблице 1.1, где мы ввели новый безразмерный параметр $w_0 = \kappa_0/\nu_0$, с ν_0 из (1.1).

Теперь в выражении (1.18) для формального индекса УФ расходимости суммирование будет по полному набору полей $\Phi \equiv \{\theta', \theta, v', v, \phi', \phi\}$. Правила (i)-(iv) из раздела 1.3 надо обобщить и дополнить таким образом:

(i) Все 1-неприводимые функции Грина без полей отклика v', ϕ', θ' тождественно равны нулю и не порождают контрчленов.

(ii) В модели (2.8) поле θ входит в вершину $-\theta'(v_i\partial_i)\theta$ только в виде производной. Тогда выражение (1.19) для реального индекса расходимости необходимо изменить так:

$$\delta'_\Gamma = \delta_\Gamma - N_\phi - N_\theta. \quad (2.10)$$

В модели (2.5) производную в вершине $-\theta'\partial_i(v_i\theta)$ можно "перебросить" на поле θ' с помощью интегрирования по частям, и реальный индекс тогда:

$$\delta'_\Gamma = \delta_\Gamma - N_\phi - N_{\theta'}. \quad (2.11)$$

Поскольку поле θ в модели (2.8) и θ' в модели (2.8) может входить в контрчлены только в виде пространственной производной, контрчлен $\theta'\partial_i\theta$ для 1-неприводимой функции Грина $\langle\theta'\theta\rangle_{1\text{-ir}}$, где $\delta_\Gamma = 2$, $\delta'_\Gamma = 1$ запрещён для обеих моделей.

(iii) Другим следствием из (ii) является тот факт, что контрчлены к 1-неприводимой функции $\langle\theta'v\theta\rangle_{1\text{-ir}}$ при условиях $\delta_\Gamma = 1$, $\delta'_\Gamma = 0$ сводятся к

виду $\theta' \partial_i (v_i \theta)$ для модели (2.5) и $\theta' (v_i \partial_i) \theta$ для модели (2.8). Галилеева симметрия требует, однако, чтобы эти мономы входили в контрчлены только в виде инвариантных комбинаций $\theta' [\partial_t \theta + \partial_i (v_i \theta)]$ и $\theta' \nabla_t \theta$. Так что они тоже запрещены.

(iv) Из анализа диаграмм Фейнмана следует, что для любой 1-неприводимой функции $N_{\theta'} - N_\theta = 2N_0$, где N_0 – полное число затравочных пропагаторов $\langle \theta \theta \rangle_0$, входящих в диаграмму. На самом деле, нельзя составить диаграмму с $N_0 < 0$, так что разность $N_{\theta'} - N_\theta$ есть чётное неотрицательное число для любой нетривиальной функции Грина. Этот факт, являющийся следствием линейности изначальных стохастических уравнений (2.1), (2.2) по полю θ , является решающим для перенормируемости моделей (2.5) и (2.8). В самом деле, полная каноническая размерность $d_\theta = -1$ отрицательна (в отличие от большинства обычных теоретико-полевых моделей), поэтому индекс (2.11) растёт с ростом N_θ , тогда как (2.10) не зависит от N_θ . Без ограничения $N_\theta \leq N_{\theta'}$ мы бы столкнулись с поверхностной расходимостью функции $\langle \theta' \theta \dots \theta \rangle_{1\text{-ir}}$, и, как следствие, теория не была бы перенормируема.

Наконец, мы остались с лишь поверхностно расходящейся 1-неприводимой функцией Грина $\langle \theta' \theta \rangle_{1\text{-ir}}$ с единственным контрчленом $\theta' \partial^2 \theta$. Это, естественно, порождает мультипликативную ренормировку коэффициента диффузии: $\kappa_0 = \kappa Z_\kappa$. Не требуется никакой ренормировки полей θ' , θ : $Z_{\theta'} = Z_\theta = 1$. Ренормированный аналог функционала действия (2.5) имеет вид:

$$\mathcal{S}_\Phi^R(\Phi) = \mathcal{S}_\theta^R(\theta', \theta, v) + \mathcal{S}^R(v', v, \phi', \phi) \quad (2.12)$$

с \mathcal{S}^R из (1.22) и

$$\mathcal{S}_\theta^R(\theta', \theta, v) = \frac{1}{2} \theta' D_f \theta' + \theta' \{ -\partial_t \theta - \partial_i (v_i \theta) + \kappa Z_\kappa \partial^2 \theta \}, \quad (2.13)$$

а также для (2.8):

$$\mathcal{S}_\theta(\theta', \theta, v) = \frac{1}{2} \theta' D_f \theta' + \theta' \{ -\partial_t \theta - (v_i \partial_i) \theta + \kappa Z_\kappa \partial^2 \theta \}. \quad (2.14)$$

Необходимо ещё заметить, что если член с D_f опущен, модели (2.5) и (2.8) можно преобразовать друг в друга заменой $\theta(t, \mathbf{x}) \leftrightarrow \theta'(t, \mathbf{x})$ и отражением $t \rightarrow -t$. В частности, это значит, что ренормализационные константы Z_κ в (2.13) и (2.14) совпадают во всех порядках теории возмущений, потому как коррелятор D_f не появится в соответствующих диаграммах (см. 2.3).

2.3. Явные ответы в главном порядке. Неподвижные точки и скейлинговые размерности

Обратимся к явному расчёту ренормализационной константы Z_κ в однопетлевом приближении; для определённости рассмотрим случай поля плотности (2.13). Константа находится из того соображения, что 1-неприводимая функция Грина $\langle \theta' \theta \rangle_{1-\text{ir}}$, выраженная через ренормированные параметры, должна быть УФ-конечной (то есть конечной при $y \rightarrow 0$). Соответствующее уравнение Дайсона в импульсно-частотном представлении выглядит так:

$$\langle \theta' \theta \rangle_{1-\text{ir}}(\omega, p) = -i\omega + \kappa_0 p^2 - \Sigma_{\theta' \theta}(\omega, p), \quad (2.15)$$

где “оператор собственной энергии” $\Sigma_{\theta' \theta}$ определяется как бесконечная сумма 1-неприводимых диаграмм. В однопетлевом приближении этот оператор имеет вид:

В членах, содержащих множитель $p_s p_l$ можно положить $\mathbf{p} = 0$ в (2.18), в то время как исключительное слагаемое с $p_s k_l P_{sl}^{\parallel}(\mathbf{k}) = p_s k_s$ следует разложить (2.18) вплоть до линейного по p члена:

$$\frac{1}{uk^2 + w|\mathbf{p} + \mathbf{k}|^2} = \frac{1}{(u+w)k^2} \left\{ 1 - \frac{2w}{(u+w)} \frac{(\mathbf{p}\mathbf{k})}{k^2} \right\}.$$

С помощью формул

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{k} k_i f(k) &= 0, & \int d\mathbf{k} k_i k_s f(k) &= \frac{\delta_{is}}{d} \int d\mathbf{k} f(k), \\ \int d\mathbf{k} k_i k_s k_l k_p f(k) &= \frac{\delta_{is}\delta_{lp} + \delta_{il}\delta_{sp} + \delta_{ip}\delta_{sl}}{d(d+2)} \int d\mathbf{k} f(k), \end{aligned} \quad (2.19)$$

где $f(k)$ – любая функция, зависящая только от $k = |\mathbf{k}|$, все полученные интегралы сводятся к скалярному интегралу

$$J(m) = \int_{k>m} d\mathbf{k} \frac{1}{k^{d+y}} = S_d \frac{m^{-y}}{y} \quad (2.20)$$

с S_d из (1.27).

Собрав всё воедино, получим

$$\Sigma_{\theta'\theta} = -\frac{\hat{g}p^2}{2dy} \left(\frac{\mu}{m}\right)^y \left\{ \frac{(d-1)}{(1+w)} + \frac{\alpha}{u(u+w)} - \frac{2\alpha w}{u(u+w)^2} \right\} \quad (2.21)$$

где \hat{g} определена в (1.26). Тогда ренорм константу, нужную для устранения полюса по y в (2.15), в схеме минимальных вычитаний надо выбрать так:

$$Z_\kappa = 1 - \frac{\hat{g}}{2dw} \left\{ \frac{(d-1)}{(1+w)} + \frac{\alpha(u-w)}{u(u+w)^2} \right\}, \quad (2.22)$$

а соответствующая аномальная размерность:

$$\gamma_\kappa = \frac{\hat{g}}{2dw} \left\{ \frac{(d-1)}{(1+w)} + \frac{\alpha(u-w)}{u(u+w)^2} \right\}, \quad (2.23)$$

с поправками порядка \hat{g}^2 и выше.

Функция $\beta_w = \tilde{D}_\mu w$ для нового безразмерного параметра w имеет вид

$$\beta_w = -w\gamma_w = w[\gamma_\nu - \gamma_\kappa], \quad (2.24)$$

см. уравнение (1.33). Подставим однопетлевые выражения (1.41), (2.23) и точное соотношение (1.43) в уравнение $\beta_w = 0$. Тогда, после некоторых простых алгебраических преобразований, получаем уравнение:

$$2\{(d-1+\alpha)(1+w) - 2\alpha w\} = w(w+1)^2(d-1) \quad (2.25)$$

или ему эквивалентное уравнение:

$$(w-1)[(d-1)(w+1)(w+2) + 2\alpha] = 0$$

с единственным положительным корнем $w_* = 1$.

Соответствующее новое собственное число матрицы (1.40) совпадает с диагональным элементом

$$\partial\beta_w/\partial w|_{g=g_*} = y[3(d-1) + \alpha]/6(d-1) > 0,$$

потому как функции (1.33) не зависят от w . Мы заключаем, что неподвижная точка с координатами (1.41) и $w_* = 1$ ИК притягивающая в пространстве констант связи g, u, v, w и управляет ИК асимптотическим поведением моделей (2.5), (2.8).

Критические размерности полей θ, θ' получены из данных в таблице 1.1 и условия (1.47) для Δ_ω :

$$\Delta_\theta = -1 + y/6, \quad \Delta_{\theta'} = d + 1 - y/6. \quad (2.26)$$

Эти выражения являются точными из-за отсутствия ренормировки полей θ и θ' .

2.4. Составные поля и их размерности

2.5. Ренормировка составных полей θ^n . Явные ответы в главном порядке

Ключевую роль в дальнейших рассуждениях будут играть составные поля (“составные операторы” в квантово-полевой терминологии). Локальным составным оператором является моном или полином, состоящий из полей $\Phi(x)$ и их производных конечного порядка в одной точке пространства-времени $x = \{t, \mathbf{x}\}$. В функциях Грина с такими объектами появляются новые УФ расходимости из-за совпадения аргументов полей. Расходимости устраняются с помощью дополнительной процедуры ренормировки. Как правило, операторы при ренормировке смешиваются: ренормированные операторы задаются некоторой конечной линейной комбинацией изначальных мономов. Впрочем, далее будут встречаться только простые ситуации, когда изначальный оператор $F(x)$ и ренормированный $F^R(x)$ связаны мультипликативной ренормировкой $F(x) = Z_F F^R(x)$ с константой ренормировки в виде (1.36). Тогда критическая размерность оператора задаётся тем же выражением (1.47) и, вообще говоря, отличается от простой суммы размерностей полей и производных, входящих в оператор.

Полная каноническая размерность любой 1-неприводимой функции Грина Γ с одним оператором $F(x)$ и произвольным числом одиночных полей (формальный индекс УФ расходимости) задаётся формулой

$$\delta_\Gamma = d_F - \sum_{\Phi} N_\Phi d_\Phi, \quad (2.27)$$

где N_Φ – количества полей, входящих в Γ , d_Φ – их полные канонические

размерности, d_F – каноническая размерность оператора, суммирование по всем типам полей подразумевается. Поверхностные УФ расходимости могут появиться только в функциях Γ с неотрицательным целым δ_Γ .

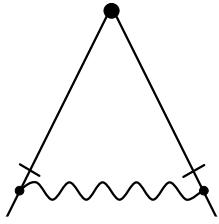
Начнём с самого простого случая: операторов $F(x) = \theta^n(x)$ в модели плотности. Тогда $d_F = -n$ в (2.27). Поскольку стохастическое уравнение (2.1) линейно по θ , число полей θ в любой 1-неприводимой функции не может превышать количество полей в самом операторе. Это легко понять из того факта, что цепочки пропагаторов $\langle \theta' \theta \rangle_0$, $\langle \theta \theta \rangle_0$ в любой диаграмме не могут разветвляться; см. пункт (iv) в разделе 1.3. Дальнейший анализ выражения (2.27) показывает, что поверхностная расходимость может появиться только в 1-неприводимой функции с $N_\theta = n$ и $N_\Phi = 0$ для полей, отличных от θ . Для такой функции $\delta_\Gamma = 0$, расходимость логарифмичная, а соответствующий контрчлен имеет вид $\theta^n(x)$. Итого, наши операторы мультипликативно ренормируемы: $F(x) = Z_n F^R(x)$ с некоторыми константами ренормировки, имеющими вид (1.36).

Теперь вернёмся к вычислению констант Z_n в главном (однопетлевом) приближении. Пусть $\Gamma(x; \theta)$ – производящий функционал 1-неприводимой функции Грина с одним составным оператором $F(x)$ и любым числом полей θ . Здесь $x = \{t, \mathbf{x}\}$ – аргумент оператора, а θ – аргумент функционала, “классический аналог” случайного поля θ . Нам интересен член θ^n в разложении $\Gamma(x; \theta)$ по $\theta(x)$, обозначим его $\Gamma_n(x; \theta)$. Можно записать его так

$$\Gamma_n(x; \theta) = \int dx_1 \cdots \int dx_n \theta(x_1) \cdots \theta(x_n) \langle F(x) \theta(x_1) \cdots \theta(x_n) \rangle_{1-\text{ir}}. \quad (2.28)$$

В однопетлевом приближении функция (2.28) представляется в виде диа-

граммы следующим образом:

$$\Gamma_n(x; \theta) = F(x) + \frac{1}{2} \text{ (diagram) } \quad (2.29)$$


Первое слагаемое – древесная (беспетлевая) диаграмма. Чёрный круг с двумя примыкающими линиями в диаграмме означает операторную вершину, то есть вариационную производную:

$$V(x; x_1, x_2) = \delta^2 F(x) / \delta\theta(x_1) \delta\theta(x_2). \quad (2.30)$$

В нашем случае вершина

$$V(x; x_1, x_2) = n(n-1) \theta^{n-2}(x) \delta(x-x_1) \delta(x-x_2) \quad (2.31)$$

содержит $(n-2)$ поля θ . (Помним, что $\delta\theta(x)/\delta\theta(x') = \delta(x-x') \equiv \delta(t-t')\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$.) Ещё 2 поля присоединены к обычным вершинам $\theta'\partial(v\theta)$ в нижней части диаграммы.

Поскольку расходимость логарифмическая, можно положить внешние частоты и импульсы равными нулю. Тогда все поля θ приобретают общий аргумент x , а сама диаграмма становится пропорциональной оператору $\theta^n(x)$ с коэффициентом, задаваемым “ядром” диаграммы:

$$\int \frac{d\omega}{(2\pi)} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} k_s k_l \frac{1}{\omega^2 + w^2 \nu^2 k^4} D_{sl}(\omega, \mathbf{k}), \quad (2.32)$$

где первый множитель в подынтегральном выражении получается из вершин (2.7), второй – из пропагаторов $\langle\theta'\theta\rangle_0$ в (2.6) с заменой $\kappa_0 \rightarrow w\nu$. Последний множитель – это пропагатор скорости из (2.17). Заметим, что только второй член из D_{sl} даёт ненулевой вклад в (2.32). Интегрирование

по частоте легко выполняется с учётом формулы

$$\int \frac{d\omega}{(2\pi)} \frac{1}{(\omega^2 + a^2)(\omega^2 + b^2)} = \frac{1}{2ab(a + b)}, \quad (2.33)$$

а после свёртки по индексам тензоров, интеграл по импульсу сводится к (2.20). Итого произведение даёт нам

$$\Gamma_n(x; \theta) = \theta^n(x) \left\{ 1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{\alpha \hat{g}}{2wu(u+w)} \left(\frac{\mu}{m} \right)^y \frac{1}{y} \right\}, \quad (2.34)$$

где \hat{g} определён в (1.26) с точностью до конечной части и поправок высших порядков.

Константу ренормировки Z_n можно найти из того условия, что ренормированный аналог $\Gamma_n^R = Z_n^{-1} \Gamma_n$ функции (2.28) должен быть УФ конечным в терминах перенормированных параметров. В нашем приближении достаточно заменить $\theta^n \rightarrow Z_n^{-1} \theta^n$ только первым членом в выражении для (2.34) и потом подобрать Z_n так, чтобы полюса во втором члене сократились. В схеме минимальных вычитаний получаем

$$Z_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{\alpha \hat{g}}{2wu(u+w)} \frac{1}{y}. \quad (2.35)$$

Далее для соответствующих аномальных размерностей уравнение (1.37) даёт

$$\gamma_n = -\frac{n(n-1)}{2} \frac{\alpha \hat{g}}{2wu(u+w)}, \quad (2.36)$$

с поправками высших порядков по \hat{g} .

Выражения для критических размерностей операторов θ^n можно получить из выражения (1.47)

$$\Delta[\theta^n] = n\Delta_\theta + \gamma_n^*, \quad (2.37)$$

Подставим координаты неподвижной точки (1.41 и $w_* = 1$) в (2.36). Получим

$$\Delta[\theta^n] = -n + \frac{ny}{6} - \frac{n(n-1)\alpha dy}{6(d-1)}, \quad (2.38)$$

и поправки высших порядков по y .

Теперь рассмотрим этот же оператор θ^n , но уже в модели трейсера. Из выражения (2.27) и линейности стохастического уравнения (2.2) следует, что, как в случае плотности, только в 1-неприводимой функции $\langle \theta^n(x)\theta(x_1)\cdots\theta(x_n) \rangle_{1\text{-ir}}$ могут появиться поверхностные УФ расходимости. В самом деле, один из внешних хвостов поля θ присоединён к вершине $\theta'(v\partial)\theta$: невозможно составить нетривиальную диаграмму такого типа с внешними хвостами, прикреплёнными только к вершине (2.31) оператора $F(x)$. Поэтому, по крайней мере, одна производная ∂ , действующая на хвост θ , появляется как общий множитель в диаграмме. Значит её реальный индекс расходимости δ'_Γ отрицательный, и диаграмма, на самом деле, не имеет поверхностной расходимости; см. пункт (iii) в разделе 1.3.

Это значит, что операторы θ^n на самом деле УФ конечны, $Z_n = 1$, и их скейлинговые размерности задаются выражением

$$\Delta[\theta^n] = n\Delta_\theta = -n + ny/6, \quad (2.39)$$

это выражение точное, поправки высшего порядка по y не появятся.

2.6. Ренормировка составных полей $(\partial\theta)^n$ в модели трейсера. Явные решения в главном порядке

В модели трейсера особое значение имеют тензорные операторы, построенные исключительно из градиентов пассивного скалярного поля. Та-

кие операторы имеют самую маленькую каноническую размерность, они содержат минимальное число производных (по одной на каждое поле). Таким образом, они выглядят так:

$$F_{i_1 \dots i_l}^{(n,l)} = \partial_{i_1} \theta \dots \partial_{i_l} \theta (\partial_i \theta \partial_i \theta)^s + \dots \quad (2.40)$$

Здесь l – число свободных векторных значков (ранг тензора), $n = l + 2s$ – полное число полей θ , входящих в оператор. С точки зрения теории представлений группы ортогональных преобразований в d -мерном пространстве, лучше рассмотреть вычитания дельта-символов Кронекера, которые делают оператор неприводимым (так что свертка по любой паре свободных индексов тензора равна нулю), например,

$$F_{ij}^{(2,2)} = \partial_i \theta \partial_j \theta - \frac{\delta_{ij}}{d} (\partial_k \theta \partial_k \theta). \quad (2.41)$$

Для всех этих операторов $d_F = 0$, а их реальный индекс расходимости $\delta'_\Gamma = \delta_\Gamma - N_\theta$, где δ_Γ задана в (2.27). В самом деле, теперь одна производная ∂ появляется как общий множитель в диаграмме для каждого хвоста θ , (без разницы, присоединён он к обычной вершине $\theta'(v\partial)\theta$ или к вершине (2.31) оператора (2.40). Как и для оператора θ^n , число полей θ в любой 1-неприводимой функции не может превышать их число в самом операторе: $N_\theta \leq n$, см. обсуждение этого вопроса в разделе 2.5. Следовательно, поверхностные УФ расходимости могут появиться только в 1-неприводимых функциях $\langle F^{(n,l)}(x) \theta(x_1) \dots \theta(x_k) \rangle_{1-ir}$ с учётом $k \leq n$. Для таких функций $\delta'_\Gamma = 0$, а $\delta_\Gamma = k$, так что соответствующий контрчлен может включать в себя только мономы $F^{(k,p)}$ из (2.40) с определённым значением ранга p . Мы заключаем, что семейство операторов (2.40) замкнуто относительно перенормировок в том смысле, что $F^{(n,l)} = Z_{(n,l)(k,p)} F_R^{(k,p)}$ с определённой

матрицей ренорм констант. Так как $Z_{(n,l)(k,p)} = 0$ для $k > n$, эта матрица блочно-треугольная с диагональными подблоками, соответствующими $n = k$; такая же и написанная ранее матрица Δ_F в (1.47).

Нам интересны скейлинговые размерности, связанные с операторами (2.40). Они задаются собственными значениями матрицы Δ_F , а именно её диагональными подблоками. Простой анализ показывает, что соответствующие диаграммы не включают пропагатор $\langle \theta\theta \rangle_0$ из (2.6); это, опять же, следствие линейности начального стохастического уравнения (2.2). Диагональные блоки можно рассчитать напрямую в модели без случайного шума в (2.2), потому как корреляционная функция шума (2.3) входит в диаграмму только в виде пропагатора $\langle \theta\theta \rangle_0$. А функция (2.3) является единственным источником анизотропии в задаче. Без учёта шума модель становится $SO(d)$ ковариантной, и неприводимые тензоры разных рангов не могут смешиваться при ренормировке. Это значит, что диагональные подблоки матрицы Δ_F на самом деле сами диагональны, а их диагональные элементы совпадают с собственными значениями полной матрицы Δ_F .

И, наконец, мы заключаем, что для нахождения скейлинговых размерностей операторы (2.40) можно считать мультипликативно ренормируемыми $F^{(n,l)} = Z_{(n,l)} F_R^{(n,l)}$ с соответствующими константами ренормировки $Z_{(n,l)}$, диагональными элементами полной матрицы $Z_{(n,l)(k,p)}$.

Для практических расчётов удобно свернуть тензоры (2.40) с произвольными постоянным вектором $\lambda = \{\lambda_i\}$. Тогда получим скалярный оператор:

$$F^{(n,l)} = (\lambda_i w_i)^l (w_i w_i)^s + \dots, \quad w_i \equiv \partial_i \theta, \quad (2.42)$$

где слагаемые, обозначенные многоточиями, обязательно включают мно-

житель $\lambda^2 = \lambda_i \lambda_i$. Контрчлен к $F^{(n,l)}$ пропорционален тому же оператору, а чтобы найти константу $Z_{(n,l)}$, достаточно сохранить лишь главный член, явно выписанный в (2.42), и отбросить в результате все члены, содержащие множители λ^2 . Далее, используя правила дифференцирования, вершину (2.30) для оператора $F^{(n,l)}$ можно записать в виде

$$V(x; x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F^{(n,l)}}{\partial w_i \partial w_j} \partial_i \delta(x - x_1) \partial_j \delta(x - x_2) \quad (2.43)$$

с точностью до несущественных членов. Дифференцирование даёт:

$$\begin{aligned} \partial^2 F^{(n,l)} / \partial w_i \partial w_j &= 2s(w^2)^{s-2} (\lambda w)^l [\delta_{ij} w^2 + 2(s-1)w_i w_j] + \\ &+ l(l-1)(w^2)^s (\lambda w)^{l-2} \lambda_i \lambda_j + 2ls(w^2)^{s-1} (\lambda w)^{l-1} (w_i \lambda_j + w_j \lambda_i), \end{aligned} \quad (2.44)$$

где $w^2 = w_k w_k$ и $(\lambda w) = \lambda_k w_k$. Ещё два множителя $w_p w_r$ присоединены к нижней части диаграммы, производные появляются из вершин $\theta'(v\partial)\theta$. УФ расходимость логарифмичная, можно положить внешнюю частоту и импульс равным нулю; ядро диаграммы имеет вид

$$\int \frac{d\omega}{(2\pi)} \int_{k>m} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} k_i k_j D_{pr}(\omega, \mathbf{k}) \frac{1}{\omega^2 + w^2 \nu^2 k^4}. \quad (2.45)$$

Первый множитель получается из производной в (2.43), D_{pr} из (2.17) является корреляционной функции скорости (1.14). Последний множитель получился из двух пропагаторов $\langle \theta' \theta \rangle_0$. Сделаны замены $Z \rightarrow 1$, $s \rightarrow 0$; см. подробное обсуждение в разделе 2.3.

Интегрирование по частоте легко выполняется с использованием (2.33), а оставшиеся интегралы по \mathbf{k} сводятся к скалярному интегралу (2.20) с использованием соотношений (2.19). После перемножения всех множителей, свёртки тензоров и выражения результатов в терминах $n = 2s + l$ и l по-

лучаем:

$$\Gamma_n(x; \theta) = F^{(n,l)}(x) \left\{ 1 - \frac{\hat{g}}{y} \left(\frac{\mu}{m} \right)^y \left(\frac{Q_1}{2w(1+w)} + \alpha \frac{Q_2}{2wu(u+w)} \right) \right\}, \quad (2.46)$$

где

$$\begin{aligned} Q_1 &= -n(n+d)(d-1) + (d+1)l(l+d-2), \\ Q_2 &= -n(3n+d-4) + l(l+d-2), \end{aligned} \quad (2.47)$$

\hat{g} определен в (1.26). Тогда ренорм константа $Z_{(n,l)}$ в схеме минимальных вычитаний будет такой:

$$Z_{(n,l)} = 1 - \frac{\hat{g}}{y} \left\{ \frac{Q_1}{2w(1+w)} + \alpha \frac{Q_2}{2wu(u+w)} \right\}, \quad (2.48)$$

см. подробное объяснение в разделе 2.5 уравнение (2.34). тогда соответствующие аномальные размерности, согласно уравнению (1.37), будут такими

$$\gamma_{(n,l)} = \hat{g} \left\{ \frac{Q_1}{2w(1+w)} + \alpha \frac{Q_2}{2wu(u+w)} \right\}, \quad (2.49)$$

плюс поправки высшего порядка по \hat{g} .

Наконец, для скейлинговых размерностей, связанных с оператором (2.40), выражение (1.47) даёт

$$\Delta_{(n,l)} = n + n\Delta_\theta + \gamma_{(n,l)}^* = ny/6 + \gamma_{(n,l)}^*. \quad (2.50)$$

Подставляя координаты неподвижной точки (1.41) и $w_* = 1$ в (2.49), легко получить выражение для $\Delta_{(n,l)}$:

$$\Delta_{(n,l)} = \frac{ny}{6} + \frac{dy}{3(d-1)} \{Q_1 + \alpha Q_2\}. \quad (2.51)$$

2.7. Операторное разложение и аномальный скейлинг

2.7.1. Модель плотности

Рассмотрим одновременной парный коррелятор двух УФ конечных величин $F_{1,2}(x)$ с определёнными критическими размерностями, например, обычных полей или локальных составных операторов. [Мы ограничимся одновременными корреляторами, потому что они, как правило, галилеево инвариантны и не содержат сильной зависимости от ИК масштаба, из-за так называемых эффектов переноса.] Из рассмотрения канонических размерностей следует, что

$$\langle F_1(t, \mathbf{x}_1) F_2(t, \mathbf{x}_2) \rangle = \nu^{d_F^\omega} \mu^{d_F} \eta(\mu r, m r, c/(\mu \nu)), \quad r = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|, \quad (2.52)$$

где d_F^ω и d_F канонические размерности корреляционной функции, заданные как простые суммы соответствующих размерностей операторов, $\eta(\dots)$ – функция безразмерных переменных. Мы записали правую сторону в терминах перенормированных переменных. Тогда масса μ заменяет УФ импульс Λ . Поведение функции η на ИК масштабе, то есть для $\mu r \gg 1$, определяется ИК притягивающей неподвижной точкой уравнения РГ. Решая уравнение РГ обычным образом, можно увидеть следующее асимптотическое поведение:

$$\langle F_1(t, \mathbf{x}_1) F_2(t, \mathbf{x}_2) \rangle \simeq \nu^{d_F^\omega} \mu^{d_F} (\mu r)^{-\Delta_F} \zeta(m r, c(r)). \quad (2.53)$$

Где Δ_F – критическая размерность корреляционной функции, задаваемая простой суммой размерностей операторов. Уравнение РГ не определяет вид скейлинговой функции ζ ; оно определяет только вид её аргументов. Они

безразмерны (и канонически, и критически), в частности,

$$c(r) = c(\mu r)^{\Delta_c} / (\mu \nu) \quad (2.54)$$

где Δ_c из (1.49) можно интерпретировать как эффективную скорость звука (более детально этот вопрос обсуждался в [64]).

Для корреляционной функции двух операторов типа $\theta^n(x)$ выражение (2.53) даёт:

$$\langle \theta^p(t, \mathbf{x}_1) \theta^k(t, \mathbf{x}_2) \rangle \simeq \mu^{-(p+k)} (\mu r)^{-\Delta_p - \Delta_k} \zeta_{pk}(mr, c(r)) \quad (2.55)$$

размерности Δ_n получены из (2.38). Далее мы не будем отображать зависимость от УФ параметров μ и ν и опустим индексы скейлинговых функций.

Инерционный интервал соответствует условию $mr \ll 1$. Поведение функций ζ при $mr \rightarrow 0$ можно изучать с помощью операторного разложения [41, 80]. В рассматриваемом случае оно имеет вид:

$$F_1(t, \mathbf{x}_1) F_2(t, \mathbf{x}_2) \simeq \sum_F C_F(mr, c(r)) F(t, \mathbf{x}), \quad (2.56)$$

где $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \rightarrow 0$ и $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)/2$ фиксированы. Сумма в (2.56) проводится по всем возможным ренормированным локальным составным операторам, не запрещённым симметриями модели. В левой стороне C_F – числовой коэффициент функции, аналитичный по mr и $c(r)$. Для нашей модели, согласно линейности по полю θ , число таких полей в операторах F не может превышать их число в левой части равенства. Это ограничение, вводящееся в нашей модели, модели Крейчнана и родственных с ней [39], будет важно для нас в дальнейшем.

Корреляционную функцию (2.53) мы получили, усредняя (2.56) с весом $\exp \mathcal{S}_R$ (ренормированным функционалом действия из (2.4)). В правой

части появляются средние значения $\langle F(x) \rangle$. Не умаляя общности, можно предположить, что разложение в (2.56) сделано для *неприводимых* тензорных операторов. Далее, если модель $SO(d)$ ковариантна (корреляционная функция скалярного шума (2.3) зависит только от $r = |\mathbf{r}|$), после усреднения "выживают" только скалярные операторы. Также можно предположить, что разложение мы делаем по операторам с определёнными критическими размерностями. Средние значения этих операторов в асимптотике при малых m принимают вид

$$\langle F(x) \rangle \simeq m^{\Delta_F} \xi(c(1/m)), \quad (2.57)$$

с другим набором скейлинговых функций ξ и аргументов $c(\dots)$ из (2.54). Поскольку диаграммы теории возмущений имеют конечные пределы для обоих пределов $c \rightarrow \infty$ и $c \rightarrow 0$, мы можем предположить, что они ограничены для всех значений c и можно оценить их какими-нибудь константами. Более того, для достаточно больших y , включая релятивистский случай $y \rightarrow 4$, размерность Δ_c становится отрицательной; см. выражение (1.49). Итак, аргумент $c(1/m) \sim cm^{-\Delta_c}$ становится маленьким для фиксированного c и $m \rightarrow 0$, функцию ξ можно заменить её конечным значением $\xi(0)$. И, наконец, можно заключить, что в ИК масштабе

$$\langle F(x) \rangle \sim m^{\Delta_F}. \quad (2.58)$$

Далее, объединив выражения (2.53), (2.56) и (2.58), получаем желаемое асимптотическое выражение для скейлинговых функций:

$$\zeta(mr, c(r)) \simeq \sum_F A_F(mr, c(r)) (mr)^{\Delta_F}, \quad (2.59)$$

где суммирование проводится по всем галилеево инвариантным скалярным

операторам, с коэффициентными функциями A_F , аналитическими по своим аргументам.

Расходимости при $mr \rightarrow 0$ (и, значит, аномальный скейлинг) появляются из вкладов от операторов с *отрицательными* критическими размерностями, это так называемые “опасные” операторы в [40]. Очевидно, главный член определяется оператором с минимальной размерностью; другие определяют поправки. Все операторы θ^n опасные, и спектр их размерностей не ограничен снизу (нет “самого опасного” оператора); см. выражение (2.38). К счастью, для *заданной* корреляционной функции только конечное число таких операторов может появиться в операторном разложении. Для (2.55) это операторы с $n \leq p + k$. Итого,

$$\zeta(mr, c(r)) \simeq \sum_{n=0}^{p+k} A_n(mr, c(r)) (mr)^{\Delta_n} + \dots \quad (2.60)$$

где Δ_n из (2.38); можно учитывать дальнейшие поправки, связанные с операторами с производными и другими типами полей. Главный член при малых mr в (2.60) задаётся оператором с максимально возможным $n = p + k$, так что конечное выражение имеет вид

$$\langle \theta^p(t, \mathbf{x}_1) \theta^k(t, \mathbf{x}_2) \rangle \simeq \mu^{-(p+k)} (\mu r)^{-\Delta_p - \Delta_k} (mr)^{\Delta_{p+k}}. \quad (2.61)$$

Стоит отметить, что множество операторов θ^n является “замкнутым относительно слияния” в том смысле, что главный член операторного разложения для парного коррелятора двух таких же операторов задаётся оператором из того же семейства с суммарным показателем. Этот факт наряду с неравенством $\Delta_p + \Delta_k > \Delta_{p+k}$, следующим из (2.38), можно интерпретировать как то, что корреляции скалярного поля в модели плотности проявляют мультифрактальное поведение; см. [86].

2.7.2. Модель трейсера

Для модели трейсера критические размерности операторов θ^n линейны по n : $\Delta[\theta^n] = n\Delta_\theta$, см. уравнение (2.39). Тогда зависимость от расстояния r в асимптотическом выражении (2.61) исчезает: главные члены в инерционном интервале постоянны. Более “яркими” величинами являются одновременные структурные функции, определенные как

$$S_n(r) = \langle [\theta(t, \mathbf{x}) - \theta(t, \mathbf{x}')]^{2n} \rangle = (\nu\mu^2)^{-n} \eta(\mu r, mr, c/(\mu\nu)), \quad r = |\mathbf{x}' - \mathbf{x}|; \quad (2.62)$$

второе равенство с безразмерными функциями η следует из соображений размерности. Решение уравнения РГ даёт асимптотическое выражение для $\mu r \gg 1$:

$$S_n(r) = (\nu\mu^2)^{-n} (\mu r)^{-2n\Delta_\theta} \zeta(mr, c(r)), \quad (2.63)$$

$c(r)$ взято из (2.54) и некоторых скейлинговых функций ζ . Важно, что парный коррелятор $\langle \theta^p \theta^k \rangle$ с $k + p = 2n$, появляющийся в биномиальном разложении S_n , имеет похожие на (2.55) асимптотические представления с теми же критической размерностью $\Delta_k + \Delta_p = 2n\Delta_\theta$, а вместе они образуют единую асимптотику (2.63). Главные члены для этих корреляторов, связанные со вкладом оператора θ^n в соответствующее операторное разложение, компенсируют друг друга в структурной функции. Из-за этого структурная функция в инерционном интервале приобретает нетривиальную зависимость от r .

Действительно, обе функции (2.62) и действие (2.8) для трейсера (не для плотности!) инвариантны относительно сдвига на постоянную $\theta(x) \rightarrow \theta(x) + \text{const}$. Тогда операторы, входящие в соответствующее операторное

разложение

$$[\theta(t, \mathbf{x}) - \theta(t, \mathbf{x}')]^{2n} \simeq \sum_F C_F(mr, c(r)) F(t, \mathbf{x}), \quad r \rightarrow 0, \quad \mathbf{x} = (\mathbf{x} + \mathbf{x}')/2, \quad (2.64)$$

должны также быть инвариантными, так что они могут включать поле θ только в виде производных. Очевидно, главный член при малых m определяется скалярным оператором с максимально возможным числом полей θ (а именно $2n$ для данной S_n) и минимально возможным числом пространственных производных (а именно, $2n$: по одной производной на каждое поле θ). Ничего, кроме оператора $F^{(2n,0)} = (\partial_i \theta \partial_i \theta)^n$ из (2.40) не подойдёт. Тогда интересующий нас главный порядок выражения для S_n в инерционном интервале:

$$S_n(r) \sim (\nu \mu^2)^{-n} (\mu r)^{-2n \Delta_\theta} (mr)^{\Delta_{(2n,0)}}, \quad (2.65)$$

где размерность $\Delta_{(2n,0)}$ задана в (2.51). Операторы $F^{(2p,0)}$ с $p < n$ определяют главные поправки к (2.65), операторы с дополнительными производными и/или другие типы полей относятся к более “дальним” поправкам (они все должны быть инвариантными относительно галилеевых преобразований и сдвига θ).

Для трейсера “мультифрактальное” поведение выражается семейством операторов $F^{(n,0)}$ а не просто произведением θ^n . Действительно, легко понять, что в инерционном интервале поведение парной корреляционной функции $\langle F^{(p,0)} F^{(k,0)} \rangle$ двух таких операторов определяется вкладом в операторное разложение от их “старшего брата” $F^{(n,0)}$ с условием $n = p + k$ и имеет вид (опуская зависимость от УФ параметров μ и ν)

$$\langle F^{(p,0)}(t, \mathbf{x}) F^{(k,0)}(t, \mathbf{x}') \rangle \sim r^{-\Delta_{(p,0)} - \Delta_{(k,0)} + \Delta_{(n,0)}}. \quad (2.66)$$

Требуемое неравенство $\Delta_{(n,0)} < \Delta_{(p,0)} + \Delta_{(k,0)}$ [86] следует из явного однопетлевого выражения (2.51). Остаётся заметить, что оператор $F^{(2,0)}$ можно интерпретировать как локальную скорость диссипации флуктуаций нашего скалярного поля.

2.8. Влияние крупномасштабной анизотропии

Теперь рассмотрим влияние анизотропии, введённой в систему на больших масштабах $\sim L$ корреляционной функцией случайного шума (2.3). В качестве иллюстрации рассмотрим первый случай одноосной анизотропии: предположим, что функция $C(\mathbf{r}/L)$ в (2.3) зависит также от постоянного единичного вектора $\mathbf{n} = \{n_i\}$, что выделяет некоторое направление.

Тогда тензорно неприводимый составной оператор приобретает ненулевое среднее значение с тензорными множителями, построенными из вектора \mathbf{n} . Например, среднее значение оператора (2.41) пропорционально неприводимому тензору $n_i n_j - \delta_{ij}/d$. В общем, среднее значение любого неприводимого оператора ранга l пропорционально тензору $n_{i_1} \dots n_{i_l} + \dots$ (многоточие означает вклады с символами Кронекера, которые делают этот тензор неприводимым). После подстановки в операторное разложение (2.64), тензорные значки сворачиваются со значками коэффициентных функций $C_F(\mathbf{r})$. Это приводит к появлению (d -мерного обобщения) полиномов Лежандра $P_l(\cos \vartheta)$, где ϑ – угол между векторами \mathbf{r} и \mathbf{n} .

Итак, операторное разложение по неприводимым составным операторам даёт разложение по неприводимым представлениям группы $SO(d)$. Главный вклад в “оболочку” с заданным l определяется оператором ранга l с минимальной критической размерностью (конечно, симметрия модели

должна удовлетворяться и с левой стороны). Очевидно, для структурной функции S_n при $l \leq 2n$ нужен оператор $F_{i_1 \dots i_l}^{(2n,l)}$ из (2.40). Для $l > 2n$ нужно взять оператор, содержащий больше производных, чем полей.

Разложение, которое учитывает только главный член в каждой оболочке, имеет вид (снова мы опускаем ν и μ):

$$S_n = r^{-2n\Delta_\theta} \sum_{l=0}^{2n} A_l(r) P_l(\cos \vartheta) (mr)^{\Delta_{(2n,l)}} + \dots \quad (2.67)$$

где размерность $\Delta_{(2n,l)}$ взята из (2.50); можно записать и вклады с $l > 2n$. Для самой общей анизотропии на больших масштабах все сферические гармоники Y_{ls} появятся в разложении с экспонентами, зависящими только от l .

Из явного вида главного порядка разложения (2.51) следует, что размерности (2.50), для фиксированного n , монотонно возрастают с ростом l :

$$\Delta_{n,l} > \Delta_{n,p} \quad l > p, \quad (2.68)$$

или в дифференциальной форме $\partial \Delta_{n,l} / \partial l > 0$. Похожие неравенства были получены ранее в различных моделях пассивно переносимых векторного [13, 14] и скалярного [45] полей. Этот факт имеет ясную физическую интерпретацию: в присутствии крупномасштабной анизотропии анизотропные вклады в инерционном интервале выстроены в связи со “степенью анизотропии” l : главный вклад задаётся изотропной оболочкой ($l = 0$); соответствующие аномальные показатели такие же, как и для чисто изотропного случая. Слагаемые с $l > 1$ дают вклады, которые становятся относительно слабыми при $mr \rightarrow 0$ и при увеличении степени анизотропии l . Это наблюдение подтверждает гипотезу Колмогорова о локальном

восстановлении изотропной турбулентности. Эта гипотеза на самом деле убедительна и наблюдается для турбулентности в реальной жидкости [87].

Иерархия (2.68) становится менее выраженной с увеличением степени сжимаемости α , что можно выразить с помощью неравенства:

$\partial^2 \Delta_{n,l} / \partial l \partial \alpha < 0$. Итак, анизотропные поправки становятся ближе друг к другу и к изотропным членам. Этот эффект уже наблюдался ранее для пассивного скалярного [56, 57] и векторного [15] полей.

Наши результаты показывают, что все эти свойства анизотропных вкладов остаются в силе не только для упрощенных моделей с искусственным ансамблем скорости, но и для более реалистичной ситуации.

3. Перенос пассивного магнитного поля

3.1. Описание модели

3.1.1. Ансамбль скорости

Ансамбль скорости для данной задачи был описан ранее. Но для удобства читателя здесь мы кратко повторим вводную часть. Как и в работах [64, 88], мы описываем стохастическую динамику сжимаемой жидкости двумя уравнениями:

$$\nabla_t v_i = \nu_0 [\delta_{ik} \partial^2 - \partial_i \partial_k] v_k + \mu_0 \partial_i \partial_k v_k - \partial_i \phi + f_i \quad (3.1)$$

$$\nabla_t \phi = -c_0^2 \partial_i v_i, \quad (3.2)$$

где первое уравнение – это уравнение Навье-Стокса, а второе – уравнение неразрывности [58] с двумя условиями: кинематические коэффициенты вязкости ν_0 и μ_0 подразумеваются постоянными, то есть независимыми от $x = \{t, \mathbf{x}\}$; уравнение состояния рассматриваем в самой простой линейной форме $(p - \bar{p}) = c_0^2 (\rho - \bar{\rho})$, где связываются разности $p(x)$ – давления жидкости и $\rho(x)$ – её плотности с соответствующими средними значениями; постоянная c_0 имеет смысл (адиабатической) скорости звука.

В уравнениях (3.1), (3.2), $\mathbf{v} = \{v_i(x)\}$ это поле скорости и, вместо плотности, мы используем скалярную величину, определённую соотношением $\phi(x) = c_0^2 \ln(\rho(x)/\bar{\rho})$. Также,

$$\nabla_t = \partial_t + v_k \partial_k \quad (3.3)$$

это лагранжева (галилеево ковариантная) производная, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, и $\partial^2 = \partial_i \partial_i$ – оператор Лапласа. Задача изучается в d -мерном (для общности) пространстве $\mathbf{x} = \{x_i\}$, $i = 1 \dots d$, суммирование по повторяющимся латинским значкам здесь и далее подразумевается.

В уравнении Навье-Стокса (3.1), f_i – плотность внешней силы (на единицу массы), она имитирует энергию, введённую в систему на большом масштабе. Статистика внешней силы принимается гауссовой с нулевым средним, некоррелированной во времени (что продиктовано галилеевой симметрией) с заданным коррелятором:

$$\langle f_i(x) f_j(x') \rangle = \delta(t - t') \int_{k>m} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} D_{ij}^f(\mathbf{k}) \exp\{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}\}, \quad (3.4)$$

где

$$D_{ij}^f(\mathbf{k}) = D_0 k^{4-d-y} \left\{ P_{ij}^\perp(\mathbf{k}) + \alpha P_{ij}^\parallel(\mathbf{k}) \right\}. \quad (3.5)$$

Здесь $P_{ij}^\perp(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ и $P_{ij}^\parallel(\mathbf{k}) = k_i k_j / k^2$ это поперечный и продольный проекторы соответственно, $k = |\mathbf{k}|$ это волновое число (импульс), D_0 и α – положительные амплитуды. Параметр $g_0 = D_0/\nu_0^3$ играет роль константы связи (параметр разложения в теории возмущений); соотношение $g_0 \sim \Lambda^y$ определяет типичный ультрафиолетовый (УФ) масштаб импульсов. Параметр $m \sim L^{-1}$, обратный интегральному турбулентному масштабу, обеспечивает ИК регуляризацию; его точное значение несущественно. Способ обрезания выбран самым простым для вычисления. Показатель $0 < y \leq 4$ играет роль, аналогичную $\varepsilon = 4 - d$ в РГ теории критического поведения [41, 80]: он обеспечивает УФ регуляризацию (так что УФ расходимости будут иметь вид полюсов по y) и различные скейлинговые

размерности вычислены в виде разложения по y . Самое реалистичное (физичное) значение получится в пределе $y \rightarrow 4$: тогда функцию (3.5) можно выразить в виде степеней функции $\delta(\mathbf{k})$, что относится к идеализированной картине для энергии, внесённой на больших масштабах.

Как было написано ранее, более детальная дискуссия о сжимаемой модели (3.1)–(3.5) представлена в [64, 88].

3.1.2. Уравнение МГД

В представлении постоянного фонового поля $B_i^0 = B^0 n_i$ с некоторым постоянным единичным вектором $\mathbf{n} = \{n_i\}$, динамическое уравнение для флуктуирующей части $\theta_i = \theta_i(t, \mathbf{x})$ полного магнитного поля $B_i = B^0(n_i + \theta_i)$ имеет вид:

$$\partial_t \theta_i + \partial_k (v_k \theta_i - \theta_k v_i) = \kappa_0 \partial^2 \theta_i + n_k \partial_k v_i, \quad (3.6)$$

где $\kappa_0 = c_l^2 / 4\pi\sigma$ – магнитный коэффициент диффузии. Уравнение (3.6) получено из уравнений Максвелла, в которых отброшен ток смещения. Простейшая форма закона Ома для движущейся среды: $\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + c_l^{-1} [\mathbf{v}, \mathbf{B}])$, где σ – проводимость, c_l – скорость света; см. [89].

Последнее слагаемое в правой части (3.6) определяет стационарное состояние системы и, по сути, является источником анизотропии; в принципе, его можно заменить на искусственный гауссовый шум с соответствующей статистикой. В оригинальной задаче поле \mathbf{v} удовлетворяет уравнению Навье-Стокса с добавочной силой Лоренца $\sim (\mathbf{B} \times \text{curl} \mathbf{B})$. В нашем кинематическом приближении обратным влиянием магнитного поля на динамику скорости жидкости можно пренебречь. Она описана стохастическими

уравнениями (3.1)–(3.5).

3.1.3. Теоретико-полевая формулировка

Хорошо известно, что любую стохастическую задачу типа (3.1)–(3.5) можно переформулировать стандартным образом в виде теоретико-полевой модели; см. [41, 80]. Таким образом, различные корреляционные функции изначальной стохастической задачи могут быть представлены в виде функциональных интегралов по удвоенному набору полей Φ с весом $\exp \mathcal{S}(\Phi)$, где $\mathcal{S}(\Phi)$ есть, так называемый, функционал действия Де Доминисиса–Янсена. Функционал действия $\mathcal{S}_v(\Phi)$ для задачи (3.1)–(3.5) с $\Phi = \{\mathbf{v}', \phi', \mathbf{v}, \phi\}$ выглядит слишком громоздко, так что мы не будем воспроизводить его здесь, также, как и элементы соответствующей диаграммной техники (затравочные пропагаторы и вершины); можно их найти в [64, 88]. Далее нам будет нужен только пропагатор скорость–скорость при $c_0 = 0$; в импульсно-частотном (ω – \mathbf{k}) представлении он имеет вид:

$$\langle v_i v_j \rangle_0 = D_0 \left\{ \frac{P_{ij}^\perp(\mathbf{k})}{\omega^2 + \nu_0^2 k^4} + \frac{\alpha P_{ij}^\parallel(\mathbf{k})}{\omega^2 + u_0^2 \nu_0^2 k^4} \right\}. \quad (3.7)$$

Полномасштабная стохастическая задача (3.1)–(3.6) описывается функционалом действия

$$\mathcal{S}(\Phi) = \mathcal{S}_v(\mathbf{v}', \phi', \mathbf{v}, \phi) + \mathcal{S}_\theta(\boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}), \quad (3.8)$$

где

$$\mathcal{S}_\theta = \theta'_i \left\{ -\partial_t \theta_i - \partial_k (v_k \theta_i - \theta_k v_i) + \kappa_0 \partial^2 \theta_i + n_k \partial_k v_i \right\} \quad (3.9)$$

это действие Де Доминисиса–Янсена для задачи (3.6) при фиксированном

\mathbf{v} . Появляется новый пропагатор

$$\langle \theta'_i \theta_j \rangle_0 = \frac{P_{ij}^\perp(\mathbf{k})}{-i\omega + w_0 \nu_0 k^2} \quad (3.10)$$

и новая вершина $V_{ijl} \theta'_i \theta_j \nu_l$ с вершинным множителем

$$V_{ijl}(\mathbf{k}) = i(\delta_{ij} k_l - \delta_{il} k_j). \quad (3.11)$$

Далее следует несколько замечаний. Во-первых, производную в вершине в (3.9) можно “перебросить” на поле $\boldsymbol{\theta}'$ интегрированием по частям; так что \mathbf{k} в (3.11) это импульсный аргумент поля $\boldsymbol{\theta}'$. Во-вторых, вершинный множитель удовлетворяет условию поперечности

$$k_i V_{ijl}(\mathbf{k}) = 0, \quad (3.12)$$

которое следует из явного вида вершины (3.11). Остается заметить, что другой новый смешанный пропагатор $\langle \boldsymbol{\theta} \mathbf{v} \rangle_0$ не появится в диаграммах.

3.2. УФ расходимости и ренормировка

3.2.1. Канонические размерности, контрчлены и ренормируемость

На основании анализа канонических размерностей теоретико-полевой модели, построенной по уравнениям Навье-Стокса и уравнению неразрывности, в 1.3 были сделаны следующие заключения:

(i) Все 1-неприводимые функции Грина без полей отклика (“штрихованных”) исчезают, и, поэтому, не требуют контрчленов.

(ii) Если несколько внешних импульсов, появляются как общий множитель во всех диаграммах какой-либо функции Грина, то реальный индекс расходимости δ'_Γ меньше, чем δ_Γ на соответствующее число единиц. В модели \mathcal{S}_v поле ϕ входит в соответствующую вершину только в форме пространственной производной, что уменьшает реальный индекс расходимости:

$$\delta'_\Gamma = \delta_\Gamma - N_\phi. \quad (3.13)$$

(iii) Галилеева инвариантность модели подразумевает, что контрчлены тоже инвариантны. В частности, это значит, что ковариантная производная (3.3) появляется в контрчленах только как целое.

Эти условия запрещают УФ расходимости в некоторых функциях Грина, хотя раньше они были разрешены размерным анализом. И, поэтому, количество контрчленов, необходимое для ренормировки модели, уменьшается.

Анализ теоретико-полевой модели с функционалом действия \mathcal{S}_v в (3.8), представленный в [64] (см. также [88]), показал, что теория мульти-

пликативно ренормируема (после некоторого естественного расширения). Это значит, что все УФ расходимости в функциях Грина можно устранить ренормировкой полей $\phi \rightarrow Z_\phi \phi$, $\phi' \rightarrow Z_{\phi'} \phi'$ и параметров:

$$g_0 = g\mu^y Z_g, \quad \nu_0 Z_\nu, \quad c_0 = c Z_c, \quad (3.14)$$

и так далее. Здесь ренормализационные константы Z_i поглощают все УФ расходимости, так что все функции Грина конечны (то есть, конечны в $y = 0$) если они выражены через ренормированные параметры g, u , и т.д.; “ренормировочная масса” μ это добавочный параметр ренормированной теории. Ренормировка полей \mathbf{v}', \mathbf{v} и параметров m, α не требуется.

Включение нового вклада \mathcal{S}_θ в полную модель добавляет только одну новую УФ расходимость в 1-неприводимую функцию $\langle \theta' \theta \rangle_{1-ir}$ с контрчленом $\theta' \partial^2 \theta$. И еще два важных замечания:

(iv) Исходя из линейности изначальной стохастической модели по полю θ следует, что $N_{\theta'} - N_\theta$ есть неотрицательное целое число для любой нетривиальной 1-неприводимой функции Грина: никаких диаграмм больше нарисовать не получится. Этот факт запрещает поверхностные расходимости во всех 1-неприводимых функциях $\langle \theta' \theta \dots \theta \rangle_{1-ir}$, кроме самой первой. Поэтому наша модель является ренормируемой, несмотря на тот факт, что магнитное поле имеет отрицательную каноническую размерность.

(v) Для полной модели (3.8), пункты (ii) и (iii) требуют дополнительного обсуждения. Производную в вершине в \mathcal{S}_θ можно “перебросить” с помощью интегрирования по частям на поле θ' . Так что реальный индекс расходимости уменьшается, согласно пункту (ii), и θ' входит в контрчлен только в виде пространственной производной. Выражение (3.13) нужно за-

менить на

$$\delta'_\Gamma = \delta_\Gamma - N_\phi - N_{\theta'}. \quad (3.15)$$

Итого, контрчлен $\theta' \partial_t \theta$ запрещён так же, как и $\theta'(v_i \partial_i) \theta$, согласно галилеевой симметрии (iii).

Единственный оставшийся контрчлен $\theta' \partial^2 \theta$ естественно воспроизводится мультипликативной ренормировкой магнитного коэффициента диффузии: $\kappa_0 = \kappa Z_\kappa$. Ренормировка полей θ' , θ не требуется.

Ренормированный аналог функционала действия (3.8) имеет вид

$$\mathcal{S}^R(\Phi) = \mathcal{S}_v^R(\Phi) + \mathcal{S}_\theta^R(\Phi), \quad (3.16)$$

где $\mathcal{S}^R(\Phi)$ ренормированный аналог действия $\mathcal{S}(\Phi)$, описанный в [64, 88], и

$$\mathcal{S}_\theta^R = \theta'_i \{ -\partial_t \theta_i - \partial_k (v_k \theta_i - \theta_k v_i) + \kappa Z_\kappa \partial^2 \theta_i + n_k \partial_k v_i \} \quad (3.17)$$

ренормированная часть полного действия, которая описывает взаимодействие с магнитным полем.

3.2.2. Расчёт ренормализационной постоянной Z_κ в главном порядке

Здесь мы представим практический расчёт ренормализационной постоянной Z_κ в главном однопетлевом приближении, что соответствует точности расчётов в задаче Навье-Стокса (3.1), (3.2), проведённых в [64]. Хотя такой расчёт довольно простой, он похож на расчёт для гауссового ансамбля скорости [17], мы кратко обсудим его с целью полноты изложения и отметим некоторые важные особенности.

Постоянная Z_κ находится из требования отсутствия УФ-расходимостей (при $y \rightarrow 0$) 1-неприводимой функции Грина $\langle \theta' \theta \rangle_{1\text{-ir}}$ выраженной в ренор-

Тогда аналитическое выражение для (3.19) принимает вид:

$$\Sigma_{12}(\Omega = 0, \mathbf{p}) = D_0 \int \frac{d\omega}{2\pi} \int_{k>m} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} V_{143}(\mathbf{p}) V_{625}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \times \left\{ \frac{P_{35}^\perp(\mathbf{k})}{\omega^2 + \nu^2 k^4} + \frac{\alpha P_{35}^\parallel(\mathbf{k})}{\omega^2 + u^2 \nu^2 k^4} \right\} \frac{P_{46}^\perp(\mathbf{k} + \mathbf{p})}{-i\omega + w\nu|\mathbf{k} + \mathbf{p}|^2}, \quad (3.20)$$

где $k = |\mathbf{k}|$. Замена $P_{46}^\perp \rightarrow \delta_{46}$ может быть сделана благодаря условию поперечности (3.12) и свёртки с V_{625} .

Интегрирование по частоте проводится, например, так:

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{-i\omega + w\nu|\mathbf{p} + \mathbf{k}|^2} \frac{1}{\omega^2 + u^2 \nu^2 k^4} = \frac{1}{2u\nu^2 k^2 (uk^2 + w|\mathbf{p} + \mathbf{k}|^2)}. \quad (3.21)$$

Числители интегрируемого выражения (3.20) содержат члены квадратичные и линейные по \mathbf{p} . Для квадратичных членов можно сразу положить $\mathbf{p} = 0$ в (3.21), тогда как для линейных необходимо разложить (3.21) до линейного члена по \mathbf{p} , например,

$$\frac{1}{uk^2 + w|\mathbf{p} + \mathbf{k}|^2} = \frac{1}{(u+w)k^2} \left\{ 1 - \frac{2w}{(u+w)} \frac{(\mathbf{p}\mathbf{k})}{k^2} \right\}.$$

С учётом формул:

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{k} k_i f(k) &= 0, & \int d\mathbf{k} \frac{k_i k_s}{k^2} f(k) &= \frac{\delta_{is}}{d} \int d\mathbf{k} f(k), \\ \int d\mathbf{k} \frac{k_i k_s k_l k_p}{k^4} f(k) &= \frac{\delta_{is}\delta_{lp} + \delta_{il}\delta_{sp} + \delta_{ip}\delta_{sl}}{d(d+2)} \int d\mathbf{k} f(k), \end{aligned} \quad (3.22)$$

где $f(k)$ это любая функция, зависящая только от $k = |\mathbf{k}|$, все итоговые интегралы сводятся к скалярному интегралу

$$J(m) = \int_{k>m} d\mathbf{k} \frac{1}{k^{d+y}} = S_d \frac{m^{-y}}{y}, \quad (3.23)$$

где

$$S_d = 2\pi^{d/2} / \Gamma(d/2) \quad (3.24)$$

есть поверхность единичной сферы в d -мерном пространстве, а $\Gamma(\dots)$ это гамма-функция Эйлера.

Конечный результат состоит из слагаемых двух типов, пропорциональных $P_{12}^\perp(\mathbf{p})$ и $P_{12}^\parallel(\mathbf{p})$, соответственно. Благодаря поперечности полей θ, θ' , последнее нужно отбросить. (Это бы случилось автоматически, если бы мы включили соответствующий проектор в вершину (3.11), но мы этого не делали для краткости). На практике, проще всего собрать все члены, пропорциональные $\delta_{12} p^2$ и отбросить все слагаемые пропорциональные $p_1 p_2$ по ходу вычисления. Остаётся только выразить амплитуду D_0 в (3.20) в терминах ренормированных переменных: $D_0 = g\nu^3 \mu^y$.

Тогда конечный результат такой:

$$\Sigma_{12}(\Omega = 0, \mathbf{p}) = -\nu p^2 P_{12}^\perp(\mathbf{p}) \frac{\hat{g}}{2dy} \left(\frac{\mu}{m}\right)^y \left\{ \frac{(d-1)}{1+w} + \frac{\alpha(u-w)}{u(u+w)^2} \right\}. \quad (3.25)$$

Здесь мы перешли к новой константе связи

$$\hat{g} = gS_d/(2\pi)^d, \quad (3.26)$$

где S_d из (3.24).

Тогда в схеме минимальных вычитаний ренормализационная константа Z_κ , которая должна убрать полюс в выражении (3.25) в ренормированном аналоге функции (3.18) (по сути, мы сделали замену $\kappa_0 \rightarrow \kappa Z_\kappa$ в затравочном слагаемом) имеет вид:

$$Z_\kappa = 1 - \frac{\hat{g}}{2dwy} \left\{ \frac{(d-1)}{(1+w)} + \frac{\alpha(u-w)}{u(u+w)^2} \right\}, \quad (3.27)$$

тогда как соответствующая аномальная размерность:

$$\gamma_\kappa = \frac{\hat{g}}{2dw} \left\{ \frac{(d-1)}{(1+w)} + \frac{\alpha(u-w)}{u(u+w)^2} \right\}, \quad (3.28)$$

плюс поправки порядка \hat{g}^2 и выше.

Интересно заметить, что выражение (3.28) буквально совпадает с таким же выражением для скалярного поля, переносимого тем же ансамблем скорости; см. уравнение (3.24) в [88]. Похожее совпадение между пассивным скалярным и магнитным полем в кинематическом подходе ранее наблюдалось для несжимаемого случая (см. например, [43]); иногда такое сходство остаётся и для двухпетлевого приближения [35].

3.3. РГ уравнения, неподвижная точка и критические размерности

В этой работе мы только поверхностно обсуждаем вывод инфракрасного скейлингового поведения из уравнений ренормгруппы; всё почти точно так же, как и для скалярного случая, обсуждённого в [88] в подробностях.

Мультипликативная ренормируемость теоретико-полевой модели (3.8) позволяет нам получить стандартным путём РГ уравнения для ренормированных функций Грина

$$G(e, \mu, \dots) = \langle \Phi \dots \Phi \rangle_R.$$

Здесь $e = \{g, \nu, u, v, w, c, t, \alpha\}$ это полный набор ренормированных параметров, μ – характерный масштаб импульсов, а под многоточием мы понимаем другие аргументы (времена/частоты и координаты/импульсы). Для удобства мы ввели здесь три безразмерных отношения: $u_0 = \mu_0/\nu_0$ и $v_0 = \chi_0/\nu_0$, связанные с коэффициентами вязкости и диффузии модели (3.1), (3.2); $w_0 = \kappa_0/\nu_0$ относится к магнитному коэффициенту диффузии; u, v, w – их ренормированные аналоги.

Уравнение ренормгруппы показывает независимость ренормированных функций Грина от изменения масштаба μ , при фиксированных затравочных параметрах e_0 :

$$\left\{ \tilde{\mathcal{D}}_\mu + \sum_{\Phi} N_{\Phi} \gamma_{\Phi} \right\} G(e, \mu, \dots) = 0. \quad (3.29)$$

Здесь и далее мы считаем, что $\mathcal{D}_x \equiv x \partial_x$ для любой переменной x , $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$ есть операция $\mathcal{D}_\mu \equiv \mu \partial_\mu$ при фиксированных e_0 . В терминах ренормированных

переменных, она принимает значение :

$$\tilde{\mathcal{D}}_\mu = \mathcal{D}_\mu + \beta_g \partial_g + \beta_u \partial_u + \beta_v \partial_v + \beta_w \partial_w - \gamma_\nu \mathcal{D}_\nu - \gamma_c \mathcal{D}_c. \quad (3.30)$$

Аномальная размерность γ_F величины F (поле или параметр) определяется соотношением

$$\gamma_F = \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_F, \quad (3.31)$$

и β -функции для безразмерных параметров (“констант связи”):

$$\begin{aligned} \beta_g &= \tilde{\mathcal{D}}_\mu g = g[-y - \gamma_g], \\ \beta_u &= \tilde{\mathcal{D}}_\mu u = -u\gamma_u, \end{aligned} \quad (3.32)$$

то же будет и для β_v, β_w . Второе выражение следует из определения и соотношений типа (3.14).

Заметим, что из определения w_0 следует, что $Z_\kappa = Z_\nu Z_w$, так что

$$\beta_w = w[\gamma_\nu - \gamma_w]. \quad (3.33)$$

Возможные типы ИК асимптотического поведения связаны с ИК притягивающей неподвижной точкой в РГ уравнениях. Координаты $g_* = \{g_{i*}\}$ фиксированной точки найдены из уравнений

$$\beta_i(g_*) = 0, \quad (3.34)$$

где $g = \{g_i\}$ полный набор констант связи, а $\beta_i = \tilde{\mathcal{D}}_\mu g_i$ — соответствующие им β -функции. Свойства фиксированной точки определяются матрицей

$$\Omega_{ij} = \partial\beta_i/\partial g_j|_{g=g_*}. \quad (3.35)$$

Для ИК неподвижной точки матрица Ω положительно определена (потому как вещественные части всех собственных чисел положительны).

Анализ представлен в [64] (см. также [88]): в приближении главного порядка (одной петли) показано, что РГ уравнения для модели \mathcal{S}_v , соответствующей стохастической задаче Навье-Стокса (3.1), (3.2), имеют единственную ИК притягивающую неподвижную точку в физической области параметров ($g, u, v > 0$):

$$\hat{g}_* = \frac{4dy}{3(d-1)} + O(y^2), \quad u_* = 1 + O(y), \quad v_* = 1 + O(y). \quad (3.36)$$

Для определённых соотношений между ренормализационными константами [64], точный результат

$$\gamma_v^* = y/3 \quad (3.37)$$

(без поправок порядка y^2 и выше). Здесь и далее, γ_i^* – значение аномальной размерности γ_i в неподвижной точке.

Теперь подставим однопетлевые выражения (3.28), (3.36) и точный результат (3.37) в уравнение (3.33). Тогда уравнение $\beta_w = 0$ сводится (после некоторых простых алгебраических преобразований) к уравнению

$$(w-1)[(d-1)(w+1)(w+2) + 2\alpha] = 0, \quad (3.38)$$

которое имеет только одно положительное решение $w_* = 1$, с возможными поправками типа $O(y)$ и выше.

Так как функция $\beta_{g,u,v}$ не зависит от w , новое собственное число матрицы (3.35) совпадает с диагональным элементом

$$\partial\beta_w/\partial w|_{g=g_*} = y \{3(d-1) + \alpha\} / 6(d-1) > 0;$$

так что неподвижная точка (3.36) и $w_* = 1$ полной модели остаётся ИК притягивающей.

Существование ИК притягивающей неподвижной точки в физической области параметров подразумевает наличие скейлингового поведения в ИК области. Критическая размерность некоторой величины F (поле или параметр) определяется соотношением (см. [41, 43])

$$\Delta_F = d_F^k + \Delta_\omega d_F^\omega + \gamma_F^*, \quad \Delta_\omega = 2 - \gamma_\nu^* = 2 - y/3. \quad (3.39)$$

Здесь d_F^k и d_F^ω – канонические размерности величины F , γ_F^* – значение аномальной размерности γ_F в неподвижной точке, а Δ_ω – критическая размерность частоты.

Критические размерности полей и параметров модели, описанной действием \mathcal{S}_ν из уравнения (3.8), представлены в [64]; см. также [88]. В добавок, наша полная модель включает в себя ещё две критические размерности:

$$\Delta_\theta = -1 + y/6, \quad \Delta_{\theta'} = d + 1 - y/6. \quad (3.40)$$

Эти выражения точные, потому как поля θ и θ' не ренормируются.

3.4. Составные поля и их размерности

Важную роль в последующих рассуждениях будут играть составные поля (“составные операторы” в квантово-полевой терминологии). В общем случае локальный составной оператор это моном или полином, построенный из начальных (обычных) полей $\Phi(x)$ и их производных конечного порядка в одной точке пространства-времени x . В функциях Грина с такими объектами новые УФ-расходимости появляются из-за совпадения аргументов полей. Их нужно устранять дополнительной процедурой ренормировки. Как правило, операторы при ренормировке смешиваются: ренормированные операторы (чьи функции Грина УФ-конечны) задаются конечной суммой изначальных мономов. Как бы то ни было, в нашем случае имеет место только самый простой случай, когда начальный оператор $F(x)$ и его ренормированный аналог $F^R(x)$ связаны мультипликативной ренормировкой $F(x) = Z_F F^R(x)$ с единственной ренормализационной постоянной Z_F . Тогда критическая размерность Δ_F оператора F задаётся тем же самым выражением (3.39) и, в общем случае, отличается от простой суммы размерностей полей и производных, составляющих оператор.

Мы сконцентрируемся на неприводимом тензорном операторе, построенном только из полей θ . Он имеет вид

$$F_{nl} \equiv \theta_{i_1}(x) \cdots \theta_{i_l}(x) (\theta_i(x)\theta_i(x))^s + \dots, \quad (3.41)$$

где $l \leq n$ число свободных тензорных значков, и $n = l + 2s$ – число полей θ входящих в оператор; тензорные значки и аргумент x величины F_{nl} опущены. Многоточие подразумевает подходящие вычитания, в которых есть дельта-символы Кронекера, которые делают выражение бесследовым

с учётом всех свёрток по парным индексам. Например, $\theta_i\theta_j - \delta_{ij}(\theta_k\theta_k/d)$ и так далее.

Полная каноническая размерность любой 1-неприводимой функции Грина Γ с одним оператором $F(x)$ и произвольным числом начальных полей (формальный индекс УФ-расходимости) определяется выражением

$$\delta_\Gamma = d_F - \sum_{\Phi} N_\Phi d_\Phi, \quad (3.42)$$

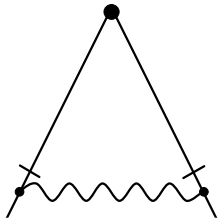
где N_Φ – число полей, входящих в Γ , d_Φ – их полные канонические размерности, и d_F – каноническая размерность оператора. Поверхностные УФ-расходимости могут появиться только в функциях Γ с неотрицательным целым δ_Γ . Для операторов (3.41) из Таблицы 1 в [88] легко понять, что $d_F = -n$. Линейность уравнения (3.6) по полю θ накладывает ограничение: N_θ в (3.42) не может превышать число полей θ в операторе F . Прямой анализ показывает, что поверхностные УФ-расходимости ($\delta_\Gamma \geq 0$) для F_{nl} могут появиться только в 1-неприводимых функциях с $N_{\theta'} = N_v = 0$ и $N_\theta = n$; все они логарифмические: $\delta_\Gamma = 0$. Простая проверка показывает, что смешанный пропагатор $\langle \theta v \rangle_0$ не появляется в нужных диаграммах Фейнмана; другими словами, последний член в правой части уравнения (3.6) для нас не важен. Без этого слагаемого модель становится $O(d)$ -инвариантной. В свою очередь, это означает, что неприводимые операторы с разным числом l не могут смешиваться друг с другом. И, наконец, мы заключаем, что операторы (3.41) ренормируются мультипликативно: $F_{nl} = Z_{nl} F_{nl}^R$ и переходим к однопетлевому расчёту ренормализационных постоянных Z_{nl} и критической размерности оператора (3.41), которую мы обозначим за Δ_{nl} .

Пусть $\Gamma(x; \theta)$ это производящий функционал 1-неприводимых функ-

ций Грина с одним составным оператором $F(x) = F_{nl}$ и любым числом полей θ . Здесь $x = \{t, \mathbf{x}\}$ это аргумент оператора, а θ – функциональный аргумент, “классический аналог” случайного поля θ . Нас интересует n -ый член разложения $\Gamma(x; \theta)$ по θ , который мы обозначим за $\Gamma_n(x; \theta)$. Можно записать его так:

$$\Gamma_n(x; \theta) = \int dx_1 \cdots \int dx_n \theta(x_1) \cdots \theta(x_n) \langle F(x) \theta(x_1) \cdots \theta(x_n) \rangle_{1-\text{ir}}. \quad (3.43)$$

В однопетлевом приближении функцию (3.43) диаграммно можно изобразить так:

$$\Gamma_n(x; \theta) = F(x) + \frac{1}{2} \text{Diagram} \quad (3.44)$$


Первое слагаемое это древесное (беспетлевое) приближение, а жирная точка с двумя выходящими линиями на диаграмме обозначает оператор вершины, мы его обсудим позже.

Ренормализационная константа Z_{nl} для оператора (3.41) находится из условия, что ренормированный аналог $\Gamma_n^R = Z_{nl}^{-1} \Gamma_n$ функции (3.43) УФ-конечен в терминах ренормированных параметров.

Для практических расчётов удобно свернуть тензоры (3.41) с произвольным постоянным вектором $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_i\}$. Тогда получаем скалярный оператор:

$$F^{(n,l)} = (\lambda_i \theta_i)^l (\theta_i \theta_i)^s + \dots, \quad (3.45)$$

где вычитания, обозначенные за многоточия, обязательно включают множители $\lambda^2 = \lambda_i \lambda_i$.

С необходимой аккуратностью можно заменить ренормализационные постоянные в диаграммах на единицы, так что $D_0 \rightarrow g\nu^3 \mu^y$, $u_0 \rightarrow u$ и

так далее. Более того, нас интересуют аномальные размерности в критической точке, так что можно в дальнейшем положить $u = w = 1$. Так как диаграмма расходится логарифмично, можно положить внешние частоты и импульсы равными нулю.

Как и для расчёта диаграммы собственной энергии в разделе 3.2.2, здесь и далее мы используем цифры (вместо латинских букв) для обозначения тензорных значков. Тогда диаграмму в (3.44) можно переписать так:

$$V_{12}(\theta) C_{1278} \theta_7 \theta_8, \quad (3.46)$$

где $V_{12}(\theta)$ вершинный оператор (нарисованный как жирная точка на диаграмме), поля $\theta_7 \theta_8$ (обозначенные как волнистые хвосты) присоединены к нижним вершинам (3.11) (маленькие точки), C_{1278} это “ядро” диаграммы.

Оно имеет вид

$$C_{1278} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int_{k>m} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{g\nu^3 \mu^y R_{1278}}{(\omega^2 + \nu^2 k^4)^2} \quad (3.47)$$

с тензорными множителями из вершин (3.11) и проекторами из пропагаторов:

$$R_{1278} = P_{13}^\perp(\mathbf{k}) P_{24}^\perp(\mathbf{k}) \left\{ P_{56}^\perp(\mathbf{k}) + \alpha P_{56}^\parallel(\mathbf{k}) \right\} V_{375}(\mathbf{k}) V_{486}(\mathbf{k}). \quad (3.48)$$

Интегрирование по частоте проводится так:

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{(\omega^2 + \nu^2 k^4)^2} = \frac{1}{4\nu^3 k^6}. \quad (3.49)$$

Свёртка векторных значков в (3.48) приводит к следующим интегралам по импульсу:

$$\int_{k>m} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^{d+y}} P_{12}^\perp(\mathbf{k}) P_{78}^\parallel(\mathbf{k}) \quad (3.50)$$

для поперечного вклада в (3.7) и

$$\int_{k>m} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^{d+y}} P_{17}^\perp(\mathbf{k}) P_{28}^\perp(\mathbf{k}) \quad (3.51)$$

для продольного. С помощью соотношений (3.22), все эти интегралы сводятся к скалярному интегралу (3.23).

Сложив все эти вклады вместе и свернув результат с полями $\theta_7\theta_8$, получаем для (3.46) следующее выражение:

$$\frac{-D_0}{4d(d+2)\nu^3} V_{12} \{T_{12} + \alpha L_{12}\}, \quad (3.52)$$

где

$$T_{12} = (d+1)\delta_{12}\theta^2 - 2\theta_1\theta_2$$

и

$$L_{12} = \delta_{12}\theta^2 + (d^2 - 2)\theta_1\theta_2.$$

Теперь вернёмся к вершинному множителю

$$V_{12} = \frac{\delta^2 F_{nl}(x)}{\delta\theta_1(x_1)\delta\theta_2(x_2)}. \quad (3.53)$$

Можно его переписать в виде

$$V_{12} = \frac{\partial^2 F_{nl}(w)}{\partial w_1 \partial w_2} \delta(x-x_1)\delta(x-x_2), \quad (3.54)$$

где

$$F^{(n,l)} = (\lambda_i w_i)^l (w_i w_i)^s + \dots, \quad (3.55)$$

с заменой $w_i \rightarrow \theta_i(x)$.

Дифференцирование даёт

$$\begin{aligned} \partial^2 F^{(n,l)} / \partial w_1 \partial w_2 &= 2s(w^2)^{s-2} (\lambda w)^l [\delta_{12} w^2 + 2(s-1)w_1 w_2] \\ &+ l(l-1)(w^2)^s (\lambda w)^{l-2} \lambda_1 \lambda_2 \end{aligned}$$

$$+ 2ls(w^2)^{s-1}(\lambda w)^{l-1}(w_1\lambda_2 + w_2\lambda_1), \quad (3.56)$$

где $w^2 = w_k w_k$ и $(\lambda w) = \lambda_k w_k$.

Теперь нужно свернуть вершинный множитель (3.56) с выражением (3.52). Чтобы найти ренормализационную постоянную, достаточно оставить только слагаемые, пропорциональные моному в (3.45) и отбросить все слагаемые, включающие в себя множители $\lambda^2 = \lambda_i \lambda_i$. Если сложить все нужные составляющие, то получим:

$$\Gamma_{nl}(x) = F_{nl}(x) \left\{ 1 - \left(\frac{\mu}{m} \right)^y \frac{\hat{g}(Q_1 + \alpha Q_2)}{8yd(d+2)} \right\}, \quad (3.57)$$

где

$$\begin{aligned} Q_1 &= -n(n+d)(d-1) + (d+1)l(l+d-2), \\ Q_2 &= -n(n+nd-d)(d-1) + l(l+d-2) \end{aligned} \quad (3.58)$$

и \hat{g} определена в (3.26).

Условие того, что ренормированный аналог функции (3.43) УФ-конечен в схеме минимальных вычитаний даёт:

$$Z_{nl} = \left\{ 1 - \frac{\hat{g}}{8yd(d+2)} (Q_1 + \alpha Q_2) \right\}, \quad (3.59)$$

и аномальная размерность $\gamma_{nl} = \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_{nl}$:

$$\gamma_{nl} = \frac{\hat{g}}{8d(d+2)} (Q_1 + \alpha Q_2) \quad (3.60)$$

(напоминаем, что мы уже положили $u = w = 1$).

Используя обычное выражение (3.39) для критической размерности Δ_{nl} в неподвижной точке (3.36), мы получаем:

$$\Delta_{nl} = n\Delta_\theta + \gamma_{nl}^* = \frac{ny}{6} + \frac{y(Q_1 + \alpha Q_2)}{6(d-1)(d+2)} \quad (3.61)$$

с Δ_θ из (3.40). В частности, для скалярного оператора получаем выражение:

$$\Delta_{n0} = \frac{-yn}{6(d+2)} \left\{ (n-2) + \alpha \frac{(3n+d-4)}{(d-1)} \right\}, \quad (3.62)$$

которое является отрицательным и убывает при росте параметра α :

$$\partial\Delta_{n0}/\partial\alpha < 0. \quad (3.63)$$

Как мы увидим в следующем разделе, это значит, что аномальный скейлинг точно есть в нашей модели, и проявляется сильнее с увеличением степени сжимаемости.

Для фиксированного n , размерности (3.61) составляют подобие иерархии по параметру l (который измеряет “степень анизотропии”):

$$\partial\Delta_{nl}/\partial l > 0. \quad (3.64)$$

В отличие от Гауссовой модели (см., например, [15, 56]), эта иерархия становится более ярко выраженной при увеличении α :

$$\partial^2\Delta_{nl}/\partial l\partial\alpha > 0. \quad (3.65)$$

3.5. Операторное разложение и аномальный скейлинг

3.5.1. Общие обсуждения и изотропный случай

Величинами, интересными для нас, в частности являются парные корреляционные функции (ренормированных аналогов) операторов (3.41).

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением одновременных корреляций, потому что именно они являются галилеево инвариантными и не име-

ют сильной зависимости от ИК масштаба $m = L^{-1}$ из-за переноса мелко-масштабных вихрей к крупномасштабным. Тогда можно написать:

$$\begin{aligned} \langle F_{nl}(t, \mathbf{x}) F_{qj}(t, \mathbf{x}') \rangle &= \mu^{d_F} \nu^{d_F^\omega} \eta_{nl,qj}(\mu r, mr, c/\mu\nu) \\ &\simeq \mu^{d_F} \nu^{d_F^\omega} (\mu r)^{-\Delta_{nl}-\Delta_{qj}} \zeta_{nl,qj}(mr, c(r)), \end{aligned} \quad (3.66)$$

где $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{x}' - \mathbf{x}|$; также предположим, что $n, q \geq 1$.

Первое уравнение следует из простого анализа размерностей; так d_F^ω и d_F канонические размерности корреляционных функций, заданные простыми суммами соответствующих размерностей операторов, $\eta(\dots)$ – некоторая функция полностью безразмерных параметров. Мы выразили правую часть в ренормированных переменных, масса μ является заменой УФ масштаба импульсов Λ . Второе (приближённое) равенство верно для асимптотики ИК масштаба $\mu r \gg 1$ и следует из решения РГ уравнения при наличии ИК притягивающей неподвижной точки; Δ_{nl} и Δ_{qj} – критические размерности операторов в левой части, заданные в (3.61). Далее мы отбрасываем РГ инвариантную переменную $c(r) = c(\mu r)^{\Delta_c}/(\mu\nu)$, ограниченную ИК масштабом; для более подробного объяснения см. [88]. Также мы можем отбросить индексы скейлинговых функций η и ζ и не учитывать зависимость от параметров ν, μ – они фиксированы для конкретного физического случая.

Инерционный интервал подразумевает дополнительное неравенство $mr \ll 1$. Форма функций ζ в (3.66) не определяется только РГ уравнениями; они должны быть дополнены Операторным Разложением (ОР). В нашем случае, Операторное Разложение утверждает, что одновременное произведение $F_{nl}(x) F_{qj}(x')$ в $\mathbf{x} = (\mathbf{x} + \mathbf{x}')/2 = \text{const}$ и $\mathbf{r} = \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rightarrow 0$ может

быть представлено в виде

$$F_{nl}(x)F_{qj}(x') \simeq \sum_F C_F(\mathbf{r})F(t, \mathbf{x}). \quad (3.67)$$

Здесь функции C_F это коэффициенты Вильсона, регулярные по m^2 , а F , в общем случае, все возможные локальные составные операторы, не запрещённые симметрией модели и левой части. В нашем же случае это значит, что дают вклад только галилеево инвариантные операторы. Если у этих операторов есть дополнительные векторные значки, они свёрнуты с соответствующими (дополнительными) значками функций C_F .

Не умаляя общности, всегда можно предположить, что разложение (3.67) сделано в неприводимых операторах с определёнными критическими размерностями Δ_F . Корреляционные функции (3.66) определяются как усреднение выражения (3.67) в весом $\exp \mathcal{S}(\Phi)$, где $\mathcal{S}(\Phi)$ это (ренормированный) функционал действия (3.16). Тогда с правой стороны появляются величины $\langle F \rangle$. Рассмотрим первый, изотропный, случай. Тогда выживут только вклады со скалярными операторами. Асимптотическое поведение при $m \rightarrow 0$ можно найти из РГ уравнений для операторов F , оно имеет вид $\langle F \rangle \propto m^{\Delta_F}$ (с заменой $\Delta_m = 1$).

Совместив выражения (3.66) и (3.67), получаем следующее представление для асимптотики в инерционном интервале для скейлинговых функций ζ :

$$\zeta(mr) \simeq \sum_F A_F(mr)^{\Delta_F}, \quad (3.68)$$

где все коэффициенты $A_F = A_F(mr)$ регулярны по $(mr)^2$.

Сингулярности при $mr \rightarrow 0$ (и аномальный скейлинг) появляются из вкладов в (3.68) из-за операторов с *отрицательными* критическими раз-

мерностями. Такие операторы названы “опасными” в [43]. Если число таких операторов конечно, главный вклад будет определяться оператором с наименьшей размерностью. Однако, можно утверждать, что если по крайней мере один оператор появляется в модели, то их появляется бесконечно много, и спектр их размерностей не ограничен снизу ; см. Аппендикс А для более подробного обсуждения. В нашем случае, исходя из выражения (3.62), видно, что все скалярные операторы F_{n0} являются опасными, и их размерности Δ_{n0} безгранично растут при росте n .

К счастью, линейность уравнения (3.6) по полю θ накладывает ограничение: число полей θ во всех составных операторах в разложении (3.67) не может превышать их число в левой части равенства; см. пояснения в уравнении (3.42) в разделе 3.4. В свою очередь, это значит, что только конечное число операторов типа F_{k0} может дать вклад в Операторное Разложение. Для произведения (3.67), это операторы с $k \leq n + q$. Так что,

$$\zeta(mr) \simeq \sum_{k=0}^{n+q} A_k(mr) (mr)^{\Delta_{k0}} + \dots \quad (3.69)$$

где Δ_{k0} взята из (3.62); многоточие обозначает “более дальние” поправки в поведении при малых mr , получающиеся из операторов с производными и др. Главный вклад в (3.69) определяется оператором с максимально возможным $k = n + q$, так что конечное выражение для главного вклада в асимптотику корреляционной функции (3.66) в инерционном интервале $\mu r \gg 1$, $mr \ll 1$ имеет вид:

$$\langle F_{nl} F_{qj} \rangle \simeq (\mu r)^{-\Delta_{nl} - \Delta_{qj}} (mr)^{\Delta_{n+q,0}}. \quad (3.70)$$

Как уже говорилось в предыдущем разделе, неравенство (3.63) означает, что аномальный скейлинг становится более ярко выраженным при росте

степени сжимаемости. Также заменим, что неравенство

$$\Delta_{n+q,0} < \Delta_{nl} + \Delta_{qj}, \quad (3.71)$$

следующее из явных выражений (3.61) и, на самом деле, требуемое теорией вероятности, показывает, что выражение (3.70) расходится при $r \rightarrow 0$.

3.5.2. Эффекты крупномасштабной анизотропии

Рассмотрим эффекты анизотропии, введённой в систему на больших масштабах $\sim L$ через, скажем, крупномасштабное поле $B_i^0 = n_i B^0$ или через корреляционную функцию искусственной случайной силы. Тогда неприводимые тензорные составные операторы имеют ненулевое среднее значение, зависящее от вектора \mathbf{n} : например, среднее значение оператора второго ранга пропорционально неприводимому тензору $n_i n_j - \delta_{ij}/d$. В общем случае, среднее значение любого неприводимого оператора l -го ранга пропорционально тензору $n_{i_1} \dots n_{i_l} + \dots$, где многоточие подразумевает подходящие вычитания с δ -символами Кронекера, которые делают тензор неприводимым. При подстановке в Операторное Разложение произведения двух скалярных операторов, их тензорные значки сворачиваются с соответствующими значками коэффициентных функций $C_F(\mathbf{r})$. Это приводит к появлению так называемых полиномов Гегенбауэра (d -мерные аналоги полиномов Лежандра $P_l(\cos \vartheta)$, где ϑ это угол между векторами \mathbf{r} и \mathbf{n}). Для обычной анизотропии с правой стороны появляются d -мерные сферические гармоники, а для произведения тензорных операторов появляются их тензорные аналоги.

Рассмотрим в качестве самого простого примера корреляционную функ-

цию (3.66) двух скалярных операторов в инерционном интервале:

$$\begin{aligned} \langle F_{n0}(t, \mathbf{x}) F_{q0}(t, \mathbf{x}') \rangle &\simeq r^{-\Delta_{n0} - \Delta_{q0}} \times \\ &\times \sum_{l=0}^N c_l P_l(\cos \vartheta) (mr)^{\Delta_{Nl}} + \dots \end{aligned} \quad (3.72)$$

с $N = n + q$ и Δ_{Nl} , взятой из (3.61); c_l – числовые коэффициенты, многочлен – вклады с $l > N$. Неравенство (3.64) значит, что анизотропные вклады в (3.72) проявляют некоторую иерархию, связанную со степенью анизотропии l : главный вклад задаётся изотропной “оболочкой” ($l = 0$), тогда как вклады с $l > 1$ дают только поправки, ослабевающие при $mr \rightarrow 0$ тем быстрее, чем больше степень анизотропии l . Такая иерархия, полученная и ранее в численных моделях, например, в [13–17, 33, 45, 56, 57, 88], подтверждает гипотезу Колмогорова о локальном восстановлении изотропии.

Неравенство (3.65) значит, что иерархия (3.64) становится сильнее с ростом степени сжимаемости α : анизотропные поправки становятся дальше один от другого, и от изотропного вклада, в отличие от ситуации, рассмотренной ранее для пассивного векторного поля, переносимого ансамблем Крейчнана [15]. С похожим различием для скалярных полей мы столкнулись недавно в работе [88]. Это явление означает, что результаты, полученные на базе упрощённой “синтетической” модели нужно использовать с осторожностью.

3.5.3. Структурные функции

Явление аномального скейлинга часто обсуждается в терминах структурных функций; см., например, [1] и цитированную там литературу. Для

векторного случая можно их определить так:

$$S_p(\mathbf{r}) = \langle [\theta_r(t, \mathbf{x}) - \theta_r(t, \mathbf{x}')]^{2p} \rangle, \quad (3.73)$$

где θ_r – компонента поля θ , сонаправленная с вектором $\mathbf{r} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$. Для простоты в этом разделе мы ограничимся изотропным случаем и рассмотрением структурных функций чётного порядка.

После биномиального разложения и декомпозиции в неприводимых тензорах, функция (3.73) представлена в виде линейной комбинации двух типов слагаемых. Первый тип включает в себя парные корреляционные функции (3.66) операторов (3.41) с $n + q = p$ и всеми возможными значениями l, j . Их поведение в инерционном интервале описывается выражением (3.70).

Второй тип включает в себя средние значения $\langle F_{pk} \rangle$ операторов из одного семейства; независимо от \mathbf{r} . РГ анализ показывает, что аналог (3.70) для них имеет вид:

$$(m/\mu)^{\Delta_{pk}}; \quad (3.74)$$

для изотропного случая выживает только слагаемое $k = 0$. Можно переписать это в немного более искусственном виде:

$$(m/\mu)^{\Delta_{p0}} = (mr)^{\Delta_{p0}} (\mu r)^{-\Delta_{p0}}. \quad (3.75)$$

В соответствии с (3.70) и с неравенством (3.71), видим, что вклад среднего значения является главным вкладом в асимптотику ИК поведения (как и прежде $n + q = p$).

Тот факт, что структурные функции в кинематической МГД модели являются суперпозицией постоянного члена и степенных поправок, нужно

принимать в расчёт при интерпретации экспериментальных данных, хотя обычно они аппроксимируются только степенными членами. Структурные функции, по крайней мере, с теоретической точки зрения, являются более удобными объектами для изучения моделей, имеющих симметрию относительно сдвига $\theta \rightarrow \theta + \text{const}$, как скалярная модель трейсера; см. обсуждение, например, в [56, 88].

4. РГ анализ вблизи "особой" размерности $d=4$:

Уравнение НС и перенос скалярных полей

4.1. Описание модели

Как уже было показано в первой главе, уравнение (1.1) вместе с уравнением неразрывности можно переписать в виде двух новых уравнений (1.7), (1.8).

Корреляционная функция случайной силы, входящей в уравнение Навье-Стокса определяется аналогично (1.10), (1.11):

$$\langle f_i(t, \mathbf{x}) f_j(t', \mathbf{x}') \rangle = \frac{\delta(t - t')}{(2\pi)^d} \int_{k>m} d^d \mathbf{k} D_{ij}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}, \quad (4.1)$$

где

$$\tilde{D}_{ij}(\mathbf{k}) = g_{10} \nu_0^3 k^{4-d-y} \left\{ P_{ij}(\mathbf{k}) + \alpha Q_{ij}(\mathbf{k}) \right\}. \quad (4.2)$$

Здесь d это размерность пространства, $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ и $Q_{ij}(\mathbf{k}) = k_i k_j / k^2$ это поперечный и продольный проекторы, $k = |\mathbf{k}|$, параметр α является свободным, имеет смысл степени сжимаемости, амплитуда g_{10} это константа связи (формальный параметр разложения в теории возмущений); соотношение $g_0 \sim \Lambda^y$ задает типичный УФ масштаб, обратный длине диссипации. Параметр $m = L^{-1}$ обеспечивает ИК регуляризацию; её точный вид не имеет значения, поэтому регуляризация была выбрана в самой простой форме обрезания. Показатель y обеспечивает УФ регуляризацию и поэтому играет роль формально малого параметра разложения [90]. Бо-

лее реалистичное (физическое) значение задаётся пределом $y \rightarrow 4$, когда функцию в (4.2) можно рассматривать как степенное изображение функции $\delta(\mathbf{k})$: такой случай соответствует идеальной картине ввода энергии в систему на бесконечно больших масштабах. Для галилеевой инвариантности функция (4.2) должна быть дельта-коррелирована по времени [43].

4.2. Теоретико-полевая формулировка модели

4.2.1. Функционал действия и правила Фейнмана

Согласно общей теореме [80, 90], стохастическая задача (1.7) – (4.2) эквивалентна теоретико-полевой модели с удвоенным набором полей $\Phi = \{v_i, v'_i, \phi, \phi'\}$ и функционалом действия Де Доминисиса-Янссена, который в компактной форме записывается в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\Phi) = & \frac{v'_i D_{ik} v'_k}{2} + v'_i \left\{ -\partial_t v_i - v_j \partial_j v_i + \nu_0 [\delta_{ik} \partial^2 - \partial_i \partial_k] v_k + u_0 \nu_0 \partial_i \partial_k v_k - \partial_i \phi \right\} \\ & + \phi' [-\partial_t \phi + v_j \partial_j \phi + v_0 \nu_0 \partial^2 \phi - c_0^2 (\partial_i v_i)], \end{aligned} \quad (4.3)$$

где D_{ik} это корреляционная функция (4.2). Здесь подразумеваются интегрирования по переменным \mathbf{x} и t , а также суммирование по повторяющимся индексам. Мы перешли к новым переменным $u_0 = \mu_0/\nu_0 > 0$ и ввели новое слагаемое $v_0 \nu_0 \phi' \partial^2 \phi$ с другим положительным безразмерным параметром v_0 , которое необходимо для мультипликативной ренормировки. Если бы мы не ввели дополнительное слагаемое, оно появилось бы при ренормировке.

В стандартном подходе, если мы применяем метода квантовой теории поля к стохастическим дифференциальным уравнениям, размерность

пространства d играет пассивную роль, и на самом деле параметр разложения это y ; детальное обсуждение можно найти в монографиях [43, 90]. Наш поход похож на анализ несжимаемого уравнение Навье-Стокса вблизи размерности $d = 2$ [83, 91, 92]. В данном случае появляется дополнительная расходимость в функции Грина $v'v'$. Можно её устранить подходящим локальным контрчленом $v'_i \partial^2 v'_i$. Также необходимо построить схему разложения по двум параметрам y и $\varepsilon' = d - 2$. В первой главе была рассмотрена такая же модель (4.3) при фиксированной размерности $d = 3$, для неё функционал действия (4.3) содержит все необходимые слагаемые для ренормализации [64, 88, 93]. Однако из размерного анализа (см. далее) следует, что при $d = 4$ появляется дополнительная расходимость в функции Грина $v'v'$. Так что чтобы сохранить ренормируемость модели при $d = 4$, функцию $\tilde{D}_{ij}(\mathbf{k})$ in (4.1) нужно заменить на $D_{ij}(\mathbf{k})$, где

$$D_{ij}(\mathbf{k}) = g_{10}\nu_0^3 k^{4-d-y} \left\{ P_{ij}(\mathbf{k}) + \alpha Q_{ij}(\mathbf{k}) \right\} + g_{20}\nu_0^3 \delta_{ij}. \quad (4.4)$$

Здесь g_{20} это вторая константа связи, новое локальное слагаемое в правой части поглощает расходящиеся вклады от $v'v'$.

Теорию возмущений для этой модели можно выразить с помощью диаграмм Фейнмана [80, 90].

Затрабочные пропагаторы считываются из обратной матрицы гауссовой (свободной) части функционала действия, а нелинейная часть дифференциального уравнения определяет вершины взаимодействия. Графическое представление пропагаторных функций изображено на рисунке 4.1, вершин – на рисунке 4.2. Из (4.3) следует, что в диаграммной технике для данной модели есть два типа вершин, $-v'(v\partial)v$ и $-\phi'(v\partial)\phi$. Пропагаторы

в частотно-импульсном представлении имеют вид (1.14).

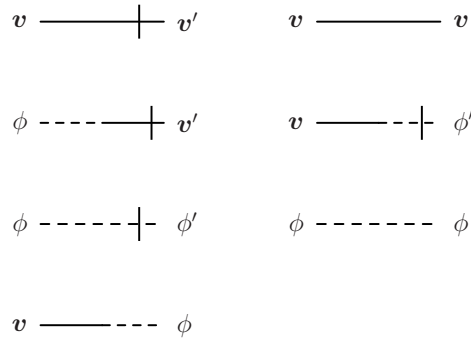


Рис. 4.1. Графическое изображение затравочных пропагаторов для модели (4.3)

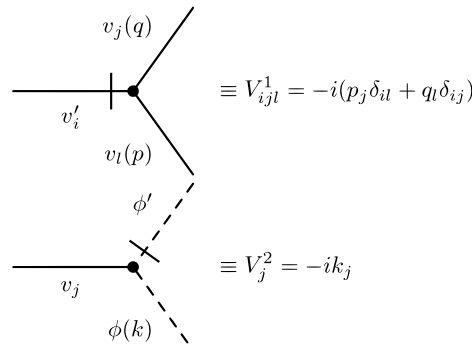


Рис. 4.2. Графическое изображение вершин для модели (4.3)

4.2.2. Канонические размерности, УФ расходимости и ренормализационные постоянные

Анализ УФ расходимостей связан с анализом канонических размерностей 1-неприводимых функций. Для такого исследования необходимо вычислить канонические размерности.

Канонические размерности модели, рассмотренной в первой главе, нужно дополнить несколькими новыми столбцами. Итак, можно определить канонические размерности для (4.3) по таблицам 1.1, 4.1. Из таблицы 4.1 видно, что модель логарифмична (константы связи $g_{10} \sim [L]^{-y}$ и

Таблица 4.1. Канонические размерности дополнительных параметров.

F	g_{10}	g_{20}	$u_0, v_0, w_0, u, v, w, g_1, g_2, \alpha$
d_F^k	y	$4 - d$	0
d_F^ω	0	0	0
d_F	y	$4 - d$	0

$g_{20} \sim [L]^{-\varepsilon}$ безразмерны) при $y = \varepsilon = 0$, так что УФ расходимости проявятся в виде полюсов по y, ε и их линейным комбинациям. Здесь обозначим $\varepsilon = 4 - d$.

Полная каноническая размерность 1-неприводимой функции Грина Γ определяется соотношением:

$$\delta_\Gamma = d + 2 - \sum_{\Phi} N_\Phi d_\Phi, \quad (4.5)$$

где N_Φ это число полей, входящих в функцию Γ , d_Φ это их полные канонические размерности. Суммирование по всем типам полей Φ подразумевается.

Поверхностные УФ расходимости (устранение которых требует введения контрчленов) могут появиться только в тех функциях Γ , для которых “формальный индекс расходимости” δ_Γ есть неотрицательное число. Анализ размерностей также необходимо дополнить следующими замечаниями:

(1) Для любой динамической модели вида (4.3) все 1-неприводимые функции Грина без полей отклика \mathbf{v}' или ϕ' неизбежно содержат замкнутые петли запаздывающих пропагаторов, поэтому не требуют контрчленов.

(2) Поле ϕ входит в вершину $\phi'(v\partial)\phi$ только под производной, это уменьшает реальный индекс расходимости для диаграмм, содержащим по-

ле ϕ :

$$\delta'_\Gamma = \delta_\Gamma - N_\phi. \quad (4.6)$$

В частности, это значит, что поле ϕ входит в контрчлены только в виде производной $\partial\phi$, и не все контрчлены, разрешенные размерным анализом, реально появятся в ренормированном действии. Например, для 1-неприводимой функции $\langle\phi'\phi\rangle$ получаем $\delta_\Gamma = 2$, $\delta'_\Gamma = 1$. Значит единственный возможный контрчлен – $\phi'\partial^2\phi$, потому что структура типа $\phi'\partial_t\phi$ запрещена.

(3) Поскольку в случайной силе (4.1) зависимость от времени выражена только δ -функцией, модель (4.3) является галилеево-инвариантной. Так что все контрчлены тоже должны быть галилеево-инвариантными. В частности, это значит, что ковариантная производная всегда должна входить в контрчлены как нечто целое. Это накладывает некоторые ограничения на возможные контрчлены: контрчлен, необходимый для 1-неприводимой функции $\langle\phi'v\phi\rangle$ с $\delta_\Gamma = 1$, $\delta'_\Gamma = 0$, должен иметь вид $\phi'(v\partial)\phi$ и может появиться только вместе со слагаемым $\phi'\partial_t\phi$. Так что такой контрчлен запрещён.

(4) Еще одно наблюдение, которое сводит к минимуму возможные типы контрчленов, – это так называемая обобщенная галилеева инвариантность с зависящим от времени параметром скорости $\mathbf{w}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_w(x) &= \mathbf{v}(x_w) - \mathbf{w}(t), & \Phi_w(x) &= \Phi(x_w), \\ x &= \{t, \mathbf{x}\}, & x_w &= \{t, \mathbf{x} + \mathbf{u}(t)\}, \\ \mathbf{u}(t) &= \int^t \mathbf{w}(t') dt', \end{aligned} \quad (4.7)$$

где Φ обозначает три поля – v' , ϕ' , ϕ . Основная идея заключается в том, что,

несмотря на то, что функционал действия не инвариантен относительно такого преобразования, он преобразуется точно так же, как и производящий функционал 1-неприводимых функций Грина:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\Phi_w) &= \mathcal{S}(\Phi) + v' \partial_t w, \\ \Gamma(\Phi_w) &= \Gamma(\Phi) + v' \partial_t w.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Последний можно переписать в виде:

$$\Gamma(\varphi) = \mathcal{S}(\varphi) + \tilde{\Gamma}(\varphi),\tag{4.9}$$

где φ это полный набор полей, $\varphi = \{\mathbf{v}, \mathbf{v}', \phi, \phi'\}$, $\mathcal{S}(\varphi)$ это функционал действия, $\tilde{\Gamma}(\varphi)$ это сумма всех 1-неприводимых диаграмм с петлями, содержащие все ультра-фиолетовые расходимости. Выражение (4.8) значит, что все контрчлены оказываются инвариантными по отношению к обобщенному преобразованию Галилея (4.7).

Этот факт исключает контрчлен $v' \nabla_t v$, инвариантный относительно обычного преобразования Галилея с постоянным вектором скорости \mathbf{w} , но не инвариантный относительно преобразования обобщенного (4.7). Из этого можно сделать вывод, что единственно возможный контрчлен для 1-неприводимой функции $\langle v'v \rangle$ с $\delta_\Gamma = 2$ это $v' \partial^2 v$, и что 1-неприводимая функция $\langle v'vv \rangle$ с $\delta_\Gamma = 1$ не имеет расходимостей. Более подробное обсуждение и примеры использования галилеевой инвариантности можно найти в [43, 81, 82, 90].

(5) Исходя из выражений (1.14), можно сделать вывод, что пропагаторы с полем ϕ , а именно $\langle v' \phi \rangle_0$, $\langle v \phi \rangle_0$, и $\langle \phi \phi \rangle_0$, содержат множитель c_0^2 или c_0^4 . Поскольку $d_c^k \neq 0$ и $d_c^\omega \neq 0$, эти множители появляются в качестве численных множителей в любой диаграмме, содержащей эти пропагаторы.

И реальный индекс расходимости этих диаграмм уменьшается на соответствующее количество единиц. В частности, любая диаграмма 1-неприводимой функции с $N_{\phi'} > N_{\phi}$ содержит множитель $c_0^{2(N_{\phi'} - N_{\phi})}$. Следовательно, контрчлены к 1-неприводимой функции $\langle \phi'v \rangle$ с $\delta_{\Gamma} = 3$ непременно сведутся к $c_0^2 \phi'(\partial v)$, тогда как структуры $\phi' \partial^2(\partial v)$, и т.д. запрещены. Другое следствие – это конечность 1-неприводимой функции $\langle \phi'vv \rangle$ с $\delta_{\Gamma} = 2$. Каждая диаграмма такой функции содержит множитель c_0^2 , который запрещает контрчлены типа $\phi'(\partial v)(\partial v)$, и т.д., а оставшаяся структура $c_0^2 \phi'v^2$ запрещена галилеевой симметрией.

(6) Еще одно интересное замечание касается функции $\langle v'v' \rangle$: её индекс расходимости $\delta_{\Gamma} = -d + 4$, поэтому функция требует введения контрчленов при $d = 2, 3$, и 4. При этом в физической ситуации $d = 3$ ($\delta_{\Gamma} = 1$) невозможно сконструировать скалярный контрчлен из двух векторных полей и одной производной.¹ так что единственно возможный путь – включить УФ обрезание Λ в контрчлен. Такие контрчлены не влияют на критическое поведение, и поэтому не интересны для нашего рассмотрения. Это значит, что для этого специального случая $d = 3$ ренормгрупповой анализ упрощается, а результаты [64, 88] нужно трактовать как предварительные. Более правильный путь – рассматривать нашу модель при $d = 2$ или $d = 4$, что позволит найти новые скейлинговые режимы, а потом вернуться к физическому значению $d = 3$.

В настоящей главе рассматривается модель (4.3) при $d = 4$, что требует рассмотрения только одной дополнительной расходящейся функции $\langle v'v' \rangle$. По этой причине рассматривалась другая функция $\tilde{D}_{ik}(\mathbf{k})$ [см. (4.4)],

¹По этой же причине функция $\langle v'v'v \rangle$ с $\delta_{\Gamma} = 3 - d$, на самом деле, не расходится при $d = 3$.

и была введена вторая константа связи g_{20} и параметр $\varepsilon = 4 - d$, который вместе с y играет роль параметра разложения. Для исследования этой модели при $d = 2$ необходимо рассмотреть новые расходящиеся функции, а именно $\langle v'v' \rangle$ с $\delta_\Gamma = 2$, функции $\langle v'v'v' \rangle$ и $\langle v'v'v \rangle$ с $\delta_\Gamma = 1$, и, наконец, функция $\langle v'v'v'v' \rangle$ с $\delta_\Gamma = 0$. Такая задача кажется гораздо более сложной.

Используя все эти условия, легко понять, что все УФ расходимости модели (4.3) при $d = 4$ устраняются следующими контрчленами:

$$\begin{aligned} v'_i \partial^2 v_i, \quad v'_i \partial_i \partial_k v_k, \quad v'_i \partial_i \phi, \\ c_0^2 \phi' \partial_i v_i, \quad \phi' \partial^2 \phi, \quad \text{and} \quad v'v', \end{aligned} \quad (4.10)$$

которые представлены в расширенном функционале действия (4.3) при $v_0 > 0$. Теперь полюсные расходимости могут быть устранены ренормировкой параметров $g_{10}, g_{20}, \nu_0, u_0, v_0, c_0$ и полей ϕ and ϕ' :

$$\begin{aligned} g_{10} &= g_1 \mu^y Z_{g_1}, \quad u_0 = u Z_u, \quad \nu_0 = \nu Z_\nu, \\ g_{20} &= g_2 \mu^\varepsilon Z_{g_2}, \quad v_0 = v Z_v, \quad c_0 = c Z_c. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Здесь μ – это “масса” (добавочный свободный параметр ренормированной теории) в схеме минимальных вычитаний. Параметры g_1, g_2, ν, u, v , и c – это ренормированные аналоги изначальных параметров (без индекса “0”), Z_i – ренормализационные константы, зависящие только от абсолютно безразмерных параметров $g_1, g_2, u, v, \alpha, d, y$ и ε . Поля ϕ и ϕ' ренормируются следующим образом:

$$\phi \rightarrow Z_\phi \phi, \quad \phi' \rightarrow Z_{\phi'} \phi'. \quad (4.12)$$

Нелокальная часть функции D_{ik} не требует ренормировки, так что выражается в терминах ренормированных параметров с использованием соот-

ношения $g_{10}\nu_0^3 = g_1\nu^3\mu^y$, см. (4.14). Параметры m и α в корреляционной функции (4.1) не ренормируются: $Z_m = Z_\alpha = 1$. Поскольку член $v'\nabla_tv$ не ренормируется, ренормировка полей v и v' не требуется: $Z_v = Z_{v'} = 1$.

Таким образом, ренормированный функционал действия имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^R(\Phi) = & \frac{1}{2}v'_i D_{ik}^R v'_k + \phi' [-\nabla_t\phi + Z_3 v\nu\partial^2\phi - Z_5 c^2(\partial_i v_i)] + \\ & + v'_i \{-\nabla_tv_i + Z_1\nu[\delta_{ik}\partial^2 - \partial_i\partial_k]v_k + Z_2 u\nu\partial_i\partial_kv_k - Z_4\partial_i\phi\} \end{aligned} \quad (4.13)$$

где

$$D_{ik}^R = g_1\mu^y\nu^3 p^{4-d-y} \left\{ P_{ij}(\mathbf{p}) + \alpha Q_{ij}(\mathbf{p}) \right\} + Z_6 g_2 \mu^\varepsilon \nu^3 \delta_{ij}. \quad (4.14)$$

В отличие от случая $d = 3$, при $d = 4$ появляется ещё одна ренормализационная константа Z_6 .

4.3. Ренормировка модели

4.3.1. Теория возмущений для 1-неприводимых функций Грина

Рассмотрим $\Gamma(\varphi)$ – производящий функционал 1-неприводимых функций Грина. Согласно [90], используя преобразование Лежандра, можно переписать $\Gamma(\varphi)$ в виде:

$$\Gamma(\varphi) = \mathcal{S}(\varphi) + \tilde{\Gamma}(\varphi), \quad (4.15)$$

под аргументами понимаются те же случайные поля $\varphi = \{\mathbf{v}, \mathbf{v}', \phi, \phi'\}$, которые появлялись в работе ранее. Здесь $\mathcal{S}(\varphi)$ – это функционал действия (4.3), а $\tilde{\Gamma}(\varphi)$ – сумма всех 1-неприводимых диаграмм. Так что в однопетлевом приближении выражения для 1-неприводимых функций Грина, требующих УФ ренормировки, можно переписать в виде:

$$\Gamma_{v'v} = i\omega - (\delta_{ij}p^2 - p_i p_j)Z_1\nu - p_i p_j Z_2 u\nu + \text{---}\overbrace{\text{---}}^{\text{---}}\text{---}, \quad (4.16)$$

$$\Gamma_{\phi\phi'} = i\omega - p^2 Z_3 v\nu + \text{---}\overbrace{\text{---}}^{\text{---}}\text{---}, \quad (4.17)$$

$$\Gamma_{v'\phi} = -iZ_4 p_i + \text{---}\overbrace{\text{---}}^{\text{---}}\text{---}, \quad (4.18)$$

$$\Gamma_{\phi'v} = -iZ_5 p_i c^2 + \text{---}\overbrace{\text{---}}^{\text{---}}\text{---} + \text{---}\overbrace{\text{---}}^{\text{---}}\text{---} + \text{---}\overbrace{\text{---}}^{\text{---}}\text{---}, \quad (4.19)$$

$$\Gamma_{v'v'} = g_1 \mu^y \nu^3 p^{4-d-y} \left\{ P_{ij}(\mathbf{p}) + \alpha Q_{ij}(\mathbf{p}) \right\} + Z_6 g_2 \mu^\varepsilon \nu^3 \delta_{ij} + \frac{1}{2} \text{---}\overbrace{\text{---}}^{\text{---}}\text{---}, \quad (4.20)$$

где \mathbf{p} здесь и далее имеет смысл соответствующего внешнего импульса. Множитель $1/2$ перед диаграммой в (4.20) – это симметричный коэффициент соответствующей диаграммы.

Из прямого сопоставления соотношений между перенормированными параметрами следует, что константы перенормировки в (4.11) и (4.16) – (4.20) связаны:

$$\begin{aligned} Z_\nu &= Z_1, & Z_{g_1} &= Z_1^{-3}, & Z_c &= (Z_4 Z_5)^{1/2}, \\ Z_\phi &= Z_4, & Z_{\phi'} &= Z_4^{-1}, & Z_v &= Z_3 Z_1^{-1}, \\ Z_u &= Z_2 Z_1^{-1}, & Z_{g_2} &= Z_6 Z_1^{-3}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Константы ренормировки можно найти из требования УФ конечности функций Грина ренормированной модели (4.13), выраженных в терминах ренормированных параметров. Используя размерную регуляризацию в рамках схемы минимальных вычитаний, можно вычислить константы перенормировки, а УФ-расходимости проявляются как полюсные члены по y и $\varepsilon = 4 - d$. В более высоких порядках разложения (с большим количеством петель) могут появиться и линейные комбинации $ay + b\varepsilon$.

4.3.2. Ренормализационные постоянные

После вычисления диаграмм можно перейти к новым переменным ($g_{1,2} \rightarrow g_{1,2} C_d$, где C_d – площадь поверхности единичной сферы в пространстве с размерностью d , делённая на $(2\Pi)^d$) и получить выражения для ренормализационных постоянных, выраженных через ренормированные параметры:

$$\begin{aligned}
Z_1 &= 1 + \frac{u^2 d(1-d) - u(2d^2 + 2d - 8) - d(d+3)}{4d(d+2)(1+u)^2} \\
&\quad \times \left(\frac{g_1}{y} + \frac{g_2}{\varepsilon} \right) + \frac{(1-u)}{2du(1+u)^2} \left(\alpha \frac{g_1}{y} + \frac{g_2}{\varepsilon} \right); \\
Z_2 &= 1 + (1-d) \frac{u^2(d-1) + u(d+4) + 1}{2d(d+2)u(1+u)^2} \left(\frac{g_1}{y} + \frac{g_2}{\varepsilon} \right); \\
Z_3 &= 1 - \frac{1}{2dv} \left[\frac{d-1}{1+v} \left(\frac{g_1}{y} + \frac{g_2}{\varepsilon} \right) + \frac{(u-v)}{u(u+v)^2} \left(\alpha \frac{g_1}{y} + \frac{g_2}{\varepsilon} \right) \right]; \\
Z_4 &= 1 + \frac{(d-1)}{2d(1+u)(1+v)} \left(\frac{g_1}{y} + \frac{g_2}{\varepsilon} \right); \\
Z_6 &= 1 - \frac{(d-1)}{2du(1+u)} \left(\alpha \frac{g_1^2}{g_2(2y-\varepsilon)} + (\alpha+1) \frac{g_1}{y} + \frac{g_2}{\varepsilon} \right). \tag{4.22}
\end{aligned}$$

Как и в модели, рассмотренной ранее первой главе, константа Z_5 оказывается равной 1 в однопетлевом приближении. Используя соотношения (4.21) и выражение $(1+x)^{-n} = 1 - nx + o(x)$ для Z_i^{-n} , получим ренормализационные константы для полей ϕ , ϕ' и физических параметров системы:

$$\begin{aligned}
Z_\nu &= 1 + A \times \left(\frac{g_1}{y} + \frac{g_2}{\varepsilon} \right) + B \times \left(\alpha \frac{g_1}{y} + \frac{g_2}{\varepsilon} \right); \\
Z_u &= 1 + (C - A) \times \left(\frac{g_1}{y} + \frac{g_2}{\varepsilon} \right) - B \times \left(\alpha \frac{g_1}{y} + \frac{g_2}{\varepsilon} \right); \\
Z_v &= 1 - (A + D) \times \left(\frac{g_1}{y} + \frac{g_2}{\varepsilon} \right) \\
&\quad - (B + E) \times \left(\alpha \frac{g_1}{y} + \frac{g_2}{\varepsilon} \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_c &= 1 + \frac{1}{2}F \times \left(\frac{g_1}{y} + \frac{g_2}{\varepsilon} \right); \\
Z_\phi &= 1 + F \times \left(\frac{g_1}{y} + \frac{g_2}{\varepsilon} \right); \\
Z_{\phi'} &= 1 - F \times \left(\frac{g_1}{y} + \frac{g_2}{\varepsilon} \right); \\
Z_{g_1} &= 1 - 3A \times \left(\frac{g_1}{y} + \frac{g_2}{\varepsilon} \right) - 3B \times \left(\alpha \frac{g_1}{y} + \frac{g_2}{\varepsilon} \right); \\
Z_{g_2} &= 1 - 3A \times \left(\frac{g_1}{y} + \frac{g_2}{\varepsilon} \right) - 3B \times \left(\alpha \frac{g_1}{y} + \frac{g_2}{\varepsilon} \right) \\
&\quad - G \times \left[\alpha \frac{g_1^2}{g_2(2y - \varepsilon)} + (1 + \alpha) \frac{g_1}{y} + \frac{g_2}{\varepsilon} \right], \tag{4.23}
\end{aligned}$$

где $A - F$ это коэффициенты из констант $Z_1 - Z_6$:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{d(1-d)u^2 - 2u(d^2 + d - 4) - d(d+3)}{4d(d+2)(1+u)^2}; \\
B &= \frac{1-u}{2du(1+u)^2}; \\
C &= (1-d) \frac{u^2(d-1) + u(d+4) + 1}{2d(d+2)u(1+u)^2}; \\
D &= \frac{1}{2dv} \frac{d-1}{1+v}; \\
E &= \frac{1}{2dv} \frac{(u-v)}{u(u+v)^2}; \\
F &= \frac{(d-1)}{2d(1+u)(1+v)}; \\
G &= \frac{(d-1)}{2du(1+u)}. \tag{4.24}
\end{aligned}$$

Итого, в выражениях (4.23), (4.24) найдены все ренормировочные константы полей и параметров, необходимые для ренормировки нашей модели при $d = 4$.

4.4. Ренормгруппа и критический скейлинг

4.4.1. РГ уравнения и РГ функции

Связь между изначальным и ренормированным функционалами действия $S(\Phi, e_0) = S^R(Z_\Phi \Phi, e, \mu)$, где e_0 – это полный набор начальных параметров, а e – набор их ренормированных аналогов, приводит нас к следующему РГ уравнению:

$$\{\mathcal{D}_{RG} + N_\phi \gamma_\phi + N_{\phi'} \gamma_{\phi'}\} G^R(e, \mu, \dots) = 0, \quad (4.25)$$

где $G = \langle \Phi \dots \Phi \rangle$ – корреляционная функция полей Φ , N_ϕ и $N_{\phi'}$ – количество соответствующих полей, входящих в корреляционную функцию G , многоточие в выражении (4.25) означает другие аргументы G (пространственные и временные переменные, и т.д.); \mathcal{D}_{RG} – это операция $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$, выраженная в ренормированных переменных, а $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$ – дифференциальная операция $\mu \partial_\mu$ для фиксированных e_0 :

$$\mathcal{D}_{RG} = \mathcal{D}_\mu + \beta_{g_1} \partial_{g_1} + \beta_{g_2} \partial_{g_2} + \beta_u \partial_u + \beta_v \partial_v - \gamma_\nu \mathcal{D}_\nu - \gamma_c \mathcal{D}_c. \quad (4.26)$$

Здесь мы обозначили $\mathcal{D}_x \equiv x \partial_x$ для любой переменной x . Аномальная размерность γ_F некоторой величины F (поле или параметр) определяется следующим образом:

$$\gamma_F = Z_F^{-1} \tilde{\mathcal{D}}_\mu Z_F = \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_F, \quad (4.27)$$

а β -функции для четырёх безразмерных констант связи g_1 , g_2 , u и v , которые описывают РГ потоки параметров задаются так: $\beta_g = \tilde{\mathcal{D}}_\mu g$. Вместе с (4.11) это приводит к следующим равенствам:

$$\beta_{g_1} = g_1 (-y - \gamma_{g_1}),$$

$$\begin{aligned}
\beta_{g_2} &= g_2(-\varepsilon - \gamma_{g_2}), \\
\beta_u &= -u\gamma_u, \\
\beta_v &= -v\gamma_v.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Из определений и точных выражений (4.23), (4.24) можно найти однопетлевое приближение (т.е. с поправками порядка g_1^2 , g_2^2 , g_1g_2 и выше) при $d = 4$:

$$\gamma_\nu = g_1 \frac{(3u^2 + 8u + 7)}{24(1+u)^2} + \alpha g_1 \frac{(u-1)}{8u(1+u)^2} + g_2 \frac{(3u^3 + 8u^2 + 10u - 3)}{24u(1+u)^2}; \tag{4.29}$$

$$\gamma_u = \frac{1-u}{48u(1+u)^2} \left[g_1(6u^2 + 13u + 3) + 6\alpha g_1 + g_2(6u^2 + 13u + 9) \right]; \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_v &= \frac{g_1}{24} \left[-\frac{7+8u+3u^2}{(1+u)^2} + \frac{9}{v(1+v)} \right] \\
&\quad - \alpha g_1 \frac{(v-1)}{8u(1+u)^2 v(u+v)^2} \left[u^3 + 2u^2(1+v) - v(1+v) + u(1-v+v^2) \right] \\
&\quad + \frac{g_2}{24} \left[\frac{3(1-u)}{u(1+u)^2} - \frac{7+8u+3u^2}{(1+u)^2} + \frac{3(u-v)}{uv(u+v)^2} + \frac{9}{v(1+v)} \right];
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\gamma_c = -\frac{3}{16(1+u)(1+v)}(g_1 + g_2); \tag{4.32}$$

$$\gamma_\phi = -\frac{3}{8(1+u)(1+v)}(g_1 + g_2); \tag{4.33}$$

$$\gamma_{\phi'} = \frac{3}{8(1+u)(1+v)}(g_1 + g_2); \tag{4.34}$$

$$\gamma_{g_1} = -g_1 \frac{(3u^2 + 8u + 7)}{8(1+u)^2} - \alpha g_1 \frac{3(u-1)}{8u(1+u)^2} - g_2 \frac{(3u^3 + 8u^2 + 10u - 3)}{8u(1+u)^2}; \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{g_2} &= \frac{1}{8u(1+u)^2} \left[-g_1(3u^3 + 8u^2 + 4u - 3) - g_2(3u^3 + 8u^2 + 7u - 6) \right. \\
&\quad \left. + 3\frac{\alpha g_1}{g_2} [(1+u)g_1 + 2g_2] \right].
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Таким образом, из выражений (4.28) и (4.29) – (4.36) найдены все функции, входящие в дифференциальный оператор (4.26). Можно рассмот-

реть, как он действует на различные функции Грина. Мы не включали безразмерный параметр α в список констант связи, потому что он не ренормируется ($Z_\alpha = 1$), а значит, соответствующая функция β_α равна нулю. Нет никаких ограничений на параметр α из РГ уравнений, так что он так и остаётся свободным.

4.4.2. РГ функции и ИК притягивающие неподвижные точки

Одно из основных утверждений РГ заключается в том, что поведение на больших масштабах по отношению к пространственным и временным шкалам определяется ИК притягивающими фиксированными точками $g^* \equiv \{g_1^*, g_2^*, u^*, v^*\}$, координаты которых можно найти из следующего условия [80, 90, 94]:

$$\beta_{g_1}(g^*) = \beta_{g_2}(g^*) = \beta_u(g^*) = \beta_v(g^*) = 0. \quad (4.37)$$

Идея заключается в том, чтобы рассмотреть инвариантные заряды $\bar{g}_i = \bar{g}_i(s, g)$ с начальными условиями $\bar{g}_i|_{s=1} = g_i$. Параметр $s = k/\mu$ – масштабный параметр, ИК асимптотическое поведение (т.е. поведение при $r \rightarrow \infty$) связано с пределом $s \rightarrow 0$. Развитие инвариантного заряда задаётся следующими уравнениями:

$$\mathcal{D}_s \bar{g}_i = \beta_i(\bar{g}_j), \quad (4.38)$$

решение которых при $s \rightarrow 0$ такое:

$$\bar{g}_i(s, g^*) \cong g_i^* \text{ плюс линейная комбинация вкладов вида } s^{\omega_k}, \quad (4.39)$$

где $\{\omega_k\}$ – это набор собственных значений матрицы

$$\Omega_{ij} = \partial\beta_i/\partial g_j|_{g=g^*}. \quad (4.40)$$

Существование ИК устойчивого решения уравнений РГ приводит к существованию скейлингового поведения функций Грина. Из (4.39) следует, что тип неподвижной точки определяется матрицей (4.40): для ИК устойчивой неподвижной точки матрица Ω должна быть положительно определена, то есть вещественные части всех собственных чисел матрицы положительны.

В случае $d = 3$ анализ выражений типа (4.28) и (4.29) – (4.36) показывает, что в физической области параметров $g_1, g_2, u, v, \alpha > 0$ существует только одна нетривиальная ИК притягивающая неподвижная точка [64, 88]. Для $d = 4$ ситуация более интересная: прямой анализ системы уравнений (4.37) говорит о существовании трёх ИК притягивающих неподвижных точек: тривиальная (гауссова) фиксированная точка FPI и две нетривиальные точки FPII и FPIII.

Свободная фиксированная точка FPI, для которой все взаимодействия не имеют значения и не ожидается масштабирования и универсальности, координаты следующие:

$$g_1^* = 0, \quad g_2^* = 0, \quad (4.41)$$

в то время как u^* и v^* не определены. Соответствующие собственные числа матрицы Ω_{ij} :

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -\varepsilon, \quad \lambda_4 = -y. \quad (4.42)$$

Хотя точка и тривиальная, ее необходимо учитывать в анализе, ведь из (4.42) следует, что эта точка ИК притягивающая для $y, \varepsilon < 0$. Два нулевых собственных числа означают, что в четырёхмерном пространстве констант связи $\{g_1, g_2, u, v\}$ это точка является точкой только в плоскости $\{g_1, g_2\}$; фактически, в картине РГ потоков это притягивающая поверхность с нулевой

"скоростью" в касательных направлениях.

Для второй фиксированной точки FPII только $g_1^* = 0$, тогда как $g_2^* \neq 0$, поэтому такой скейлинговый режим называется "локальным" [см. (4.4)].

Координаты точки следующие:

$$g_1^* = 0, \quad g_2^* = \frac{8\varepsilon}{3}, \quad (4.43)$$

при этом $u^* = v^* = 1$. Собственные значения матрицы Ω_{ij} следующие:

$$\lambda_1 = \frac{7\varepsilon}{18}, \quad \lambda_2 = \frac{5\varepsilon}{6}, \quad \lambda_3 = \varepsilon, \quad \lambda_4 = \frac{3\varepsilon - 2y}{2}, \quad (4.44)$$

поэтому эта точка ИК притягивающая для $\varepsilon > 0$, $y < 3\varepsilon/2$.

Для последней точки FPIII и локальная, и нелокальная части случайной силы имеют значение:

$$g_1^* = \frac{16y(2y - 3\varepsilon)}{9[y(2 + \alpha) - 3\varepsilon]}, \quad g_2^* = \frac{16\alpha y^2}{9[y(2 + \alpha) - 3\varepsilon]}, \quad (4.45)$$

тогда как $u^* = v^* = 1$; собственные числа матрицы Ω_{ij} :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{y[2y(10\alpha + 11) - 3\varepsilon(3\alpha + 11)]}{54[y(2 + \alpha) - 3\varepsilon]}, \\ \lambda_2 &= \frac{y[2y(2\alpha + 3) - \varepsilon(\alpha + 9)]}{6[y(\alpha + 2) - 3\varepsilon]}, \\ \lambda_{3,4} &= \frac{A \pm \sqrt{B}}{C}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

где константы A , B и C задаются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} A &= -27\varepsilon^3 + 9(9 + \alpha)\varepsilon^2 y - 9(8 + 3\alpha)\varepsilon y^2 \\ &\quad + 2y^3(\alpha^2 + 7\alpha + 10); \\ B &= [-3\varepsilon + (2 + \alpha)y]^2 [81\varepsilon^4 - 54\varepsilon^3 y - 9(3 + 20\alpha)\varepsilon^2 y^2 \\ &\quad + 12(1 + 17\alpha + 3\alpha^2)\varepsilon y^3 - 4(-1 + 14\alpha + 5\alpha^2)y^4]; \end{aligned}$$

$$C = 6[-3\varepsilon + (2 + \alpha)y]^2. \quad (4.47)$$

Принимая в расчёт, что в физической области $g_1, g_2 > 0$, из выражений для $\lambda_1 \dots \lambda_4$ следует, что точка FPIII устойчива при $y > 0$ и $y > 3\varepsilon/2$.

Также необходимо проверить точки $u \rightarrow \infty$ и $v \rightarrow \infty$. Так как u по сути является продольной вязкостью, с физической точки зрения этот случай соответствует пределу $c \rightarrow \infty$. Что и должно следовать из таких рассуждений, поля скоростей \mathbf{v} и \mathbf{v}' становятся чисто поперечными, а скалярные поля ϕ и ϕ' отделяются от них; см. (1.14). После перехода к новой переменной $f = 1/u$ с β -функцией

$$\beta_f = \tilde{\mathcal{D}}_\mu f = -f^2 \beta_u \quad (4.48)$$

можно получить следующий набор β -функций в точке $f = 0$:

$$\begin{aligned} \beta_{g_1} &= \frac{1}{8}g_1(3g_1 + 3g_2 - 8y); \\ \beta_{g_2} &= \frac{1}{8}g_2(3g_1 + 3g_2 - 8\varepsilon); \\ \beta_v &= \frac{1}{8}(g_1 + g_2)\frac{v^2 + v - 3}{v + 1}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Из выражений (4.48) и (4.49) следует, что есть две нетривиальные фиксированные точки при $f_* = 0$:

$$g_1 = 0, \quad g_2 = 8\varepsilon/3, \quad v = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{13}); \quad (4.50)$$

$$g_1 = 8y/3, \quad g_2 = 0, \quad v = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{13}). \quad (4.51)$$

Но для обеих при любом значении y и ε два из четырех собственных значений имеют разные знаки:

$$\lambda_1 = -y/3, \quad \lambda_2 = \frac{2(13 + \sqrt{13})}{3(1 + \sqrt{13})^2}y \quad (4.52)$$

для точки (4.50);

$$\lambda_1 = -\varepsilon/3, \quad \lambda_2 = \varepsilon \quad (4.53)$$

для точки (4.51).

Это значит, что обе фиксированные точки (4.50) и (4.51) неустойчивы (они седловые), что согласуется с той идеей, что коррекция ведущего порядка по числу Маха к несжимаемому скейлинговому режиму разрушает его устойчивость [60, 61, 95].

При переходе к новой переменной $t = 1/v$ с β -функцией

$$\beta_t = \tilde{\mathcal{D}}_\mu t = -t^2 \beta_v \quad (4.54)$$

получаем, что $\beta_t = 0$ при $t = 0$. Так как β -функции других констант связи g_1 , g_2 и u не зависят от v , при $t = 0$ у нас остаются старые фиксированные точки FPII и FPIII. Это значит, что для исследования ИК поведения этих двух точек нужно проверить только производную $\partial\beta_t/\partial t$ в фиксированной точке $\{g^*, t = 0\}$:

$$\begin{aligned} \lambda_t &= -\varepsilon/2 \quad \text{for FPII;} \\ \lambda_t &= -y/3 \quad \text{for FPIII.} \end{aligned} \quad (4.55)$$

В соответствии с (4.44) и (4.46) при $v \rightarrow \infty$ эти две фиксированные точки также седловые.

Что касается случая $d = 3$ (см. [88]), обе ИК притягивающие точки FPII и FPIII имеют смысл для всех $\alpha > 0$, имеют пределы при $\alpha \rightarrow \infty$, но становятся нестабильными при $\alpha \rightarrow \infty$, то есть в случае чисто потенциальной силы. Для изучения этого предела нужно перейти к новым константам связи $g'_{1,2} = g_{1,2}\alpha$, конечным при $\alpha \rightarrow \infty$. Две новые β -функции выглядят

так:

$$\beta_{g'_{1,2}} = \tilde{\mathcal{D}}_{\mu} g'_{1,2} = \alpha \beta_{g_{1,2}}, \quad (4.56)$$

а полный список:

$$\begin{aligned} \beta_{g'_1} &= g'_1 \left(-y + g'_1 \frac{3(u-1)}{8u(u+1)^2} \right); \\ \beta_{g'_2} &= g'_2 \left(-\varepsilon - \frac{1}{8u(u+1)^2} \frac{3g'_1}{g'_2} [(1+u)g'_1 + 2g'_2] \right); \\ \beta_u &= g'_1 \frac{(u-1)}{8(u+1)^2}; \\ \beta_v &= g'_1 \frac{(v-1)}{8u(u+1)^2(u+v)^2} \\ &\quad \times [u^3 + 2u^2(1+v) - v(v+1) + u(1-v+v^2)]. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Решение этой системы – гауссова точка FPI:

$$g_1^* = 0, \quad g_2^* = 0, \quad (4.58)$$

тогда как u^* и v^* не определены. Соответствующие собственные числа матрицы Ω_{ij}

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -\varepsilon, \quad \lambda_4 = -y, \quad (4.59)$$

то есть эта точка ИК притягивающая при $y, \varepsilon < 0$.

Это значит, что в однопетлевом приближении две нетривиальные неподвижные точки FPII и FPIII теряют свою значимость при $\alpha \rightarrow \infty$, остаётся единственная возможная свободная гауссова точка (4.58). При этом в приближении двух петель может появиться новая фиксированная точка.

Общая картина устойчивости трёх неподвижных точек на плоскости $y - \varepsilon$ представлена на рисунке 4.3. Прямые $y < 0, \varepsilon = 0$; $y = 0, \varepsilon < 0$; and $y = 3\varepsilon/2, \varepsilon > 0$ имеют смысл границ областей. Кроссовер между двумя

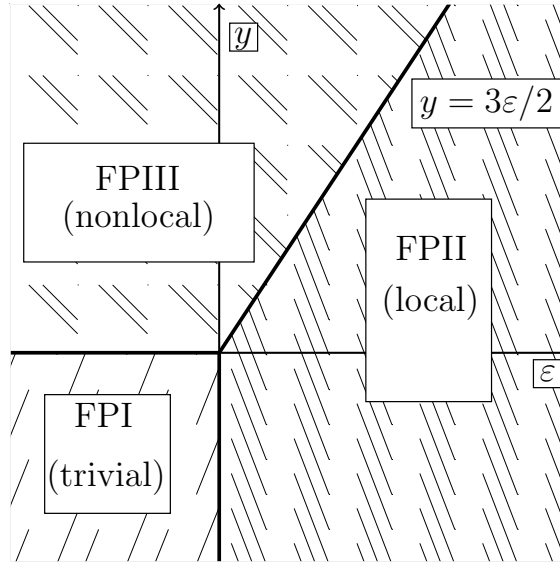


Рис. 4.3. Области ИК стабильности неподвижных точек в модели (4.3)

неподвижными точками возможен вдоль линии $y = 3\varepsilon/2$, что соотносится с [96].

Этот факт говорит о том, что в зависимости от значений y и ε корреляционные функции модели (4.3) в ИК области проявляют разные типы скейлингового поведения. Соответствующие критические размерности $\Delta[F] \equiv \Delta_F$ для всех полей и параметров можно вычислить в виде разложения по y и ε ; см. следующий параграф.

4.4.3. ИК притягивающие неподвижные точки и критические размерности

В главном порядке ИК асимптотическое поведение функций Грина удовлетворяет уравнению РГ (4.25) с учетом подстановки $g \rightarrow g_*$ для полного набора констант связи [90, 94]. Из чего можно получить:

$$\left\{ \mathcal{D}_\mu - \gamma_\nu^* \mathcal{D}_\nu - \gamma_c^* \mathcal{D}_c + \sum_{\Phi} N_{\Phi} \gamma_{\Phi}^* \right\} G^R = 0. \quad (4.60)$$

Здесь γ_F^* – это значение аномальной размерности в неподвижной точке; по полям Φ подразумевается суммирование. Уравнения такого вида описывают скейлинг с дилатацией переменных, производные которых входят в дифференциальный оператор.

Из выражений (4.29) – (4.36) можно получить выражения для аномальных размерностей в однопетлевом приближении γ_F^* . Для нелокальной точки FPIII выражение совпадает с аналогичным для случая $d = 3$:

$$\begin{aligned}\gamma_\nu^* &= y/3, & \gamma_\phi^* &= -\gamma_{\phi'}^* = -y/6 + O(y^2), \\ \gamma_c^* &= -y/12 + O(y^2).\end{aligned}\tag{4.61}$$

Для локальной точки FPII:

$$\begin{aligned}\gamma_\nu^* &= \varepsilon/3, & \gamma_\phi^* &= -\gamma_{\phi'}^* = -\varepsilon/4 + O(\varepsilon^2), \\ \gamma_c^* &= -\varepsilon/8 + O(\varepsilon^2).\end{aligned}\tag{4.62}$$

Каноническая масштабная инвариантность описывается соотношениями:

$$\left[\sum_\sigma d_\sigma^k \mathcal{D}_\sigma - d_G^k \right] G^R = 0, \quad \left[\sum_\sigma d_\sigma^\omega \mathcal{D}_\sigma - d_G^\omega \right] G^R = 0,\tag{4.63}$$

где σ – полный набор аргументов G^R , d^k и d^ω – канонические размерности. Для исследования скейлинга с фиксированными “ИК несущественными” параметрами μ и ν необходимо построить такую линейную комбинацию уравнений (4.60) и (4.63), чтобы исключить производные по этим параметрам; см. [43, 90]. Таким образом получаем уравнение критического ИК скейлинга для модели:

$$\left\{ -\mathcal{D}_x + \Delta_t \mathcal{D}_t + \Delta_c \mathcal{D}_c + \Delta_m \mathcal{D}_m - \sum_\Phi N_\Phi \Delta_\Phi \right\} G^R = 0$$

(4.64)

при

$$\Delta_F = d_F^k + \Delta_\omega d_F^\omega + \gamma_F^*, \quad \Delta_\omega = -\Delta_t = 2 - \gamma_\nu^*. \quad (4.65)$$

Здесь Δ_F – критическая размерность величины F , Δ_t и Δ_ω – временная и частотная критические размерности.

Пользуясь таблицей 4.1 и выражениями (4.61) и (4.62) получаем, что для неподвижной точки FPIII критические размерности совпадают со случаем $d = 3$, а именно

$$\begin{aligned} \Delta_v = 1 - y/3, \quad \Delta_{v'} = d - \Delta_v, \quad \Delta_\omega = 2 - y/3, \quad \Delta_m = 1; \\ \Delta_\phi = d - \Delta_{\phi'} = 2 - 5y/6, \quad \Delta_c = 1 - 5y/12. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Для локальной точки FPII получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Delta_v = 1 - \varepsilon/2, \quad \Delta_{v'} = d - \Delta_v, \quad \Delta_\omega = 2 - \varepsilon/2, \quad \Delta_m = 1; \\ \Delta_\phi = d - \Delta_{\phi'} = 2 - 5\varepsilon/4, \quad \Delta_c = 1 - 5\varepsilon/8. \end{aligned} \quad (4.67)$$

В зависимости от значений y и ε корреляционные функции проявляют разное скейлинговое поведение в ИК области (либо режим локальный, либо нелокальный). И значения для аномальных и критических размерностях тоже будут разные. Однако, для физических значений $d=3$, $y=4$ ИК устойчивой является только нелокальная точка FPIII, что подтверждает возможность РГ анализа непосредственно при $d=3$.

4.5. Перенос пассивного скалярного поля плотности

Перенос пассивного скалярного поля (хотя и для $d = 3$) уже обсуждалось в данной работе. В этой главе обсуждение будет не таким подробным.

4.5.1. Теоретико-полевая формулировка

Перенос пассивного поля плотности $\theta(x) \equiv \theta(t, \mathbf{x})$ описывается уравнением

$$\partial_t \theta + \partial_i (v_i \theta) = \kappa_0 \partial^2 \theta + f. \quad (4.68)$$

Здесь, $\partial_t \equiv \partial/\partial t$, $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$; κ_0 – молекулярный коэффициент вязкости, $\partial^2 = \partial_i \partial_i$ – оператор Лапласа, $\mathbf{v}(x)$ поле скорости, удовлетворяющее уравнению (1.1), и $f \equiv f(x)$ – гауссовый шум с нулевым средним и заданным коррелятором:

$$\langle f(x) f(x') \rangle = \delta(t - t') C(\mathbf{r}/L), \quad \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}' \quad (4.69)$$

с функцией $C(\mathbf{r}/L)$, конечной при $(\mathbf{r}/L) \rightarrow 0$ и убывающей при $(\mathbf{r}/L) \rightarrow \infty$.

Поле скорости \mathbf{v} описывается уравнением Навье-Стокса (1.1), стохастическая задача (4.68), (4.69) эквивалентна теоретико-полевой с полным набором полей $\Phi \equiv \{\theta', \theta, v', v, \phi', \phi\}$ и функционалом действия

$$\mathcal{S}_\Phi(\Phi) = \mathcal{S}_\theta(\theta', \theta, v) + \mathcal{S}(v', v, \phi', \phi), \quad (4.70)$$

где

$$\mathcal{S}_\theta(\theta', \theta, v) = \frac{1}{2} \theta' D_f \theta' + \theta' \{-\partial_t \theta - \partial_i (v_i \theta) + \kappa_0 \partial^2 \theta\} \quad (4.71)$$

действие де Доминисиса-Янссена для задачи (4.68), (4.69) при фиксированном \mathbf{v} , второе слагаемое задаётся выражением (4.3) и отвечает за статистику скорости; D_f – корреляционная функция (4.69), все необходимые интегрирования и суммирования по повторяющимся индексом подразумеваются.

Диаграммная техника должна быть дополнена новой вершиной $V_j^3 = -\theta' \partial_i (v_i \theta)$ (см. Рис. 4.4), которая в импульсном представлении выглядит так:

$$V_j(\mathbf{k}) = ik_j \quad (4.72)$$

где \mathbf{k} – импульсный аргумент пол θ' . А также добавляются два новых пропагатора:

$$\begin{aligned} \langle \theta \theta' \rangle_0 &= \langle \theta' \theta \rangle_0^* = \frac{1}{-i\omega + \kappa_0 k^2}, \\ \langle \theta \theta \rangle_0 &= \frac{C(\mathbf{k})}{\omega^2 + \kappa_0^2 k^4}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Здесь и далее двойная сплошная линия без перечеркивания обозначает поле θ , а двойная сплошная с перечеркиванием – поле θ' ; см. рис. 4.5

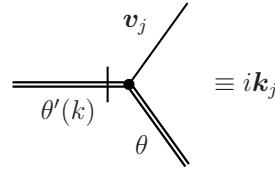


Рис. 4.4. Графическое изображение вершины V_j^3

$$\theta \text{ ———— } \theta' \quad \theta \text{ ———— } \theta$$

Рис. 4.5. Графическое изображение пропагаторов $\langle \theta \theta' \rangle_0$ и $\langle \theta \theta \rangle_0$

4.5.2. Ренормировка модели

Канонические размерности новых полей и параметров для модели (4.70) заданы в таблице 4.1, где введен безразмерный параметр $w_0 = \kappa_0/\nu_0$ с ν_0 из (1.1). Выражение (4.5) для формального индекса расходимости остаётся

верным, только суммирование теперь должно проводиться по набору из шести полей $\Phi \equiv \{\theta', \theta, v', v, \phi', \phi\}$. Правила (1) – (6) из главы 4.2.2 необходимо дополнить следующими замечаниями:

(7) Все 1-неприводимые функции Грина без полей отклика θ' равны нулю и не требуют контрчленов

(8) Используя интегрирование по частям в применении к вершине $-\theta' \partial_i (v_i \theta)$, можно перебросить производную на поле θ' . Тогда выражение (4.6) нужно исправить на

$$\delta'_\Gamma = \delta_\Gamma - N_\phi - N_{\theta'}. \quad (4.74)$$

Так как поле θ' может входить в контрчлены только под знаком производной, контрчлен $\theta' \partial_t \theta$ для 1-неприводимой функции Грина $\langle \theta' \theta \rangle$ с $\delta_\Gamma = 2$, $\delta'_\Gamma = 1$ запрещен. Кроме того, контрчлены для 1-неприводимой функции $\langle \theta' v \theta \rangle$ с $\delta_\Gamma = 1$, $\delta'_\Gamma = 0$ должны быть сведены к виду $\theta' \partial_i (v_i \theta)$. Галилеева симметрия разрешает только контрчлены в форме инвариантной комбинации $\theta' \nabla_t \theta$. Так что такие контрчлены тоже запрещены.

(9) Вследствие линейности исходного стохастического уравнения (4.68) по полю θ получаем, что для любой 1-неприводимой функции $N_{\theta'} - N_\theta = 2N_0$, где $N_0 \geq 0$ – полное число голых пропагаторов $\langle \theta \theta \rangle_0$, входящих в диаграмму. Этот факт очень важен для возможности ренормировки модели: без неравенства $N_\theta \leq N_{\theta'}$, в модели было бы бесконечно много поверхностно расходящихся 1-неприводимых функций $\langle \theta' \theta \dots \theta \rangle$, и, как следствие, модель была бы не ренормируемой.

Из этих правил приходим к выводу, что поверхностные расходимости могут быть представлены только в 1-неприводимой функции Грина

$\langle \theta' \theta \rangle$ с единственным контрчленом $\theta' \partial^2 \theta$. Естественно трактовать это как мультипликативную ренормировку коэффициента диффузии, $\kappa_0 = \kappa Z_\kappa$. Ренормировки полей θ' и θ не требуется: $Z_{\theta'} = Z_\theta = 1$. Ренормированный аналог функционала действия (4.70) имеет вид:

$$\mathcal{S}_\Phi^R(\Phi) = \mathcal{S}_\theta^R(\theta', \theta, v) + \mathcal{S}^R(v', v, \phi', \phi), \quad (4.75)$$

где \mathcal{S}^R – действие (4.13),

$$\mathcal{S}_\theta^R(\theta', \theta, v) = \frac{1}{2} \theta' D_f \theta' + \theta' \{ -\partial_t \theta - \partial_i (v_i \theta) + \kappa Z_\kappa \partial^2 \theta \}; \quad (4.76)$$

D_f – коррелятор случайной силы (4.69).

4.5.3. Вычисление диаграмм, положение неподвижных точек, критические размерности

Однопетлевое приближение для 1-неприводимой функции отклика $\langle \theta' \theta \rangle$ может быть формально записано в виде:

$$\Gamma_{\theta' \theta} = +i\omega - \kappa_0 p^2 + \text{---} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \text{---}, \quad (4.77)$$

где, как и ранее в выражениях (4.16) – (4.20), под \mathbf{p} подразумевается внешний импульс; простая сплошная линия обозначает “голый” пропагатор $\langle vv \rangle_0$ из (1.14), двойная сплошная линия с перечёркиванием – “голый” пропагатор $\langle \theta \theta' \rangle_0$ из (4.73), перечёркивание относится к полю θ' . Точки с тремя прикрепленными полями θ' , θ и v обозначают вершину (4.72).

Постоянную Z_κ можно найти из условия УФ-конечности 1-неприводимой функции Грина $\langle \theta' \theta \rangle$. Как и для оригинальной модели Навье-Стокса,

расходящаяся часть рассматриваемых диаграмм не зависит от $c_0 \sim c$ и, поэтому, можно её вычислять при условии $c = 0$; см. обсуждение в первой главе.

Опуская подробные вычисления, напомним здесь лишь, что ренормализационную константу Z_κ [см. (4.77)] необходимо выбрать в виде:

$$Z_\kappa = 1 - \frac{1}{2dw} \left[\frac{d-1}{1+w} + \frac{\alpha(u-w)}{u(u+w)^2} \right] \frac{g_1}{y} - \frac{1}{2dw} \left[\frac{d-1}{1+w} + \frac{u-w}{u(u+w)^2} \right] \frac{g_2}{\varepsilon}, \quad (4.78)$$

а соответствующая аномальная размерность:

$$\gamma_\kappa = \frac{1}{2dw} \left[\frac{d-1}{1+w} + \frac{\alpha(u-w)}{u(u+w)^2} \right] g_1 + \frac{1}{2dw} \left[\frac{d-1}{1+w} + \frac{u-w}{u(u+w)^2} \right] g_2, \quad (4.79)$$

с поправками более высоких порядков разложения.

Функция $\beta_w = \tilde{D}_\mu w$ для нового безразмерного параметра w имеет вид

$$\beta_w = -w\gamma_w = w(\gamma_\nu - \gamma_\kappa), \quad (4.80)$$

см. 4.4.1. Для подстановки координат $\{g^*\}$ неподвижных точек FPII и FPIII [см. (4.43) и (4.45)] в уравнение $\beta_w = 0$ при $d = 4$ перепишем выражения для $\gamma_\nu - \gamma_\kappa$ при $u = 1$:

$$\gamma_\nu - \gamma_\kappa|_{u=1} = \frac{w-1}{16w(w+1)^2} \times [g_1(6 + 2\alpha + 9w + 3w^2) + g_2(8 + 9w + 3w^2)]. \quad (4.81)$$

Исходя из (4.81) легко видеть, что единственное положительное решение для обеих точек FPII и FPIII:

$$w^* = 1. \quad (4.82)$$

Функции (4.28) не зависят от w , поэтому новое собственное значение матрицы (4.40), соответствующее этому параметру, совпадает с диагональным элементом $\partial\beta_w/\partial w$ в точке $\{g\} = \{g^*\}$:

$$\begin{aligned}\lambda_w &= \frac{5\varepsilon}{6} > 0 \quad \text{for FP II}; \\ \lambda_w &= \frac{2y}{3} + \frac{4\alpha y(y - \varepsilon)}{3[y(\alpha + 2) - 3\varepsilon]} > 0 \quad \text{for FP III}.\end{aligned}\quad (4.83)$$

Из (4.83) следует, что неподвижные точки с координатами (4.43) и (4.45) и $w_* = 1$ являются ИК притягивающими в полном пространстве констант связи g_1, g_2, u, v, w и удовлетворяют ИК асимптотике полномасштабной модели (4.70).

Критические размерности пассивных полей θ и θ' получены из таблицы 4.1 и выражения (4.65) для Δ_w . Для неподвижной точки FP III они точно такие же, как в случае $d = 3$, а именно

$$\Delta_\theta = -1 + y/6, \quad \Delta_{\theta'} = d + 1 - y/6. \quad (4.84)$$

Для второй точки FP II:

$$\Delta_\theta = -1 + \varepsilon/4, \quad \Delta_{\theta'} = d + 1 - \varepsilon/4. \quad (4.85)$$

4.5.4. Ренормировка и критические размерности составных операторов

В дальнейшем будем рассматривать составной оператор, построенный только из полей θ :

$$F(x) = \theta^n(x). \quad (4.86)$$

Как обсуждалось ранее, в общем виде локальный составной оператор – это моном или полином, составленный из неренормированных полей $\Phi(x)$ и их производных конечного порядка, взятый в конкретной точке пространства-времени $x = \{t, \mathbf{x}\}$. Из-за совпадения аргументов полей, в функциях Грина с подобными объектами появятся новые УФ-расходимости.

Полная каноническая размерность произвольной 1-неприводимой функции Грина $\Gamma = \langle F \Phi \dots \Phi \rangle$, включающей один составной оператор F и произвольное число полей Φ (формальный индекс расходимости) определяется с помощью выражения

$$d_\Gamma = d_F - \sum_{\Phi} N_\Phi d_\Phi, \quad (4.87)$$

где N_Φ число полей, входящих в Γ , d_Φ – их полные канонические размерности, d_F – каноническая размерность оператора. В выражении подразумевается суммирование по всем типам полей.

В процессе ренормировки операторы могут смешиваться,

$$F_i = \sum_j Z_{ij} F_j^R, \quad (4.88)$$

где Z_{ij} – ренормировочная матрица. Однако в простейшем случае операторов (4.86) матрица Z_{ij} диагональная, то есть, $F(x) = Z_F F^R(x)$. В частности, это значит, что критическая размерность оператора задаётся выражением (4.65).

Поверхностные УФ-расходимости, чьё устранение требует контрчленов, появятся только в тех функциях Γ , для которых индекс расходимости $d_{\Gamma_{N_\Phi}}$ является неотрицательным числом. Для операторов вида (4.86)

$d_F = -n$. Из-за линейности нашей модели по θ , число полей θ в любой 1-неприводимой функции с оператором $F(x)$ не может превышать их количества в самом операторе $F(x)$. Из анализа выражения (4.87) следует, что поверхностная расходимость может появиться только в 1-неприводимой функции с $N_\theta = n$ и $N_\Phi = 0$ для полей другого типа Φ . Для такой функции $\delta_\Gamma = 0$ и соответствующий контрчлен имеет вид $\theta^n(x)$; поэтому операторы (4.86) мультипликативно ренормируемы, $F(x) = Z_n F^R(x)$.

Введём величину $\Gamma_n(x; \theta)$: это слагаемое с θ^n в разложении по $\theta(x)$ производящего функционала 1-неприводимой функции Грина с одним составным оператором $F(x)$ и произвольным количеством полей θ :

$$\begin{aligned} \Gamma_n(x; \theta) = & \int dx_1 \cdots \int dx_n \langle F(x) \theta(x_1) \cdots \theta(x_n) \rangle \\ & \times \theta(x_1) \cdots \theta(x_n). \end{aligned} \quad (4.89)$$

Постоянные ренормировки Z_n определяются требованием УФ-конечности 1-неприводимой функции (4.89) в ренормированной теории.

Однопетлевое приближение для 1-неприводимой функции $\Gamma_n(x; \theta)$ можно формально переписать в виде

$$\Gamma_n(x; \theta) = F(x) + \frac{1}{2} \text{Diagram} \quad (4.90)$$

Первый член – это древесное (беспетлевое) приближение, двойная сплошная линия с перечеркиванием обозначает пропагатор $\langle \theta \theta' \rangle$, одинарная линия соответствует пропагатору $\langle v v \rangle$, $1/2$ это симметричный коэффициент заданной диаграммы, точка с двумя присоединёнными линиями наверху у диаграммы обозначает операторную вершину, то есть вариационную про-

изводную

$$\begin{aligned} V(x; x_1, x_2) &= \delta^2 F(x) / \delta\theta(x_1) \delta\theta(x_2) \\ &= n(n-1) \theta^{n-2}(x) \delta(x-x_1) \delta(x-x_2). \end{aligned} \quad (4.91)$$

Вклад этой диаграммы в функционал (4.90) для любого составного оператора F представляется в виде

$$\Gamma_n = V \times I \times \theta \dots \theta, \quad (4.92)$$

где V это вершинный множитель (4.91), I – диаграмма сама по себе, а произведение $\theta \dots \theta$ соответствует внешним хвостам.

Расходимость этой диаграммы логарифмическая, так что можно положить все внешние частоты и импульсы равными нулю. Аналитическое выражение для диаграммы следующее:

$$\begin{aligned} D_9 &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} V_a(\mathbf{k}) V_c(-\mathbf{k}) \frac{1}{\omega^2 + w^2 \nu^2 k^4} \\ &\times [P_{ac}(\mathbf{k}) \times A(k) + Q_{ac}(\mathbf{k}) \times B(k)], \end{aligned} \quad (4.93)$$

где $V_a(\mathbf{k})$ и $V_c(-\mathbf{k})$ это две вершины (4.72); скалярные коэффициенты $A(k)$ и $B(k)$ в операторе $\langle vv \rangle$ имеют вид:

$$\begin{aligned} A(k) &= \frac{g_{10} \nu_0^3 k^{4-d-y} + g_{20} \nu_0^3}{|\epsilon_1(k)|^2}, \\ B(k) &= (\alpha g_{10} \nu_0^3 k^{4-d-y} + g_{20} \nu_0^3) \left| \frac{\epsilon_3(k)}{R(k)} \right|^2, \end{aligned} \quad (4.94)$$

с заменой начальных параметров на их ренормированные аналоги. Поскольку $V_a(\mathbf{k}) P_{ac}(\mathbf{k}) = 0$, ненулевой вклад даёт только второй член в (4.93).

Проинтегрируем по частоте:

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{B(k)}{\omega^2 + w^2 \nu^2 k^4} = \frac{1}{2\nu^3} \frac{1}{uw(u+w)} \frac{1}{k^6}. \quad (4.95)$$

После свёртки значков, собрав все множители воедино, получаем, что выражение (4.90) принимает вид:

$$\Gamma_n(x; \theta) = \theta^n(x) \times \left\{ 1 + \frac{n(n-1)}{4wu(u+w)} \left[\alpha g_1 \left(\frac{\mu}{m} \right)^y \frac{1}{y} + g_2 \left(\frac{\mu}{m} \right)^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} \right] \right\}, \quad (4.96)$$

где $g_i \rightarrow g_i C_d$, всё с точностью до слагаемых высших порядков.

Ренормировочные постоянные Z_n находятся из требования конечности ренормированного аналога $\Gamma_n^R = Z_n^{-1} \Gamma_n$ функции (4.89). В отличие от выражений (4.16) – (4.20), в этом случае ренорм константы Z_n относятся не к самим параметрам, а к самим функциям Грина. Это значит, что используя петлевое разложение (4.90), по факту находим не ренормировочные константы Z_n , а величины Z_n^{-1} . Принимая во внимание знак “минус” в экспоненте, из (4.96) следует, что в схеме минимальных вычитаний ренормировочные константы имеют вид:

$$Z_n = 1 + \frac{n(n-1)}{4wu(u+w)} \left(\frac{\alpha g_1}{y} + \frac{g_2}{\varepsilon} \right). \quad (4.97)$$

Соответствующие аномальные размерности:

$$\gamma_n = -\frac{n(n-1)}{4wu(u+w)} (\alpha g_1 + g_2), \quad (4.98)$$

без учёта поправок высших порядков по g_1 и g_2 .

Тогда для критических размерностей операторов θ^n из выражения (4.65) получаем:

$$\Delta[\theta^n] = n\Delta_\theta + \gamma_n^*. \quad (4.99)$$

Подставляя координаты фиксированных точек FPII и FPIII в (4.98), наконец, получаем значения критических размерностей для неподвижной

точки FPII:

$$\Delta [\theta^n] = -n + \frac{n\varepsilon}{4} - \frac{n(n-1)}{3}\varepsilon; \quad (4.100)$$

а для точки FPIII получаем выражения (которые отличаются от случая $d = 3$):

$$\Delta [\theta^n] = -n + \frac{ny}{6} - \frac{2n(n-1)}{3} \frac{\alpha y(y-\varepsilon)}{y(2+\alpha) - 3\varepsilon}. \quad (4.101)$$

Ответ (4.101) можно рассматривать как результат некоторого частичного пересуммирования всего ряда по y при фиксированном конечном d . Теперь он имеет конечный предел при $\alpha \rightarrow \infty$. В обоих выражениях (4.100) и (4.101) подразумеваются поправки более высоких порядков по y и ε . Для обоих случаев FPII и FPIII размерности отрицательные, то есть “опасные” в смысле операторного разложения [43, 90], и убывают с ростом n .

4.5.5. Операторное разложение и аномальный скейлинг

Одновременные парные корреляционные функции двух (УФ-конечных) ренормированных локальных составных операторов $F_{1,2}(x)$ – величины, поддающиеся измерению, и поэтому интересные для рассмотрения в данной работе. Из соображений размерности (см. таблицу 4.1) следует, что

$$\langle F_1(t, \mathbf{x}_1) F_2(t, \mathbf{x}_2) \rangle = \nu^{d_F^\omega} \mu^{d_F} \times f(\mu r, m r, c/\mu\nu), \quad (4.102)$$

где d_F^ω и d_F это частотная и полная каноническая размерности корреляционной функции, $r = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$, и f – функция всех возможных полностью безразмерных переменных.

Если эта корреляционная функция мультипликативно ренормируема, в ИК регионе она удовлетворяет уравнению (4.64), которое описывает поведение ИК скейлинга. То есть поведение функции f при $\mu r \gg 1$ определяется ИК притягивающими точками FPII и FPIII РГ уравнения. Решение этого уравнения даёт следующее асимптотическое выражение:

$$\langle F_1(t, \mathbf{x}_1) F_2(t, \mathbf{x}_2) \rangle \simeq \nu^{d_F^\omega} \mu^{d_F} (\mu r)^{-\Delta_F} \times h[mr, \bar{c}(r)]. \quad (4.103)$$

Здесь Δ_F это критическая размерность корреляционной функции, заданной простой суммой размерностей операторов; h – неизвестная скейлинговая функция с абсолютно безразмерными аргументами, $\bar{c}(r)$ это инвариантная скорость звука.

Если составной оператор задан в виде $F(x) = \theta^n(x)$, выражение (4.103) принимает вид:

$$\langle \theta^p(t, \mathbf{x}_1) \theta^k(t, \mathbf{x}_2) \rangle \simeq \mu^{-(p+k)} (\mu r)^{-\Delta_p - \Delta_k} h_{pk}[mr, \bar{c}(r)], \quad (4.104)$$

где критические размерности Δ_n для двух скейлинговых режимов заданы выражениями (4.100) и (4.101).

Представление (4.104) верно при $\mu r \gg 1$ и любых фиксированных значениях mr . Инерционный интервал $l \ll r \ll L$ соответствует дополнительному условию $mr \ll 1$. Поведение функции h при $mr \rightarrow 0$ можно изучать с помощью операторного разложения; см. [80, 90]. Согласно операторному разложению, одновременное произведение $F_1(x_1) F_2(x_2)$ двух ренормированных операторов для $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)/2 = \text{const}$ и $\mathbf{r} \equiv \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \rightarrow 0$ имеет вид

$$F_1(t, \mathbf{x}_1) F_2(t, \mathbf{x}_2) \simeq \sum_F C_F[mr, \bar{c}(r)] F(t, \mathbf{x}), \quad (4.105)$$

где C_F это численные функции, аналитичные по mr и $\bar{c}(r)$, а F это все возможные локальные составные операторы, разрешенные симметриями задачи.

Корреляционная функция (4.103) получена усреднением (4.105) с весом $\exp S_R$, где S_R это ренормированный функционал действия (4.70). После усреднения с правой стороны (4.105) появятся средние значения $\langle F(x) \rangle \propto (mr)^{\Delta_F}$. Их асимптотическое поведение при малых m можно найти из соответствующих РГ уравнений, оно имеет следующий вид

$$\langle F(x) \rangle \simeq m^{\Delta_F} \times q[\bar{c}(1/m)], \quad (4.106)$$

с другим набором скейлинговых функций q . Поскольку диаграммы в теории возмущений конечны и при $c \rightarrow \infty$, и при $c \rightarrow 0$, мы можем предположить, что функции $q(c)$ ограничены для всех значений c , и можно их оценить некоторыми константами. Более того, ИК асимптотическое поведение инвариантной переменной $\bar{c}(r)$ вместе с требованием ее безразмерности приводят к тому, что

$$c(r) = c \times (\mu r)^{\Delta_c} / (\mu \nu), \quad (4.107)$$

где c это ренормированная скорость звука. Это значит, что $\bar{c}(1/m) \sim cm^{-\Delta_c}$. Учитывая (4.66), для нелокального скейлингового режима FPIII получаем, что для $y > 12/5$ (в том числе и реалистичный случай $y \rightarrow 4$) аргумент $cm^{-\Delta_c}$ становится малым для фиксированных c и $m \rightarrow 0$, и функцию q можно заменить её конечным пределом $q(0)$. Для локального скейлингового режима FPII из (4.67) следует, что при $\varepsilon \rightarrow 1$ функцию q можно заменить её конечным пределом $q(\infty)$. И этих двух замечаний мы, наконец,

приходим к выводу, что в ИК области и для локального, и для нелокального режимов в точности до констант

$$\langle F(x) \rangle \sim m^{\Delta_F}. \quad (4.108)$$

Сочетание РГ представления (4.104), операторного разложения (4.105) и выражения (4.108) определяет желанное асимптотическое поведение скейлинговых функций:

$$h[mr, c(r)] \simeq \sum_F A_F[mr, c(r)] \times (mr)^{\Delta_F}, \quad (4.109)$$

где суммирование проводится по всем галилеево-инвариантным скалярным операторам (включая и операторы с производными), коэффициентные функции A_F аналитичны по своим аргументам. Главный вклад в сумму (4.109) задаётся оператором с самой низкой (минимальной) критической размерностью; остальные можно рассматривать в качестве поправок. Аномальный скейлинг (сингулярное поведение при $mr \rightarrow 0$) следует из наличия вкладов с операторами с отрицательными критическими размерностями. Из (4.100) и (4.101) следует, что для обоих скейлинговых режимов все операторы θ^n имеют отрицательные размерности, и спектр их размерностей не ограничен снизу.

К счастью, согласно линейности изначального стохастического уравнения (4.68) по полю θ , число этих полей в правой части выражения (4.105) не может превышать их числа слева. Это значит, что для заданной корреляционной функции только конечное число таких операторов даёт вклад в операторное разложение. Для корреляторов (4.104) дают вклад операторы с $n \leq p + k$. Главный член разложения при $mr \rightarrow 0$ задаётся оператором с максимально возможным $n = p + k$ и без производных. Так что оконча-

тельное выражение имеет вид:

$$\langle \theta^p(t, \mathbf{x}_1) \theta^k(t, \mathbf{x}_2) \rangle \simeq \mu^{-(p+k)} (\mu r)^{-\Delta_p - \Delta_k} (mr)^{\Delta_{p+k}}. \quad (4.110)$$

Главный член в операторном разложении задаётся оператором из того же семейства. А также $\Delta_p + \Delta_k > \Delta_{p+k}$. Эти два факта можно интерпретировать так: корреляции скалярного поля в модели (4.68) проявляют мультифрактальное поведение; см. [86].

4.6. Перенос поля трейсера. Ответы в главном порядке

В этом разделе будет обсуждаться перенос поля трейсера. И хотя уравнения переноса поля плотности и поля трейсера отличаются, ответы для критических размерностей повторяют выражения (4.84), (4.85). Так что изложение в этом разделе мы начнём сразу с рассмотрения составных полей.

Для нахождения структурных функций, построенных из полей трейсера, необходимо рассмотреть составной оператор

$$F_{i_1 \dots i_l}^{(n,l)} = \partial_{i_1} \theta \dots \partial_{i_l} \theta (\partial_i \theta \partial_i \theta)^s + \dots \quad (4.111)$$

и вычислить его критическую размерность. В (4.111) l – это число свободных векторных индексов, $n = l + 2s$ – полное число полей θ , входящих в оператор. Под многоточиями подразумеваются свёртки с дельта-символами, которые делают оператор неприводимым. Например,

$$F_{ij}^{(2,2)} = \partial_i \theta \partial_j \theta - \frac{\delta_{ij}}{d} (\partial_k \theta \partial_k \theta). \quad (4.112)$$

Пользуясь тем, что подобные вычисления проводились ранее для поля трейсера, приведём далее только ответы без пояснений. Аномальная размерность составного поля имеет вид:

$$\gamma_{(n,l)} = \frac{1}{2d(d+2)} \left\{ \frac{Q_1}{2w(1+w)} (g_{10} + g_{20}) + \frac{Q_2}{2wu(u+w)} (\alpha g_{10} + g_{20}) \right\}, \quad (4.113)$$

где полиномы Q_1, Q_2 задаются выражениями:

$$Q_1 = -3n(n+4) + 5l(l+2) \quad (4.114)$$

$$Q_2 = -3n^2 + l(l+2), \quad (4.115)$$

где полиномы (4.115) повторяют выражения (2.46) с точностью до замены $d = 4$.

Тогда критические размерности для двух неподвижных точек имеют разное значение. Для неподвижной точки FPII:

$$\Delta_{(n,l)} = \frac{n}{4}\varepsilon + \frac{Q_1 + Q_2}{72}\varepsilon. \quad (4.116)$$

Для неподвижной точки FPIII:

$$\Delta_{(n,l)} = \frac{n}{6}y + \frac{y}{12} \frac{Q_1(\alpha y + 2y - 3\varepsilon) + 3\alpha Q_2(y - \varepsilon)}{9(y(2 + \alpha) - 3\varepsilon)} \quad (4.117)$$

с поправками более высоких порядков по y и ε .

Получен бесконечный набор “опасных” операторов со спектром, не ограниченным снизу.

Для дальнейшего анализа нам понадобится использовать операторное разложение. Подробное описание применения этого метода к составным полям поля трейсера представлена в разделе.

Для одновременной структурной функции:

$$S_n(r) = \langle [\theta(t, \mathbf{x}) - \theta(t, \mathbf{x}')]^{2n} \rangle, \quad r = |\mathbf{x}' - \mathbf{x}|. \quad (4.118)$$

в однопетлевом приближении выражение для $S_n(r)$ в инерционном интервале имеет вид

$$S_n(r) \sim (\nu\mu^2)^{-n} (\mu r)^{-2n\Delta_\theta} (mr)^{\Delta_{(2n,0)}}, \quad (4.119)$$

(4.111) где $\Delta_{n,l}$ можно найти из (4.116), (4.117).

При рассмотрении операторного разложения для $F^{(n,0)}$ видно, что вклад в разложение определяется корреляционными функциями $\langle F^{(p,0)} F^{(k,0)} \rangle$, где $n = p + k$, они имеют вид:

$$\langle F^{(p,0)}(t, \mathbf{x}) F^{(k,0)}(t, \mathbf{x}') \rangle \sim r^{-\Delta_{(p,0)} - \Delta_{(k,0)} + \Delta_{(n,0)}}. \quad (4.120)$$

Неравенство $\Delta_{(n,0)} < \Delta_{(p,0)} + \Delta_{(k,0)}$ говорит о том, что операторы $F^{(n,0)}$ демонстрируют “мультифрактальное” поведение, см. [86].

4.7. Перенос магнитного поля

В этом разделе (также без подробных пояснений) мы рассмотрим перенос пассивного векторного (магнитного) поля потоком сжимаемой жидкости. Уравнение для переноса магнитного поля можно найти в 3.1.2. Далее приведём только ответы в главном однопетлевом порядке.

Критические размерности магнитных полей задаются выражениями:

$$\Delta_{\theta_i} = -1 + \varepsilon/4, \quad \Delta_{\theta'_i} = d + 1 - \varepsilon/4 \quad \text{для точки FPII}; \quad (4.121)$$

$$\Delta_{\theta_i} = -1 + y/6, \quad \Delta_{\theta'_i} = d + 1 - y/6 \quad \text{для точки FPIII}. \quad (4.122)$$

Критическая размерность оператора $F_{i_1 \dots i_l}^{(n,l)} = \theta_{i_1} \dots \theta_{i_l} (\theta_j \theta_j)^s + \dots$ для неподвижной точки FPII имеет вид:

$$\Delta_{(n,l)} = \frac{n}{4}\varepsilon + \frac{Q_1 + Q_2}{72}\varepsilon. \quad (4.123)$$

А для неподвижной точки FPIII:

$$\Delta_{(n,l)} = \frac{n}{6}y + \frac{y}{12} \frac{Q_1(\alpha y + 2y - 3\varepsilon) + 3\alpha Q_2(y - \varepsilon)}{9[y(2 + \alpha) - 3\varepsilon]}, \quad (4.124)$$

где

$$Q_1 \equiv -3n(n + 4) - 5l(l + 2), \quad (4.125)$$

$$Q_2 \equiv -3n(5n - 4) - l(l + 2). \quad (4.126)$$

С помощью операторного разложения были исследованы выражения для корреляционных функций в инерционном интервале. В главном порядке ответ следующий:

$$\langle F^{(p,0)}(t, x) F^{(k,0)}(t, x') \rangle \sim r^{-\Delta_{(p,0)} - \Delta_{(k,0)} + \Delta_{(n,0)}}. \quad (4.127)$$

Также имеет место неравенство $\Delta_{(n,0)} < \Delta_{(p,0)} + \Delta_{(k,0)}$, которое определяет наличие “мультифрактального” поведения.

Стоит отметить, что при подстановке $d = 4$ в выражения для критических размерностей, получаем неравенство:

$$\frac{\partial \Delta_{n,l}}{\partial l} > 0, \quad (4.128)$$

исходя из которого можно сделать вывод о наличии иерархии анизотропных вкладов (главный вклад в разложение задаётся изотропным слагаемым с $l = 0$).

Данная глава основана на публикациях [99–102].

Заключение

В первых двух главах данной работы мы изучили две модели скалярного переноса: случай плотности и случай трейсера. Они описываются уравнениями (2.1) и (2.2) соответственно, случайная сила описывается формулой (2.3). Поле скорости описывается уравнениями Навье-Стокса для сжимаемой жидкости (1.7), (1.8), при этом внешняя перемешивающая сила имеет корреляционную функцию $\propto k^{4-d-y}$; см. (1.10), (1.11).

Полные стохастические задачи сформулированы в форме полевых моделей с функционалами действия, описанными в (1.12), (2.5) и (2.8). Эти модели оказываются мультипликативно ренормируемыми, что позволяет получить соответствующие РГ уравнения. У них есть только одна ИК-притягивающая точка в физической области параметров модели, так что корреляционные функции демонстрируют скейлинговое поведение в ИК области (инерционная и энергосодержащая области).

Их поведение в инерционном интервале было изучено с помощью операторного разложения; было выявлено наличие аномального скейлинга (сингулярная степенная зависимость от интегрального масштаба L). Были найдены аномальные показатели, а именно соответствующие критические (скейлинговые) размерности некоторых составных полей: степеней скалярного поля для модели плотности и степеней пространственных градиентов для трейсера, их можно систематически вычислять в виде рядов по параметру y . Практические расчёты представлены в главном порядке (однопет-

левое приближение) в (2.38), (2.51). Результаты (1.48), (2.26) для первичных полей и (2.39) для операторов θ^n в модели трейсера найдены точно. Таким образом, мы учли в теории то, чего не было в предыдущих моделях со сжимаемостью: ранее отсутствовало время корреляции, а поле скоростей было гауссовым. Мы подчёркиваем, что в отличие от предыдущих моделей с конечной корреляцией по времени [56, 57], наша модель явно галилеево инвариантна во всех порядках теории возмущений.

В некотором отношении, как бы то ни было, полученные результаты очень похожи на результаты, полученные ранее для сжимаемой модели Крейчнана [54, 55, 85] и для гауссовой модели с конечным временем корреляции [56, 57]. Во-первых, механизм происхождения аномального скейлинга по сути такой же: аномальные размерности сопоставляются с размерностями отдельных составных операторов.

Во-вторых, эти размерности не чувствительны к выбору коррелятора случайной силы (2.3), потому как пропагатор $\langle \theta\theta \rangle_0$ не входит в соответствующую функцию Грина. (В частности, это значит, что аномальные показатели остаются неизменными при замене искусственного шума на линейный градиент, что означает более реалистичную постановку задачи.) Сила поддерживает стационарное состояние и, таким образом, обеспечивает отличные от нуля средние значения для составных операторов, но не влияет на их размерности.

Для модели Крейчнана этот факт естественно интерпретировать на языке метода нулевых мод, в котором одновременные корреляционные функции удовлетворяют определённым дифференциальным уравнениям, а аномальные показатели связаны с решением однородных аналогов этих урав-

нений; см. [7, 38]. С другой стороны, амплитуды находятся на основе согласования решений однородных уравнений с решениями крупномасштабных полных неоднородных уравнений, которые нетривиальны только при наличии вклада от случайной силы.

Близкое сходство РГ+ОР картин происхождения аномального скейлинга в настоящей работе и модели Крейчнана говорит о том, что, во-первых, концепция нулевых мод (и, следовательно, статистических законов сохранения) здесь также применима, хотя никаких замкнутых дифференциальных уравнений нельзя получить для одновременных корреляционных функций.

Хотя аномальные показатели не зависят от выбора шума, они всё же зависят от y , размерности пространства d и от параметра α (который является мерой сжимаемости). С учётом этих фактов наши результаты похожи на полученные для упрощённых моделей. Важное отличие от гауссовых моделей появляется при изучении возможной зависимости показателей от времени корреляции. Было отмечено, что показатели могут зависеть от более тонких свойств ансамбля скорости: например, от безразмерного соотношения времён корреляции скалярного поля и поля скорости; см. например, обсуждение в [97]. В самом деле, аналитические результаты, полученные для конечного времени корреляции, в технике нулевых мод [98] и в подходе РГ+ОР [45, 56, 57] показывают, что такая зависимость действительно имеет место, по крайней мере, для некоторых возможных скейлинговых режимов.

В нашем случае показатели могут, в принципе, зависеть от безразмерных параметров u_0 , v_0 , w_0 – отношения коэффициентов вязкости и диф-

фузии. После РГ обработки эти параметры заменяются соответствующими инвариантными переменными, которые в точности имеют смысл отношений времён корреляции поперечной и продольной компонент поля скорости, давления и скалярного поля; для более детального обсуждения см. [45]. Существование единственной ИК-притягивающей неподвижной точки говорит о том, что в ИК области эти отношения стремятся к значениям в фиксированной точке u_* , v_* , w_* независимо от начальных значений u_0 и т.п. Можно заключить, что аномальные размерности не зависят от времён корреляции. По-видимому, у наших предшественников наблюдается зависимость от времени, потому что во всех этих моделях была упрощённая гауссовая статистика поля скорости.

Вторая часть данной работы является логическим продолжением исследования [64]. В ней рассмотрено стохастическое уравнение Навье-Стокса в несжимаемом случае с точки зрения теоретико-полевого подхода. Исследование проводилось в специфичном случае: при размерности пространства близкой к четырём. В таком случае появляются дополнительные УФ расходимости, что непосредственно влияет на РГ анализ задачи. В частности, для задачи требуется введение двойного разложения (теория возмущений строится по двум параметрам: $\varepsilon = 4 - d$ и показателя y). В рассмотренной работе есть две нетривиальные неподвижные точки (т.е. два возможных скейлинговых режима) – локальная точка, названная в тексте FPII, и нелокальная, FPIII.

Это говорит о том, что обычный анализ в окрестности $d = 3$, в котором есть всего одна нетривиальная неподвижная точка, относящаяся к нелокальному скейлинговому режиму, в данном случае не может быть пол-

ным. Между локальным и нелокальным режимом есть кроссовер вдоль линии $y = 3\varepsilon/2$, что согласуется с [96]. Новую (локальную) моду, которая наличествует при $d = 4$, можно непрерывно продлить к $d = 3$ при $\varepsilon \rightarrow 1$. Однако, при физических значениях $\varepsilon = 1$ и $y = 4$ новый локальный режим FPII не стабилен, а нелокальный режим FPIII стабилен. Поэтому основные выводы, сделанные в работах [64, 88] о существовании и ИК притягивании этой точки верны.

Также во второй главе был рассмотрен перенос пассивного скалярного поля. Стохастическая задача переформулирована в теоретико-полевую, мультипликативно ренормируемую. В отличие от случая $d = 3$, при $d = 4$ аномальные размерности составных операторов (4.100) и (4.101) не растут с ростом α без ограничения. Это является следствием устранения полюсов по ε возле $d = 4$, что приводит к значительному улучшению ситуации вблизи $d = 3$.

Как и в случае $d = 3$, при $d = 4$ координаты обеих нетривиальных точек имеют смысл для всех $\alpha > 0$, имеют конечные пределы при $\alpha \rightarrow \infty$, но перестает существовать для чисто потенциального принуждения, т.е. для $\alpha = \infty$. Этот факт означает, что в однопетлевом приближении обе неподвижные точки FPII и FPIII, по-видимому, исчезают или теряют свою устойчивость. Соответствующие скейлинговые режимы, следовательно, подвергаются некоторому качественному переходу, что, возможно, сопровождается фазовым переходом в чисто хаотическое состояние, наблюдаемое в [53] для упрощенной модели.

В третьей главе работы изучена модель пассивного векторного поля, переносимого турбулентным потоком. С физической точки зрения, модель

описывает магнитогидродинамическую турбулентность в, так называемом, кинематическом приближении, в котором воздействием магнитного поля на динамику жидкости можно пренебречь. Полная стохастическая задача может быть описана с помощью теоретико-полевой модели с полным функционалом действия как в работах (3.8) и (3.9). Эта модель оказывается мультипликативно ренормируемой, так что соответствующие РГ-уравнения могут быть написаны обычным способом. Имеется только одна ИК-притягивающая неподвижная точка в физической области параметров, так что различные корреляционные функции проявляют скейлинговое поведение в ИК области.

Их поведение в инерционном интервале изучено с помощью Операторного Разложения; было установлено наличие аномального скейлинга (сингулярной степенной зависимости от интегрального масштаба L). Соответствующие аномальные размерности определены как скейлинговые (критические) размерности некоторых составных полей (составных операторов). Их можно вычислить систематически как разложение по показателю y . Практические вычисления были проведены в главном порядке; результаты представлены в (3.61).

Полученные результаты очень похожи на результаты, полученные ранее для векторных полей, переносимых синтетическими ансамблями скорости [15,17]: аномальный скейлинг становится более заметным при увеличении степени сжимаемости α ; анизотропные вклады формируют иерархию по степени анизотропии l , получается, что главный вклад в асимптотику инерционного интервала такой же, как и для изотропного случая. Как бы то ни было, эта иерархия становится более выраженной с ростом степени

сжимаемости, в отличие от результатов в статье [15] для ансамбля скорости Крейчнана. Наши результаты ближе к тому, что реально наблюдалось для скалярного поля, переносимого тем же ансамблем [88].

С физической точки зрения, важно, что в нашем случае аномальные показатели связаны с критическими размерностями отдельных составных операторов, прямо как в РГ+ОП подходе; см., например, [14, 15, 39, 44, 47]. В подходе нулевых мод к этой же задаче аномальные показатели связаны с, так называемыми, нулевыми модами (бессиловыми решениями) точных дифференциальных уравнений, получившихся из одновременных корреляционных функций; см., например, [7, 11–13]. В более общем смысле нулевые моды можно интерпретировать как некоторые статистические законы сохранения для динамики кластеров частиц [7]. Такое близкое сходство в РГ+ОП картине происхождения аномального скейлинга в настоящей модели и ее предшественника говорит о том, что подход нулевых мод (и статистических законов сохранения) можно применять и к более реалистичным моделям.

Заметим, что наши результаты получены только в главном порядке в разложении по параметру, который отнюдь не мал. Так что довольно сложно говорить о согласованности теории и эксперимента. С другой стороны, насколько нам известно, зависимость аномальных показателей от степени сжимаемости специально не изучалась экспериментально.

Важно, что наличие аномального скейлинга, иерархия анизотропных вкладов, зависимость аномальных показателей от сжимаемости достоверно установлены уже для малых значений параметра u . Также важно, что различные подходы (разложение по u и двойное разложение в окрестности

особой размерности $d = 4$) дают согласованные результаты. Поэтому можно надеяться, что эти результаты останутся верными (по крайней мере качественно) и при реальных (не малых) значениях параметров ренорм-группового разложения.

Благодарности

Автор диссертации благодарит Антонова Николая Викторовича за научное руководство, бесконечное терпение, непрекращающуюся поддержку и неоценимую помощь в ходе выполнения настоящей работы.

Автор хочет поблагодарить всех членов научной группы, в особенности Николая Михайловича Гулицкого, Полину Игоревну Какинью и Никиту Михайловича Лебедева, за плодотворное сотрудничество, интересные обсуждения и дружеское участие.

Автор выражает благодарность преподавателям и сотрудникам кафедры физики высоких энергий и элементарных частиц Санкт-Петербургского Государственного Университета.

Автор благодарит учителей лицея №344 г. Санкт-Петербурга, в особенности Михайлову Светлану Викторовну, за воспитание интереса к физике и математике.

Также автор благодарит Ивана Александровича Александрова, Анну Олеговну Артамонову, Дмитрия Андреевича Тумакова и Романа Владимировича Попова за полезные дискуссии, моральную поддержку и многое другое.

Автор благодарит своих родителей за поддержание стимула к написанию данной работы и поддержку во всех начинаниях.

Кроме того, автор хотела бы поблагодарить фонд развития теоретической физики и математики “БАЗИС” за финансовую поддержку.

Литература

1. U. Frisch, *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
2. А.С. Монин, А.М. Яглом, *Статистическая гидромеханика*, том 2, второе издание, СПб, Гидрометеиздат, 1996, 744 стр.
3. M. Holzer and A. Pumir, Phys. Rev E **47**, 202 (1993).
4. M. Holzer and E.D. Siggia, Phys. Fluids **6**, 1820 (1994).
5. A. Pumir, Phys. Fluids **6**, 2118 (1994).
6. C. Tong and Z. Warhaft, Phys. Fluids **6**, 2165 (1994).
7. G. Falkovich, K. Gawędzki, and M. Vergassola, Rev. Mod. Phys. **73**, 913 (2001).
8. V. Yakhot, Diego A. Donzis, arXiv:1705.02555 (2017)
9. T. Banerjee, A. Basu, arXiv:1801.00998 (2018)
10. V. Yakhot, Diego A. Donzis, arXiv:1801.06102 (2018)
11. M. Vergassola, Phys. Rev. E **53**, R3021 (1996).
12. I. Rogachevskii and N. Kleeorin, Phys. Rev E **56**, 417 (1997).
13. A. Lanotte and A. Mazzino, Phys. Rev. E **60**, R3483 (1999).
14. N. V. Antonov, A. Lanotte, and A. Mazzino, Phys. Rev. E **61**, 6586 (2000).

15. N. V. Antonov, J. Honkonen, A. Mazzino, and P. Muratore Ginanneschi, *Phys. Rev. E* **62**, R5891 (2000);
E. Jurcisinova and M. Jurcisin, *Phys. Rev. E* **88**, 011004 (2013).
16. L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, A. Mazzino, P. Muratore Ginanneschi, and A. V. Runov, *Europhys. Lett.* **55**, 801 (2001);
H. Arponen, *Phys. Rev. E*, **79**, 056303 (2009).
17. N. V. Antonov, M. Hnatich, J. Honkonen, and M. Jurcisin, *Phys. Rev. E* **68**, 046306 (2003).
18. P. S. Iroshnikov, *Sov. Astron.* **7**, 566 (1964).
19. R. H. Kraichnan, *Phys. Fluids* **8**, 1385 (1965).
20. L. F. Burlaga, *J. Geophys. Res.* **96**, 5847 (1991); **97**, 4283 (1992);
E. Marsch and S. Liu, *Ann. Geophys.* **11**, 227 (1993).
21. R. Grauer, J. Krug, and C. Marliani, *Phys. Lett. A* **195**, 335 (1994).
22. G. Einaudi, M. Velli, H. Politano, and A. Pouquet, *Astrophys. Journ.* **457**, L113 (1996).
23. R. Grauer and C. Marliani, *Phys. Plasmas* **2**, 41 (1995); *Physica Scripta T* **67**, 38 (1996).
24. C.-Y. Tu and E. Marsch, *Space Sci. Res.* **73**, 1 (1995).
25. C. Pagel and A. Balogh, *Nonlin. Processes in Geophysics* **8**, 313 (2001).
26. R. Bruno, V. Carbone, B. Bavassano, L. Sorriso-Valvo, and E. Pietropaolo, *Mem. Sos. Astrophys. It.* **74**, 725 (2003).

27. R. Bruno, B. Bavassano, R. D'Amicis, V. Carbone, L. Sorriso-Valvo, and A. Noullez, *Geophys. Research Abstracts* **9**, 08623 (2003).
28. C. Salem, A. Mangeney, S. D. Bale, and P. Veltri, *Astrophys. J.* **702**, 537 (2009).
29. P. D. Mininni and A. Pouquet, *Phys. Rev. E* **80**, 025401 (2009).
30. M. W. Kunz et al., *J. Plasma. Phys.* **81**, 325810501 (2015).
31. L. Sorriso-Valvo et al., arXiv:1505.97879[physics.space-ph].
32. C. C. Lalescu et al., *Phys. Rev. Lett.* **115**, 025001 (2015).
33. I. Arad, L. Biferale, and I. Procaccia, *Phys. Rev. E* **61**, 2654 (2000).
34. E. Jurčišinova and M. Jurčišin, *J. Phys. A: Math. Theor.* **45**, 485501 (2012).
35. E. Jurčišinova, M. Jurčišin, and Remecký, *Phys. Rev. E* **88**, 011002 (2013);
E. Jurčišinova, M. Jurčišin, and P. Zalom, *Phys. Rev. E* **89**, 043023 (2014).
36. N. V. Antonov and N. M. Gulitskiy, *Theor. Math. Phys.* **176**(1), 851 (2013).
37. R. H. Kraichnan, *Phys. Fluids* **11**, 945 (1968); *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1016 (1994).
38. K. Gawędzki and A. Kupiainen, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3834 (1995);
D. Bernard, K. Gawędzki, and A. Kupiainen, *Phys. Rev. E* **54**, 2564 (1996);
M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, and V. Lebedev, *Phys. Rev. E* **52**, 4924 (1995);
M. Chertkov and G. Falkovich, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2706 (1996);
A. Pumir, *Europhys. Lett.* **34**, 25 (1996); **37**, 529 (1997); *Phys. Rev. E* **57**, 2914 (1998).

39. L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, and A. N. Vasil'ev, Phys. Rev. E **58**, 1823 (1998); Theor. Math. Phys. **120**, 1074 (1999).
40. L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, and A. N. Vasil'ev, Sov. Phys. JETP **68**, 733 (1989);
N. V. Antonov, Zap. Nauchn. Seminarov LOMI **169**, 18 (1988) [In Russian; Engl. translation: J. Sov. Math. **54**(3), 873 (1991)];
N. V. Antonov, Zap. Nauchn. Seminarov LOMI **189**, 15 (1991) [In Russian; Engl. translation: J. Sov. Math. **62**(5), 2950 (1992)].
41. A. N. Vasiliev, *The Field Theoretic Renormalization Group in Critical Behavior Theory and Stochastic Dynamics* (Boca Raton, Chapman & Hall/CRC, 2004).
42. L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, and A. N. Vasil'ev, Usp. Fiz. Nauk, **166**, 1257 (1996) [In Russian, Engl. Transl.: Sov. Phys. Uspekhi, **39**, 1193 (1996)].
43. L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, and A. N. Vasiliev, *The Field Theoretic Renormalization Group in Fully Developed Turbulence* (Gordon & Breach, London, 1999).
44. L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, V. A. Barinov, Yu. S. Kabrits, and A. N. Vasil'ev, Phys. Rev. E **63**, 025303(R) (2001); E **64**, 019901(E) (2001); E **64**, 056306 (2001).
45. N. V. Antonov, Phys. Rev. E **60**, 6691 (1999);
L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, and J. Honkonen, Phys. Rev. E **66**, 036313 (2002).

46. L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, J. Honkonen, and T. L. Kim, Phys. Rev. E **71**, 016303 (2005).
47. N. V. Antonov, J. Phys. A: Math. Gen. **39**, 7825 (2006).
48. T. Elperin, N. Kleeorin, and I. Rogachevskii, Phys. Rev E **52**, 2617 (1995); E **55** 2713 (1997); Phys. Rev. Lett. **76** 224 (1996).
49. M. Vergassola and A. Mazzino, Phys. Rev. Lett. **79**, 1849 (1997).
50. M. Vergassola and M. Avellaneda, Physica D **106** 148 (1997).
51. A. Celani, A. Lanotte, and A. Mazzino, Phys. Rev. E **60** R1138 (1999).
52. M. Chertkov, I. Kolokolov, and M. Vergassola, Phys. Rev. E. **56**, 5483 (1997); Phys. Rev. Lett. **80**, 512 (1998).
53. K. Gawędzki and M. Vergassola, Physica D **138**, 63 (2000).
54. L. Ts. Adzhemyan and N. V. Antonov, Phys. Rev. E **58** 7381 (1998).
55. N. V. Antonov and J. Honkonen, Phys. Rev. E **63**, 036302 (2001); Vestnik St. Petersburg Univ., Ser. 4 (Phys. Chem.), issue 1, 3 (2004) [in Russian].
56. N. V. Antonov, Physica D **144**, 370 (2000).
57. M. Hnatich, E. Jurcisinova, M. Jurcisin, and M. Repasan, J. Phys. A: Math. Gen. **39**, 8007 (2006).
58. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon Press, Oxford).
59. V. S. L'vov and A. V. Mikhailov, Sov. Phys. JETP **47**, 756 (1978).

60. L. Ts. Adzhemyan, M. Yu. Nalimov, and M. M. Stepanova, *Theor. Math. Phys.* **104**, 305 (1997);
N. V. Antonov, M. Hnatich, and M. Yu. Nalimov, *Phys. Rev. E* **60**, 4043 (1999).
61. D. Yu. Volchenkov and M. Yu. Nalimov, *Theor. Math. Phys.* **106**, 375 (1996).
62. S. S. Moiseev, A. V. Tur, and V. V. Yanovskii, *Sov. Phys. JETP* **44**, 556 (1976).
63. I. Staroselsky, V. Yakhot, S. Kida, and S. A. Orszag, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 171 (1990).
64. N. V. Antonov, M. Yu. Nalimov, and A. A. Udalov, *Theor. Math. Phys.* **110**, 305 (1997).
65. N. V. Antonov, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 161101 (2004).
66. J. D. Fournier, P. L. Sulem, and A. Pouquet, *J. Phys. A* **15**, 1393 (1982);
L. Ts. Adzhemyan, A. N. Vasil'ev and M. Gnatich, *Theor. Math. Phys.* **64**, 777 (1985); **72**, 940 (1987).
67. A. P. Kazantsev, *Sov. Phys. JETP* **26**, 1031 (1968).
68. E. Jurčišinova, M. Jurčišin, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45**, 485501 (2012);
Phys. Rev. E **88**, 011004 (2013)
69. J. J. Moreau, *C. R. Acad. Sci. Paris* 252, 2810 (1961).
70. H.K. Moffatt, *J. Fluid Mech.* 35, 117 (1969).

71. H.K. Moffatt and A. Tsinober, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 24, 281 (1992).
72. С.С. Моисеев, О.Г.Чхетиани *ЖЭТФ* т.109 (6), 357-370, 1996;
73. О.Г.Чхетиани, *Письма в ЖЭТФ*, т.63 (10), 768-772, 1996;
74. Q. Chen, S. Chen, and G.L. Eyink, *Phys. Fl.* 15, 361 (2003).
75. О.Г.Чхетиани, *ДАН*, т.422 (5), с.618- 621, 2008.
76. O.G. Chkhetiani, M. Hnatich, E. Jurcisinova, M. Jurcisin, A. Mazzino, M. Repasan *J. Phys. A: Math. Gen.* 39 (2006) 7913-7926;
77. O.G. Chkhetiani, M. Hnatich, E. Jurcisinova, M. Jurcisin, A. Mazzino, M. Repasan *Phys. Rev. E* 74 (2006) 036310
78. L.Ts. Adzhemyan, N.V. Antonov, M.V. Kompaniets, A.N. Vasil'ev *Int. Journ. Mod. Phys. B*17 (2003) 2137-2170.
79. L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, M. V. Kompaniets, and A. N. Vasil'ev, *Int. J. Mod. Phys. B* **17**, 2137 (2003).
80. J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Oxford, Clarendon, 1989).
81. C. De Dominicis and P. C. Martin, *Phys. Rev. A* **19**, 419 (1979);
 P. L. Sulem, J. D. Fournier, and U. Frisch, *Lecture Notes in Physics*, **104**, 321 (1979);
 J. D. Fournier and U. Frisch, *Phys. Rev. A* **28**, 1000 (1983);
 L. Ts. Adzhemyan, A. N. Vasil'ev, and Yu. M. Pis'mak, *Theor. Math. Phys.* **57**, 1131 (1983).

82. L.Ts. Adzhemyan, A.N. Vasil'ev, and M. Hnatich, *Theor. Math. Phys.* **74**, 115 (1988);
 N. V. Antonov, *Vestnik St. Petersburg Univ., Ser. 4 (Phys. Chem.)*, No 4(25), 6 (1992);
 N. V. Antonov, *Vestnik St. Petersburg Univ., Ser. 4 (Phys. Chem.)*, No 3(18), 3 (1992);
 L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, and T. L. Kim, *Theor. Math. Phys.* **100**, 1086 (1994);
 N. V. Antonov, S. V. Borisenok, and V. I. Girina, *Theor. Math. Phys.* **106**, 75 (1996);
 N. V. Antonov N V and A. N. Vasil'ev, *Theor. Math. Phys.* **110**, 97 (1997).
83. D. Ronis, *Phys. Rev. A* **36**, 3322 (1987);
 J. Honkonen and M. Yu. Nalimov, *Z. Phys. B* **99**, 297 (1996);
 L.Ts. Adzhemyan, J. Honkonen, M. V. Kompaniets, and A.N. Vasil'ev, *Phys. Rev. E* **71**, 036305 (2005).
84. L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, M. Hnatich, and S. V. Novikov *Phys. Rev. E* **63**, 016309 (2000);
 M. Hnatich, M. Jurcisin, A. Mazzino, and S. Sprinc, *Acta Physica Slovaca* **52**, 559 (2002);
 M. Hnatich, J. Honkonen, M. Jurcisin, A. Mazzino, and S. Sprinc, *Phys. Rev. E* **71**, 066312 (2005);
 E. Jurcisinova, M. Jurcisin, R. Remecky, and M. Scholtz, *Int. J. Mod. Phys. B* **22**, 3589 (2008).
85. N. V. Antonov and P. Gol'din, *Theor. Math. Phys.* **141**, 1725 (2004).

86. B. Duplantier, A. Ludwig, Phys. Rev. Lett. **66**, 247 (1991);
G. L. Eyink, Phys. Lett. A **172**, 355 (1993).
87. V. Borue and S. A. Orszag, J. Fluid Mech. **306**, 293 (1994);
I. Arad, B. Dhruva, S. Kurien, V. S. L'vov, I. Procaccia, and K. R. Sreenivasan, Phys. Rev. Lett. **81**, 5330 (1998).
88. N. V. Antonov and M. M. Kostenko, Phys. Rev. E **90**, 063016 (2014).
89. H. K. Moffat, *Magnetic field generation in electrically conducting fluids* (Cambridge University Press, Cambridge, 1978);
Yu. V. Novozhilov and Yu. A. Yappa, *Electrodynamics* (Mir Publishers, Moscow, 1981).
90. A. N. Vasil'ev, *The Field Theoretic Renormalization Group in Critical Behavior Theory and Stochastic Dynamics* (Boca Raton, Chapman Hall/CRC, 2004)
91. J. Honkonen and M. Yu. Nalimov, Z. Phys. B **99**, 297 (1996)
92. L. Ts. Adzhemyan, J. Honkonen, M. V. Kompaniets, and A. N. Vasil'ev, Phys. Rev. E **71**, 036305 (2005)
93. N. V. Antonov and M. M. Kostenko, Phys. Rev. E **92**, 053013 (2015)
94. D. J. Amit and V. Martin-Mayor, *Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena* (World Scientific, Singapore, 2005)
95. V. S. L'vov and A. V. Mikhailov, Sov. Phys. JETP **47**, 756 (1978)
96. N. V. Antonov, Phys. Rev. Lett. **92**, 161101 (2004)

97. B.I. Shraiman and E.D. Siggia, C.R. Acad. Sci., Ser. IIa: Sci. Terre Planets **321**, 279 (1995).
98. M. Chertkov, G. Falkovich, and V. Lebedev, Phys. Rev. Lett. **76**, 3707 (1996).
99. N. V. Antonov, N.M. Gulitskiy, M. M. Kostenko, and T. Lúčivjanský Web of Conferences **125**, 05006 (2016)
100. N. V. Antonov, N. M. Gulitskiy, M. M. Kostenko, and T. Lúčivjanský Web of Conferences **137**, 10003 (2017)
101. N. V. Antonov, N.M. Gulitskiy, M. M. Kostenko, and T. Lúčivjanský Physical Review E **95**, 033120 (2017)
102. N. V. Antonov, N.M. Gulitskiy, M. M. Kostenko, and T. Lúčivjanský EPJ Web of Conferences **164**, 07044 (2017)