

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный университет»

На правах рукописи

Ямалова Диана Рамилевна

Исследование наблюдателей состояния импульсных систем

01.01.09 Дискретная математика и математическая кибернетика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент Чурилов А.Н.

Санкт-Петербург

2017

Содержание

| | |
|---|-----------|
| Введение | 4 |
| 1 Предварительные сведения | 8 |
| 1.1 Системы с импульсами | 8 |
| 1.2 Линейные системы с запаздыванием | 16 |
| 2 Наблюдатели состояния с обратной связью в дискретной части наблюдателя | 19 |
| 2.1 Постановка задачи | 19 |
| 2.2 Использование пропорциональной обратной связи в дискретной части наблюдателя | 20 |
| 2.2.1 Уравнения наблюдателя | 20 |
| 2.2.2 Синхронный режим | 20 |
| 2.2.3 Точечное отображение и его свойства | 22 |
| 2.2.4 Устойчивость синхронного режима по отношению к m -циклу | 28 |
| 2.3 Использование комбинированной частотной модуляции в дискретной части на- блюдателя | 30 |
| 2.3.1 Уравнения наблюдателя | 31 |
| 2.3.2 Точечное отображение и его свойства | 31 |
| 2.3.3 Устойчивость синхронного режима по отношению к m -циклу | 37 |
| 3 Наблюдатели состояния для импульсной системы с запаздыванием | 38 |
| 3.1 Постановка задачи | 38 |
| 3.2 Наблюдатель без запаздывания с кусочно-постоянной матрицей коэффициентов усиления | 39 |
| 3.2.1 Уравнения наблюдателя | 39 |
| 3.2.2 Точечное отображение и его свойства | 40 |
| 3.2.3 Линеаризация точечного отображения | 43 |
| 3.2.4 Устойчивость синхронного режима по отношению к m -циклу | 45 |
| 3.3 Наблюдатель, имеющий структуру исходной системы с запаздыванием | 46 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.3.1 | Уравнения наблюдателя | 47 |
| 3.3.2 | Синхронный режим | 47 |
| 3.3.3 | Точечное отображение и его свойства | 47 |
| 3.3.4 | Устойчивость синхронного режима по отношению к m -циклу | 60 |
| 4 | Задача наблюдения в системе гормональной регуляции тестостерона | 61 |
| 4.1 | Описание системы гормональной регуляции тестостерона | 61 |
| 4.2 | Синтез коэффициентов усиления наблюдателя для 1-цикла | 64 |
| 4.3 | Результаты моделирования | 75 |
| 4.3.1 | Использование пропорциональной обратной связи в дискретной части наблюдателя | 75 |
| 4.3.2 | Использование комбинированной частотной модуляции в дискретной части наблюдателя | 86 |
| 4.3.3 | Наблюдение при наличии запаздывания | 88 |
| | Заключение | 95 |
| | Список рисунков | 96 |
| | Литература | 99 |

Введение

Импульсные системы получили широкое распространение с середины прошлого столетия. Этому во многом способствовало развитие технических устройств различного назначения, работа которых связана с передачей и преобразованием последовательности импульсов. В таких системах импульсный режим работы, как правило, обусловлен назначением самого устройства. Кроме того, импульсы могут возникать и в других прикладных областях: физике, химии, экономике, биологии и медицине — там, где они естественно описывают процессы, состояния которых изменяются скачком.

Важное биомедицинское применение импульсные системы получили в нейроэндокринологии, изучающей взаимодействие центральной нервной и эндокринной систем [54,55,97]. Это взаимодействие контролируется отделом головного мозга — гипоталамусом. Сигналы, приходящие в гипоталамус из эндокринной системы, активируют в нем секрецию нейрогормонов. Распространяясь в потоке крови, гипоталамические нейрогормоны стимулируют секрецию гормонов гипофиза. Последние, достигая вместе с кровью соответствующих эндокринных желез, активируют в них секреторные функции. Описанные выше процессы нейроэндокринной регуляции обычно замыкаются через нервную систему, тем самым формируя обратные связи. При этом некоторые из эндокринных желез секретируют гормоны непрерывно, в то время как для гипоталамических нейрогормонов характерна импульсная секреция с коротким периодом полураспада. При этом непосредственное измерение концентрации и частоты секреции гормонов гипоталамуса невозможно без причинения существенного вреда головному мозгу человека или животного. Таким образом, возникает **важная практическая задача**: оценить концентрации гормонов гипоталамуса на основе измеряемых концентраций других гормонов.

Общее поведение нейроэндокринной системы с обратной связью при ряде упрощающих предположений может быть описано с помощью гибридной модели с импульсной модуляцией по частоте и амплитуде [38–40]. Как показывают результаты моделирования [15,37,55,66,97], импульсные модели имеют лучшее согласование с экспериментальными данными, чем непрерывные модели, предложенные, например, в [23,51,73,85,86]. Из-за невозможности измерения

концентраций всех гормонов, участвующих в цепочке регуляции, возникает задача оценивания состояния импульсной системы, которая имеет ряд особенностей. Во-первых, импульсный характер обратной связи приводит к возникновению скачков в состоянии системы. Во-вторых, измерения в дискретной части замкнутой гибридной системы недоступны и, следовательно, должны быть восстановлены по измеряемым непрерывным сигналам. В-третьих, в динамике замкнутой системы присутствуют периодические или хаотические колебания [112], причем состояния равновесия отсутствуют [31]. Значительное число работ посвящено наблюдаемости гибридных систем, содержащих непрерывную и импульсную части (см., например, [14, 26, 27, 34, 76, 77, 93]), однако, все они предполагают, что моменты возникновения импульсов известны или измеряемы. Задача оценивания состояний и неизвестных моментов импульсации в простейшем случае наблюдателя с непрерывной обратной связью была рассмотрена в [31], однако, переходные процессы в предложенной в [31] системе довольно длительны и носят сильно выраженный колебательный характер.

Таким образом, задача оценивания дискретного состояния импульсной системы по измерениям непрерывного сигнала является **актуальной**. При этом требуется разработать такие схемы наблюдения, которые обеспечивают достаточно хорошее качество переходных процессов.

Целью диссертационной работы является разработка схемы наблюдателя состояния для импульсных систем, в которых дискретное состояние должно быть восстановлено по измеряемому непрерывному выходному сигналу. Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие задачи.

1. В случае наблюдателя с *пропорциональной* обратной связью в дискретной части построить точечное преобразование (оператор сдвига по траектории системы), описывающее эволюцию состояний наблюдателя от импульса к импульсу; с его помощью получить условия асимптотической устойчивости в малом режима наблюдения периодического решения импульсной системы.
2. В случае наблюдателя с *интегральной* обратной связью и *комбинированной частотной модуляцией* в дискретной части наблюдателя построить точечное преобразование, описывающее эволюцию состояний наблюдателя от импульса к импульсу; с его помощью получить условия асимптотической устойчивости в малом режима наблюдения периодического решения импульсной системы.
3. Для импульсной системы с *запаздыванием* и наблюдателя *без запаздывания* и с *разрывной обратной связью* построить точечное преобразование, описывающее эволюцию состояний

наблюдателя от импульса к импульсу; с его помощью получить условия асимптотической устойчивости в малом режима наблюдения периодического решения.

4. Для импульсной системы с запаздыванием и наблюдателя с запаздыванием построить точечное преобразование, описывающее эволюцию состояний наблюдателя от импульса к импульсу; с его помощью получить условия асимптотической устойчивости в малом режима наблюдения периодического решения.
5. Применить полученные результаты к исследованию математической модели гормональной регуляции тестостерона в мужском организме.

Помимо описанной выше **практической значимости**, поставленные задачи имеют **теоретический интерес**: построение дискретного точечного преобразования (в теории гибридных систем оно носит название отображения Пуанкаре [48]), описывающего эволюцию состояния наблюдателя от импульса к импульсу, и его исследование само по себе является нетривиальной математической задачей.

В первой главе диссертационной работы приводятся вспомогательные сведения, необходимые для формулировки и доказательства основных результатов.

Во второй главе рассматриваются наблюдатели состояния импульсной системы с обратной связью в дискретной части наблюдателя. Предлагается новая схема наблюдателя с пропорциональной обратной связью в дискретной части. Выводится формула дискретного преобразования, описывающего эволюцию состояния наблюдателя от импульса к импульсу, приводятся его свойства. Неподвижные точки этого отображения и его итераций отвечают периодическим решениям уравнения наблюдателя. Путем линеаризации этого дискретного отображения в малых окрестностях периодических режимов, выводятся условия локальной асимптотической устойчивости режима наблюдения (синхронного режима). Затем рассматривается наблюдатель с интегральной обратной связью в дискретной части и с комбинированной частотной модуляцией. Выводятся условия устойчивости в малом синхронного режима для такого наблюдателя.

В третьей главе рассматриваются наблюдатели состояния импульсной системы с запаздыванием. Поскольку при определенных предположениях исходная система с запаздыванием может быть аппроксимирована системой без запаздывания, предлагается рассмотреть наблюдатель без запаздывания с кусочно-постоянной матрицей коэффициентов усиления, который осуществляет наблюдение аппроксимирующей модели. Для такого наблюдателя выводятся формула дискретного преобразования, описывающего эволюцию состояния наблюдателя от импульса к импульсу. Приводятся условия гладкости данного отображения и, путем его линеаризации в малых окрестностях периодических режимов, выводятся условия локальной асимптотической устойчивости

синхронного режима. Установлено, что такой наблюдатель предъявляет довольно жесткие требования к наблюдаемости системы. С целью ослабления этих требований, рассматривается другая схема наблюдателя — наблюдатель с запаздыванием, копирующий структуру исходной системы. Выводится формула отображения Пуанкаре, с его помощью находятся условия асимптотической устойчивости в малом синхронного режима.

В четвертой главе полученные результаты применяются к исследованию математической модели гормональной регуляции тестостерона в мужском организме. Предлагается алгоритм выбора коэффициентов усиления наблюдателя с пропорциональной обратной связью в дискретной части для практически важного случая 1-периодического решения системы (1-цикла), обеспечивающий локальную устойчивость синхронного режима, а также высокую скорость сходимости. Для всех типов рассмотренных наблюдателей приводятся результаты компьютерного моделирования, подтверждающие их работоспособность.

В заключении перечислены основные результаты работы.

Достоверность изложенных в работе теоретических результатов обеспечивается их строгим математическим доказательством.

Все основные научные результаты диссертации являются **новыми** и получены автором самостоятельно.

По теме диссертации опубликовано *восемь работ* [12, 102–108], в том числе *семь* — в изданиях из перечня научных журналов, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией для публикации основных научных результатов диссертаций, из которых *шесть работ* в изданиях из базы цитирования Scopus.

Основные научные результаты работы представлены на девяти российских и международных конференциях.

Глава 1

Предварительные сведения

1.1 Системы с импульсами

Динамические системы, математические модели которых содержат как непрерывную, так и дискретную части, называются гибридными. Такие модели служат для описания различных динамических процессов, возникающих в большинстве сетевых систем управления [16, 50, 65, 68, 75, 99, 109, 111], в мультиагентных системах [71, 72, 94, 100], непрерывных системах с переключениями [19, 62], непрерывных системах с импульсной обратной связью [47, 64, 74, 101] и др. Из-за особенностей взаимодействия между собой динамик различной природы, исследование гибридных систем, как правило, является более сложным, чем чисто дискретных или чисто непрерывных моделей.

Отдельно выделим особый класс гибридных систем — системы с импульсным воздействием, т. е. системы со скачками вектора состояния в некоторые моменты времени [4, 7, 9, 10, 17, 59, 88–90]. Они описывают случай, когда длительность импульса мала по сравнению со временем переходных процессов в системе, тогда ею можно пренебречь и рассматривать импульсы нулевой длительности (мгновенные импульсы, скачки). Системы с импульсным воздействием (для них часто используют термины системы со скачками, импульсные системы, по-английски — *impulsive systems*) имеют достаточно широкое применение в цифровых системах, радиоэлектронике, механике, системах регулирования температуры, частотных датчиках, фильтрах, а также в биологии и медицине. Так, в технике используются импульсные модуляторы, которые работают по принципу замыкания/размыкания ключевого устройства, а в биологии взаимодействие нейронов осуществляется путем распространения нервных импульсов. При этом импульсный характер процессов может быть обусловлен как принципом действия самой системы, так и внешним импульсным управлением.

В импульсных системах (системах с импульсным воздействием) непрерывная динамика задается с помощью дифференциальных или интегральных уравнений, описывающих поведение динамической системы в промежутках между скачками (см. [1, 2, 5, 6, 8, 11, 33, 42, 57]). Дискретная динамика описывается функциональными уравнениями, которые определяют мгновенное изменение состояния и моменты возникновения импульсов. Таким образом, с точки зрения математической классификации, импульсные системы можно отнести к более общим классам функционально-дифференциальных или функционально-интегральных уравнений.

Рассматривают два основных вида импульсных систем. В первом, моменты возникновения импульсов фиксированы и не зависят от решения системы. Во втором, который и будет рассматриваться в этой работе, расстояние между импульсами T_n определяется из некоторых функциональных соотношений.

В случае, который мы будем рассматривать, положение каждого следующего импульса вычисляется в зависимости от значения некоторого сигнала (называемого модулирующим) в момент возникновения предыдущего импульса. Такой принцип формирования моментов импульсации иногда называют импульсной модуляцией первого рода (type 1 modulation) или self-triggered control. В более сложном случае величина T_n определяется неявно, как корень некоторого функционального уравнения, зависящего от модулирующего сигнала. В зависимости от вида этого функционала различают разные виды формирования импульсов — импульсная модуляция второго рода (type 2 modulation), интегральная модуляция, event-triggered control, integrate-and-fire и др.

Мы будем рассматривать следующую модель формирования импульсов. Пусть $x(t)$ — вектор состояний системы в момент времени t (кусочно-постоянная функция), $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ — возрастающая последовательность моментов импульсации, $\sigma(t)$ — модулирующий сигнал (непрерывная функция). Тогда скачки состояния описываются с помощью соотношений

$$x(t_n^+) = x(t_n^-) + \lambda_n B, \quad \lambda_n = F(\sigma(t_n)). \quad (1.1)$$

Здесь $x(t^+)$, $x(t^-)$ — правосторонний и левосторонний пределы функции $x(\cdot)$ в точке t , B — заданный постоянный вектор, $F(\cdot)$ — заданная непрерывная функция. Число λ_n называют амплитудой или весом n -го импульса, а функцию $F(\cdot)$ — амплитудной импульсной характеристикой.

Моменты импульсации определяются рекуррентным соотношением

$$t_{n+1} = t_n + T_n, \quad T_n = \Phi(\sigma(t_n)), \quad (1.2)$$

где $\Phi(\cdot)$ — заданная непрерывная функция, называемая частотной импульсной характеристикой. Величина T_n называется длиной импульсного интервала, в современной англоязычной лите-

ратуре иногда используется термин dwell-time. Обратная величина $1/T_n$ характеризует частоту следования импульсов.

Таким образом, уравнения (1.1), (1.2) описывают правило, при котором параметры скачков λ_n , T_n являются функционалами от модулирующего сигнала $\sigma(\cdot)$. Такие параметры называются модулированными, причем говорят, что формула (1.1) описывает амплитудно-импульсную модуляцию, а формула (1.2) — частотно-импульсную модуляцию [3, 11, 42].

Многочисленные исследования в области математической биологии показали, что математические модели биологических систем часто характеризуются отсутствием состояния равновесия и обладают сложной динамикой, включающей хаотическое поведение [35, 52, 61, 70, 82, 91, 110], что является следствием присутствия колебаний в живых организмах — от простейших бактерий до более сложных форм жизни. Помимо колебаний, вызванных внешним периодическим воздействием (например, периодической сменой дня и ночи), в биологических системах с обратной связью могут возникать также автоколебания (см. [21, 24]).

Биологический осциллятор, предложенный Брайаном Гудвином в 1965 году [43, 44], служит для описания механизма колебаний, возникающих в биохимических системах третьего и более высоких порядков. С точки зрения нелинейной динамики, он представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка. При определенных условиях в этой системе могут возникать периодические колебания. В дальнейшем различные варианты уравнений Гудвина стали использоваться при моделировании колебаний в других областях биологии [25, 45, 46, 63, 78, 79, 87, 98]. В 1980-е годы модель Гудвина была расширена Р. Смитом для описания биологических процессов, связанных с периодическими колебаниями в эндокринных системах регуляции тестостерона (модель Гудвина–Смита [85, 86]). К недостаткам осциллятора Гудвина относится то, что периодические решения в нем возникают лишь при довольно жестких предположениях к параметрам системы, причем некоторые из этих предположений не являются биологически обоснованными. Кроме того, в эндокринных системах колебания носят выраженный импульсный характер, что также не учитывалось моделью Гудвина–Смита. Поэтому естественной явилась мысль улучшить адекватность модели Гудвина–Смита путем ее модификации на основе теории импульсных систем. Такая модифицированная модель, впоследствии названная импульсным осциллятором Гудвина, была предложена в [31].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсами [31], состоящую из непрерывной и дискретной частей:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad z(t) = Cx(t), \quad y(t) = Lx(t), \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned}
x(t_n^+) &= x(t_n^-) + \lambda_n B, & t_{n+1} &= t_n + T_n, \\
T_n &= \Phi(z(t_n)), & \lambda_n &= F(z(t_n)),
\end{aligned}
\tag{1.4}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B \in \mathbb{R}^{n_x}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n_x}$, $L \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ – постоянные матрицы коэффициентов, $x(t)$ – вектор состояния, $y(t)$ – измеряемая часть вектора состояния, $z(t)$ – модулирующий сигнал. Состояние системы испытывает скачки в моменты времени t_0, t_1, t_2, \dots , где $t_k < t_{k+1}$ и $t_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. На интервалах между импульсами (t_k, t_{k+1}) , $k = 0, 1, \dots$ система описывается линейными дифференциальными уравнениями (1.3). Уравнения (1.4) описывают дискретную часть системы.

Функции $F(\cdot)$ и $\Phi(\cdot)$ (амплитудная и частотная модуляционные характеристики) являются непрерывными, строго монотонными и ограниченными, причем их значения строго положительны и отделены от нуля:

$$0 < \Phi_1 \leq \Phi(\cdot) \leq \Phi_2, \quad 0 < F_1 \leq F(\cdot) \leq F_2, \tag{1.5}$$

где Φ_1, Φ_2, F_1, F_2 – положительные константы. В силу биологических свойств системы $\Phi(\cdot)$ – неубывающая и $F(\cdot)$ – невозрастающая, т. е. чем больше значение модулирующего сигнала, тем меньше частота и амплитуда импульсов (отрицательная импульсная обратная связь). Таким образом, уравнения (1.4) определяют комбинированную (амплитудно-частотную) импульсную модуляцию [42].

Предположим, что матрица A – гурвицева, т. е. все ее собственные числа имеют отрицательные вещественные части. Пусть пара матриц (A, L) наблюдаема, т. е. матрица $\begin{bmatrix} L & LA & LA^2 & \dots & LA^{n-1} \end{bmatrix}^T$ имеет полный строчный ранг, и выполнены соотношения

$$CB = 0, \quad LB = 0, \tag{1.6}$$

обеспечивающие непрерывность функций $z(t)$ и $y(t)$. Вектор состояния $x(t)$ системы (1.3) претерпевает скачки в моменты времени t_n . Напомним, что через $x(t^-)$ и $x(t^+)$ мы обозначаем левосторонний и правосторонний пределы функции $x(\cdot)$ в точке t . Альтернативные обозначения – $x(t-0)$ и $x(t+0)$ соответственно.

Из гурвицевости матрицы A и ограниченности функций $\Phi(\cdot)$ и $F(\cdot)$, следует, что все решения системы (1.3)–(1.4) ограничены. Так как все модуляционные характеристики являются строго положительными, у системы (1.3)–(1.4) отсутствует состояние равновесия [31]. В [31] были найдены условия существования простейших периодических решений (с одним и двумя импульсами на периоде) в (1.3)–(1.4). В работе [112] были обнаружены решения более высокой периодичности (с большим числом импульсов на периоде) и было показано, что в некоторых областях пространства параметров система (1.3)–(1.4) может иметь хаотическую динамику.

Начальные условия для системы (1.3)–(1.4) задаются в виде пары $(x(t_0^-), t_0)$, т. е. в качестве начального момента времени мы рассматриваем время возникновения первого импульса t_0 . Введем обозначение $x_n = x(t_n^-)$. Тогда любое решение $x(t)$ системы (1.3)–(1.4) удовлетворяет дискретному уравнению

$$x_{n+1} = P(x_n), \quad (1.7)$$

где

$$P(x) = e^{A\Phi(Cx)}(x + F(Cx)B). \quad (1.8)$$

В результате, система двух дискретных уравнений – (1.7) и $t_{n+1} = t_n + \Phi(x_n)$ полностью определяет динамику системы (1.3)–(1.4) в точках $t = t_n, n = 0, 1, \dots$. Значения решения в промежуточных точках легко могут быть восстановлены по этим дискретным значениям [31].

Рассмотрим периодическое решение уравнения (1.7), и, следовательно, системы (1.3)–(1.4). Множество точек $S(x_0) = \{x_0, x_1, \dots\}$, где $x_{n+1} = P(x_n)$, обычно называют орбитой дискретной системы (1.7), проходящей через точку x_0 .

Решение $\{x_n\}, n = 0, 1, \dots$ системы (1.7) называется m -периодическим, если m – натуральное число, для которого справедливы следующие соотношения

$$\begin{aligned} x_1 &= P(x_0), \\ x_2 &= P(x_1), \\ &\vdots \\ x_m &= P(x_{m-1}), \\ x_m &= x_0, \end{aligned}$$

при этом все вектора x_0, \dots, x_{m-1} различны. В случае $m = 1$ мы получаем единственное соотношение $x_0 = P(x_0)$.

Начальное значение x_0 для m -периодического решения удовлетворяет условию $x_0 = P^{(m)}(x_0)$, где

$$P^{(m)}(x_0) = \underbrace{P(P(\dots))}_m(x_0).$$

Орбитой такого решения является последовательность $S(x_0) = S_m(x_0) = \{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\}$, которая определяет m -периодическую орбиту дискретной системы (1.7).

Пусть последовательность x_n образует m -периодическое решение уравнения (1.7), а $x(t)$ – решение системы (1.3)–(1.4) при $t \geq t_0$ с начальными условиями $x(t_0^-) = x_0$. Тогда $x(t_n^-) = x_n, n \geq 0$, и решение $x(t)$ является периодическим с периодом $T = \Phi(x_0) + \dots + \Phi(x_{m-1})$ и имеет ровно m импульсов на любом промежутке вида $[t_n, t_n + T)$. Кроме того, $t_m = t_0 + T$. Такое решение $x(t)$ называется m -циклом.

Рассматриваемая импульсная система (1.3), (1.4) имеет непрерывное состояние $x(t) \in \mathbb{R}^n$ и дискретное состояние t_n , поэтому размерность ее фазового пространства равна $n + 1$. В то же время, фазовое пространство дискретной системы (1.7) n -мерно и совпадает с \mathbb{R}^n . Таким образом, оно представляет собой гиперплоскость в $(n + 1)$ -мерном фазовом пространстве системы (1.3), (1.4), причем дискретное преобразование (1.7) задает преобразование этой гиперплоскости в себя. В теории гибридных систем дискретное отображение (1.7) носит название отображения Пуанкаре [48] (по аналогии с отображением Пуанкаре для систем в непрерывном времени).

Нетрудно убедиться, что решения импульсной системы (1.3)–(1.4) не являются устойчивыми в ляпуновском смысле, т. е. устойчивыми по отношению к малым возмущениям начальных значений [49, 84]. В то же время, мы можем рассмотреть устойчивость связанной с (1.3)–(1.4) дискретной системы (1.7). В отличие от импульсной системы, решения дискретной системы (1.7) могут обладать устойчивостью в смысле Ляпунова. С практической точки зрения, ляпуновская устойчивость решений преобразования Пуанкаре (1.7) обычно достаточна для того, чтобы система рассматривалась как работоспособная.

Орбита $S(x_0)$ дискретной системы (1.7) называется *асимптотически устойчивой* [58], если

- 1) для любой окрестности $V \supset S$ существует окрестность $U \supset S$ такая, что $x_n \in V$ для всех $x_0 \in U$ и $n \geq 0$;
- 2) существует окрестность $U_0 \supset S$ такая, что расстояние $\text{dist}(x_n, S) \rightarrow 0$ для всех $x_0 \in U_0$ при $n \rightarrow \infty$.

Здесь

$$\text{dist}(x_n, S) = \inf_{y \in S} \|x_n - y\|,$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова векторная норма.

Для системы (1.7) m -периодическая орбита $\{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\}$ является локально асимптотически устойчивой, если все собственные значения матричного произведения $J_{m-1} \dots J_1 J_0$ лежат строго внутри единичного круга, где J_k — матрица Якоби отображения $P(x)$, вычисленная в точке x_k [58]. Таким образом, для системы (1.7) локальная устойчивость m -цикла может быть установлена путем линеаризации отображения $P(x)$ в малых окрестностях точек $x_i, i = 0, \dots, m - 1$.

Рассмотрим $(n_x + 1)$ -мерную орбиту (множество упорядоченных пар) $\tilde{S}(x_0, t_0) = \{(x_n, t_n), n = 0, 1, \dots\}$. Ясно, что она не является периодической даже в случае, когда $S(x_0)$ является m -периодической орбитой системы (1.7). Поскольку $t_{n+1} = t_n + \Phi(x_n)$, даже для асимптотически устойчивой S , расширенная орбита \tilde{S} не будет асимптотически устойчивой. Действительно, при малых возмущениях начального значения t_0 разность между значениями t_n для

возмущенного и невозмущенного решений будет малой при всех $n \geq 0$, но не стремится к нулю с ростом n .

Таким образом, если решение дискретной системы Пуанкаре (1.7) (порядка n_x) может обладать асимптотической устойчивостью по Ляпунову, для решений дискретной системы порядка $n_x + 1$, состоящей из системы Пуанкаре (1.7) и уравнения $t_{n+1} = t_n + \Phi(x_n)$, можно рассматривать только устойчивость по Ляпунову, но не асимптотическую устойчивость по Ляпунову.

Если же рассмотреть импульсную систему (1.3), (1.4) в непрерывном времени, то для ее решений отсутствует даже обычная (не асимптотическая) устойчивость по Ляпунову, понимаемая в традиционном для обыкновенных дифференциальных уравнений смысле. Для импульсных систем понятие устойчивости требует существенной модификации (см., например, [59, 81]).

Поясним сказанное с помощью графических иллюстраций. На рис. 1.1 видно, что начальные значения и траектории двух решений (рассматриваемые как множества в фазовом пространстве) близки, но значения решений существенно отличаются на коротких промежутках времени между соседними скачками двух решений.

Рассмотрим две разрывные функции, которые описывают решения уравнений (1.3), (1.4) с близкими начальными условиями. Пусть решение $(x^1(t), t_n^1)$ является 1-циклом и отвечающее ему преобразование Пуанкаре асимптотически устойчиво. Рассмотрим второе решение $(x^2(t), t_n^2)$ с начальными данными, достаточно близкими к начальным данным первого решения: $(x_0^1, t_0^1) \approx (x_0^2, t_0^2)$. Однако, даже при $x_0^1 = x_0^2$ из условия $t_0^1 \approx t_0^2$ **не следует** выполнение соотношения $x^1(t) \approx x^2(t)$, в том числе при больших значениях t (см. рис. 1.2). Такой эффект называется выбросом рассогласования импульсных сигналов (peaking phenomenon) [36, 60, 69, 95].

Значительное число работ было посвящено наблюдаемости гибридных систем, содержащих непрерывную и импульсную части. Однако, большая часть этих работ использует гибридные наблюдатели в негибридных системах управления для улучшения качества работы системы [26, 27, 34, 76, 77, 93]. Более того, в литературе не рассматривался случай, когда моменты возникновения скачков неизвестны, т. к. в инженерных приложениях обычно рассматривается задача синтеза импульсного регулятора, для которого параметры импульсов (их амплитуды и моменты импульсации) предполагаются измеряемыми [14, 20, 22, 41, 92]. Проблема неизмеряемых моментов импульсации характерна для некоторых биомедицинских моделей, где импульсный сигнал не является частью внешнего воздействия, а формируется внутри организма, в результате работы внутренних органов и, прежде всего, головного мозга. Такой импульсный сигнал зачастую не может быть измерен без причинения вреда живому организму, что недопустимо по этическим соображениям. Отсюда возникает нетрадиционная и нетривиальная задача наблюдения.

Еще одной сложностью, возникающей в задачах наблюдения состояний системы с недоступным измерению импульсным воздействующим сигналом, является анализ устойчивости наблюдателя. Импульсный характер обратной связи приводит к возникновению скачков в состоянии исследуемой системы, причем, как правило, моменты импульсации генерируемые наблюдателем не совпадают с моментами импульсации исходной системы. Это приводит к тому, что ошибка наблюдения также претерпевает скачки и при сколь угодно больших значениях времени имеет место выброс этой ошибки.

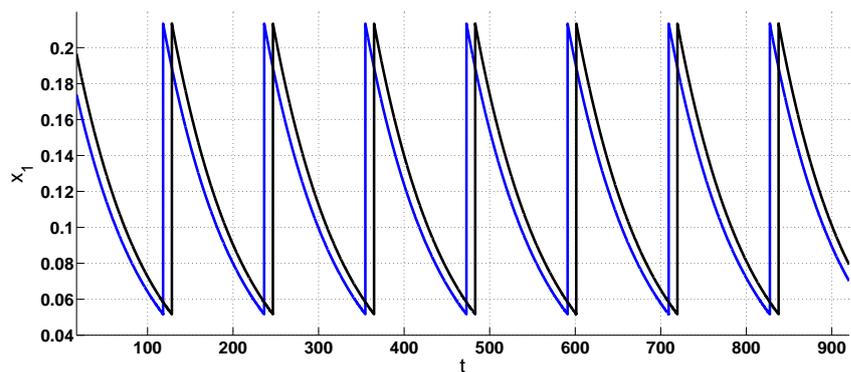
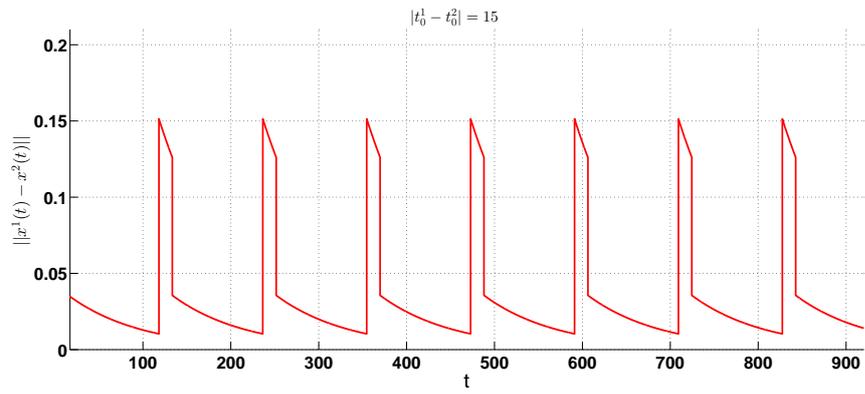
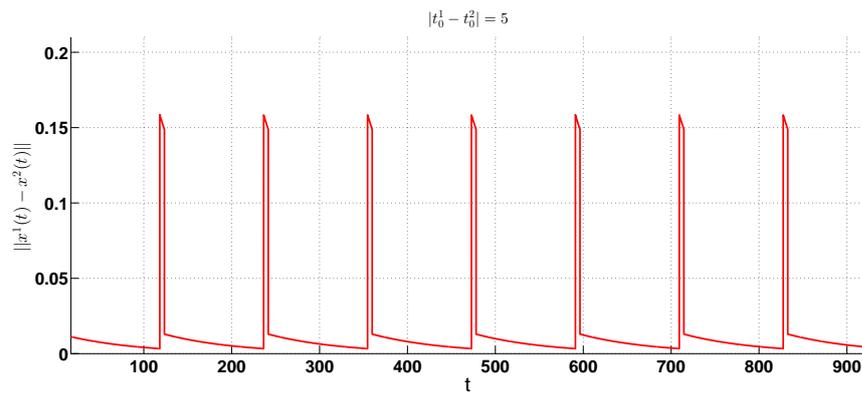


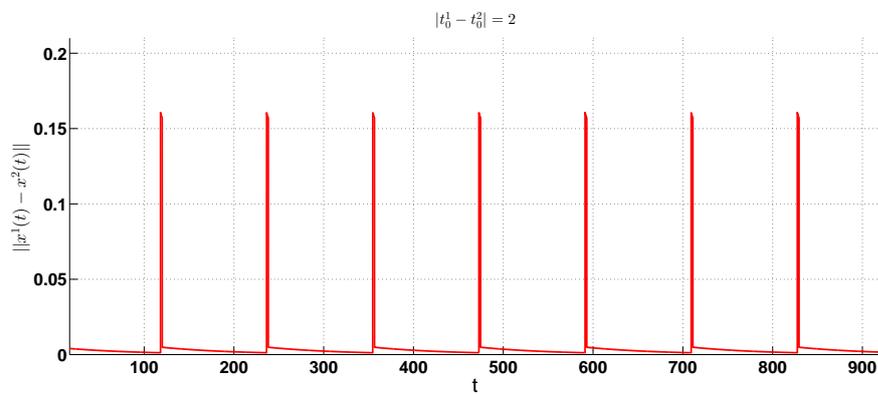
Рисунок 1.1: Графики компонент, претерпевающих скачки, двух 1-циклов с близкими начальными данными.



(a) $|t_0^1 - t_0^2| = 15$



(б) $|t_0^1 - t_0^2| = 5$



(в) $|t_0^1 - t_0^2| = 2$

Рисунок 1.2: Графики разности разрывных координат двух решений при $x_0^1 = x_0^2$ и $t_0^1 - t_0^2 \neq 0$.

Из условия $|t_0^1 - t_0^2| \approx 0$ не следует, что $|x^1(t) - x^2(t)| \approx 0$ при всех t .

1.2 Линейные системы с запаздыванием

Рассмотрим следующую систему линейных уравнений с запаздыванием:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau), \quad (1.9)$$

где A_0, A_1 — вещественные постоянные $n \times n$ матрицы. Пусть начальные условия определены кусочно-непрерывной функцией $\varphi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $x(\theta) = \varphi(\theta)$, $\theta \in [t_0 - \tau, t_0]$.

Характеристическое уравнение системы (1.9) выглядит следующим образом:

$$\rho(s) = \det [sI - A_0 - A_1 e^{-s\tau}] = 0. \quad (1.10)$$

Уравнение (1.10) является трансцендентным уравнением и в общем случае может иметь бесконечное число корней. Однако известно, что справа от любой вертикальной прямой $\operatorname{Re} s = \text{const}$ на комплексной плоскости может находиться лишь конечное число корней.

Введем понятие экспоненциальной устойчивости системы (1.9), что в линейном случае эквивалентно асимптотической устойчивости [56].

Определение 1.1. Система (1.9) называется экспоненциально устойчивой, если существуют $\gamma \geq 1$ и $\sigma > 0$ такие, что любое решение $x(t)$ системы удовлетворяет неравенству

$$\|x(t)\| \leq \gamma e^{-\sigma t} \|\varphi\|_{C[t_0-\tau, t_0]}, \quad t \geq t_0.$$

где норма $\|\varphi\|_{C[t_0-\tau, t_0]} = \sup_{\theta \in [t_0-\tau, t_0]} \|\varphi(\theta)\|$.

Определение 1.2. Комплексное число s_0 называется собственным числом системы (1.9), если оно является корнем характеристического уравнения $\rho(s)$. Множество $\Lambda = \{s \mid \rho(s) = 0\}$ называется спектром системы (1.9).

Теорема 1.1 ([18]). Система (1.9) экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда все ее собственные числа лежат строго в левой полуплоскости

$$\operatorname{Re} s_0 < 0, \quad \forall s_0 \in \Lambda.$$

Определение 1.3. Система (1.9) называется конечномерно-приводимой (FD-приводимой), если существует матрица D такая, что любое решение (1.9) удовлетворяет системе линейных уравнений без запаздывания

$$\dot{x}(t) = Dx(t)$$

для всех $t \geq t_0 + \tau$.

Следующая лемма устанавливает необходимые и достаточные условия конечномерной приводимости системы (1.9).

Лемма 1.1 ([30]). FD-приводимость системы (1.9) эквивалентна любому из следующих двух условий:

1. Выполнено $A_1 A_0^k A_1 = 0$ для всех $k = 0, 1, \dots, n - 1$;

2. Существует невырожденная квадратная матрица $S \in \mathbb{R}^n$ такая, что

$$S^{-1} A_0 S = \begin{bmatrix} U & 0 \\ W & V \end{bmatrix}, \quad S^{-1} A_1 S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{W} & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

где блоки U, V — квадратные, а блоки W, \bar{W} имеют одинаковые размеры.

Если система (1.9) FD-приводима, то D определяется формулой $D = A_0 + A_1 e^{-A_0 \tau}$.

Для FD-приводимой системы (1.9) спектр ее спектр совпадает со спектрами матриц матрицы A_0, D и не зависит от τ :

$$\det [sI - A_0 - A_1 e^{-A_0 \tau}] = \det [sI - A_0]$$

для любого комплексного числа s и любого τ . Заметим, что обратное утверждение неверно (см. [103]), т.е. FD-приводимость не следует из того, что система (1.9) имеет конечный спектр.

Рассмотрим теперь систему импульсных уравнений (1.3), (1.4), добавив в непрерывную часть постоянное запаздывание [30]:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau), \quad z(t) = Cx(t), \quad y(t) = Lx(t), \\ t_{n+1} &= t_n + T_n, \quad x(t_n^+) = x(t_n^-) + \lambda_n B, \quad T_n = \Phi(z(t_n)), \quad \lambda_n = F(z(t_n)), \end{aligned} \quad (1.12)$$

где $A_0 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $A_1 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ — постоянные матрицы. Система (1.12) рассматривается при $t \geq t_0$ с начальным условием $x(t) = \varphi(t)$, $t_0 - \tau \leq t < t_0$, где $\varphi(t)$ — некоторая непрерывная начальная вектор-функция. Будем считать, что величина запаздывания строго меньше минимально возможной длины промежутка между двумя последовательными импульсами, т.е. $\tau < \inf_z \Phi(z)$. Это означает, что на любом интервале времени длины τ может быть не более одного импульса.

Введем новое понятие наблюдаемости, которое сочетает в себе понятия спектральной наблюдаемости (см., например, [80, 83]) и FD-приводимости. Заметим, что для модели гормональной регуляции, рассмотренной в [30], это свойство имеет место.

Определение 1.4. *Линейную часть системы (1.12) будем называть спектрально FD-наблюдаемой, если для любого набора комплексных чисел $\Lambda = \{\mu_j, \quad j = 1, \dots, n_x\}$, в котором вместе с комплексным числом μ_j в этот набор входит и комплексно-сопряженное число $\bar{\mu}_j$ той же кратности, существует вещественная матрица K такая, что спектр матрицы $A_0 - KL$ совпадает с Λ , и, кроме того,*

$$A_1 (A_0 - KL)^k A_1 = 0 \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \dots, n_x - 1. \quad (1.13)$$

Глава 2

Наблюдатели состояния с обратной связью в дискретной части наблюдателя

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим импульсную систему (1.3)–(1.4):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t), & z(t) &= Cx(t), & y(t) &= Lx(t), \\ x(t_n^+) &= x(t_n^-) + \lambda_n B, & t_{n+1} &= t_n + T_n, \\ T_n &= \Phi(z(t_n)), & \lambda_n &= F(z(t_n)),\end{aligned}$$

с обозначениями и предположениями, приведенными в параграфе 1.1.

Требуется на основе измеряемого вектора $y(t)$ оценить вектор состояния $x(t)$. Как следует из рассуждений выше, основная сложность разработки наблюдателя для гибридной системы (1.3)–(1.4) состоит в получении оценок $(\hat{t}_n, \hat{\lambda}_n)$ импульсных параметров (t_n, λ_n) , в то время как оценки вектора состояния $x(t)$ на непрерывных интервалах могут быть получены с помощью стандартной техники наблюдения. При этом *главной* задачей гибридного наблюдения является обеспечение асимптотической сходимости последовательности $\{\hat{t}_n\}$ к $\{t_n\}$, т. е. синхронизации моментов импульсации наблюдателя и системы.

2.2 Использование пропорциональной обратной связи в дискретной части наблюдателя

2.2.1 Уравнения наблюдателя

В работе [32] для оценивания вектора состояния системы (1.3)–(1.4) рассматривался следующий наблюдатель с обратной связью в непрерывной части:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + K(y(t) - \hat{y}(t)), & \hat{y}(t) &= L\hat{x}(t), \\ \hat{z}(t) &= C\hat{x}(t), & \hat{x}(t_n^+) &= \hat{x}(t_n^-) + \hat{\lambda}_n B, \\ \hat{t}_{n+1} &= \hat{t}_n + \hat{T}_n, & \hat{\lambda}_n &= F(\hat{z}(\hat{t}_n)),\end{aligned}\tag{2.1}$$

и

$$\hat{T}_n = \Phi(\hat{z}(\hat{t}_n)),\tag{2.2}$$

где K — матрица коэффициентов усиления в непрерывной части наблюдателя, обеспечивающая гурвицевость матрицы $D = A - KL$.

Основным недостатком наблюдателя (2.1), (2.2) является его медленная сходимость, поскольку коррекции производятся только в непрерывной части. В связи с этим, введем дополнительную обратную связь в дискретную часть наблюдателя и будем рассматривать следующий закон частотной модуляции:

$$\hat{T}_n = \Phi(\hat{z}(\hat{t}_n) + K_d(y(\hat{t}_n) - \hat{y}(\hat{t}_n))).\tag{2.3}$$

В отличие от наблюдателя (2.1), (2.2), наблюдатель (2.1), (2.3) имеет две матрицы коэффициентов усиления в двух контурах обратной связи — K и K_d , где $K_d \in \mathbb{R}^{1 \times n_y}$ — матрица коэффициентов усиления в дискретной части наблюдателя, а K — матрица коэффициентов усиления в непрерывной части наблюдателя. При $K_d = \mathbf{0}$ наблюдатель (2.1), (2.3), очевидно, совпадает с наблюдателем (2.1), (2.2).

2.2.2 Синхронный режим

Пусть $(x(t), t_n)$ — решение системы (1.3)–(1.4) с параметрами λ_k, T_k , и $x(t_k^-)$. Будем считать, что наблюдаемый объект уже функционирует в момент включения наблюдателя, т. е. $t_a \leq \hat{t}_0 < t_{a+1}$ для некоторого целого $a \geq 0$. Введем следующие обозначения: $x_k = x(t_k^-)$, $\hat{x}_k = \hat{x}(\hat{t}_k^-)$.

В силу свойства единственности решений системы уравнений (1.3)–(1.4), для решения $(\hat{x}(t), \hat{t}_n)$ уравнения наблюдателя (2.1), (2.3) с начальными условиями

$$\hat{t}_0 = t_a, \quad \hat{x}(\hat{t}_0^-) = x(t_a^-)$$

справедливы равенства

$$\hat{x}_n = x_{n+a}, \quad \hat{t}_n = t_{n+a}, \quad \hat{\lambda}_n = \lambda_{n+a}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

и $\hat{x}(t) = x(t)$ для всех $t \geq t_a$. Такое решение $(\hat{x}(t), \hat{t}_n)$ будем называть *синхронным режимом* наблюдателя по отношению к решению $(x(t), t_n)$.

Следующее утверждение устанавливает взаимно однозначное соответствие между синхронным режимом и нулевой ошибкой выхода.

Утверждение 2.1. *Следующие утверждения равносильны:*

- (а) $(\hat{x}(t), \hat{t}_n)$ — синхронный режим наблюдателя по отношению к $(x(t), t_n)$;
- (б) $\hat{y}(t) \equiv y(t)$ для всех $t \geq t_a$.

Доказательство. Очевидно, что из (а) следует (б). Докажем утверждение в обратную сторону.

Так как пара (A, L) наблюдаема, пара (D, L) также наблюдаема (см., например, [53], упр.3.3-5). Обозначим через Δ ошибку состояний системы и наблюдателя: $\Delta(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. Элементы вектора $\Delta(t)$ могут иметь скачки лишь в моменты времени $t = t_n$ и $t = \hat{t}_n$, $n = 0, 1, \dots$, при этом в остальные моменты времени $\Delta(t)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению $\dot{\Delta} = D\Delta(t)$. Из условия (б) следует, что $L\Delta(t) \equiv 0$ для всех $t \geq t_a$. Следовательно, $L\dot{\Delta}(t) \equiv 0$, $L\ddot{\Delta}(t) \equiv 0$ и т.д. Таким образом, $LD^k\Delta(t) \equiv 0$ для любого $k \geq 1$ во все моменты времени t , где $\Delta(t)$ непрерывна. Тогда из наблюдаемости пары (D, L) следует, что $\Delta(t) = 0$ во всех точках непрерывности функции $\Delta(\cdot)$. Такое возможно лишь когда $\Delta(t)$ не имеет скачков и $\Delta(t) \equiv 0$ на интервале (t_0, ∞) . \square

Синхронный режим $(\hat{x}(t), \hat{t}_n)$ по отношению к $(x(t), t_n)$ будем называть *асимптотически устойчивым в малом*, если при достаточно малых отклонениях начальных значений $|\hat{t}_0 - t_a|$ и $\|\hat{x}_0 - x_0\|$ уравнений системы и наблюдателя (где $\|\cdot\|$ — евклидова норма), выполняются соотношения $|\hat{t}_n - t_{n+a}| \rightarrow 0$ и $\|\hat{x}(\hat{t}_n^-) - x(t_{n+a}^-)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, что влечет также выполнение предельных соотношений $|\hat{\lambda}_n - \lambda_{n+a}| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Обозначим для краткости $n_a = n + a$. Таким образом, синхронный режим наблюдателя по отношению к решению системы $(x(t), t_n)$ характеризуется векторной последовательностью

$$\hat{q}_n^a = \begin{bmatrix} x_{n_a} \\ t_{n_a} \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Поскольку вектор $x(t)$ может в определенные моменты времени претерпевать скачки, близость $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ не может быть обеспечена для всех значений времени t из-за эффекта “выброса

ошибки” (см. раздел 1.1). Действительно, предположим, что \hat{t}_n и t_n достаточно близки, но не совпадают в точности. Для определенности положим $t_n < \hat{t}_n$. Тогда на интервале $t_n < t < \hat{t}_n$, вектор $x(t)$ уже осуществил скачок, в то время как $\hat{x}(t)$ еще нет, поэтому $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ на этом интервале могут различаться значительно. Однако, близость состояния $x(t)$ и оценки $\hat{x}(t)$ может иметь место в том смысле, что существует целое $a \geq 0$, зависящее от начальных условий такое, что $\|\hat{q}_n - \hat{q}_n^a\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$, где

$$\hat{q}_n = \begin{bmatrix} \hat{x}_n \\ \hat{t}_n \end{bmatrix}.$$

Таким образом, под сходимостью наблюдателя будем понимать асимптотическую устойчивость в малом синхронного режима.

2.2.3 Точечное отображение и его свойства

Поскольку основной задачей наблюдения является синхронизация дискретных последовательностей состояний наблюдателя и системы, то описание динамики системы объект–наблюдатель может быть сведено к дискретному (разностному) уравнению. Для этого построим точечное отображение, описывающее эволюцию состояния наблюдателя для фиксированного решения $(x(t), t_n)$ системы (1.3)–(1.4) :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(\hat{t}_n^-) \\ \hat{t}_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \hat{x}(\hat{t}_{n+1}^-) \\ \hat{t}_{n+1} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Обозначим для краткости

$$R = C - K_d L, \quad \alpha(\zeta, \theta) = R\zeta + K_d L \lim_{\delta \rightarrow \theta-0} x(\delta).$$

Для любых целых чисел k и s , $0 \leq k \leq s$, определим множества

$$S_{k,s} = \{(\zeta, \theta) : \theta \in \mathbb{R}, \zeta \in \mathbb{R}^{n_x}, t_k \leq \theta < t_{k+1}, t_s \leq \theta + \Phi(\alpha(\zeta, \theta)) < t_{s+1}\}.$$

Следовательно, каждая точка (\hat{x}_n, \hat{t}_n) расширенного состояния наблюдателя принадлежит одному из множеств $S_{k,s}$, т. е. каждой точке (\hat{x}_n, \hat{t}_n) можно однозначно сопоставить две точки (x_k, t_k) и (x_s, t_s) состояний объекта наблюдения (в случае, если $k = s$, эти точки совпадают) такие, что $t_k \leq \hat{t}_n < t_k + \Phi(Cx_k)$, $t_s \leq \hat{t}_n + \Phi(C\hat{x}_n) < t_s + \Phi(Cx_s)$ (см. рис. 2.1).

Определим функцию $P(\zeta, \theta)$ по формуле $P(\zeta, \theta) = P_{k,s}(\zeta, \theta)$ при $(\zeta, \theta) \in S_{k,s}$, где

$$P_{k,s}(\zeta, \theta) = e^{A(\theta + \Phi(\alpha(\zeta, \theta)) - t_s)} x(t_s^+) - e^{D\Phi(\alpha(\zeta, \theta))} [e^{A(\theta - t_k)} x(t_k^+) - \zeta - F(C\zeta)B] - \sum_{j=k+1}^s \lambda_j e^{D(\theta + \Phi(\alpha(\zeta, \theta)) - t_j)} B.$$

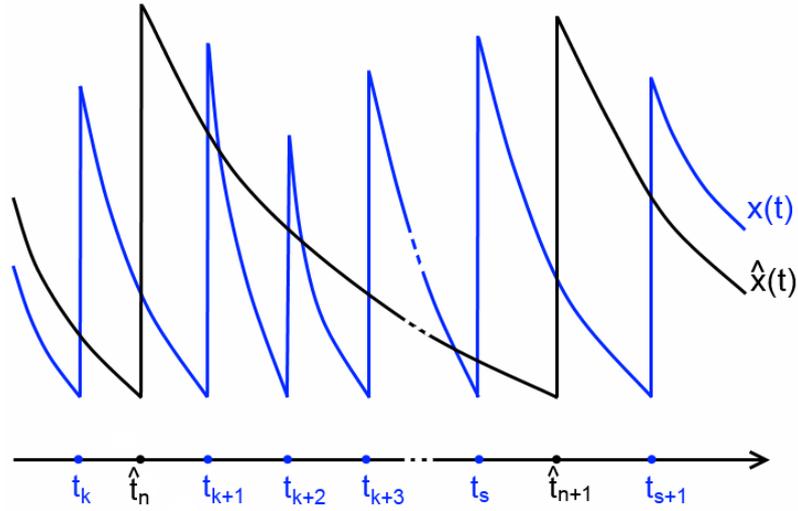


Рисунок 2.1: Моменты импульсации объекта наблюдения и наблюдателя

Теорема 2.1. Точечное отображение (2.5) задается дискретными уравнениями

$$\begin{aligned}\hat{x}_{n+1} &= P(\hat{x}_n, \hat{t}_n), \\ \hat{t}_{n+1} &= \hat{t}_n + \Phi(\alpha(\hat{x}_n, \hat{t}_n)).\end{aligned}\quad (2.6)$$

Доказательство. Рассмотрим ошибку $\Delta(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ на интервале $(\hat{t}_n, \hat{t}_{n+1})$. Очевидно, $\Delta(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dot{\Delta}(t) = D\Delta(t)$ во всех точках t , где $\Delta(\cdot)$ не имеет скачков. Функция $\Delta(\cdot)$ имеет разрывы первого рода $\Delta(t^+) - \Delta(t^-) = \lambda_k B$ в точках $t = t_k$, $r + 1 \leq k \leq s$. Таким образом, имеем

$$\Delta(\hat{t}_{n+1}^-) = e^{D\hat{T}_n} \Delta(\hat{t}_n^+) + \Delta_{k,s}, \quad (2.7)$$

где

$$\Delta_{k,s} = \sum_{j=k+1}^s \lambda_j e^{D(\hat{t}_{n+1}-t_j)} B.$$

Тогда (2.7) может быть переписано как

$$\hat{x}_{n+1} = x(\hat{t}_{n+1}^-) + e^{D\hat{T}_n} (\hat{x}_n + \hat{\lambda}_n B - x(\hat{t}_n^+)) - \Delta_{k,s}. \quad (2.8)$$

Так как

$$x(\hat{t}_{n+1}^-) = e^{A(\hat{t}_{n+1}-t_s)} x(t_s^+), \quad x(\hat{t}_n^+) = e^{A(\hat{t}_n-t_k)} x(t_k^+),$$

равенство (2.8) влечет (2.6). □

Теорема 2.2. Если функции $F(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$ имеют непрерывные производные, то отображение $P(\zeta, \theta)$ и его частные производные

$$P'_\zeta = \frac{\partial P}{\partial \zeta}, \quad P'_\theta = \frac{\partial P}{\partial \theta}$$

непрерывны.

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2.1. *Функцию $P_{k,s}(\zeta, \theta)$ можно представить в виде следующей суммы:*

$$P_{k,s}(\zeta, \theta) = u_k(\zeta, \theta) + v_s(\zeta, \theta) + w(\zeta, \theta),$$

где

$$\begin{aligned} u_k(\zeta, \theta) &= e^{D\Phi(\alpha(\zeta, \theta))} \left[-e^{A(\theta-t_k)} x(t_k^+) + \sum_{j=1}^k \lambda_j e^{D(\theta-t_j)} B \right], \\ v_s(\zeta, \theta) &= e^{A(\theta+\Phi(\alpha(\zeta, \theta))-t_s)} x(t_s^+) - \sum_{j=1}^s \lambda_j e^{D(\theta+\Phi(\alpha(\zeta, \theta))-t_j)} B, \\ w(\zeta, \theta) &= e^{D\Phi(\alpha(\zeta, \theta))} [\zeta + F(C\zeta)B]. \end{aligned}$$

Кроме того, верны следующие рекуррентные равенства:

$$u_k(\zeta, \theta) - u_{k-1}(\zeta, \theta) = -\lambda_k e^{D\Phi(\alpha(\zeta, \theta))} [e^{A(\theta-t_k)} - e^{D(\theta-t_k)}] B, \quad (2.9)$$

$$v_s(\zeta, \theta) - v_{s-1}(\zeta, \theta) = \lambda_s [e^{A(\Phi(\alpha(\zeta, \theta))+\theta-t_s)} - e^{D(\Phi(\alpha(\zeta, \theta))+\theta-t_s)}] B. \quad (2.10)$$

Доказательство. Первая часть леммы проверяется прямыми вычислениями. Рекуррентные равенства (2.9) получаются из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} e^{A(\theta-t_k)} x(t_k^+) &= e^{A(\theta-t_k)} [e^{A(t_k-t_{k-1})} x(t_{k-1}^+) + \lambda_k B] \\ &= e^{A(\theta-t_{k-1})} x(t_{k-1}^+) + \lambda_k e^{A(\theta-t_k)} B. \end{aligned}$$

Подставляя в приведенную выше формулу s вместо k , получаем (2.10). \square

Доказательство теоремы. Будучи суперпозициями непрерывных функций, функции $P_{k,s}(\zeta, \theta)$ также непрерывны для всех $0 \leq k \leq s$ по совокупности аргументов. Следовательно, функция $P(\zeta, \theta)$ может иметь разрывы только на поверхностях $M_k = \{(\zeta, \theta) : \theta = t_k\}$ или $N_s = \{(\zeta, \theta) : \theta + \Phi(\alpha(\zeta, \theta)) = t_s\}$.

Пусть $(\zeta, \theta) \in M_k$ при некотором k . Тогда из (2.9) следует, что

$$u_k(\zeta, t_k) = u_{k-1}(\zeta, t_k).$$

Следовательно, $P(\zeta, \theta)$ непрерывна на этой поверхности. Это верно и для частных производных $P(\zeta, \theta)$:

$$\begin{aligned} P'_\zeta &= (u_k(\zeta, \theta))'_\zeta + (v_s(\zeta, \theta))'_\zeta + (w(\zeta, \theta))'_\zeta, \\ P'_\theta &= (u_k(\zeta, \theta))'_\theta + (v_s(\zeta, \theta))'_\theta + (w(\zeta, \theta))'_\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(u_k(\zeta, \theta) - u_{k-1}(\zeta, \theta))'_\zeta &= -\lambda_k D\Phi'(\alpha(\zeta, \theta))R e^{D\Phi(\alpha(\zeta, \theta))} [e^{A(\theta-t_k)} - e^{D(\theta-t_k)}]B, \\
(u_k(\zeta, \theta) - u_{k-1}(\zeta, \theta))'_\theta &= \lambda_k (D\Phi'(\alpha(\zeta, \theta))K_d L A x(\theta) e^{D\Phi(\alpha(\zeta, \theta))} \times \\
&\times [e^{A(\theta-t_k)} - e^{D(\theta-t_k)}] - e^{D\Phi(\alpha(\zeta, \theta))} [A e^{A(\theta-t_k)} - D e^{D(\theta-t_k)}])B.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$(u_k(\zeta, t_k))'_\zeta = (u_{k-1}(\zeta, t_k))'_\zeta \quad \text{и} \quad (u_k(\zeta, t_k))'_\theta = (u_{k-1}(\zeta, t_k))'_\theta,$$

так как $(A - D)B = 0$.

Пусть $(\zeta, \theta) \in N_s$ для некоторого s . Из (2.10) получаем

$$v_s(\zeta, \theta) = v_{s-1}(\zeta, \theta),$$

т. е. $P(\zeta, \theta)$ непрерывна на этой поверхности. Непрерывность сохраняется и для частных производных:

$$\begin{aligned}
(v_s(\zeta, \theta) - v_{s-1}(\zeta, \theta))'_\zeta &= \lambda_s [A\Phi'(\alpha(\zeta, \theta))R e^{A(\theta+\Phi(\alpha(\zeta, \theta))-t_s)} - \\
&\quad - D\Phi'(\alpha(\zeta, \theta))R e^{D(\theta+\Phi(\alpha(\zeta, \theta))-t_s)}]B, \\
(v_s(\zeta, \theta) - v_{s-1}(\zeta, \theta))'_\theta &= \lambda_s [-A(\Phi'(\alpha(\zeta, \theta))K_d L A x(\theta) + 1) e^{A(\theta+\Phi(\alpha(\zeta, \theta))-t_s)} + \\
&\quad + D(\Phi'(\alpha(\zeta, \theta))K_d L A x(\theta) - 1) e^{D(\theta+\Phi(\alpha(\zeta, \theta))-t_s)}]B.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$(v_s(\zeta, \theta))'_\zeta = (v_{s-1}(\zeta, \theta))'_\zeta$$

и

$$(v_s(\zeta, \theta))'_\theta = (v_{s-1}(\zeta, \theta))'_\theta,$$

так как $(A - D)B = 0$.

Очевидно, если $(\zeta, \theta) \in M_k \cap N_s$, для некоторых s и k , тогда $\theta = t_k = t_s - \Phi(C\zeta - K_d L(\zeta - x(t_k^-)))$, и из (2.9), (2.10), следует, что

$$P_{k,s}(\zeta, t_k) = P_{k-1,s-1}(\zeta, t_k).$$

Следовательно, функция $P(\zeta, \theta)$ и ее частные производные непрерывны на $M_k \cap N_s$. \square

Обозначим оператор, осуществляющий отображение (2.5) через

$$Q(q) = \begin{bmatrix} P(\zeta, \theta) \\ \theta + \Phi(\alpha(\zeta, \theta)) \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad q = \begin{bmatrix} \zeta \\ \theta \end{bmatrix}.$$

Тогда из Теоремы 2.1 следует, что

$$\hat{q}_{n+1} = Q(\hat{q}_n).$$

Под m -ой итерацией оператора Q будем понимать суперпозицию операторов

$$Q^{(m)}(q) = \underbrace{Q(Q(\dots(Q(q)\dots))\dots)}_m.$$

Поскольку отображение $P(\zeta, \theta)$ является гладким, то и $Q(q)$ также является гладким, и, следовательно, может быть линеаризовано в окрестности точек синхронного режима. Согласно определению, P'_ζ — матрица с размерностью $n_x \times n_x$, и P'_θ — n_x -мерный столбец. Тогда матрица Якоби $Q(q)$ имеет вид

$$Q'(q) = \begin{bmatrix} P'_\zeta(\zeta, \theta) & P'_\theta(\zeta, \theta) \\ \Phi'(\alpha(\zeta, \theta))R & 1 + \Phi'(\alpha(\zeta, \theta))K_dLAx(\theta) \end{bmatrix}.$$

Согласно правилу дифференцирования сложной функции, матрица Якоби суперпозиции $Q^{(m)}(q)$ вычисляется следующим образом:

$$(Q^{(m)})'(q) = \prod_{k=0}^{m-1} Q'(Q^{(m-1-k)}(q)). \quad (2.11)$$

Так как для синхронного режима выполнено $\hat{x}_n = x_{n_a}$, $\hat{t}_n = t_{n_a}$ и $\hat{t}_{n+1} = t_{n_a+1}$, $\hat{x}_{n+1} = x_{n_a+1}$, то

$$\hat{x}_{n+1} = P_{n_a, n_a+1}(\hat{x}_n, \hat{t}_n)$$

для всех $n \geq 0$. Заметим, что $\Phi(\alpha(x_k, t_k)) = \Phi(Cx_k)$. Обозначим для краткости $\Phi'_k = \Phi'(Cx_k)$, $F'_k = F'(Cx_k)$.

Для всех $k \geq 0$ определим матрицу J_k с блоками

$$\begin{aligned} (J_k)_{11} &= \Phi'_k Ax_{k+1}R + e^{D\Phi(Cx_k)} (I_{n_x} + F'_k BC), \\ (J_k)_{12} &= Ax_{k+1} (1 + \Phi'_k K_d Ax_k) - e^{D\Phi(Cx_k)} (A(x_k + \lambda_k B)), \\ (J_k)_{21} &= \Phi'_k R, \quad (J_k)_{22} = 1 + \Phi'_k K_d Ax_k. \end{aligned}$$

Теорема 2.3. Для любого $n \geq 0$ матрица Якоби оператора $Q(\cdot)$ в точке \hat{q}_n^a может быть вычислена как

$$Q'(\hat{q}_n^a) = J_{n_a}. \quad (2.12)$$

Для доказательства теоремы рассмотрим две леммы.

Лемма 2.2. Справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} P_{k,k+1}(\zeta, \theta) &= [e^{A\Phi(\alpha(\zeta, \theta))} - e^{D\Phi(\alpha(\zeta, \theta))}] e^{A(\theta-t_k)} x(t_k^+) + \\ &+ \lambda_{k+1} [e^{A(\theta+\Phi(\alpha(\zeta, \theta))-t_{k+1})} - e^{D(\theta+\Phi(\alpha(\zeta, \theta))-t_{k+1})}] B + \\ &+ e^{D\Phi(\alpha(\zeta, \theta))} [\zeta + F(C\zeta)B]. \end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство леммы следует из теоремы 2.1 и очевидной формулы

$$x(t_{k+1}^+) = e^{A(t_{k+1}-t_k)}x(t_k^+) + \lambda_{k+1}B.$$

□

Лемма 2.3. Частные производные $P(\zeta, \theta)$ в точке (x_k, t_k) могут быть вычислены как

$$\begin{aligned} P'_\zeta(x_k, t_k) &= \Phi'_k A x_{k+1} R + e^{DT_k} [I_{n_x} + F'_k BC], \\ P'_\theta(x_k, t_k) &= A x_{k+1} (1 + \Phi'_k K_d A x_k) - e^{DT_k} A (x_k + \lambda_k B). \end{aligned}$$

Доказательство. Очевидно, $(x_k, t_k) \in S_{k,k+1}$, следовательно, $P(x_k, t_k) = P_{k,k+1}(x_k, t_k)$. Как было показано в теореме 2.2, частные производные $P(\zeta, \theta)$ непрерывны. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} P(x_k, t_k) &= \frac{\partial}{\partial \zeta} P_{k,k+1}(x_k, t_k), \\ \frac{\partial}{\partial \theta} P(x_k, t_k) &= \frac{\partial}{\partial \theta} P_{k,k+1}(x_k, t_k). \end{aligned}$$

Прямыми вычислениями получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} P_{k,k+1}(\zeta, \theta) &= \Phi'(\alpha(\zeta, \theta)) [A e^{A\Phi(\alpha(\zeta, \theta))} - D e^{D\Phi(\alpha(\zeta, \theta))}] e^{A(\theta-t_k)} x(t_k^+) R + \\ &+ \lambda_{k+1} \Phi'(\alpha(\zeta, \theta)) [A e^{A(\theta+\Phi(\alpha(\zeta, \theta))-t_{k+1})} - D e^{D(\theta+\Phi(\alpha(\zeta, \theta))-t_{k+1})}] B R + \\ &+ \Phi'(\alpha(\zeta, \theta)) D e^{D\Phi(\alpha(\zeta, \theta))} [\zeta + F(C\zeta) B] R + \\ &+ e^{D\Phi(\alpha(\zeta, \theta))} [I_{n_x} + F'(C\zeta) BC], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} P_{k,k+1}(\zeta, \theta) &= \Phi'(\alpha(\zeta, \theta)) K_d L A x(\theta) [A e^{A\Phi(\alpha(\zeta, \theta))} - D e^{D\Phi(\alpha(\zeta, \theta))}] e^{A(\theta-t_k)} x(t_k^+) + \\ &+ [e^{A\Phi(\alpha(\zeta, \theta))} - e^{D\Phi(\alpha(\zeta, \theta))}] A e^{A(\theta-t_k)} x(t_k^+) + \\ &+ \lambda_{k+1} (1 + \Phi'(\alpha(\zeta, \theta)) K_d L A x(\theta)) [A e^{A(\theta+\Phi(\alpha(\zeta, \theta))-t_{k+1})} - D e^{D(\theta+\Phi(\alpha(\zeta, \theta))-t_{k+1})}] B + \\ &+ \Phi'(\alpha(\zeta, \theta)) K_d L A x(\theta) D e^{D\Phi(\alpha(\zeta, \theta))} [\zeta + F(C\zeta) B]. \end{aligned}$$

Так как $\Phi(\alpha(x_k, t_k)) = \Phi(Cx_k)$, $t_k + \Phi(Cx_k) - t_{k+1} = 0$ и $(A - D)B = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} P_{k,k+1}(x_k, t_k) &= \Phi'(Cx_k) [A e^{A\Phi(Cx_k)} - D e^{D\Phi(Cx_k)}] x(t_k^+) R + \\ &+ \Phi'(Cx_k) D e^{D\Phi(Cx_k)} [x_k + \lambda_k B] R + e^{D\Phi(Cx_k)} [I_{n_x} + F'(Cx_k) BC], \\ \frac{\partial}{\partial \theta} P_{k,k+1}(x_k, t_k) &= \Phi'(Cx_k) K_d L A x_k e^{A\Phi(Cx_k)} A x(t_k^+) + [e^{A\Phi(Cx_k)} - e^{D\Phi(Cx_k)}] A x(t_k^+). \end{aligned}$$

Подстановкой $x(t_k^+) = x_k + \lambda_k B$ и $e^{A\Phi(Cx_k)} x(t_k^+) = x_{k+1}$ получаем утверждение леммы 2.3. □

Теорема 2.3 является прямым следствием леммы 2.3.

Из теоремы 2.3 и формулы (2.11) следует, что для любого $m \geq 1$ матрица Якоби может вычислена как

$$(Q^{(m)})'(\hat{q}_n^0) = J_{n_a+m-1} J_{n_a+m-2} \dots J_{n_a+1} J_{n_a}. \quad (2.13)$$

2.2.4 Устойчивость синхронного режима по отношению к m -циклу

Пусть $(x(t), t_n)$ — решение системы (1.3), (1.4) с m импульсами на периоде (m -цикл), где m некоторое целое число, $m \geq 1$. Тогда $x_{n+m} \equiv x_n$, $\lambda_{n+m} \equiv \lambda_n$, $T_{n+m} \equiv T_n$. Рассмотрим синхронный режим наблюдателя по отношению к $(x(t), t_n)$. Пусть \hat{q}_n^a — соответствующая последовательность векторов (2.4), удовлетворяющая $\hat{q}_{n+1}^a = Q(\hat{q}_n^a)$.

Рассмотрим ранее определенные матрицы J_n . Так как $J_{n+m} \equiv J_n$, то последовательность $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ содержит не более чем m различных матриц, а именно J_0, \dots, J_{m-1} .

Таким образом, из теорем 2.1–2.3, а также теоремы 3 из [32] получаем следующее условие устойчивости в малом синхронного режима.

Теорема 2.4. Пусть матричное произведение $J_{m-1} \cdots J_0$ устойчиво по Шуру, т.е. все собственные значения этой матрицы лежат строго внутри единичного круга. Тогда синхронный режим по отношению к $(x(t), t_n)$ асимптотически устойчив в малом.

Отметим, что условия устойчивости, устанавливаемые теоремой 2.4, являются локальными и зависят не только от параметров наблюдателя, но также от параметров и наблюдаемого решения объекта наблюдения. Это связано с тем, что для каждого набора своих параметров объект наблюдения может обладать различными типами решений. При этом невозможно построить наблюдатель, который бы одинаково хорошо наблюдал за решениями всех типов. С прикладной точки зрения, нас интересует наблюдение устойчивых периодических решений объекта. При построении наблюдателя кратность наблюдаемого цикла (т.е. число импульсов на периоде) должна быть известна заранее.

Спектральный радиус матричного произведения $J_{m-1} \cdots J_0$ характеризует скорость стремления к нулю ошибки наблюдения в окрестности синхронного режима. Чем меньше спектральный радиус, тем быстрее оценки состояния $(\hat{x}(t), \hat{t}_n)$ сходятся к состоянию объекта $(x(t), t_n)$.

При синтезе наблюдателя следует выбрать два матричных коэффициента K_d и K так, чтобы обеспечить устойчивость синхронного режима наблюдателя. Так как пара (A, L) наблюдаема, матричный коэффициент K может быть выбран таким образом, что матрица $D = A - KL$ имеет любые наперед заданные значения. В следующей теореме приведены достаточные условия существования постоянной матрицы коэффициентов K , обеспечивающей устойчивость синхронного режима в малом, при фиксированной матрице коэффициентов K_d .

Теорема 2.5. Пусть $(x(t), t_n)$ — m -цикл. Предположим, что выполнено неравенство

$$-1 < \prod_{k=0}^{m-1} (\Phi_k' C A x_k + 1) < 1. \quad (2.14)$$

Тогда существует матрица K такая, что $D = A - KL$ гурвицева, и матричное произведение $J_{m-1} \cdots J_0$ устойчиво по Шуру.

Доказательство. Представим матрицу J_k в виде суммы:

$$J_k = \tilde{J}_k + W_k(D),$$

где

$$\tilde{J}_k = \begin{bmatrix} \Phi'_k A x_{k+1} R & A x_{k+1} (1 + \Phi'_k K_d L A x_k) \\ \Phi'_k R & 1 + \Phi'_k K_d L A x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A x_{k+1} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi'_k R & 1 + \Phi'_k K_d L A x_k \end{bmatrix}$$

и

$$W_k(D) = \begin{bmatrix} e^{DT_k} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_x} + F'_k B C & -A(x_k + \lambda_k B) \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы e^{DT_k} , $k = 0, 1, \dots, m-1$, и следовательно, $W_k(D)$, можно сделать сколь угодно малыми за счет выбора матрицы коэффициентов усиления K . В то же время,

$$\tilde{J}_{m-1} \cdots \tilde{J}_0 = \begin{bmatrix} A x_0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi'_0 R & 1 + \Phi'_0 K_d L A x_0 \end{bmatrix} \times \prod_{k=1}^{m-1} (\Phi'_k R A x_k + (1 + \Phi'_k K_d L A x_k)),$$

где $x_0 = x_m$ и $x_1 = x_{m+1}$. Таким образом, $\text{rank}(\tilde{J}_{m-1} \cdots \tilde{J}_0) \leq 1$, и матричное произведение имеет не более чем одно ненулевое собственное число, равное

$$\text{tr}(\tilde{J}_{m-1} \cdots \tilde{J}_0) = \prod_{k=0}^{m-1} (\Phi'_k R A x_k + (1 + \Phi'_k K_d L A x_k)) = \prod_{k=0}^{m-1} (\Phi'_k C A x_k + 1).$$

Если (2.14) выполнено, то матричное произведение $\tilde{J}_{m-1} \cdots \tilde{J}_0$ устойчиво по Шуру. Следовательно, при достаточно малых элементах e^{DT_k} , матрица $J_{m-1} \cdots J_0$ также устойчива по Шуру. \square

Заметим, что для m -цикла $x_m = x_0$ и $x_{m+1} = x_1$. В случае 1-цикла, (2.14) принимает вид

$$-2 < \Phi'_0 C A x_0 < 0, \tag{2.15}$$

в случае 2-цикла, (2.14) выглядит как

$$-1 < (\Phi'_0 C A x_0 + 1)(\Phi'_1 C A x_1 + 1) < 1, \tag{2.16}$$

и т. д.

2.3 Использование комбинированной частотной модуляции в дискретной части наблюдателя

В предыдущем параграфе для увеличения скорости сходимости наблюдателя (2.1) с частотной модуляцией (2.2)

$$\hat{T}_n = \Phi(\hat{z}(\hat{t}_n))$$

предлагалось добавить пропорциональную обратную связь в дискретную часть наблюдателя, т. е. вместо закона модуляции (2.2) рассмотреть закон модуляции (2.3):

$$\hat{T}_n = \Phi(\hat{z}(\hat{t}_n) + E_d(\hat{t}_n)),$$

где $E_d(t) = K_d(y(t) - \hat{y}(t))$. Во многих случаях наличие дополнительной пропорциональной обратной связи позволяет существенно уменьшить время переходных процессов. Однако, такая обратная связь использует ошибку наблюдения $E_d(t)$ только в моменты времени \hat{t}_n . Для того, чтобы улучшить сходимость наблюдателя, воспользуемся стратегией наблюдения, основанной на интегрировании ошибки на интервале, предшествующем моменту \hat{t}_n . Рассмотрим следующий интеграл:

$$R(t, f(\cdot)) = \int_{t-\nu}^t e^{-\varkappa(t-\eta)} f(\eta) d\eta,$$

где \varkappa, ν — некоторые положительные параметры, $\nu \leq \Phi_1$ (где Φ_1 — нижняя граница модуляционной функции $\Phi(\cdot)$), и $f(\cdot)$ — интегрируемая функция. Далее, рассмотрим следующий закон частотной модуляции:

$$\hat{T}_n = \Phi(\hat{z}(\hat{t}_n) + R(\hat{t}_n, E_d(\cdot))), \quad (2.17)$$

где ошибка наблюдения $E_d(t)$ определена выше. Таким образом, время возникновения импульса наблюдателя \hat{t}_{n+1} зависит от значений ошибки наблюдения $E_d(\cdot)$ на интервале $[\hat{t}_n - \nu, \hat{t}_n]$ длины ν . Не умаляя общности, будем считать, что $\hat{t}_0 \geq t_1$, $E_d(\theta) = 0$ для $\theta \in [\hat{t}_0 - \nu, \hat{t}_0]$, и параметр $-\varkappa$ не является собственным значением матрицы D , т.е. $\det(D_{-\varkappa}) = \det(D + \varkappa I) \neq 0$.

В большинстве практических случаев модуляционная функция $\Phi(\sigma)$ обладает насыщением, т. е. близка к постоянной величине при больших значениях σ . Поэтому для больших значений аргумента влияние обратной связи в (2.17) нивелируется. В связи с этим, рассмотрим более сложный вид модуляции, описанный ниже.

2.3.1 Уравнения наблюдателя

Рассмотрим ранее введенный наблюдатель (2.1)

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + K(y(t) - \hat{y}(t)), \quad \hat{y}(t) = L\hat{x}(t), \\ \hat{z}(t) &= C\hat{x}(t), \quad \hat{x}(t_n^+) = \hat{x}(t_n^-) + \hat{\lambda}_n B, \\ \hat{t}_{n+1} &= \hat{t}_n + \hat{T}_n, \quad \hat{\lambda}_n = F(\hat{z}(\hat{t}_n)),\end{aligned}$$

со следующим законом модуляции (будем называть его комбинированной частотной модуляцией):

$$\hat{T}_n = \Phi(\hat{z}(\hat{t}_n)) + \Psi(R(\hat{t}_n, E_d(\cdot))), \quad (2.18)$$

где функция $\Psi(\cdot)$ является непрерывной, нечетной, строго возрастающей и ограниченной по модулю значением нижней границы модуляционной функции $\Phi(\cdot)$:

$$|\Psi(\cdot)| < \Phi_1. \quad (2.19)$$

Неравенство (2.19) гарантирует выполнение условия $\hat{T}_n > 0$ в (2.18).

Пусть $(x(t), t_n)$ — решение системы (1.3), (1.4) с параметрами $\lambda_k, T_k, x_k = x(t_k^-)$, и выполнено $t_a \leq \hat{t}_0 < t_{a+1}$ для некоторого целого числа $a \geq 1$. Легко видеть, что если $\hat{t}_n = t_{n+a}$, $\hat{x}(\hat{t}_n^-) = x_{n+a}$, и $\hat{x}(\theta) = x(\theta)$ для $\theta \in [\hat{t}_n - \nu, \hat{t}_n]$, то $\hat{T}_n = \Phi(\hat{z}(\hat{t}_n)) + \Psi(0) = T_{n+a}$, так как $\Psi(0) = 0$ (функция $\Psi(\cdot)$ — нечетная). Следовательно, синхронный режим наблюдателя (2.1), (2.18) по отношению к решению $(x(t), t_n)$ существует. Как и ранее, требуется найти условия асимптотической устойчивости в малом синхронного режима.

2.3.2 Точечное отображение и его свойства

Рассмотрим точечное отображение, описывающее эволюцию состояния наблюдателя (2.1), (2.18) при фиксированном решении $(x(t), t_n)$ системы (1.3), (1.4):

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(\hat{t}_n^-) \\ \hat{t}_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \hat{x}(\hat{t}_{n+1}^-) \\ \hat{t}_{n+1} \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Как и ранее, для любых $(\zeta, \theta) \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}$, выберем целые числа k и s , $1 \leq k \leq s$ такие, что $t_k \leq \theta < t_{k+1}$, $t_s \leq \theta + \alpha_k(\zeta, \theta) < t_{s+1}$, и рассмотрим следующие множества:

$$S_{k,s} = \{(\zeta, \theta) : t_k \leq \theta < t_{k+1}, \quad t_s \leq \theta + \alpha_k(\zeta, \theta) < t_{s+1}, \},$$

где

$$\alpha_k(\zeta, \theta) = \Phi(C\zeta) + \Psi(R(\theta, \beta_k(\zeta, \theta, \cdot))), \quad \beta_k(\zeta, \theta, \eta) = K_d L e^{D(\eta-\theta)} (e^{A(\theta-t_k)} x(t_k^+) - \zeta) + G_k(\eta),$$

$$G_k(\eta) = \begin{cases} -\lambda_k K_d L e^{D(\eta-t_k)} B & \text{если } \eta \leq t_k, \\ 0 & \text{если } \eta > t_k. \end{cases}$$

Определим функции $\alpha(\zeta, \theta) = \alpha_k(\zeta, \theta)$ и $P(\zeta, \theta) = P_{k,s}(\zeta, \theta)$ для $(\zeta, \eta) \in S_{k,s}$, где

$$P_{k,s}(\zeta, \theta) = e^{A(\theta+\alpha_k(\zeta,\theta)-t_s)} x(t_s^+) - e^{D\alpha_k(\zeta,\theta)} [e^{A(\theta-t_k)} x(t_k^+) - \zeta - F(C\zeta)B] - \sum_{j=k+1}^s \lambda_j e^{D(\theta+\alpha_k(\zeta,\theta)-t_j)} B.$$

Теорема 2.6. Точечное отображение (2.20) определяется дискретными уравнениями

$$\hat{x}_{n+1} = P(\hat{x}_n, \hat{t}_n), \quad \hat{t}_{n+1} = \hat{t}_n + \alpha(\hat{x}_n, \hat{t}_n), \quad \text{для } n \geq 1. \quad (2.21)$$

Доказательство. Сначала покажем, что $\alpha(\hat{x}_n, \hat{t}_n) = \hat{T}_n$. Рассмотрим ошибку наблюдения $r(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. Легко видеть, функция $r(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dot{r}(t) = Dr(t)$ для любого t где у r нет скачков. На интервале времени $(\hat{t}_n - \nu, \hat{t}_n)$ функция $r(t)$ не имеет скачков, если $t_k \leq \hat{t}_n - \nu$, и имеет скачок $r(t_k^+) - r(t_k^-) = \lambda_k B$ в момент t_k , если $t_k > \hat{t}_n - \nu$. Отсюда, получаем, что для $\eta \in (\hat{t}_n - \nu, \hat{t}_n)$ выполнено

$$r(\eta) = \begin{cases} e^{D(\eta-\hat{t}_n)} r(\hat{t}_n^-) & \text{при } \eta > t_k, \\ e^{D(\eta-\hat{t}_n)} r(\hat{t}_n^-) - \lambda_k e^{D(\eta-t_k)} B & \text{при } \eta \leq t_k. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} K_d L r(\eta) &= K_d L e^{D(\eta-\hat{t}_n)} r(\hat{t}_n^-) + G_k(\eta) = K_d L e^{D(\eta-\hat{t}_n)} (x(\hat{t}_n^-) - \hat{x}_n) + G_k(\eta) = \\ &= K_d L e^{D(\eta-\hat{t}_n)} \left(e^{A(\hat{t}_n-t_k)} x(t_k^+) - \hat{x}_n \right) + G_k(\eta) = \beta_k(\hat{x}_n, \hat{t}_n, \eta). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\alpha_k(\hat{x}_n, \hat{t}_n) = \Phi(C\hat{x}_n) + \Psi(R(\hat{t}_n, \beta_k(\hat{x}_n, \hat{t}_n, \cdot))) = \Phi(C\hat{x}_n) + \Psi(R(\hat{t}_n, K_d L r(\cdot))) = \hat{T}_n.$$

Теперь рассмотрим ошибку наблюдения $r(t)$ на интервале $(\hat{t}_n, \hat{t}_{n+1})$. Функция $r(t)$ имеет скачки $r(t^+) - r(t^-) = \lambda_i B$ в моменты времени $t = t_i$, $k+1 \leq i \leq s$. Отсюда, заключаем

$$r(\hat{t}_{n+1}^-) = e^{D\hat{T}_n} r(\hat{t}_n^+) + r_{k,s}, \quad (2.22)$$

где

$$r_{k,s} = \sum_{i=k+1}^s \lambda_i e^{D(\hat{t}_{n+1}-t_i)} B.$$

Тогда соотношение (2.22) может быть переписано следующим образом:

$$\hat{x}_{n+1} = x(\hat{t}_{n+1}^-) + e^{D\hat{T}_n} (\hat{x}_n + \hat{\lambda}_n B - x(\hat{t}_n^+)) - r_{k,s}. \quad (2.23)$$

Так как

$$x(\hat{t}_{n+1}^-) = e^{A(\hat{t}_{n+1}^- - t_s)} x(t_s^+), \quad x(\hat{t}_n^+) = e^{A(\hat{t}_n^+ - t_k)} x(t_k^+),$$

равенство (2.23) влечет (2.21). \square

Теорема 2.7. *Отображения $\alpha(\zeta, \theta)$ и $P(\zeta, \theta)$ непрерывны.*

Доказательство. Так как $LB = 0$, функция $G_k(\eta)$ непрерывна в точке $\eta = t_k$. Поэтому функция $\alpha(\zeta, \theta)$ может иметь разрывы только на поверхности $\theta = t_k$ в пространстве (ζ, θ) . Прямыми вычислениями получаем

$$\begin{aligned} \beta_k(\zeta, \theta, \eta) - \beta_{k-1}(\zeta, \theta, \eta)|_{\theta=t_k, \eta \in (t_k - \Phi_1, t_k)} &= K_d L e^{D(\eta - t_k)} (x(t_k^+) - \zeta) - \lambda_k K_d L e^{D(\eta - t_k)} B - \\ &- K_d L e^{D(\eta - t_k)} (e^{A(t_k - t_{k-1})} x(t_{k-1}^+) - \zeta) = K_d L e^{D(\eta - t_k)} (x(t_k^+) - \lambda_k B - e^{A(t_k - t_{k-1})} x(t_{k-1}^+)) = 0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

так как

$$x(t_k^+) - \lambda_k B = x_k = e^{A(t_k - t_{k-1})} x(t_{k-1}^+). \quad (2.25)$$

Следовательно,

$$\alpha_k(\zeta, \theta) - \alpha_{k-1}(\zeta, \theta)|_{\theta=t_k} = 0, \quad (2.26)$$

и функция $\alpha(\zeta, \theta)$ непрерывна всюду.

Легко видеть, что функции $P_{k,s}(\zeta, \theta)$, заданные на $(\zeta, \eta) \in S_{k,s}$, непрерывны. Следовательно, функция $P(\zeta, \theta)$ может иметь разрывы только на поверхностях вида $\theta = t_k$, либо $\theta + \alpha_k(\zeta, \theta) = t_s$. Из (2.26) и (2.25) получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} P_{k,s}(\zeta, \theta) - P_{k-1,s}(\zeta, \theta)|_{\theta=t_k} &= -e^{D\alpha_k(\zeta, t_k)} x(t_k^+) + e^{D\alpha_{k-1}(\zeta, t_k)} e^{A(t_k - t_{k-1})} x(t_{k-1}^+) + \lambda_k e^{D\alpha_{k-1}(\zeta, t_k)} B = \\ &= e^{D\alpha_k(\zeta, t_k)} (e^{A(t_k - t_{k-1})} x(t_{k-1}^+) + \lambda_k B - x(t_k^+)) = 0, \\ P_{k,s}(\zeta, \theta) - P_{k,s-1}(\zeta, \theta)|_{\theta + \alpha_k(\zeta, \theta) = t_s} &= x(t_s^+) - \lambda_s B - e^{A(t_s - t_{s-1})} x(t_{s-1}^+) = 0 \end{aligned}$$

для $1 \leq k \leq s$. Таким образом, функция $P(\zeta, \theta)$ непрерывна всюду. \square

Теорема 2.8. *Если скалярные функции $F(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$, $\Psi(\cdot)$ имеют непрерывные производные, то частные производные*

$$\begin{aligned} \alpha'_\zeta(\zeta, \theta) &= \frac{\partial \alpha(\zeta, \theta)}{\partial \zeta}, & \alpha'_\theta(\zeta, \theta) &= \frac{\partial \alpha(\zeta, \theta)}{\partial \theta}, \\ P'_\zeta(\zeta, \theta) &= \frac{\partial P(\zeta, \theta)}{\partial \zeta}, & P'_\theta(\zeta, \theta) &= \frac{\partial P(\zeta, \theta)}{\partial \theta} \end{aligned}$$

непрерывны всюду.

Доказательство. Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 2.4. Частные производные функции $\alpha_k(\zeta, \theta)$ могут быть вычислены следующим образом:

$$\frac{\partial \alpha_k(\zeta, \theta)}{\partial \zeta} = \Phi'(C\zeta)C + \Psi'(R(\theta, \beta_k(\zeta, \theta, \cdot))) K_d L D_{\varkappa}^{-1} (e^{-D_{\varkappa}\nu} - I), \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_k(\zeta, \theta)}{\partial \theta} = & \Psi'(R(\theta, \beta_k(\zeta, \theta, \cdot))) \left(-\varkappa R(\theta, \beta_k(\zeta, \theta, \cdot)) - \right. \\ & - K_d L D_{\varkappa}^{-1} (e^{-D_{\varkappa}\nu} - I) (K L e^{A(\theta-t_k)} x(t_k^+) + D\zeta) + \\ & \left. + \beta_k(\zeta, \theta, \theta) - e^{\varkappa\nu} \beta_k(\zeta, \theta, \theta - \nu) \right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Доказательство леммы. Докажем сначала формулу (2.27). Прямыми вычислениями получаем

$$\frac{\partial \alpha_k(\zeta, \theta)}{\partial \zeta} = \Phi'(C\zeta)C + \Psi'(R(\theta, \beta_k(\zeta, \theta, \cdot))) R \left(\theta, \frac{\partial \beta_k(\zeta, \theta, \cdot)}{\partial \zeta} \right).$$

Тогда (2.27) следует из

$$\frac{\partial \beta_k(\zeta, \theta, \eta)}{\partial \zeta} = -K_d L e^{D(\eta-\theta)}$$

и

$$\int_{\theta-\nu}^{\theta} e^{D_{\varkappa}(\eta-\theta)} d\eta = -D_{\varkappa}^{-1} (e^{-D_{\varkappa}\nu} - I), \quad (2.29)$$

где с учетом предположения о том, что $-\varkappa$ не является собственным числом матрицы D , формула (2.29) получается обыкновенным интегрированием.

Аналогично докажем (2.28) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_k(\zeta, \theta)}{\partial \theta} = & \Psi'(R(\theta, \beta_k(\zeta, \theta, \cdot))) \times \\ & \times \left(-\varkappa R(\theta, \beta_k(\zeta, \theta, \cdot)) + R \left(\theta, \frac{\partial \beta_k(\zeta, \theta, \cdot)}{\partial \theta} \right) + \beta_k(\zeta, \theta, \theta) - e^{\varkappa\nu} \beta_k(\zeta, \theta, \theta - \nu) \right), \end{aligned}$$

тогда формула (2.28) может быть получена из (2.29) и

$$\frac{\partial \beta_k(\zeta, \theta, \eta)}{\partial \theta} = -K_d L e^{D(\eta-\theta)} (K L e^{A(\theta-t_k)} x(t_k^+) + D\zeta).$$

□

Продолжим доказательство теоремы. Так как (2.24) дает $\beta_k(\zeta, \theta, \eta) = \beta_{k-1}(\zeta, \theta, \eta)$ для $\theta = t_k$, $\eta \in (t_k - \nu, t_k)$, то из (2.27) следует, что

$$\left. \frac{\partial \alpha_k(\zeta, \theta)}{\partial \zeta} \right|_{\theta=t_k} = \left. \frac{\partial \alpha_{k-1}(\zeta, \theta)}{\partial \zeta} \right|_{\theta=t_k}. \quad (2.30)$$

Из (2.28), (2.24) и

$$K L (e^{A(\theta-t_k)} x(t_k^+) - e^{A(\theta-t_{k-1})} x(t_{k-1}^+)) \Big|_{\theta=t_k} = K L (x(t_k^+) - e^{A(t_k-t_{k-1})} x(t_{k-1}^+)) = \lambda_k K L B = 0$$

получаем

$$\left. \frac{\partial \alpha_k(\zeta, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=t_k} = \left. \frac{\partial \alpha_{k-1}(\zeta, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=t_k}. \quad (2.31)$$

Таким образом, частные производные $\alpha'_\zeta(\zeta, \theta)$, $\alpha'_\theta(\zeta, \theta)$ непрерывны всюду.

Докажем теперь непрерывность частных производных функции $P(\zeta, \theta)$. Прямыми вычислениями получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{k,s}(\zeta, \theta)}{\partial \zeta} &= Ae^{A(\theta+\alpha_k(\zeta, \theta)-t_s)} x(t_s^+) \frac{\partial \alpha_k(\zeta, \theta)}{\partial \zeta} - \\ &\quad - De^{D\alpha_k(\zeta, \theta)} [e^{A(\theta-t_k)} x(t_k^+) - \zeta - F(C\zeta)B] \frac{\partial \alpha_k(\zeta, \theta)}{\partial \zeta} + \\ &\quad + e^{D\alpha_k(\zeta, \theta)} [I + F'(C\zeta)BC] - \sum_{j=k+1}^s \lambda_j De^{D(\theta+\alpha_k(\zeta, \theta)-t_j)} B \frac{\partial \alpha_k(\zeta, \theta)}{\partial \zeta}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{k,s}(\zeta, \theta)}{\partial \theta} &= \left(1 + \frac{\partial \alpha_k(\zeta, \theta)}{\partial \theta}\right) Ae^{A(\theta+\alpha_k(\zeta, \theta)-t_s)} x(t_s^+) - \\ &\quad - \frac{\partial \alpha_k(\zeta, \theta)}{\partial \theta} De^{D\alpha_k(\zeta, \theta)} [e^{A(\theta-t_k)} x(t_k^+) - \zeta - F(C\zeta)B] - \\ &\quad - e^{D\alpha_k(\zeta, \theta)} Ae^{A(\theta-t_k)} x(t_k^+) - \sum_{j=k+1}^s \lambda_j \left(1 + \frac{\partial \alpha_k(\zeta, \theta)}{\partial \theta}\right) De^{D(\theta+\alpha_k(\zeta, \theta)-t_j)} B. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Очевидно, функции $P'_\zeta(\zeta, \theta)$, $P'_\theta(\zeta, \theta)$ могут иметь разрывы только на поверхностях $\theta = t_k$, либо $\theta + \alpha_k(\zeta, \theta) = t_s$. Из (2.32), (2.33), (2.26), (2.30), (2.31) следует, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P_{k,s}(\zeta, \theta)}{\partial \zeta} - \frac{\partial P_{k-1,s}(\zeta, \theta)}{\partial \zeta} \right) \Big|_{\theta=t_k} &= \\ &= De^{D\alpha_k(\zeta, t_k)} [-x(t_k^+) + e^{A(t_k-t_{k-1})} x(t_{k-1}^+) + \lambda_k B] \frac{\partial \alpha_k(\zeta, t_k)}{\partial \zeta} = 0, \\ \left(\frac{\partial P_{k,s}(\zeta, \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial P_{k-1,s}(\zeta, \theta)}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta=t_k} &= \\ &= e^{D\alpha_k(\zeta, t_k)} \left(\frac{\partial \alpha_k(\zeta, t_k)}{\partial \theta} D + A \right) [-x(t_k^+) + e^{A(t_k-t_{k-1})} x(t_{k-1}^+) + \lambda_k B] = 0. \end{aligned}$$

Из (2.32), (2.33) и матричной зависимости $LB = 0$ получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P_{k,s}(\zeta, \theta)}{\partial \zeta} - \frac{\partial P_{k,s-1}(\zeta, \theta)}{\partial \zeta} \right) \Big|_{\theta+\alpha_k(\zeta, \theta)=t_s} &= \\ &= A [x(t_s^+) - \lambda_k B - e^{A(t_s-t_{s-1})} x(t_{s-1}^+)] \frac{\partial \alpha_k(\zeta, \theta)}{\partial \zeta} \Big|_{\theta+\alpha_k(\zeta, \theta)=t_s} = 0, \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P_{k,s}(\zeta, \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial P_{k,s-1}(\zeta, \theta)}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta+\alpha_k(\zeta, \theta)=t_s} &= \\ &= \left[1 + \frac{\partial \alpha_k(\zeta, \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta+\alpha_k(\zeta, \theta)=t_s} \right] A [x(t_s^+) - \lambda_k B - e^{A(t_s-t_{s-1})} x(t_{s-1}^+)] = 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Таким образом, частные производные $P'_\zeta(\zeta, \theta)$, $P'_\theta(\zeta, \theta)$ непрерывны всюду. \square

Как и ранее, введем дополнительные обозначения, связанные с отображением (2.20). Определим функцию

$$Q_{k,s}(q) = \begin{bmatrix} P_{k,s}(\zeta, \theta) \\ \theta + \alpha_k(\zeta, \theta) \end{bmatrix}, \quad \text{где } q = \begin{bmatrix} \zeta \\ \theta \end{bmatrix}.$$

Положим $Q(q) = Q_{k,s}(q)$ для $q \in S_{k,s}$. Тогда из теоремы 2.6 следует $\hat{q}_{n+1} = Q(\hat{q}_n)$, где

$$\hat{q}_n = \begin{bmatrix} \hat{x}_n \\ \hat{t}_n \end{bmatrix}, \quad Q(q) = \begin{bmatrix} P(\zeta, \theta) \\ \theta + \alpha(\zeta, \theta) \end{bmatrix}.$$

Из теорем 2.7 и 2.8 следует, что функция $Q(\cdot)$ может быть линеаризована, и ее матрица Якоби имеет следующий вид

$$Q'(q) = \begin{bmatrix} P'_\zeta(\zeta, \theta) & P'_\theta(\zeta, \theta) \\ \alpha'_\zeta(\zeta, \theta) & 1 + \alpha'_\theta(\zeta, \theta) \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим синхронный режим наблюдателя по отношению к решению $(x(t), t_n)$. Так как для синхронного режима выполнено $\hat{x}_n = x_{n_a}$, $\hat{t}_n = t_{n_a}$ и $\hat{t}_{n+1} = t_{n_a+1}$, $\hat{x}_{n+1} = x_{n_a+1}$, то

$$\hat{q}_{n+1} = Q_{n_a, n_a+1}(\hat{q}_n).$$

Для всех $k \geq 1$ определим квадратные матрицы J_k , содержащие следующие матричные блоки:

$$\begin{aligned} (J_k)_{11} &= Ax_{k+1} (\Phi'_k C + \Psi'(0) K_d L D_{\times}^{-1} e^{-D_{\times} \nu}) + e^{D\Phi(Cx_k)} (I_{n_x} + F'_k B C), \\ (J_k)_{12} &= (1 - \Psi'(0) K_d L D_{\times}^{-1} e^{-D_{\times} \nu} A x_k) A x_{k+1} - e^{D\Phi(Cx_k)} A (x_k + F(Cx_k) B), \\ (J_k)_{21} &= \Phi'_k C + \Psi'(0) K_d L D_{\times}^{-1} e^{-D_{\times} \nu}, \\ (J_k)_{22} &= 1 - \Psi'(0) K_d L D_{\times}^{-1} e^{-D_{\times} \nu} A x_k. \end{aligned}$$

Теорема 2.9. Для всех $n \geq 1$, матрица Якоби $Q(\cdot)$ в точке \hat{q}_n^a вычисляется следующим образом

$$Q'(\hat{q}_n^a) = J_{n_a}. \quad (2.36)$$

Доказательство. Легко видеть $Q(q_k) = Q_{k,k+1}(q_k)$ для всех $k \geq 0$, где $q_k = \begin{bmatrix} x_k \\ t_k \end{bmatrix}$. Так как частные производные функций $P(\zeta, \theta)$ и $\alpha(\zeta, \theta)$ непрерывны, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} P(x_k, t_k) &= \frac{\partial}{\partial \zeta} P_{k,k+1}(x_k, t_k), \\ \frac{\partial}{\partial \theta} P(x_k, t_k) &= \frac{\partial}{\partial \theta} P_{k,k+1}(x_k, t_k), \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \alpha(x_k, t_k) &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \alpha_k(x_k, t_k), \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \alpha(x_k, t_k) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \alpha_k(x_k, t_k). \end{aligned}$$

Так как

$$\beta(x_k, t_k, \eta) = K_d K L e^{D(\eta-t_k)} \lambda_k B - \lambda_k K_d L e^{D(\eta-t_k)} B = 0$$

для $\eta \in [t_k - \Phi_1, t_k]$, выполнено следующее равенство:

$$\alpha_k(x_k, t_k) = \Phi(Cx_k). \quad (2.37)$$

Подставляя $s = k+1$, $\zeta = x_k$, $\theta = t_k$ в (2.27), (2.28), (2.32), (2.33) и принимая во внимание (2.37), получаем утверждение теоремы 2.9 □

2.3.3 Устойчивость синхронного режима по отношению к m -циклу

Пусть $(x(t), t_n)$ m -цикл системы (1.3), (1.4), где m — некоторое целое число, $m \geq 1$. Тогда $x_{n+m} \equiv x_n$, $\lambda_{n+m} \equiv \lambda_n$, $T_{n+m} \equiv T_n$. Рассмотрим синхронный режим наблюдателя (2.1), (2.18) по отношению к решению $(x(t), t_n)$, и пусть характеризующая его векторная последовательность \hat{q}_n^a такова, что выполнено $\hat{q}_{n+1}^a = Q(\hat{q}_n^a)$. Рассмотрим определенные ранее матрицы J_n . Тогда $J_{n+m} \equiv J_n$, и последовательность $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ содержит не более, чем m различных матриц, а именно J_0, \dots, J_{m-1} .

Таким образом, аналогично предыдущему параграфу, из теорем 2.6–2.9, а также теоремы 3 из [32] получаем следующее условие устойчивости в малом синхронного режима.

Теорема 2.10. *Пусть матричное произведение $J_{m-1} \cdots J_0$ устойчиво по Шуру, т. е. все собственные числа матрицы лежат строго внутри единичного круга. Тогда синхронный режим асимптотически устойчив в малом по отношению к решению $(x(t), t_n)$.*

Глава 3

Наблюдатели состояния для импульсной системы с запаздыванием

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим объект наблюдения, описываемый импульсной системой вида (1.3), (1.4), в непрерывной части которой присутствует постоянное запаздывание:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} &= A_0 \tilde{x}(t) + A_1 \tilde{x}(t - \tau), \quad \tilde{z}(t) = C\tilde{x}(t), \quad \tilde{y}(t) = L\tilde{x}(t), \\ \tilde{t}_0 &= 0, \quad \tilde{t}_{n+1} = \tilde{t}_n + \tilde{T}_n, \quad \tilde{x}(\tilde{t}_n^+) = \tilde{x}(\tilde{t}_n^-) + \tilde{\lambda}_n \tilde{B}, \\ \tilde{T}_n &= \Phi(\tilde{z}(\tilde{t}_n)), \quad \tilde{\lambda}_n = F(\tilde{z}(\tilde{t}_n)), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\tilde{x}(t)$ — вектор состояния, $\tilde{y}(t)$ — измеряемая часть вектора состояния, $\tilde{z}(t)$ — модулирующий сигнал, τ — постоянное запаздывание, $A_0 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $A_1 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{n_x \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n_x}$, $L \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ — постоянные матрицы, такие, что $C\tilde{B} = 0$, $L\tilde{B} = 0$.

Как и ранее, предполагается, что система (3.1) рассматривается при $t \geq t_0$ с начальным условием $x(t) = \varphi(t)$, $t_0 - \tau \leq t < t_0$, где $\varphi(t)$ — некоторая непрерывная начальная вектор-функция, и величина запаздывания строго меньше минимально возможной длины промежутка между двумя последовательными импульсами, т. е. $\tau < \inf_z \Phi(z)$. Модуляционные функции $F(\cdot)$ и $\Phi(\cdot)$ удовлетворяют тем же условиям, что и для системы (1.3), (1.4). Также предполагается, что линейная часть системы (3.1) является спектрально FD-наблюдаемой (см. главу 1).

Как и в случае объекта наблюдения без запаздывания, основная задача наблюдения для гибридной системы (3.1) состоит в оценивании последовательностей модулированных параметров (t_n, λ_n) .

3.2 Наблюдатель без запаздывания с кусочно-постоянной матрицей коэффициентов усиления

Из леммы 1.1 следует, что, так как линейная часть системы (3.1) является FD-приводимой, то при $t \geq t_0 + \tau$ отвечающая ей линейная система с запаздыванием эквивалентна линейной системе без запаздывания с матрицей $A = A_0 + A_1 e^{-A_0 \tau}$. При обозначениях предыдущего параграфа рассмотрим следующую импульсную систему без запаздывания:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t), \quad z(t) = Cx(t), \quad y(t) = Lx(t), \\ t_{n+1} &= t_n + T_n, \quad x(t_n^+) = x(t_n^-) + \lambda_n B, \\ T_n &= \Phi(z(t_n)), \quad \lambda_n = F(z(t_n)), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $B = e^{-A\tau} e^{A_0 \tau} \tilde{B}$. Следующая лемма, полученная в [29], устанавливает связь между решениями систем (3.1) и (3.2).

Лемма 3.1. *Рассмотрим решения $\tilde{x}(t)$ и $x(t)$ систем (3.1) и (3.2), соответственно. Предположим, что $\tilde{t}_1 = t_1$ и $\tilde{x}(t_1^-) = x(t_1^-)$. Тогда $\tilde{t}_n = t_n$, $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n$ и $\tilde{x}(t_n^-) = x(t_n^-)$ для всех $n \geq 1$. Кроме того,*

$$\tilde{x}(t) = x(t), \quad t_n + \tau \leq t \leq t_{n+1}, \quad n \geq 0.$$

Лемма 3.1 показывает, что на промежутках вида $t_n + \tau \leq t \leq t_{n+1}$ решение FD-приводимой системы с запаздыванием (3.1) совпадает с решением системы без запаздывания (3.2) при условии равенства их начальных данных. Используем эту лемму для построения наблюдателя состояний.

3.2.1 Уравнения наблюдателя

Главной задачей наблюдения состояния системы (3.1) является получение оценок $(\hat{t}_n, \hat{\lambda}_n)$ модулированных параметров $(\tilde{t}_n, \tilde{\lambda}_n)$. Из леммы 3.1 следует, что задача наблюдения за системой с запаздыванием (3.1) может быть заменена задачей наблюдения за системой (3.2) без запаздывания, для которой может быть применена техника наблюдения, описанная в предыдущей главе. Отметим еще раз, что решение системы (3.1) может не совпадать с решением системы (3.2) на промежутках вида $\hat{t}_n < t < \hat{t}_n + \tau$, однако, интересующие нас моменты импульсации принадлежат интервалам совпадения.

Для наблюдения состояний системы с запаздыванием (3.1) построим наблюдатель, основанный на аппроксимирующей модели (3.2) без запаздывания:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + \mathcal{K}(t)(y(t) - \hat{y}(t)), \quad \hat{y}(t) = L\hat{x}(t), \quad \hat{z}(t) = C\hat{x}(t), \\ \hat{x}(\hat{t}_n^+) &= \hat{x}(\hat{t}_n^-) + \hat{\lambda}_n B, \quad \hat{t}_{n+1} = \hat{t}_n + \hat{T}_n, \\ \hat{T}_n &= \Phi(\hat{z}(\hat{t}_n)), \quad \hat{\lambda}_n = F(\hat{z}(\hat{t}_n)), \\ \mathcal{K}(t) &= \begin{cases} 0, & \hat{t}_n < t < \hat{t}_n + \tau, \\ K = \text{const}, & \hat{t}_n + \tau \leq t \leq \hat{t}_{n+1}. \end{cases}\end{aligned}\tag{3.3}$$

Заметим, что, в отличие от уравнений объекта наблюдения, элементы векторов $\hat{z}(t)$, $\hat{y}(t)$ могут иметь скачки, так как выполнение равенств $CB = 0$, $LB = 0$ из равенств $C\tilde{B} = 0$, $L\tilde{B} = 0$ не следует. По результатам моделирования установлено, что для лучшей динамики наблюдателя такого типа целесообразно размыкать обратную на интервалах, соответствующих несовпадению решений исходной модели с запаздыванием (3.1) и аппроксимирующей ее модели без запаздывания (3.2). Поэтому коэффициент усиления обратной связи \mathcal{K} выбран нулевым на интервалах $\hat{t}_n < t < \hat{t}_n + \tau$. На промежутках вида $t_n + \tau \leq t \leq t_{n+1}$ коэффициент $\mathcal{K} = K \in R^{n_x \times n_y}$ должен быть выбран так, чтобы синхронный режим наблюдателя (3.3) по отношению к решению $(x(t), t_n)$ объекта (3.2) был асимптотически устойчив в малом.

3.2.2 Точечное отображение и его свойства

Для того чтобы получить условия устойчивости синхронного режима наблюдателя, как и в предыдущей главе, построим точечное отображение, описывающее эволюцию состояния наблюдателя (3.3) от импульса к импульсу:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(\hat{t}_n^-) \\ \hat{t}_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \hat{x}(\hat{t}_{n+1}^-) \\ \hat{t}_{n+1} \end{bmatrix}.\tag{3.4}$$

Для всех целых k и s , $0 \leq k \leq s$, определим множества

$$S_{k,s} = \{(\zeta, \theta) : \theta \in \mathbb{R}, \quad \zeta \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad t_k \leq \theta < t_{k+1}, \quad t_s \leq \theta + \Phi(C\zeta) < t_{s+1}\}.$$

Введем функции

$$G_k(\zeta, \theta) = \begin{cases} e^{D(\theta + \Phi(C\zeta) - t_{k+1})}, & \text{при } \theta \leq t_{k+1} - \tau, \\ e^{D(\Phi(C\zeta) - \tau)} e^{A(\theta + \tau - t_{k+1})}, & \text{при } t_{k+1} - \tau < \theta, \end{cases}$$

где $D = A - KL$. Заметим, что функции $G_k(\zeta, \theta)$ непрерывны согласно определению \mathcal{K} .

Определим $P(\zeta, \theta) = P_{k,s}(\zeta, \theta)$ для $(\zeta, \theta) \in S_{k,s}$, где

$$P_{k,s}(\zeta, \theta) = e^{A(\theta + \Phi(C\zeta) - t_s)} x(t_s^+) - \\ - e^{D(\Phi(C\zeta) - \tau)} e^{A\tau} \left(e^{A(\theta - t_k)} x(t_k^+) - \zeta - F(C\zeta)B \right) - \sum_{j=k+1}^s \lambda_j G_{j-1}(\zeta, \theta) B.$$

Теорема 3.1. Точечное отображение (3.4) задается уравнениями

$$\hat{x}_{n+1} = P(\hat{x}_n, \hat{t}_n), \quad \hat{t}_{n+1} = \hat{t}_n + \Phi(C\hat{x}_n). \quad (3.5)$$

Доказательство. Рассмотрим ошибку наблюдения $r(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ на интервале $(\hat{t}_n, \hat{t}_{n+1})$ и предположим, что

$$t_k \leq \hat{t}_n < t_{k+1}, \quad t_s \leq \hat{t}_n + \Phi(C\hat{x}_n) < t_{s+1}$$

для некоторых k и s таких, что $s \geq k$. Легко видеть, что функция $r(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dot{r}(t) = \mathcal{D}(t)r(t)$, где

$$\mathcal{D}(t) = \begin{cases} A, & \text{при } \hat{t}_n \leq t < \hat{t}_n + \tau, \\ D, & \text{при } \hat{t}_n + \tau \leq t < \hat{t}_{n+1} \end{cases}$$

во все моменты времени t , где у $r(t)$ нет скачков.

Выведем явную формулу для отображения (3.4). Рассмотрим целое число $m \geq 0$ такое, что $s = k + m$.

Для $m = 0$ ($s = k$) функция $r(t)$ непрерывна на всем интервале $(\hat{t}_n, \hat{t}_{n+1})$. Следовательно,

$$\hat{x}_{n+1} = x(\hat{t}_{n+1}^-) - r(\hat{t}_{n+1}^-) = e^{A(\hat{t}_{n+1} - t_s)} x(t_s^+) - e^{D(\hat{t}_{n+1} - \hat{t}_n - \tau)} r(\hat{t}_n + \tau) = \\ = e^{A(\hat{t}_{n+1} - t_s)} x(t_s^+) - e^{D(\hat{t}_{n+1} - \hat{t}_n - \tau)} e^{A\tau} r(\hat{t}_n^+) = e^{A(\hat{t}_{n+1} - t_s)} x(t_s^+) - \\ - e^{D(\hat{t}_{n+1} - \hat{t}_n - \tau)} e^{A\tau} \left(e^{A(\hat{t}_n - t_k)} x(t_k^+) - \hat{x}(\hat{t}_n^-) - \hat{\lambda}_n B \right),$$

что влечет (3.5) для $s = k$.

Для $m \geq 1$ функция $r(t)$ имеет разрывы $r(t^+) - r(t^-) = \lambda_i B$ в моменты времени $t = t_i$, $k+1 \leq i \leq s$. Предположение $\inf_{\tilde{z}} \Phi(\tilde{z}) > \tau$ гарантирует, что $\hat{t}_n + \tau < t_i$ для $i > k+1$. При этом точка t_{k+1} может находиться как внутри интервала $(\hat{t}_n, \hat{t}_n + \tau)$, так и внутри интервала $(\hat{t}_n + \tau, \hat{t}_{n+1})$, и оба этих случая должны быть рассмотрены по-отдельности.

Предположим, что $m = 1$ (т. е. $s = k + 1$). Тогда $\hat{x}_{n+1} = x(\hat{t}_{n+1}^-) - r(\hat{t}_{n+1}^-) = e^{A(\hat{t}_{n+1} - t_s)} x(t_s^+) - r(\hat{t}_{n+1}^-)$. Найдем значение $r(\hat{t}_{n+1}^-)$.

1) В случае $\hat{t}_n + \tau \leq t_s$ имеем

$$r(\hat{t}_{n+1}^-) = e^{D(\hat{t}_{n+1} - t_s)} r(t_s^+) = e^{D(\hat{t}_{n+1} - t_s)} \left(e^{D(t_s - \hat{t}_n - \tau)} r(\hat{t}_n + \tau) + \lambda_s B \right) = \\ = e^{D(\hat{t}_{n+1} - \hat{t}_n - \tau)} e^{A\tau} r(\hat{t}_n^+) + \lambda_s e^{D(\hat{t}_{n+1} - t_s)} B.$$

2) В случае $t_s < \hat{t}_n + \tau$ имеем

$$\begin{aligned} r(\hat{t}_{n+1}^-) &= e^{D(\hat{t}_{n+1}-\hat{t}_n-\tau)} r(\hat{t}_n + \tau) = e^{D(\hat{t}_{n+1}-\hat{t}_n-\tau)} e^{A(\hat{t}_n+\tau-t_s)} r(t_s^+) = \\ &= e^{D(\hat{t}_{n+1}-\hat{t}_n-\tau)} e^{A\tau} r(\hat{t}_n^+) + \lambda_s e^{D(\hat{t}_{n+1}-\hat{t}_n-\tau)} e^{A(\hat{t}_n+\tau-t_s)} B. \end{aligned}$$

Следовательно, $r(\hat{t}_{n+1}^-) = e^{D(\hat{t}_{n+1}-\hat{t}_n-\tau)} e^{A\tau} r(\hat{t}_n^+) + \lambda_s G_k(\hat{x}(\hat{t}_n^-), \hat{t}_n) B$.

Таким образом,

$$\hat{x}_{n+1} = e^{A(\hat{t}_{n+1}-t_s)} x(t_s^+) - e^{D(\hat{t}_{n+1}-\hat{t}_n-\tau)} e^{A\tau} \left(e^{A(\hat{t}_n-t_k)} x(t_k^+) - \hat{x}(\hat{t}_n^-) - \hat{\lambda}_n B \right) - \lambda_s G_k(\hat{x}(\hat{t}_n^-), \hat{t}_n) B,$$

что влечет (3.5) в случае $s = k + 1$.

Предположим теперь, что $m \geq 2$. Покажем, что $r(t_{k+2}^+) = e^{D(t_{k+2}-\hat{t}_n-\tau)} e^{A\tau} r(\hat{t}_n^+) + \lambda_{k+1} G_{k,k+2}(\hat{t}_n) B + \lambda_{k+2} B$, где

$$G_{i,j}(\theta) = \begin{cases} e^{D(t_j-t_{i+1})}, & \text{при } \theta + \tau \leq t_{i+1}, \\ e^{D(t_j-\theta-\tau)} e^{A(\theta+\tau-t_{i+1})}, & \text{при } t_{i+1} < \theta + \tau \end{cases}$$

для некоторых i, j таких, что $k \leq i < j \leq s$.

1) В случае $\hat{t}_n + \tau \leq t_{k+1}$ имеем

$$\begin{aligned} r(t_{k+2}^+) &= e^{D(t_{k+2}-t_{k+1})} r(t_{k+1}^+) + \lambda_{k+2} B = \\ &= e^{D(t_{k+2}-t_{k+1})} \left(e^{D(t_{k+1}-\hat{t}_n-\tau)} r(\hat{t}_n + \tau) + \lambda_{k+1} B \right) + \lambda_{k+2} B = \\ &= e^{D(t_{k+2}-\hat{t}_n-\tau)} e^{A\tau} r(\hat{t}_n^+) + \lambda_{k+1} e^{D(t_{k+2}-t_{k+1})} B + \lambda_{k+2} B. \end{aligned}$$

2) В случае $\hat{t}_n < t_{k+1} < \hat{t}_n + \tau < t_{k+2}$ имеем

$$\begin{aligned} r(t_{k+2}^+) &= e^{D(t_{k+2}-\hat{t}_n-\tau)} r(\hat{t}_n + \tau) + \lambda_{k+2} B = \\ &= e^{D(t_{k+2}-\hat{t}_n-\tau)} e^{A(\hat{t}_n+\tau-t_{k+1})} r(t_{k+1}^+) + \lambda_{k+2} B = \\ &= e^{D(t_{k+2}-\hat{t}_n-\tau)} e^{A(\hat{t}_n+\tau-t_{k+1})} \left(e^{A(t_{k+1}-\hat{t}_n)} r(\hat{t}_n^+) + \lambda_{k+1} B \right) + \lambda_{k+2} B. \end{aligned}$$

Если $m = 2$, то $t_{k+2} = t_s$. Для $m \geq 3$ имеем

$$r(t_s^+) = e^{D(t_s-\hat{t}_n-\tau)} e^{A\tau} r(\hat{t}_n^+) + \lambda_{k+1} G_{k,s}(\hat{t}_n) B + \lambda_{k+2} e^{D(t_s-t_{k+2})} B + \dots + \lambda_s B.$$

В итоге получаем, что

$$r(\hat{t}_{n+1}^-) = e^{D(\hat{T}_n-\tau)} e^{A\tau} r(\hat{t}_n^+) + r_{k,s}, \quad (3.6)$$

где

$$r_{k,s} = \sum_{j=k+1}^s \lambda_j e^{D(\hat{t}_{n+1}-t_s)} G_{j-1,s}(\hat{t}_n) B.$$

Равенство (3.6) можно переписать следующим образом:

$$\hat{x}_{n+1} = x(\hat{t}_{n+1}^-) + e^{D(\hat{T}_n - \tau)} e^{A\tau} \left(\hat{x}_n + \hat{\lambda}_n B - x(\hat{t}_n^+) \right) - r_{k,s}, \quad (3.7)$$

Так как

$$x(\hat{t}_{n+1}^-) = e^{A(\hat{t}_{n+1}^- - t_s)} x(t_s^+), \quad x(\hat{t}_n^+) = e^{A(\hat{t}_n^+ - t_k)} x(t_k^+)$$

и

$$G_k(\hat{x}_n, \hat{t}_n) = e^{D(\hat{t}_n + \Phi(C\hat{x}_n) - t_s)} G_{k,s}(\hat{t}_n),$$

уравнение (3.7) влечет (3.5). □

Теорема 3.2. *Отображение $P(\zeta, \theta)$ непрерывно.*

Доказательство. Из равенства

$$x(t_k^+) = e^{A(t_k - t_{k-1})} x(t_{k-1}^+) + \lambda_k B, \quad k \geq 1,$$

следует, что

$$P_{k,s}(\zeta, \theta) - P_{k-1,s}(\zeta, \theta) = -\lambda_k \left[e^{D(\Phi(C\zeta) - \tau)} e^{A(\theta + \tau - t_k)} - G_{k-1}(\zeta, \theta) \right] B, \quad (3.8)$$

$$P_{k,s}(\zeta, \theta) - P_{k,s-1}(\zeta, \theta) = \lambda_s \left[e^{A(\Phi(C\zeta) + \theta - t_s)} - G_{s-1}(\zeta, \theta) \right] B \quad (3.9)$$

для всех $k \geq 1, s \geq 1$. Так как функции $G_k(\cdot, \theta)$ непрерывны для всех k , то функция $P(\zeta, \theta)$ может иметь разрывы только на поверхностях $\theta = t_k$, либо $\theta + \Phi(C\zeta) = t_s$ для некоторых k, s .

Из выражений (3.8), (3.9), и равенств $G_{k-1}(\zeta, t_k) = e^{D(\Phi(C\zeta) - \tau)} e^{A\tau}$, $G_{s-1}(\zeta, t_s - \Phi(C\zeta)) = I$, следует, что

$$P_{k,s} - P_{k-1,s} \Big|_{\theta=t_k} = 0, \quad P_{k,s} - P_{k,s-1} \Big|_{\theta+\Phi(C\zeta)=t_s} = 0,$$

и, следовательно, функция $P(\zeta, \theta)$ непрерывна всюду. □

Далее будет показано, что отображение $P(\zeta, \theta)$ не является непрерывно дифференцируемым на всем пространстве. Однако, можно доказать локальную дифференцируемость $P(\zeta, \theta)$, и провести линеаризацию в окрестности точек синхронного режима.

3.2.3 Линеаризация точечного отображения

Для того чтобы показать непрерывность частных производных отображения $P(\zeta, \theta)$ в точках вида (x_k, t_k) , разобьем каждое множество $S_{i,j}$ ($i \neq j$) гиперплоскостью $\theta = t_{i+1} - \tau$ на два подмножества $S_{i,j}^{left}$ и $S_{i,j}^{right}$, т.е. $S_{i,j} = S_{i,j}^{left} \cup S_{i,j}^{right}$, где

$$S_{i,j}^{left} = \{(\zeta, \theta) : \theta \in \mathbb{R}, \zeta \in \mathbb{R}^{n_x}, t_i \leq \theta \leq t_{i+1} - \tau, t_j \leq \theta + \Phi(C\zeta) < t_{j+1}\},$$

$$S_{i,j}^{right} = \{(\zeta, \theta) : \theta \in \mathbb{R}, \zeta \in \mathbb{R}^{n_x}, t_{i+1} - \tau < \theta < t_{i+1}, t_j \leq \theta + \Phi(C\zeta) < t_{j+1}\}.$$

Заметим, что множество $S_{i,i}$ ($i = j$) не разбивается на два подмножества $S_{i,i}^{left}$ и $S_{i,i}^{right}$ ввиду предположения $\tau < \inf_z \Phi(z)$, т. е. в случае $i = j$ $S_{i,i}^{right} = \emptyset$ и $S_{i,i}^{left} = S_{i,i}$.

Рассмотрим точку (x_k, t_k) для некоторого $k \geq 1$. Несложно видеть, что замыкания множеств $S_{k,k}, S_{k-1,k+1}, S_{k-1,k}, S_{k,k+1}$ пересекаются в точке (x_k, t_k) . Более того, $(x_k, t_k) \in S_{k,k+1}$. В до-

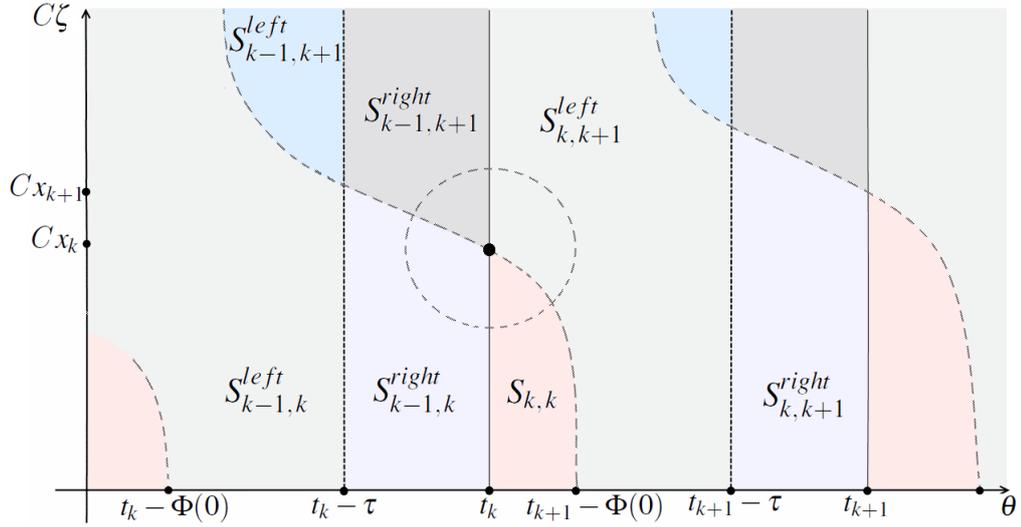


Рисунок 3.1: Окружность точки (x_k, t_k) в проекции на оси θ и $C\zeta$.

статочно малой окрестности точки (x_k, t_k) , отображение $P(\zeta, \theta)$ может принимать только значения $P(\zeta, \theta) = P_{i,j}(\zeta, \theta)$ при $(\zeta, \theta) \in S_{i,j}$, где $S_{i,j}$ является одним из следующих четырех множеств: $S_{k,k}, S_{k-1,k+1}^{right}, S_{k-1,k}^{right}, S_{k,k+1}^{left}$ (см. рис. 3.1).

Теорема 3.3. Пусть выполнено равенство $LB = 0$, и производные скалярных функций $F(\cdot), \Phi(\cdot)$ непрерывны. Тогда частные производные функции $P(\zeta, \theta)$ непрерывны в точках (x_k, t_k) , $k \geq 1$, и могут быть найдены по формулам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} P(x_k, t_k) &= \Phi'_k A x_{k+1} C + e^{D(T_k - \tau)} e^{A\tau} [I + F'_k B C], \\ \frac{\partial}{\partial \theta} P(x_k, t_k) &= A x_{k+1} - e^{D(T_k - \tau)} e^{A\tau} A (x_k + \lambda_k B). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Доказательство. Так как функция

$$\frac{\partial G_k(\zeta, \theta)}{\partial \theta} = \begin{cases} e^{D(\theta + \Phi(C\zeta) - t_{k+1})} D, & \text{if } \theta \leq t_{k+1} - \tau, \\ e^{D(\Phi(C\zeta) - \tau)} e^{A(\theta + \tau - t_{k+1})} A, & \text{if } t_{k+1} - \tau < \theta \end{cases}$$

имеет разрыв на поверхности $M_{k,\tau} = \{(\zeta, \theta) : \theta = t_{k+1} - \tau\}$, то частная производная $\frac{\partial P_{k,s}(\zeta, \theta)}{\partial \theta}$ непрерывна во всех точках $S_{k,s}$, кроме точек, принадлежащих $M_{k,\tau}$, для $s > k$ (в случае $s = k$ функция $\frac{\partial P_{k,s}}{\partial \theta}$ непрерывна всюду на $S_{k,s}$).

Легко видеть, что для любого $0 < \tau < \inf(\Phi(\cdot))$, существует достаточно малая окрестность W_k точки (x_k, t_k) такая, что $W_k \cap M_{k-1, \tau} = W_k \cap M_{k, \tau} = \emptyset$. Следовательно, частные производные функции $P(\zeta, \theta)$ в окрестности W_k могут иметь разрывы только на поверхности $M_k = \{(\zeta, \theta) : \theta = t_k\}$, либо на поверхности $N_{k+1} = \{(\zeta, \theta) : \theta + \Phi(C\zeta) = t_{k+1}\}$.

Пусть $(\zeta, \theta) \in M_k = \{(\zeta, \theta) : \theta = t_k\}$. Из равенства (3.8) следует, что $\frac{\partial u_k(\zeta, t_k)}{\partial \zeta} = \frac{\partial u_{k-1}(\zeta, t_k)}{\partial \zeta}$ и $\frac{\partial u_k(\zeta, t_k)}{\partial \theta} = \frac{\partial u_{k-1}(\zeta, t_k)}{\partial \theta}$. Следовательно, частные производные $\frac{\partial P(\zeta, \theta)}{\partial \zeta}$ и $\frac{\partial P(\zeta, \theta)}{\partial \theta}$ не имеют разрывов на M_k .

Пусть $(\zeta, \theta) \in N_{k+1}$. Из равенства (3.9) следует, что

$$\left. \frac{\partial(v_{k+1}(\zeta, \theta) - v_k(\zeta, \theta))}{\partial \zeta} \right|_{\theta + \Phi(C\zeta) = t_{k+1}} = -\lambda_{k+1} \Phi'(C\zeta) KLBC = 0,$$

$$\left. \frac{\partial(v_{k+1}(\zeta, \theta) - v_k(\zeta, \theta))}{\partial \theta} \right|_{\theta + \Phi(C\zeta) = t_{k+1}} = -\lambda_{k+1} KLB = 0.$$

Следовательно, $\frac{\partial P(\zeta, \theta)}{\partial \zeta}$ и $\frac{\partial P(\zeta, \theta)}{\partial \theta}$ не имеют разрывов на N_{k+1} .

Формула (3.10) получается прямыми вычислениями по аналогии с теоремой 2.3. \square

Таким образом, можно выполнить линеаризацию в окрестности точек (x_k, t_k) синхронного режима. Как и ранее, введем дополнительные обозначения, относящиеся к отображению (3.4). Определим функцию

$$Q_{k,s}(q) = \begin{bmatrix} P_{k,s}(q) \\ \theta + \Phi(C\zeta) \end{bmatrix}, \text{ где } q = \begin{bmatrix} \zeta \\ \theta \end{bmatrix}.$$

Пусть $Q(q) = Q_{k,s}(q)$ для $q \in S_{k,s}$. Тогда из Теоремы 3.1 следует, что $\hat{q}_{n+1} = Q(\hat{q}_n)$, где $\hat{q}_n = \begin{bmatrix} \hat{x}_n \\ \hat{t}_n \end{bmatrix}$. Из теоремы 3.3 следует, что матрица Якоби отображения Q в точке (x_k, t_k) вычисляется следующим образом:

$$Q'(\hat{q}_n^0) = J_k(x_k, t_k) = \begin{bmatrix} (J_k)_{11} & (J_k)_{12} \\ (J_k)_{21} & (J_k)_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

где

$$(J_k)_{11} = \Phi'_k A x_{k+1} C + e^{D(T_k - \tau)} e^{A\tau} [I + F'_k BC], \quad (J_k)_{12} = A x_{k+1} - e^{D(T_k - \tau)} e^{A\tau} A(x_k + \lambda_k B),$$

$$(J_k)_{21} = \Phi'_k C, \quad (J_k)_{22} = 1.$$

3.2.4 Устойчивость синхронного режима по отношению к m -циклу

Пусть $(x(t), t_n)$ — m -периодическое решение (m -цикл) системы (3.2), где m — некоторое целое число, $m \geq 1$. Тогда $x_{n+m} \equiv x_n$, $\lambda_{n+m} \equiv \lambda_n$, $T_{n+m} \equiv T_n$. Рассмотрим синхронный режим наблюдателя (3.3) по отношению к решению $(x(t), t_n)$. Пусть \hat{q}_n^a характеризующая его векторная

последовательность такая, что выполнено $\hat{q}_{n+1}^a = Q(\hat{q}_n^a)$. Рассмотрим ранее определенные матрицы J_i . Так как $J_{i+m} \equiv J_i$, последовательность $\{J_i\}_{i=0}^{\infty}$ содержит не более чем m различных матриц, а именно J_0, \dots, J_{m-1} .

Таким образом, аналогично предыдущей главе, из теорем 3.1 – 3.3, а также теоремы 3 из [32] получаем следующее условие устойчивости в малом синхронного режима.

Теорема 3.4. Пусть матричное произведение $J_{m-1} \cdots J_0$ устойчиво по Шуру, т. е. все собственные числа этой матрицы лежат строго внутри единичного круга. Тогда синхронный режим асимптотически устойчив в малом по отношению к решению $(x(t), t_n)$.

3.3 Наблюдатель, имеющий структуру исходной системы с запаздыванием

Основным преимуществом наблюдателя (3.3) является отсутствие запаздывания в его уравнениях, и, следовательно, относительная простота анализа и реализации. Однако, помимо несовпадения решений аппроксимирующей модели (3.2) и, соответственно, синхронного режима наблюдателя (3.3) с решениями уравнений объекта (3.1) на интервалах вида $\hat{t}_n < t < \hat{t}_n + \tau$, существенным недостатком наблюдателя (3.3) является ограничение на класс наблюдаемых систем: в условии теоремы 3.3 требуется выполнения равенств $CB = Ce^{-A\tau}e^{A_0\tau}\tilde{B} = 0$ и $LB = Le^{-A\tau}e^{A_0\tau}\tilde{B} = 0$, которые не следуют из первоначальных условий $C\tilde{B} = 0$ и $L\tilde{B} = 0$.

В связи с этим, рассмотрим другую схему наблюдателя для системы (3.1). Для упрощения записи мы несколько изменим обозначения, использованные в предыдущем параграфе, — в уравнениях объекта наблюдения (3.1) переменные со знаком «тильда» мы заменим на переменные без тильды:

$$x(t) \leftarrow \tilde{x}(t), \quad y(t) \leftarrow \tilde{y}(t), \quad z(t) \leftarrow \tilde{z}(t), \quad B \leftarrow \tilde{B}, \quad t_n \leftarrow \tilde{t}_n, \quad T_n \leftarrow \tilde{T}_n, \quad \lambda_n \leftarrow \tilde{\lambda}_n.$$

Тогда уравнения объекта наблюдения (3.1) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t - \tau), \quad z(t) = Cx(t), \quad y(t) = Lx(t), \\ t_0 &= 0, \quad t_{n+1} = t_n + T_n, \quad x(t_n^+) = x(t_n^-) + \lambda_n B, \\ T_n &= \Phi(z(t_n)), \quad \lambda_n = F(z(t_n)). \end{aligned} \tag{3.12}$$

3.3.1 Уравнения наблюдателя

Для наблюдения вектора состояний системы (3.12) определим следующий наблюдатель:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A_0\hat{x}(t) + A_1\hat{x}(t - \tau) + K(y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) &= L\hat{x}(t), \quad \hat{z}(t) = C\hat{x}(t), \quad \hat{x}(\hat{t}_n^+) = \hat{x}(\hat{t}_n^-) + \hat{\lambda}_n B, \\ \hat{t}_{n+1} &= \hat{t}_n + \hat{T}_n, \quad \hat{T}_n = \Phi(\hat{z}(\hat{t}_n)), \quad \hat{\lambda}_n = F(\hat{z}(\hat{t}_n))\end{aligned}\tag{3.13}$$

с начальными условиями \hat{t}_0 и $\hat{x}(t) = \hat{\varphi}(t)$ при $\hat{t}_0 - \tau \leq t < \hat{t}_0$, где $\hat{\varphi}(t)$ — некоторая непрерывная на $[\hat{t}_0 - \tau, \hat{t}_0]$ начальная вектор-функция. Заметим, что при $\tau = 0$ наблюдатель (3.13) совпадает с наблюдателем, рассмотренным в [32].

Введем матрицу $D_0 = A_0 - KL$, где K — матрица коэффициентов усиления обратной связи. Как и ранее, предполагаем, что линейная часть системы (3.12) спектрально FD-наблюдаема, т. е. матрица K может быть выбрана так, чтобы матрица D_0 была гурвицевой, и было выполнено условие (1.13).

3.3.2 Синхронный режим

Зафиксируем некоторое решение $(x(t), t_n)$ системы (3.12). Как и ранее, решение $(\hat{x}(t), \hat{t}_n)$ уравнения наблюдателя (3.13), совпадающее при всех n, t с $(x(t), t_n)$, будем называть синхронным режимом наблюдателя относительно $(x(t), t_n)$. Для упрощения обозначений, не умаляя общности, положим $a = 0$.

Синхронный режим относительно $(x(t), t_n)$ будем называть асимптотически устойчивым в малом, если при достаточно малых отклонениях начальных данных уравнений объекта и наблюдателя $|t_0 - \hat{t}_0| < \delta_0$, $\sup_{-\tau \leq s \leq 0} \|\varphi(t_0 + s) - \hat{\varphi}(\hat{t}_0 + s)\| < \delta$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма, выполняется $\hat{t}_n - t_n \rightarrow 0$ и $\|\hat{x}_n - x_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, что влечет также выполнение $\hat{\lambda}_n - \lambda_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

3.3.3 Точечное отображение и его свойства

Как и ранее, построим точечное отображение, описывающее эволюцию состояния наблюдателя:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(\hat{t}_n^-) \\ \hat{t}_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \hat{x}(\hat{t}_{n+1}^-) \\ \hat{t}_{n+1} \end{bmatrix}.\tag{3.14}$$

Для любой пары целых чисел k и s , $0 \leq k \leq s$, определим множество

$$S_{k,s} = \{(\zeta, \theta) : \theta \in \mathbb{R}, \quad \zeta \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad t_k \leq \theta < t_{k+1}, \quad t_s \leq \theta + \Phi(C\zeta) < t_{s+1}\}.$$

Введем следующие функции:

$$G(\theta) = \begin{cases} e^{A_0\theta}, & 0 \leq \theta \leq \tau, \\ e^{D(\theta-\tau)}e^{A_0\tau}, & \tau \leq \theta, \end{cases}, \quad \tilde{G}(\theta) = \begin{cases} e^{D_0\theta}, & 0 \leq \theta \leq \tau, \\ e^{\tilde{D}(\theta-\tau)}e^{D_0\tau}, & \tau \leq \theta, \end{cases}$$

и

$$\tilde{R}(\theta_1, \theta_2) = \begin{cases} e^{\tilde{D}\theta_2} [e^{\tilde{D}(\theta_1-\tau)}e^{D_0\tau} - e^{D_0\theta_1}], & 0 \leq \theta_1 \leq \tau, \\ 0, & \tau \leq \theta_1, \end{cases}$$

где $\tilde{D} = D_0 + A_1e^{-D_0\tau}$. Определим матрицу-функцию $P(\zeta, \theta) = P_{k,s}(\zeta, \theta)$ для $(\zeta, \theta) \in S_{k,s}$, где

$$\begin{aligned} P_{k,s}(\zeta, \theta) = & e^{D(\theta+\Phi(C\zeta)-t_s)}x(t_s^-) - e^{\tilde{D}\Phi(C\zeta)} (e^{D(\theta-t_k)}x(t_k^-) - \zeta) - \\ & - \lambda_k \left(e^{\tilde{D}\Phi(C\zeta)}G(\theta-t_k) + \tilde{R}(\theta-t_k, \Phi(C\zeta)) \right) B + F(C\zeta) \tilde{G}(\Phi(C\zeta))B - \\ & - \sum_{j=k+1}^s \lambda_j \tilde{G}(\theta+\Phi(C\zeta)-t_j)B + \lambda_s G(\theta+\Phi(C\zeta)-t_s)B. \end{aligned}$$

Теорема 3.5. Точечное отображение (3.14) при $n \geq 1$ задается уравнениями

$$\hat{x}_{n+1} = P(\hat{x}_n, \hat{t}_n), \quad \hat{t}_{n+1} = \hat{t}_n + \Phi(C\hat{x}_n). \quad (3.15)$$

Доказательство. Рассмотрим ошибку наблюдения $r(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ на интервале $(\hat{t}_n, \hat{t}_{n+1})$ и предположим, что $t_k \leq \hat{t}_n < t_{k+1}$, $t_s \leq \hat{t}_n + \Phi(C\hat{x}_n) < t_{s+1}$ для некоторых k и s таких, что $s \geq k$.

Очевидно, $r(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{r}(t) = D_0r(t) + A_1r(t-\tau) \quad (3.16)$$

во всех точках t , где функция $r(t)$ непрерывна. Выведем точную формулу, задающую отображение (3.14). Введём $m \geq 0$ такое, что $s = k + m$.

Для продолжения доказательства теоремы докажем следующую лемму.

Лемма 3.2. Пусть $\{\tilde{t}_n\}$ и $\{\tilde{\lambda}_n\}$ — последовательности моментов и величин скачков функции $r(t)$.

Тогда функция $r(t)$ в точках \tilde{t}_{n+1}^- , $n \geq 1$ выглядит следующим образом

$$r(\tilde{t}_{n+1}^-) = e^{\tilde{D}(\tilde{t}_{n+1}-\tilde{t}_n)}r(\tilde{t}_n^-) + \tilde{\lambda}_n \tilde{G}(\tilde{t}_{n+1}-\tilde{t}_n)B + \tilde{\lambda}_{n-1} \tilde{R}(\tilde{t}_n-\tilde{t}_{n-1}, \tilde{t}_{n+1}-\tilde{t}_n)B.$$

Доказательство. Так как последовательность моментов скачков $r(t)$ состоит из объединения моментов импульсации объекта и наблюдателя, то выполнено следующее свойство

$$\tilde{t}_{n+1} - \tilde{t}_{n-1} \geq \inf_z \Phi(z) > \tau. \quad (3.17)$$

Для доказательства леммы будем использовать методику, предложенную в [28]. Так как пара (D_0, A_1) является FD-приводимой, не умаляя общности, будем считать, что матрицы D_0 и A_1 имеют следующий блочный вид:

$$D_0 = \begin{bmatrix} U & 0 \\ W & V \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{W} & 0 \end{bmatrix},$$

и для $\tilde{t}_n < t < \tilde{t}_{n+1}$ уравнение (3.16) выглядит следующим образом:

$$\dot{u}(t) = Uu(t), \quad \dot{v}(t) = Wu(t) + Vv(t) + \bar{W}u(t - \tau), \quad (3.18)$$

где $r^T = [u^T, v^T]$. Пусть $B^T = [B_1^T, B_2^T]$, где размеры B_1 и B_2 соответствуют размерам u и v .

Тогда

$$u(\tilde{t}_n^+) = u(\tilde{t}_n^-) + \tilde{\lambda}_n B_1, \quad v(\tilde{t}_n^+) = v(\tilde{t}_n^-) + \tilde{\lambda}_n B_2. \quad (3.19)$$

Из первого уравнения (3.18) получаем

$$u(t) = \begin{cases} e^{U(t-\tilde{t}_n)} u(\tilde{t}_n^-), & \tilde{t}_{n-1} < t < \tilde{t}_n, \\ e^{U(t-\tilde{t}_n)} u(\tilde{t}_n^+), & \tilde{t}_n < t < \tilde{t}_{n+1}. \end{cases} \quad (3.20)$$

Следуя [28], перепишем (3.16) в виде:

$$\dot{r}(t) = \tilde{D}r(t) - (\tilde{D} - D_0) [r(t) - e^{D_0\tau} r(t - \tau)]. \quad (3.21)$$

Так как

$$\tilde{D} - D_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{W}e^{-U\tau} & 0 \end{bmatrix},$$

то (3.16) эквивалентно соотношению

$$\dot{r}(t) = \tilde{D}r(t) - (\tilde{D} - D_0)\eta(t), \quad \eta(t) = \begin{bmatrix} u_d(t) \\ * \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

где $u_d(t) = u(t) - e^{U\tau} u(t - \tau)$, а * может быть заменена на любой вектор подходящей размерности.

Далее рассмотрим четыре возможных случая.

1. Пусть $\tilde{t}_{n-1} + \tau < \tilde{t}_n < \tilde{t}_{n+1} < \tilde{t}_n + \tau$ (см. рис. 3.2). Возьмем произвольное число t из

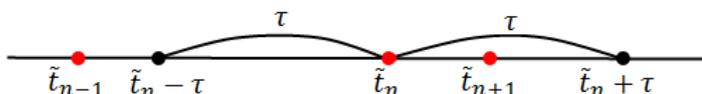


Рисунок 3.2: Случай 1. Красным цветом обозначены моменты скачков функции $r(t)$

интервала $\tilde{t}_n < t < \tilde{t}_{n+1}$. Тогда $\tilde{t}_{n-1} < t - \tau < \tilde{t}_n$. Из (3.20) следует

$$u(t) = e^{U(t-\tilde{t}_n)}u(\tilde{t}_n^+), \quad u(t-\tau) = e^{U(t-\tau-\tilde{t}_n)}u(\tilde{t}_n^-). \quad (3.23)$$

Отсюда

$$u_d(t) = e^{U(t-\tilde{t}_n)}[u(\tilde{t}_n^+) - u(\tilde{t}_n^-)] = \tilde{\lambda}_n e^{U(t-\tilde{t}_n)} B_1.$$

За счет подходящего выбора $*$, в (3.22) можно положить $\eta(t) = \tilde{\lambda}_n e^{D_0(t-\tilde{t}_n)} B$. Очевидно, $\dot{\eta}(t) = D_0 \eta(t)$, и разность $r_d(t) = r(t) - \eta(t)$ удовлетворяет однородному линейному уравнению $\dot{r}_d(t) = \tilde{D} r_d(t)$ при $\tilde{t}_n < t < \tilde{t}_{n+1}$. Тогда

$$r(\tilde{t}_{n+1}^-) = \eta(\tilde{t}_{n+1}^-) + e^{\tilde{D}(\tilde{t}_{n+1}-\tilde{t}_n)} [r(\tilde{t}_n^+) - \eta(\tilde{t}_n^+)].$$

Так как

$$r(\tilde{t}_n^+) - \eta(\tilde{t}_n^+) = r(\tilde{t}_n^-) + \tilde{\lambda}_n B - \tilde{\lambda}_n B = r(\tilde{t}_n^-), \quad \eta(\tilde{t}_{n+1}^-) = \tilde{\lambda}_n e^{D_0(\tilde{t}_{n+1}-\tilde{t}_n)} B,$$

то отсюда получаем: $r(\tilde{t}_{n+1}^-) = e^{\tilde{D}(\tilde{t}_{n+1}-\tilde{t}_n)} r(\tilde{t}_n^-) + \tilde{\lambda}_n e^{D_0(\tilde{t}_{n+1}-\tilde{t}_n)} B$.

2. Пусть $\tilde{t}_{n-1} + \tau < \tilde{t}_n < \tilde{t}_n + \tau < \tilde{t}_{n+1}$ (см. рис. 3.3). Тогда из (3.20) получим

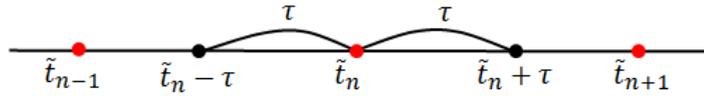


Рисунок 3.3: Случай 2.

$$u_d(t) = \begin{cases} \tilde{\lambda}_n e^{U(t-\tilde{t}_n)} B_1, & \tilde{t}_n < t < \tilde{t}_n + \tau, \\ 0, & \tilde{t}_n + \tau < t < \tilde{t}_{n+1}. \end{cases}$$

Поэтому в (3.22) можно выбрать

$$\eta(t) = \begin{cases} \tilde{\lambda}_n e^{D_0(t-\tilde{t}_n)} B, & \tilde{t}_n < t < \tilde{t}_n + \tau, \\ 0, & \tilde{t}_n + \tau < t < \tilde{t}_{n+1}. \end{cases}$$

Рассуждая как в случае 1, получаем $r(\tilde{t}_{n+1}^-) = e^{\tilde{D}(\tilde{t}_{n+1}-\tilde{t}_n)} r(\tilde{t}_n^-) + \tilde{\lambda}_n e^{\tilde{D}(\tilde{t}_{n+1}-\tilde{t}_n-\tau)} e^{D_0 \tau} B$.

3. Пусть $\tilde{t}_n < \tilde{t}_{n-1} + \tau < \tilde{t}_{n+1} < \tilde{t}_n + \tau$ (см. рис. 3.4). Тогда

$$u_d(t) = \begin{cases} \tilde{\lambda}_n e^{U(t-\tilde{t}_n)} B_1 + \tilde{\lambda}_{n-1} e^{U(t-\tilde{t}_{n-1})} B_1, & \tilde{t}_n < t < \tilde{t}_{n-1} + \tau, \\ \tilde{\lambda}_n e^{U(t-\tilde{t}_n)} B_1, & \tilde{t}_{n-1} + \tau < t < \tilde{t}_{n+1}, \end{cases}$$

и в (3.22) можно выбрать

$$\eta(t) = \begin{cases} \tilde{\lambda}_n e^{D_0(t-\tilde{t}_n)} B + \tilde{\lambda}_{n-1} e^{D_0(t-\tilde{t}_{n-1})} B, & \tilde{t}_n < t < \tilde{t}_{n-1} + \tau, \\ \tilde{\lambda}_n e^{D_0(t-\tilde{t}_n)} B, & \tilde{t}_{n-1} + \tau < t < \tilde{t}_{n+1}. \end{cases}$$

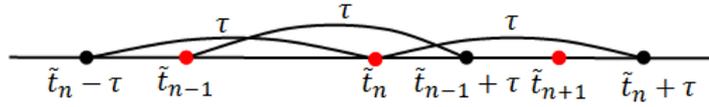


Рисунок 3.4: Случай 3.

Отсюда находим

$$r(\tilde{t}_{n+1}^-) = e^{\tilde{D}(\tilde{t}_{n+1}-\tilde{t}_n)} r(\tilde{t}_n^-) + \tilde{\lambda}_n e^{D_0(\tilde{t}_{n+1}-\tilde{t}_n)} B - \\ - \tilde{\lambda}_{n-1} e^{\tilde{D}(\tilde{t}_{n+1}-\tilde{t}_n)} \left(e^{D_0(\tilde{t}_n-\tilde{t}_{n-1})} - e^{\tilde{D}(\tilde{t}_n-\tilde{t}_{n-1}-\tau)} e^{D_0\tau} \right) B.$$

4. Пусть $\tilde{t}_n < \tilde{t}_{n-1} + \tau < \tilde{t}_n + \tau < \tilde{t}_{n+1}$ (см. рис. 3.5). Тогда

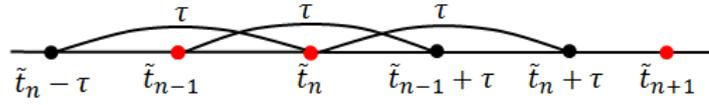


Рисунок 3.5: Случай 4.

$$u_d(t) = \begin{cases} \tilde{\lambda}_n e^{U(t-\tilde{t}_n)} B_1 + \tilde{\lambda}_{n-1} e^{U(t-\tilde{t}_{n-1})} B_1, & \tilde{t}_n < t < \tilde{t}_{n-1} + \tau, \\ \tilde{\lambda}_n e^{U(t-\tilde{t}_n)} B_1, & \tilde{t}_{n-1} + \tau < t < \tilde{t}_n + \tau, \\ 0, & \tilde{t}_n + \tau < t < \tilde{t}_{n+1}. \end{cases}$$

и в (3.22) можно выбрать

$$\eta(t) = \begin{cases} \tilde{\lambda}_n e^{D_0(t-\tilde{t}_n)} B + \tilde{\lambda}_{n-1} e^{D_0(t-\tilde{t}_{n-1})} B, & \tilde{t}_n < t < \tilde{t}_{n-1} + \tau, \\ \tilde{\lambda}_n e^{D_0(t-\tilde{t}_n)} B, & \tilde{t}_{n-1} + \tau < t < \tilde{t}_n + \tau, \\ 0, & \tilde{t}_n + \tau < t < \tilde{t}_{n+1}. \end{cases}$$

Следовательно, в случае 4 имеем

$$r(\tilde{t}_{n+1}^-) = e^{\tilde{D}(\tilde{t}_{n+1}-\tilde{t}_n)} r(\tilde{t}_n^-) + \tilde{\lambda}_n e^{\tilde{D}(\tilde{t}_{n+1}-\tilde{t}_n-\tau)} e^{D_0\tau} B - \\ - \tilde{\lambda}_{n-1} e^{\tilde{D}(\tilde{t}_{n+1}-\tilde{t}_n)} \left(e^{D_0(\tilde{t}_n-\tilde{t}_{n-1})} - e^{\tilde{D}(\tilde{t}_n-\tilde{t}_{n-1}-\tau)} e^{D_0\tau} \right) B.$$

Лемма доказана. □

Продолжим доказательство теоремы. Для $m \geq 1$ на интервале $\hat{t}_n < t < \hat{t}_{n+1}$ функция $r(t)$ претерпевает скачки $r(t^+) - r(t^-) = \lambda_i B$ в точках $t = t_i$, $k+1 \leq i \leq s$. Предположение $\inf_z \Phi(z) > \tau$ гарантирует, что $\hat{t}_n + \tau < t_{k+2}$, в то время как точка t_{k+1} может находиться как в интервале $(\hat{t}_n, \hat{t}_n + \tau)$, так и в интервале $(\hat{t}_n + \tau, \hat{t}_{n+1})$, поэтому нужно учитывать оба эти случая.

Рассмотрим сначала случай $m \geq 2$, т. е. $s \geq k + 2$. Очевидно $\hat{x}(\hat{t}_{n+1}^-) = x(\hat{t}_{n+1}^-) - r(\hat{t}_{n+1}^-)$. Заметим, что $\tilde{R}(t_s - t_{s-1}, \hat{t}_{n+1} - t_s) = 0$, т. к. $t_s - t_{s-1} \geq \inf_z \Phi(z) > \tau$. Тогда из теоремы 2 [30] и леммы 3.2 следует

$$\hat{x}(\hat{t}_{n+1}^-) = e^{\tilde{D}(\hat{t}_{n+1} - t_s)} x(t_s^-) + \lambda_s G(\hat{t}_{n+1} - t_s) B - e^{\tilde{D}(\hat{t}_{n+1} - t_s)} r(t_s^-) - \lambda_s \tilde{G}(\hat{t}_{n+1} - t_s). \quad (3.24)$$

Найдем $r(t_s^-)$.

- Применяя лемму 3.2 на интервале $\hat{t}_n < t < t_{k+1}$, получаем

$$r(t_{k+1}^-) = e^{\tilde{D}(t_{k+1} - \hat{t}_n)} r(\hat{t}_n^-) - \hat{\lambda}_n \tilde{G}(t_{k+1} - \hat{t}_n) B + \lambda_k \tilde{R}(\hat{t}_n - t_k, t_{k+1} - \hat{t}_n) B.$$

Заметим, что если $t_k < \hat{t}_{n-1}$, то предыдущая формула верна, т. к. $\hat{t}_n - t_k > \hat{t}_n - \hat{t}_{n-1} \geq \inf_z \Phi(z) > \tau$, а значит $\tilde{R}(\hat{t}_n - t_k, t_{k+1} - \hat{t}_n) = 0$.

- Из леммы 3.2 на интервале $t_{k+1} < t < t_{k+2}$ следует

$$r(t_{k+2}^-) = e^{\tilde{D}(t_{k+2} - t_{k+1})} r(t_{k+1}^-) + \lambda_{k+1} \tilde{G}(t_{k+2} - t_{k+1}) B - \hat{\lambda}_n \tilde{R}(t_{k+1} - \hat{t}_n, t_{k+2} - t_{k+1}) B.$$

Подставляя полученное ранее значение $r(t_{k+1}^-)$ и учитывая, что

$$e^{\tilde{D}(t_{k+2} - t_{k+1})} \tilde{G}(t_{k+1} - \hat{t}_n) + \tilde{R}(t_{k+1} - \hat{t}_n, t_{k+2} - t_{k+1}) = e^{\tilde{D}(t_{k+2} - \hat{t}_n - \tau)} e^{D_0 \tau},$$

получаем:

$$r(t_{k+2}^-) = e^{\tilde{D}(t_{k+2} - \hat{t}_n)} r(\hat{t}_n^-) + \lambda_k e^{\tilde{D}(t_{k+2} - t_{k+1})} \tilde{R}(\hat{t}_n - t_k, t_{k+1} - \hat{t}_n) B + \\ + \lambda_{k+1} \tilde{G}(t_{k+2} - t_{k+1}) B - \hat{\lambda}_n e^{\tilde{D}(t_{k+2} - \hat{t}_n - \tau)} e^{D_0 \tau} B.$$

- Если $m \geq 3$, то лемма 3.2 на интервале $t_{k+2} < t < t_{k+3}$ дает

$$r(t_{k+3}^-) = e^{\tilde{D}(t_{k+3} - t_{k+2})} r(t_{k+2}^-) + \lambda_{k+2} \tilde{G}(t_{k+3} - t_{k+2}) B + \lambda_{k+1} \tilde{R}(t_{k+2} - t_{k+1}, t_{k+3} - t_{k+2}) B.$$

Так как $t_{k+2} - t_{k+1} > \inf_z \Phi(z) > \tau$, то $\tilde{R}(t_{k+2} - t_{k+1}, t_{k+3} - t_{k+2}) = 0$. Следовательно, $r(t_{k+3}^-) = e^{\tilde{D}(t_{k+3} - t_{k+2})} r(t_{k+2}^-) + \lambda_{k+2} \tilde{G}(t_{k+3} - t_{k+2}) B$. Подставляя полученное ранее значение $r(t_{k+2}^-)$, получаем:

$$r(t_{k+3}^-) = e^{\tilde{D}(t_{k+3} - \hat{t}_n)} r(\hat{t}_n^-) + \lambda_k e^{\tilde{D}(t_{k+3} - t_{k+1})} \tilde{R}(\hat{t}_n - t_k, t_{k+1} - \hat{t}_n) B + \\ + \lambda_{k+1} e^{\tilde{D}(t_{k+3} - t_{k+2})} \tilde{G}(t_{k+2} - t_{k+1}) B + \lambda_{k+2} \tilde{G}(t_{k+3} - t_{k+2}) B - \hat{\lambda}_n e^{\tilde{D}(t_{k+3} - \hat{t}_n - \tau)} e^{D_0 \tau} B.$$

- Продолжая цепочку аналогичных рассуждений, получим

$$r(t_s^-) = e^{\tilde{D}(t_s - \hat{t}_n)} r(\hat{t}_n^-) + \lambda_k e^{\tilde{D}(t_s - t_{k+1})} \tilde{R}(\hat{t}_n - t_k, t_{k+1} - \hat{t}_n) B - \\ - \hat{\lambda}_n e^{\tilde{D}(t_s - \hat{t}_n - \tau)} e^{D_0 \tau} B + \sum_{j=k+1}^{s-1} \lambda_j e^{\tilde{D}(t_s - t_{j+1})} \tilde{G}(t_{j+1} - t_j) B.$$

Заметим, что $\tilde{G}(t_{j+1} - t_j) = e^{\tilde{D}(t_{j+1}-t_j-\tau)}e^{D_0\tau}$, так как $t_{j+1} - t_j > \tau$. Таким образом,

$$r(t_s^-) = e^{\tilde{D}(t_s-\hat{t}_n)}r(\hat{t}_n^-) + \lambda_k e^{\tilde{D}(t_s-t_{k+1})}\tilde{R}(\hat{t}_n - t_k, t_{k+1} - \hat{t}_n)B - \\ - \hat{\lambda}_n e^{\tilde{D}(t_s-\hat{t}_n-\tau)}e^{D_0}B + r_{k,s}, \quad (3.25)$$

где $r_{k,s} = \sum_{j=k+1}^{s-1} \lambda_j e^{\tilde{D}(t_s-t_j-\tau)}e^{D_0\tau}B$.

Так как $x(\hat{t}_n^-) = e^{D(\hat{t}_n-t_k)}x(t_k^-) + \lambda_k G(\hat{t}_n - t_k)B$, то

$$r(\hat{t}_n^-) = x(\hat{t}_n^-) - \hat{x}(\hat{t}_n^-) = e^{D(\hat{t}_n-t_k)}x(t_k^-) + \lambda_k G(\hat{t}_n - t_k)B - \hat{x}(\hat{t}_n^-). \quad (3.26)$$

В итоге, подставляя (3.26) в (3.25), а (3.25) в (3.24), получаем

$$\hat{x}(\hat{t}_{n+1}^-) = e^{D(\hat{t}_{n+1}-t_s)}x(t_s^-) - e^{\tilde{D}(\hat{t}_{n+1}-\hat{t}_n)}e^{D(\hat{t}_n-t_k)}x(t_k^-) + e^{\tilde{D}(\hat{t}_{n+1}-\hat{t}_n)}\hat{x}(\hat{t}_n^-) - \\ - \lambda_k e^{\tilde{D}(\hat{t}_{n+1}-\hat{t}_n)}G_k(\hat{t}_n - t_k)B - \lambda_k e^{\tilde{D}(\hat{t}_{n+1}-t_{k+1})}\tilde{R}(\hat{t}_n - t_k, t_{k+1} - \hat{t}_n)B + \\ + \hat{\lambda}_n e^{\tilde{D}(\hat{t}_{n+1}-\hat{t}_n-\tau)}e^{D_0\tau}B - r_{k,s} + \lambda_s G(\hat{t}_{n+1} - t_s)B - \lambda_s \tilde{G}(\hat{t}_{n+1} - t_s)B.$$

Заметим, что $e^{\tilde{D}(\hat{t}_{n+1}-t_{k+1})}\tilde{R}(\hat{t}_n - t_k, t_{k+1} - \hat{t}_n) = \tilde{R}(\hat{t}_n - t_k, t_{k+1} - \hat{t}_n)$ и

$r_{k,s} = \sum_{j=k+1}^{s-1} \lambda_j \tilde{G}(\hat{t}_{n+1} - t_j)B$, т. к. $\hat{t}_m - t_j > \tau$ при всех $j = k + 1, \dots, s - 1$.

Таким образом,

$$\hat{x}(\hat{t}_{n+1}^-) = e^{D(\hat{t}_{n+1}-t_s)}x(t_s^-) - e^{\tilde{D}(\hat{t}_{n+1}-\hat{t}_n)}\left(e^{D(\hat{t}_n-t_k)}x(t_k^-) - \hat{x}(\hat{t}_n^-)\right) - \\ - \lambda_k \left(e^{\tilde{D}(\hat{t}_{n+1}-\hat{t}_n)}G(\hat{t}_n - t_k) + \tilde{R}(\hat{t}_n - t_k, \hat{t}_{n+1} - \hat{t}_n)\right)B + \\ + \hat{\lambda}_n \tilde{G}(\hat{t}_{n+1} - \hat{t}_n)B - \sum_{j=k+1}^s \lambda_j \tilde{G}(\hat{t}_{n+1} - t_j)B + \lambda_s G(\hat{t}_{n+1} - t_s)B, \quad (3.27)$$

откуда следует утверждение (3.15) в случае $m \geq 2$.

Убедимся, что при $m = 0$ и $m = 1$ формула (3.27) также будет верна.

Пусть $m = 1$. Тогда

$$\hat{x}(\hat{t}_{n+1}^-) = x(\hat{t}_{n+1}^-) - r(\hat{t}_{n+1}^-) = e^{D(\hat{t}_{n+1}-t_s)}x(t_s^-) + \lambda_s G(\hat{t}_{n+1} - t_s)B - e^{\tilde{D}(\hat{t}_{n+1}-t_s)}r(t_s^-) - \\ - \lambda_s \tilde{G}(\hat{t}_{n+1} - t_s)B + \hat{\lambda}_n \tilde{R}(t_s - \hat{t}_n, \hat{t}_{n+1} - t_s)B.$$

Найдем $r(t_s^-)$:

$$r(t_s^-) = e^{\tilde{D}(t_s-\hat{t}_n)}e^{D(\hat{t}_n-t_k)}x(t_k^-) + \lambda_k e^{\tilde{D}(t_s-\hat{t}_n)}G(\hat{t}_n - t_k)B - \\ - e^{\tilde{D}(t_s-\hat{t}_n)}\hat{x}(\hat{t}_n^-) - \hat{\lambda}_n \tilde{G}(t_s - \hat{t}_n)B + \lambda_k \tilde{R}(\hat{t}_n - t_k, t_s - \hat{t}_n)B.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \hat{x}(\hat{t}_{n+1}^-) &= e^{D(\hat{t}_{n+1}-t_s)}x(t_s^-) - e^{\tilde{D}(\hat{t}_{n+1}-\hat{t}_n)} \left(e^{D(\hat{t}_n-t_k)}x(t_k^-) - \hat{x}(\hat{t}_n^-) \right) - \\ &\quad - \lambda_k \left(e^{\tilde{D}(\hat{t}_{n+1}-\hat{t}_n)}G(\hat{t}_n - t_k) + \tilde{R}(\hat{t}_n - t_k, \hat{t}_{n+1} - \hat{t}_n) \right) B + \hat{\lambda}_n \tilde{G}(\hat{t}_{n+1} - \hat{t}_n) B + \\ &\quad + \lambda_s G(\hat{t}_{n+1} - t_s) B - \lambda_s \tilde{G}(\hat{t}_{n+1} - t_s) B, \end{aligned}$$

что совпадает с (3.27) при $s = k + 1$.

Пусть $m = 0$, т. е. $s = k$. Тогда

$$\begin{aligned} \hat{x}(\hat{t}_{n+1}^-) &= e^{D(\hat{t}_{n+1}-t_k)}x(t_k^-) - e^{\tilde{D}(\hat{t}_{n+1}-\hat{t}_n)} \left(e^{D(\hat{t}_n-t_k)}x(t_k^-) - \hat{x}(\hat{t}_n^-) \right) + \lambda_k G(\hat{t}_{n+1} - t_k) B - \\ &\quad - \lambda_k \left(e^{\tilde{D}(\hat{t}_{n+1}-\hat{t}_n)}G(\hat{t}_n - t_k) + \tilde{R}(\hat{t}_n - t_k, \hat{t}_{n+1} - \hat{t}_n) \right) B + \hat{\lambda}_n \tilde{G}(\hat{t}_{n+1} - \hat{t}_n) B, \end{aligned}$$

что совпадает с (3.27) при $s = k$. □

Теорема 3.6. Точечное отображение $P(\zeta, \theta)$ непрерывно.

Доказательство. Так как

$$x(t_k^-) = e^{D(t_k-t_{k-1})}x(t_{k-1}^-) + \lambda_{k-1}G(t_k - t_{k-1})B = e^{D(t_k-t_{k-1})}x(t_{k-1}^-) + \lambda_{k-1}e^{D(t_k-t_{k-1}-\tau)}e^{A_0\tau}B,$$

несложно получить, что

$$\begin{aligned} P_{k,s}(\zeta, \theta) - P_{k-1,s}(\zeta, \theta) &= \lambda_k \left[-e^{\tilde{D}\Phi(C\zeta)}G(\theta - t_k) - \tilde{R}(\theta - t_k, \Phi(C\zeta)) + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{G}(\theta + \Phi(C\zeta) - t_k) \right] B, \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$P_{k,s}(\zeta, \theta) - P_{k,s-1}(\zeta, \theta) = \lambda_s \left[G(\theta + \Phi(C\zeta) - t_s) - \tilde{G}(\theta + \Phi(C\zeta) - t_s) \right] B \quad (3.29)$$

для $k \geq 1, s \geq 1$.

Так как функции $G(\theta)$, $\tilde{G}(\theta)$, $\tilde{R}(\theta, \zeta)$ непрерывны для всех $\theta \geq 0$, функция $P(\zeta, \theta)$ может иметь разрывы только на поверхностях (ζ, θ) , где либо $\theta = t_k$, либо $\theta + \Phi(C\zeta) = t_s$ для некоторых k, s .

Тем не менее, из (3.28), (3.29) и равенств $G(0) = I$, $\tilde{R}(0, \Phi(C\zeta)) = e^{\tilde{D}(\Phi(C\zeta)-\tau)}e^{D_0\tau} - e^{\tilde{D}\Phi(C\zeta)}$, $\tilde{G}(\Phi(C\zeta)) = e^{\tilde{D}(\Phi(C\zeta)-\tau)}e^{D_0\tau}$, $G(0) - \tilde{G}(0) = 0$ следует, что

$$P_{k,s} - P_{k-1,s}|_{\theta=t_k} = 0, \quad P_{k,s} - P_{k,s-1}|_{\theta+\Phi(C\zeta)=t_s} = 0,$$

поэтому функция P непрерывна. □

Теорема 3.7. Если производные скалярных функций $F(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$ непрерывны, то частные производные функции $P(\zeta, \theta)$ также непрерывны.

Доказательство. Для доказательства теоремы приведем две леммы.

Лемма 3.3. *Функции*

$$G_1(\theta_1) = \frac{d(G(\theta_1) - \tilde{G}(\theta_1))}{d\theta_1} \text{ и } G_2(\theta_1, \theta_2) = \frac{\partial(e^{\tilde{D}\theta_2}G(\theta_1) + \tilde{R}(\theta_1, \theta_2))}{\partial\theta_1}$$

непрерывны для всех $\theta_1 \geq 0$.

Доказательство леммы 3.3. Очевидно, $G_1(\theta_1)$ и $G_2(\theta_1, \theta_2)$ непрерывны для всех $\theta_1 \geq 0$, за исключением, возможно, множества $\theta_1 = \tau$.

(а) Покажем, что функция $G_1(\theta_1)$ непрерывна в точке $\theta_1 = \tau$.

Введем следующие функции:

$$\begin{aligned} f_1(\theta) &= A_0 e^{A_0 \theta} - D_0 e^{D_0 \theta}, \\ f_2(\theta) &= D e^{D(\theta-\tau)} e^{A_0 \tau} - \tilde{D} e^{\tilde{D}(\theta-\tau)} e^{D_0 \tau}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} G_1(\theta_1) &= f_1(\theta_1), \quad \text{если } 0 \leq \theta_1 < \tau, \\ G_1(\theta_1) &= f_2(\theta_1), \quad \text{если } \tau < \theta_1. \end{aligned}$$

Однако, $f_2(\tau) = D e^{A_0 \tau} - \tilde{D} e^{D_0 \tau} = A_0 e^{A_0 \tau} + A_1 - D_0 e^{D_0 \tau} - A_1 = f_1(\tau)$, следовательно, $G_1(\theta_1)$ непрерывна для всех $\theta_1 \geq 0$.

(б) Докажем теперь, что функция $G_2(\theta_1, \theta_2)$ непрерывна на прямой $\theta_1 = \tau$.

Введем следующие функции:

$$\begin{aligned} f_1(\theta) &= A_0 e^{A_0 \theta} + (\tilde{D} e^{\tilde{D}(\theta-\tau)} e^{D_0 \tau} - D_0 e^{D_0 \theta}), \\ f_2(\theta) &= D e^{D(\theta-\tau)} e^{A_0 \tau}, \end{aligned}$$

откуда имеем

$$\begin{aligned} G_2(\theta_1, \theta_2) &= e^{\tilde{D}\theta_2} f_1(\theta_1), \quad \text{если } 0 \leq \theta_1 < \tau, \\ G_2(\theta_1, \theta_2) &= e^{\tilde{D}\theta_2} f_2(\theta_1), \quad \text{если } \tau < \theta_1. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} f_1(\tau) &= A_0 e^{A_0 \tau} + \tilde{D} e^{D_0 \tau} - D_0 e^{D_0 \tau} = A_0 e^{A_0 \tau} + D_0 e^{D_0 \tau} + A_1 - D_0 e^{D_0 \tau} = \\ &= (A_0 + A_1 e^{-A_0 \tau}) e^{A_0 \tau} = D e^{A_0 \tau} = f_2(\tau), \end{aligned}$$

функция $G_2(\theta_1, \theta_2)$ непрерывна для всех $\theta_1 \geq 0$. □

Лемма 3.4. Для любых $k \geq 1, s \geq 1$ функции

$$\frac{\partial P_{k,s}(\zeta, \theta)}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial P_{k,s}(\zeta, \theta)}{\partial \theta}$$

непрерывны при $(\zeta, \theta) \in S_{k,s}$.

Доказательство леммы 3.4. Легко видеть, что функция $P_{k,s}(\zeta, \theta)$ может быть представлена как

$$P_{k,s}(\zeta, \theta) = u_k(\zeta, \theta) + v_s(\zeta, \theta) + w(\zeta, \theta),$$

где

$$\begin{aligned} u_k(\zeta, \theta) &= e^{\tilde{D}\Phi(C\zeta)} [-e^{D(\theta-t_k)}x(t_k^-) - \lambda_k G(\theta - t_k)B] - \lambda_k \tilde{R}(\theta - t_k, \Phi(C\zeta))B + \\ &\quad + \sum_{j=1}^k \lambda_j \tilde{G}(\theta + \Phi(C\zeta) - t_j)B, \\ v_s(\zeta, \theta) &= e^{D(\theta+\Phi(C\zeta)-t_s)}x(t_s^-) - \sum_{j=1}^s \lambda_j \tilde{G}(\theta + \Phi(C\zeta) - t_j)B + \lambda_s G(\theta + \Phi(C\zeta) - t_s)B, \\ w(\zeta, \theta) &= e^{\tilde{D}\Phi(C\zeta)}\zeta + F(C\zeta)\tilde{G}(\Phi(C\zeta))B. \end{aligned}$$

Поэтому достаточно показать, что частные производные функций $u_k(\zeta, \theta)$, $v_s(\zeta, \theta)$, $w(\zeta)$ непрерывны. Так как $\tilde{G}(\Phi(C\zeta)) = e^{\tilde{D}(\Phi(C\zeta)-\tau)}e^{D_0\tau}$, то легко видеть, что функция $\frac{dw}{d\zeta}$ непрерывна.

Прямыми вычислениями получаем, что

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{\partial u_k(\zeta, \theta)}{\partial \zeta} &= \Phi'(C\zeta)\tilde{D}e^{\tilde{D}\Phi(C\zeta)} [-e^{D(\theta-t_k)}x(t_k^-) - \lambda_k G(\theta - t_k)B] C - \\ &\quad - \lambda_k \Phi'(C\zeta)\tilde{D}\tilde{R}(\theta - t_k, \Phi(C\zeta))BC + \sum_{j=1}^k \lambda_j \Phi'(C\zeta)\tilde{D}e^{\tilde{D}(\theta+\Phi(C\zeta)-t_j-\tau)}e^{D_0\tau}BC. \end{aligned}$$

Поскольку функции $G(\theta - t_k)$ и $R(\theta - t_k, \Phi(C\zeta))$ непрерывны для всех $\theta \geq t_k$, функция $\frac{\partial u_k(\zeta, \theta)}{\partial \zeta}$ также является непрерывной для всех $\theta \geq t_k$.

$$\begin{aligned} 2) \quad \frac{\partial v_s(\zeta, \theta)}{\partial \zeta} &= \Phi'(C\zeta)De^{D(\theta+\Phi(C\zeta)-t_s)}x(t_s^-)C - \\ &\quad - \sum_{j=1}^{s-1} \lambda_j \Phi'(C\zeta)\tilde{D}e^{\tilde{D}(\theta+\Phi(C\zeta)-t_j-\tau)}e^{D_0\tau}BC + \\ &\quad + \lambda_s \Phi'(C\zeta)G_1(\theta + \Phi(C\zeta) - t_s)BC. \end{aligned}$$

Из леммы 3.3 следует, что функция $\frac{\partial v_s(\zeta, \theta)}{\partial \zeta}$ непрерывна для всех $\theta + \Phi(C\zeta) \geq t_s$.

Таким образом, получаем, что $\frac{\partial P_{k,s}(\zeta, \theta)}{\partial \zeta}$ непрерывна для $(\zeta, \theta) \in S_{k,s}$.

Найдем теперь частные производные по переменной ζ .

$$3) \frac{\partial u_k(\zeta, \theta)}{\partial \theta} = -e^{\tilde{D}\Phi(C\zeta)} D e^{D(\theta-t_k)} x(t_k^-) - \lambda_k G_2(\theta - t_k, \Phi(C\zeta)) B + \\ + \sum_{j=1}^k \lambda_j \tilde{D} e^{\tilde{D}(\theta+\Phi(C\zeta)-t_j-\tau)} e^{D_0\tau} B,$$

$$4) \frac{\partial v_s(\zeta, \theta)}{\partial \theta} = D e^{D(\theta+\Phi(C\zeta)-t_s)} x(t_s^-) - \sum_{j=1}^{s-1} \lambda_j \tilde{D} e^{\tilde{D}(\theta+\Phi(C\zeta)-t_j-\tau)} e^{D_0\tau} B + \\ + \lambda_s G_1(\theta + \Phi(C\zeta) - t_s) B.$$

откуда из леммы 3.3 следует, что $\frac{\partial u_k(\zeta, \theta)}{\partial \theta}$ непрерывна для всех $\theta \geq t_k$, а $\frac{\partial v_s(\zeta, \theta)}{\partial \theta}$ непрерывна для всех $\theta + \Phi(C\zeta) \geq t_s$. Таким образом, функция $\frac{\partial P_{k,s}(\zeta, \theta)}{\partial \theta}$ непрерывна на множестве $(\zeta, \theta) \in S_{k,s}$. \square

Продолжим доказательство теоремы. Из леммы 3.4 следует, что частные производные функции $P(\zeta, \theta)$ могут иметь разрывы только на поверхностях (ζ, θ) , где либо $\theta = t_k$, либо $\theta + \Phi(C\zeta) = t_s$ для некоторых k, s .

На поверхности $(\zeta, \theta) : \theta = t_k$ для некоторого k имеем

$$\frac{\partial(P_{k,s}(\zeta, \theta) - P_{k-1,s}(\zeta, \theta))}{\partial \zeta} \Big|_{\theta=t_k} = \lambda_k \Phi'(C\zeta) \left[-\tilde{D} e^{\tilde{D}\Phi(C\zeta)} - \tilde{D} e^{\tilde{D}\Phi(C\zeta)} (e^{-D\tau} e^{D_0\tau} - I) + \right. \\ \left. + \tilde{D} e^{\tilde{D}(\Phi(C\zeta)-\tau)e^{D_0\tau}} \right] BC = 0,$$

$$\frac{\partial(P_{k,s}(\zeta, \theta) - P_{k-1,s}(\zeta, \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta=t_k} = \lambda_k \left[-e^{\tilde{D}\Phi(C\zeta)} A_0 - e^{\tilde{D}\Phi(C\zeta)} (\tilde{D} e^{-D\tau} e^{D_0\tau} - D_0) + \right. \\ \left. + \tilde{D} e^{\tilde{D}(\Phi(C\zeta)-\tau)e^{D_0\tau}} \right] B = 0,$$

так как $e^{\tilde{D}\Phi(C\zeta)} \tilde{D} = \tilde{D} e^{\tilde{D}\Phi(C\zeta)}$ и $(A_0 - D_0)B = KLB = 0$.

На поверхности $(\zeta, \theta) : \theta + \Phi(C\zeta) = t_s$ для некоторого s верно следующее:

$$\frac{\partial(P_{k,s}(\zeta, \theta) - P_{k,s-1}(\zeta, \theta))}{\partial \zeta} \Big|_{\theta+\Phi(C\zeta)=t_s} = \lambda_s \Phi'(C\zeta) (A_0 - D_0) BC = 0,$$

$$\frac{\partial(v_s(\zeta, \theta) - v_{s-1}(\zeta, \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta+\Phi(C\zeta)=t_s} = \lambda_s (A_0 - D_0) B = 0.$$

Это означает, что частные производные функции $P(\zeta, \theta)$ не имеют разрывов на указанных выше поверхностях, что завершает доказательство теоремы 3.7. \square

Как и в предыдущих случаях, введем дополнительные обозначения, относящиеся к отображению (3.14). Определим функцию

$$Q_{k,s}(q) = \begin{bmatrix} P_{k,s}(\zeta, \theta) \\ \theta + \Phi(C\zeta) \end{bmatrix}, \quad \text{где } q = \begin{bmatrix} \zeta \\ \theta \end{bmatrix}.$$

Положим $Q(q) = Q_{k,s}(q)$ для $(\zeta, \theta) \in S_{k,s}$. Тогда $\hat{q}_{n+1} = Q(\hat{q}_n)$, где

$$\hat{q}_n = \begin{bmatrix} \hat{x}_n \\ \hat{t}_n \end{bmatrix}, \quad Q(q) = \begin{bmatrix} P(\zeta, \theta) \\ \theta + \Phi(C\zeta) \end{bmatrix}.$$

Так как $Q(\cdot)$ непрерывно дифференцируема, то можно выписать ее матрицу Якоби:

$$Q'(q) = \begin{bmatrix} P'_\zeta(\zeta, \theta) & P'_\theta(\zeta, \theta) \\ \Phi'(C\zeta)C & 1 \end{bmatrix}.$$

Синхронный режим по отношению к $x(t)$ характеризуется векторной последовательностью

$$\hat{q}_n^0 = \begin{bmatrix} x_n \\ t_n \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Тогда $Q(\hat{q}_n^0) = Q_{n,n+1}(\hat{q}_n^0)$ для $n \geq 1$.

Для всех $k \geq 0$ введем матрицу J_k с блоками

$$\begin{aligned} (J_k)_{11} &= \Phi'_k D x_{k+1} C + e^{\tilde{D}_K T_k} \left(I_{n_x} + F'_k e^{-\tilde{D}_K \tau} e^{D_K \tau} B C \right), \\ (J_k)_{12} &= D x_{k+1} - e^{\tilde{D}_K T_k} \left(D x_k + \lambda_k \tilde{D}_K e^{-\tilde{D}_K \tau} e^{D_K \tau} B \right), \\ (J_k)_{21} &= \Phi'_k C, \quad (J_k)_{22} = 1. \end{aligned}$$

Теорема 3.8. Для любого $n \geq 0$ матрица Якоби отображения $Q(\cdot)$ в точке \hat{q}_n^0 вычисляется по формуле

$$Q'(\hat{q}_n^0) = J_n. \quad (3.31)$$

Доказательство. Из того, что

$$x(t_{k+1}^-) = e^{D(t_{k+1}-t_k)} x(t_k^-) + \lambda_k G_k(t_{k+1} - t_k) B = e^{D(t_{k+1}-t_k)} x(t_k^-) + \lambda_k e^{D(t_{k+1}-t_k-\tau)} e^{A_0 \tau} B,$$

получаем, что для $s = k + 1$

$$\begin{aligned} P_{k,k+1}(\zeta, \theta) &= \left[e^{D\Phi(C\zeta)} - e^{\tilde{D}\Phi(C\zeta)} \right] e^{D(\theta-t_k)} x(t_k^-) - \\ &- \lambda_k \left[e^{\tilde{D}\Phi(C\zeta)} G(\theta - t_k) + \tilde{R}(\theta - t_k, \Phi(C\zeta)) - e^{D(\theta+\Phi(C\zeta)-t_k-\tau)} e^{A_0 \tau} \right] B - \\ &- \lambda_{k+1} \left(\tilde{G}(\theta + \Phi(C\zeta) - t_{k+1}) - G(\theta + \Phi(C\zeta) - t_{k+1}) \right) B + \\ &+ e^{\tilde{D}\Phi(C\zeta)} \zeta + F(C\zeta) \tilde{G}(\Phi(C\zeta)) B. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства теоремы докажем следующую лемму.

Лемма 3.5. Частные производные функции $P(\zeta, \theta)$ в точке (x_k, t_k) вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} P'_\theta(x_k, t_k) &= Dx_{k+1} - e^{\tilde{D}T_k}(Dx_k + \lambda_k \tilde{D}e^{-\tilde{D}\tau}e^{D_0\tau}B), \\ P'_\zeta(x_k, t_k) &= \Phi'(Cx_k)Dx_{k+1}C + e^{\tilde{D}T_k} \left[I_{n_x} + F'(Cx_k)e^{-\tilde{D}\tau}e^{D_0\tau}BC \right]. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 3.5. Очевидно $P(x_k, t_k) = P_{k,k+1}(x_k, t_k)$. Из теоремы 3.7 следует, что частные производные функции $P(\zeta, \theta)$ непрерывны, поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} P(x_k, t_k) &= \frac{\partial}{\partial \zeta} P_{k,k+1}(x_k, t_k), \\ \frac{\partial}{\partial \theta} P(x_k, t_k) &= \frac{\partial}{\partial \theta} P_{k,k+1}(x_k, t_k). \end{aligned}$$

Прямыми вычислениями получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} P_{k,k+1}(\zeta, \theta) &= [e^{D\Phi(C\zeta)} - e^{\tilde{D}\Phi(C\zeta)}] De^{D(\theta-t_k)}x(t_k^-) - \\ &\quad - \lambda_k \left[e^{\tilde{D}\Phi(C\zeta)} f_1(\theta - t_k) - De^{D(\theta+\Phi(C\zeta)-t_k-\tau)}e^{A_0\tau} \right] B - \lambda_{k+1} f_2(\theta + \Phi(C\zeta) - t_{k+1})B, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} P_{k,k+1}(\zeta, \theta) &= \Phi'(C\zeta) [De^{D\Phi(C\zeta)} - \tilde{D}e^{\tilde{D}\Phi(C\zeta)}] e^{D(\theta-t_k)}x(t_k^-)C - \\ &\quad - \lambda_k \Phi'(C\zeta) \left[\tilde{D}e^{\tilde{D}\Phi(C\zeta)} G(\theta - t_k) + \tilde{D}\tilde{R}(\theta - t_k, \Phi(C\zeta)) - De^{D(\theta+\Phi(C\zeta)-t_k-\tau)}e^{A_0\tau} \right] BC - \\ &\quad - \lambda_{k+1} \Phi'(C\zeta) f_2(\theta + \Phi(C\zeta) - t_{k+1})BC + \Phi'(C\zeta) \tilde{D}e^{\tilde{D}\Phi(C\zeta)} \zeta C + e^{\tilde{D}\Phi(C\zeta)} + \\ &\quad + F'(C\zeta) \tilde{G}(\Phi(C\zeta))BC + \Phi'(C\zeta) F(C\zeta) \tilde{D}e^{D(\Phi(C\zeta)-\tau)}e^{D_0\tau}BC, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_1(\theta) &= \begin{cases} A_0 e^{A_0\theta} + \tilde{D}e^{\tilde{D}(\theta-\tau)}e^{D_0\tau} - D_0 e^{D_0\theta}, & \text{если } 0 \leq \theta \leq \tau, \\ De^{D(\theta-\tau)}e^{A_0\tau}, & \text{если } \tau \leq \theta. \end{cases} \\ f_2(\theta) &= \begin{cases} D_0 e^{D_0\theta} - A_0 e^{A_0\theta}, & \text{если } 0 \leq \theta \leq \tau, \\ \tilde{D}e^{\tilde{D}(\theta-\tau)}e^{D_0\tau} - De^{D(\theta-\tau)}e^{A_0\tau}, & \text{если } \tau \leq \theta. \end{cases} \end{aligned}$$

Так как $t_k + \Phi(Cx_k) - t_{k+1} = 0$ и $(A - D)B = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} P_{k,k+1}(x_k, t_k) &= [e^{D\Phi(Cx_k)} - e^{\tilde{D}\Phi(Cx_k)}] Dx(t_k^-) - \\ &\quad - \lambda_k \left[\tilde{D}e^{\tilde{D}(\Phi(Cx_k)-\tau)}e^{D_0\tau} - De^{D(\Phi(Cx_k)-\tau)}e^{A_0\tau} \right] B, \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} P_{k,k+1}(x_k, t_k) &= \Phi'(Cx_k)De^{D\Phi(Cx_k)}x_k C + \lambda_k \Phi'(Cx_k)De^{D(\Phi(Cx_k)-\tau)}e^{A_0\tau}BC + \\ &\quad + e^{\tilde{D}\Phi(Cx_k)} [I_{n_x} + F'(Cx_k)e^{-\tilde{D}\tau}e^{D_0\tau}BC]. \end{aligned}$$

Наконец, из формулы $x_{k+1} = e^{D(t_{k+1}-t_k)}x_k + \lambda_k e^{D(t_{k+1}-t_k-\tau)}e^{A_0\tau}B$ получаем утверждение леммы 3.5. \square

Теорема 3.8 напрямую следует из леммы 3.5. □

3.3.4 Устойчивость синхронного режима по отношению к m -циклу

Пусть $(x(t), t_n)$ — периодическое решение системы (3.12) с m импульсами на периоде (m -цикл), где m — некоторое целое число, $m \geq 1$. Тогда $x_{n+m} \equiv x_n$, $\lambda_{n+m} \equiv \lambda_n$, $T_{n+m} \equiv T_n$.

Рассмотрим синхронный режим наблюдателя по отношению к $(x(t), t_n)$, и пусть \hat{q}_n^0 — соответствующая последовательность векторов (3.30), удовлетворяющая $\hat{q}_{n+1}^0 = Q(\hat{q}_n^0)$ для $n \geq 1$.

Для случая $n = 0$ несложно показать, что при малых начальных отклонениях $|t_0 - \hat{t}_0| < \delta_0$, $\sup_{-\tau \leq s \leq 0} \|\varphi(t_0 + s) - \hat{\varphi}(\hat{t}_0 + s)\| < \delta$ отклонения $|t_1 - \hat{t}_1|$, $\|\hat{x}_1 - x_1\|$ также малы.

Рассмотрим ранее определенные матрицы J_n . Так как $J_{n+m} \equiv J_n$, то последовательность $\{J_n\}_{n=0}^\infty$ содержит не более чем m различных матриц, а именно J_0, \dots, J_{m-1} .

Таким образом, из теорем 3.5–3.8, а также теоремы 3 из [32] получаем следующее условие устойчивости в малом синхронного режима.

Теорема 3.9. Пусть матричное произведение $J_{m-1} \cdots J_0$ устойчиво по Шуру, т. е. все собственные значения этой матрицы лежат строго внутри единичного круга. Тогда синхронный режим по отношению к $(x(t), t_n)$ асимптотически устойчив в малом.

Глава 4

Задача наблюдения в системе гормональной регуляции тестостерона

4.1 Описание системы гормональной регуляции тестостерона

В мужском организме в процессе регуляции уровня тестостерона основную роль играют два гормона: лютеинизирующий гормон и гонадотропин релизинг гормон, которые генерируются в отделах головного мозга (соответственно, гипофизе и гипоталамусе). По этическим соображениям уровень последнего не поддается непосредственному измерению. В связи с этим возникает задача восстановления текущего значения гонадотропин релизинг гормона по доступным измерениям уровней остальных гормонов.

Рассмотрим следующую систему третьего порядка, которая является частным случаем системы (1.3)–(1.4) и состоит из непрерывной части

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -b_1x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= g_1x_1(t) - b_2x_2(t), \\ \dot{x}_3(t) &= g_2x_2(t) - b_3x_3(t),\end{aligned}\tag{4.1}$$

и импульсной части

$$\begin{aligned}x_1(t_n^+) &= x_1(t_n^-) + \lambda_n, & x_2(t_n^+) &= x_2(t_n^-), \\ x_3(t_n^+) &= x_3(t_n^-), & t_{n+1} &= t_n + T_n, \\ T_n &= \Phi(x_3(t_n)), & \lambda_n &= F(x_3(t_n)).\end{aligned}\tag{4.2}$$

Не умаляя общности, полагаем $t_0 = 0$. Нелинейные функции $\Phi(\cdot)$ и $F(\cdot)$ (модуляционные характеристики) выбраны следующим образом:

$$\begin{aligned}\Phi(x_3) &= \Phi_1 + \Phi_2 \frac{(x_3/h)^p}{1 + (x_3/h)^p}, \\ F(x_3) &= F_1 + \frac{F_2}{1 + (x_3/h)^p},\end{aligned}\tag{4.3}$$

где $\Phi_1, \Phi_2, F_1, F_2, h$ – положительные параметры, $p \geq 1$ целое число, откуда следует выполнение следующих неравенств

$$0 < \Phi_1 \leq \Phi(\cdot) < \Phi_1 + \Phi_2, \quad 0 < F_1 < F(\cdot) \leq F_1 + F_2.\tag{4.4}$$

Такая система третьего порядка может быть применена для моделирования и изучения процесса секреции, освобождения и регуляции тестостерона в мужском организме [30,31,66], Здесь $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ – концентрации гормонов: гонадотропин релизинг гормона GnRH, лютеинизирующего гормона LH и тестостерона Te, соответственно. Постоянные b_1, b_2, b_3, g_1, g_2 – положительные параметры, отражающие кинетику взаимодействия гормонов, участвующих в цепочке регулирования тестостерона следующим образом. В отличие от Te, который генерируется в мужских половых органах (тестикулах), LH и GnRH генерируются в отделах головного мозга, соответственно в гипофизе и гипоталамусе. Поэтому динамика LH и GnRH (GnRH особенно) тесно связана с динамикой нейронов мозга. Секреция GnRH носит импульсный характер и имеет короткий период полураспада. При этом GnRH стимулирует выделение LH, в свою очередь LH стимулирует секрецию Te, а Te, по принципу отрицательной обратной связи, подавляет импульсную секрецию GnRH в гипоталамусе [96]. Таким образом, уровни гормонов связаны друг с другом внутренними обратными связями, и цепочка взаимодействующих гормонов является замкнутой. Частота и амплитуда мгновенных импульсных выбросов GnRH может быть описана с помощью разностных уравнений (4.2), задающих законы частотной и амплитудной модуляции, причем концентрация тестостерона ($x_3(t)$) выполняет роль модулирующего сигнала, а концентрация GnRH ($x_1(t)$) является импульсным модулированным сигналом. Импульсная математическая модель (4.1)–(4.2), описывающая динамику гормональной оси (GnRH) – (LH) – (Te), была предложена и изучена в работе [31]. В дальнейшем было показано, что она имеет хорошее согласование с клиническими данными [67]. Возможности модели проиллюстрированы на рис. 4.1 и рис. 4.2.

Уровни гормонов LH и Te, можно определить путем анализа крови, однако, концентрации гормона GnRH, секретируемого в гипоталамусе, недоступны для непосредственного измерения без нанесения вреда организму. Моменты времени t_n и амплитуды λ_n импульсных выбросов гормона GnRH не измеряемы, их требуется оценить.

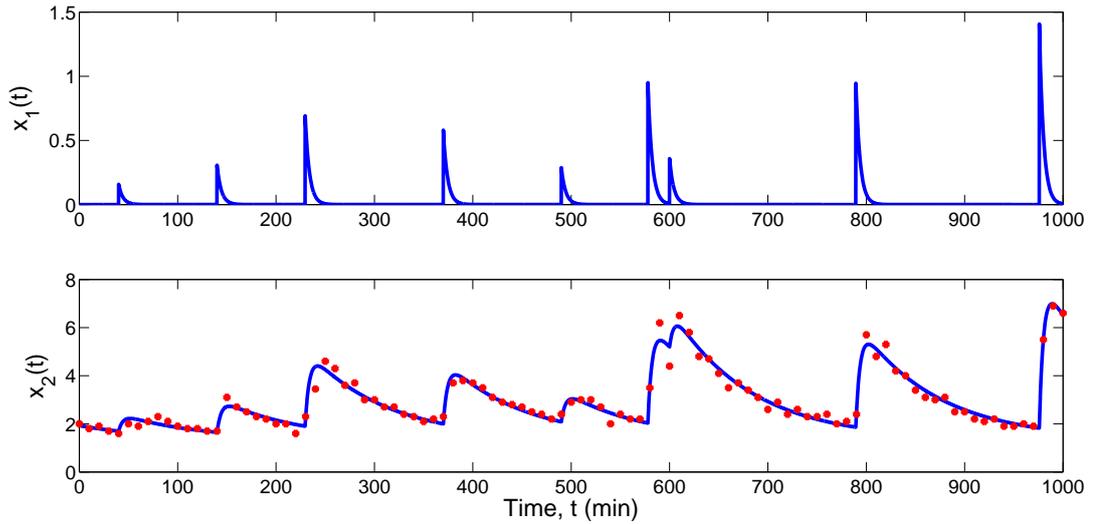


Рисунок 4.1: Красный цвет: концентрации гормона LH ($x_2(t)$), полученные с помощью многократного забора крови с десятиминутными интервалами у здорового 27-летнего мужчины. По вертикали откладывается концентрация гормона, а по горизонтали — время забора проб крови. Синий цвет: кривые изменения концентраций гормонов GnRH ($x_1(t)$) (оцененная) и LH ($x_2(t)$) (смоделированная), полученные с помощью модели (4.1)–(4.2). Copyright 2013, AIP Publishing LLC [66].

Обозначим $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]^T$, и перепишем систему (4.1)–(4.2) в матричной форме в виде (1.3)–(1.4):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t), & y(t) &= Lx(t), \\ z(t) &= Cx(t), & t_n &< t < t_{n+1}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} -b_1 & 0 & 0 \\ g_1 & -b_2 & 0 \\ 0 & g_2 & -b_3 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$y(t)$ обозначает концентрации измеряемых гормонов (LH и Те), $z(t)$ — концентрацию гормона (Те), с помощью которого формируется импульсная обратная связь. Очевидно, матрица A — гурвицева, т. е. все ее собственные числа имеют отрицательные вещественные части, что на практике означает, что все молекулы гормонов в конечном итоге распадаются. Также легко видеть, что пара матриц (A, L) наблюдаема.

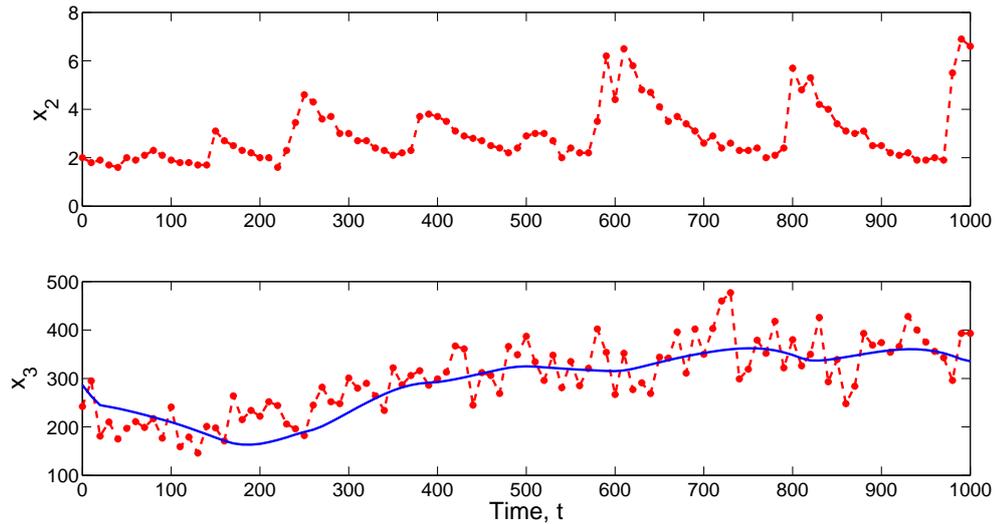


Рисунок 4.2: Красный цвет: концентрации гормонов LH ($x_2(t)$) и Te ($x_3(t)$), полученные с помощью многократного забора крови с десятиминутными интервалами у здорового 27-летнего мужчины. По вертикали откладывается концентрация гормона, а по горизонтали — время забора проб крови. Синий цвет: смоделированная кривая изменения концентрации Te. Copyright 2013, AIP Publishing LLC [66].

Вектор $x(t)$ претерпевает скачки в моменты t_n , когда происходит импульсная секреция GnRH с соответствующими весами λ_n :

$$\begin{aligned} x(t_n^+) &= x(t_n^-) + \lambda_n B, & t_{n+1} &= t_n + T_n, \\ T_n &= \Phi(z(t_n)), & \lambda_n &= F(z(t_n)), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, функции $\Phi(\cdot)$, $F(\cdot)$ заданы с помощью (4.3). Легко видеть, что $CB = 0$, $LB = 0$, следовательно, функции $y(t)$, $z(t)$ являются непрерывными.

4.2 Синтез коэффициентов усиления наблюдателя для 1-цикла

Рассмотрим систему (1.3)–(1.4) и наблюдатель (2.1), (2.3) с дополнительной обратной связью в дискретной части наблюдателя с матрицей коэффициентов усиления K_d . В работе [104] путем моделирования установлено, что наличие такой дополнительной обратной связи наиболее актуально для m -циклов с малым значением m (см. также раздел 4.3.1). Поэтому наиболее важным на практике является случай 1-цикла в системе (4.5)–(4.6), описывающий модель гормональной регуляции тестостерона, для которого в данном разделе будет предложен алгоритм синтеза

наблюдателя (2.1), (2.3) (матриц коэффициентов усиления K и K_d), обеспечивающего асимптотическую устойчивость в малом синхронного режима, а также быструю сходимость [108].

Находясь в обозначениях раздела 2.2, рассмотрим решение $(x(t), t_k)$ системы (1.3)–(1.4), удовлетворяющее свойствам $x_{k+1} \equiv x_k$, $\lambda_{k+1} \equiv \lambda_k$, $T_{k+1} \equiv T_k$ (т. е. решение является 1-циклом), а также синхронный режим наблюдателя (2.1), (2.3) по отношению к решению $(x(t), t_k)$. Тогда все элементы соответствующей векторной последовательности \hat{q}_k^0 в (2.4) совпадают и равны \hat{q}_0^0 , а также выполнено условие $\hat{q}_0^0 = Q(\hat{q}_0^0)$. Следовательно, выполнено и $J_{i+1} \equiv J_i$, т. е. в последовательности $\{J_i\}_{i=0}^{\infty}$ все матрицы совпадают: $J_i = J_0$. Таким образом, в случае 1-цикла для асимптотической устойчивости в малом синхронного режима требуется устойчивость по Шуру матрицы Якоби J_0 оператора $Q(\cdot)$ в точке \hat{q}_0^0 , т. е. спектр матрицы J_0 должен лежать внутри единичного круга.

Обозначим через $\sigma(M)$ спектр некоторой матрицы $M \in \mathbb{R}^n$, т. е. $\sigma(M) = \{\mu_1(M), \dots, \mu_n(M)\}$, где $\mu_i(M)$ – собственное число матрицы M . Спектральный радиус M будем обозначать следующим образом:

$$\rho(M) = \max\{|\mu_1(M)|, \dots, |\mu_n(M)|\}.$$

Приведем дополнительные свойства матрицы Якоби J_0 , необходимые для дальнейших рассуждений.

Теорема 4.1. *Матрица Якоби J_0 обладает следующими свойствами.*

1. Матрица J_0 может быть представлена в виде:

$$J_0 = V_0(K_d) + W_0(K). \quad (4.7)$$

2. Существует невырожденное преобразование T такое, что матрицы

$$\tilde{V}_0(K_d) = T^{-1} V_0(K_d) T$$

и

$$\tilde{W}_0(K) = T^{-1} W_0(K) T$$

имеют следующую структуру:

$$\tilde{V}_0(K_d) = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{n_x} & \mathbb{O}_{n_x \times 1} \\ *_{1 \times n_x} & *_{1 \times 1} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{W}_0(K) = \begin{bmatrix} *_{n_x} & *_{n_x \times 1} \\ \mathbb{O}_{1 \times n_x} & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Определитель матрицы J_0 вычисляется следующим образом:

$$\det J_0 = e^{T_0 \sum_{i=1}^{n_x} \mu_i(D)} (\Phi'_0 C A x_0 + 1 + \Phi'_0 \lambda_0 R A B). \quad (4.8)$$

4. След матрицы J_0 вычисляется следующим образом:

$$\text{tr } J_0 = \sum_{i=1}^{n_x} e^{\mu_i(D) T_0} + \Phi'_0 C A x_0 + 1. \quad (4.9)$$

5. Характеристический многочлен матрицы J_0 вычисляется следующим образом:

$$\det(\lambda I - J_0) = p(\lambda) = e^{T_0 \sum_{i=1}^{n_x} \mu_i(D)} \left[(\lambda - \Phi'_0 C A x_0 - 1) \det(\lambda e^{-D T_0} - (I_{n_x} + F'_0 B C)) - \Phi'_0 R \text{adj}(\lambda e^{-D T_0} - (I_{n_x} + F'_0 B C))(F'_0 B C A x_0 - \lambda_0 A B) \right], \quad (4.10)$$

где $\text{adj}(\cdot)$ обозначает присоединенную матрицу.

Доказательство. 1. Из (3.11) легко видеть, что

$$V_0(K_d) = \begin{bmatrix} A x_0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi'_0 R & 1 - \Phi'_k K_d L A x_0 \end{bmatrix}$$

и

$$W_0(K) = \begin{bmatrix} e^{D T_0} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_x} + F'_0 B C & -A(x_0 + \lambda_0 B) \end{bmatrix}.$$

2. Рассмотрим следующую матричнозначную функцию, заданную на $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$:

$$\mathcal{I}(u) = \begin{bmatrix} I_n & u \\ \mathbb{O}_n & 1 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что для произвольных $u, v \in \mathbb{R}^n$, выполнено:

$$\mathcal{I}^{-1}(u) = \mathcal{I}(-u), \quad \mathcal{I}(u)\mathcal{I}(v) = \mathcal{I}(u + v).$$

Рассмотрим следующее преобразование подобия $T = \mathcal{I}(A x_0)$ выражения (4.7):

$$\tilde{J}_0 = \mathcal{I}^{-1}(A x_0) J_0 \mathcal{I}(A x_0) = \mathcal{I}^{-1}(A x_0) (V_0 + W_0) \mathcal{I}(A x_0). \quad (4.11)$$

Тогда имеем

$$\tilde{V}_0(K_d) = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{n_x} & \mathbb{O}_{n_x \times 1} \\ \Phi'_0 R & \Phi'_0 C A x_0 + 1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{W}_0(K) = \begin{bmatrix} e^{D T_0} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_x} + F'_0 B C & F'_0 B C A x_0 - \lambda_0 A B \end{bmatrix}.$$

3. Так как $CB = 0$, то справедливо $\det(e^{DT_0}(I + F'_0BC)) = \det e^{DT_0} = e^{T_0 \sum_{i=1}^{n_x} \mu_i(D)} \neq 0$. Из свойств дополнений Шура имеем:

$$\det J_0 = \det \tilde{J}_0 = \det e^{DT_0} \left[\Phi'_0 C A x_0 + 1 - \Phi'_0 R \times \right. \\ \left. \times (e^{DT_0}(I + F'_0BC))^{-1} e^{DT_0}(F'_0BC A x_0 - \lambda_0 AB) \right],$$

и, пользуясь равенством $RB = 0$ и свойствами определителя матричной экспоненты, получаем формулу (4.8).

4. Прямыми вычислениями получаем

$$\text{tr } J_0 = \text{tr } \tilde{J}_0 = \text{tr} (T^{-1} (V_0(K_d) + W_0(K)) T) = \text{tr} (\tilde{V}_0(K_d) + \tilde{W}_0(K)) = \\ = \text{tr} (\tilde{V}_0(K_d)) + \text{tr} (\tilde{W}_0(K)) = \text{tr } e^{DT_0} + \Phi'_0 C A x_0 + 1.$$

5. Пользуясь свойствами дополнений Шура, легко видеть, что характеристический многочлен матрицы \tilde{J}_0 (и, соответственно, подобной ей J_0) может быть вычислен следующим образом:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - \tilde{J}_0) = \det(\lambda I - e^{DT_0}(I_{n_x} + F'_0BC)) (\lambda - \Phi'_0 C A x_0 - 1) - \\ - \Phi'_0 R \text{adj}(\lambda I - e^{DT_0}(I_{n_x} + F'_0BC)) \times e^{DT_0}(F'_0BC A x_0 - \lambda_0 AB). \quad (4.12)$$

Формула (4.10) следует из формулы (4.12) и равенства $e^{DT_0} = \text{adj } e^{-DT_0} \det e^{DT_0}$.

□

Рассмотрим теперь частный случай системы (1.3)–(1.4) – систему третьего порядка (4.5)–(4.6), описывающую модель гормональной регуляции тестостерона. Как и прежде считаем, что решение $(x(t), t_k)$ системы системы (4.5)–(4.6) является 1-циклом, и рассматриваем синхронный режим наблюдателя (2.1), (2.3) по отношению к этому решению. Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия того, что спектральный радиус матрицы Якоби J_0 не превосходит некоторой величины $r > 0$.

Теорема 4.2. *Собственные числа матрицы Якоби J_0 лежат внутри круга радиуса r на комплексной плоскости тогда и только тогда, когда выполнены следующие неравенства:*

$$d_0 > 0, \quad d_1 > 0, \quad d_2 > 0, \quad d_3 > 0, \quad d_4 > 0, \\ d_3(d_1 d_2 - d_0 d_3) - d_4 d_1^2 > 0, \quad (4.13)$$

где

$$\begin{aligned}
d_0 &= r^4 + r^3 a_1 + r^2 a_2 + r a_3 + a_4, \\
d_1 &= 4r^4 + 2r^3 a_1 - 2r a_3 - 4a_4, \\
d_2 &= 6r^4 - 2r^2 a_2 + 6a_4, \\
d_3 &= 4r^4 - 2r^3 a_1 + 2r a_3 - 4a_4, \\
d_4 &= r^4 - r^3 a_1 + r^2 a_2 - r a_3 + a_4,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

и

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\operatorname{tr}(\tilde{J}_0) = -\operatorname{tr}(e^{DT_0}(I + F'_0 BC)) - (\Phi'_0 C A x_0 + 1), \\
a_2 &= \det(e^{DT_0}) [\operatorname{tr}(e^{-DT_0}) - F'_0 \operatorname{tr}(e^{-DT_0} BC)] + (\Phi'_0 C A x_0 + 1) \operatorname{tr}(e^{DT_0}(I + F'_0 BC)) + \\
&\quad + \Phi'_0 \operatorname{tr}(e^{DT_0}) \lambda_0 K_d L A B - \det(e^{DT_0}) \Phi'_0 R [-e^{-DT_0} \operatorname{tr}(e^{-DT_0}) + e^{-2DT_0}] \times \\
&\quad \times (F'_0 BC A x_0 - \lambda_0 AB), \\
a_3 &= \det(e^{DT_0}) \left[-1 - (\Phi'_0 C A x_0 + 1) [\operatorname{tr}(e^{-DT_0}) - F'_0 \operatorname{tr}(e^{-DT_0} BC)] + \right. \\
&\quad \left. + \Phi'_0 R [\operatorname{tr}(e^{-DT_0}) I - F'_0 \operatorname{tr}(e^{-DT_0} BC) I - e^{-DT_0}] (F'_0 BC A x_0 - \lambda_0 AB) \right], \\
a_4 &= \det(J_0).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы потребуется следующая лемма.

Лемма 4.1. *Многочлен*

$$p(\lambda) = \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4$$

является характеристическим многочленом матрицы J_0 .

Доказательство леммы 4.1. Используя теорему Гамильтона–Кэли, можно получить представление присоединенной матрицы и определителя матрицы $M = (\lambda e^{-DT_0} - (I_{n_x} + F'_0 BC))$ в виде выражения, зависящего от следа и степеней матрицы \tilde{J}_0 . Для $n_x = 3$ такое представление выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
\operatorname{adj}(M) &= \frac{1}{2} ((\operatorname{tr} M)^2 - \operatorname{tr} M^2) I_3 - M \operatorname{tr} M + M^2, \\
\det(M) &= \frac{1}{6} ((\operatorname{tr} M)^3 - 3 \operatorname{tr} M \operatorname{tr} M^2 + 2 \operatorname{tr} M^3).
\end{aligned}$$

Тогда соответствующие выражения в формуле (4.12) могут быть переписаны следующим образом:

$$\begin{aligned}
\operatorname{adj}(\lambda e^{-DT_0} - (I_{n_x} + F'_0 BC)) &= \frac{1}{2} \lambda^2 (\operatorname{tr} e^{-DT_0})^2 I_3 - 3 \lambda \operatorname{tr} e^{-DT_0} I_3 - \frac{1}{2} \lambda^2 \operatorname{tr}(e^{-DT_0})^2 I_3 + \\
&\quad + 2 \lambda \operatorname{tr}(e^{-DT_0}) I_3 + \lambda F'_0 \operatorname{tr}(e^{-DT_0} BC) I_3 - \lambda^2 e^{-DT_0} \operatorname{tr} e^{-DT_0} + \lambda e^{-DT_0} + \\
&\quad + \lambda F'_0 BC \operatorname{tr} e^{-DT_0} - F'_0 BC + \lambda^2 (e^{-DT_0})^2 - \lambda F'_0 e^{-DT_0} BC + I_3 - \lambda F'_0 BC e^{-DT_0}, \tag{4.16}
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \det(\lambda e^{-DT_0} - (I_{n_x} + F'_0 BC)) = & \frac{1}{6} (\lambda^3 (\operatorname{tr} e^{-DT_0})^3 - 3\lambda^2 (\operatorname{tr} e^{-DT_0})^2 - 3\lambda^3 \operatorname{tr} e^{-DT_0} \operatorname{tr}(e^{-DT_0})^2 + \\ & + 6\lambda^2 F'_0 \operatorname{tr} e^{-DT_0} \operatorname{tr}(e^{-DT_0} BC) + 3\lambda^2 \operatorname{tr}(e^{-DT_0})^2 - \\ & - 6\lambda F'_0 \operatorname{tr}(e^{-DT_0} BC) + 2\lambda^3 \operatorname{tr}(e^{-DT_0})^3 + 6\lambda \operatorname{tr}(e^{-DT_0}) - 6 - 6\lambda^2 F'_0 \operatorname{tr}(BC(e^{-DT_0})^2)). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Подставляя выражения (4.16) и (4.17) в (4.12), получаем утверждение леммы:

$$\det(\lambda I - J_0) = \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4. \quad \square$$

Продолжим доказательство теоремы. Используем билинейное преобразование $\lambda = r \frac{w+1}{w-1}$, которое отображает левую полуплоскость во внутренность круга радиуса r . С помощью этого преобразования получаем, что все корни многочлена $p(\lambda)$ лежат внутри единичного круга радиуса r тогда и только тогда, когда все корни многочлена $\mu(w) = d_0 w^4 + d_1 w^3 + d_2 w^2 + d_3 w + d_4$ находятся в левой полуплоскости. Утверждение теоремы 4.2 следует немедленно из критерия Рауса–Гурвица. \square

Следствие 4.1. *Синхронный режим по отношению к решению $(x(t), t_k)$ локально асимптотически устойчив тогда и только тогда, когда неравенства (4.13) выполнены для $r < 1$.*

Следствие 4.2. *Если матрица K_d принадлежит гиперплоскости*

$$CA(x_0 + \lambda_0 B) + \lambda_0 K_d LAB = -\frac{1}{\Phi'_0}, \quad (4.18)$$

тогда все собственные числа матрицы J_0 лежат внутри круга радиуса r на комплексной плоскости тогда и только тогда, когда выполнены следующие неравенства:

$$e_0 > 0, \quad e_1 > 0, \quad e_1 e_2 - e_0 e_3 > 0, \quad (4.19)$$

где

$$\begin{aligned} e_0 &= r^3 + r^2 a_1 + r a_2 + a_3, \\ e_1 &= 3r^3 + r^2 a_1 - r a_2 - 3a_3, \\ e_2 &= 3r^4 - r^2 a_1 - r a_2 + 3a_3, \\ e_3 &= r^3 - r^2 a_1 + r a_2 - a_3. \end{aligned}$$

Доказательство. Из формулы (4.18) следует, что $a_4 = 0$. Следовательно, один из корней характеристического многочлена $p(\lambda)$ равен нулю. По аналогии с доказательством теоремы 4.2, с помощью критерия Рауса–Гурвица для многочлена третьей степени получаем утверждение следствия 4.2. \square

Рассмотрим матрицу коэффициентов усиления K следующей структуры:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ k_3 & 0 \\ g_2 & k_6 \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

где k_1, k_3, k_6 — некоторые параметры, g_2 параметр матрицы A в (4.5).

Утверждение 4.1. Для любого набора комплексных чисел $\Lambda = \{\mu_j, j = 1, 2, 3\}$, в котором вместе с комплексным числом μ_j в этот набор входит и комплексно-сопряженное число $\bar{\mu}_j$, следующие коэффициенты матрицы K структуры (4.20)

$$k_1 = \frac{1}{g_1}[b_1^2 + b_1(\mu_1 + \mu_2) + \mu_1\mu_2],$$

$$k_3 = -(b_1 + b_2 + (\mu_1 + \mu_2)), \quad k_6 = -\mu_3 - b_3$$

назначают спектр матрицы $D = A - KL$ равным Λ .

Доказательство. С матрицей K структуры (4.20), матрица $D = A - KL$ принимает следующий блочно-диагональный вид:

$$D = \begin{bmatrix} -b_1 & -k_1 & 0 \\ g_1 & -b_2 - k_3 & 0 \\ 0 & 0 & -b_3 - k_6 \end{bmatrix}.$$

Тогда легко видеть, что $k_6 = -\mu_3 - b_3$. Найдем коэффициенты k_1 и k_3 , с которыми спектр матрицы D имеет желаемый вид. Введем следующие обозначения:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -b_1 & 0 \\ g_1 & -b_2 \end{bmatrix}, \quad K_1 = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_3 \end{bmatrix},$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} -b_1 & -k_1 \\ g_1 & -b_2 - k_3 \end{bmatrix}.$$

Далее рассмотрим двойственную задачу: найти матрицу $K_1^T = \begin{bmatrix} k_1 & k_3 \end{bmatrix}$ такую, что μ_1 и μ_2 являются собственными числами матрицы $D_1^T = A_1^T - L_1^T K_1^T$. Тогда характеристическим многочленом матрицы D_1^T является многочлен $\Phi_d(s) = s^2 - (\mu_1 + \mu_2)s + \mu_1\mu_2$. Матрица управляемости имеет вид $M_c = [L_1^T | A_1^T L_1^T] = \begin{bmatrix} 0 & g_1 \\ 1 & -b_2 \end{bmatrix}$, и обратная ей матрица равна $M_c^{-1} = \begin{bmatrix} b_2/g_1 & 1 \\ 1/g_1 & 0 \end{bmatrix}$. Данная двойственная задача может быть решена с помощью формулы Аккермана [13]:

$$K_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} M_c^{-1} \Phi_d(A) = \left[\underbrace{\frac{1}{g_1}[b_1^2 + b_1(\mu_1 + \mu_2) + \mu_1\mu_2]}_{k_1} \quad \underbrace{-(b_1 + b_2 + (\mu_1 + \mu_2))}_{k_3} \right].$$

□

Заметим, что для матрицы K структуры (4.20) матрица e^{DT_0} имеет следующую структуру:

$$e^{DT_0} = \begin{bmatrix} *_1 & *_2 & 0 \\ *_3 & *_4 & 0 \\ 0 & 0 & w_0 \end{bmatrix},$$

где

$$w_0 = e^{(-b_3 - k_6)T_0}, \quad (4.21)$$

и $*_1, *_2, *_3, *_4$ обозначают соответствующие скалярные элементы. Введем следующие обозначения:

$$r_0 = \Phi'_0 C A x_0 + 1$$

и

$$R_0 = F'_0 B C A x_0 - \lambda_0 A B.$$

Замечание 4.1. При использовании структуры (4.20) выполняется равенство $\text{tr}(e^{DT_0} B C) = 0$, и, соответственно, коэффициенты a_i , $i = 1, \dots, 4$ из формулы (4.15) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} a_1 &= -e^{\mu_1 T_0} - e^{\mu_2 T_0} - e^{\mu_3 T_0} - r_0, \\ a_2 &= e^{(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)T_0} \left[e^{-\mu_1 T_0} + e^{-\mu_2 T_0} + e^{-\mu_3 T_0} - \right. \\ &\quad \left. - \Phi'_0 R \left[-e^{-DT_0} (e^{-\mu_1 T_0} + e^{-\mu_2 T_0} + e^{-\mu_3 T_0}) + e^{-2DT_0} \right] R_0 \right] + \\ &\quad + (e^{\mu_1 T_0} + e^{\mu_2 T_0} + e^{\mu_3 T_0}) (r_1 + \Phi'_0 \lambda_0 K_d L A B), \\ a_3 &= e^{(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)T_0} \left[-1 - r_0 (e^{-\mu_1 T_0} + e^{-\mu_2 T_0} + e^{-\mu_3 T_0}) + \right. \\ &\quad \left. + \Phi'_0 K_d L \left((e^{-\mu_1 T_0} + e^{-\mu_2 T_0} + e^{-\mu_3 T_0}) \lambda_0 A B - e^{-DT_0} R_0 \right) \right], \\ a_4 &= e^{(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)T_0} (r_0 + \Phi'_0 \lambda_0 R A B), \end{aligned} \quad (4.22)$$

где множество $\Lambda = \{\mu_i, i = 1, 2, 3\}$ — спектр матрицы D .

Утверждение 4.2. Пусть матрица K определена формулой (4.20). Спектр $\sigma\{J_0\}$ обладает следующими свойствами:

- 1) собственное число w_0 матрицы e^{DT_0} , определенное формулой (4.21), является собственным числом матрицы J_0 при любой матрице K_d ;
- 2) спектр $\sigma\{J_0\}$ не зависит от k_{d2} , где $K_d = [k_{d1}, k_{d2}]$;
- 3) спектр $\sigma\{J_0\} = \{\sigma\{e^{DT_0}\}, \Phi'_0 C A x_0 + 1\}$ тогда и только тогда, когда $k_{d1} = 0$.

Доказательство. 1) Из доказательства Теоремы 4.2 следует, что

$$\tilde{J}_0 = \begin{bmatrix} e^{DT_0}(I + F'_0BC) & e^{DT_0}R_0 \\ \Phi'_0R & r_0 \end{bmatrix}.$$

Принимая во внимание структуру (4.20) и определения матриц A , B , C , и R_0 , легко видеть, что матрица $e^{DT_0}(I + F'_0BC)$ и вектор $e^{DT_0}R_0$ имеют следующую структуру:

$$e^{DT_0}(I + F'_0BC) = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & w_0 \end{bmatrix}, \quad e^{DT_0}R_0 = \begin{bmatrix} * \\ * \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрица $\tilde{J}_0 - w_0I$ имеет нулевой третий столбец. Таким образом, $\det(\tilde{J}_0 - w_0I) = \det(J_0 - w_0I) = 0$, и, следовательно, w_0 является собственным числом матриц \tilde{J}_0 и J_0 .

2)-3) Из свойств дополнений Шура следует

$$\det(\lambda I - \tilde{J}_0) = \det(\lambda - r_0) \det(\lambda I - e^{DT_0}(I + F'_0BC) - (\lambda - r_0)^{-1} \Phi'_0 e^{DT_0} R_0 R).$$

Обозначим через \mathfrak{M} матрицу следующей структуры:

$$\mathfrak{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где $*$ обозначает произвольный скалярный элемент. Заметим, что

$$\det(\lambda I - e^{DT_0}) = \det(\lambda I - e^{DT_0} - \mathfrak{M}) = \det(\lambda I - e^{DT_0} - \mathfrak{M}^T). \quad (4.23)$$

Утверждения 2) и 3) немедленно следуют из следующих выражений:

$$\Phi'_0 e^{DT_0} R_0 R = \begin{bmatrix} 0 & K_{d1} * & K_{d2} * \\ 0 & K_{d1} * & K_{d2} * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$e^{DT_0} F'_0 BC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где $*$ обозначает соответствующий скалярный элемент.

□

Введем обозначения:

$$c_1 = a_1 + e^{(-b_3-k_6)T_0}, \quad c_2 = a_2 + c_1 e^{(-b_3-k_6)T_0},$$

$$\rho_{\min} = \frac{1}{2} (e^{-b_1 T_0} + \Phi'_0 C A x_0 + 1), \quad \mathcal{D} = c_1^2 - 4c_2.$$

Определим функцию $g(\cdot)$, зависящую от коэффициента k_3 , следующим образом:

$$g(k_3) = \frac{\sqrt{\mathcal{D}}}{2} + \frac{1}{2} e^{(-b_2-k_3)T_0}.$$

Заметим, что величина \mathcal{D} не является знакоопределенной, и, следовательно, функция $g(\cdot)$ может принимать как вещественные, так и комплексные значения.

Теорема 4.3. *Предположим $\rho_{\min} > 0$. Пусть матрица K определена формулой (4.20), и матрица K_d принадлежит гиперплоскости*

$$CA(x_0 + \lambda_0 B) + \lambda_0 K_d L A B = -\frac{1}{\Phi'_0}, \quad (4.24)$$

и

$$k_1 = 0, \quad k_6 = -b_3 - \frac{\ln(\varkappa)}{T_0}, \quad (4.25)$$

где $0 < \varkappa \leq \rho_{\min}$, $k_3 = k_3^* = \arg \min |g(k_3)|$, и $|\cdot|$ обозначает абсолютную величину комплексного числа. Тогда спектральный радиус матрицы Якоби J_0 вычисляется следующим образом:

$$\rho(J_0) = \rho_{\min} + |g(k_3^*)|.$$

Доказательство. Из формулы (4.24) следует, что $a_4 = 0$. Следовательно, по крайней мере один из корней характеристического многочлена $p(\lambda)$ равен нулю. Следовательно, одно из собственных чисел матрицы J_0 является нулевым.

Из формул (4.20), (4.24) и (4.25) следует, что матрица e^{DT_0} имеет следующий вид:

$$e^{DT_0} = \begin{bmatrix} e^{-b_1 T_0} & 0 & 0 \\ e_{21} & e^{(-b_2-k_3)T_0} & 0 \\ 0 & 0 & \varkappa \end{bmatrix},$$

где

$$e_{21} = \frac{-g_1 (e^{-(b_2+k_3)T_0} - e^{-b_1 T_0})}{b_2 - b_1 + k_3}.$$

Так как $e^{(-b_3-k_6)T_0} = \varkappa$, из утверждения 4.2 (часть 1) получаем, что \varkappa также является собственным числом J_0 .

Поскольку $\text{tr}(e^{DT_0}) = e^{-b_1 T_0} + e^{(-b_2-k_3)T_0} + \varkappa$, получаем, что коэффициент a_1 в (4.15) равен

$$a_1 = -e^{(-b_2-k_3)T_0} - [e^{-b_1 T_0} + \varkappa + r_1] < 0. \quad (4.26)$$

После факторизации и сокращения корней, найденных выше, характеристический многочлен $p(\lambda)$ матрицы J_0 преобразуется в следующий многочлен второго порядка:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + c_1\lambda + c_2.$$

Из (4.26) получаем, что $c_1 = -e^{(-b_2-k_3)T_0} - 2\rho_{min} < 0$, следовательно, ось симметрии многочлена $p(\lambda)$ (вертикальная прямая $\lambda = -\frac{c_1}{2}$) лежит в правой полуплоскости плоскости $\lambda-p(\lambda)$. Таким образом, спектральный радиус матрицы Якоби J_0 определяется максимальным по модулю собственным числом многочлена $p(\lambda)$, т. е.

$$\rho(J_0) = \rho_{min} + |g(k_3)|.$$

Теорема 4.3 доказана. □

Утверждение теоремы 4.3 для случая $\rho_{min} < 0$ получается аналогичным образом.

Очевидно, что предложенный в теореме 4.3 выбор коэффициентов наблюдателя не является оптимальным в смысле наименьшего спектрального радиуса матрицы Якоби. Без ограничений (4.20) на структуру K , возможно, найдутся такие матрицы K и K_d , гарантирующие меньшее значение спектрального радиуса, чем полученное в теореме 4.3. Такое может произойти, например, в случае больших значений коэффициентов K_d , при том, что матрица K выбрана так, что ее влияние на сходимость компонент наблюдателя на непрерывных интервалах незначительно или даже имеет дестабилизирующий эффект. Такой выбор коэффициентов приведет к более сильной обратной связи в дискретной части наблюдателя, что обеспечит более быструю сходимость. Однако, данное рассуждение справедливо только для линеаризованной модели, в то время как из-за высокой чувствительности к отклонениям в начальных данных \hat{x}_0 и x_0 при такой сильной обратной связи линеаризация может терять свою справедливость. Критерий скорости сходимости, основанный на уменьшении спектрального радиуса матрицы Якоби, является локальным и не учитывает существенно нелинейную природу рассматриваемой системы. Выбор коэффициентов наблюдателя, предложенный в теореме 4.3 является некоторым компромиссом между скоростью сходимости и допустимостью линеаризации (см. раздел 4.3.1). В частности, выбор коэффициента k_1 равным нулю предполагает отсутствие коррекций на непрерывных интервалах компоненты \hat{x}_1 , претерпевающей скачки, наличие которой может внести также и дополнительные возмущения, которые могут сказаться на адекватности линейной модели.

4.3 Результаты моделирования

4.3.1 Использование пропорциональной обратной связи в дискретной части наблюдателя

Рассмотрим систему (4.5)–(4.6) со следующими параметрами [102]:

$$A = \begin{bmatrix} -b_1 & 0 & 0 \\ g_1 & -b_2 & 0 \\ 0 & g_2 & -b_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

$$h = 2.7, \quad b_1 = 0.012, \quad b_2 = 0.15, \quad b_3 = 0.1, \quad g_1 = 2.8, \quad g_2 = 1.5,$$

$$\Phi(z) = 40 + 80 \frac{(z/h)^2}{1 + (z/h)^2}, \quad F(z) = 0.05 + \frac{5}{1 + (z/h)^2}.$$

Такая система имеет устойчивый 1-цикл с неподвижной точкой

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0.0516 & 1.0479 & 17.8606 \end{bmatrix}^T,$$

и $\lambda_0 = 0.1617$, $T_0 = 118.2066$.

Графики решений системы (4.5)–(4.6) с параметрами (4.27) приведены на рис. 4.3.

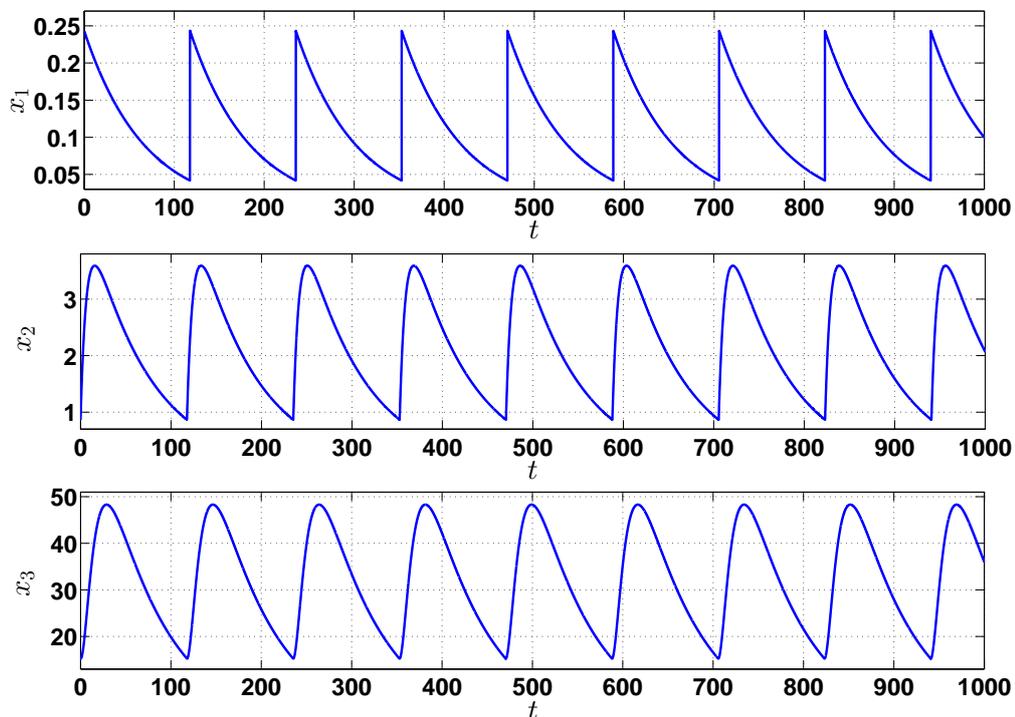


Рисунок 4.3: Графики решений системы (4.5)–(4.6) с параметрами (4.27)

В данном случае $\Phi'_0 C A x_0 + 1 = 0.9581$. Таким образом, условие (2.15) выполнено и, следовательно, для наблюдателя (2.1), (2.3) существует матрица K , гарантирующая устойчивость в

малом синхронного режима. Выберем K следующим образом:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.2 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Тогда матрица D – гурвицева. Для $K_d = [0 \ 0]$ собственные числа матрицы Якоби J_0 лежат строго внутри единичного круга:

$$\sigma(J_0) = \{0.9588, 0.2341, -0.000001, 0\},$$

следовательно, синхронный режим асимптотически устойчив в малом. Найдем для заданного выше K такие значения элементов k_{d1} и k_{d2} матрицы K_d , которые обеспечивают наименьший спектральный радиус матрицы J_0 . Из рис. 4.4 видно, что оптимальным в данном случае является $K_d = [0 \ -250]$, при котором

$$\sigma(J_0) = \{0.5965 + 0.0178i, 0.5965 - 0.0178i, -0.0000, 0\}.$$

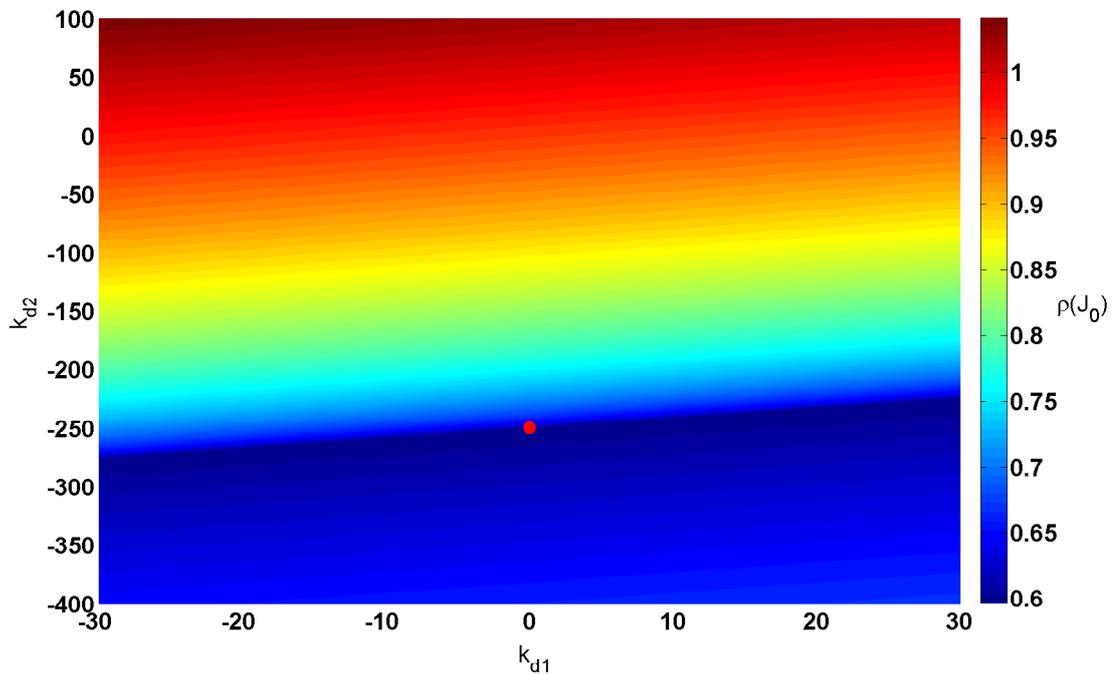


Рисунок 4.4: Зависимость спектрального радиуса матрицы Якоби J_0 от параметров k_{d1} и k_{d2}

Графики решений системы (4.5), (4.6), (4.27) и наблюдателя (2.1), (2.3) с $K_d = [0 \ -250]$ и начальными отклонениями $|T_0 - \hat{T}_0| = 60$, $|x_0 - \hat{x}_0| = [0.01 \ 0.1 \ 1]^T$ приведены на рис. 4.5.

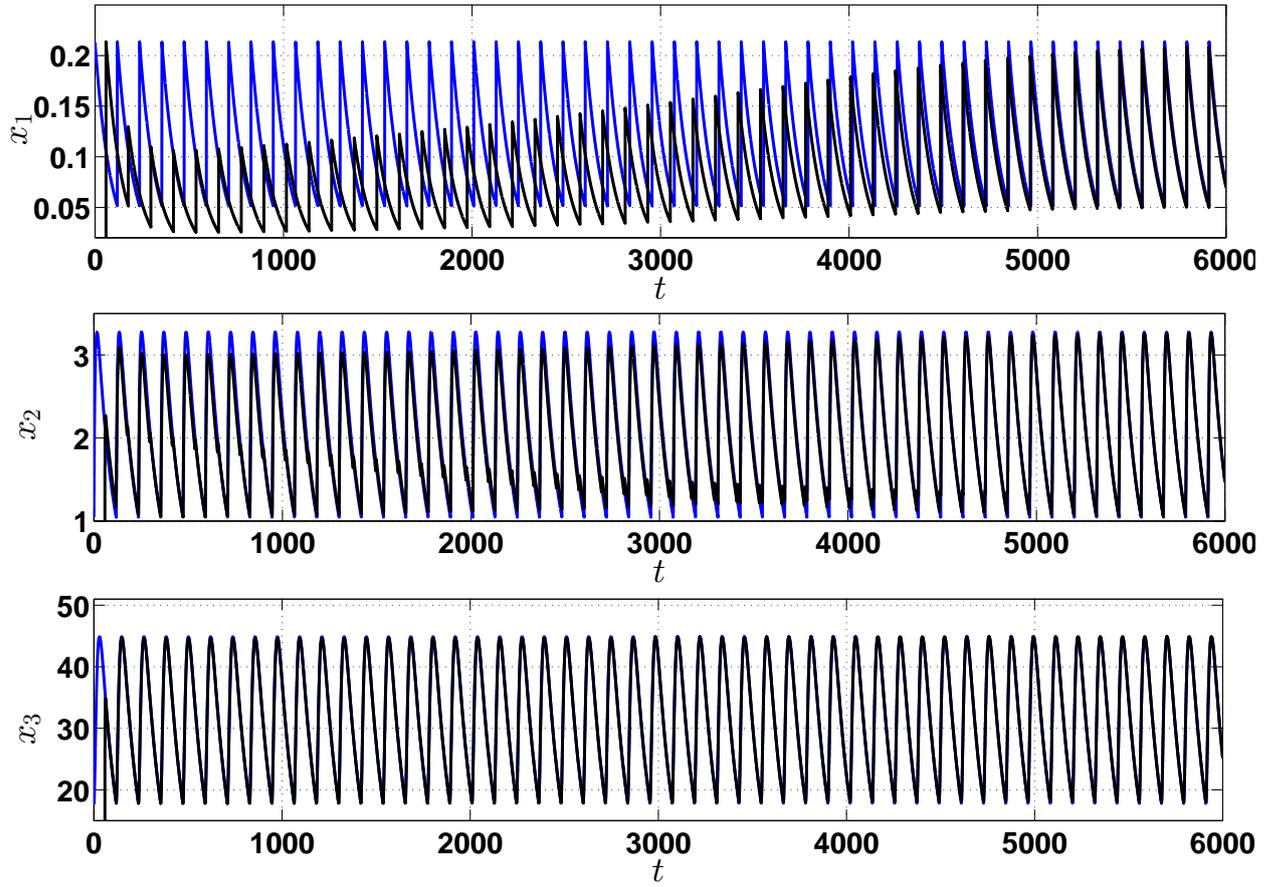


Рисунок 4.5: Графики решений системы (4.5), (4.6), (4.27) (синие линии) и наблюдателя (2.1), (2.3) (черные линии): $K_d = [0 \quad -250]$

Рис. 4.6 иллюстрирует сравнение моментов и амплитуд импульсов объекта и наблюдателя. Черные вертикальные линии высотой $-\hat{\lambda}_n$, расположенные в точках \hat{t}_n , соответствуют импульсам наблюдателя. Импульсы объекта изображены синими линиями, имеют амплитуды λ_n и расположены в t_n . Из рисунка видно, что моменты импульсации объекта и наблюдателя синхронизируются.

Рис. 4.7 иллюстрирует сравнение отклонений $|t_n - \hat{t}_n|$ для $K_d = [0 \quad 0]$ (без дополнительной обратной связи в дискретной части наблюдателя) и найденного выше оптимального значения $K_d = [0 \quad -250]$. Также в качестве критерия скорости сходимости наблюдателя к синхронному режиму может быть выбран наименьший момент времени \hat{t}_{n^*} , при котором времена импульсации \hat{t}_n входят в ε_f -окрестность t_n и более не покидают ее, т. е.

$$\mathcal{P}(\varepsilon_f) = \hat{t}_{n^*}, \quad n^* = \min\{k : |\hat{t}_N - t_N| < \varepsilon_f \forall N > k\}. \quad (4.29)$$

На рис. 4.8 с помощью данного критерия показано, что в случае с дополнительной обратной связи в дискретной части наблюдателя скорость сходимости значительно возрастает.

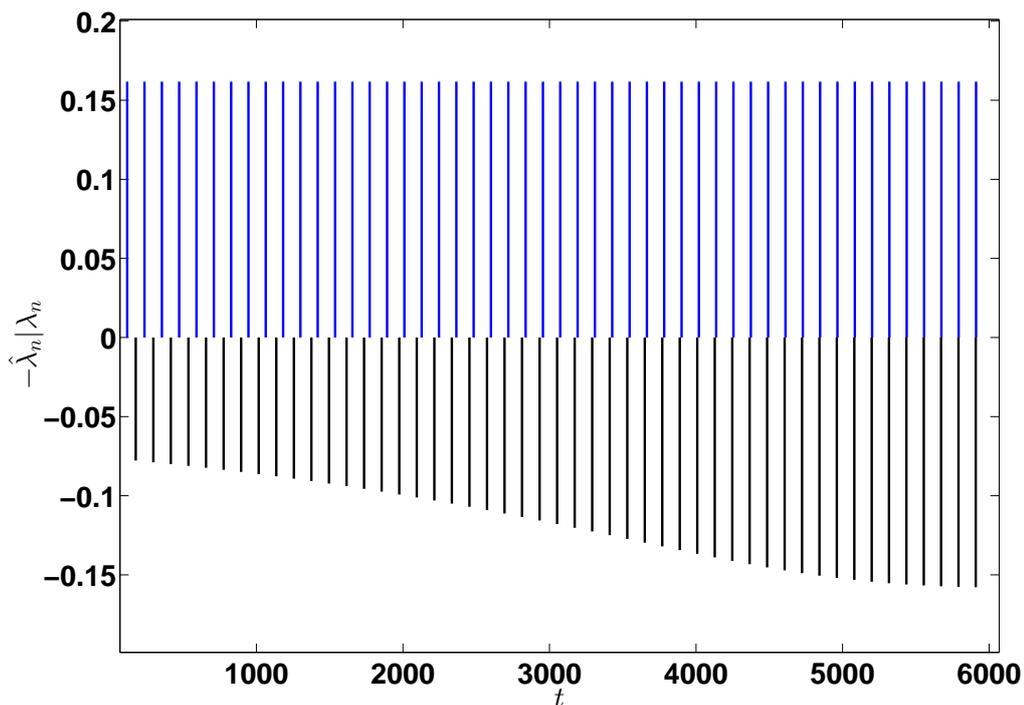


Рисунок 4.6: Сравнение моментов и величин импульсации системы и наблюдателя: черные линии (в нижней части) обозначают моменты импульсации наблюдателя \hat{t}_n с амплитудами $-\hat{\lambda}_n$. Синие линии (в верхней части) соответствуют моментам импульсации объекта t_n с амплитудами λ_n .

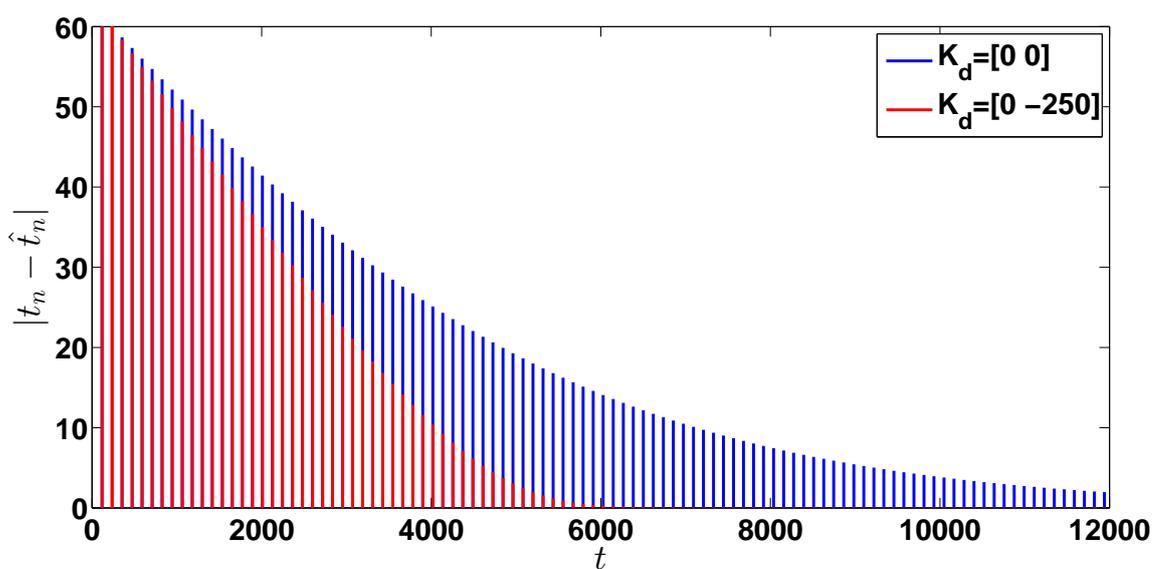


Рисунок 4.7: Отклонения $|t_n - \hat{t}_n|$ для $K_d = [0 \ 0]$ и $K_d = [0 \ -250]$

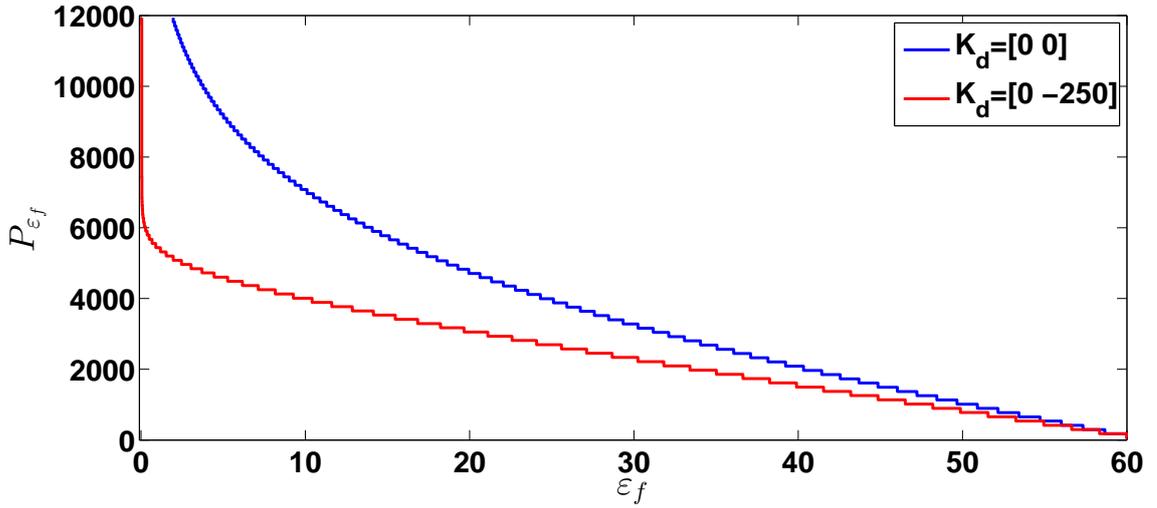


Рисунок 4.8: Зависимость $\mathcal{P}(\varepsilon_f)$ от параметра ε_f для $K_d = [0 \ 0]$ и $K_d = [0 \ -250]$

Влияние дополнительной обратной связи на циклы различных порядков

В данном подразделе будет продемонстрировано влияние дополнительной обратной связи K_d на скорость сходимости в случае m -циклов при $m > 1$ [104]. Рассмотрим систему (4.5), (4.6) с параметрами, совпадающими с (4.27) за исключением матрицы A , которая задана следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} -\beta_i & 0 & 0 \\ 1.5 & -0.15 & 0 \\ 0 & 2.8 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 4.$$

Рассмотрим три различных случая, а именно $\beta_1 = 0.005$, $\beta_2 = 0.06$, $\beta_4 = 0.045$, которые соответствуют устойчивым 1-циклу, 2-циклу и 4-циклу, соответственно.

Для K , заданного в виде (4.28), и $K_d = [0 \ 0]$ спектральный радиус матрицы Якоби $J_{m-1} \cdots J_0$, где m — номер соответствующего цикла, в каждом из случаев соответственно равен:

$$\rho_1 = 0.994, \quad \rho_2 = 0.803, \quad \rho_4 = 0.060.$$

Поиск оптимальных K_d для каждого случая дает значения коэффициентов усиления $K_{d1} = [-547 \ -892]$, $K_{d2} = [-190 \ -215]$, $K_{d4} = [-0.6 \ -0.1]$, которые обеспечивают следующие значения спектральных радиусов:

$$\rho_1 = 0.770, \quad \rho_2 = 0.391, \quad \rho_4 = 0.0008.$$

На рис. 4.9–4.11 приведены графики зависимости критерия $\mathcal{P}(\varepsilon_f)$, определенного в (4.29), от параметра ε_f . Из данных графиков можно сделать вывод, что дополнительная обратная связь K_d

оказывает наибольшее влияние на циклы более низкого порядка (при малых m). В отличие от циклов высокого порядка, где скорость сходимости является достаточно хорошей даже в присутствии только одной обратной связи K , обратная связь K_d значительно увеличивает скорость сходимости для циклов с низким порядком (1-и 2-циклы).

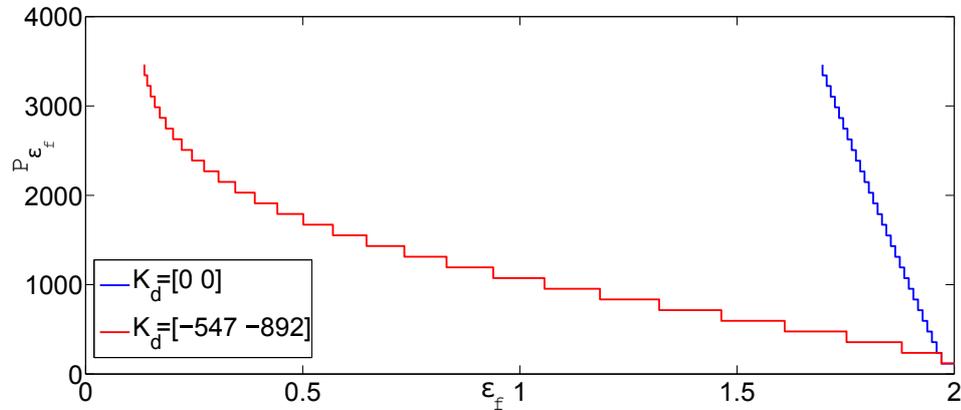


Рисунок 4.9: Зависимость $\mathcal{P}(\varepsilon_f)$ от параметра ε_f для $K_d = [0 \ 0]$ и $K_d = [-547 \ -892]$ в случае 1-цикла

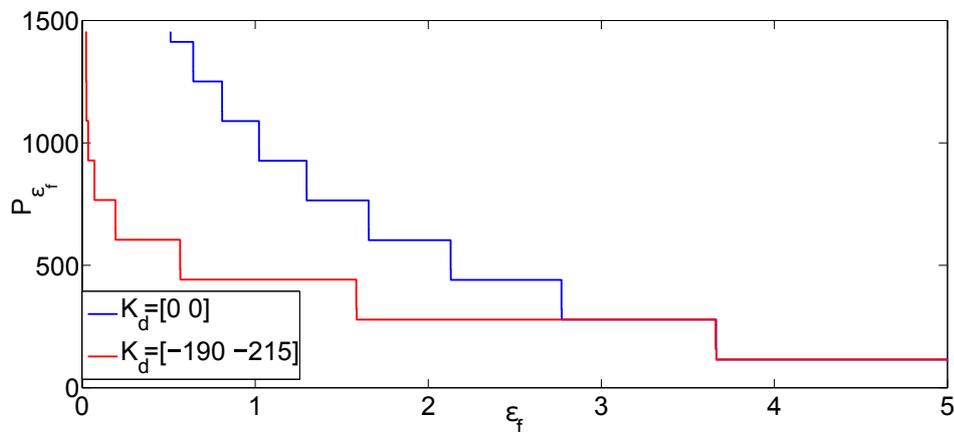


Рисунок 4.10: Зависимость $\mathcal{P}(\varepsilon_f)$ от параметра ε_f для $K_d = [0 \ 0]$ и $K_d = [-190 \ -215]$ в случае 2-цикла

Можно предположить, что такой эффект связан с тем, что в случае 1- и 2-циклов измеряемый выходной сигнал системы не дает достаточно информации о векторе состояния в течение нескольких периодов объекта. Поэтому для сближения решения наблюдателя с синхронным режимом требуется значительное количество периодов.

Также примечательно, что для циклов высокого порядка с помощью дополнительной обратной связи можно значительно уменьшить спектральный радиус матрицы Якоби. Однако, как

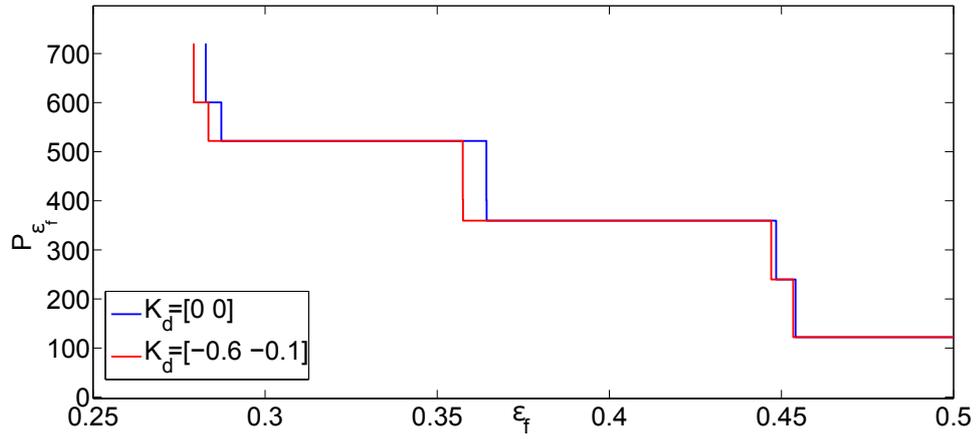


Рисунок 4.11: Зависимость $\mathcal{P}(\varepsilon_f)$ от параметра ε_f для $K_d = [0 \ 0]$ и $K_d = [-0.6 \ -0.1]$ в случае 4-цикла

было отмечено выше, это не дает какого-либо заметного улучшения сходимости наблюдателя (см. рис. 4.11).

Влияние матрицы K на сходимость наблюдателя

Рассмотрим 1-цикл (с $\beta_1 = 0.005$) из предыдущего примера и продемонстрируем влияние обратной связи K в непрерывной части наблюдателя на его сходимость как при наличии, так и при отсутствии дополнительной обратной связи K_d в дискретной части наблюдателя.

Рассмотрим матрицу K структуры (4.28):

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

с некоторыми скалярными коэффициентами k_1 и k_2 . Рис. 4.12 показывает зависимость спектрального радиуса матрицы Якоби от k_1 и k_2 при $K_d = [0 \ 0]$. Из рисунка видно, что спектральный радиус уменьшается с одновременным ростом k_1 и k_2 , однако, выбор данных коэффициентов достаточно большими не имеет особого смысла из-за того, что величина $\rho(J_0)$ входит в режим насыщения и далее убывает незначительно.

Далее рассмотрим $K_d = [-500 \ -300]$. Рис. 4.13 и 4.14 показывают, что для больших k_1 и k_2 значение спектрального радиуса матрицы J_0 насыщается, причем стремится к той же величине, что и в случае при $K_d = [0 \ 0]$. Таким образом в случае 1-цикла влияние K_d на сходимость нивелируется с ростом коэффициентов матрицы K (что также следует из теоремы 2.5 и формулы (2.15)).

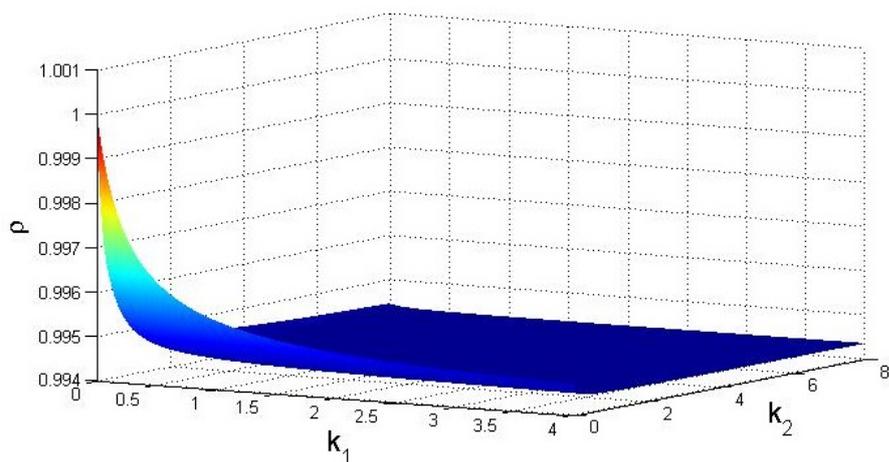


Рисунок 4.12: Зависимость спектрального радиуса матрицы Якоби J_0 от коэффициентов матрицы K при $K_d = [0 \ 0]$.

Однако, из рис. 4.13 и 4.14 видно, что в отличие от случая $K_d = [0 \ 0]$, при наличии дополнительной обратной связи K_d существует некоторая область коэффициентов k_1 и k_2 (темно-синий цвет на рис. 4.14), где значение спектрального радиуса значительно уменьшается. При этом экспериментальным путем установлено, что целесообразно выбирать коэффициенты k_1 и k_2 близкими друг к другу.

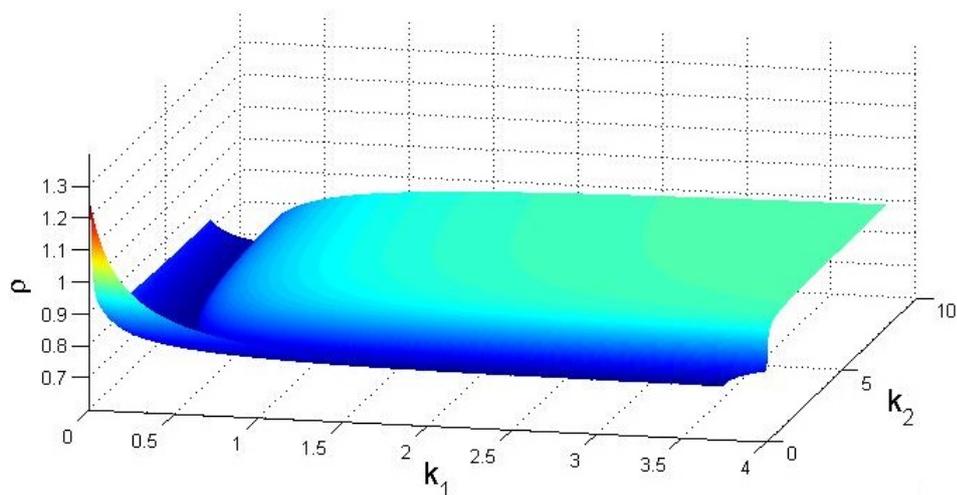


Рисунок 4.13: Зависимость спектрального радиуса матрицы Якоби J_0 от коэффициентов матрицы K при $K_d = [-500 \ -300]$.

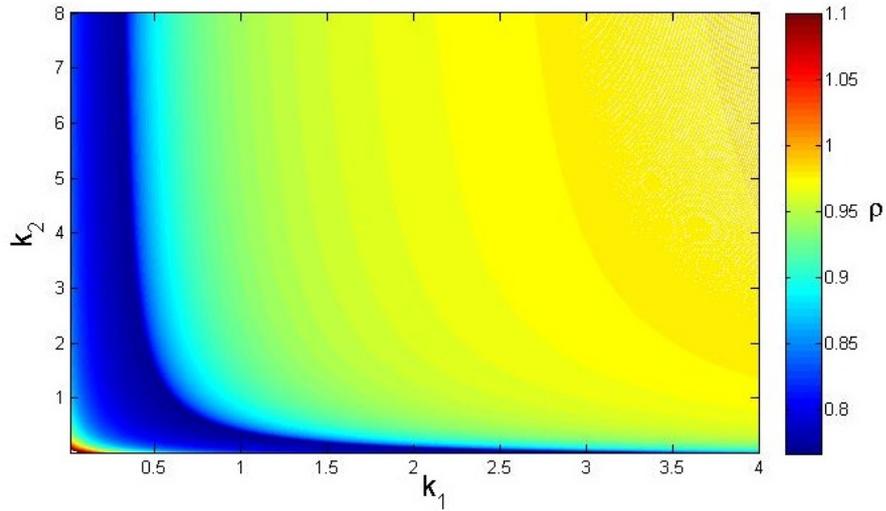


Рисунок 4.14: Контурный график зависимости спектрального радиуса матрицы Якоби J_0 от коэффициентов матрицы K при $K_d = [-500 \quad -300]$.

Таким образом, установлено, что для наилучшей сходимости наблюдателя к синхронному режиму обратная связь K в непрерывной части наблюдателя и обратная связь K_d в его дискретной (импульсной) части должны выбираться из соображений сохранения баланса между скоростью сходимости наблюдателя на непрерывных интервалах времени, величиной коррекции в дискретные моменты времени, а также робастностью по отношению к отклонениям по начальным данным.

Синтез коэффициентов усиления обратной связи

Как было отмечено выше, дополнительная обратная связь наиболее эффективна для циклов низкого порядка. Рассмотрим систему (4.5)–(4.6) с параметрами (4.27) из раздела 4.3.1, решение которой является устойчивым 1-циклом. В разделе 4.3.1 коэффициенты K и K_d , при которых спектральный радиус матрицы Якоби был наименьшим и равнялся $\rho(J_0) = 0.597$, имели следующий вид:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.2 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix}, \quad K_d = [0 \quad -250]. \quad (4.30)$$

Рассмотрим теперь наблюдатель, описанный в теореме 4.3. Поскольку из утверждения 4.2 следует, что спектр матрицы J_0 не зависит от величины k_{d2} , где $K_d = [k_{d1} \quad k_{d2}]$, положим $k_{d2} = 0$. Тогда из условия (4.24) получаем, что $k_{d1} = -10.8137$.

Для данной системы величина $\rho_{\min} = 0.6001$. Выберем \varkappa в теореме 4.3 равным 0.0001. Тогда $k_6 = -0.0221$. В результате спектральный радиус матрицы J_0 равен

$$\rho(J_0) = \rho_{\min} + |g(k_3)|.$$

Таким образом, остается выбрать коэффициент k_3 , минимизирующий величину $|g(\cdot)|$. Из рис. 4.15 видно, что таким коэффициентом является $k_3^* = -0.0872$, который обеспечивает $g(k_3^*) = 0.007$.

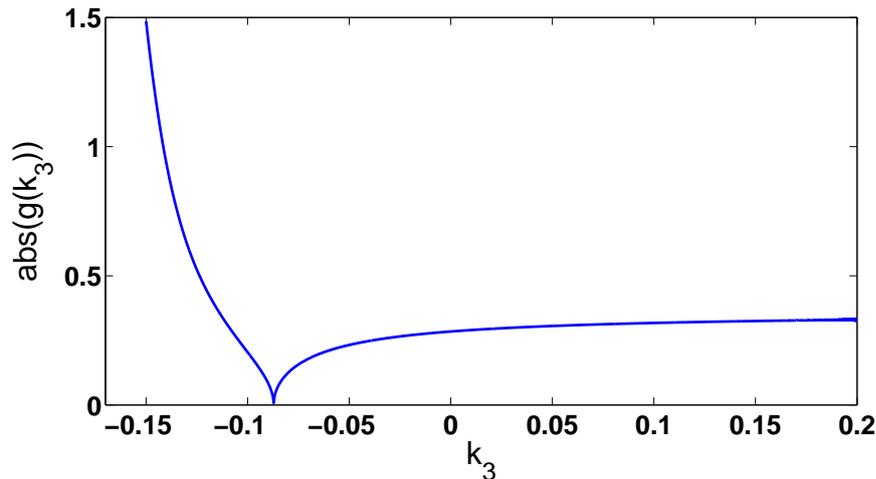


Рисунок 4.15: Зависимость абсолютной величины функции $g(\cdot)$ от аргумента k_3 .

В результате матрицы K и K_d выглядят следующим образом:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.0872 & 0 \\ 1.5 & -0.0221 \end{bmatrix}, \quad K_d = [-10.8137 \ 0], \quad (4.31)$$

при этом $\rho(J_0) = 0.6071$.

Графики решений уравнений объекта (4.5), (4.6), (4.27) и наблюдателя (2.1), (2.3), (4.31) и начальными отклонениями $|T_0 - \hat{T}_0| = 12.5$, $|x_0 - \hat{x}_0| = [0.002 \ 0 \ 2]^T$ приведены на рис. 4.16.

Из Рис. 4.17 видно, что хотя в случае наблюдателя (4.31) спектральный радиус матрицы J_0 оказался немного бОльшим, чем с наблюдателем (4.30), сходимость наблюдателя (4.31) оказывается несколько быстрее. Это еще раз подтверждает, что критерий, основанный на минимизации спектрального радиуса матрицы Якоби, является локальным, и результаты могут незначительно варьироваться в зависимости от отклонений начальных данных.

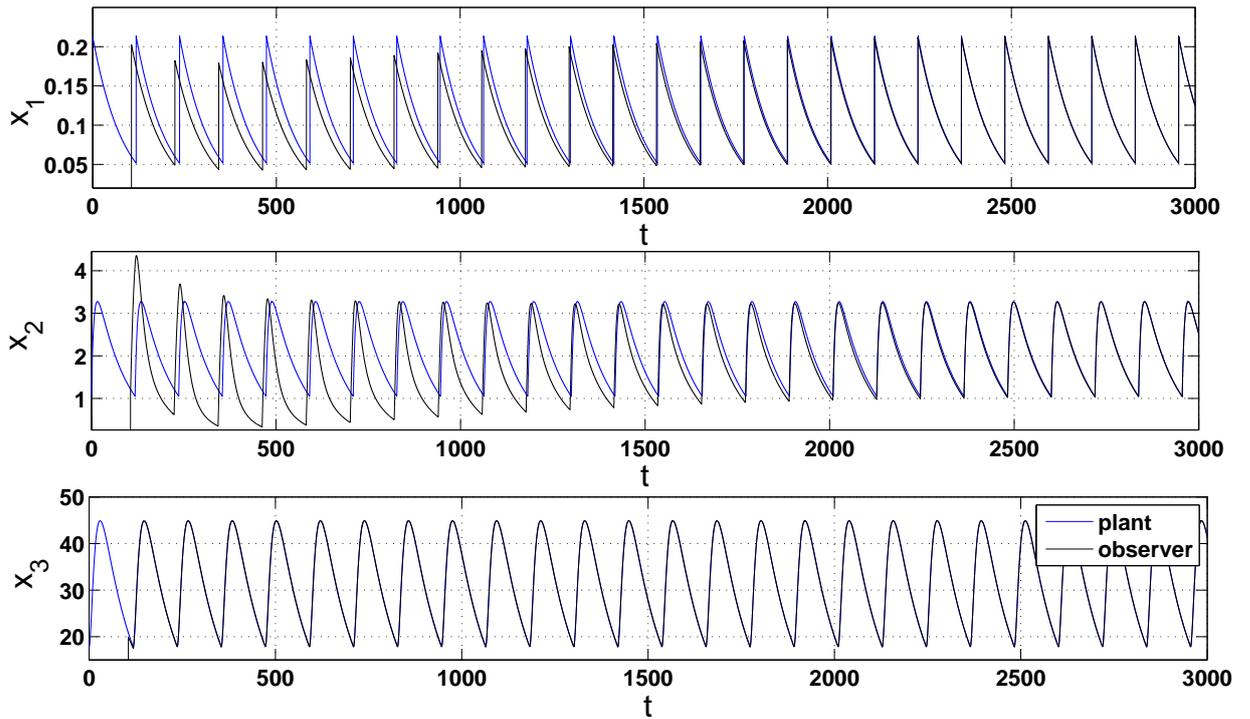


Рисунок 4.16: Графики решений уравнений объекта (4.5), (4.6), (4.27) (синие линии) и наблюдателя (2.1), (2.3), (4.31) (черные линии)

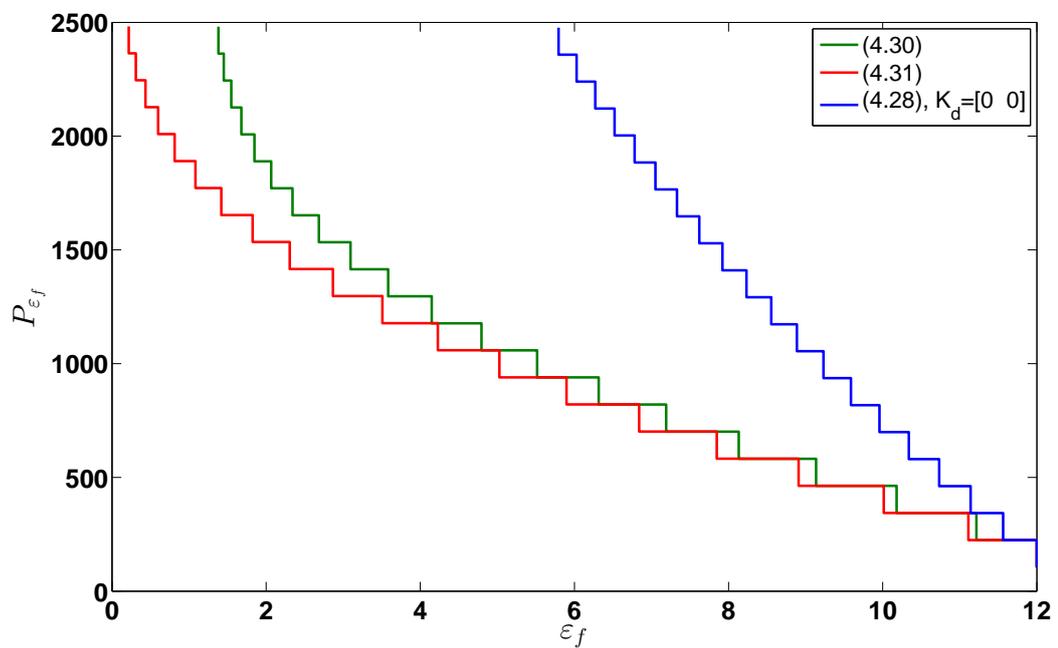


Рисунок 4.17: Зависимость $\mathcal{P}(\varepsilon_f)$ от параметра ε_f : синий цвет — наблюдатель (4.28) с $K_d = [0 \ 0]$, зеленый цвет — наблюдатель (4.30), красный цвет — наблюдатель (4.31)

4.3.2 Использование комбинированной частотной модуляции в дискретной части наблюдателя

Рассмотрим систему (4.5)–(4.6) с параметрами (4.27) из раздела 4.3.1, решение которой является устойчивым 1-циклом.

Рассмотрим наблюдатель (2.1) с частотной модуляцией (2.18), где функция Ψ выбрана следующим образом:

$$\Psi(\tau) = \frac{80}{\pi} \arctan(\tau).$$

Она является непрерывной, нечетной, строго возрастающей и удовлетворяет (2.19). Пусть

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

и параметры в (2.18) $\nu = \Phi_1 = 40$, $\varkappa = 5$.

Поиск коэффициентов K_d , минимизирующих спектральный радиус J_0 дает $K_d = [6.8 \ 2]$ (см. рис. 4.18).

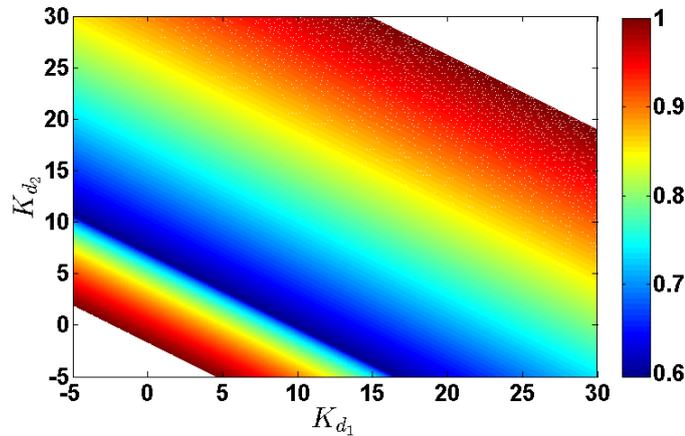


Рисунок 4.18: Зависимость спектрального радиуса матрицы J_0 от коэффициентов K_d .

Графики решений уравнений объекта (4.5), (4.6), (4.27) и наблюдателя (2.1), (2.18) приведены на рис. 4.19.

С помощью критерия $P(\varepsilon_f)$ оценим сходимость наблюдателя (2.1) с различными законами частотной модуляции: модуляцией (2.2) без обратной связи, (2.3) с пропорциональной обратной связью, (2.17) с интегральной обратной связью и комбинированной модуляцией (2.18) с интегральной обратной связью. В случаях (2.3) и (2.17) коэффициенты матрицы K_d выбраны из условий минимизации спектрального радиуса матрицы J_0 . Результаты представлены на рис. 4.20. Из рисунка видно, что введение дополнительной обратной связи значительно увеличивает ско-

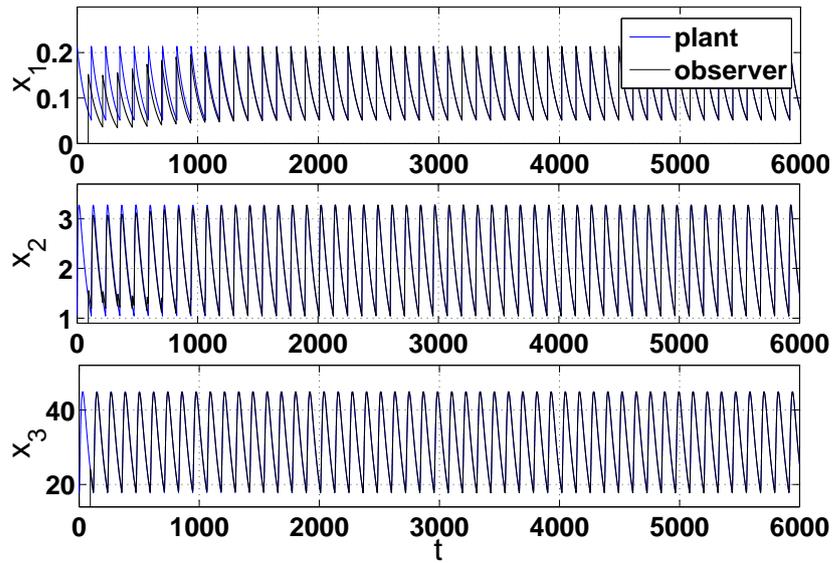


Рисунок 4.19: Графики решений уравнений объекта (4.5), (4.6), (4.27) (синие линии) и наблюдателя (2.1), (2.18) (черные линии), $K_d = [6.8 \ 2]$.

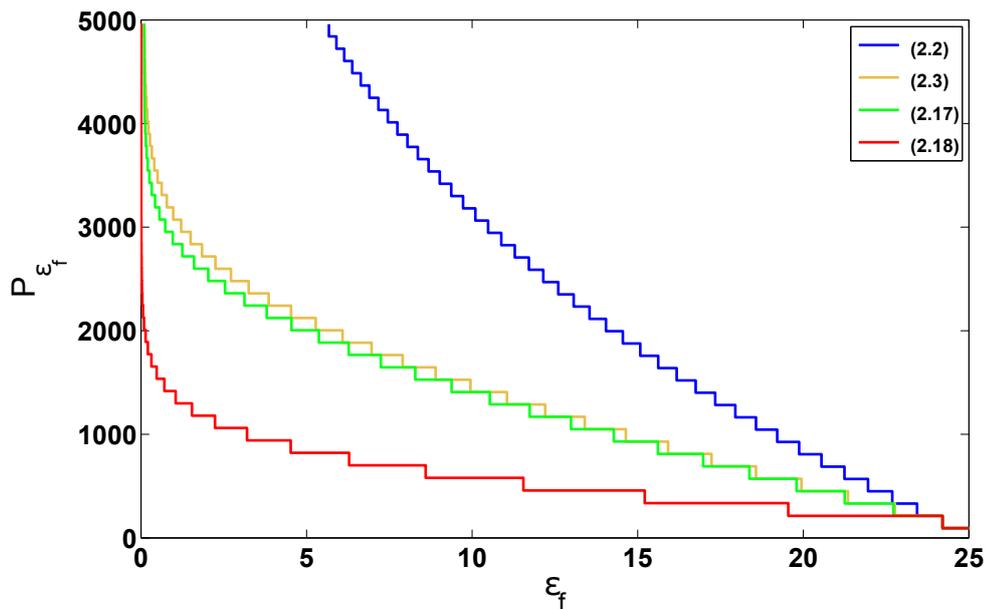


Рисунок 4.20: Зависимость $\mathcal{P}(\varepsilon_f)$ от параметра ε_f : синий цвет — модуляция (2.2), желтый цвет — (2.3), зеленый цвет — (2.17), красный цвет — (2.18)

рость сходимости. Однако, использование интегральной обратной связи не дает существенных преимуществ над пропорциональной из-за насыщения модуляционной функции $\Phi(\cdot)$. Использование комбинированной модуляции (2.18) позволяет избежать этой проблемы, благодаря чему скорость сходимости оказывается наилучшей для рассматриваемого случая.

4.3.3 Наблюдение при наличии запаздывания

В процессе регуляции уровня тестостерона в мужском организме источником запаздывания может являться транспортное запаздывание при переносе гормонов в потоке крови, а также запаздывание, возникающее из-за необходимости синтеза гормона до начала его секреции.

Уровни гормонов связаны друг с другом внутренними обратными связями, и такая модель может быть описана системой (1.12) третьего порядка со следующими параметрами:

$$A_0 = \begin{bmatrix} -b_1 & 0 & 0 \\ g_1 & -b_2 & 0 \\ 0 & 0 & -b_3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0 \ 1]. \quad (4.32)$$

Несложно проверить, что данная система является спектрально FD-наблюдаемой.

Рассмотрим систему со следующими значениями параметров: $h = 2.7$, $b_1 = 0.02$, $b_2 = 0.15$, $b_3 = 0.1$, $g_1 = 0.6$, $g_2 = 1.5$, и

$$\Phi(z) = 40 + 80 \frac{(z/h)^2}{1 + (z/h)^2}, \quad F(z) = 0.05 + \frac{5}{1 + (z/h)^2}.$$

Так как $\inf_z \Phi(z) = 40$, то $0 \leq \tau < 40$. Как следует из рис. 4.21, система имеет устойчивый 4-цикл при $0 \leq \tau \leq 24.7$ и устойчивый 2-цикл при $24.8 \leq \tau < 40$.

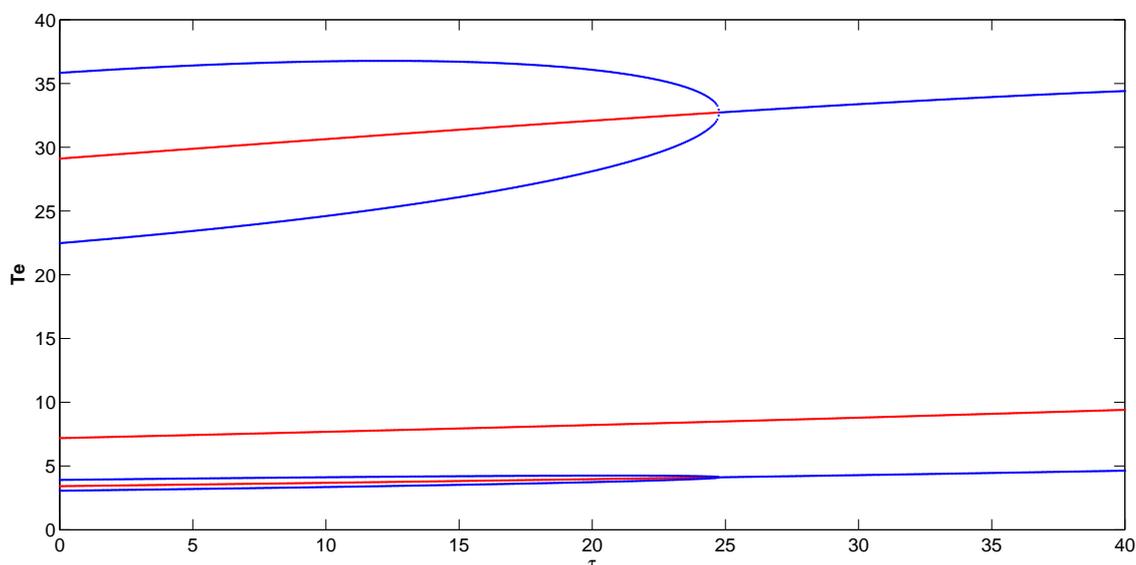


Рисунок 4.21: Бифуркационная диаграмма системы (1.12) по отношению к величине запаздывания τ . Значения x_3 (третьей компоненты вектора состояния системы, отвечающие уровню тестостерона) в моменты времени t_n изображены в виде функции от τ . Синие точки — устойчивые решения, красные — неустойчивые.

Наблюдатель без запаздывания с кусочно-постоянной матрицей коэффициентов усиления

Из раздела 3.2 следует, что система (1.12), (4.32) может быть представлена в виде системы без запаздывания (3.2) с матрицами

$$A = A_0 + A_1 e^{-A_0 \tau}, \quad B = e^{-A \tau} e^{A_0 \tau} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

которая совпадает с системой (1.12), (4.32) на интервалах времени, содержащих моменты импульсации.

Заметим, что соответствующие матричные экспоненты выглядят следующим образом:

$$e^{A_0 t} = \begin{bmatrix} e^{-b_1 t} & 0 & 0 \\ E_{21}(t) & e^{-b_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-b_3 t} \end{bmatrix}, \quad e^{A t} = e^{A_0 t} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ E_{31}(t) & E_{32}(t) & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$E_{21}(t) = -\frac{g_1}{b_1 - b_2} (e^{-b_1 t} - e^{-b_2 t}), \quad E_{32}(t) = -\frac{g_2 e^{b_2 t}}{b_2 - b_3} (e^{-b_2 t} - e^{-b_3 t}),$$

$$E_{31}(t) = \frac{g_1 g_2}{b_1 - b_2} \left[\frac{e^{b_1 t}}{b_1 - b_3} (e^{-b_1 t} - e^{-b_3 t}) - \frac{e^{b_2 t}}{b_2 - b_3} (e^{-b_2 t} - e^{-b_3 t}) \right].$$

Введем обозначение:

$$\alpha_i = \prod_{j=1, j \neq i}^3 \frac{1}{b_i - b_j}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Тогда

$$B = e^{-A \tau} e^{A_0 \tau} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ B_0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = g_1 g_2 \sum_{i=0}^3 \alpha_i e^{b_i \tau}.$$

Таким образом, для наблюдения за системой (3.2) может быть рассмотрен наблюдатель без запаздывания (3.3). Однако, из-за требования выполнения условия $LB = 0$ в данном случае в качестве измерений может выступать только компонента x_2 , т. е.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу обратной связи K в следующем виде:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & 0 \end{bmatrix}^T$$

где $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$. Тогда

$$D = \begin{bmatrix} -b_1 & -k_1 & 0 \\ g_1 & -b_2 - k_2 & 0 \\ g_2 E_{21}(-\tau) & g_2 e^{b_2 \tau} & -b_3 \end{bmatrix},$$

и характеристический многочлен матрицы D не зависит от τ и равен

$$p_D(s) = (s + b_3)(s^2 + (b_1 + b_2 + k_2)s + k_1g_1 + b_1(b_2 + k_2)).$$

Поскольку величины b_1, b_2, b_3, g_1 положительны, а параметры k_1, k_2 неотрицательны, матрица D является гурвицевой.

Пусть $\tau = 5$. Тогда система имеет устойчивый 4-цикл с неподвижными точками

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0.0334 & 0.1543 & 3.1980 \end{bmatrix}^T,$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0.3821 & 1.7635 & 36.4028 \end{bmatrix}^T,$$

$$x_3 = \begin{bmatrix} 0.0420 & 0.1941 & 4.0212 \end{bmatrix}^T,$$

$$x_4 = \begin{bmatrix} 0.2455 & 0.1329 & 23.4306 \end{bmatrix}^T.$$

Поиск оптимальных значений k_1 и k_2 , минимизирующих спектральный радиус матрицы $J_3J_2J_1J_0$ дает

$$k_1 = 0.47, \quad k_2 = 6.15, \quad \rho(J_3J_2J_1J_0) = 0.00058.$$

Из рис. 4.22 видно, что решения уравнений наблюдателя сходятся к решению уравнения объекта, причем сходимость достаточно быстрая.

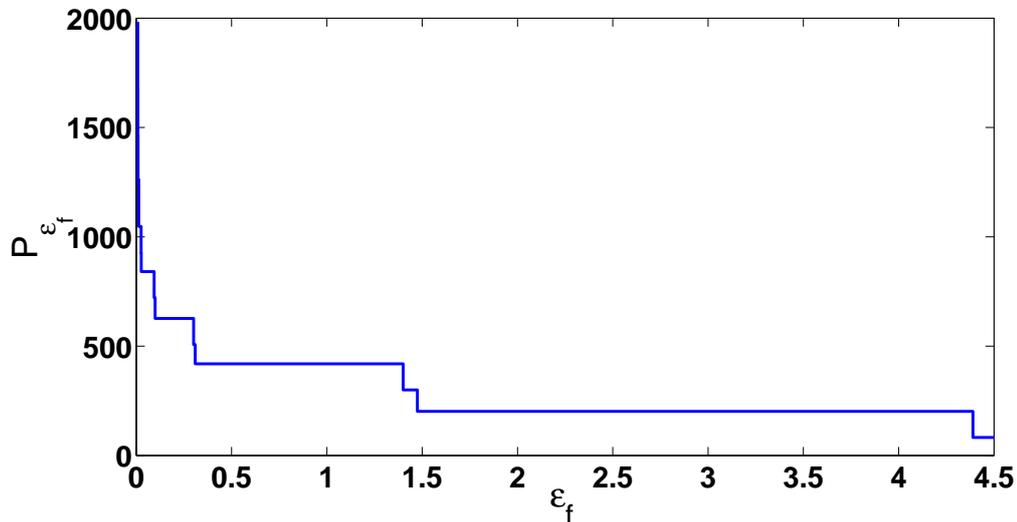


Рисунок 4.22: Зависимость $\mathcal{P}(\varepsilon_f)$ от параметра ε_f для $\tau = 5$ (4-цикл)

Рассмотрим теперь случай $\tau = 30$, когда система имеет устойчивый 2-цикл с неподвижными точками

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0.0272 & 0.1255 & 4.2853 \end{bmatrix}^T,$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0.2141 & 0.9883 & 33.3766 \end{bmatrix}^T.$$

Поиск оптимальных k_1, k_2 дает

$$k_1 = 0.93, k_2 = 6.85, \rho(J_1 J_0) = 0.149.$$

Рис. 4.23 подтверждает работоспособность данного наблюдателя.

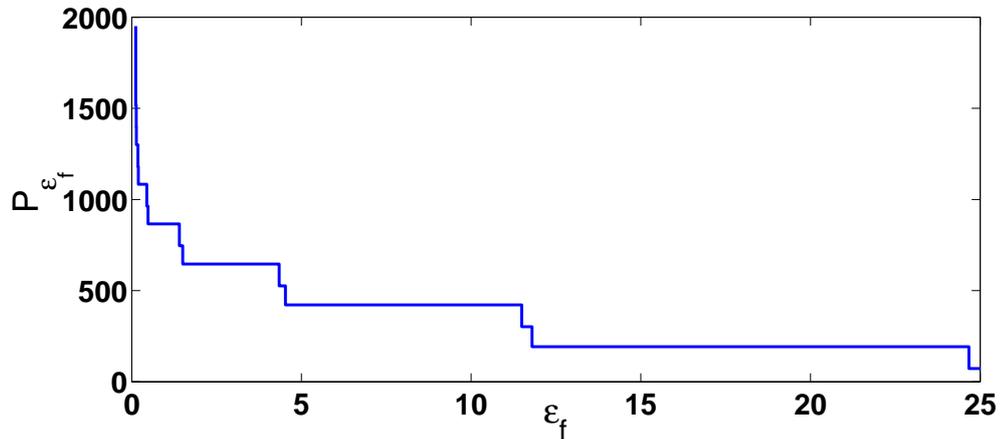


Рисунок 4.23: Зависимость $\mathcal{P}(\varepsilon_f)$ от параметра ε_f для $\tau = 30$ (2-цикл)

Однако, несмотря на хорошую сходимость в дискретные моменты времени, данный наблюдатель не может обеспечить приближение решений исходной системы (1.12), (4.32) на интервалах непрерывности целиком, поскольку он построен по аппроксимирующей модели (3.2).

Наблюдатель, структура которого совпадает со структурой исходной системы с запаздыванием

Рассмотрим наблюдатель (3.13) с матрицей

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix},$$

при которой матрица D_K устойчива по Гурвицу, условие (1.13) выполнено, и синхронный режим асимптотически устойчив в малом при всех рассматриваемых τ , что нетрудно видеть из рис. 4.24.

Выберем $\tau = 20$, при котором система (1.12), (4.32) имеет устойчивый 4-цикл с неподвижными точками

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0.0290 & 0.1337 & 3.7387 \end{bmatrix}^T,$$

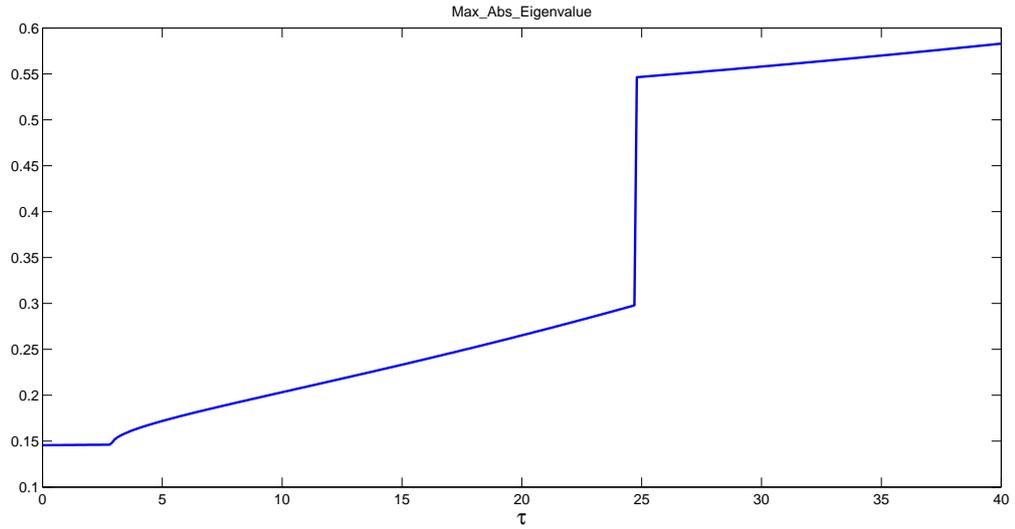


Рисунок 4.24: Зависимость спектрального радиуса матрицы $J_3 J_2 J_1 J_0$ от величины запаздывания τ . Заметим, что для $24.8 \leq \tau < 40$, 4-цикл переходит в 2-цикл ($m = 2$), и при этом

$$J_2 = J_0, J_3 = J_1$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0.2815 & 1.2994 & 36.0704 \end{bmatrix}^T,$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 0.0329 & 0.1518 & 4.2459 \end{bmatrix}^T,$$

$$x_3 = \begin{bmatrix} 0.2190 & 1.0106 & 28.1169 \end{bmatrix}^T.$$

Рис. 4.25 иллюстрирует сравнение моментов и амплитуд импульсов объекта и наблюдателя. На рис. 4.26 изображены графики переходных процессов объекта и наблюдателя в непрерывном времени.

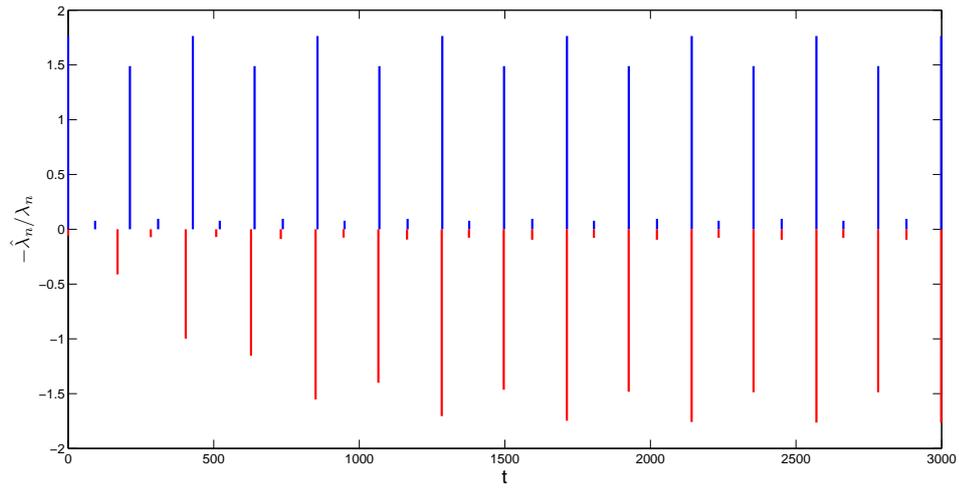


Рисунок 4.25: Сравнение моментов и амплитуд импульсов объекта (1.12), (4.32) и наблюдателя (3.13) для $\tau = 20$ (4-цикл)

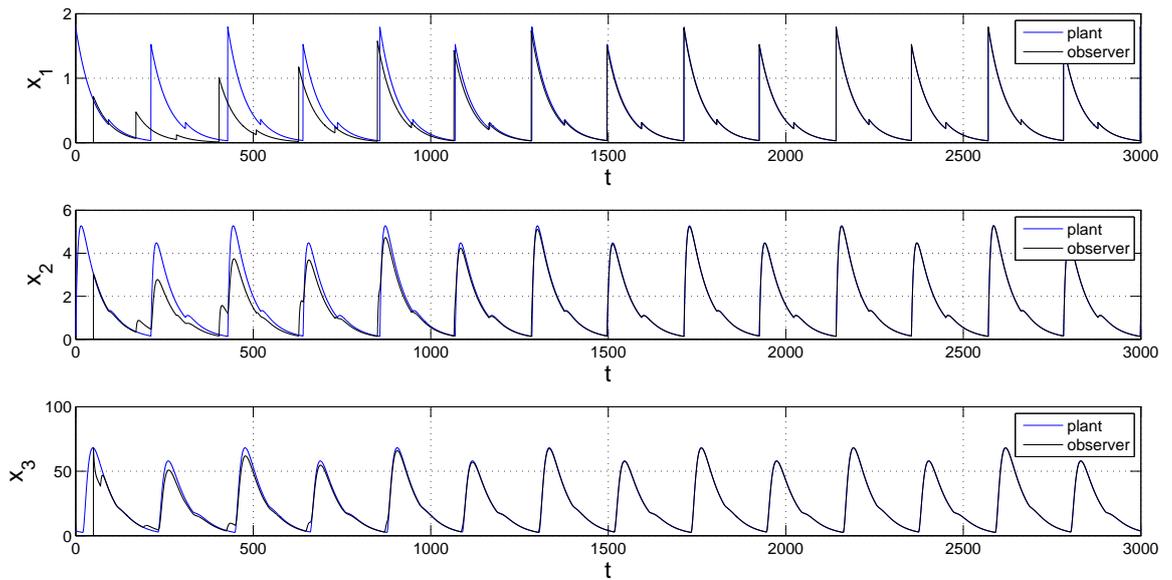


Рисунок 4.26: Графики решений уравнений объекта (1.12), (4.32) (синие линии) и наблюдателя (3.13) (черные линии) для $\tau = 20$ (4-цикл)

Для значения $\tau = 30$, при котором система (1.12), (4.32) имеет устойчивый 2-цикл, рис. 4.27, 4.28 демонстрируют работоспособность предложенного наблюдателя.

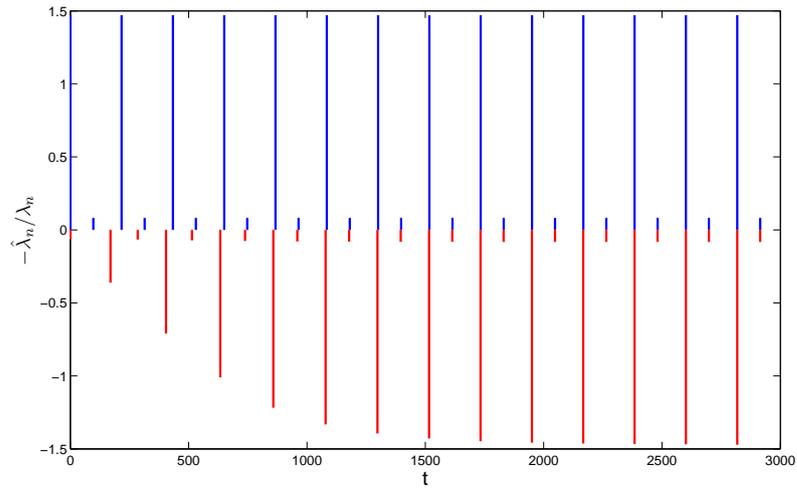


Рисунок 4.27: Сравнение моментов и амплитуд импульсов объекта (1.12), (4.32) и наблюдателя (3.13) для $\tau = 30$ (2-цикл)

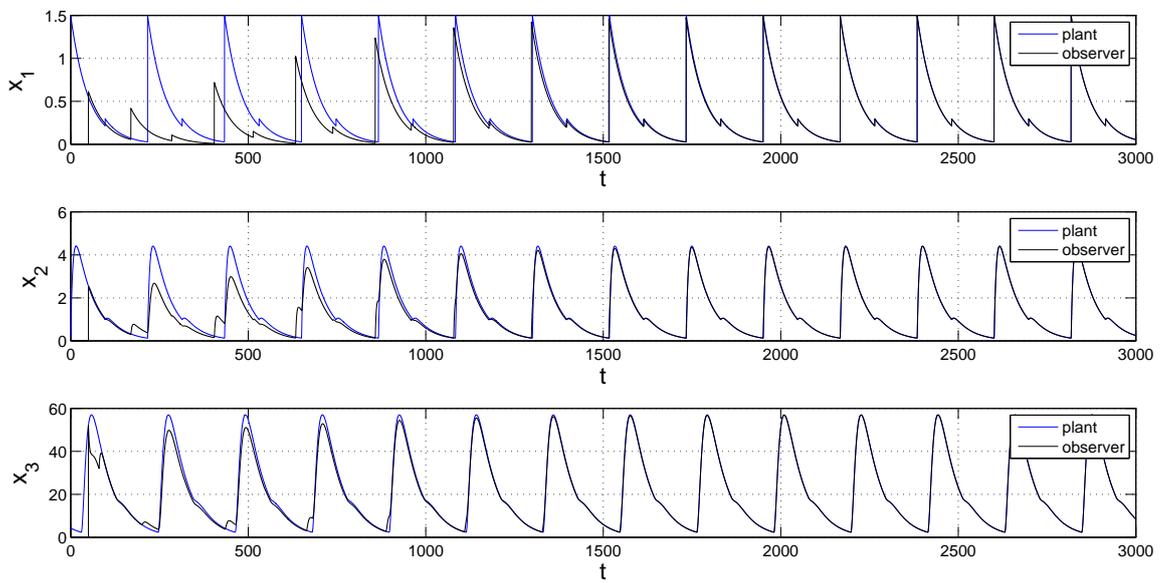


Рисунок 4.28: Графики решений уравнений объекта (1.12), (4.32) (синие линии) и наблюдателя (3.13) (черные линии) для $\tau = 30$ (2-цикл)

Заключение

Перечислим основные научные результаты работы.

1. В случае наблюдателя с *пропорциональной* обратной связью в дискретной части построено точечное преобразование (оператор сдвига по траектории системы), описывающее эволюцию состояний наблюдателя от импульса к импульсу; с его помощью получены условия асимптотической устойчивости в малом режиме наблюдения периодического решения импульсной системы (теоремы 2.1–2.4) [102, 104].
2. В случае наблюдателя с *интегральной* обратной связью и *комбинированной частотной модуляцией* в дискретной части наблюдателя построено точечное преобразование, описывающее эволюцию состояний наблюдателя от импульса к импульсу; с его помощью получены условия асимптотической устойчивости в малом режиме наблюдения периодического решения импульсной системы (теоремы 2.6–2.10) [107].
3. Для импульсной системы с *запаздыванием* и наблюдателя *без запаздывания и с разрывной обратной связью* построено точечное преобразование, описывающее эволюцию состояний наблюдателя от импульса к импульсу; с его помощью получены условия асимптотической устойчивости в малом режиме наблюдения периодического решения (теоремы 3.1–3.4) [105, 106].
4. Для импульсной системы с *запаздыванием* и наблюдателя с *запаздыванием* построено точечное преобразование, описывающее эволюцию состояний наблюдателя от импульса к импульсу; с его помощью получены условия асимптотической устойчивости в малом режиме наблюдения периодического решения (теоремы 3.5–3.9) [12, 103].
5. Полученные результаты применены к исследованию математической модели гормональной регуляции тестостерона в мужском организме (глава 4) [12, 102–108].

Список рисунков

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Графики компонент, претерпевающих скачки, двух 1-циклов с близкими начальными данными. | 15 |
| 1.2 | Графики разности разрывных координат двух решений при $x_0^1 = x_0^2$ и $t_0^1 - t_0^2 \neq 0$. Из условия $ t_0^1 - t_0^2 \approx 0$ не следует, что $ x^1(t) - x^2(t) \approx 0$ при всех t | 16 |
| 2.1 | Моменты импульсации объекта наблюдения и наблюдателя | 23 |
| 3.1 | Окрестность точки (x_k, t_k) в проекции на оси θ и $C\zeta$ | 44 |
| 3.2 | Случай 1. Красным цветом обозначены моменты скачков функции $r(t)$ | 49 |
| 3.3 | Случай 2. | 50 |
| 3.4 | Случай 3. | 51 |
| 3.5 | Случай 4. | 51 |
| 4.1 | Красный цвет: концентрации гормона LH ($x_2(t)$), полученные с помощью многократного забора крови с десятиминутными интервалами у здорового 27-летнего мужчины. По вертикали откладывается концентрация гормона, а по горизонтали — время забора проб крови. Синий цвет: кривые изменения концентраций гормонов GnRH ($x_1(t)$) (оцененная) и LH ($x_2(t)$) (смоделированная), полученные с помощью модели (4.1)–(4.2). Copyright 2013, AIP Publishing LLC [66]. | 63 |
| 4.2 | Красный цвет: концентрации гормонов LH ($x_2(t)$) и Те ($x_3(t)$), полученные с помощью многократного забора крови с десятиминутными интервалами у здорового 27-летнего мужчины. По вертикали откладывается концентрация гормона, а по горизонтали — время забора проб крови. Синий цвет: смоделированная кривая изменения концентрации Те. Copyright 2013, AIP Publishing LLC [66]. | 64 |
| 4.3 | Графики решений системы (4.5)–(4.6) с параметрами (4.27) | 75 |
| 4.4 | Зависимость спектрального радиуса матрицы Якоби J_0 от параметров k_{d1} и k_{d2} | 76 |
| 4.5 | Графики решений системы (4.5), (4.6), (4.27) (синие линии) и наблюдателя (2.1), (2.3) (черные линии): $K_d = [0 \quad -250]$ | 77 |

| | | |
|------|---|----|
| 4.6 | Сравнение моментов и величин импульсации системы и наблюдателя: черные линии (в нижней части) обозначают моменты импульсации наблюдателя \hat{t}_n с амплитудами $-\hat{\lambda}_n$. Синие линии (в верхней части) соответствуют моментам импульсации объекта t_n с амплитудами λ_n | 78 |
| 4.7 | Отклонения $ t_n - \hat{t}_n $ для $K_d = [0 \ 0]$ и $K_d = [0 \ -250]$ | 78 |
| 4.8 | Зависимость $\mathcal{P}(\varepsilon_f)$ от параметра ε_f для $K_d = [0 \ 0]$ и $K_d = [0 \ -250]$ | 79 |
| 4.9 | Зависимость $\mathcal{P}(\varepsilon_f)$ от параметра ε_f для $K_d = [0 \ 0]$ и $K_d = [-547 \ -892]$ в случае 1-цикла | 80 |
| 4.10 | Зависимость $\mathcal{P}(\varepsilon_f)$ от параметра ε_f для $K_d = [0 \ 0]$ и $K_d = [-190 \ -215]$ в случае 2-цикла | 80 |
| 4.11 | Зависимость $\mathcal{P}(\varepsilon_f)$ от параметра ε_f для $K_d = [0 \ 0]$ и $K_d = [-0.6 \ -0.1]$ в случае 4-цикла | 81 |
| 4.12 | Зависимость спектрального радиуса матрицы Якоби J_0 от коэффициентов матрицы K при $K_d = [0 \ 0]$ | 82 |
| 4.13 | Зависимость спектрального радиуса матрицы Якоби J_0 от коэффициентов матрицы K при $K_d = [-500 \ -300]$ | 82 |
| 4.14 | Контурный график зависимости спектрального радиуса матрицы Якоби J_0 от коэффициентов матрицы K при $K_d = [-500 \ -300]$ | 83 |
| 4.15 | Зависимость абсолютной величины функции $g(\cdot)$ от аргумента k_3 | 84 |
| 4.16 | Графики решений уравнений объекта (4.5), (4.6), (4.27) (синие линии) и наблюдателя (2.1), (2.3), (4.31) (черные линии) | 85 |
| 4.17 | Зависимость $\mathcal{P}(\varepsilon_f)$ от параметра ε_f : синий цвет — наблюдатель (4.28) с $K_d = [0 \ 0]$, зеленый цвет — наблюдатель (4.30), красный цвет — наблюдатель (4.31) | 85 |
| 4.18 | Зависимость спектрального радиуса матрицы J_0 от коэффициентов K_d | 86 |
| 4.19 | Графики решений уравнений объекта (4.5), (4.6), (4.27) (синие линии) и наблюдателя (2.1), (2.18) (черные линии), $K_d = [6.8 \ 2]$ | 87 |
| 4.20 | Зависимость $\mathcal{P}(\varepsilon_f)$ от параметра ε_f : синий цвет — модуляция (2.2), желтый цвет — (2.3), зеленый цвет — (2.17), красный цвет — (2.18) | 87 |
| 4.21 | Бифуркационная диаграмма системы (1.12) по отношению к величине запаздывания τ . Значения x_3 (третьей компоненты вектора состояния системы, отвечающие уровню тестостерона) в моменты времени t_n изображены в виде функции от τ . Синие точки — устойчивые решения, красные — неустойчивые. | 88 |
| 4.22 | Зависимость $\mathcal{P}(\varepsilon_f)$ от параметра ε_f для $\tau = 5$ (4-цикл) | 90 |
| 4.23 | Зависимость $\mathcal{P}(\varepsilon_f)$ от параметра ε_f для $\tau = 30$ (2-цикл) | 91 |

| | | |
|------|---|----|
| 4.24 | Зависимость спектрального радиуса матрицы $J_3 J_2 J_1 J_0$ от величины запаздывания τ . Заметим, что для $24.8 \leq \tau < 40$, 4-цикл переходит в 2-цикл ($m = 2$), и при этом $J_2 = J_0, J_3 = J_1$ | 92 |
| 4.25 | Сравнение моментов и амплитуд импульсов объекта (1.12), (4.32) и наблюдателя (3.13) для $\tau = 20$ (4-цикл) | 93 |
| 4.26 | Графики решений уравнений объекта (1.12), (4.32) (синие линии) и наблюдателя (3.13) (черные линии) для $\tau = 20$ (4-цикл) | 93 |
| 4.27 | Сравнение моментов и амплитуд импульсов объекта (1.12), (4.32) и наблюдателя (3.13) для $\tau = 30$ (2-цикл) | 94 |
| 4.28 | Графики решений уравнений объекта (1.12), (4.32) (синие линии) и наблюдателя (3.13) (черные линии) для $\tau = 30$ (2-цикл) | 94 |

Литература

1. Гелиг, А. Х. Динамика импульсных систем и нейронных сетей / А. Х. Гелиг. — Ленинград: Издательство Ленинградского университета, 1982.
2. Гелиг, А. Х. Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем / А. Х. Гелиг, А. Н. Чурилов. — СПб.: Издательство СПб университета, 1993.
3. Гелиг, А. Х. Устойчивость и стабилизация нелинейных систем / А. Х. Гелиг, И. Е. Зубер, А. Н. Чурилов. — СПб.: Издательство Санкт-Петербургского университета, 2006.
4. Завалицин, С. Т. Импульсные процессы. Модели и приложения / С. Т. Завалицин, А. Н. Сесекин. — Москва: Наука, 1991.
5. Время-импульсные системы автоматического управления / Под ред. И. М. Макарова. — Москва: Наука, 1997.
6. Кунцевич, В. М. Нелинейные системы управления с частотно- и широтно-импульсной модуляцией / В. М. Кунцевич, Ю. Н. Чеховой. — Киев: Техника, 1970.
7. Мильман, В. Д. Об устойчивости движения при наличии толчков / В. Д. Мильман, А. Д. Мышкис // Сибирский математический журнал. — 1960. — Т. 1, № 2. — С. 233–267.
8. Попков, Ю. С. Статистическая теория автоматических систем с динамической частотно-импульсной модуляцией / Ю. С. Попков, А. А. Ашимов, К. Ш. Асаубаев. — Москва: Наука, 1988.
9. Самойленко, А. М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. — Киев: Вища школа, 1987.
10. Халанай, А. Качественная теория импульсных систем / А. Халанай, Д. Векслер. — Москва: Мир, 1971. — (перевод с румынского).

11. Цыпкин, Я. З. Теория линейных импульсных систем / Я. З. Цыпкин. — Москва: Физматгиз, 1963.
12. Ямалова, Д. Р. Преобразование Пуанкаре для уравнения наблюдателя состояния импульсной системы с запаздыванием / Д. Р. Ямалова // Вестник СПбГУ. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. — 2017. — Т. 4 (62). Вып. 1. — С. 64–77.
13. Ackermann, J. On the synthesis of linear control systems with specified characteristics / J. Ackermann // Automatica. — 1977. — Vol. 13. — P. 89–94.
14. Alessandri, A. Design of Luenberger observers for a class of hybrid linear systems / A. Alessandri, P. Coletta // Proceedings of the 4th International Workshop on Hybrid Systems: Computation and Control. — HSCC '01. — Rome, Italy, 2001. — March. — P. 7–18.
15. Amplitude-dependent spikebroadening and enhanced Ca^{2+} signaling in GnRH-secreting neurons / F. Van Goor, A. P. LeBeau, L. Z. Krsmanovic et al. // Biophysical Journal. — 2000. — Vol. 79. — P. 1310–1323.
16. Antsaklis, P. Special issue on technology of networked control systems / P. Antsaklis, J. Baillieul // Proceedings of the IEEE. — 2007. — Vol. 95, no. 1. — P. 5–8.
17. Bainov, D. Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications / D. Bainov, P. Simeonov. — Harlow, UK: Longman, 1993.
18. Bellman, R. Differential-Difference Equations / R. Bellman, K. L. Cooke. — Academic, New York, 1963.
19. Branicky, M. S. Stability of switched and hybrid systems / M. S. Branicky // Proceedings of 33rd IEEE Conference on Decision and Control. — Vol. 4. — 1994. — P. 3498–3503.
20. Caines, P. E. Dynamical logic observers for finite automata / P. E. Caines, R. Greiner, S. Wang // In Proc. 27th Conference on Decision and Control, Austin, TX. — 1988. — P. 226–233.
21. Cardon, S. Oscillations in biological systems / S. Z. Cardon, A. S. Iberall // Biosystems. — 1970. — Vol. 3, no. 3. — P. 237 – 249.
22. Carnevale, D. Hybrid observers / D. Carnevale // Encyclopedia of Systems and Control / Ed. by J. Baillieul, T. Samad. — London: Springer London, 2013. — P. 1–8.
23. Cartwright, M. A model for the control of testosterone secretion / M. Cartwright, M. Husain // Journal of Theoretical Biology. — 1986. — Vol. 123. — P. 239–250.

24. Chay, T.R. A model for biological oscillations/ T.R.Chay// Proceedings of the National Academy of Sciences. — 1981. — Vol. 78, no. 4. — P. 2204–2207.
25. Chen, L. A model of periodic oscillation for genetic regulatory systems/ L.Chen, K.Aihara// IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications. — 2002. — Vol. 49, no. 10. — P. 1429–1436.
26. Chen, W.-H. Impulsive observers with variable update intervals for Lipschitz nonlinear time-delay systems/ W.-H.Chen, D.-X.Li, X.Lu// International Journal of Systems Science. — 2013. — Vol. 44, no. 10. — P. 1934–1947.
27. Chen, W.-H. Adaptive impulsive observers for nonlinear systems/ W.-H.Chen, W.Yang, W.X.Zheng// Automatica. — 2015. — Vol. 61. — P. 232–240.
28. Churilov, A. An impulse-to-impulse discrete-time mapping for a time-delay impulsive system/ A.Churilov, A.Medvedev// Automatica. — 2014. — Vol. 50, no. 8. — P. 2187–2190.
29. Churilov, A. Finite-dimensional reducibility of time-delay systems under pulse-modulated feedback/ A.Churilov, A.Medvedev, P.Mattsson// Proceedings of the 52nd IEEE Conference on Decision and Control. — Florence, Italy, 2013. — December 10–13. — P. 2078–2083.
30. Churilov, A. Periodical solutions in a pulse-modulated model of endocrine regulation with time-delay/ A.Churilov, A.Medvedev, P.Mattsson// IEEE Transactions on Automatic Control. — 2014. — Vol. 59, no. 3. — P. 728–733.
31. Churilov, A. Mathematical model of non-basal testosterone regulation in the male by pulse modulated feedback/ A.Churilov, A.Medvedev, A.Shepeljavyi// Automatica. — 2009. — Vol. 45, no. 1. — P. 78–85.
32. Churilov, A. A state observer for continuous oscillating systems under intrinsic pulse-modulated feedback/ A.Churilov, A.Medvedev, A.Shepeljavyi// Automatica. — 2012. — Vol. 45, no. 6. — P. 1117–1122.
33. Clark, J.P.C. The stability of pulse frequency modulated closed loop control systems/ J.P.C.Clark, E.Noges// IEEE International Convention Record. — 1966. — Vol. 14, no. 6. — P. 179–185.
34. Cox, N. High-gain observers and linear output regulation for hybrid exosystems/ N.Cox, L.Marconi, A.Teel// International Journal of Robust and Nonlinear Control. — 2014. — Vol. 24, no. 6. — P. 1043–1063.

35. Di Bernardo, M. Self-oscillations and sliding in relay feedback systems: symmetry and bifurcations/ M. Di Bernardo, K. H. Johansson, F. Vasca// *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2001. — Vol. 11, no. 04. — P. 1121–1140.
36. An embedding approach for the design of state-feedback tracking controllers for references with jumps/ R. G. Sanfelice, J. J. B. Biemond, N. van de Wouw, W. P. M. H. Heemels// *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. — 2013. — Vol. 24, no. 11. — P. 1585–1608.
37. Emergent oscillations in mathematical model of the human menstrual cycle/ N. L. Rasgon, L. Pumphrey, P. Prolo et al.// *CNS Spectrums*. — 2003. — Vol. 8. — P. 805–814.
38. Encoding and decoding mechanisms of pulsatile hormone secretion/ J. J. Walker, J. R. Terry, K. Tsaneva-Atanasova et al.// *Journal of Neuroendocrinology*. — 2009. — Vol. 22, no. 12. — P. 1226–1238.
39. Evans, W. S. Biomathematical modeling of pulsatile hormone secretion: a historical perspective/ W. S. Evans, L. S. Farhy, M. L. Johnson// *Methods in Enzymology: Computer Methods, Volume A*/ Ed. by M. L. Johnson, L. Brand. — 2009. — Vol. 454. — P. 345–366.
40. Farhy, L. S. Modeling of oscillations in endocrine networks with feedback/ L. S. Farhy// *Methods in Enzymology*. — 2004. — Vol. 384. — P. 54–81.
41. Forni, F. Follow the bouncing ball: global results on tracking and state estimation with impacts/ F. Forni, A. R. Teel, L. Zaccarian// *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2013. — June. — Vol. 58, no. 6. — P. 1470–1485.
42. Gelig, A. K. *Stability and Oscillations of Nonlinear Pulse-Modulated Systems*/ A. Kh. Gelig, A. N. Churilov. — Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 1998.
43. Goodwin, B. C. An intrainment model for timed enzyme synthesis in bacteria/ B. C. Goodwin// *Advances in Enzyme Regulation*. — 1965. — Vol. 3. — P. 425–437.
44. Goodwin, B. C. Oscillatory behavior in enzymatic control processes/ B. C. Goodwin// *Nature*. — 1966. — Vol. 209, no. 5022. — P. 479–481.
45. The Goodwin oscillator: on the importance of degradation reactions in the circadian clock/ P. Ruoff, M. Vinsjevnik, C. Monnerjahn, L. Rensing// *Journal of Biological Rhythms*. — 1999. — Vol. 14, no. 6. — P. 469–479.

46. Griffith, J. S. Mathematics of cellular control processes i. negative feedback to one gene/ J. S. Griffith// *Journal of Theoretical Biology*. — 1968. — Vol. 20, no. 2. — P. 202–208.
47. Guan, Z.-H. On hybrid impulsive and switching systems and application to nonlinear control/ Z.-H. Guan, D. J. Hill, X. Shen// *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2005. — Vol. 50, no. 7. — P. 1058–1062.
48. Haddad, W. M. *Impulsive and Hybrid Dynamical Systems: Stability, Dissipativity, and Control*/ W. M. Haddad, V. Chellaboina, S. G. Nersesov. — Princeton: Princeton Univ. Press, 2006.
49. Hale, J. K. *Dynamics and Bifurcations*/ J. K. Hale, H. Kocak. — Springer-Verlag New York, 1991.
50. Henningson, T. Sporadic event-based control of first-order linear stochastic systems/ T. Henningson, E. Johannesson, A. Cervin// *Automatica*. — 2008. — Vol. 44, no. 11. — P. 2890–2895.
51. Heuett, W. J. A stochastic model of oscillatory blood testosterone levels/ W. J. Heuett, H. A. Qian// *Bulletin of Mathematical Biology*. — 2006. — Vol. 68. — P. 1383–1399.
52. Hohberger, C. C. Self-oscillation of micromechanical resonators/ C. C. Hohberger, K. Karrai// *Proceedings of 4th IEEE Conference on Nanotechnology*. — 2004. — P. 419–421.
53. Kailath, T. *Linear Systems*/ T. Kailath. — Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1980. — P. 214–216.
54. Keenan, D. M. Non-invasive analytical estimation of endogenous GnRH drive: analysis using graded competitive GnRH-receptor antagonism and a calibrating pulse of exogenous GnRH/ D. M. Keenan, I. J. Clarke, J. D. Veldhuis// *Endocrinology*. — 2011. — Vol. 152, no. 12. — P. 4882–4893.
55. Keenan, D. M. A biomathematical model of time-delayed feedback in the human male hypothalamic-pituitary-Leydig cell axis/ D. M. Keenan, J. D. Veldhuis// *American Journal of Physiology. Endocrinology and Metabolism*. — 1998. — Vol. 275, no. 1. — P. E157–E176.
56. Kharitonov, V. L. *Time-Delay Systems. Luapunov Functions and Matrices*/ V. L. Kharitonov. — Birkhauser, 2013.
57. Kuntsevich, V. M. Fundamentals of non-linear control systems with pulse-frequency and pulse-width modulation/ V. M. Kuntsevich, Yu. N. Chekhovoi// *Automatica*. — 1971. — Vol. 7, no. 1. — P. 73–81.

58. Kuznetsov, Y. Elements of Applied Bifurcation Theory / Yu. Kuznetsov. — Springer-Verlag New York, 2004.
59. Lakshmikantham, V. Theory of Impulsive Differential Equations / V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, P. S. Simeonov. — Singapore: World Scientific, 1989.
60. Leine, R. Stability and Convergence of Mechanical Systems with Unilateral Constraints / R. Leine, N. Van de Wouw. — Springer Science & Business Media, 2007. — Vol. 36.
61. Li, Y. Oscillations and multiscale dynamics in a closed chemical reaction system: Second law of thermodynamics and temporal complexity / Y. Li, H. Qian, Y. Yi // The Journal of Chemical Physics. — 2008. — Vol. 129, no. 15. — P. 154505–154505–9.
62. Liberzon, D. Switching in Systems and Control, ser. Systems & Control: Foundations & Applications / D. Liberzon. — Boston: Birkhäuser, 2003.
63. Lillo, C. Nutrient depletion as a key factor for manipulating gene expression and product formation in different branches of the flavonoid pathway / C. Lillo, U. S. Lea, P. Ruoff // Plant, Cell & Environment. — 2008. — Vol. 31, no. 5.
64. Liu, B. Comparison principle and stability of discrete-time impulsive hybrid systems / B. Liu, D. J. Hill // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. — 2009. — Vol. 56, no. 1. — P. 233–245.
65. Liu, K. Networked control with stochastic scheduling / K. Liu, E. Fridman, K. H. Johansson // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2015. — Vol. 60, no. 11. — P. 3071–3076.
66. Mattsson, P. Modeling of testosterone regulation by pulse-modulated feedback: an experimental data study / P. Mattsson, A. Medvedev // Proceedings of 2013 International Symposium on Computational Models for Life Sciences. — Vol. 1559. — Melville, New York: AIP Publishing, 2013. — P. 333–342.
67. Mattsson, P. Modeling of testosterone regulation by pulse-modulated feedback / P. Mattsson, A. Medvedev // Advances in Experimental Medicine and Biology: Signal and Image Analysis for Biomedical and Life Sciences. — Springer, 2015. — Vol. 823. — P. 23–40.
68. Matveev, A. S. Qualitative Theory of Hybrid Dynamical Systems / A. S. Matveev, A. V. Savkin. — Springer Science & Business Media, 2012.

69. Menini, L. Asymptotic tracking of periodic trajectories for a simple mechanical system subject to nonsmooth impacts/ L. Menini, A. Tornambè// *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2001. — Vol. 46, no. 7. — P. 1122–1126.
70. Model-driven designs of an oscillating gene network/ L. M. Tuttle, H. Salis, J. Tomshine, Y. N. Kaznessis// *Biophysical Journal*. — 2005. — Vol. 89, no. 6. — P. 3873–3883.
71. Multi-agent model predictive control based on resource allocation coordination for a class of hybrid systems with limited information sharing/ R. Luo, R. Bourdais, T. J. J. van den Boom, B. De Schutter// *Engineering Applications of Artificial Intelligence*. — 2017. — Vol. 58. — P. 123 – 133.
72. Multiple agent hybrid control: carrier manifolds and chattering approximations to optimal control/ W. Kohn, A. Nerode, J. B. Remmel, X. Ge// *Proceedings of 33rd IEEE Conference on Decision and Control*. — Vol. 4. — 1994. — P. 4221–4227.
73. Murray, J. D. *Mathematical Biology I: An Introduction*/ J. D. Murray. — Springer, New York, 2002.
74. Output feedback hybrid-impulsive second order sliding mode control: Lyapunov approach/ Y. Shtessel, A. Glumineau, F. Plestan, M. Weiss// *Proceedings of the 13th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*. — 2014. — P. 1–6.
75. Puri, A. *Theory of Hybrid Systems and Discrete Event Systems: Ph. D. thesis*. — Berkeley, CA, USA: University of California at Berkeley, 1995.
76. Raff, T. An impulsive observer that estimates the exact state of a linear continuous-time system in predetermined finite time/ T. Raff, F. Allgöwer// *Proceedings of the 15th Mediterranean Conference on Control & Automation (MED'07)*. — Athens, Greek, 2007. — June 27–29. — P. 1–3.
77. Raff, T. Observers with impulsive dynamical behavior for linear and nonlinear continuous-time systems/ T. Raff, F. Allgöwer// *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*. — New Orleans, LA, USA, 2007. — December 12–14. — P. 4287–4292.
78. Robust, tunable biological oscillations from interlinked positive and negative feedback loops/ T. Y.-C. Tsai, Y. S. Choi, W. Ma et al.// *Science*. — 2008. — Vol. 321, no. 5885. — P. 126–129.
79. Ruoff, P. The temperature-compensated Goodwin model simulates many circadian clock properties/ P. Ruoff, L. Rensing// *Journal of Theoretical Biology*. — 1996. — Vol. 179, no. 4. — P. 275–285.

80. Salamon, D. On controllability and observability of time delay systems/ D.Salamon// IEEE Transactions on Automatic Control. — 1984. — Vol. 29, no. 5. — P. 432–439.
81. Samoilenko, A. M. Impulsive Differential Equations / A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk. — Singapore: World Scientific, 1995.
82. Samuelsson, O. Damping of electro-mechanical oscillations in a multimachine system by direct load control/ O.Samuelsson, B.Eliasson// IEEE Transactions on Power Systems. — 1997. — Vol. 12, no. 4. — P. 1604–1609.
83. Sename, O. New trends in design of observers for time-delay systems/ O.Sename// Kybernetika. — 2001. — Vol. 74, no. 4. — P. 427–458.
84. Simeonov, P. S. Orbital stability of periodic solutions of autonomous systems with impulse effect / P. S. Simeonov, D. D. Bainov// International Journal of Systems Science. — 1988. — Vol. 19, no. 12. — P. 2561–2585.
85. Smith, W. R. Hypothalamic regulation of pituitary secretion of luteinizing hormone—II Feedback control of gonadotropin secretion/ W. R. Smith// Bulletin of Mathematical Biology. — 1980. — Vol. 42. — P. 57–78.
86. Smith, W. R. Qualitative mathematical models of endocrine systems/ W. R. Smith// American Journal of Physiology. — 1983. — Vol. 245, no. 4. — P. 473–477.
87. Spontaneous synchronization of coupled circadian oscillators./ D.Gonze, S.Bernard, C. Waltermann et al.// Biophysical Journal. — 2005. — Vol. 89, no. 5. — P. 120–129.
88. Stamov, G. T. Almost Periodic Solutions of Impulsive Differential Equations/ G. T. Stamov. — Berlin: Springer, 2012.
89. Stamova, I. Stability Analysis of Impulsive Functional Differential Equations/ I. Stamova. — Berlin: Walter de Gruyter, 2009.
90. Stamova, I. Applied Impulsive Mathematical Models / I. Stamova, G. Stamov. — Berlin: Springer, 2016.
91. Synthetic gene network for entraining and amplifying cellular oscillations/ J. Hasty, M. Dolnik, V. Rottschäfer, J. J. Collins// Physical Review Letters. — 2002. — Vol. 88. — P. 148101.

92. Tanwani, A. Observability for switched linear systems: characterization and observer design/ A. Tanwani, H. Shim, D. Liberzon// IEEE Transactions on Automatic Control. — 2013. — Vol. 58, no. 4. — P. 891–904.
93. Teel, A. Observer-based hybrid feedback: a local separation principle/ A. Teel// Proceedings of the 2010 American Control Conference. — Baltimore, Maryland, USA, 2010. — June 30 – July 2. — P. 898–903.
94. Teel, A. R. A hybrid systems approach to global synchronization and coordination of multi-agent sampled-data systems*/ A. R. Teel, J. I. Poveda// IFAC-PapersOnLine. — 2015. — Vol. 48, no. 27. — P. 123 –128. — Analysis and Design of Hybrid Systems (ADHS'15).
95. Tracking control for hybrid systems with state-triggered jumps/ J. J. B. Biemond, N. van de Wouw, W. P. M. H. Heemels, H. Nijmeijer// IEEE Transactions on Automatic Control. — 2013. — Vol. 58, no. 4. — P. 876–890.
96. Veldhuis, J. D. Recent insights into neuroendocrine mechanisms of aging of the human male hypothalamic-pituitary-gonadal axis/ J. D. Veldhuis// Journal of Andrology. — 1999. — Vol. 20, no. 1. — P. 1–18.
97. Veldhuis, J. D. Motivations and methods for analyzing pulsatile hormone secretion/ J. D. Veldhuis, D. M. Keenan, S. M. Pincus// Endocrine Reviews. — 2008. — Vol. 29, no. 7. — P. 823–864.
98. Woller, A. The Goodwin model revisited: Hopf bifurcation, limit-cycle, and periodic entrainment/ A. Woller, D. Gonze, T. Erneux// Physical Biology. — 2014. — Vol. 11, no. 4. — P. 045002.
99. Xia, Y. Analysis and Synthesis of Networked Control Systems/ Y. Xia, M. Fu, G.-P. Liu. — Springer Science & Business Media, 2011.
100. Xiao, F. Sampled-data consensus in multi-agent systems with asynchronous hybrid event-time driven interactions/ F. Xiao, T. Chen// Systems & Control Letters. — 2016. — Vol. 89. — P. 24 – 34.
101. Xiong, Z. Complex dynamics of an autonomous prey-predator system with impulsive state feedback control/ Z. Xiong, X. Wang, S. Li// Proceedings of the 2nd International Conference on Information and Computing Science. — Vol. 3. — 2009. — P. 196–199.

102. Yamalova, D. Hybrid state observer with modulated correction for periodic systems under intrinsic impulsive feedback / D. Yamalova, A. Churilov, A. Medvedev // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). Periodic Control Systems. — Vol. 5. — 2013. — P. 119–124.
103. Yamalova, D. Hybrid state observer for time-delay systems under intrinsic impulsive feedback / D. Yamalova, A. Churilov, A. Medvedev // Proceedings of the 21st International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS). — Groningen, The Netherlands, 2014. — July 7 – 11. — P. 977–984.
104. Yamalova, D. Design degrees of freedom in a hybrid observer for a continuous plant under an intrinsic pulse-modulated feedback / D. Yamalova, A. Churilov, A. Medvedev // IFAC–PapersOnLine. Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems. — 2015. — Vol. 48, no. 11. — P. 1080–1085.
105. Yamalova, D. Finite-dimensional hybrid observer for delayed impulsive model of testosterone regulation / D. Yamalova, A. Churilov, A. Medvedev // Mathematical Problems in Engineering. — 2015. — Vol. 2015. doi:10.1155/2015/190463.
106. Yamalova, D. State estimation in a delayed impulsive model of testosterone regulation by a finite-dimensional hybrid observer / D. Yamalova, A. Churilov, A. Medvedev // Proceedings of the 14th European Control Conference (ECC). — Linz, Austria, 2015. — July 15 – 17.
107. Yamalova, D. Hybrid observer for an intrinsic impulsive feedback system / D. Yamalova, A. Churilov, A. Medvedev // IFAC-PapersOnLine. The 20th IFAC World Congress. — 2017. — Vol. 50. — P. 4656–4661.
108. Yamalova, D. Design of a hybrid observer for an oscillator with an intrinsic pulse-modulated feedback / D. Yamalova, A. Medvedev // 2017 American Control Conference (ACC). — 2017. — May. — P. 1175–1180.
109. Zefran, M. Stabilization of systems with changing dynamics / M. Zefran, J. W. Burdick // Proceedings of the 1st International Workshop on Hybrid Systems: Computation and Control / Ed. by T. A. Henzinger, S. Sastry. — HSCC '98. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1998. — P. 400–415.
110. Zhabotinsky, A. M. A history of chemical oscillations and waves / A. M. Zhabotinsky // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 1991. — Vol. 1, no. 4. — P. 379–386.

111. Zhang, W. Stability of networked control systems/ W.Zhang, M.S.Branicky, S.M.Phillips// IEEE Control Systems. — 2001. — Vol. 21, no. 1. — P. 84–99.
112. Zhusubaliyev, Z.T. Bifurcation phenomena in an impulsive model of non-basal testosterone regulation/ Zh. T.Zhusubaliyev, A.Churilov, A.Medvedev// Chaos. — 2012. — Vol. 22, no. 1. — P. 013121–1–013121–11.