

Санкт-Петербургский Государственный Университет

На правах рукописи

Тагирджанов Азат Мухаммедович

Точные решения в теории локализованных волн

Специальность 01.01.03 —
«Математическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Киселев Алексей Прохорович

Санкт-Петербург — 2016

Оглавление

Введение	5
1 Краткий обзор известных простых сильно локализованных решений	10
1.1 Гармонические по времени решения	10
1.1.1 Метод параболического уравнения. Приближенное параксиальное решение	10
1.1.2 “Комплексный источник” в гармоническом случае	12
1.2 Нестационарные решения	13
1.2.1 Относительно неискажающиеся решения	13
1.2.2 Решение Бейтмена-Ильона. Focus wave modes	14
1.2.3 Бейтменовский гауссовский пакет	15
1.2.4 Некоторые другие обобщения решения Бейтмена	16
1.2.5 Комплексифицированные сферические волны	16
1.3 Нестационарные решения обладающие сингулярностью, локализованной в бегущей точке	17
2 Гармонический “комплексный источник” в трехмерном случае	18
2.1 Функция источника в случае <i>beam choice</i>	19
2.1.1 Скачки поля на антенне	19
2.1.2 Регуляризация	20
2.1.3 Функция источника	22
2.2 Функция источника в случае <i>source choice</i>	23
2.3 Функция источника для произвольной антенны	24
2.3.1 Выбор разреза	24
2.3.2 Антенна	25
2.3.3 Фиксация ветви корня	27
2.3.4 Простейшие разрезы и соответствующие им антенны	28
2.3.5 Скачки поля на антенне	30
2.3.6 Регуляризация интегралов в (2.3.34)	31
2.3.7 Интеграл по тору	32
2.3.8 Интеграл по антенне без окрестности края	33
2.3.9 Явный вид токов	34

2.3.10	Примеры. Токи на простейших антеннах	35
2.4	Асимптотическое поведение G_* в случае <i>beam choice</i>	36
2.4.1	Параксиальная асимптотика в ближней зоне	36
2.4.2	Асимптотика в дальней зоне	37
2.5	Асимптотическое поведение G_* в случае <i>source choice</i>	38
2.5.1	Параксиальная асимптотика в ближней зоне	38
2.5.2	Асимптотика в дальней зоне	39
2.6	Асимптотическое поведение G_* в случае произвольной антенны	40
2.6.1	Некомпактная антенна	40
2.6.2	Компактная антенна	40
3	Гармонический “комплексный источник” в двумерном случае	41
3.1	Функция источника в случае <i>source choice</i>	42
3.1.1	Регуляризация	42
3.1.2	Функция источника	45
3.2	Функция источника в случае <i>beam choice</i>	46
3.3	Функция источника для произвольной антенны	46
3.3.1	Выбор разреза	46
3.3.2	Антенна	47
3.3.3	Функция источника	47
3.4	Асимптотическое поведение g_* в случае <i>beam choice</i>	48
3.4.1	Параксиальная асимптотика в ближней зоне	48
3.4.2	Асимптотика в дальней зоне	49
3.5	Асимптотическое поведение g_* в случае <i>source choice</i>	49
3.5.1	Параксиальная асимптотика в ближней зоне	50
3.5.2	Асимптотика в дальней зоне	50
3.6	Асимптотическое поведение g_* в случае произвольной антенны	50
4	Нестационарный “комплексный источник” в трехмерном случае	51
4.1	Функция источника	51
4.2	Гауссовский пакет в случае <i>beam choice</i>	52
4.2.1	Асимптотика вблизи пика на умеренных расстояниях	53
4.2.2	Асимптотика в дальней зоне	54
4.2.3	Асимптотика вблизи пика на больших расстояниях	55
4.3	Гауссовский пакет в случае <i>source choice</i>	55
4.3.1	Асимптотика вблизи пика на умеренных расстояниях	55
4.3.2	Асимптотика в дальней зоне	56
4.4	Заключительные замечания	57

5	Простые решения волнового уравнения с сингулярностью в бегущей точке, основанные на комплексифицированном решении Бейтмена	58
5.1	Комплексифицированное решение Бейтмена	58
5.2	Простейшая сингулярная форма волны	59
5.3	Исследование вещественной и мнимой частей функции (5.2.1)	62
5.4	Обобщения	64
	Заключение	65
	Список литературы	66

Введение

Актуальность темы исследования. Интерес к построению локализованных решений линейных уравнений, описывающих волновые процессы, можно проследить начиная с работ Бейтмена начала XX века [33, 34]. В 1960-е годы в связи с развитием лазерной техники в оптике возник запрос на построение простых явных решений уравнений Максвелла и, в качестве их упрощенной модели, волнового уравнения. Почти сразу же в рамках коротковолнового приближения для гармонического режима были получены *асимптотические* выражения, обладающие гауссовской локализацией в окрестности фиксированного луча (оси пучка). Они получили название гауссовских пучков. Особенное внимание уделялось так называемой осесимметрической фундаментальной моде. Построения основывались на методе параболического уравнения (см., например, [2, 5, 14, 30, 51] и др.). Следом за этим Измествев [12] в 1970 г. и Дешамп [38] в 1971 г. независимо построили *точное* решение уравнения Гельмгольца для постоянной скорости распространения, демонстрирующие гауссовскую локализацию в окрестности оси. Это решение возникло в результате комплексного сдвига по одной из координат точки источника в ненаправленной гармонической по времени сферической волне. Оно было названо “полем комплексного источника”.

“Поля комплексных источников” привлекли большое внимание в разных разделах теории дифракции и распространения волн. В частности, они, как и их двумерные [39] и нестационарные аналоги, нашли применение в качестве падающего поля в задачах дифракции в угловых областях [39, 40, 52, 55], в численных методах [11, 61], в построении вейвлетов [46, 47], в моделировании излучателей упругих волн [41, 53, 63] и ряде других вопросов. Рассматривались также мультипольные обобщения (см., например, [54, 57]) и статические¹ версии [52].

Эти решения изначально были окружены некоторым ореолом таинственности как “возбуждаемые источниками в комплексном пространстве” (и в этой связи было предпринято изучение обобщенных функций в комплексном пространстве [45, 46]).

Комплексофицированная сферическая волна не является однозначно определенной функцией в *физическом пространстве* \mathbb{R}^3 . Однозначное ее определение требует проведения разреза. В результате поле имеет скачки на некоторых поверхностях — *антеннах*, на которых сосредоточены функции источника — *токи* (правые части в волновом уравнении в нестационарном случае или в уравнении Гельмгольца в гармоническом). Вопрос об антеннах и, в особенности, о токах долгое время оставался непоясненным. В ряде работ [38, 56] говори-

¹В работе [52] история комплексофикации решения в статическом случае возводится к заметке [32].

лось, что в результате комплексификации источник “удаляется в комплексную область”. Из работ [39, 47] можно было бы сделать вывод, что источник “размазывается” по некоторой поверхности с краем в физическом пространстве, однако дело не зашло дальше качественного обсуждения.

Комплексификация координаты точки источника была сделана и в нестационарной сферической волне, содержащей произвольную функцию [42, 43]. Антенны и распределение токов на них не рассматривались.

Другим, нежели теория “комплексного источника”, результатом развития теории приближенных гармонических решений методом параболического уравнения стало возникновение нестационарных точных решений, являющихся спецификациями комплексифицированных решений Бейтмена, также содержащих произвольную функцию [14, 15, 37, 48, 64]. До сих пор в ее рамках рассматривались только функции без особенностей. Путем подходящего выбора этой произвольной функции строились решения волнового уравнения, описывающие *гауссовски локализованные* волновые пучки и волновые пакеты. Однако, возможно выбрать эту произвольную функцию так, чтобы она имела, например, полюс первого порядка. Тогда волновое поле будет сингулярно в точке, бегущей со скоростью распространения вдоль некоторой пространственной прямой. Возникает вопрос, будет ли такое решение удовлетворять неоднородному уравнению с некоторым бегущим точечным источником или же оно будет удовлетворять однородному уравнению и служить иллюстрацией теории волновых фронтов Хёрмандера [31].

Цели и задачи диссертационной работы:

1. Явное описание антенн и токов для трехмерного гармонического по времени “комплексного источника” в общей ситуации.
2. Явное описание антенн и токов для трехмерного нестационарного по времени “комплексного источника”. Построение гауссовского волнового пакета на основе “комплексного источника”.
3. Явное описание антенн и токов для двумерного гармонического “комплексного источника”.
4. Исследование бейтменовского решения однородного волнового уравнения, имеющего степенную сингулярность в бегущей точке.

Для решения поставленных задач использовались асимптотические методы, методы теории обобщенных функций и теории функций комплексной переменной.

Научная новизна. В диссертационной работе впервые дано явное описание источников в вещественном пространстве, соответствующих полям “комплексных источников”. В рамках теории “комплексного источника” построены новые нестационарные решения волнового

уравнения, обладающие гауссовской локализацией. Построен пример решения однородного волнового уравнения, имеющего степенную сингулярность в бегущей точке. Основные результаты работы, выносимые на защиту, являются новыми.

Положения, выносимые на защиту:

1. Получены явные описания антенн и выражения для токов на них, возбуждающих гармонические поля “комплексного источника” в случае трех пространственных переменных.
2. Результаты, полученные для гармонического “комплексного источника”, обобщены на нестационарный режим. В рамках теории “комплексного источника” построено решение волнового уравнения с тремя пространственными переменными, описывающее гауссовский волновой пакет.
3. Получены явные описания антенн и выражения для токов, возбуждающих гармонические поля “комплексного источника” в случае двух пространственных переменных.
4. Исследовано построенное в рамках теории Бейтмена решение волнового уравнения, имеющее степенную сингулярность в бегущей точке. Доказано, что это решение удовлетворяет однородному волновому уравнению.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер и направлена на развитие теории локализованных решений волнового уравнения, имеющей многочисленные приложения. Результаты диссертации вносят ясность в остававшиеся без надлежащего внимания вопросы теории “комплексного источника”. С практической точки зрения эти результаты позволяют в принципе, управляя распределением токов на антеннах, возбуждать гауссовски локализованные поля, в частности, излучать их преимущественно в одном направлении. Исследован также пример решения волнового уравнения, имеющий степенную сингулярность в бегущей точке. Этот результат носит теоретический характер.

Апробация работы. Результаты диссертационного исследования докладывались на семинаре кафедры Высшей математики и математической физики физического факультета СПбГУ, на Санкт-Петербургском семинаре по теории дифракции и распространения волн в ПОМИ им. В.А. Стеклова РАН, на Санкт-Петербургском семинаре по теоретической и прикладной акустике в ИПМАН РАН, а также на следующих конференциях:

- Международные конференции “Days on Diffraction” (Санкт-Петербург, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014);
- Международные конференции “Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS)” (Москва, 2009; Стокгольм, 2013);
- Международная конференция “Optics, Photonics and Metamaterials” (Харьков, 2009);

- Международная конференция “Фундаментальные проблемы оптики” (Санкт-Петербург, 2010);
- Отраслевая научная конференция “Технологии информационного общества” (Москва, 2011).

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 9 печатных работах. В их числе 7 публикаций в журналах, входящих в список ВАК [4, 25–29, 59], и 2 публикации в сборниках трудов международных конференций [58, 60].

Личный вклад. Результаты второй, третьей и четвертой глав диссертации опубликованы в совместных работах диссертанта с А.П. Киселевым и А.С. Благовещенским [26, 27, 59], в работе диссертанта [25] и в совместных работах диссертанта с А.П. Киселевым [28, 29]. Определяющий вклад во все эти работы принадлежит диссертанту. Результаты пятой главы опубликованы в совместной работе диссертанта с А.П. Киселевым и А.С. Благовещенским [4]. Эти результаты принадлежат соавторам в равной степени.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет **70** страниц текста с **21** иллюстрацией. Список литературы содержит **64** наименования.

Первая глава посвящена краткому обзору методов построения простых локализованных решений волнового уравнения в гармоническом и нестационарном режимах. Обсуждаются точные и приближенные методы. Вводятся классические определения и приводятся основные известные результаты теории локализованных решений волнового уравнения.

Вторая глава посвящена исследованию “комплексного источника” в случае гармонической зависимости от времени для трех пространственных переменных. Центральным объектом рассмотрения этой главы является комплексифицированная функция Грина $G_* = \exp(ikR_*)/R_*$ для трехмерного уравнения Гельмгольца. Как отмечалось в работах [38, 39], G_* не является однозначной функцией $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, поскольку в нее входит комплексный корень $R_* = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - ia)^2}$, $a = \text{const} > 0$. В *физическом пространстве* \mathbb{R}^3 точкам ветвления квадратного корня R_* соответствует окружность $\mathcal{C} = \{\mathbf{r} : z = 0, x^2 + y^2 = a^2\}$. При любом выборе ветви корня R_* функция G_* имеет скачок на некоторой поверхности $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ с краем \mathcal{C} , вид которой определяется выбором разреза. Поэтому G_* удовлетворяет уравнению Гельмгольца $(\Delta + k^2)G_* = F$, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$, с правой частью F , сосредоточенной на поверхности \mathcal{S} , которую мы называем *антенной*. В зависимости от фиксации разреза, поверхность \mathcal{S} может быть компактна или некомпактна и иметь одну или несколько компонент связности.

В Разделах 2.1 и 2.2 рассматриваются два характерных способа фиксации ветви корня в G_* , получившие в литературе название *beam choice* и *source choice*, соответственно [42]. Вычисляются соответствующие функции источника F в уравнении Гельмгольца. В Разделе 2.3 рассмотрения Разделов 2.1, 2.2 обобщаются на случай разреза, проведенного вдоль произвольной гладкой несамопересекающейся кривой на комплексной плоскости подкоренного вы-

ражения в R_* . Оказывается, что при выполнении условий Теоремы 2.3.1, соответствующая антенна является гладкой поверхностью с краем \mathcal{C} , симметричной относительно оси z . Вычислению функции источника в общем случае посвящены Разделы 2.3.5–2.3.9. Результаты вычислений сформулированы в Теореме 2.3.2.

Волновое поле, излучаемое источниками, рассмотренными в Разделах 2.1, 2.2, 2.3, изучается в Разделах 2.4, 2.5, 2.6. Оказывается, что характер поля существенно различается для случаев, когда антенна некомпактна или компактна. В первом случае параксиальное поле при больших ka представляет собой распространяющийся вдоль оси z гауссовский пучок, приходящий с $-\infty$ и уходящий на $+\infty$. Во втором случае поле излучается антенной преимущественно в направлении оси z .

В **третьей главе** рассматривается гармонический “комплексный источник” в случае двух пространственных переменных. Объектом рассмотрения является комплексифицированная функция Грина $g_* = i\pi H_0^{(1)}(kr_*)$ для двумерного уравнения Гельмгольца. Здесь $r_* = \sqrt{x^2 + (z - ia)^2}$, а $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода. Как и в трехмерном случае, рассмотренном в Главе 2, функция g_* не является однозначно определенной функцией относительно $(x, z) \in \mathbb{R}^2$. В физическом пространстве \mathbb{R}^2 точке ветвления функции g_* соответствуют точки $\mathcal{C} = \{x = -a, z = 0\} \cup \{x = a, z = 0\}$. Аналогично трехмерному случаю, функция g_* удовлетворяет уравнению $(\Delta + k^2)g_* = F$, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$ с функцией источника F , сосредоточенной на антенне, представляющей собой кривую \mathcal{S} , симметричную относительно оси z . В Разделах 3.1 и 3.2 рассматриваются двумерные аналоги случаев *beam choice* и *source choice*. В Разделе 3.3 рассматривается общий случай разреза, удовлетворяющего условиям Теоремы 2.3.1. Волновое поле, излучаемое источниками, рассмотренными в Разделах 3.1, 3.2, 3.3, изучается в Разделах 2.4, 2.5, 2.6.

В **четвертой главе** результаты Главы 2 обобщаются на нестационарный “комплексный источник”. Рассматривается выражение $U = f(\theta_{\mathcal{C}})/R_*$, где $\theta_{\mathcal{C}} = R_* - ct$, удовлетворяющее неоднородному волновому уравнению $U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} - c^{-2}U_{tt} = F$ с постоянной скоростью распространения $c = \text{const} > 0$. Как и в Главе 2, функция источника сосредоточена на некоторой поверхности, определяемой выбором ветви комплексного корня R_* . Явное выражение для F приводится в Разделе 4.1. В Разделах 4.2, 4.3 рассматривается специальная форма волны $f(\theta_{\mathcal{C}})$, при которой U описывает гауссовский волновой пакет.

В **пятой главе** рассматривается комплексифицированное решение Бейтмена $U = f(\theta_{\mathcal{B}})/(\beta - ia)$, в котором форма волны $f(\theta_{\mathcal{B}})$ имеет полюс первого порядка. Здесь $\theta_{\mathcal{B}} = \alpha + \rho^2/(\beta - ia)$, $\alpha = z - ct$, $\beta = z + ct$. Это решение описывает волну, имеющую сингулярность в бегущей точке $z = ct$. В Разделе 5.2 доказывається, что решение U является локально абсолютно интегрируемой функцией в \mathbb{R}^4 и удовлетворяет однородному волновому уравнению $U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} - c^{-2}U_{tt} = 0$ в смысле обобщенных функций. В Разделе 5.3 рассматривается волновое поведение решения U .

Глава 1

Краткий обзор известных простых сильно локализованных решений

Интерес к построению локализованных решений волнового уравнения

$$\square U := U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} - c^{-2}U_{tt} = 0, \quad c = \text{const} > 0, \quad (1.0.1)$$

прослеживается по крайней мере с работ Г. Бейтмена [33, 34] начала XX века. Первоначально этот интерес имел характер научной любознательности. В связи с возникновением в 1960-е годы лазерных технологий, возник мощный запрос на теоретическое описание сильно локализованных полей. Тогда были получены первые приближенные формулы для гармонического по времени режима, давшие толчок построению точных решений. Кратко изложим соответствующие результаты.

1.1 Гармонические по времени решения

1.1.1 Метод параболического уравнения. Приближенное параксиальное решение

Произведем в (1.0.1) подстановку

$$U(x, y, z, t) = e^{i\omega t}V(x, y, z), \quad \omega > 0. \quad (1.1.1)$$

В результате получается уравнение Гельмгольца

$$\Delta V + k^2 V = 0, \quad k = \omega/c, \quad (1.1.2)$$

где $\Delta V = V_{xx} + V_{yy} + V_{zz}$ — трехмерный оператор Лапласа.

Выделим фазовый множитель, отвечающий плоской волне, бегущей вдоль оси z ,

$$V(x, y, z) = e^{ikz}W(x, y, z). \quad (1.1.3)$$

Отбросив в точном уравнении для W , $W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} + 2ikW_z = 0$, вторую производную по z , получим уравнение, которое Леонтович [19] и Леонтович и Фок [20] назвали *параболическим*,

$$W_{xx} + W_{yy} + 2ikW_z = 0. \quad (1.1.4)$$

Это уравнение описывает разнообразные волновые процессы связанные с параксиальным распространением волн, то есть распространением их под малыми углами к оси z (см., например, [5, 14, 19, 20, 30] и др.).

В известном (см., например, [6]) решении уравнения (1.1.4) сделаем сдвиг на мнимую постоянную $z \rightarrow z - ia$, $a > 0$, (см., например, [50]) и получим

$$W = \frac{1}{z - ia} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2(z - ia)}\right), \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.1.5)$$

Соответствующее выражение

$$U = e^{ik(z-ct)}W = \frac{1}{z - ia} \exp\left(i\Psi - \frac{\rho^2}{\Delta_{\perp}^2}\right), \quad (1.1.6)$$

где $\Psi = k(z - ct) + z\rho^2/a\Delta_{\perp}^2$, является приближенным решением уравнения (1.0.1) в окрестности оси z (см., например, [5, 14, 30]). Здесь

$$\Delta_{\perp} = \sqrt{\frac{2(z^2 + a^2)}{ka}} \quad (1.1.7)$$

характеризует поперечную ширину пучка. Выражение (1.1.6) называется *фундаментальной осесимметрической модой гауссовского пучка* (см., например, [30]). Анализ показывает, что безразмерным большим параметром здесь является величина

$$ka \gg 1. \quad (1.1.8)$$

Область пригодности (1.1.6) исследовалась во многих работах (см., например, [2, 8]). Построению высших приближений посвящены, например, [2, 8].

Известны обширные классы “высших мод”, т.е. решений вида $h(x, y, z)W$ с h зависящими от хотя бы от одной из поперечных координат x, y (см., например, [1, 2, 14]). Построены астигматические решения, в которых в фазе присутствуют достаточно произвольные положительно определенные квадратичные формы от поперечных переменных [2, 17, 50]. Последние два класса решений мы обсуждать не будем. Обобщению на неоднородные среды посвящена большая литература (см., например, монографию [2]).

1.1.2 “Комплексный источник” в гармоническом случае

Изместьев [12] и Дешамп [38] независимо предложили точное решение уравнения (1.0.1), обладающее в окрестности оси z асимптотикой (1.1.6). Отправной точкой в этих работах была классическая функция Грина

$$G = \frac{\exp(ikR)}{R}, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1.1.9)$$

Она удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)G = F \quad (1.1.10)$$

с точечным источником

$$F = -4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z) \quad (1.1.11)$$

и описывает расходящуюся сферическую волну (предполагается зависимость от времени вида $e^{-i\omega t}$).

Сдвиг на произвольно выбранную мнимую постоянную ia , $a > 0$, переводит функцию (1.1.9) в

$$G_* = \frac{\exp(ikR_*)}{R_*}, \quad (1.1.12)$$

где

$$R_* = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - ia)^2} \quad (1.1.13)$$

— “расстояние до комплексного источника”.

Было замечено (см. [12, 38]), что (1.1.12) не является однозначной функцией $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, поскольку в нее входит комплексный корень R_* . В [12, 38] отмечалось, что при некотором выборе ветви корня в R_* асимптотика функции $e^{-ka}G_*$, отличающейся от (1.1.12) лишь не зависящим от координат нормировочным множителем, совпадает в параксиальной области с фундаментальной осесимметрической модой гауссовского пучка (1.1.5). По аналогии с параксиальной теорией, основанной на параболическом уравнении, рассматривались также мультипольные и двумерные решения [39, 54, 55, 57].

Комплексофицированное решение (1.1.12) многие авторы (см. [12, 22, 38, 42, 45–47, 56, 62] и др.) интерпретировали как поле “комплексного источника”, т.е. источника, расположенного в комплексном пространстве. Приданию математического смысла эвристике, связанной с источниками в комплексном пространстве, посвящены довольно труднопроходимые работы [45, 46].

При комплексификации решения (1.1.9), как впервые отмечено в [55], правая часть уравнения (1.1.10) распределяется по некоторой поверхности с краем в вещественном физическом пространстве. Эту поверхность, которая является носителем правой части F уравнения (1.1.10), мы называем *антенной*. Функция F в (1.1.10), характеризующая *распределение то-*

ков на антенне, зависит от выбора ветви квадратного корня R_* . Выбор ветви R_* определяет и асимптотическое поведение G_* .

Одной из целей настоящей работы является явное вычисление функции источника для достаточно общего вида антенны в случае трех пространственных переменных. Соответствующим рассмотрениям посвящена Глава 2. Аналогичная задача с двумя пространственными переменными рассмотрена в Главе 3.

1.2 Нестационарные решения

Первое точное нестационарное решение, т.е. решение волнового уравнения (1.0.1), обладающее гауссовской локализацией по поперечным переменным, построил Бриттингхам [37] (и одновременно, для двух пространственных переменных, Киселев [13]). Ввиду медленного убывания по z и t , эти решения обладали бесконечной энергией. Был построен ряд простых решений с более быстрым степенным убыванием по z и t , например, [35, 64], и решения, описывающие гауссовские волновые пакеты, т.е. гауссовски убывающие по всем переменным при удалении от точки, бегущей со скоростью c [15, 48]. Все эти решения удовлетворяли уравнению (1.0.1) во всем пространстве.

Построение локализованных решений в работах [13, 35–37, 64] основывалось на различных соображениях. Как заметил Ильон [44], все эти результаты могут быть получены при надлежащем выборе *формы волны* в *относительно неискажающемся комплексифицированном решении Бейтмена*. Наблюдение Ильона было явно использовано в работах [15, 48].

1.2.1 Относительно неискажающиеся решения

Относительно неискажающимся решением волнового уравнения (1.0.1), см., например, классический учебник Куранта и Гильберта [18], называется решение вида

$$U = gf(\theta) \tag{1.2.1}$$

где *фаза* (“фазовая функция” в [18]) $\theta = \theta(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, и *амплитуда* (“коэффициент искажения” в [18]) $g = g(\mathbf{r}, t)$ — фиксированные функции, а *форма волны* $f = f(\theta)$ — произвольная функция одной переменной. Подразумевается, что это определение имеет локальный характер, т.е. допускается выполнение однородного уравнения (1.0.1) не при всех \mathbf{r}, t .

Курант и Гильберт [18] ограничиваются примерами, известными с XVIII века. Это плоская волна с

$$\theta = z - ct, \quad g \equiv 1 \tag{1.2.2}$$

и сферическая волна с

$$\theta = R - ct, \quad g = 1/R. \tag{1.2.3}$$

В [18] не приведено известное на тот момент (некомплексифицированное) решение Бейтмена [33]

$$\theta = \alpha + \rho^2/2\beta, \quad g = 1/\beta \quad (1.2.4)$$

где

$$\alpha = z - ct, \quad \beta = z + ct, \quad (1.2.5)$$

не имевшее, впрочем, на тот момент никаких приложений.

Во всех упомянутых случаях форма волны f была произвольной функцией вещественного переменного, в частности, обобщенной функцией. В случаях (1.2.2), (1.2.4) функция (1.2.1) удовлетворяет уравнению (1.0.1) во всем пространстве-времени¹ $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. В случае (1.2.3) однородное уравнение (1.0.1) нарушается для пространственной точки $\mathbf{r} = 0$ при временах $t \in \text{supp} f$.

1.2.2 Решение Бейтмена-Ильона. Focus wave modes

Для нас важно осесимметрическое комплексифицированное решение Бейтмена (или, как его еще называют, решение Бейтмена-Ильона) [44], получаемое из (1.2.4) путем замены

$$\beta \rightarrow \beta - ia,$$

для которого, соответственно

$$\theta = \theta_{\mathcal{B}} := \alpha + \frac{\rho^2}{\beta - ia}, \quad g = \frac{1}{\beta - ia} \quad (1.2.6)$$

где $a > 0$ — произвольно фиксированная постоянная. Значок \mathcal{B} призван напоминать о Бейтмене. В соответствующем выражении

$$U = \frac{1}{\beta - ia} f(\theta_{\mathcal{B}}) \quad (1.2.7)$$

форма волны f предполагается функцией, аналитической в верхней полуплоскости своего аргумента, гладкой на вещественной оси. При выполнении этих условий (1.2.7) удовлетворяет однородному волновому уравнению (1.0.1) во всем пространстве-времени [48].

Простейшим примером такого решения является решение Бриттингхама, известное в англоязычной литературе как *focus wave mode*. Это решение было построено Бриттингхамом путем сведения к аналогу параболического уравнения (1.1.4) [37]. Как было замечено Ильоном [44], оно является частным случаем относительно неискажающегося решения (1.2.7) с

¹То, что функция (1.2.1), (1.2.4) удовлетворяет однородному волновому уравнению (1.0.1) во всем пространстве-времени $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ следует из недавней работы Благовещенского [3].

формой волны $f(\theta_{\mathcal{B}}) = \exp(ik\theta_{\mathcal{B}})$, $k = \text{const} > 0$,

$$U = \frac{1}{\beta - ia} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{\beta - ia}\right) \equiv \frac{1}{\beta - ia} \exp\left(i\Psi - \frac{\rho^2}{\tilde{\Delta}_{\perp}^2}\right), \quad (1.2.8)$$

где $\Psi = k\alpha + \beta\rho^2/a\tilde{\Delta}_{\perp}^2$ — вещественная функция, имеющая смысл фазы волны. Выражение (1.2.8) описывает нестационарный гауссов пучок. Здесь

$$\tilde{\Delta}_{\perp} = \sqrt{\frac{\beta^2 + a^2}{ka}} \quad (1.2.9)$$

характеризует поперечную ширину пучка.

1.2.3 Бейтменовский гауссовский пакет

Другим важным примером относительно неискажающегося решения с фазой Бейтмена-Ильона является простейший гауссовский пакет, отвечающий форме волны [15, 48]

$$f(\theta_{\mathcal{B}}) = \exp\left[2ka\left(1 - \sqrt{1 - \frac{i\theta_{\mathcal{B}}}{a}}\right)\right], \quad (1.2.10)$$

где ветвь корня имеет положительную вещественную часть, а постоянная k , играющая роль волнового числа, положительна. Решение локализовано вблизи пика — точки $\{\rho = 0, \alpha = 0\}$. Условие (1.1.8) обеспечивает сильную локализацию пакета. В [48] обсуждались и другие формы волны, отвечающие гауссовским пакетам.

Асимптотическое поведение решения вблизи пика получается разложением фазы до членов квадратичных относительно расстояния до пика при том условии, что $\rho/\tilde{\Delta}_{\perp}$, $\alpha/\tilde{\Delta}_{\parallel}$, β/a принимают значения порядка $O(1)$ при $ka \rightarrow +\infty$,

$$U \approx \frac{1}{\beta - ia} \exp\left(i\Psi - \frac{\rho^2}{\tilde{\Delta}_{\perp}^2} - \frac{\alpha^2}{\tilde{\Delta}_{\parallel}^2}\right), \quad (1.2.11)$$

$$\Psi = k\alpha + \frac{\beta\rho^2}{a\tilde{\Delta}_{\perp}^2}, \quad (1.2.12)$$

где

$$\tilde{\Delta}_{\parallel} = 2\sqrt{\frac{a}{k}} \quad (1.2.13)$$

и $\tilde{\Delta}_{\perp}$ — продольная и поперечная ширины пакета, соответственно (подробнее см. [15, 48]). Член $-\rho^2/\tilde{\Delta}_{\perp}^2$ в экспоненте в правой части формулы (1.2.11) обеспечивает гауссовскую локализацию вблизи оси z (то есть в поперечном направлении), а член $-\alpha^2/\tilde{\Delta}_{\parallel}^2$ — гауссовскую локализацию в окрестности бегущей точки $z = ct$ (в продольном направлении).

В [48] выписаны асимптотики решения (1.2.7), (1.2.10) на больших расстояниях при условиях $ct \gg a$, $ct \gg |A|$ и $ct \ll -a$, $ct \ll -|B|$, где

$$A = R - ct, \quad B = R + ct \quad (1.2.14)$$

и $R = \sqrt{\rho^2 + z^2}$. При $ka \gg 1$ асимптотики дальнего поля упрощаются вблизи пика. Для $|A| \ll a$, $\chi \ll 1$, где

$$\chi = \operatorname{arctg} \frac{\rho}{z} \quad (1.2.15)$$

— азимутальный угол, асимптотика дальнего поля принимает вид

$$U \approx \frac{1}{2R} \exp \left(ikA - \frac{\chi^2}{\tilde{\Delta}_{angular}^2} - \frac{A^2}{\tilde{\Delta}_{\parallel}^2} \right), \quad \chi \ll 1, \quad (1.2.16)$$

где

$$\tilde{\Delta}_{angular} = \frac{2}{\sqrt{ka}} \quad (1.2.17)$$

— угловая ширина пакета. Для $|B| \ll a$, $\pi - \chi \ll 1$

$$U \approx \frac{1}{2R} \exp \left(-ikB - \frac{(\pi - \chi)^2}{\tilde{\Delta}_{angular}^2} - \frac{B^2}{\tilde{\Delta}_{\parallel}^2} \right), \quad \pi - \chi \ll 1. \quad (1.2.18)$$

При условии (1.1.8), параксиальная формула (1.2.11) сшивается с дальним полем (1.2.16), (1.2.18) вблизи пика. Для гармонического случая это детально прослежено в [8].

1.2.4 Некоторые другие обобщения решения Бейтмена

Формула (1.2.7) обобщалась в разных направлениях. Рассматривались высшие моды, соответствующие осесимметрической фазе, т.е. решения с $g = g(x, y, \beta)$ (см., например, [14]). Изучались и неосесимметрические обобщения фазы (1.2.4) (см., например, [17, 49]). Отметим, что многие из частных бейтменовских решений были получены также методами интегральных преобразований, обзор которых дан в [36].

1.2.5 Комплексифицированные сферические волны

Негармонические комплексифицированные сферические волны возникают² путем замены $z \rightarrow z - ia$ в (1.2.3):

$$\theta = \theta_{\mathcal{E}} := R_* - ct, \quad g = 1/R_* \quad (1.2.19)$$

где R_* определено в (1.1.13), в решении (1.2.1) с фазой и амплитудой, определенными в (1.2.3). Значок \mathcal{E} призван напоминать о выражении *complex source*. Полученная таким обра-

²Эти решения в другой, менее явной, форме возникали в работах Фелсена и Хеймана, например, [42, 43].

зом функция

$$U = \frac{f(\theta_{\mathcal{E}})}{R_*} \quad (1.2.20)$$

удовлетворяет неоднородному волновому уравнению

$$\square U = F, \quad (1.2.21)$$

где *нестационарное распределение токов* F сосредоточено на некоторой антенне \mathcal{S} , вид которой как и в гармоническом случае определяется выбором ветви комплексного корня, входящего в R_* . Изучению этого вопроса посвящен Раздел 4.1.

Формула (1.2.20) обобщалась в разных направлениях. Рассматривались высшие моды, соответствующие осесимметрической фазе, т.е. решения с $g = g(x, y, z)$ (см., например, [14]). Изучались и неосесимметрические обобщения фазы (1.2.4) (см., например, [17, 49]).

Отметим, что в литературе нет вполне ясного понимания того, что решения с фазой $\theta_{\mathcal{B}}$ и $\theta_{\mathcal{E}}$ — это разные решения. Например, в заголовке важной работы [64], где впервые построено бейтменовское решение с конечной энергией, присутствуют слова “комплексный источник”, хотя фаза $\theta_{\mathcal{E}}$ там не фигурирует. Известны также и другие примеры нестационарных локализованных решений, не связанные с фазой Бейтмена-Ильона $\theta_{\mathcal{B}}$ или фазой “комплексного источника” $\theta_{\mathcal{E}}$ (см., например, обзор [14]). Их мы касаться не будем.

1.3 Нестационарные решения обладающие сингулярностью, локализованной в бегущей точке

Созданная Хёрмандером теория волновых фронтов допускает в применении к волновому уравнению (1.0.1) существование решений, имеющих в каждый момент времени t сингулярность в одной *пространственной точке* $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, причем сингулярность бежит со скоростью c вдоль (пространственной) прямой. Пример такого решения приведен в [31] (стр. 328) и обсуждался более подробно в [3]. Как функция на \mathbb{R}^3 , зависящая от t как от параметра, это решение бесконечно дифференцируемо за исключением одной точки (зависящей от t), в которой пределы по всем направлениям существуют и одинаковы, однако скорость стремления к пределу не равномерна по направлению, и функция в этой точке не непрерывна. Другим примером является функция, непрерывная всюду в \mathbb{R}^3 и бесконечно дифференцируемая за исключением одной точки [10, 31]. Исследователи использовали достаточно абстрактные подходы и не уделяли внимания аналитической структуре этих решений.

Глава 2

Гармонический “комплексный источник” в трехмерном случае

В этой главе мы будем рассматривать комплексифицированную функцию Грина G_* (1.1.12) для уравнения Гельмгольца (1.1.10)–(1.1.11), введенную в Главе 1. Мы отмечали, что (1.1.12) не является однозначной функцией $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, за счет вхождения в нее комплексного корня R_* . В *физическом пространстве* \mathbb{R}^3 точкам ветвления квадратного корня R_* соответствует окружность

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{r} : z = 0, \sqrt{x^2 + y^2} = a\}. \quad (2.0.1)$$

При любом выборе ветви корня R_* функция G_* имеет скачок на некоторой поверхности $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ с краем \mathcal{C} , вид которой определяется выбором разреза. Поэтому G_* удовлетворяет уравнению (1.1.10) с правой частью F , сосредоточенной на поверхности \mathcal{S} . Мы будем называть \mathcal{S} *антенной*, а F — *распределением токов* на антенне. Как мы увидим, антенна может быть компактна и некомпактна и иметь одну или несколько компонент связности. Мы считаем ее осесимметрической относительно оси z , а разрез, соответственно, не зависящим от полярного угла. Изучению антенны для разных случаев фиксации ветви корня и вычислению токов на ней посвящены Разделы 2.1, 2.2, 2.3.

Ветвь корня (1.1.13) мы фиксируем всегда так, чтобы параксиальное поле (1.1.12) (см., например, [14]) при $z \rightarrow +\infty$ представляло собой уходящую волну, что достигается при выполнении условия

$$\operatorname{Re} R_* \rightarrow +\infty \text{ при } z \rightarrow +\infty. \quad (2.0.2)$$

При этом характер волнового поведения (1.1.12) существенно зависит от того, компактна ли антенна \mathcal{S} . Говоря грубо, если \mathcal{S} некомпактна, то поле гауссовски локализовано вблизи оси z , приходя с одной бесконечности по z и уходя на другую [59]. Такая ситуация получила название *beam choice* [57]. Если \mathcal{S} компактна, то антенна излучает в одну сторону гауссов пучок, а излучение в противоположную сторону при условии (1.1.8) очень малое. Это случай *source choice* [57]. Термины *beam choice* и *source choice* введены в [57] для важных специальных

случаев, когда антенна лежит в плоскости $z = 0$ и является, соответственно, плоскостью с круглым вырезом или бесконечно тонким диском. В Разделе 2.6 мы распространим эти термины на случаи более сложных разрезов. Изучению волнового поведения функции (1.1.12) посвящены Разделы 2.4, 2.5, 2.6.

2.1 Функция источника в случае *beat choice*

Сначала рассмотрим простой случай, когда ветвь корня (1.1.13) фиксирована условием

$$\operatorname{Im} R_* \geq 0. \quad (2.1.1)$$

Не составляет большого труда убедиться, что в этом случае выполняется (2.0.2). Антенна

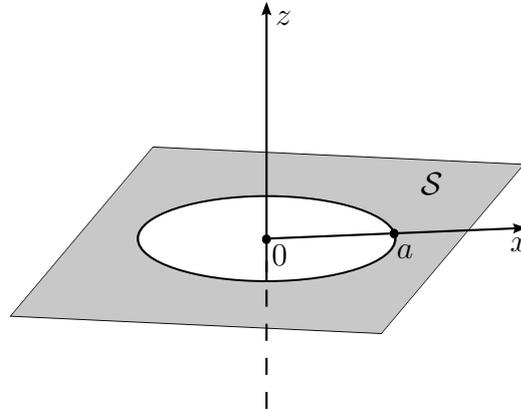


Рисунок 2.1: Неограниченная антенна \mathcal{S} , отвечающая фиксации ветви (2.1.1).

\mathcal{S} представляет собой плоскость с исключенным диском,

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{r} : \rho \geq a, z = 0\}, \quad (2.1.2)$$

см. Рисунок 2.1. На антенне функция R_* имеет скачок, причем

$$R_*|_{\rho \geq a, z = \pm 0} = \pm \sqrt{\rho^2 - a^2} =: \pm r_0(\rho), \quad r_0(\rho) \geq 0. \quad (2.1.3)$$

2.1.1 Скачки поля на антенне

При выполнении строгого неравенства $\rho > a$ функцию G_* в окрестности \mathcal{S} можно считать кусочно-гладкой. Поскольку G_* удовлетворяет в $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}$ однородному уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)G_* = 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}, \quad (2.1.4)$$

применяя к G_* оператор Гельмгольца, мы получим

$$F = (\Delta + k^2)G_* = [G_*]_{z=0} \delta'(z) + \left[\frac{\partial G_*}{\partial z} \right]_{z=0} \delta(z), \quad \rho > a, \quad (2.1.5)$$

где

$$[G_*]_{z=0} := G_*|_{z=+0} - G_*|_{z=-0} = 2 \frac{\cos(kr_0)}{r_0}, \quad (2.1.6)$$

$$\left[\frac{\partial G_*}{\partial z} \right]_{z=0} = 2ika \frac{\sin(kr_0)}{r_0^2} + 2ia \frac{\cos(kr_0)}{r_0^3} \quad (2.1.7)$$

— скачки G_* и ее нормальной производной на поверхности \mathcal{S} . Заметим, что второе слагаемое в (2.1.7) имеет при $\rho = a$ неинтегрируемую особенность и, таким образом, для рассмотрения (2.1.5) как обобщенной функции требуется регуляризация.

2.1.2 Регуляризация

Будем рассматривать F как обобщенную функцию, действующую на основные (гладкие финитные) функции $\psi = \psi(x, y, z)$. В силу (1.1.10) справедливо

$$(F, \psi) = \iiint_{\mathbb{R}^3} G_* (\Delta + k^2) \psi \, dx \, dy \, dz. \quad (2.1.8)$$

Запишем интеграл (2.1.8) в виде предела

$$(F, \psi) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{\Omega_{\varepsilon, \beta}} G_* (\Delta + k^2) \psi \, \rho \, d\rho \, dz \, d\varphi, \quad (2.1.9)$$

где область интегрирования, $\Omega_{\varepsilon, \beta}$ получается вращением вокруг оси z двумерной области $\Omega_{\varepsilon, \beta}^*$, показанной на Рисунке 2.2.

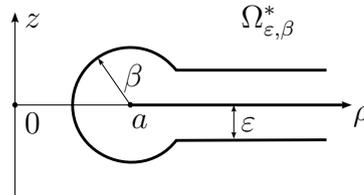


Рисунок 2.2: Сечение области интегрирования в (2.1.9).

Вследствие (2.1.4) и финитности функции ψ , применение к (2.1.9) формулы Грина дает

$$(F, \psi) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\partial\Omega_{\varepsilon, \beta}} \left(G_* \frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{\partial G_*}{\partial n} \psi \right) dS, \quad (2.1.10)$$

где $\psi_n := \partial\psi/\partial n$ — производная функции ψ по внешней нормали к $\partial\Omega_{\varepsilon,\beta}$, dS — элемент площади $\partial\Omega_{\varepsilon,\beta}$. Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$(F, \psi) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left\{ 2\pi \int_{a+\beta}^{+\infty} \left(\left[\frac{\partial G_*}{\partial z} \right]_{z=0} \bar{\phi} - [G_*]_{z=0} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right) \rho d\rho + \iint_{\mathcal{T}_\beta(a)} \left(G_* \frac{\partial \psi}{\partial \nu} - \frac{\partial G_*}{\partial \nu} \psi \right) dS \right\}, \quad (2.1.11)$$

где $\mathcal{T}_\beta(a)$ — тор с радиусом образующей окружности β , окружающий \mathcal{C} . Здесь $G_{*\nu} := \partial G_*/\partial \nu$ — производная G_* по внутренней нормали к $\mathcal{T}_\beta(a)$, а $\bar{\phi}$ — усреднение функции

$$\phi(\rho, z, \varphi) := \psi(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \quad (2.1.12)$$

по полярному углу, введенному равенствами $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi)$,

$$\bar{\phi}(\rho, z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\rho, z, \varphi) d\varphi. \quad (2.1.13)$$

Подставив (2.1.6), (2.1.7) в (2.1.11), получим под знаком предела выражение

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} = & -4\pi \int_{a+\beta}^{\infty} \frac{\cos(kr_0)}{r_0} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \rho d\rho + 4\pi ika \int_{a+\beta}^{\infty} \frac{\sin(kr_0)}{r_0^2} \bar{\phi} \rho d\rho + \\ & + 4\pi ia \int_{a+\beta}^{\infty} \frac{\cos(kr_0)}{r_0^3} \bar{\phi} \rho d\rho + \iint_{\mathcal{T}_\beta(a)} \left(G_* \frac{\partial \psi}{\partial \nu} - \frac{\partial G_*}{\partial \nu} \psi \right) dS \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Интеграл

$$\int_{a+\beta}^{\infty} \frac{\cos(kr_0)}{r_0^3} \bar{\phi} \rho d\rho$$

расходится при $\beta = 0$. Выделив стандартным способом сингулярность и группируя в (2.1.14) расходящиеся при $\beta \rightarrow 0$ слагаемые, представим (2.1.14) в виде

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_{reg} + \mathfrak{I}_{sing}, \quad (2.1.15)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_{reg} = & -4\pi \int_{a+\beta}^{\infty} \frac{\cos(kr_0)}{r_0} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \rho d\rho + 4\pi ika \int_{a+\beta}^{\infty} \frac{\sin(kr_0)}{r_0^2} \bar{\phi} \rho d\rho + \\ & + 4\pi ia \int_{a+\beta}^{\infty} \frac{\bar{\phi} \cos(kr_0) - \bar{\phi}(a,0)}{r_0^3} \rho d\rho, \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

$$\mathfrak{I}_{sing} = 4\pi ia \bar{\phi}(a,0) \int_{a+\beta}^{\infty} \frac{\rho d\rho}{r_0^3} + \iint_{\mathcal{T}_\beta(a)} \left(G_* \frac{\partial \psi}{\partial \nu} - \frac{\partial G_*}{\partial \nu} \psi \right) dS. \quad (2.1.17)$$

Получим оценку \mathfrak{I}_{sing} при $\beta \rightarrow 0$. Интеграл в первом слагаемом правой части (2.1.17) равен

$$\int_{a+\beta}^{\infty} \frac{\rho d\rho}{r_0^3} = - \frac{1}{r_0} \Big|_{\rho=a+\beta}^{+\infty},$$

где r_0 определено в (2.1.3), и мы приходим к следующей оценке первого слагаемого,

$$2\pi i \sqrt{2a} \bar{\phi}(a,0) \beta^{-1/2} + O(\beta^{1/2}). \quad (2.1.18)$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (2.1.17). Введем на торе \mathcal{T}_β координаты (ϑ, φ) равенствами

$$\rho - a = \beta \cos \vartheta, \quad z = -\beta \sin \vartheta, \quad \varphi = \varphi, \quad \vartheta \in (-\pi, \pi), \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Элемент поверхности тора \mathcal{T}_β примет вид

$$dS = (a + \beta \cos \vartheta) \beta d\vartheta d\varphi. \quad (2.1.19)$$

Функцию R_* на торе можно представить в виде $R_* = \sqrt{2a\beta e^{i\vartheta} + \beta^2}$, откуда

$$G_* = \frac{e^{-i\frac{\vartheta}{2}}}{\sqrt{2a}} \beta^{-\frac{1}{2}} + O(1), \quad \frac{\partial G_*}{\partial \nu} = \frac{\partial G_*}{\partial \beta} = -\frac{e^{-i\frac{\vartheta}{2}}}{2\sqrt{2a}} \beta^{-\frac{3}{2}} + O(\beta^{-\frac{1}{2}}). \quad (2.1.20)$$

Подставив (2.1.19), (2.1.20) в рассматриваемый последний интеграл в правой части (2.1.17), получим

$$\iint_{\mathcal{T}_\beta(a)} \left(G_* \frac{\partial \psi}{\partial \nu} - \psi \frac{\partial G_*}{\partial \nu} \right) dS = -2\pi i \bar{\phi}(a,0) \sqrt{2a} \beta^{-\frac{1}{2}} + O(\beta^{\frac{1}{2}}). \quad (2.1.21)$$

Таким образом, как видно из (2.1.18) и (2.1.21), правая часть (2.1.17) оценивается как

$$\mathfrak{I}_{sing} = O(\beta^{1/2}).$$

2.1.3 Функция источника

Переходя в (2.1.11) к пределу при $\beta \rightarrow 0$, получим

$$F = F_1(\rho) \delta'(z) + F_2(\rho) \delta(z), \quad (2.1.22)$$

причем

$$(F_1, \tilde{\phi}) = 2 \int_a^\infty \frac{\cos(kr_0)}{r_0} \tilde{\phi}(\rho) \rho d\rho, \quad (2.1.23)$$

а

$$(F_2, \tilde{\phi}) = 2ika \int_a^\infty \frac{\sin(kr_0)}{r_0^2} \tilde{\phi}(\rho) \rho d\rho + 2ia \int_a^\infty \frac{\tilde{\phi}(\rho) \cos(kr_0) - \phi(a)}{r_0^3} \rho d\rho, \quad (2.1.24)$$

где $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(\rho)$ — основная функция, зависящая от одной переменной.

2.2 Функция источника в случае *source choice*

Рассмотрим теперь другой простой случай, когда ветвь корня (1.1.13) фиксирована условием

$$\operatorname{Re} R_* \geq 0. \quad (2.2.1)$$

Несложно убедиться, что тогда выполняется (2.0.2), а антенна представляет собой беско-

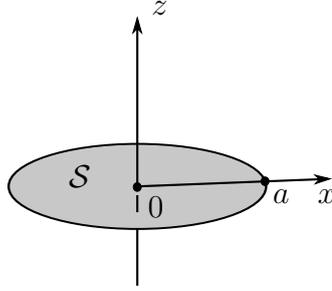


Рисунок 2.3: Ограниченная антенна \mathcal{S} , отвечающая фиксации ветви (2.2.1).

нечно тонкий диск

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{r} : \rho \leq a, z = 0\}, \quad (2.2.2)$$

см. Рисунок 2.3. Предельные значения R_* на антенне (2.2.2) имеют вид

$$R_*|_{\rho \leq a, z = \pm 0} = \mp i r_1, \quad r_1 = \sqrt{a^2 - \rho^2} > 0, \quad (2.2.3)$$

откуда

$$[G_*]_{z=0} = 2i \frac{\operatorname{ch}(k r_1)}{r_1}, \quad (2.2.4)$$

$$\left[\frac{\partial G_*}{\partial z} \right]_{z=0} = -2ka \frac{\operatorname{sh}(k r_1)}{r_1^2} + 2a \frac{\operatorname{ch}(k r_1)}{r_1^3}. \quad (2.2.5)$$

Вычисления, аналогичные проведенным в Разделе 2.1, дают для функции источника

$$F = F_1(\rho) \delta'(z) + F_2 \delta(z), \quad (2.2.6)$$

$$(F_1, \tilde{\phi}) = 2a \int_0^a \frac{\operatorname{ch}(k r_1)}{r_1^2} \tilde{\phi}(\rho) \rho d\rho, \quad (2.2.7)$$

$$(F_2, \tilde{\phi}) = -2ka \int_0^a \frac{\operatorname{sh}(k r_1)}{r_1^2} \tilde{\phi}(\rho) \rho d\rho + 2a \int_0^a \frac{\tilde{\phi}(\rho) \operatorname{ch}(k r_1) - \tilde{\phi}(a)}{r_1^3} \rho d\rho - 2\tilde{\phi}(a), \quad (2.2.8)$$

где $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(\rho)$ — основная функция, зависящая от одной переменной. Мы получим (2.2.6)–(2.2.8) в Разделе 2.3.10 из результатов для общего случая.

2.3 Функция источника для произвольной антенны

2.3.1 Выбор разреза

Рассмотрим комплексную плоскость подкоренного выражения в (1.1.13),

$$u + iv = w = \rho^2 + z^2 - a^2 - 2iaz, \quad a > 0. \quad (2.3.1)$$

Поскольку ρ и z вещественны, w принимает значения во внутренней параболы — замкнутой области, определяемой неравенством

$$\Pi = \left\{ w : u \geq \frac{1}{4a^2}v^2 - a^2 \right\}. \quad (2.3.2)$$

На комплексной плоскости переменной w мы проведем разрез вдоль гладкой несамопересекающейся кривой, уходящей на бесконечность. Пусть она задана параметрически

$$w = w(t), \quad t \in [0, +\infty), \quad (2.3.3)$$

причем $w(0) = 0$. Здесь t — параметр вдоль кривой, который мы примем равным длине дуги.

Предположим, что выполнено условие регулярности (см., например, [21])

$$u_t^2(t) + v_t^2(t) > 0, \quad t \in [0, +\infty), \quad (2.3.4)$$

где $u(t) = \operatorname{Re} w(t)$, $v(t) = \operatorname{Im} w(t)$, $u_t = \partial u / \partial t$ и $v_t = \partial v / \partial t$. Кроме того, мы предполагаем, что все пересечения кривой с границей

$$\partial\Pi = \left\{ w : u = \frac{1}{4a^2}v^2 - a^2 \right\} \quad (2.3.5)$$

замкнутой области Π (2.3.2) трансверсальны, т.е. угол между касательными к $w(t)$ и $\partial\Pi$ в точке их пересечения отличен от нуля.

С точки зрения описания антенны \mathcal{S} представляет интерес поведение $w(t)$ в области Π , соответствующей вещественным ρ и z , т.е. физическому пространству \mathbb{R}^3 . Рассмотрим

$$I = \{t : w(t) \in \Pi\} \quad (2.3.6)$$

— множество значений параметра t , при которых кривая (2.3.3) лежит в Π . Потребуем, чтобы разрез $w(t)$ пересекал параболу $\partial\Pi$ конечное число N раз, допуская $N = 0$. Тогда отрезок кривой $\{w(t), t \in [0, +\infty)\} \cap \Pi$ (и, соответственно, антенна \mathcal{S}) имеет $\mathcal{N} = \lceil \frac{N+1}{2} \rceil$ компонент связности, где $\lceil \kappa \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq \kappa\}$ — округление κ до ближайшего целого числа в большую сторону. Пусть $\{t_j\}_{j=1, \dots, N}$, $t_j < t_{j+1}$, $\rho(t_j) = 0$ (см. (2.3.10)) — значения параметра t , соответствующие пересечениям с $\partial\Pi$. Тогда множество I представляет собой объединение

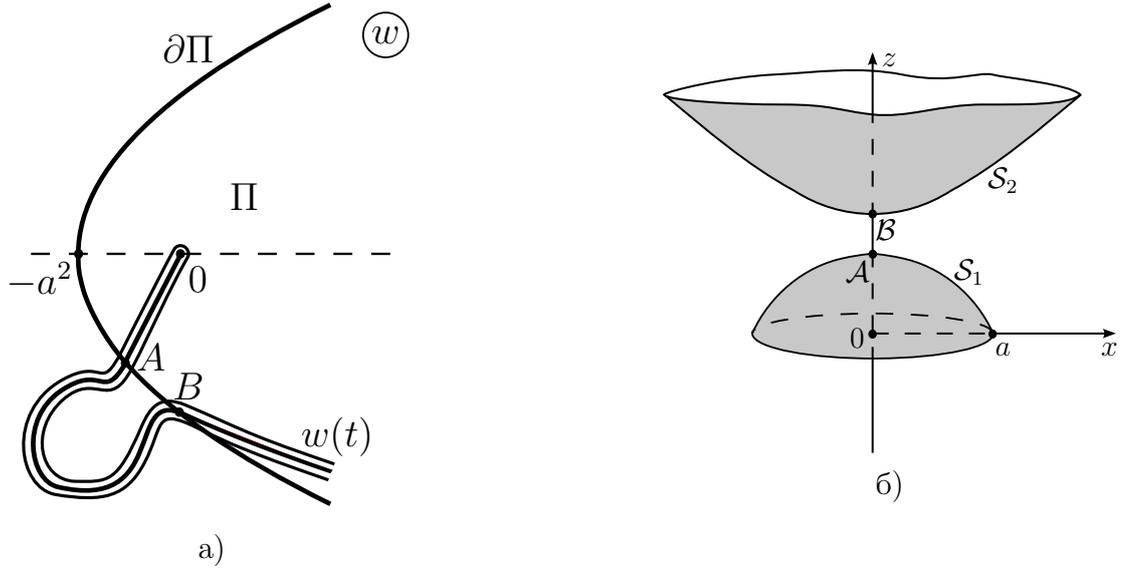


Рисунок 2.4: Пример разреза $w(t)$ и соответствующей ему антенны \mathcal{S} . Точкам $A, B \in \partial\Pi$ отвечают точки $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}$. В точке \mathcal{A} $w = w(t_1)$ (и, соответственно, $\rho = \rho(t_1) = 0$, $z = z(t_1)$); в точке \mathcal{B} $w = w(t_2)$, (и $\rho = \rho(t_2) = 0$, $z = z(t_2)$).

непересекающихся интервалов. Если N нечетно, $N = 2M + 1$, то

$$I = [0, t_1] \cup [t_2, t_3] \cup \dots \cup [t_{2M}, t_{2M+1}], \quad t_{2M+1} < +\infty, \quad (2.3.7)$$

и антенна \mathcal{S} компактна. Если N четно, $N = 2M$, то

$$I = [0, t_1] \cup [t_2, t_3] \cup \dots \cup [t_{2M}, +\infty), \quad \text{или } I = [0, +\infty), \quad (2.3.8)$$

и антенна \mathcal{S} некомпактна.

2.3.2 Антенна

Из (2.3.1) вытекает, что поверхность $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$, соответствующая разрезу, задается параметрически в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \varphi) = \rho(t) \cos \varphi \mathbf{e}_x + \rho(t) \sin \varphi \mathbf{e}_y + z(t) \mathbf{e}_z, \quad t \in I, \varphi \in [0, 2\pi), \quad (2.3.9)$$

где $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ — орты декартовых координат, и

$$z(t) = -v(t)/2a, \quad \rho(t) = \sqrt{u(t) + a^2 - (v(t)/2a)^2}. \quad (2.3.10)$$

Соответствие между разрезом и антенной поясняет Рисунок 2.4.

В случае, когда антенна уходит на бесконечность (т.е. когда I имеет вид (2.3.8)), мы будем требовать чтобы она была асимптотически конической. Для этого введем дополнительное

условие на разрез. А именно, мы предположим, что существует предел

$$\chi_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\rho(t)}{z(t)}. \quad (2.3.11)$$

Скорость стремления к пределу в (2.3.11) значения не имеет.

Теорема 2.3.1. *Поверхность $\mathcal{S} \setminus \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ является гладкой и регулярной.*

Доказательство. Вне точек пересечения \mathcal{S} с осью z , т.е. для $t \in I$ таких, что $\rho(t) > 0$, параметризация (2.3.9) очевидно является гладкой. Это непосредственно следует из (2.3.9), (2.3.10) и гладкости кривой (2.3.3). Условие регулярности поверхности \mathcal{S} имеет вид (см., например, [9, 21])

$$|\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_\varphi| \equiv \sqrt{\left(\frac{u_t}{2} - \frac{vv_t}{4a^2}\right)^2 + \left(\frac{v_t}{2a}\right)^2} \rho^2 > 0, \quad (2.3.12)$$

где $\mathbf{r}_t = \partial \mathbf{r} / \partial t$, $\mathbf{r}_\varphi = \partial \mathbf{r} / \partial \varphi$, а \times обозначает векторное произведение. Справедливость (2.3.12) при $\rho(t) > 0$ следует из (2.3.4).

В точках пересечения \mathcal{S} с осью z параметризация (2.3.9), вообще говоря, перестает быть гладкой. Таким точкам соответствуют точки пересечения кривой (2.3.3) с границей (2.3.5) области (2.3.2). В окрестности точки пересечения $(u_0, v_0) \in \partial\Pi$ зададим кривую (2.3.3) неявно уравнением $\Phi(u, v) = 0$, где $\Phi(u, v)$ — гладкая вещественнозначная функция. Условие трансверсальности пересечения кривой (2.3.3) с $\partial\Pi$ примет вид (см., например, [21])

$$\left| \frac{v_0}{2a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0) \right| > 0. \quad (2.3.13)$$

Точке $(u_0, v_0) \in \partial\Pi$ соответствует некоторая точка в \mathbb{R}^3 с координатами $x = y = 0$, $z = z_0$. В окрестности этой точки поверхность $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ описывается уравнением

$$\tilde{\Phi}(x, y, z) = 0, \quad (2.3.14)$$

где

$$\tilde{\Phi}(x, y, z) := \Phi(u(x, y, z), v(x, y, z)) = \Phi(x^2 + y^2 + z^2 - a^2, -2az). \quad (2.3.15)$$

Условие регулярности поверхности \mathcal{S} имеет вид (см., например, [9])

$$|\nabla_{\mathbf{r}} \tilde{\Phi}| > 0. \quad (2.3.16)$$

Из (2.3.15)

$$\left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} \right|_{x=y=0, z=z_0} = \left(2z_0 \frac{\partial \Phi(u, v)}{\partial u} - 2a \frac{\partial \Phi(u, v)}{\partial v} \right) \Big|_{u=z_0^2 - a^2, v=-2az_0}, \quad (2.3.17)$$

что, как следует из (2.3.13), отлично от нуля. Таким образом, в точке пересечения поверхности \mathcal{S} с осью z выполнено условие (2.3.16). Теорема доказана. \square

Соотношение (2.3.12) позволяет определить нормаль к $\mathcal{S} \setminus \mathcal{C}$ как

$$\mathbf{n}(t, \varphi) := \frac{\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_\varphi}{|\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_\varphi|} = \frac{-z_t \cos \varphi \mathbf{e}_x - z_t \sin \varphi \mathbf{e}_y + \rho_t \mathbf{e}_z}{\sqrt{\rho_t^2 + z_t^2}}. \quad (2.3.18)$$

2.3.3 Фиксация ветви корня

Зафиксируем ветвь корня (1.1.13) так, чтобы при уходе на бесконечность вдоль кривой $\partial\Pi$ в нижней полуплоскости переменной w выполнялось условие $\operatorname{Re} R_* \rightarrow +\infty$. Это условие, как легко понять из (2.3.5), равносильно условию (2.0.2), поскольку $\partial\Pi$ в нижней полуплоскости переменной w соответствует положительной полуоси z в \mathbb{R}^3 .

Формулы (2.3.9), (2.3.18) позволяют ввести вблизи поверхности \mathcal{S} локальные координаты (t, φ, n) ,

$$\mathbf{r}(t, \varphi, n) := \mathbf{r}(t, \varphi) + n\mathbf{n}, \quad (2.3.19)$$

где n — расстояние до поверхности, которое может быть обоих знаков. Обозначим граничное значение функции R_* при $n = -0$ через

$$R_0(t) := R_*(\mathbf{r}(t, \varphi, n))|_{n=-0} = -R_*(\mathbf{r}(t, \varphi, n))|_{n=+0}. \quad (2.3.20)$$

Таким образом, $R_0(t)$ — это предельное значение R_* на левом берегу разреза $w(t)$ (мы считаем кривую $w = w(t)$ ориентированной в направлении роста параметра t).

Особую роль в дальнейшем будет играть *первая компонента связности* \mathcal{S}_1 , $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}_1$, антенны \mathcal{S} — компонента связности, содержащая границу \mathcal{C} . Как следует из (2.3.7)–(2.3.8), \mathcal{S}_1 соответствует значениям параметра t из промежутка $t \in [0, \tau_*]$, где τ_* определяется как

$$\tau_* = +\infty, \quad \text{если } \{w : w = w(t)\} \cap \partial\Pi = \emptyset, \quad (2.3.21)$$

$$\tau_* = t_1, \quad \text{если } \{w : w = w(t)\} \cap \partial\Pi \neq \emptyset. \quad (2.3.22)$$

В случае (2.3.21) \mathcal{S}_1 не пересекает ось z , а в случае (2.3.22) — пересекает ее. В точке τ_* запишем R_0 в виде

$$R_0(\tau_*) = \sqrt{|w(\tau_*)|} e^{\frac{i}{2} \operatorname{arg} w(\tau_*) + i\pi m} = \sigma \sqrt{|w(\tau_*)|} e^{\frac{i}{2} \operatorname{arg} w(\tau_*)}, \quad (2.3.23)$$

где значение $m = 0, 1$ и, соответственно, значение $\sigma = \pm 1$ однозначно определяются для каждого разреза сделанным выше выбором ветви (в случае (2.3.21) выражение (2.3.23) следует понимать в смысле предела при $\tau_* \rightarrow +\infty$).

Поясним правило определения σ в зависимости от вида разреза. В случае (2.3.21), поскольку R_0 есть предельное значение R_* на левом берегу разреза, из (2.3.23) сразу следует, что $\sigma = -1$.

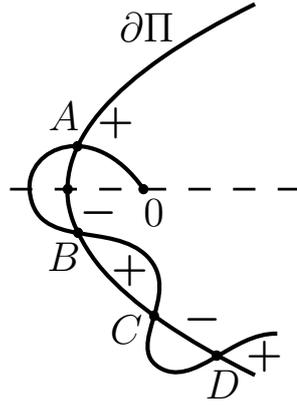


Рисунок 2.5: К определению σ в случае (2.3.22).

В случае (2.3.22) ответ зависит от характера пересечений разреза и параболы $\partial\Pi$. Рассмотрим точки пересечения $w(t_j)$ разреза с параболой, для которых $z(t_j) \geq z(\tau_*)$ (точки A, B, C, D на Рисунке 2.5, иллюстрирующем наше рассмотрение на частном примере). Очевидно, что в точках $w \in \partial\Pi$ (что соответствует оси z) $R_* = \sqrt{w}$ принимает значения

$$R_* = \pm(z - ia). \quad (2.3.24)$$

Для точек на $\partial\Pi$, отвечающих значениям $z > \max_{j=1, \dots, N} z(t_j)$ сделанный нами выбор ветви дает $R_* = z - ia$. Будем двигаться вдоль параболы $\partial\Pi$ от точки, отвечающей $z = \max_{j=1, \dots, N} z(t_j)$, (точка D на Рисунке 2.5) к точке $w(\tau_*)$ (точка A на Рисунке 2.5). При каждом пересечении параболой разреза знак в правой части (2.3.24) меняется на противоположный. Таким образом, если число точек t_j , удовлетворяющих условию $z(t_j) \geq z(t_1)$ чётно, то на левом берегу разреза мы получим $R_*(t_j) = -(z(t_j) - ia)$, откуда $\sigma = -1$. Если же число таких точек нечётно, то $\sigma = 1$.

2.3.4 Простейшие разрезы и соответствующие им антенны

Проиллюстрируем построения Разделов 2.3.2 и 2.3.3 на двух простых примерах.

Начнем со случая *beam choice*, рассмотренного в Разделе 2.1. Выберем разрез в виде

$$u(t) = t, \quad v(t) = 0, \quad t \in [0, +\infty), \quad (2.3.25)$$

см. Рисунок 2.6. Поскольку разрез не пересекает $\partial\Pi$, то множество (2.3.6) имеет вид $I = [0, +\infty)$. Из (2.3.10) получаются уравнения

$$\rho(t) = \sqrt{t + a^2}, \quad z(t) = 0, \quad t \in [0, +\infty), \quad (2.3.26)$$

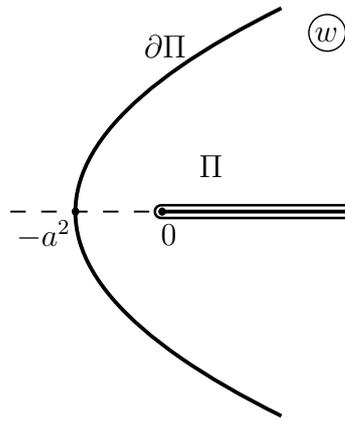


Рисунок 2.6: Разрез (2.3.25).

параметрически задающие соответствующую разрезу (2.3.25) антенну \mathcal{S} . Легко видеть, что она совпадает с (2.1.2). Из (2.3.18), (2.3.26) получается, что

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_z. \quad (2.3.27)$$

Далее, поскольку разрез (2.3.25) не пересекает $\partial\Pi$, то выполнено (2.3.21), откуда следует, что

$$\sigma = -1. \quad (2.3.28)$$

Тогда, как видно из (2.3.23), ветвь корня R_* определена в соответствии с (2.1.1).

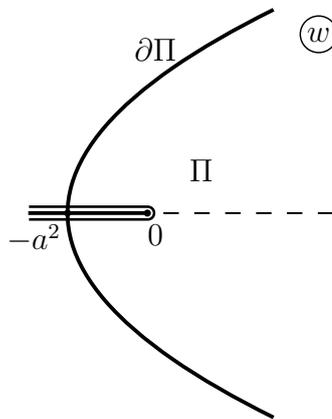


Рисунок 2.7: Разрез (2.3.29).

Перейдем к случаю *source choice*, рассмотренному в Разделе 2.2. Выберем разрез в виде

$$u(t) = -t, \quad v(t) = 0, \quad t \in [0, +\infty), \quad (2.3.29)$$

см. Рисунок 2.7. Разрез имеет единственное пересечение с $\partial\Pi$ в точке $\{u = -a^2, v = 0\}$, поэтому (2.3.6) имеет вид $I = [0, a^2]$. Из (2.3.10) получается, что антенна задается уравнениями

$$\rho(t) = \sqrt{a^2 - t}, \quad z(t) = 0, \quad t \in [0, a^2], \quad (2.3.30)$$

что соответствует (2.2.2). Нормаль в этом случае принимает вид

$$\mathbf{n} = -\mathbf{e}_z. \quad (2.3.31)$$

Разрез (2.3.29) пересекает $\partial\Pi$ один раз, и из (2.3.22) следует $\tau_* = a^2$. Мы, таким образом, должны положить

$$\sigma = 1, \quad (2.3.32)$$

что, как видно из (2.3.23) и означает, что ветвь корня R_* определена согласно условию (2.2.1).

2.3.5 Скачки поля на антенне

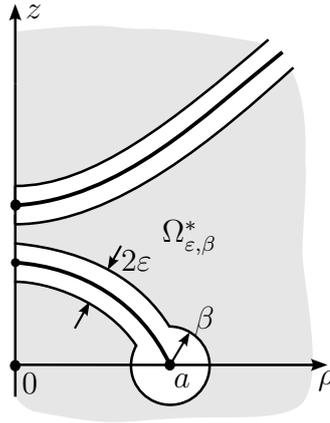


Рисунок 2.8: Сечение области $\Omega_{\epsilon, \beta}$ для антенны, соответствующей Рисунку 2.4.

Как прежде, представим F в виде предела

$$(F, \psi) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iiint_{\Omega_{\epsilon, \beta}} G_* (\Delta + k^2) \psi \, dx dy dz, \quad (2.3.33)$$

где область интегрирования $\Omega_{\epsilon, \beta}$ получается вращением вокруг оси z двумерной области $\Omega_{\epsilon, \beta}^*$, изображенной на Рисунке 2.8. Применяя к интегралу в (2.3.33) теорему Грина и переходя к пределу при $\epsilon \rightarrow 0$, получим

$$(F, \psi) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left\{ \iint_{S \setminus C_\beta} \left(\left[\frac{\partial G_*}{\partial n} \right]_S \tilde{\psi} - [G_*]_S \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial n} \right) d\Sigma + \iint_{\mathcal{T}_\beta} \left(\frac{\partial G_*}{\partial \nu} \psi - G_* \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right) dS \right\}. \quad (2.3.34)$$

Здесь первый интеграл берется по поверхности \mathcal{S} с исключенной окрестностью края,

$$\mathcal{C}_\beta = \mathcal{S} \cap \{\mathbf{r} : (\rho - a)^2 + z^2 \leq \beta^2\}. \quad (2.3.35)$$

Далее, dS и $d\Sigma = |\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_\varphi| dt d\varphi$ — элементы площади тора \mathcal{T}_β и поверхности \mathcal{S} , соответственно, $\frac{\partial G_*}{\partial \nu}$ — производная G_* по внешней нормали ν к тору \mathcal{T}_β , а

$$\tilde{\psi}(t, n, \varphi) = \psi(\mathbf{r}(t, \varphi, n)). \quad (2.3.36)$$

Скачки на антенне задаются выражениями

$$\begin{aligned} [G_*]_{\mathcal{S}} &:= G_*|_{n=+0} - G_*|_{n=-0} = -2 \frac{\cos(kR_0)}{R_0}, \\ \left[\frac{\partial G_*}{\partial n} \right]_{\mathcal{S}} &= 2 \left(k \frac{\sin(kR_0)}{R_0^2} + \frac{\cos(kR_0)}{R_0^3} \right) (\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}), \end{aligned} \quad (2.3.37)$$

где R_0 — предельное значение R_* , определенное в (2.3.20), $\frac{\partial G_*}{\partial n}$ — производная G_* по нормали (2.3.18) к поверхности \mathcal{S} и

$$\mathbf{r}_*(t, \varphi) := \mathbf{r}(t, \varphi) - ia\mathbf{e}_z = x(t, \varphi)\mathbf{e}_x + y(t, \varphi)\mathbf{e}_y + (z(t) - ia)\mathbf{e}_z. \quad (2.3.38)$$

2.3.6 Регуляризация интегралов в (2.3.34)

Подставив (2.3.37) в (2.3.34), получим под знаком предела выражение

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} &= \iint_{\mathcal{T}_\beta} \left(\frac{\partial G_*}{\partial \nu} \psi - G_* \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right) dS + 2 \iint_{\mathcal{S} \setminus \mathcal{C}_\beta} \frac{\cos(kR_0)}{R_0} \tilde{\psi}_n(t, 0, \varphi) d\Sigma + \\ &+ 2 \iint_{\mathcal{S} \setminus \mathcal{C}_\beta} \left(k \frac{\sin(kR_0)}{R_0^2} + \frac{\cos(kR_0)}{R_0^3} \right) (\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}) \tilde{\psi}(t, 0, \varphi) d\Sigma. \end{aligned}$$

Последний интеграл в этом выражении при $\beta \rightarrow 0$ расходится и нуждается в регуляризации на первой компоненте связности \mathcal{S}_1 поверхности \mathcal{S} . В итоге получаем выражение

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_{reg} + \mathfrak{J}_{sing}, \quad (2.3.39)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_{reg} &:= 2 \iint_{\mathcal{S} \setminus \mathcal{C}_\beta} \frac{\cos(kR_0)}{R_0} \tilde{\psi}_n d\Sigma + 2k \iint_{\mathcal{S} \setminus \mathcal{C}_\beta} \frac{\sin(kR_0)}{R_0^2} (\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}) \tilde{\psi} d\Sigma + \\ &+ 2 \iint_{\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_1} \frac{\cos(kR_0)}{R_0^3} (\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}) \tilde{\psi} d\Sigma + 2 \iint_{\mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{C}_\beta} \frac{\cos(kR_0) \tilde{\psi}(t, 0, \varphi) - \tilde{\psi}(0, 0, \varphi)}{R_0^3} (\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}) d\Sigma, \\ \mathfrak{J}_{sing} &:= \iint_{\mathcal{T}_\beta} \left(\frac{\partial G_*}{\partial \nu} \psi - G_* \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right) dS + 2 \iint_{\mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{C}_\beta} \frac{\tilde{\psi}(0, 0, \varphi)}{R_0^3} (\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}) d\Sigma. \end{aligned} \quad (2.3.40)$$

Перейдем к исследованию интегралов, входящих в \mathfrak{J}_{sing} .

2.3.7 Интеграл по тору

Рассмотрим

$$\mathfrak{J}_{\mathcal{T}_\beta} := \iint_{\mathcal{T}_\beta} \left(\frac{\partial G_*}{\partial \nu} \psi - G_* \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right) dS. \quad (2.3.41)$$

Введем на торе \mathcal{T}_β координаты (ϑ, φ) ,

$$\rho - a = \beta \cos \vartheta, \quad z = -\beta \sin \vartheta, \quad \varphi = \varphi, \quad (2.3.42)$$

$\vartheta \in (\vartheta_0, \vartheta_0 + 2\pi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Здесь $\vartheta_0 \in (-2\pi, 0]$ — значение ϑ , задающее в системе координат (ϑ, φ) окружность $\mathcal{T}_\beta \cap \mathcal{S}$, по которой пересекаются \mathcal{T}_β и \mathcal{S} . В системе координат (t, φ) на поверхности \mathcal{S} , эта окружность соответствует некоторому $t = \tau_\beta$, зависящему от β , причем $\tau_\beta \rightarrow 0$ при $\beta \rightarrow 0$. Из (2.3.20), (2.3.42) следует, что

$$R_*|_{\vartheta=\vartheta_0} = R_0(\tau_\beta). \quad (2.3.43)$$

Из (2.3.23), (2.3.42) видно, что

$$R_* = \sqrt{2a\beta e^{i\vartheta} + \beta^2} = \sigma \sqrt{2a} e^{i\frac{\vartheta}{2}} \beta^{\frac{1}{2}} + O(\beta), \quad (2.3.44)$$

откуда легко получаются оценки

$$G_* = \frac{\sigma e^{-i\frac{\vartheta}{2}}}{\sqrt{2a}} \beta^{-\frac{1}{2}} + O(1), \quad \frac{\partial G_*}{\partial \nu} = \frac{\partial G_*}{\partial \beta} = -\frac{\sigma e^{-i\frac{\vartheta}{2}}}{2\sqrt{2a}} \beta^{-\frac{3}{2}} + O(\beta^{-\frac{1}{2}}). \quad (2.3.45)$$

Подставляя (2.3.45) в (2.3.41), получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_{\mathcal{T}_\beta} &= -2\pi a \sigma \beta^{-1/2} \int_{\vartheta_0}^{2\pi+\vartheta_0} \frac{e^{-i\frac{\vartheta}{2}}}{2\sqrt{2a}} \bar{\phi}(a + \beta \cos \vartheta, -\beta \sin \vartheta) d\vartheta + O(\beta^{\frac{1}{2}}) = \\ &= 2\pi i \sigma \sqrt{2a} \bar{\phi}(a, 0) e^{-i\frac{\vartheta_0}{2}} \beta^{-\frac{1}{2}} + O(\beta^{\frac{1}{2}}), \end{aligned}$$

где $\bar{\phi}$ определено в (2.1.13). Используя (2.3.36), (2.3.43), (2.3.44), мы можем переписать это выражение в виде

$$\mathfrak{J}_{\mathcal{T}_\beta} = \frac{4\pi i a \bar{\phi}(a, 0)}{\sigma \sqrt{2a} e^{i\frac{\vartheta_0}{2}} \beta^{\frac{1}{2}}} + O(\beta^{\frac{1}{2}}) = 4\pi \bar{\psi}(0, 0) \frac{ia}{R_0(\tau_\beta)} + O(\beta^{\frac{1}{2}}), \quad (2.3.46)$$

где

$$\bar{\psi}(t, n) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{\psi}(t, n, \varphi) d\varphi. \quad (2.3.47)$$

2.3.8 Интеграл по антенне без окрестности края

Рассмотрим теперь второй интеграл в правой части (2.3.40),

$$\mathfrak{I}_{\mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{C}_\beta} := 2 \iint_{\mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{C}_\beta} \frac{\tilde{\psi}(0,0,\varphi)(\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n})}{R_0^3} d\Sigma. \quad (2.3.48)$$

Из (2.3.9), (2.3.18) и (2.3.38) видно, что

$$(\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}) = \frac{(z - ia)\rho_t - \rho z_t}{\sqrt{\rho_t^2 + z_t^2}}, \quad d\Sigma = |\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_\varphi| dt d\varphi = \rho \sqrt{\rho_t^2 + z_t^2} dt d\varphi.$$

Поверхности $\mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{C}_\beta$ соответствуют значения параметра $t \in [\tau_\beta, \tau_*]$, где $t = \tau_\beta$ отвечает линии пересечения поверхности \mathcal{S} с тором \mathcal{T}_β , а τ_* определено в (2.3.21)–(2.3.22). Интеграл (2.3.48) принимает вид

$$\mathfrak{I}_{\mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{C}_\beta} = 4\pi \tilde{\psi}(0,0) \int_{\tau_\beta}^{\tau_*} \frac{(z - ia)\rho\rho_t - \rho^2 z_t}{R_0^3} dt, \quad (2.3.49)$$

где функция $\tilde{\psi}(t,n)$ определена в (2.3.47).

Заметим, что

$$\mathfrak{I}_{\mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{C}_\beta} = 4\pi \tilde{\psi}(0,0) (J(\tau_*) - J(\tau_\beta)), \quad (2.3.50)$$

где

$$J(t) := -\frac{\partial R_*}{\partial z} \Big|_{n=0} = -\frac{z(t) - ia}{R_0(t)}. \quad (2.3.51)$$

В точке $t = \tau_\beta$ (поскольку $z(0) = 0$) из (2.3.51) следует

$$J(\tau_\beta) = \frac{ia}{R_0(\tau_\beta)} (1 + O(\tau_\beta)). \quad (2.3.52)$$

В точке $t = \tau_*$ возможны две ситуации. В случае (2.3.22), когда \mathcal{S} пересекает ось z , $R_0(\tau_*) = \sqrt{(z(t_1) - ia)^2} = \sigma(z(t_1) - ia)$, где σ определено в Разделе 2.3.3 Тогда

$$J(t_1) = -\sigma. \quad (2.3.53)$$

В случае (2.3.21), когда \mathcal{S} не пересекает ось z , записывая (2.3.51) в виде

$$J(t) = -\frac{z(t) - ia}{\sqrt{\rho^2(t) + (z(t) - ia)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2(t)/(z(t) - ia)^2}},$$

и устремляя t к бесконечности, получим

$$J(+\infty) = -\frac{\sigma}{\sqrt{1 + \chi_0^2}}, \quad (2.3.54)$$

где χ_0 определено в (2.3.11). В частности, для подробно рассмотренного в Разделе 2.1 случая плоскости с отверстием, $\chi_0 = \infty$ и $J(+\infty) = 0$.

Таким образом, (2.3.50) принимает вид

$$\mathfrak{J}_{S_1 \setminus C_\beta} = -4\pi \widetilde{\psi}(0,0) J(\tau_\beta) + 4\pi \widetilde{\sigma} \widetilde{\psi}(0,0) + O(\tau_\beta^{1/2}), \quad (2.3.55)$$

где

$$\widetilde{\sigma} = \begin{cases} \sigma & \text{если } N \geq 1, \\ \frac{\sigma}{\sqrt{1 + \chi_0^2}} & \text{если } N = 0, \end{cases} \quad (2.3.56)$$

а N — число пересечений антенны \mathcal{S} с осью z (см. (2.3.7)–(2.3.8)).

Подставляя в (2.3.40) выражения (2.3.46) и (2.3.55), полученные нами для первого и второго слагаемых (2.3.40), мы немедленно замечаем, что первое слагаемое в правой части (2.3.55) сокращается с (2.3.46), и выражение для \mathfrak{J}_{sing} принимает вид

$$\mathfrak{J}_{sing} = -4\pi \widetilde{\sigma} \widetilde{\psi}(0,0) + O(\tau_\beta^{1/2}). \quad (2.3.57)$$

Переходя в (2.3.34) к пределу при $\beta \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} (F, \psi) &= -4\pi \widetilde{\sigma} \widetilde{\psi}(0,0) + 2 \iint_S \frac{\cos(kR_0)}{R_0} \widetilde{\psi}_n d\Sigma + \\ &+ 2k \iint_S \frac{\sin(kR_0)}{R_0^2} (\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}) \widetilde{\psi} d\Sigma + 2 \iint_{S \setminus S_1} \frac{\cos(kR_0)}{R_0^3} (\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}) \widetilde{\psi} d\Sigma + \\ &+ 2 \iint_{S_1} \frac{\cos(kR_0) \widetilde{\psi}(t,0,\varphi) - \widetilde{\psi}(0,0,\varphi)}{R_0^3} (\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}) d\Sigma. \end{aligned} \quad (2.3.58)$$

2.3.9 ЯВНЫЙ ВИД ТОКОВ

Введем обобщенные функции $f(\mathbf{r})\delta_S$ и $\frac{\partial}{\partial n}(g(\mathbf{r})\delta_S)$, известные как простой и двойной слои на поверхности \mathcal{S} с плотностями f и g , соответственно, (см., например, [6]):

$$(f(\mathbf{r})\delta_S, \psi(\mathbf{r})) := \iint_S f \psi d\Sigma, \quad \left(\frac{\partial}{\partial n}(g(\mathbf{r})\delta_S), \psi(\mathbf{r}) \right) := - \iint_S g \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Sigma. \quad (2.3.59)$$

Пусть δ_C — дельта-функция, сосредоточенная на окружности \mathcal{C} ,

$$(\delta_C, \psi(\mathbf{r})) := \int_0^{2\pi} \psi(a \cos \varphi, a \sin \varphi, 0) d\varphi, \quad (2.3.60)$$

а обобщенная функция $\left\{ \frac{(\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n})}{R_0^3} \right\}_{S_1}$ определена формулой

$$\left(\left\{ \frac{(\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n})}{R_0^3} \right\}_{S_1}, \psi(\mathbf{r}) \right) := \iint_{S_1} \frac{\psi(\mathbf{r}(t,0,\varphi)) - \psi(\mathbf{r}(0,0,\varphi))}{R_0^3} (\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}) d\Sigma. \quad (2.3.61)$$

В результате доказана следующая

Теорема 2.3.2. Пусть разрез комплексного корня, входящего в функцию R_* выбран вдоль гладкой несамопересекающейся кривой (2.3.3), для которой выполнены условия (2.3.4), (2.3.11) и, в случае (2.3.8), условие (2.3.13). Тогда функция источника в (1.1.10) сосредоточена на гладкой регулярной поверхности $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$, имеющей вид (2.3.9)–(2.3.10), и равна

$$F = -2\tilde{\sigma}\delta_{\mathcal{C}} - 2\frac{\cos(kR_0)}{R_0}\frac{\partial}{\partial n}\delta_{\mathcal{S}} + 2k\frac{\sin(kR_0)}{R_0^2}(\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n})\delta_{\mathcal{S}} + 2\frac{\cos(kR_0)}{R_0^3}(\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n})\delta_{\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_1} + 2\cos(kR_0)\left\{\frac{(\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n})}{R_0^3}\right\}_{\mathcal{S}_1}, \quad (2.3.62)$$

где параметр $\tilde{\sigma}$ определен в (2.3.56), функция R_0 определена в (2.3.20), а $(\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n})$ — скалярное произведение вектор-функции \mathbf{r}_* (см. (2.3.38)) и вектора нормали (см. (2.3.18)). Обобщенные функции $\delta_{\mathcal{S}}$, $\frac{\partial}{\partial n}\delta_{\mathcal{S}}$, $\delta_{\mathcal{C}}$, $\left\{\frac{(\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n})}{R_0^3}\right\}_{\mathcal{S}_1}$ определены в (2.3.59)–(2.3.61).

Замечание 2.3.1. Выражение (2.3.62) не зависит от выбора направления нормали к \mathcal{S} , поскольку при замене \mathbf{n} на $-\mathbf{n}$ изменяется знак R_0 .

2.3.10 Примеры. Токи на простейших антеннах

Запишем распределения токов F для антенн, рассмотренных в Разделе 2.3.4.

Случай *beat choice* соответствует выбору разреза (2.3.25). Из (2.3.20), (2.3.27) получим

$$R_0 = R_*|_{n=-0} = R_*|_{z=-0} = -r_0, \quad (2.3.63)$$

где $r_0 = \sqrt{\rho^2 - a^2} \geq 0$ определено в (2.1.3).

Как видно из (2.3.11), (2.3.26), (2.3.28), (2.3.56), в этом случае $\tilde{\sigma} = 0$. Из (2.3.26), (2.3.27), (2.3.38) следует, что $(\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}) = -ia$. Тогда выражение (2.3.62) принимает вид

$$F = 2\frac{\cos(kr_0)}{r_0}\frac{\partial}{\partial z}\delta_{\mathcal{S}} + 2ika\frac{\sin(kr_0)}{r_0^2}\delta_{\mathcal{S}} + 2iacos(kr_0)\left\{\frac{1}{r_0^3}\right\}_{\mathcal{S}}, \quad (2.3.64)$$

где

$$\delta_{\mathcal{S}} = H(\rho - a)\delta(z), \quad \frac{\partial}{\partial z}\delta_{\mathcal{S}} = H(\rho - a)\delta'(z), \quad (2.3.65)$$

$$\left(\left\{\frac{1}{r_0^3}\right\}_{\mathcal{S}}, \psi(\mathbf{r})\right) = \int_a^\infty \frac{\bar{\phi}(\rho, 0) - \bar{\phi}(a, 0)}{r_0^3} \rho d\rho. \quad (2.3.66)$$

Здесь

$$H(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } p \leq 0, \\ 1, & \text{если } p > 0, \end{cases} \quad (2.3.67)$$

— функция Хевисайда, а функция $\bar{\phi}(\rho, z)$ определена в (2.1.12)–(2.1.13). Несложно видеть, что выражение (2.3.64) совпадает с (2.1.22)–(2.1.24), полученным независимым образом в Разделе 2.1.

Случай *source choice* соответствует выбору разреза (2.3.29). Из (2.3.20), (2.3.31) получим

$$R_0 = R_*|_{n=-0} = R_*|_{z=+0} = -ir_1, \quad (2.3.68)$$

где функция $r_1 = \sqrt{a^2 - \rho^2} > 0$ определена в (2.2.3).

Как видно из (2.3.32), (2.3.56), в этом случае $\tilde{\sigma} = \sigma = 1$. Из (2.3.30), (2.3.31), (2.3.38) следует, что $(\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}) = ia$. Теперь выражение (2.3.62) принимает вид

$$F = -2\delta_C + 2a \frac{\text{ch}(kr_1)}{r_1} \frac{\partial}{\partial z} \delta_S - 2ka \frac{\text{sh}(kr_1)}{r_1^2} \delta_S + 2a \text{ch}(kr_1) \left\{ \frac{1}{r_1^3} \right\}_S, \quad (2.3.69)$$

где

$$\delta_S = H(a - \rho)\delta(z), \quad \frac{\partial}{\partial z} \delta_S = H(a - \rho)\delta'(z). \quad (2.3.70)$$

$$\left(\left\{ \frac{1}{r_0^3} \right\}_S, \psi(\mathbf{r}) \right) = \int_0^a \frac{\bar{\phi}(\rho, 0) - \bar{\phi}(a, 0)}{r_0^3} \rho d\rho, \quad (2.3.71)$$

а $\delta_C = \delta(\rho - a)\delta(z)$, см. (2.3.60). Полученное выражение совпадает с выражением (2.2.6)–(2.2.8) из Раздела 2.2.

2.4 Асимптотическое поведение G_* в случае *beat choice*

Опишем асимптотическое поведение функции G_* при фиксации ветви функции R_* согласно (2.1.1). Напомним, что в этом случае антенна имеет вид (2.1.2).

2.4.1 Параксиальная асимптотика в ближней зоне

Параксиальная область характеризуется условиями [14, 51]

$$\rho \ll |z - ia|, \quad k\rho^4 \ll |z - ia|^3. \quad (2.4.1)$$

Как очевидно из (2.1.1), разложение корня R_* в параксиальной области до квадратичных по $\rho/|z - ia|$ членов дает

$$R_* \sim z - ia + \frac{z\rho^2}{2(z^2 + a^2)} + \frac{ia\rho^2}{2(z^2 + a^2)}, \quad (2.4.2)$$

откуда

$$G_* \sim \frac{\exp(ka)}{z - ia} \exp\left(i\Psi - \frac{\rho^2}{\Delta_\perp^2}\right), \quad (2.4.3)$$

где

$$\Psi = kz + z\rho^2/a\Delta_\perp^2 \quad (2.4.4)$$

— вещественная фаза, а функция Δ_{\perp} , определенная в (1.1.7) характеризует поперечную ширину пучка. Выражение (2.4.3) совпадает, с точностью до постоянного множителя $\exp(ka)$, с выражением (1.1.6), описывающим фундаментальную осесимметрическую моду гауссовского пучка.

2.4.2 Асимптотика в дальней зоне

Дальняя зона характеризуется условиями

$$R \gg a, \quad R \gg ka^2, \quad (2.4.5)$$

где

$$R = \sqrt{\rho^2 + z^2}. \quad (2.4.6)$$

Из (2.1.1) следует, что в дальней зоне

$$R_* \sim \pm (R - ia \cos \chi), \quad z \geq 0, \quad (2.4.7)$$

где угол χ , $0 \leq \chi \leq \pi$, определяется соотношением

$$\cos \chi = z/R. \quad (2.4.8)$$

При $z > 0$ функция G_* имеет асимптотику

$$G_* \sim \frac{e^{ikR}}{R} \mathcal{D}^+(\chi), \quad 0 \leq \chi < \frac{\pi}{2}, \quad (2.4.9)$$

и описывает расходящуюся волну; при $z < 0$

$$G_* \sim \frac{e^{-ikR}}{R} \mathcal{D}^-(\chi), \quad \frac{\pi}{2} < \chi \leq \pi, \quad (2.4.10)$$

и описывает сходящуюся волну. Здесь

$$\mathcal{D}^{\pm}(\chi) = \pm \exp(\pm ka \cos \chi) \quad (2.4.11)$$

— диаграмма направленности. При $\chi = \pi/2$, т.е. на поверхности \mathcal{S} , асимптотика имеет скачок. В параксиальной области асимптотики (2.4.9)–(2.4.10) принимают вид, соответственно,

$$G_* \sim \frac{e^{ikR}}{R} \exp(ka) \exp\left(-\frac{\chi^2}{\Delta_{angular}^2}\right), \quad \chi \ll 1 \quad (2.4.12)$$

при $z \gg ka^2$, и

$$G_* \sim -\frac{e^{-ikR}}{R} \exp(ka) \exp\left(-\frac{(\pi - \chi)^2}{\Delta_{angular}^2}\right), \quad \pi - \chi \ll 1 \quad (2.4.13)$$

при $z \ll -ka^2$. Здесь

$$\Delta_{angular} = \sqrt{\frac{2}{ka}} \quad (2.4.14)$$

— угловая ширина пучка. Формулы (2.4.12)–(2.4.13) согласуются с парааксиальной асимптотикой (2.4.3).

2.5 Асимптотическое поведение G_* в случае *source choice*

Опишем асимптотическое поведение функции G_* при фиксации ветви функции R_* согласно (2.2.1). В этом случае антенна имеет вид (2.2.2).

2.5.1 Парааксиальная асимптотика в ближней зоне

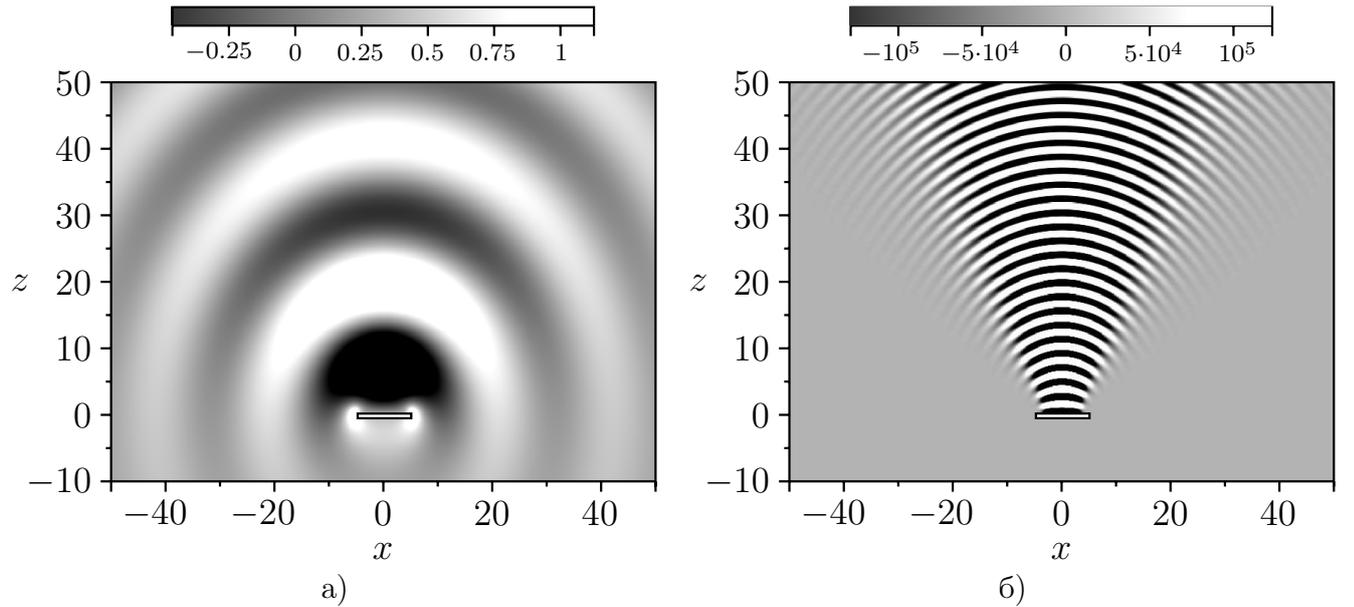


Рисунок 2.9: $\text{Re } G_*$ при $y = 0$ для а) $k = 0.3$, $a = 5$ и б) $k = 3$, $a = 5$ в случае ограниченной антенны (2.2.2). Антенна находится при $z = 0$, $-5 \leq x \leq 5$.

Разложение R_* в парааксиальной области (2.4.1) в случае *source choice* (2.2.1) дает

$$R_* \sim \pm \left(z - ia + \frac{z\rho^2}{2(z^2 + a^2)} + \frac{ia\rho^2}{2(z^2 + a^2)} \right), \quad z \gtrless 0. \quad (2.5.1)$$

Из (2.5.1) видно, что при $z > 0$ асимптотика G_* в ближней зоне совпадает с выражением (2.4.3) и, таким образом, описывает гауссовский пучок.

При $z < 0$ параксиальная асимптотика поля выглядит существенно иначе. В ближней зоне она имеет вид

$$G_* \sim -\frac{\exp(-ka)}{z - ia} \exp\left(-i\Psi + \frac{\rho^2}{\Delta_1^2}\right), \quad z < 0, \quad (2.5.2)$$

где Ψ — вещественная фаза, определенная в (2.4.4). Выражение (2.5.2) описывает не являющуюся пучком волну, которая распространяется против оси z и растет при отдалении от нее. При выполнении условия $ka \gg 1$ эта волна, однако, мала по сравнению с (2.4.3) за счет входящего в выражение (2.5.2) множителя $\exp(-ka)$. Мы назовем эту волну “антипучком”. Подчеркнем, что рост амплитуды в “антипучке” с удалением от оси z имеет место в ближней зоне. Функция G_* в ближней зоне в случае ограниченной антенны (2.2.2) изображено на Рисунке 2.9 для двух значений ka .

2.5.2 Асимптотика в дальней зоне

Из (2.2.1) следует, что в дальней зоне

$$R_* \sim R - ia \cos \chi \quad (2.5.3)$$

для всех $0 \leq \chi \leq \pi$. Поэтому асимптотика дальнего поля для всех направлений описывается выражением (2.4.9).

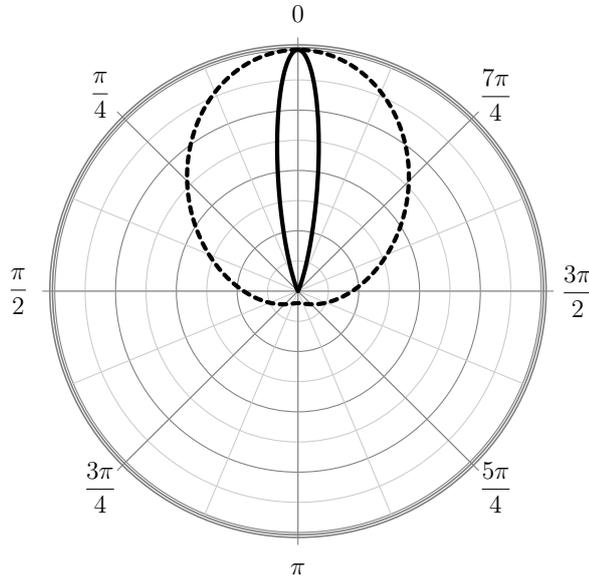


Рисунок 2.10: Нормированная диаграмма направленности ограниченной антенны $e^{-ka}\mathcal{D}^+(\chi)$ для $ka = 3/2$ (прерывистая линия) и $ka = 50$ (сплошная линия).

Вблизи оси z дальнее поле при $z \gg ka^2$, $\chi \ll 1$ имеет вид (2.4.12), а при $z \ll -ka^2$

$$G_* \sim -\frac{e^{ikR}}{R} \exp(-ka) \exp\left(\frac{(\pi - \chi)^2}{\Delta_{angular}^2}\right), \quad \pi - \chi \ll 1. \quad (2.5.4)$$

Асимптотика (2.5.4) согласуется с параксиальной формулой (2.5.2).

Диаграмма направленности $\mathcal{D}^+(\chi)$ для двух значений ka изображена на Рисунке 2.10.

2.6 Асимптотическое поведение G_* в случае произвольной антенны

В Разделе 2.3.3 мы фиксировали ветвь функции R_* так, чтобы функция G_* описывала расходящуюся волну при $z \rightarrow +\infty$. Волновое поведение при $z \rightarrow -\infty$ зависит от того, компактна ли антенна \mathcal{S} . Компактность антенны определяется количеством пересечений разреза $w(t)$ с границей области Π (см. Раздел 2.3.2).

2.6.1 Некомпактная антенна

В случае четного числа пересечений $w(t)$ с $\partial\Pi$, антенна \mathcal{S} некомпактна. В параксиальной области (2.4.1) при достаточно больших значениях $|z|$ асимптотика G_* имеет вид (2.4.3). Будем мысленно двигаться против оси z , начиная с достаточно больших z . При первом пересечении антенны функция R_* меняет знак, и асимптотика G_* принимает вид (2.5.2). При следующем пересечении функция R_* снова меняет знак, и асимптотика G_* снова принимает вид (2.4.3) и т.д.

Условие (2.3.11), наложенное на разрез $w(t)$, обеспечивает асимптотическую коничность антенны \mathcal{S} при уходе на бесконечность. Угол раствора асимптотического конуса равен χ_0 . Асимптотика дальнего поля имеет вид (2.4.9) при $0 \leq \chi \leq \chi_0$ и (2.4.10) при $\chi_0 \leq \chi \leq \pi$.

Случай некомпактной антенны является обобщением случая *beam choice*.

2.6.2 Компактная антенна

В случае четного числа пересечений $w(t)$ с $\partial\Pi$, антенна \mathcal{S} компактна (см. Раздел 2.3.1). В параксиальной области (2.4.1) при достаточно больших значениях $|z|$ асимптотика G_* имеет вид (2.4.3) при $z > 0$ и (2.5.2) при $z < 0$. При пересечении \mathcal{S} асимптотика G_* имеет скачок. Асимптотика дальнего поля описывается выражением (2.4.9) при всех $0 \leq \chi \leq \pi$.

Случай компактной антенны является обобщением случая *source choice*.

Глава 3

Гармонический “комплексный источник” в двумерном случае

Для двумерных полей “комплексного источника” соответствующие антенны и токи на них изучаются только в гармоническом случае, поскольку нестационарного аналога решения (1.2.1), содержащего произвольную функцию, для двумерного пространства не существует.

Функция Грина для двумерного уравнения Гельмгольца, отвечающая расходящейся цилиндрической волне (для временной зависимости $e^{-i\omega t}$), имеет вид

$$g = i\pi H_0^{(1)}(k\Gamma), \quad \Gamma = \sqrt{x^2 + z^2}, \quad (3.0.1)$$

где $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля. Она удовлетворяет уравнению

$$(\Delta + k^2)g = F(x, z), \quad (3.0.2)$$

где теперь $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$ — двумерный оператор Лапласа, с точечным источником

$$F(x, z) = -4\pi\delta(x)\delta(z). \quad (3.0.3)$$

Комплексифицируя (3.0.1) сдвигом на мнимую постоянную по переменной z , получаем

$$g_* = i\pi H_0^{(1)}(k\Gamma_*), \quad (3.0.4)$$

где

$$\Gamma_* = \sqrt{x^2 + (z - ia)^2}, \quad (3.0.5)$$

а $a > 0$ — свободный параметр. Как и в трехмерном случае, рассмотренном в Главе 2, комплексифицированная функция Грина (3.0.4) не является однозначно определенной функцией относительно $(x, z) \in \mathbb{R}^2$. В *физическом пространстве* \mathbb{R}^2 точке ветвления функции g_* соответствуют точки

$$x = \pm a, \quad z = 0. \quad (3.0.6)$$

Введение разреза для g_* приводит к тому, что функция g_* имеет скачок на некоторой антенне, представляющей собой кривую \mathcal{S} , симметричную относительно оси z . Функция g_* удовлетворяет уравнению (3.0.2) с функцией источника, сосредоточенной на этой антенне.

Ветвь функции g_* мы всегда будем выбирать так, чтобы при $z \rightarrow +\infty$ поле g_* соответствовало уходящей волне. Как и в трехмерном случае, существует две качественно различные ситуации с выбором разреза и ветви. В одном случае мы имеем уходящую волну, которая описывает гауссов пучок при $z = +\infty$ и затухает при $z = -\infty$. В другом случае — пучок, приходящий с $z = -\infty$ и уходящий на $z = +\infty$. Эти два случая также получили названия *source choice* и *beam choice*, соответственно [42].

3.1 Функция источника в случае *source choice*

Начнем с вычисления функции источника в случае *source choice*. В этом случае ветвь функции g_* фиксируется условием

$$\operatorname{Re} r_* \geq 0, \quad (3.1.1)$$

что эквивалентно условию

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arg r_* \leq \frac{\pi}{2}.$$

Соответствующая антенна принимает вид

$$\mathcal{S} = \{-a \leq x \leq a, z = 0\}. \quad (3.1.2)$$

Предельные значения g_* на антенне (3.1.2) имеют вид

$$g_*|_{|x| \leq a, z = \pm 0} = i\pi H_0^{(1)}(\mp ikr_1), \quad r_1 := \sqrt{a^2 - x^2} \geq 0. \quad (3.1.3)$$

3.1.1 Регуляризация

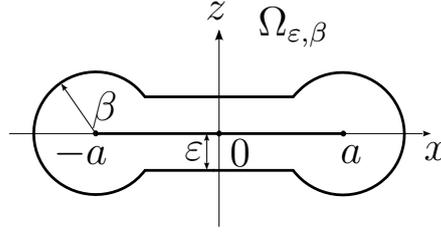
Рассмотрим F в (3.0.2) как обобщенную функцию, действующую на основные (гладкие финитные) функции $\psi = \psi(x, z)$. В силу (3.0.2) справедливо

$$(F, f) = \iint_{\mathbb{R}^2} g_*(\Delta + k^2) \psi \, dx dz. \quad (3.1.4)$$

Представим (3.1.4) в виде предела

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\Omega_{\varepsilon, \beta}} g_*(\Delta + k^2) \psi \, dx dz, \quad (3.1.5)$$

где область интегрирования $\Omega_{\varepsilon, \beta}$ показана на Рисунке 3.1. Применяя к (3.1.5) в области $\Omega_{\varepsilon, \beta}$

Рисунок 3.1: Область интегрирования $\Omega_{\varepsilon, \beta}$.

формулу Грина, получим

$$(F, f) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_{\varepsilon, \beta}} \left(g_* \frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{\partial g_*}{\partial n} \psi \right) dl, \quad (3.1.6)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ обозначает дифференцирование по внешней нормали, а dl – элемент длины $\partial\Omega_{\varepsilon, \beta}$. Кривая $\partial\Omega_{\varepsilon, \beta}$ обходится по часовой стрелке (см., например, [23]). Переход к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ дает

$$(F, f) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left\{ \int_{-a+\beta}^{a-\beta} \left(\left[\frac{\partial g_*}{\partial z} \right]_{z=0} \psi - [g_*]_{z=0} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dx + \int_{\mathcal{B}_\beta(-a)} \left(g_* \frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{\partial g_*}{\partial n} \right) \psi dl + \int_{\mathcal{B}_\beta(a)} \left(g_* \frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{\partial g_*}{\partial n} \right) \psi dl, \right\} \quad (3.1.7)$$

где $\mathcal{B}_\beta(\pm a)$ обозначает окружность радиуса β с центром в $x = \pm a$, $z = 0$. Здесь $[g_*]_{z=0}$ обозначает скачок функции g_* при $z = 0$.

Перейдем к вычислению скачков функций g_* и $\partial g_*/\partial z$. Функция Ханкеля $H_n^{(1)}(s)$ допускает при $n = 0, 1$ и $|\arg s| < \pi$ представление

$$H_n^{(1)}(s) = J_n(s) + iN_n(s) = \frac{2i}{\pi} J_n(s) \left(\ln \frac{s}{2} + C \right) + \sum_{k \geq 0} c_k s^{2k+n}, \quad (3.1.8)$$

где J_p и N_p обозначают соответственно функцию Бесселя и Неймана со значком p , а коэффициенты c_k и C не зависят от s [24]. Поскольку при $n = 0$

$$\sum_{k \geq 0} c_k s^{2k} \Big|_{s=ikr_1} - \sum_{k \geq 0} c_k s^{2k} \Big|_{s=-ikr_1} = 0,$$

то из (3.1.8) получается

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{g}_*]_{z=0} &:= \mathfrak{g}_*|_{z=+0} - \mathfrak{g}_*|_{z=-0} \\
&= \pi i H_0^{(1)}(-ikr_1) - \pi i H_0^{(1)}(ikr_1) \\
&= -\pi i \left(\frac{2i}{\pi} J_0(e^{i\pi/2}kr_1) \left(\ln(e^{i\pi/2}\frac{kr_1}{2}) - \ln(e^{-i\pi/2}\frac{kr_1}{2}) \right) \right) \\
&= 2J_0(e^{i\pi/2}kr_1) \left(\frac{i\pi}{2} + \ln\left(\frac{kr_1}{2}\right) - \frac{-i\pi}{2} - \ln\left(\frac{kr_1}{2}\right) \right) \\
&= 2\pi i J_0(e^{i\pi/2}kr_1).
\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Далее, замечая, что $dH_0^{(1)}(s)/ds = -H_1^{(1)}(s)$, имеем

$$\frac{\partial \mathfrak{g}_*}{\partial z} = -\pi i \frac{ik(z-ia)}{r_*} H_1^{(1)}(ikr_*),$$

откуда

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial \mathfrak{g}_*}{\partial z} \right]_{z=0} &:= \left. \frac{\partial \mathfrak{g}_*}{\partial z} \right|_{z=+0} - \left. \frac{\partial \mathfrak{g}_*}{\partial z} \right|_{z=-0} \\
&= \pi i \frac{ka}{r_1} \left(H_1^{(1)}(-ikr_1) + H_1^{(1)}(ikr_1) \right).
\end{aligned}$$

Поскольку при $n = 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq 0} c_k s^{2k+1} \Big|_{s=ikr_1} + \sum_{k \geq 0} c_k s^{2k+1} \Big|_{s=-ikr_1} &= \sum_{k \geq 0} c_k (kr_1)^{2k+1} (e^{i\pi k + i\pi/2} + e^{-i\pi k - i\pi/2}) \\
&= 2 \sum_{k \geq 0} c_k (kr_1)^{2k+1} \cos\left(\pi k + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial \mathfrak{g}_*}{\partial z} \right]_{z=0} &= \pi i \frac{ka}{r_1} \frac{2i}{\pi} \left(J_1(e^{i\pi/2}kr_1) \ln(e^{i\pi/2}\frac{kr_1}{2}) + J_1(e^{-i\pi/2}kr_1) \ln(e^{-i\pi/2}\frac{kr_1}{2}) \right) \\
&= -2 \frac{ka}{r_1} J_1(ikr_1) \left(\ln(e^{i\pi/2}\frac{kr_1}{2}) - \ln(e^{-i\pi/2}\frac{kr_1}{2}) \right) \\
&= -2\pi i \frac{ka}{r_1} J_1(ikr_1).
\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{g}_*]_{z=0} &= 2\pi i J_0(ikr_1), \\
\left[\frac{\partial}{\partial z} \mathfrak{g}_* \right]_{z=0} &= -2\pi i \frac{ka}{r_1} J_1(ikr_1).
\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

Видно, что в отличие от трехмерного случая в первом слагаемом в правой части (3.1.7) сразу можно перейти к пределу при $\beta \rightarrow 0$.

Рассмотрим интегралы по окружностям $\mathcal{B}_\beta(\pm a)$. Введем параметр $\vartheta \in (0, 2\pi)$ так, что

$$x = a - \beta \cos \vartheta, \quad z = \beta \sin \vartheta.$$

Тогда комплексифицированное расстояние запишется как $r_* = \sqrt{\beta^2 - 2a\beta e^{i\vartheta}}$. Интеграл по $\mathcal{B}_\beta(a)$ примет вид

$$\int_0^{2\pi} \left(-g_* \frac{\partial \psi}{\partial \beta} + \frac{\partial g_*}{\partial \beta} \psi \right) \beta d\vartheta. \quad (3.1.12)$$

При малых значениях аргумента $H_0^{(1)}$ имеет асимптотики [24]

$$H_0^{(1)}(s) = \frac{2i}{\pi} J_0(s) \ln s + O(1), \quad \frac{dH_0^{(1)}(s)}{ds} = -H_1^{(1)}(s) = \frac{2i}{\pi s} + O(\ln s),$$

откуда легко получаются оценки

$$\begin{aligned} g_* &= O(\ln \beta), \\ \frac{\partial g_*}{\partial \beta} &= -\pi i k H_1^{(1)}(kr_*) \frac{\partial r_*}{\partial \beta} \\ &= \pi i k \frac{2i}{\pi k r_*} \frac{\partial r_*}{\partial \beta} + O(\ln \beta) \\ &= -2 \frac{-ae^{i\theta} + \beta}{-2a\beta e^{i\theta} + \beta^2} + O(\ln \beta) \\ &= -\frac{1}{\beta} + O(\ln \beta). \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Таким образом, интеграл по окружности $\mathcal{B}_\beta(a)$ оценивается как

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}_\beta(a)} \left(g_* \frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{\partial g_*}{\partial n} \psi \right) dl &= - \int_0^{2\pi} \psi(a - \beta \cos \theta, \beta \sin \theta) d\theta + O(\beta \ln \beta) \\ &= -2\pi \psi(a, 0) + O(\beta \ln \beta), \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

что при $\beta \rightarrow 0$ стремится к $-2\pi \psi(a, 0)$, и, аналогично,

$$\int_{\mathcal{B}_\beta(-a)} \left(g_* \frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{\partial g_*}{\partial n} \psi \right) dl \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} -2\pi \psi(-a, 0). \quad (3.1.15)$$

3.1.2 Функция источника

Переходя в (3.1.7) к пределу при $\beta \rightarrow 0$ получим

$$F = 2\pi \left(-ika \frac{J_1(ikr_1)}{r_1} \delta_S + iJ_0(ikr_1) \delta'_S - \delta(x-a)\delta(z) - \delta(x+a)\delta(z) \right) \quad (3.1.16)$$

где

$$\delta_{\mathcal{S}}(x, z) := (H(x + a) - H(x - a))\delta(z), \quad (3.1.17)$$

$$\delta'_{\mathcal{S}}(x, z) := \frac{\partial}{\partial z} \delta_{\mathcal{S}} = (H(x + a) - H(x - a))\delta'(z), \quad (3.1.18)$$

а $H(x)$ — функция Хевисайда, определенная в (2.3.67).

3.2 Функция источника в случае *beat choice*

Зафиксируем теперь ветвь функции g_* условием

$$\text{Im } r_* \geq 0, \quad (3.2.1)$$

что эквивалентно

$$0 \leq \arg r_* \leq \pi. \quad (3.2.2)$$

Соответствующая антенна примет вид

$$\mathcal{S} = \{x \leq -a, z = 0\} \cup \{x \geq a, z = 0\}. \quad (3.2.3)$$

Предельные значения g_* на (3.1.2) имеют вид

$$g_*|_{|x| \geq a, z = \pm 0} = \pi i H_0^{(1)}(\pm kr_0), \quad r_0 = \sqrt{x^2 - a^2} \geq 0. \quad (3.2.4)$$

В этом случае вычисление, аналогичное проведенному в Разделе 3.1, дает

$$F = 2\pi \left(-ika \frac{J_1(kr_0)}{r_0} \delta_{\mathcal{S}} + iJ_0(kr_0) \delta'_{\mathcal{S}} - \delta(x - a)\delta(z) - \delta(x + a)\delta(z) \right), \quad (3.2.5)$$

где теперь обозначено

$$\delta_{\mathcal{S}}(x, z) := (H(x - a) + H(-x - a))\delta(z), \quad (3.2.6)$$

$$\delta'_{\mathcal{S}}(x, z) := \frac{\partial}{\partial z} \delta_{\mathcal{S}} = (H(x + a) + H(x - a))\delta'(z), \quad (3.2.7)$$

3.3 Функция источника для произвольной антенны

3.3.1 Выбор разреза

Для определения ветви функции (3.0.4) нам снова будет удобно обратиться к комплексной плоскости переменной

$$w = u + iv = x^2 + z^2 - a^2 - 2iaz. \quad (3.3.1)$$

Как функция вещественных x и z , w принимает значения в области (2.3.2). В отличие от трехмерного случая, каждой точке $w = u + iv$ в этой области взаимнооднозначно сопостав-

ляется пара точек в \mathbb{R}^2 , симметричная относительно оси z . Из (3.3.1) легко получить их координаты:

$$x = \pm\sqrt{u + a^2 - (v/2a)^2}, \quad z = -v/2a. \quad (3.3.2)$$

Точкам на границе области, $w \in \partial\Pi$, соответствует ось z . Точке ветвления $w = 0$ функции (3.0.4) соответствует пара точек, определенная в (3.0.6).

Проведем в плоскости переменной w разрез для функции (3.0.4) вдоль кривой (2.3.3), удовлетворяющей условиям, сформулированным в Разделе 2.3.1.

3.3.2 Антенна

Параметризация кривой (2.3.3) определит следующую параметризацию антенны \mathcal{S} ,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \begin{cases} x(t)\mathbf{e}_x + z(t)\mathbf{e}_z, & t \in I, x > 0, \\ -x(t)\mathbf{e}_x + z(t)\mathbf{e}_z, & t \in I, x < 0, \end{cases} \quad (3.3.3)$$

где множество I определено в (2.3.6), $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z$ — орты и

$$x(t) = \sqrt{u(t) + a^2 - (v(t)/2a)^2}, \quad z(t) = -v(t)/2a. \quad (3.3.4)$$

Как и в Разделе 2.3, антенна \mathcal{S} может быть компактной или некомпактной, а также иметь одну или несколько компонент связности.

Рассуждение, аналогичное проведенному в Разделе 2.3.2, показывает, что справедлива следующая

Теорема 3.3.1. *Кривая \mathcal{S} является гладкой и регулярной.*

Нормаль к \mathcal{S} определим как

$$\mathbf{n}(t) := \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) \frac{-z_t \mathbf{e}_x + x_t \mathbf{e}_z}{\sqrt{x_t^2 + z_t^2}}, & x \neq 0, \\ \operatorname{sgn}\left(u_t - \frac{v_t}{2a^2}\right) \mathbf{e}_z, & x = 0. \end{cases} \quad (3.3.5)$$

3.3.3 Функция источника

В окрестности \mathcal{S} введем систему координат $\mathbf{r}(t, n) = \mathbf{r}(t) + n\mathbf{n}(t)$, где n — расстояние от кривой \mathcal{S} , растущее в направлении \mathbf{n} , и положим

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_*(\mathbf{r}(t, n))|_{n=+0}. \quad (3.3.6)$$

Тогда

$$(F, \psi) = \int_{\mathcal{S}} \left(\left[\frac{\partial \mathbf{g}_*}{\partial n} \right]_{\mathcal{S}} \psi - [\mathbf{g}_*]_{\mathcal{S}} (\nabla \psi \cdot \mathbf{n}) \right) dl - \frac{1}{2} \delta(x - a) \delta(z) - \frac{1}{2} \delta(x + a) \delta(z), \quad (3.3.7)$$

где $f = f(x, z)$ — основная функция, dl — элемент длины \mathcal{S} ,

$$\begin{aligned} [g_*]_{\mathcal{S}} &= -2\pi i J_0(kr_0), \\ \left[\frac{\partial g_*}{\partial n} \right]_{\mathcal{S}} &= 2\pi i \frac{ka}{r_0} J_1(kr_0) (\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

и

$$\mathbf{r}_*(t) = \mathbf{r}(t) - ia\mathbf{e}_z. \quad (3.3.9)$$

В результате справедлива следующая

Теорема 3.3.2. Пусть разрез для функции g_* выбран вдоль гладкой несамопересекающейся кривой (2.3.3), для которой выполнены условия (2.3.4), (2.3.11) и, в случае (2.3.8), условие (2.3.13). Тогда функция источника в (3.0.2) сосредоточена на гладкой регулярной кривой $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$, имеющей вид (3.3.3)–(3.3.4), и равна

$$\begin{aligned} F &= 2\pi \left(ika \frac{J_1(kr_0)}{r_0} (\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}) \delta_{\mathcal{S}} - \frac{i}{2} J_0(kr_0) \frac{\partial}{\partial n} \delta_{\mathcal{S}} \right. \\ &\quad \left. + \delta(x-a)\delta(z) + \frac{1}{2}\delta(x+a)\delta(z) \right), \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

где

$$(\delta_{\mathcal{S}}, \psi(\mathbf{r})) = \int_{\mathcal{S}} \psi dl, \quad \left(\frac{\partial}{\partial n} \delta_{\mathcal{S}}, \psi(\mathbf{r}) \right) = - \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \psi}{\partial n} dl.$$

3.4 Асимптотическое поведение g_* в случае *beat choice*

Опишем волновое поведение функции g_* для антенны (3.2.3) (и, соответственно, при фиксации ветви функции g_* согласно (3.2.1)). Функция g_* представляет особый интерес при выполнении условия (1.1.8). Воспользуемся асимптотикой [24]

$$H_0^{(1)}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \exp(is - i\pi/4) \left(1 + O\left(\frac{1}{s}\right) \right) \quad \text{при } -\pi < \arg s < 2\pi, |s| \gg 1,$$

из которой следует, что

$$g_* = -\frac{\exp(ikr_* + i\pi/4)}{2\sqrt{2\pi kr_*}} \left(1 + O\left(\frac{1}{kr_*}\right) \right). \quad (3.4.1)$$

Ветвь корня в (3.4.1) определяется условием $\sqrt{r_*} > 0$ при $r_* > 0$.

3.4.1 Параксиальная асимптотика в ближней зоне

В параксиальной области,

$$|x| \ll |z - ia|, \quad kx^4 \ll |z - ia|^3, \quad (3.4.2)$$

как легко видеть, при $z > 0$

$$g_* \sim -\frac{\exp(i\pi/4) \exp(ka)}{2\sqrt{2\pi k} \sqrt{z - ia}} \exp\left(i\Psi - \frac{x^2}{\Delta_\perp^2}\right), \quad (3.4.3)$$

где

$$\Psi = kz + \frac{z}{a} \frac{\rho^2}{\Delta_\perp^2}, \quad (3.4.4)$$

а Δ_\perp определено в (1.1.7). Функция g_* соответствует фундаментальной осесимметрической моде двумерного гауссовского пучка (см., например, [14]).

3.4.2 Асимптотика в дальней зоне

В дальней зоне, характеризуемой условиями

$$r = \sqrt{x^2 + z^2} \gg a, \quad r \gg ka^2, \quad (3.4.5)$$

справедливо

$$r_* \sim \pm (r - ia \cos \chi), \quad z \gtrless 0, \quad (3.4.6)$$

где $r = \sqrt{x^2 + z^2}$, а угол χ , $0 \leq \chi \leq \pi$, определяется соотношением

$$\cos \chi = z/r. \quad (3.4.7)$$

Функция g_* описывает расходящуюся волну при $0 \leq \chi < \pi/2$,

$$g_* \sim -\frac{\exp(i\pi/4) \exp(ikr)}{2\sqrt{2\pi k}} \frac{1}{\sqrt{r}} \mathcal{D}^+(\chi), \quad (3.4.8)$$

и сходящуюся при $\pi/2 < \chi \leq \pi$,

$$g_* \sim -\frac{\exp(i\pi/4) \exp(ikr)}{2\sqrt{2\pi k}} \frac{1}{\sqrt{r}} \mathcal{D}^-(\chi). \quad (3.4.9)$$

Здесь $\mathcal{D}^\pm(\chi)$ — диаграмма направленности, определенная в (2.4.11). При $\chi = \pi/2$ дальнейшее поле имеет скачок.

3.5 Асимптотическое поведение g_* в случае *source choice*

Опишем волновое поведение функции g_* для антенны (3.1.2) (и, соответственно, при фиксации ветви функции g_* согласно (3.1.1)).

3.5.1 Параксиальная асимптотика в ближней зоне

При $z > 0$ параксиальное поле описывается выражением (3.4.3)–(3.4.4). При $z < 0$

$$g_* \sim -\frac{\exp(-i\pi/4)\exp(-ka)}{2\sqrt{2\pi k}\sqrt{z-ia}} \exp\left(-i\Psi + \frac{x^2}{\Delta_{\perp}^2}\right), \quad z < 0, \quad (3.5.1)$$

где фаза Ψ определена в (3.4.4). Таким образом, при $z > 0$ функция g_* описывает двумерный гауссов пучок, а при $z < 0$ не являющуюся пучком волну, растущую при отдалении от оси z , оставаясь малой при выполнении условия (1.1.8).

3.5.2 Асимптотика в дальней зоне

В дальней зоне волновое поведение g_* описывается выражением (3.4.8) при всех $0 \leq \chi \leq \pi$. Таким образом, источник действует как антенна, излучающая почти исключительно гауссов пучок в направлении положительных z

3.6 Асимптотическое поведение g_* в случае произвольной антенны

Описание волнового поля двумерного гармонического “комплексного источника” в случае произвольной антенны во многом аналогично трехмерному гармоническому случаю, рассмотренному в Главе 2.

В случае четного числа пересечений $w(t)$ с $\partial\Pi$, антенна \mathcal{S} некомпактна. В параксиальной области (3.4.2) при достаточно больших значениях $|z|$ асимптотика G_* имеет вид (3.4.3). Будем мысленно двигаться против оси z , начиная с достаточно больших z . При первом пересечении антенны функция R_* меняет знак, и асимптотика G_* принимает вид (3.5.1). При следующем пересечении функция R_* снова меняет знак, и асимптотика G_* снова принимает вид (3.4.3) и т.д. Асимптотика дальнего поля имеет вид (3.4.8) при $0 \leq \chi \leq \chi_0$ и (3.4.9) при $\chi_0 \leq \chi \leq \pi$.

В случае нечетного числа пересечений $w(t)$ с $\partial\Pi$, антенна \mathcal{S} компактна. В параксиальной области (3.4.2) при достаточно больших значениях $|z|$ асимптотика G_* имеет вид (3.4.3) при $z > 0$ и (3.5.1) при $z < 0$. При пересечении \mathcal{S} асимптотика G_* имеет скачок. Асимптотика дальнего поля описывается выражением (3.4.8) при всех $0 \leq \chi \leq \pi$.

Глава 4

Нестационарный “комплексный источник” в трехмерном случае

В этой главе мы рассматриваем нестационарную версию “комплексного источника” — комплексифицированную нестационарную сферическую волну $U = f(\theta_{\mathcal{E}})/R_*$ с фазой $\theta_{\mathcal{E}} = R_* - ct$, определенные в (1.2.19), (1.2.20). Эта функция удовлетворяет неоднородному волновому уравнению $\square U = F$ (1.2.21), где *нестационарное распределение токов* F сосредоточено на некоторой антенне \mathcal{S} , вид которой как и в Главе 2 определяется выбором ветви комплексного корня, входящего в R_* . Как нетрудно убедиться, при любом выборе ветви корня R_* комплексифицированная фаза $\theta_{\mathcal{E}}$ принимает значения в полосе

$$-\infty < \operatorname{Re} \theta_{\mathcal{E}} < +\infty, \quad -a \leq \operatorname{Im} \theta_{\mathcal{E}} \leq a. \quad (4.0.1)$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что область аналитичности формы волны $f(\theta_{\mathcal{E}})$ содержит эту полосу.

4.1 Функция источника

Вычисление функции источника для уравнения (1.2.21) повторяет с очевидными оговорками процедуру, описанную в Разделе 2.3 для решения с гармонической временной зависимостью, $f(\theta_{\mathcal{E}}) = \exp(ik\theta_{\mathcal{E}})$. В результате может быть сформулирована следующая

Теорема 4.1.1. *Пусть разрез комплексного корня, входящего в функцию R_* выбран вдоль гладкой несамопересекающейся кривой (2.3.3), для которой выполнены условия (2.3.4), (2.3.11), (2.3.13). Пусть область аналитичности функции $f(\theta_{\mathcal{E}})$ содержит область (4.0.1).*

Тогда функция источника в (1.1.10) сосредоточена на гладкой регулярной поверхности $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$, имеющей вид (2.3.9)–(2.3.10), и равна

$$F = -2\tilde{\sigma}\delta_{\mathcal{S}} - \frac{f(\theta_0^+) + f(-\theta_0^-)}{R_0} \frac{\partial}{\partial n} \delta_{\mathcal{S}} - \frac{f'(\theta_0^+) - f'(-\theta_0^-)}{R_0^2} (\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}) \delta_{\mathcal{S}} + \frac{f(\theta_0^+) + f(-\theta_0^-)}{R_0^3} (\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}) \delta_{\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_1} + (f(\theta_0^+) + f(-\theta_0^-)) \left\{ \frac{(\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n})}{R_0^3} \right\}_{\mathcal{S}_1}, \quad (4.1.1)$$

$\theta_0^\pm = R_0 \mp ct$ — предельные значения комплексифицированной фазы $\theta_{\mathcal{E}}$ на \mathcal{S} , параметр $\tilde{\sigma}$ определен в (2.3.56), функция R_0 определена в (2.3.20), а $(\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n})$ — скалярное произведение вектор-функции \mathbf{r}_* (см. (2.3.38)) и вектора нормали (см. (2.3.18)). Обобщенные функции $\delta_{\mathcal{S}}$, $\frac{\partial}{\partial n} \delta_{\mathcal{S}}$, $\delta_{\mathcal{S}}$, $\left\{ \frac{(\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n})}{R_0^3} \right\}_{\mathcal{S}_1}$ определены в (2.3.59)–(2.3.61).

4.2 Гауссовский пакет в случае *beat choice*

Рассмотрим специальную форму волны

$$f(\theta_{\mathcal{E}}) = \exp \left[2ka \left(1 - \sqrt{Q} \right) \right], \quad Q = 1 - \frac{i\tilde{\theta}_{\mathcal{E}}}{a}, \quad (4.2.1)$$

где $\tilde{\theta}_{\mathcal{E}}$ — фаза, отличающаяся от $\theta_{\mathcal{E}}$ комплексным сдвигом

$$\tilde{\theta}_{\mathcal{E}} = \theta_{\mathcal{E}} + ia = R_* - ct + ia, \quad (4.2.2)$$

а $k > 0$ — свободный параметр, играющий роль волнового числа. Ветвь корня \sqrt{Q} фиксирована условием $\operatorname{Re} \sqrt{Q} \geq 0$. Как видно из (4.0.1) и (4.2.2), при любой фиксации ветви комплексного корня R_* выполнено неравенство $\operatorname{Re} Q > 0$, и следовательно, \sqrt{Q} не имеет точек ветвления в \mathbb{R}^3 .

Функция (1.2.20) с формой волны (4.2.1) описывает гауссовский пакет, сильно локализованный при условии (1.1.8). Как и для гармонических полей в Главе 2, волновые поля для случаев неограниченной антенны (2.1.2) и ограниченной антенны (2.2.2) различны. В первом случае выражение (1.2.20), (4.2.1) описывают гауссовский пакет, распространяющийся вдоль оси z от $-\infty$ к $+\infty$, во втором — излучение гауссовского пакета в направлении положительных z . Рассмотрим волновое поле (1.2.20), (4.2.1) в случае, когда выполнено условие (1.1.8).

В данном разделе мы опишем волновое поведение (1.2.20), (4.2.1) в случае определения ветви R_* согласно (2.1.1). Тогда, как следует из (1.1.13), фаза (4.2.2) обращается в нуль в бегущей точке $\{\rho = 0, z = ct\}$ на оси z (и только в ней). Таким образом, как видно из (4.2.1), поле (1.2.20) имеет в этой точке пик.

4.2.1 Асимптотика вблизи пика на умеренных расстояниях

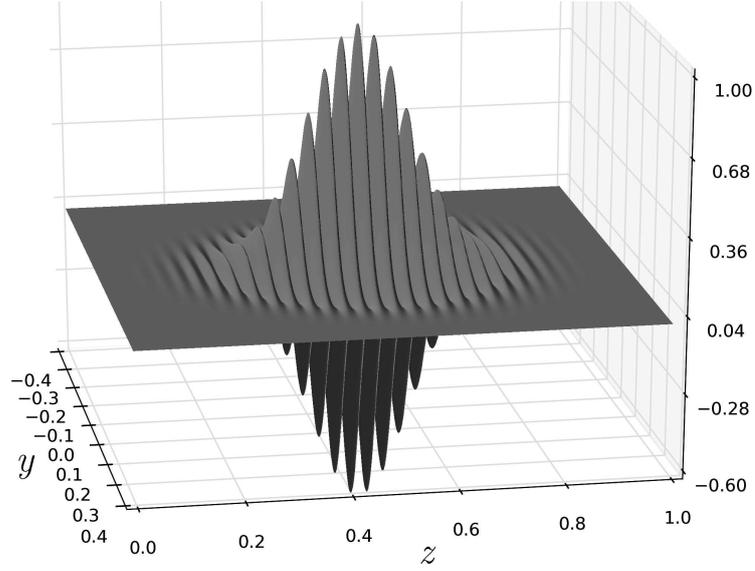


Рисунок 4.1: Поле $\text{Re } U$ в ближней зоне для $ka = 200$ и $x = 0$ при $t = a/2c$.

На умеренных расстояниях,

$$\frac{z}{a} = O(1), \quad (4.2.3)$$

область вблизи пика характеризуется условиями

$$\frac{\rho}{\Delta_{\perp}} = O(1), \quad \frac{\alpha}{\Delta_{\parallel}} = O(1). \quad ka \rightarrow \infty, \quad (4.2.4)$$

Здесь Δ_{\perp} , определенная в (1.1.7), характеризует поперечную ширину пакета, а

$$\Delta_{\parallel} = 2\sqrt{\frac{a}{k}} \quad (4.2.5)$$

— продольную ширину пакета. Характеристические переменные $\alpha = z - ct$, $\beta = z + ct$ введены в (1.2.5).

В области (4.2.3)–(4.2.4)

$$\sqrt{Q} \sim 1 - \frac{i\tilde{\theta}_{\ell}}{2a} + \frac{\tilde{\theta}_{\ell}^2}{8a^2}, \quad (4.2.6)$$

и справедливо разложение

$$\tilde{\theta}_{\ell} \sim \alpha + \frac{\rho^2}{2(z - ia)} = \alpha + \frac{z\rho^2}{2(z^2 + a^2)} + \frac{ia\rho^2}{2(z^2 + a^2)}, \quad (4.2.7)$$

откуда

$$U \sim \frac{1}{z - ia} \exp\left(i\Psi - \frac{\rho^2}{\Delta_{\perp}^2} - \frac{\alpha^2}{\Delta_{\parallel}^2}\right), \quad (4.2.8)$$

где

$$\Psi = k\alpha + \frac{\beta}{2a} \frac{\rho^2}{\Delta_{\perp}^2} \quad (4.2.9)$$

— вещественная фаза. Поле, отвечающее вещественной части (4.2.8), изображено на Рисунке 4.1.

4.2.2 Асимптотика в дальней зоне

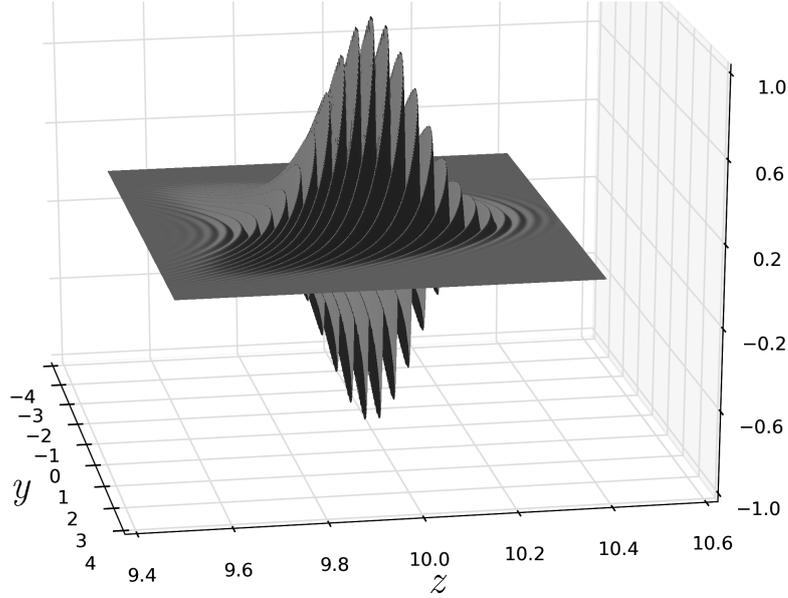


Рисунок 4.2: Поле $\text{Re } U$ в дальней зоне для $ka = 200$ и $x = 0$ при $t = 10a/c$.

В дальней зоне, при $R \gg a$, справедливо разложение

$$\tilde{\theta}_{\mathcal{E}} \sim A + ia(1 - \cos \chi) = A + 2ia \sin^2 \frac{\chi}{2}, \quad z > 0, \quad (4.2.10)$$

$$\tilde{\theta}_{\mathcal{E}} \sim -B + ia(1 + \cos \chi) = -B + 2ia \cos^2 \frac{\chi}{2}, \quad z < 0, \quad (4.2.11)$$

где $R = \sqrt{\rho^2 + z^2}$, а угол χ , $0 \leq \chi \leq \pi$, определяется соотношением (1.2.15). Характеристические переменные $A = R - ct$, $B = R + ct$ введены в (1.2.14).

Для $z > 0$, что соответствует значениям $0 \leq \chi < \pi/2$, вблизи фронта, где $|A| \ll a$,

$$U \sim \frac{1}{R} \exp \left(ik \frac{A}{\Lambda_+} - 2ka(\Lambda_+ - 1) - \frac{1}{\Lambda_+^3} \frac{A^2}{\Delta_{\parallel}^2} \right), \quad (4.2.12)$$

причем $\Lambda_+ := \sqrt{1 + 2 \sin^2(\chi/2)}$. Для $z < 0$, что соответствует значениям $\pi/2 < \chi \leq \pi$, вблизи фронта, где $|B| \ll a$,

$$U \sim -\frac{1}{R} \exp \left(-ik \frac{B}{\Lambda_-} - 2ka(\Lambda_- - 1) - \frac{1}{\Lambda_-^3} \frac{B^2}{\Delta_{\parallel}^2} \right), \quad (4.2.13)$$

где $\Lambda_- := \sqrt{1 + 2 \cos^2(\chi/2)}$.

В формулах (4.2.12) и (4.2.13) ka не предполагается большим. Поле, отвечающее вещественной части (4.2.12), изображено на Рисунке 4.2.

4.2.3 Асимптотика вблизи пика на больших расстояниях

При $ka \gg 1$ выражение (4.2.12) упрощается при малых χ и A до

$$U \sim \frac{1}{R} \exp \left(ikA - \frac{\chi^2}{\Delta_{angular}^2} - \frac{A^2}{\Delta_{\parallel}^2} \right), \quad \chi \ll 1, \quad (4.2.14)$$

где $\Delta_{angular}$ (2.4.14) — угловая ширина пакета. Аналогично, (4.2.13) упрощается до

$$U \sim -\frac{1}{R} \exp \left(-ikB - \frac{(\pi - \chi)^2}{\Delta_{angular}^2} - \frac{B^2}{\Delta_{\parallel}^2} \right), \quad \pi - \chi \ll 1. \quad (4.2.15)$$

Как нетрудно видеть из (1.1.7), (2.4.14), (4.2.5) в параксиальной области дальнее поле (4.2.12), (4.2.13) и поле вблизи пика (4.2.8) сшиваются.

4.3 Гауссовский пакет в случае *source choice*

В данном разделе мы опишем волновое поведение (1.2.20), (4.2.1) в случае определения ветви R_* согласно (2.2.1).

4.3.1 Асимптотика вблизи пика на умеренных расстояниях

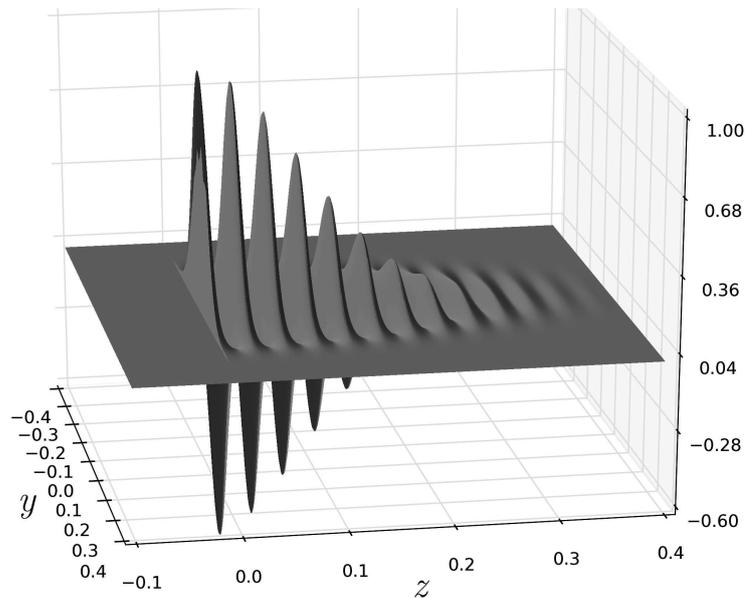


Рисунок 4.3: Поле $\text{Re } U$ в ближней зоне при $ka = 200$, $x = 0$ для $t = 0$ в случае *source choice*. При $z = 0$ виден скачок поля на антенне.

В параксиальной области поле имеет скачок при $z = 0$. При $z > 0$ справедливо разложение (4.2.7), и, следовательно, поведение поля вблизи пика описывается формулами (4.2.8)–(4.2.9).

При $z < 0$, как очевидно из (2.2.1), в области (4.2.4) справедливо

$$\tilde{\theta}_\varphi \sim 2ia - z - ct - \frac{z\rho^2}{2(z^2 + a^2)} - \frac{ia\rho^2}{2(z^2 + a^2)} = 2ia - T, \quad z < 0, \quad (4.3.1)$$

где

$$T = -(R_* - ct - ia) \sim \beta + \frac{z\rho^2}{2(z^2 + a^2)} + \frac{ia\rho^2}{2(z^2 + a^2)}. \quad (4.3.2)$$

Функция (4.3.2) обращается в нуль в бегущей точке $\{\rho = 0, \beta = 0\}$ на оси z . Перепишем \sqrt{Q} в виде

$$\sqrt{Q} = \sqrt{1 - \frac{i\tilde{\theta}_\varphi}{a}} = \sqrt{3 + \frac{iT}{a}} = \sqrt{3} \sqrt{1 + \frac{iT}{3a}}. \quad (4.3.3)$$

Разложение \sqrt{Q} по степеням T до квадратичных членов дает

$$\sqrt{Q} \sim \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{iT}{2a} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{T^2}{8a^2}, \quad (4.3.4)$$

откуда, ограничиваясь квадратичными членами по β и ρ , получим

$$U \sim -\frac{\exp(-2ka(\sqrt{3}-1))}{2(z-ia)} \exp\left(i\Psi + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\rho^2}{\Delta_\perp^2} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{\beta^2}{\Delta_\parallel^2}\right), \quad (4.3.5)$$

где

$$\Psi = -\frac{1}{\sqrt{3}} \left(k\beta + \frac{\alpha}{2a} \frac{\rho^2}{\Delta_\perp^2}\right). \quad (4.3.6)$$

Выражение (4.3.5)–(4.3.6) описывает поле, бегущее против оси z . Оно гауссовски убывает в продольном направлении, но растет в поперечном. При выполнении (1.1.8) поле (4.3.5) экспоненциально мало относительно большого параметра ka . Соответствующее поле изображено на Рисунках 4.3 и 4.4 для двух разных значений ka .

4.3.2 Асимптотика в дальней зоне

Из (2.2.1) следует, что в дальней зоне

$$\tilde{\theta}_\varphi \sim A + 2ia \sin^2 \frac{\chi}{2} \quad (4.3.7)$$

для всех $0 \leq \chi \leq \pi$. Поэтому асимптотика дальнего поля для всех направлений описывается выражением (4.2.12). Выражение (4.2.12) принимает максимальное значение при $\chi = 0$, и с ростом χ монотонно убывает.

Мы отметили, что (4.2.12) сшивается с (4.2.8)–(4.2.9) для $\chi \ll 1$. Нетрудно убедиться, что (4.2.12) сшивается и с (4.3.5) для $\pi - \chi \ll 1$.

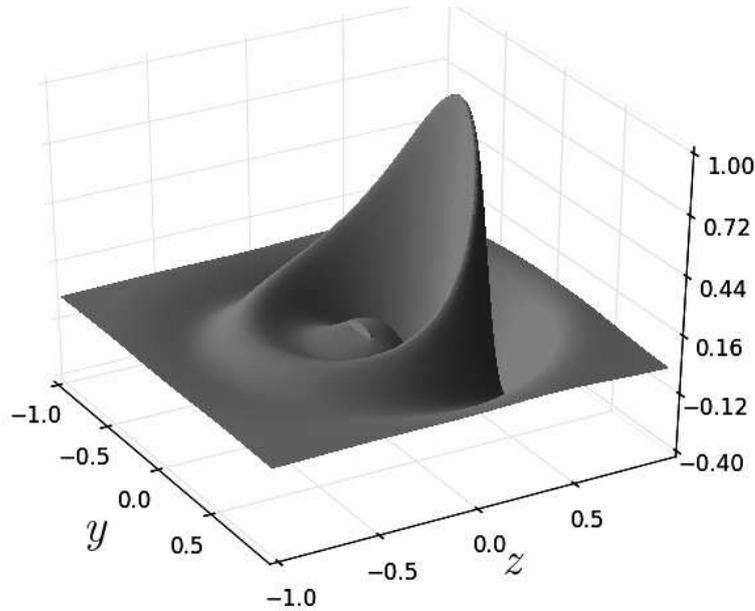


Рисунок 4.4: Поле $\text{Re } U$ в ближней зоне при $ka = 2$, $x = 0$ для $t = 5a/c$ в случае *source choice*. Для этого не слишком большого значения ka хорошо видно поле, описываемое (4.3.5)–(4.3.6).

4.4 Заключительные замечания

Известные на настоящий момент нестационарные волновые поля, имеющие сильную, в том числе гауссовскую локализацию, описываются точными решениями двух типов — основанными на теории Бейтмена и связанными с комплексифицированными сферическими волнами. Первые не имеют вещественных источников и приходят из бесконечности, вторые имеют особенности — антенны. Решениям, возникающим при комплексификации сферической волны, всегда соответствует некоторая антенна.

Полученные в работе результаты теории “комплексного источника” позволяют в принципе, управляя распределением токов на антеннах, возбуждать гауссовски локализованные поля, в частности, излучать их преимущественно в одном направлении. Явные выражения для антенн и токов могут использоваться для строгой постановки задач дифракции полей “комплексного источника”. Следует отметить, что рассмотренные выше “поля комплексных источников” не обладают вблизи края антенны конечной энергией, а соответствующие токи не имеют конечной мощности. При практической реализации развитой выше теории можно иметь в виду возбуждение поля антеннами, окружающими антенну \mathcal{S} , на которых токи конечны. Подобный подход обсуждался, например, в [47].

Глава 5

Простые решения волнового уравнения с сингулярностью в бегущей точке, основанные на комплексифицированном решении Бейтмена

В этой главе мы приводим новые простые примеры решений однородного волнового уравнения (1.0.1), имеющие сингулярность в бегущей со скоростью c пространственной точке. Примеры основаны на комплексифицированном решении Бейтмена, которое содержит произвольную аналитическую функцию одной переменной. До сих пор путем подходящего выбора этой функции строились решения уравнения (1.0.1), описывающие сильно локализованные волновые пучки и волновые пакеты. Ниже мы выбираем эту произвольную функцию так, что она имеет полюс первого порядка. Удовлетворяя при этом однородному волновому уравнению, получающееся решение служит иллюстрацией результатов теории волновых фронтов по Хёрмандеру [31].

5.1 Комплексифицированное решение Бейтмена

Мы рассматриваем осесимметрическое комплексифицированное решение Бейтмена, определенное в Главе 1 формулами

$$\theta_{\mathcal{B}} = \alpha + \frac{\rho^2}{\beta - ia}, \quad g = \frac{1}{\beta - ia} \quad (5.1.1)$$

где

$$\alpha = z - ct, \quad \beta = z + ct, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (5.1.2)$$

а $a > 0$ – произвольно фиксированная постоянная. Легко видеть, что при всех $(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ фаза $\theta_{\mathcal{B}}$, определенная формулой (5.1.1), принимает значения в замкнутой верхней полу-

плоскости $\text{Im } \theta_{\mathcal{B}}(\mathbf{r}, t) \geq 0$, причем $\text{Im } \theta_{\mathcal{B}}(\mathbf{r}, t) = 0$ тогда и только тогда, когда $\{(\mathbf{r}, t) : x = y = 0, z \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}$.

Теорема 5.1.1. Пусть

$$V = \frac{1}{\beta - ia} f(\theta_{\mathcal{B}}) \quad (5.1.3)$$

где фаза $\theta_{\mathcal{B}}$ определена выражением (5.1.1). Если

1. форма волны $f(\theta_{\mathcal{B}})$ аналитична в открытой верхней полуплоскости $\text{Im } \theta_{\mathcal{B}} > 0$,
2. $f(\theta_{\mathcal{B}})$ дважды непрерывно дифференцируема при $\text{Im } \theta_{\mathcal{B}} \geq 0$,

то функция (5.1.3) удовлетворяет однородному уравнению (1.0.1) во всем пространстве-времени $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$.

Одно из доказательств, основанное на прямом вычислении, можно найти, например, в [48].

Замечание 5.1.1. Если условие (2) Теоремы 5.1.1 не выполнено в некоторой точке вещественной оси, например, в $\theta_{\mathcal{B}} = 0$, то (5.1.3) удовлетворяет однородному уравнению (1.0.1) при $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \setminus \{(\mathbf{r}, t) : x = y = 0, \alpha = 0, \beta \in \mathbb{R}\}$, т. е. во всем пространстве времени, за исключением, может быть, движущейся точки

$$\{\mathbf{r} : x = y = 0, z = ct\}. \quad (5.1.4)$$

Замечание 5.1.2. Требование двукратной непрерывной дифференцируемости значительно повышено.

5.2 Простейшая сингулярная форма волны

Выберем в (5.1.3) форму волны $f(\theta_{\mathcal{B}}) = 1/\theta_{\mathcal{B}}$. Выражение (5.1.3) принимает вид

$$V = \frac{1}{\beta + ia} \frac{1}{\theta_{\mathcal{B}}} = \frac{1}{\rho^2 + \alpha(\beta + ia)} \quad (5.2.1)$$

и имеет сингулярность в пространственной точке (5.1.4) движущейся вдоль оси z . В соответствии с Замечанием 5.1.1, вне этой точки функция (5.2.1) удовлетворяет однородному уравнению (1.0.1). В пространстве-времени $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ сингулярный носитель V есть прямая $x = y = 0, z = ct$. Ключевым результатом этой главы является доказательство следующего утверждения

Теорема 5.2.1. Функция (5.2.1) удовлетворяет однородному уравнению (1.0.1) во всем пространстве-времени $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^4$ в смысле обобщенных функций.

Сначала будет доказана простая

Лемма 5.2.1. Функция (5.2.1) локально абсолютно интегрируема в \mathbb{R}^4 .

Доказательство. Мы хотим установить, что интеграл

$$J_{\Omega} := \int_{\Omega} dx dy dz dt |V| \quad (5.2.2)$$

сходится для любой компактной области $\Omega \subset \mathbb{R}^4$.

Если Ω не пересекается с сингулярным носителем $\{\rho = 0, \alpha = 0, \beta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$ функции V , то справедливость утверждения очевидна. Рассмотрим область

$$\Omega = \{-1 \leq \alpha \leq 1, \quad \beta_1 \leq \beta \leq \beta_2, \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\},$$

содержащую сингулярный носитель функции V . Перейдя в (5.2.2) от переменных (x, y, z, t) к переменным $(\alpha, \beta, \rho, \phi)$, где

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad (5.2.3)$$

получаем

$$J_{\Omega} = \frac{1}{2c} \int_{-1}^1 d\alpha \int_{\beta_1}^{\beta_2} d\beta \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{\sqrt{(\rho^2 + \alpha\beta)^2 + a^2\alpha^2}}. \quad (5.2.4)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(\rho^2 + \alpha\beta)^2 + a^2\alpha^2}} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(s + \alpha\beta)^2 + a^2\alpha^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(s + \alpha\beta + \sqrt{(s + \alpha\beta)^2 + a^2\alpha^2} \right) \Big|_{s=0}^1. \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Подставляя (5.2.5) в (5.2.4) и интегрируя по углу ϕ , получаем интеграл

$$J_{\Omega} = \frac{\pi}{2c} \int_{-1}^1 d\alpha \int_{\beta_1}^{\beta_2} d\beta \left(\ln \frac{1 + \alpha\beta + \sqrt{(1 + \alpha\beta)^2 + a^2\alpha^2}}{\beta + \sqrt{\beta^2 + a^2}} - \ln |\alpha| \right),$$

который, очевидно, сходится при любых $-\infty < \beta_{1,2} < +\infty$. Лемма доказана. \square

Доказательство Теоремы 5.2.1. Мы рассматриваем V как обобщенную функцию т. е. как функционал действующий на основные функции $\psi = \psi(x, y, z, t) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^4)$, см. [7]. Согласно Лемме 5.2.1 это означает, что

$$(V, \psi) := \int_{\mathbb{R}^4} dx dy dz dt V \psi. \quad (5.2.6)$$

Мы доказываем, что

$$(\square V, \psi) := (V, \square \psi) = 0 \quad (5.2.7)$$

для любой $\psi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^4)$. Перейдя от переменных (z, t) к переменным (α, β) , получаем для левой части (5.2.7) выражение

$$(\square V, \psi) = \frac{1}{2c} \int_{\mathbb{R}^4} dx dy d\alpha d\beta V \square \psi. \quad (5.2.8)$$

Волновой оператор (1.0.1) принимает вид

$$\square w = 4w_{\alpha\beta} + w_{xx} + w_{yy}.$$

Выражение (5.2.8) можно записать как

$$\frac{1}{2c} \lim_{\gamma \rightarrow +0} \int_{\Omega_\gamma} dx dy d\alpha d\beta V \square \psi, \quad (5.2.9)$$

где $\Omega_\gamma = \{|\alpha| > \gamma, -\infty < x, y, \beta < \infty\}$. Интегрирование по частям в (5.2.9) с использованием финитности ψ дает

$$\int_{\Omega_\gamma} dx dy d\alpha d\beta V \square \psi = \int_{\Omega_\gamma} dx dy d\alpha d\beta \psi \square V - 4 \int_{\mathbb{R}^3} dx dy d\beta \left(V_\beta \psi|_{\alpha=-\gamma} - V_\beta \psi|_{\alpha=\gamma} \right), \quad (5.2.10)$$

где

$$V_\beta = \frac{\partial V}{\partial \beta} = -\frac{\alpha}{(\rho^2 + \alpha(\beta + ia))^2}. \quad (5.2.11)$$

Функция V удовлетворяет в Ω_γ однородному волновому уравнению, поэтому первый интеграл в правой части (5.2.10) исчезает. Для второго интеграла мы получаем выражение

$$-4 \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \int_0^{\infty} \rho d\rho \left(\frac{\gamma \bar{\psi}(\rho, -\gamma, \beta)}{(\rho^2 - \gamma(\beta + ia))^2} + \frac{\gamma \bar{\psi}(\rho, \gamma, \beta)}{(\rho^2 + \gamma(\beta + ia))^2} \right), \quad (5.2.12)$$

где

$$\bar{\psi}(\rho, \alpha, \beta) := \int_0^{2\pi} \psi(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, \frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{\beta - \alpha}{2c}) d\phi.$$

Рассмотрим в (5.2.12) интеграл по ρ . Замена переменной $p = \gamma^{-1/2} \rho$ дает

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\bar{\psi}(\gamma^{1/2} p, -\gamma, \beta)}{(p^2 - (\beta + ia))^2} + \frac{\bar{\psi}(\gamma^{1/2} p, \gamma, \beta)}{(p^2 + (\beta + ia))^2} \right) p dp. \quad (5.2.13)$$

Ввиду гладкости $\bar{\psi}(\rho, \alpha, \beta)$, можно записать

$$\bar{\psi}(\rho, \gamma, \beta) = \bar{\psi}(\rho, 0, \beta) + O(\gamma). \quad (5.2.14)$$

Поскольку, как легко проверить,

$$\int_0^{\infty} \frac{p dp}{(p^2 \pm (\beta + ia))^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dp'}{(p' \pm (\beta + ia))^2} = \pm \frac{1}{2} \frac{1}{\beta + ia},$$

имеем

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{(p^2 - (\beta + ia))^2} + \frac{1}{(p^2 + (\beta + ia))^2} \right) p dp = 0, \quad (5.2.15)$$

что, вместе с (5.2.14) приводит к следующему выражению для интеграла (5.2.13):

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{(p^2 - (\beta + ia))^2} + \frac{1}{(p^2 + (\beta + ia))^2} \right) (\bar{\psi}(\gamma^{1/2}p, 0, \beta) - \bar{\psi}(0, 0, \beta)) p dp. \quad (5.2.16)$$

Вследствие финитности $\bar{\psi}(\rho, \alpha, \beta)$, выражение (5.2.16) стремится к нулю при $\gamma \rightarrow +0$.

Мы показали, что предел (5.2.9) равен нулю, т. е. установили справедливость (5.2.7). Теорема 5.2.1 доказана. \square

5.3 Исследование вещественной и мнимой частей функции (5.2.1)

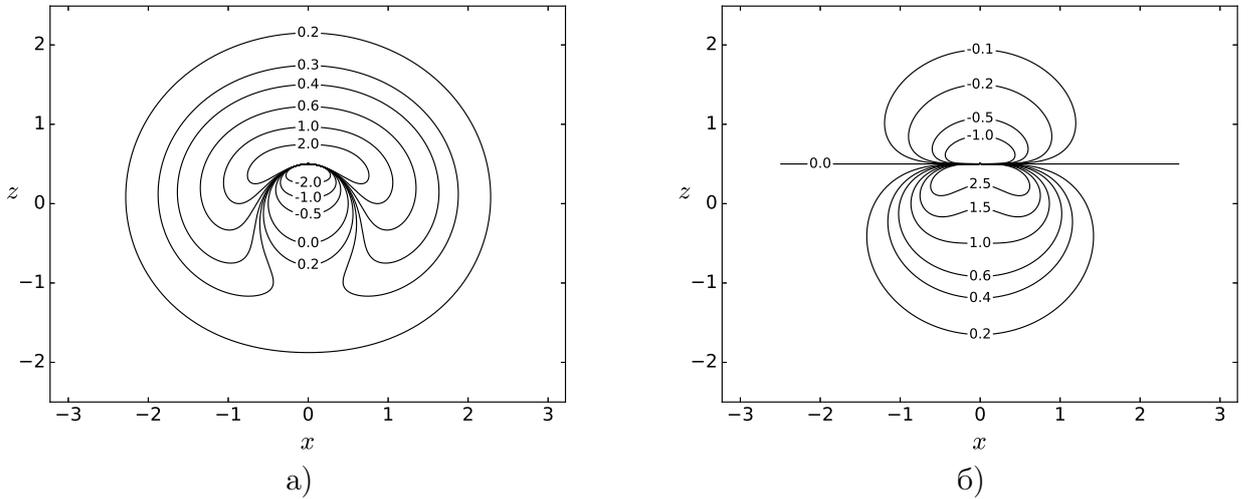


Рисунок 5.1: Сечения поверхностей уровня функций V_1 (а) и V_2 (б) плоскостью $y = 0$ при $t = 1/2c$.

Очевидно, что как вещественная, так и мнимая части функции (5.2.1) являются решениями однородного волнового уравнения (1.0.1). Мы рассматриваем ниже их поведение в окрестности особой точки. Итак,

$$V = \frac{1}{\rho^2 + \alpha\beta + ia\alpha} = V_1 + iV_2,$$

где функции

$$V_1 = \frac{\rho^2 + \alpha\beta}{(\rho^2 + \alpha\beta)^2 + a^2\alpha^2}, \quad (5.3.1)$$

и

$$V_2 = \frac{-a\alpha}{(\rho^2 + \alpha\beta)^2 + a^2\alpha^2} \quad (5.3.2)$$

вещественны. Окружим точку $\{\rho = 0, z = ct\} \in \mathbb{R}^3$ сферой малого радиуса ε :

$$\alpha = \varepsilon \cos \vartheta, \quad \rho = \varepsilon \sin \vartheta, \quad \vartheta \in [0, \pi].$$

Тогда:

$$V_1 = \frac{\varepsilon^2 \sin^2 \vartheta + \beta \varepsilon \cos \vartheta}{(\varepsilon^2 \sin^2 \vartheta + \beta \varepsilon \cos \vartheta)^2 + a^2 \varepsilon^2 \cos^2 \vartheta} = \frac{\varepsilon \sin^2 \vartheta + \beta \cos \vartheta}{\varepsilon [(\varepsilon \sin^2 \vartheta + \beta \cos \vartheta)^2 + a^2 \cos^2 \vartheta]}.$$

Как легко видеть,

$$V_1 = \begin{cases} \varepsilon^{-2}, & \vartheta = \pi/2, \beta \in \mathbb{R}, \\ 0, & \vartheta = 0 \text{ и } \vartheta = \pi, \beta = 0, \\ O(\varepsilon^{-1}), & \vartheta \in (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi), \beta \neq 0. \end{cases} \quad (5.3.3)$$

Аналогично,

$$V_2 = \frac{-a \cos \vartheta}{\varepsilon [(\varepsilon \sin^2 \vartheta + \beta \cos \vartheta)^2 + a^2 \cos^2 \vartheta]} = \begin{cases} 0, & \vartheta = \pi/2, \\ O(\varepsilon^{-1}), & \vartheta \neq \pi/2. \end{cases} \quad (5.3.4)$$

Оценки (5.3.3) и (5.3.4) не являются равномерными по углу ϑ . Более подробное исследование поведения функций (5.3.1) нетрудно провести анализируя их поверхности уровня $V_1 = const$ и $V_2 = const$, изображенные на Рисунке 5.1.

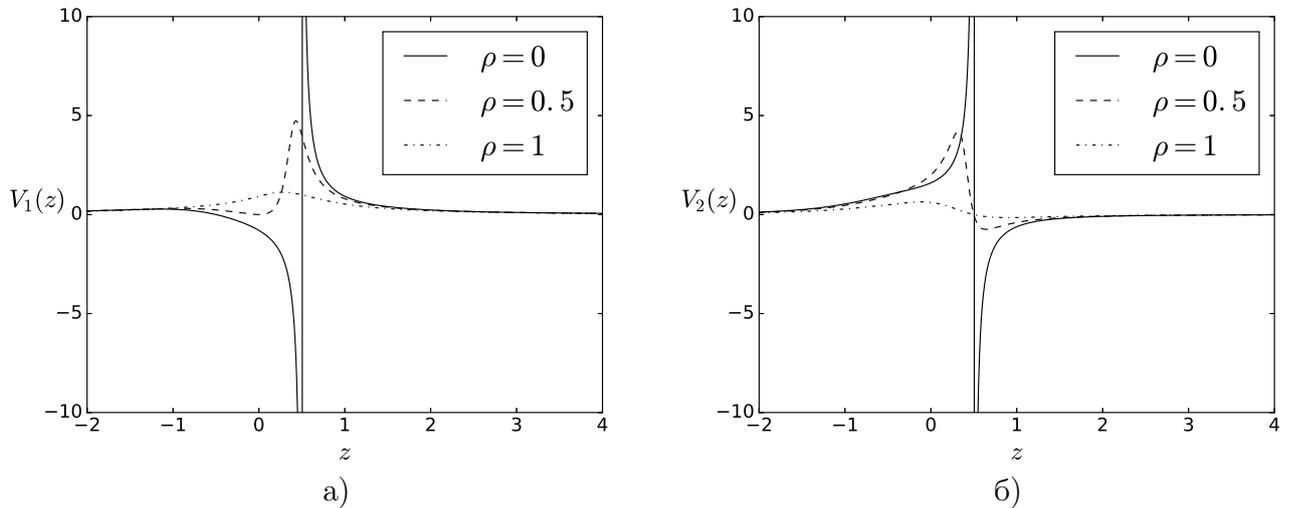


Рисунок 5.2: V_1 (а) и V_2 (б) как функции от z при фиксированных значениях ρ и $t = 1/2c$.

Очевидно, поверхности уровня касаются между собой в плоскости $z = ct$ в особой точке $\rho = 0$, что согласуется с утверждением о неравномерности оценок (5.3.3) и (5.3.4).

Из Рисунка 5.2 видно, что при $\rho \rightarrow 0$ функции $V_{1,2}$ быстро меняются.

5.4 Обобщения

Полученный результат легко обобщается на комплексифицированные решения Бейтмена, у которых форма волны имеет такую же сингулярность.

Возьмем в (5.1.3)

$$f(\theta_{\mathcal{B}}) = \frac{1}{\theta_{\mathcal{B}}} \exp \left(2ka \left(1 - \sqrt{1 - \frac{i\theta_{\mathcal{B}}}{a}} \right) \right), \quad (5.4.1)$$

где $k > 0$ фиксированный числовой параметр, а ветвь корня определена условием $\operatorname{Re} \sqrt{1 - i\theta_{\mathcal{B}}/a} \geq 0$. Простая модификация приведенных выше рассуждений показывает, что соответствующая функция (5.1.3) тоже удовлетворяет однородному волновому уравнению (1.0.1). Такое решение экспоненциально убывает при удалении от точки (5.1.4) как в продольном направлении (вдоль оси z), так и в поперечном направлении (вдоль ρ) (см. детали в [48]).

Аналоги решения (1.2.1), (5.1.1) известны для волнового уравнения с любым $m \geq 2$ числом пространственных переменных [16]. Фаза, которая в (5.1.1) зависит от одного параметра a , может быть заменена функцией, характеризуемой $m(m-1)/2$ комплексным параметром, см. [17]. Полученные выше результаты без труда переносятся и на такие решения.

Заключение

Сформулируем основные результаты диссертационной работы:

1. Получены явные описания антенн и выражения для токов на них, возбуждающих гармонические поля “комплексного источника” в случае трех пространственных переменных.
2. Результаты, полученные для гармонического “комплексного источника”, обобщены на нестационарный режим. В рамках теории “комплексного источника” построено решение волнового уравнения с тремя пространственными переменными, описывающее гауссовский волновой пакет.
3. Получены явные описания антенн и выражения для токов, возбуждающих гармонические поля “комплексного источника” в случае двух пространственных переменных.
4. Исследовано построенное в рамках теории Бейтмена решение волнового уравнения, имеющее степенную сингулярность в бегущей точке. Доказано, что это решение удовлетворяет однородному волновому уравнению.

Полученные в работе результаты теории “комплексного источника” позволяют в принципе, управляя распределением токов на антеннах, возбуждать гауссовски локализованные поля, в частности, излучать их преимущественно в одном направлении. Явные выражения для антенн и токов могут использоваться для строгой постановки задач дифракции полей “комплексного источника”. Эти результаты могут быть без большого труда обобщены на мультипольные и другие обобщения комплексифицированных сферических волн. Представляется возможным также обобщение на систему уравнений Максвелла. Результаты пятой главы могут быть распространены на системы уравнений математической физики, в частности на систему уравнений изотропной теории упругости и систему уравнений Максвелла изотропной среды.

Список литературы

1. *Абрамочкин Е. Г., Волостников В. Г.* Современная оптика гауссовых пучков. — М.: Физматлит, 2010.
2. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. — М.: Наука, 1972.
3. *Благовещенский А. С.* Плоские волны, решения Бейтмена и источники на бесконечности // *Зап. научн. семин. ПОМИ.* — 2014. — Т. 426 — С. 23–33.
4. *Благовещенский А. С., Киселев А. П., Тагирджанов А. М.* Простые решения волнового уравнения с сингулярностью в бегущей точке, основанные на комплексифицированном решении Бейтмена // *Зап. науч. семин. ПОМИ.* — 2015. — Т. 438. — С. 73–82.
5. *Вайнштейн Л. А.* Открытые резонаторы и открытые волноводы. — М.: Советское радио, 1966.
6. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981.
7. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними, Выпуск 1. — М.: Физматгиз, 1985.
8. *Грикуров В. Э., Киселев А. П.* Гауссовы пучки на больших дальностях // *Известия высших учебных заведений. Радиофизика.* — 1986. — Т. 29, № 3. — С. 307–313.
9. *Дубровин В. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. Том 1. — М.: Эдиториал УРСС, 1998.
10. *Егоров Ю. В.* Линейные дифференциальные уравнения главного типа. — М.: Наука, 1984.
11. *Еремин Ю. А.* Представления полей в методе неортогональных рядов через источники в комплексной плоскости // *Доклады АН СССР* — 1983. — Т. 270, № 4. — С. 864–866.
12. *Изместьев А. А.* Однопараметрические волновые пучки в свободном пространстве // *Изв. вузов. Радиофизика* — 1970. — Т. 13, № 9. — С. 1380–1388.
13. *Киселев А. П.* Модулированные гауссовы пучки // *Известия высших учебных заведений. Радиофизика.* — 1983. — Т. 26, № 8. — С. 1014–1020.

14. *Киселев А. П.* Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравнения (обзор) // *Оптика и спектроскопия* — 2007. — Т. 102, № 4. — С. 661–681.
15. *Киселев А. П., Перель М. В.* Гауссовские волновые пакеты // *Оптика и спектроскопия* — 1999. — Т. 86, № 3. — С. 357–359.
16. *Киселев А. П., Перель М. В.* Относительно неискажающиеся решения m -мерного волнового уравнения // *Дифференциальные уравнения* — 2002. — Т. 38, № 8. — С. 1128–1129.
17. *Киселев А. П., Плаченов А. Б.* Точные решения m -мерного волнового уравнения из параксиальных. Дальнейшее обобщение решения Бейтмена // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2011. — Т. 393. — С. 167–177.
18. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Том 2. — М.–Л.: ГИТТЛ, 1945.
19. *Леонтович М. А.* Об одном методе решения задач о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли // *Изв. АН СССР. Сер. Физ.* — 1944. — Т. 8, № 1. — С. 16.
20. *Леонтович М. А., Фок В. А.* Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли по методу параболического уравнения // *ЖЭТФ.* — 1946. — Т. 16, № 7. — С. 557–573.
21. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия. — М.: Наука, 1987.
22. *Сапожников О. А.* Точное решение уравнения Гельмгольца для квазигауссовского пучка в виде суперпозиции двух источников и стоков с комплексными координатами // *Акустический журнал* — 2012. — Т. 58, № 1. — С. 49–56.
23. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, том 2. — М.: Наука, 1974.
24. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, том 3, часть 2. — М.: Наука, 1974.
25. *Тагирджанов А. М.* “Комплексный источник” в двумерном пространстве // *Зап. науч. семинаров ПОМИ.* — 2012. — Т. 409. — С. 176–186.
26. *Тагирджанов А. М., Благовещенский А. С., Киселев А. П.* “Комплексный источник” в вещественном пространстве // *Т-Сотт: Телекоммуникации и транспорт.* — 2011. — №11. — С. 82–84.
27. *Тагирджанов А. М., Благовещенский А. С., Киселев А. П.* Гармонические по времени поля “комплексных источников” и их источники в вещественном пространстве // *Записки научных семинаров ПОМИ.* — 2014. — Т. 422. — С. 131–149.
28. *Тагирджанов А. М., Киселев А. П.* Гауссовский пакет на основе “комплексного источника” // *Записки научных семинаров ПОМИ.* — 2014. — Т. 426. — С. 189–202.

29. Тагирджанов А. М., Киселев А. П. Комплексифицированные сферические волны и их источники. Обзор // *Оптика и спектроскопия*. — 2015. — Т. 119, № 2. — С. 271–281.
30. Хаус Х. Волны и поля в оптоэлектронике. — М.: Мир, 1988.
31. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Том 1. — М.: Мир, 1986.
32. Appell P. E. Quelques remarques sur la théorie des potentiels multiformes. (Extrait d'une lettre adressée à Mr. F. Klein) // *Math. Annalen*. — 1887. — Vol. 30. — P. 155–156.
33. Bateman H. The conformal transformations of space of four dimensions and their applications to geometrical optics // *Proc. London Math. Soc.* — 1909. — № 7. — P. 70–89.
34. Bateman H. The Mathematical Analysis of Electrical and Optical Wave-Motion on the Basis of Maxwell's Equations. — NY: Dover, 1955.
35. Bélanger P. A. Packetlike solutions of the homogeneous-wave equation // *J. Opt. Soc. Am. A* — 1984. — № 1. — P. 723–724.
36. Besieris I. M., Shaarawi A. M., Attiya A. M. Bateman conformal transformations within the framework of the bidirectional spectral representation // *Progress In Electromagnetics Research* — 2004. — № 48. — P. 201–231.
37. Brittingham J. N. Focus waves modes in homogeneous Maxwell's equations: Transverse electric mode // *Journal of Applied Physics*. — 1983. — Vol. 54, № 3. — P. 1179–1189.
38. Deschamps G. A. Gaussian beam as a bundle of complex rays // *Electron. Lett.* — 1971. — Vol. 7. — P. 684–685.
39. Felsen L. B. Complex-source-point solutions of the field equations and their relation to the propagation and scattering of Gaussian beams // *Symposia Mathematica*. — 1976. — Vol. 18. — P. 39–56.
40. Green A. C., Bertoni H. L., Felsen L. B. Properties of the shadow cast by a half-screen when illuminated by a Gaussian beam // *J. Opt. Soc. Am.* — 1979. — Vol. 69. — P. 1503–1508.
41. Hansen T. B. Complex point receiver formulation of spherical near-field scanning of acoustic fields using higher-order probes // *Wave Motion*. — 2009. — Vol. 46. — P. 498–510.
42. Heyman E., Felsen L. B. Complex-source pulsed-beam fields // *J. Opt. Soc. Amer. A*. — 1989. — Vol. 6, № 6. — P. 806–817.
43. Heyman E. Complex source pulsed beam representation of transient radiation // *Wave Motion*. — 1989. — Vol. 11. — P. 337–349.

44. *Hillion P.* Generalized phases and nondispersive waves // *Acta Applicandae Mathematica*. — 1993. — Vol. 30, № 1. — P. 35–45.
45. *Kaiser G.* Complex-distance potential theory, wave equations, and physical wavelets // *Math. Methods Appl. Sci.* — 2002. — Vol. 25. — P. 1577–1588.
46. *Kaiser G.* Physical wavelets and their sources: real physics in complex spacetime // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 2003. — Vol. 36, № 30. — P. R291–R338.
47. *Kaiser G.* Making electromagnetic wavelets // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 2004. — Vol. 37. — P. 5929–5947.
48. *Kiselev A. P., Perel M. V.* Highly localized solutions of the wave equation // *J. Math. Phys.* — 2000. — Vol. 41, № 4. — P. 1934–1955.
49. *Kiselev A. P., Plachenov A. B., Chamorro-Posada P.* Nonparaxial wave beams and packets with general astigmatism // *Phys. Rev. A*. — 2012. — Vol. 85. — Pap. 043835.
50. *Kogelnik H., Li T.* Laser beams and resonators // *Applied optics*. — 1966. — Vol. 5, № 10. — P. 1550–1567.
51. *Lax M., Louisell W. H., McKnight W. B.* From Maxwell to paraxial wave optics // *Phys. Rev. A*. — 1975. — Vol. 11. — P. 1365–1374.
52. *Mahillo-Isla R., González-Morales M. J., Dehesa-Martínez C.* Diffraction of 2D complex beams by a perfect conductor half-plane a spectral approach // *Proceedings of Days on Diffraction 2007* — St.Petersburg: St.Petersburg University Press, 2007. — P. 67–72.
53. *Norris A. N., Hansen T. B.* Exact complex source representations of time-harmonic radiation // *Wave Motion*. — 1997. — Vol. 25. — P. 127–141.
54. *Orlov S., Banzer P.* Vectorial complex-source vortex beams // *Phys. Rev. A*. — 2014. — Vol. 90. — Pap. 023832.
55. *Ra J. W., Bertoni H., Felsen L. B.* Reflection and transmission of beams at dielectric interfaces // *SIAM J. Appl. Math.* — 1973. — Vol. 24. — P. 396–412.
56. *Sheppard C. J. R., Saghafi S.* Beam modes beyond the paraxial approximation: a scalar treatment // *Phys. Rev. A*. — 1998. — Vol. 57, № 4. — P. 2971–2979.
57. *Shin S. Y., Felsen L. B.* Gaussian beam modes by multipoles with complex points sources // *J. Opt. Soc. Amer.* — 1977. — Vol. 67, № 5. — P. 699–700.
58. *Tagirdzhanov A. M., Blagovestchenskii A. S., Kiselev A. P.* Complex source: Singularities in real space // *PIERS Proceedings, Moscow 2009*. — 2009. — P. 1527–1530.

59. *Tagirdzhanov A. M., Blagovestchenskii A. S., Kiselev A. P.* “Complex source” wavefields: sources in real space // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2011. — Vol. 44, № 42. — Pap. 425203.
60. *Tagirdzhanov A. M., Kiselev A. P.* Complexified spherical waves and their sources in the physical space // *PIERS Proceedings, Stockholm 2013*. — 2013. — P. 344–347.
61. *Teixeira F. L., Chew W. C.* Complex space approach to perfectly matched layers: a review and some new developments // *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields* — 2000. — Vol. 13. — P. 441–455.
62. *Tsitsas N. L., Valagiannopoulos A., Nosich A. I.* Scattering and absorption of a complex source point beam by a grounded lossy dielectric slab with a superstrate // *Journal of Optics* — 2014. — Vol. 16, № 10. — Pap. 105712.
63. *Zeroug S., Stanke F. E., Burridge R.* A complex-transducer-point model for finite emitting and receiving ultrasonic transducers // *Wave Motion*. — 1996. — Vol. 24. — P. 21–40.
64. *Ziolkowski R. W.* Localized transmission of electromagnetic energy // *Physical Review A*. — 1989. — Vol. 39, № 4. — P. 2005–2033.