

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Лещенко Настасья Ивановна

**Численное обращение интегрального преобразования
Лапласа функций специального вида**

Специальность 01.01.07 — Вычислительная математика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

профессор, доктор физико-математических наук,

Рябов Виктор Михайлович

Санкт-Петербург

2016

Содержание

Введение		3
1	Обзор методов обращения преобразования Лапласа	12
1.1	Обращение преобразования Лапласа сведением к системе линейных уравнений	12
1.2	Обращение преобразования Лапласа с помощью квадратурных формул наивысшей степени точности	14
1.3	Обращение преобразования Лапласа с помощью обобщённых квадратурных формул наивысшей степени точности	21
1.4	Обращение преобразования Лапласа с помощью метода Виддера .	28
1.5	Деформирование контура интегрирования	35
2	Задачи линейной вязкоупругости	48
2.1	Постановка задач линейной вязкоупругости.	48
2.2	Ядра ползучести и релаксации	54
3	Обращение функций специального вида	60
3.1	Применение методов деформирования контура к задаче обращения преобразования Лапласа дробно-экспоненциальной функции.	63
3.2	Обращение преобразования Лапласа по значениям изображения на вещественной оси	69
3.3	Аддитивный метод вычисления дробно-экспоненциальной функции	72
3.4	Метод обращения преобразования Лапласа с помощью разложения оригинала в обобщённые степенные ряды	76
	Заключение	79
	Список литературы	82
	Приложение	89

Введение

Актуальность работы

Интегральные преобразования, такие как преобразования Лапласа, Фурье, Абеля, Меллина и другие, помогают значительно упростить решение различных дифференциальных и интегральных уравнений, которые возникают в прикладных задачах разных областей математики, математической физики, радиотехники, механики [23], [46], [50].

В общем случае интегральные преобразования имеют следующий вид:

$$F(p) = \int_S K(t, p) f(t) dt,$$

где $F(p)$ — функция изображения, $f(t)$ — функция-оригинал, $K(t, p)$ — ядро интегрального преобразования, S — множество на вещественной оси.

В этой работе применение преобразования Лапласа и методов его обращения рассматриваются на примере решения задачи линейной вязкоупругости — нахождения напряжения ($\sigma(x, t)$) и деформации ($\varepsilon(x, t)$) вязкоупругих материалов.

Интегральное преобразование Лапласа $F(p)$ функции-оригинала $f(t)$ задаётся формулой

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (1)$$

Вязкоупругость была предложена в работах Больцмана и получила значительное развитие в работах Вольтерра как теория наследственной упругости. Важнейшими характеристиками вязкоупругих тел являются ползучесть и релаксация. Так, под ползучестью понимается свойство материалов деформироваться во времени в зависимости от постоянного напряжения. Релаксация — перераспределение напряжения в теле в зависимости от деформации. Связь ползучести и релаксации принято описывать соотношением Больцмана-Вольтерра, которое является обобщением закона Гука. Для простоты будем говорить об одномерном случае (вязкоупругий стержень).

Ползучесть материала описывается следующим образом:

$$\varepsilon(x, t) = \frac{1}{E_0} \left(\sigma(x, t) + (E_0 - E_\infty) \int_0^t K(t - \tau) \sigma(x, \tau) d\tau \right), \quad (2)$$

где $K(t)$ — ядро ползучести, E_0 — мгновенный модуль упругости, E_∞ — длительный модуль упругости, $\varepsilon(x, t)$ — деформация в точке x в момент времени t , $\sigma(x, t)$ — напряжение, x — пространственная координата.

Заметим, что правая часть формулы (2) состоит из двух слагаемых, первое из которых — мгновенная деформация, а второе — наследственная деформация (ползучесть).

Релаксация материала описывается следующим соотношением:

$$\sigma(x, t) = E_0 \varepsilon(x, t) - (E_0 - E_\infty) \int_0^t R(t - \tau) \varepsilon(x, \tau) d\tau, \quad (3)$$

где $R(t)$ — ядро релаксации. Оно является резольвентой ядра ползучести. Ядро $K(t)$ может быть выражено через ядро $R(t)$.

Различные авторы обращались к изучению явления вязкоупругости — Ю. Н. Работнов, А. Р. Ржаницын и другие. В современных исследованиях можно выделить работы F. Mainardi [57], [58], в которых показана связь дифференциального интеграла Римана–Лиувилля с задачей линейной вязкоупругости.

Заметим, что наследственная деформация в описании задачи вязкоупругости с использованием принципа Больцмана–Вольтерра может быть описана интегро–дифференциальным уравнением [57]

$$\varepsilon(x, t) = \frac{a}{\Gamma(1 + \nu)} \left(\int_0^t (t - \tau)^{\nu-1} \sigma(x, \tau) d\tau \right) = a \cdot {}_0I_t^\nu [\sigma(x, t)],$$

$$\sigma(x, t) = \frac{b}{\Gamma(1 - \nu)} \left(\int_0^t (t - \tau)^{-\nu} \varepsilon'(x, \tau) d\tau \right) = b \cdot {}_0D_t^\nu [\varepsilon(x, t)],$$

где $\nu > 0$, $ab = 1$, ${}_0I_t^\nu, {}_0D_t^\nu$ — дифференциальный интеграл Римана–Лиувилля и его производная соответственно [57].

По определению

$$\begin{aligned} {}_0I_t^\alpha f(t) &:= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \\ {}_0D_t^\alpha &:= D_t^m \circ {}_0I_t^{m-\alpha} f(t), \\ {}^*D_t^\alpha &:= {}_0I_t^{m-\alpha} \circ D_t^m f(t), \end{aligned}$$

где $m - 1 < \alpha \leq m$ ($m \in \mathbb{N}$), $t > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

В работе [57] утверждается, что теорию дифференциальных интегралов удобно использовать для описания динамических свойств линейных вязкоупругих материалов, включая задачи распространения волн и диффузии. Однако классическое представление задачи линейной вязкоупругости получило более широкое распространение и изучение, поэтому мы будем в дальнейшем использовать и изучать именно его.

Отметим, что соотношение Больцмана–Вольтерра связывает две физические величины — напряжение и деформацию, то есть описывает характеристики материала. Полная же постановка динамической задачи вязкоупругости включает в себя ещё уравнение движения, начальные и граничные условия.

С помощью интегрального преобразования Лапласа можно задачу решения различных дифференциальных и интегральных уравнений привести к задаче решения более простых алгебраических уравнений. К тому же, изображение Лапласа является аналитической (регулярной) функцией в некоторой полуплоскости $\Re(p) > \gamma$, в связи с этим в исследовании решаемой задачи можно использовать известные результаты теории функций комплексного переменного.

Сложность в применении интегрального преобразования Лапласа к решению дифференциальных и интегральных уравнений заключается в том, что на последнем этапе встаёт задача нахождения функции–оригинала по её изображению и в большинстве случаев это является сложной задачей.

Наиболее полно возможные подходы к задаче обращения и их реализация описаны в книге В. И. Крылова и Н. С. Скобля [17], а в работе [16] тех же авторов приведены необходимые формулы и численные таблицы для применения методов обращения преобразования Лапласа. Обзор других способов обращения, не вошедших в [17], приведен в статье [27]. Теоретические основы операционного исчисления содержатся в классических работах В. А. Диткина и А. П. Прудникова [9], D. V. Widder [63], Г. Дёч [7], М. А. Лаврентьева и Б. В. Шабата [18]. Обзор результатов теории приближения функций в комплексной плоскости представлен в работах В. И. Смирнова и Н. А. Лебедева [47], а также Д. Гайера [6]. Вопросам приложения операционного исчисления к решению прикладных задач, среди прочих, посвящены фундаментальные труды А. И. Лурье [23], Л. И. Слепяна и Ю. С. Яковлева [46]. Специальные методы обращения интегрального преобразования Лапласа изучались в работах В. М. Рябова [33], [34], [39], [19], М. М. Кабардова [11], [12].

Цели и задачи диссертационной работы

Целью данной диссертационной работы является разработка и исследование методов обращения преобразования Лапласа применительно к изображениям функций специального вида (дробно-экспоненциальных функций и их обобщений). Поскольку, несмотря на достаточно большое число исследований в области обращения преобразования Лапласа, решение практических задач во множестве случаев приводит к изображениям, к которым известные методы обращения не могут быть применены. Например, как показано в работе М. И. Конторовича [14], задачи, относящиеся к теории электромагнитного поля, задачи теории теплопроводности и многие другие требуют применения более общих методов обращения. Следовательно, возникает необходимость разработки и применения приближённых методов.

Универсального метода обращения, дающего удовлетворительные результаты для произвольного изображения $F(p)$, не существует. Поскольку любой

конкретный метод обращения должен учитывать особенности поведения изображения (или функции–оригинала), а это приводит к соответствующему выбору подходящих систем функций в пространствах оригиналов и изображений, с которыми легко работать и с помощью которых заданные образы и оригиналы могут быть хорошо приближены.

Задачи, которые решались в диссертационной работе:

1. Исследовать различные методы обращения преобразования Лапласа и разработать алгоритмы по применению методов обращения к вычислению функций специального вида.
2. Исследовать свойства ядер, которые могут быть выбраны в качестве ядер ползучести и релаксации в соотношении Больцмана–Вольтерра; изучить их свойства и рассмотреть их обобщение.
3. Исследовать методы обращения преобразования Лапласа в предположении, что заданное изображение $F(p)$ искомой функции–оригинала фактически зависит от $1/p^a$, где a — произвольное положительное число из интервала $(0, 1)$; получить формулы обращения, обладающие большей точностью по сравнению с известными для определенного класса изображений и имеющие большое прикладное значение.
4. Реализовать методы, рассматриваемые в работе, в виде программ с использованием математического пакета Maple.
5. Проанализировать результаты работы программ и на основании их дать рекомендации по использованию методов обращения преобразования Лапласа применительно к функциям специального вида.

Положения, выносимые на защиту

1. Применение известных приближенных методов обращения к обращению изображений специального вида.

2. Сравнительные характеристики известных методов.
3. Разработка новых специальных методов обращения.
4. Программная реализация методов обращения.
5. Решение конкретных прикладных задач линейной вязкоупругости.
6. Практические рекомендации по выбору метода обращения в зависимости от свойств образа.

Научная новизна

Разработаны новые методы обращения преобразования Лапласа функций специального вида и дан сравнительный анализ применения этих методов. Определены условия применимости методов, рассматриваемых в работе. Представлены явные алгоритмы, которые могут быть использованы для обращения преобразования Лапласа дробно-экспоненциальных функций и их обобщений.

Личный вклад автора

Личный вклад автора заключается в выполнении исследований, изложенных в диссертационной работе, разработке и реализации алгоритмов методов обращения преобразования Лапласа, проведении численных экспериментов, анализе границ применимости методов, а также в оформлении результатов в виде статей и научных докладов.

Теоретическая и практическая значимость

Результаты, полученные в данной работе, позволяют упростить решение задач линейной вязкоупругости. Предлагаемые методы обращения преобразования Лапласа представляют практический интерес, поскольку реализованы в виде алгоритмов, которые могут быть использованы для нахождения напряжения ($\sigma(x, t)$) и деформации ($\varepsilon(x, t)$) вязкоупругих материалов.

Публикации и доклады по теме диссертационной работы

Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [27], [28], [29], [43], а также представлены в виде докладов конференций [22], [26]. Из них работы [27]–[29] опубликованы в журналах, индексируемых в реферативной базе Scopus.

В работе [43] соавтором была предложена идея для вычисления дробно-экспоненциальной функции и интеграла от неё, используя изображения по Лапласу этих функций. Автором реализована идея вычисления рассматриваемых функций с помощью деформации контура интегрирования в формуле обращения Римана–Меллина, приводящая к вещественным интегралам по полуоси. Для вычислений полученных в работе интегралов строятся специальные вещественные квадратурные формулы наивысшей степени точности. Также в статье [43] указаны обобщённые квадратурные формулы наивысшей степени точности (ОКФНСТ), точные для дробных степеней аргумента функции изображения и построены асимптотические формулы для дробно-экспоненциальной функции и интеграла от неё для больших значений аргумента.

В работе [27] автору принадлежит реализация аддитивного метода выделения особенности и построение квадратурных формул наивысшей степени точности для функций, зависящих от дробных степеней аргумента. Соавтору принадлежит идея применения упомянутых методов.

В работе [28] соавтором предложена идея использовать деформацию контура интегрирования для вычисления интеграла Римана–Меллина. Автором рассмотрены два контура — параболический и гиперболический, сводящие исходную задачу к вычислению интеграла по вещественной оси от некоторой функции, зависящей от выбора контура интегрирования. Для них установлены асимптотические скорости сходимости, рассмотрен конкретный случай обращения и выбор контура интегрирования.

В работе [29] автором построены вещественные квадратурные формулы

обращения, в качестве узлов которых берутся корни многочленов Лагерра. Указан способ построения предложенных квадратурных формул (КФ). Соавтору принадлежит идея построения упомянутых КФ. Совместные результаты работы [29] использованы в книге соавтора [42].

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, библиографии и приложения. Общий объём диссертации составляет 104 страницы. В тексте работы содержится 24 таблицы и 2 рисунка. Библиография работы состоит из 63 наименований. В приложении приведены 9 листингов программ.

Основное содержание

В **первой главе** приведён обзор методов обращения преобразования Лапласа — обращение преобразования Лапласа сведением к системе линейных уравнений, квадратурные формулы наивысшей степени точности, обобщённые квадратурные формулы наивысшей степени точности, метод Виддера, метод деформирования контура интегрирования в интеграле Римана–Меллина. Рассмотрены характеристики методов, такие как сходимость, скорость сходимости, ускорение сходимости и оценки погрешности методов. Предложены алгоритмы реализации методов, даны рекомендации по их области применимости и приведены результаты численных экспериментов.

Во **второй главе** в качестве основной модельной задачи рассматривается задача линейной вязкоупругости, в которой отыскиваются напряжение и деформация вязкоупругого тела [30]. Также рассмотрена задача о распространении полубесконечного импульса нагрузки в полубесконечном вязкоупругом стержне, для которой исследована возможность применения метода квадратурных формул наивысшей степени точности для нахождения функции–оригинала напряжения по её образу. Приведены различные ядра ползучести, их свойства и применение.

В **третьей главе** предлагаются методы по обращению преобразования Лапласа с точки зрения применимости к случаю длительно меняющихся во времени процессов, которые описываются функциями, зависящими от t^a . В качестве примера таких функций рассмотрены функции Ю. Н. Работнова (дробно-экспоненциальные функции). В области изображения им соответствуют функции от $1/p^a$. Также в третьей главе приводится анализ и сравнение значений, полученных с помощью этих методов, с табличными значениями, даны результаты численных экспериментов.

В **заключении** сформулированы основные результаты работы.

В **приложении** представлены тексты программ для вычислений значений дробно-экспоненциальной функции и функции ползучести с использованием методов, предлагаемых в данной работе.

1. Обзор методов обращения преобразования Лапласа

1.1. Обращение преобразования Лапласа сведением к системе линейных уравнений

Рассмотрим один из методов обращения преобразования Лапласа, основанный на сведении задачи к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Этот метод был предложен в работе [50].

Преобразование Лапласа функции–оригинала имеет вид

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (4)$$

Сделаем в (4) замену переменных $x = e^{-t}$, тогда уравнение (4) переписется в виде

$$F(p) = \int_0^1 x^{p-1} \varphi(x) dx, \quad (5)$$

где $\varphi(x) = f(-\ln x)$. Интеграл в правой части уравнения (5) заменим приближённой суммой, используя квадратурную формулу Гаусса–Лежандра. Получим следующее выражение:

$$F(p) \approx \sum_{i=1}^N A_i x_i^{p-1} \varphi(x_i) = \sum_{i=1}^N x_i^{p-1} \psi_i, \quad (6)$$

$$\psi_i = A_i \varphi(x_i),$$

где x_i — корни смещённого многочлена Лежандра $P_N^*(x)$, а A_i — соответствующие веса. Пусть p в (6) принимает значения $1, 2, \dots, N$. Тогда получим систему линейных уравнений с N неизвестными ψ_i :

$$F(k+1) = \sum_{i=1}^N x_i^k \psi_i, \quad \text{где } k = 0, \dots, N-1. \quad (7)$$

Заметим, что матрица получившейся СЛАУ — это матрица Вандермонда. Она невырожденная при попарно различных x_i, x_j . Однако она является плохо обусловленной матрицей, с ростом N её число обусловленности растёт. В результате погрешность вычисления решения СЛАУ увеличивается с ростом N .

Вопрос обусловленности получающейся матрицы подробно рассматривался в работе [55]. В этой работе вместо квадратурной формулы Гаусса–Лежандра применяется квадратурная формула Гаусса–Якоби с параметрами α и β . Для этого делается замена переменной $x = e^{-vt}$ ($v > 0$) и в качестве узлов квадратурной формулы (6) берутся корни смещённого многочлена Якоби $p_n^{(\alpha, \beta)}(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(2x - 1)$ и $F(k + 1)$ в формуле (7) изменится в результате замены переменных на $F((k + 1)v)$.

В [55] исследовался вопрос выбора параметров α и β таким образом, чтобы число обусловленности получающейся матрицы Вандермонда было минимальным. Таким образом находилась зависимость числа обусловленности от параметров $n, \alpha, \beta - \mu(n, \alpha, \beta)$. Было установлено, что $\mu(n, \alpha, \beta)$ обычно больше $\mu(n, \beta, \alpha)$, если $\beta > \alpha$ и $n \rightarrow \infty$. Нижние границы $\mu(n, \alpha, \beta)$ были получены вместе с его асимптотическим поведением при $n \rightarrow \infty$. Более точные границы получаются для специальных случаев $\alpha = \beta$, $n -$ нечётное и $\alpha = \beta = \pm 1/2$, $n -$ любое натуральное число.

В общем случае оказывается, что $\mu(n, \alpha, \beta)$ растёт как $C(3 + \sqrt{8})^n$, где $C -$ постоянная величина, значение которой зависит от α, β . Её значения изменяются сравнительно медленно как функция от α, β и будут наименьшими при $\alpha, \beta \rightarrow -1$. Для квадратурных формул с равноотстоящими узлами число обусловленности СЛАУ растёт как величина $\frac{2\sqrt{2}}{3\pi} 8^n$.

Таким образом, из-за сильной неустойчивости матрицы (большое число обусловленности), получающейся в СЛАУ, данный метод не даёт хороших результатов и его применение для решения задачи обращения преобразования Лапласа затруднено.

1.2. Обращение преобразования Лапласа с помощью квадратурных формул наивысшей степени точности

Метод обращения преобразования Лапласа с помощью квадратурных формул наивысшей степени точности (КФНСТ) был рассмотрен в работе [17]. В основе этого метода лежит применение различных квадратурных формул для вычисления интеграла Римана–Меллина. Преобразование Лапласа для функции–оригинала сходится в некоторой полуплоскости $\Re p = c > \gamma$, $F(p)$ будет регулярной функцией [17] и для оригинала $f(t)$ верна формула обращения Римана–Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)e^{pt} dp. \quad (8)$$

Заметим, что интеграл (8) понимается в смысле главного значения, он не зависит от c и в случае разрыва оригинала в точке t мы получаем полусумму предельных значений оригинала слева и справа от точки t .

Положим в формуле обращения (8) $p = c + i\tau$, тогда $\exp(pt) = \exp(ct) * \exp(i\tau t)$. При фиксированном t первый сомножитель постоянен, а второй пробегает единичную окружность на комплексной плоскости бесконечное число раз. С ростом t первый сомножитель и скорость пробегания окружности вторым сомножителем неограниченно возрастают, поэтому попытка приблизить интеграл римановыми суммами вряд ли приведет к цели.

Будем считать, не умаляя общности, что функция $F(p)$ регулярная в полуплоскости $\Re p > 0$, чего всегда можно добиться, сделав замену переменной в исходном интеграле ($p = p'/t + \gamma$), что равносильно домножению оригинала на $e^{-\gamma t}$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi_s(p) = p^s F(p), s > 0. \quad (9)$$

Предположим, что она регулярна в полуплоскости $\Re p > 0$. Допустим, что $\varphi_s(p)$ имеет конечное предельное значение при $p \rightarrow \infty$.

Используя функцию (9), запишем интеграл (8) в виде:

$$I_{s,t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^{pt} p^{-s} \varphi_s(p) dp.$$

Для вычисления этого интеграла строится квадратурная формула следующего вида:

$$I_{s,t} \approx \sum_{k=1}^n A_k(t) \varphi_s(p_k(t)). \quad (10)$$

В формуле (10) произвольными величинами являются коэффициенты A_k и попарно различные узлы p_k . Будем выбирать их так, чтобы формула (10) была точной для любого многочлена φ_s степени $2n - 1$ от переменной $1/p$, что на множестве функций-оригиналов означает точность для любой функции вида $t^{s-1} Q_{2n-1}(t)$, где Q_{2n-1} — любой многочлен степени не выше $2n - 1$. Необходимое и достаточное условие для этого даёт следующая теорема [17]:

Теорема 1. *Для того чтобы квадратурная формула (10) была точной для всех многочленов степени $2n - 1$ от переменной $x = 1/p$, необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

1) *Формула (10) должна быть интерполяционной, то есть её коэффициенты A_k должны иметь значения*

$$A_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} p^{-s} l_k \left(\frac{1}{p} \right) dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} p^{-s} \frac{\omega_n \left(\frac{1}{p} \right)}{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_k} \right) \omega'_n \left(\frac{1}{p_k} \right)} dp,$$

где

$$\omega_n \left(\frac{1}{p} \right) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_k} \right).$$

2) *Для всякого многочлена $P_{n-1} \left(\frac{1}{p} \right)$ степени не выше $n - 1$ должно выполняться равенство*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^p p^{-s} \omega_n \left(\frac{1}{p} \right) P_{n-1} \left(\frac{1}{p} \right) dp = 0.$$

Введённые ортогональные многочлены $\omega_n(x)$ определяются однозначно (КФНСТ существует и единственна) и обладают теми же свойствами, что и классические ортогональные многочлены Эрмита, Лагерра, Якоби [48].

В работе [42] показано, что многочлен $\omega_n(x)$ с точностью до постоянного сомножителя совпадает с многочленом

$$P_n^s(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (n+s-1)_k x^k.$$

В записи многочлена $P_n^s(x)$ использован символ Похгаммера

$$(a)_k = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ a(a+1) \cdots (a+k-1), & k \geq 1. \end{cases}$$

Корни многочлена $P_n^s(x)$ попарно различны и лежат в полуплоскости $\Re x > 0$ [42].

После нахождения узлов КФНСТ её коэффициенты можно вычислить по формуле [56]

$$A_{kn} = \frac{(-1)^{n+1} n! (2n+s-2)^2}{n^2 \Gamma(n+s-1) p_{kn}^2 (P_{n-1}^s(1/p_{kn}))^2}.$$

В работе [42] показано, что устойчивость формулы (10) по отношению к ошибкам вычисления функции $\varphi_s(p)$ определяется суммой модулей коэффициентов A_k

$$M_n = \sum_{k=1}^n |A_k|$$

и доказано неравенство

$$M_n \leq C n^{1-s} 3.764^n,$$

где C — постоянная величина, не зависящая от n . Как видно из приведённой выше формулы, сумма модулей коэффициентов КФНСТ быстро возрастает при увеличении числа узлов n , т. е. с ростом n возрастает ошибка в приближенных решениях. Поэтому увеличение количества узлов в КФНСТ не всегда является оправданным, следует брать меньшее число узлов с тем, чтобы характеристика неустойчивости не превзошла теоретическую оценку погрешности КФНСТ.

В случае если ошибки в вычислениях изображения по Лапласу сведены к минимальным, увеличение числа узлов в КФНСТ будет приводить к хорошим результатам. Однако, увеличение числа узлов приводит к увеличению времени построения квадратурной формулы. Поэтому рассмотрим модифицированный алгоритм нахождения узлов КФНСТ.

Узлы КФНСТ удовлетворяют неравенству [53]

$$n + s - 1 \leq |p_{kn}| < 2n + s - \frac{2}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

и расположены в правом полукольце (здесь зависимость узлов от n отражена двумя индексами p_{kn}).

Положим

$$z_{kn} = -(2n + s - 2)/p_{kn}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Эти числа равномерно ограничены при всех значениях n . В работе [53] показано, что при $n \rightarrow \infty$ точки z_{kn} стремятся к точкам кривой γ :

$$\gamma = \{z : |\Omega(z)| = 1, \Re z < 0\},$$

где

$$\Omega(z) = \exp\left(\sqrt{1 + z^{-2}}\right) / \left[z \left(1 + \sqrt{1 + z^{-2}}\right)\right].$$

Рассмотрим алгоритм построения КФНСТ, основанный на следующей теореме:

Теорема 2 ([53]). *Для любого фиксированного числа $s \in \mathbb{R}$ точка \hat{z} есть предельная точка нормированных корней (10) при $n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $\hat{z} \in \gamma$. Далее, если ψ есть замкнутая дуга кривой $\gamma \setminus \{\pm i\}$ с конечными точками μ_1, μ_2 ($\pi/2 < \arg \mu_1 \leq \arg \mu_2 < 3\pi/2$), и $\Omega(\mu_j) = \exp(i\phi_j)$, $j = 1, 2$, ($\pi/2 < \phi_2 \leq \phi_1 < 3\pi/2$), и пусть $\tau_n(\psi)$ означает число корней многочлена $P_n^s(-x)$, удовлетворяющих неравенству $\arg \mu_1 \leq \arg(-x) \leq \arg \mu_2$. Тогда*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau_n(\psi)}{n} = \frac{\phi_1 - \phi_2}{\pi}.$$

Следовательно, аргументы корней уравнения $P_n^s(-x) = 0$ при увеличении n равномерно распределяются в интервале $(\pi/2, 3\pi/2)$.

В итоге получим следующий алгоритм для построения КФНСТ с большим числом узлов:

1) для некоторого угла α из интервала $(\pi/2, 3\pi/2)$ находим точку $z_0 \in \gamma$ такую, что $\arg(z_0) = \alpha$;

2) полагаем $x_0^\alpha = -z_0$ и используем метод Ньютона для нахождения корня уравнения $P_n^s(x) = 0$:

$$x_{m+1}^\alpha = x_m^\alpha - \frac{P_n^s(x_m^\alpha)}{P_n^{s'}(x_m^\alpha)}, \quad m = 0, 1, \dots$$

3) положим $x^\alpha = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m^\alpha$, тогда искомый узел КФНСТ равен $(2n+s-2)x^\alpha$; соответствующий ему коэффициент КФНСТ вычисляем по формуле (8);

4) остальные узлы КФНСТ находятся аналогично, перебирая значения угла α из интервала $(\pi/2, 3\pi/2)$ с достаточно малым шагом, зависящим от n .

Данный алгоритм позволяет строить КФНСТ даже при больших значениях числа узлов ($n = 100$).

Рассмотрим применение КФНСТ для обращения преобразования Лапласа дробно-экспоненциальных функций и интегралов от них, которые возникают в механике в задачах линейной вязкоупругости. Более подробно они будут рассмотрены в Главе 2. Дробно-экспоненциальные функции берутся в качестве ядер ползучести и релаксации в соотношениях Больцмана-Вольтерра (2), (3).

Дробно-экспоненциальные функции задаются выражением

$$\mathfrak{E}_\alpha(\beta, t) = t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta t^{1+\alpha})^k}{\Gamma((1+\alpha)(1+k))}, \quad -1 < \alpha \leq 0, \quad \beta < 0.$$

Изображение по Лапласу функции $\mathfrak{E}_\alpha(\beta, t)$ равно

$$\bar{\mathfrak{E}}_\alpha(\beta, p) = \frac{1}{p^{1+\alpha} - \beta},$$

при $\alpha = 0$ оно соответствует функции-оригиналу $e^{\beta t}$.

Как видно из приведённых выше формул, дробно-экспоненциальные функции зависят от двух параметров — α , β и аргумента t . С целью упрощения применения этих ядер были составлены таблицы функций [30], [31]

$$F_1(\alpha, x) = x^{\frac{-\alpha}{\alpha+1}} \mathfrak{E}_\alpha(\beta, t), \quad F_2(\alpha, x) = \frac{1}{x} \int_0^t \mathfrak{E}_\alpha(\beta, \tau) d\tau,$$

$$x = -\beta t^{\alpha+1},$$

тем самым число параметров сократилось (α и аргумент x).

Не умаляя общности, положим $\beta = -1$.

Текст программы на языке Maple, которая вычисляет значение функции-оригинала $F_2(\alpha, x)$ по её изображению, приведён в Приложении Программа 1. Значения, полученные в программе, сравнивались со значениями функции $F_2(\alpha, x)$ из таблиц [30], [31]. Результаты вычислений представлены в Таблицах 1, 2.

Результаты вычисления $F_2(\alpha, x)$ при $\alpha = -0.4$.

Таблица 1

n	x	F_2	$F_{2\text{табл.}}$
20	0.2	$9.5919 \cdot 10^{-1}$	$9.5907 \cdot 10^{-1}$
20	0.8	$6.5314 \cdot 10^{-1}$	$6.5302 \cdot 10^{-1}$
20	1	$5.8679 \cdot 10^{-1}$	$5.8667 \cdot 10^{-1}$

Результаты вычисления $F_2(\alpha, x)$ при $\alpha = -0.65$.

Таблица 2

n	x	F_2	$F_{2\text{табл.}}$
20	1	$5.512 \cdot 10^{-1}$	$5.507 \cdot 10^{-1}$
10	4	$2.111 \cdot 10^{-1}$	$2.101 \cdot 10^{-1}$
20	4	$2.104 \cdot 10^{-1}$	$2.101 \cdot 10^{-1}$
20	400	$2.496 \cdot 10^{-3}$	$2.495 \cdot 10^{-3}$

Метод построения КФНСТ для обращения интегрального преобразования Лапласа рассматривался и изучался в работе [26]. Там же, наряду с описанием метода, даны рекомендации по применению методов параллельных алгоритмов для построения квадратурных формул.

1.3. Обращение преобразования Лапласа с помощью обобщённых квадратурных формул наивысшей степени точности

Существуют функции, для которых целесообразно строить не КФНСТ, а обобщённые квадратурные формулы, точные для отрицательных степеней p^a . Это связано с тем, что на практике наиболее интересным является случай, соответствующий длительным, но медленно протекающим во времени процессам ($0 < a \leq 1$). В этом случае оригинал $f(t)$ хорошо приближается функциями вида $t^s P(t^a)$, изображения которых имеют вид $p^{-s} Q(1/p^a)$, где P, Q — многочлены. Поэтому возникает необходимость построения ОКФНСТ.

Для приближённого вычисления интеграла в представлении

$$f(t) = t^{s-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s} \varphi_s \left(\frac{p}{t} \right) dp, \quad c > 0,$$

строим квадратурную формулу

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s} \varphi_s(p) dp \approx \sum_{k=1}^n A_k \varphi_s(p_k). \quad (12)$$

Пусть a — произвольное положительное число. В области регулярности функции $\varphi_s(p) = p^s F(p)$ выберем любые попарно различные точки p_k ($k = 1, 2, \dots, n$) и потребуем, чтобы формула (12) была точна для функций $\varphi(p) = p^{-am}$, $m = 0, 1, \dots, n-1$, что равносильно выполнению равенств

$$\sum_{k=1}^n A_k p_k^{-am} = \frac{1}{\Gamma(s+am)}, \quad m = 0, 1, \dots, n-1, \quad (13)$$

т. е. построим интерполяционную обобщённую КФ.

За счёт специального выбора узлов можно построить формулы наивысшей степени точности. По аналогии со случаем $a = 1$ (что соответствует КФНСТ) для обобщённых квадратурных формул наивысшей степени точности доказаны теоремы существования и единственности [41]:

Теорема 3. Для того чтобы формула (12) была точна для функций $\varphi(p) = p^{-aj}$, $j = \overline{0, 2n-1}$, необходимо и достаточно выполнение двух условий:

- 1) формула (21) интерполяционная;
- 2) построенный по узлам формулы (12) многочлен

$$\omega_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - p_k^{-a})$$

удовлетворяет условиям

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s} \omega_n(p^{-a}) p^{-am} dp = 0, \quad m = \overline{0, n-1}, \quad c > 0. \quad (14)$$

Доказано, что такой многочлен существует и определяется однозначно, а его корни, т. е. узлы ОКФНСТ, удовлетворяют неравенствам $\Re(p_k^a) > 0$, $k = \overline{1, n}$.

Отметим, что узлы и коэффициенты формулы (12) суть комплексные числа.

Если многочлен $\omega_n(x)$ записать в виде

$$\omega_n(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n,$$

то условия ортогональности (14) равносильны системе уравнений относительно неизвестных коэффициентов b_k :

$$\frac{b_1}{\Gamma(s + (n+k-1)a)} + \dots + \frac{b_n}{\Gamma(s + ka)} = -\frac{1}{\Gamma(s + (n+k)a)}, \quad (15)$$

где $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Многочлен $\omega_n(x)$ существует и определяется однозначно. В работе [38] показано, что узлы ОКФНСТ при $s > 0$ удовлетворяют неравенствам $\Re(p_k^{-a}) > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$. При $a = 1$ ОКФНСТ есть КФНСТ, узлы которых p_k простые; при $a \neq 1$ простота p_k не доказана. Также для $a \neq 1$ не существует явного вида для многочлена $\omega_n(x)$. Поэтому построение ОКФНСТ осуществляется в несколько этапов:

- 1) сначала необходимо вычислить коэффициенты системы уравнений (15) относительно неизвестных b_k и найти решение этой системы;

2) затем необходимо найти узлы p_k квадратурной формулы из уравнения $\omega_n(p_k^{-a}) = p_k^{-an} + b_1 p_k^{-a(n-1)} + \dots + b_n = 0$;

3) далее из условий интерполяционности (13) найти коэффициенты квадратурной формулы.

Вопрос сходимости ОКФНСТ исследовался в работе [20]. Погрешность $R_n(\varphi_s)$ ОКФНСТ (12) выражается через погрешность интерполяции $r_{n-1}(\varphi_s, p)$ функции $\varphi_s(p)$ по её значениям в узлах формулой

$$R_n(\varphi_s, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} p^{-s} r_{n-1}(\varphi_s, p) dp.$$

Погрешность интерполяции равна

$$r_{n-1}(\varphi_s, p) = \varphi_s(p) - \sum_{k=1}^n l_k \left(\frac{1}{p} \right) \varphi_s(p_k),$$

где

$$l_k \left(\frac{1}{p} \right) = \frac{\omega_k \left(\frac{1}{p} \right)}{\omega_k \left(\frac{1}{p_k} \right)}, \quad \omega_k \left(\frac{1}{p} \right) = \frac{\omega \left(\frac{1}{p} \right)}{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_k} \right)},$$

$$\omega \left(\frac{1}{p} \right) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_k} \right).$$

Далее считаем, что функция $\varphi_s(p)$ зависит лишь от p^a , т. е. $\varphi_s(p) = \Phi(p^a)$. Положим $w = p^a$ и предположим, что все особые точки функции $\Phi(w)$ расположены в конечной части полуплоскости $\Re w < 0$.

Рассчитывать на сходимость ОКФНСТ можно только при сходимости интерполяционного процесса ($r_{n-1}(\varphi_s, p) \rightarrow 0$). В работе [20] доказана следующая теорема:

Теорема 4. Пусть при некотором $s > 0$ все особые точки функции $\Phi(w)$ заключены в круге $|w - w_0| \leq r_0$, $w_0 < 0$, $w_0 + r_0 < 0$, который виден из начала координат под наименьшим углом. Если $r_0 < -3w_0/5$, то последовательность интерполяционных многочленов для функции $\Phi(w)$ по узлам ОКФНСТ при $n \rightarrow \infty$ равномерно сходится к $\Phi(w)$ в полуплоскости $\Re w > 0$. Тогда для любого $t \in (0, T]$ ($0 < T < \infty$) выполняется условие $R_n(\varphi_s, t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Рассмотрим оценки погрешности ОКФНСТ, которые были подробно изучены в работе [24]. В частности в этой работе была доказана

Теорема 5. Пусть при некоторых $a, s > 0$ функция $P_{as}(t) = \varphi_s(t^{-1/a})$ регулярна на круге $|t| \leq r$, $r > 0$, и пусть A_k, p_k , ($k = 1, 2, \dots, n$) — узлы и коэффициенты ОКФНСТ и предположим, что $|p_k^{-a}| < 1$, $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда соответствующая функция-оригинал представима в виде

$$f(t) = t^{s-1} \left(\sum_{k=1}^n A_k \varphi_s \left(\frac{p_k}{t} \right) + \varepsilon_n(t^a) \right),$$

и для любых чисел t и ρ , удовлетворяющих неравенству $0 < t^a < \rho \leq r$, справедлива оценка

$$|\varepsilon_n(t^a)| \leq M_{as\rho} \sigma_n(t^a, \rho),$$

где

$$M_{as\rho} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P_{as}(\rho \exp(i\theta))|^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sigma_n(t^a, \rho) = \left(\sum_{m=2n}^{\infty} \left(\frac{1}{\Gamma(s + am)} - \sum_{k=1}^n A_k \mu_k^m \right)^2 |t^a/\rho|^{2m} \right)^{1/2},$$

$$\mu_k = p_k^{-a}.$$

Заметим, что оценка погрешности, доказанная в теореме 5, состоит из двух сомножителей: $M_{as\rho}$, зависящего лишь от изображения и $\sigma_n(t^a, \rho)$, зависящего от параметров ОКФНСТ.

Метод применения ОКФНСТ для обращения преобразования Лапласа реализован в виде программы в математическом пакете Maple. Текст программы приведён в Приложении Программа 2. В Таблицах 3, 4 приведены результаты вычисления функции $F_1(\alpha, x)$.

Результаты вычисления $F_1(\alpha, x)$ при $\alpha = -0.4$.

Таблица 3

n	x	F_1	$F_{1\text{табл.}}$
20	0.2	$4.9091 \cdot 10^{-1}$	$4.9091 \cdot 10^{-1}$
20	0.8	$2.1674 \cdot 10^{-1}$	$2.1674 \cdot 10^{-1}$
20	1	$1.7110 \cdot 10^{-1}$	$1.7110 \cdot 10^{-1}$

Результаты вычисления $F_1(\alpha, x)$ при $\alpha = -0.65$.

Таблица 4

n	x	F_1	$F_{1\text{табл.}}$
20	1	$9.1239 \cdot 10^{-2}$	$9.124 \cdot 10^{-2}$
10	4	$1.2219 \cdot 10^{-2}$	$1.222 \cdot 10^{-2}$
20	4	$1.2219 \cdot 10^{-2}$	$1.222 \cdot 10^{-2}$
20	400	$1.5759 \cdot 10^{-6}$	$1.576 \cdot 10^{-6}$

Как видно из результатов, ОКФНСТ обладают более высокой точностью вычислений по сравнению с КФНСТ. При этом количество узлов n в ОКФНСТ бралось равным 20. Данный метод может быть применён для вычисления значений функции–оригинала как при $x \geq 1$, так и при $0 < x < 1$.

Теперь приведём результаты вычисления функции ползучести (пространственная переменная x опущена)

$$\varepsilon(t) = 1 + 4 \int_0^t \mathfrak{E}_{-0.8}(\tau) d\tau$$

по её изображению

$$\bar{\varepsilon}(p) = \frac{1}{p} + \frac{4}{p(p^{0.2} + 1)}.$$

В Таблицах 5–7 приведены результаты вычислений функции $\varepsilon(t)$ с помощью КФНСТ и ОКФНСТ. Для её вычисления использовались также Программы 1, 2 из Приложения с изменённым выражением (изображения по Лапласу) для

подсчёта квадратурной суммы в конце программы.

Результаты вычисления $\varepsilon(t)$ при $\alpha = -0.8$, $t = 0.001$.

Таблица 5

n	$\varepsilon(t)_{\text{КФНСТ}}$	$\varepsilon(t)_{\text{ОКФНСТ}}$	$\varepsilon(t)_{\text{точное}}$
10	1.86959	1.86696	1.86696
15	1.86544	1.86696	1.86696
20	1.86799	1.86696	1.86696

Результаты вычисления $\varepsilon(t)$ при $\alpha = -0.8$, $t = 1$.

Таблица 6

n	$\varepsilon(t)_{\text{КФНСТ}}$	$\varepsilon(t)_{\text{ОКФНСТ}}$	$\varepsilon(t)_{\text{точное}}$
10	3.12288	3.11560	3.11559
15	3.11119	3.11560	3.11559
20	3.11867	3.11560	3.11559

Результаты вычисления $\varepsilon(t)$ при $\alpha = -0.8$, $t = 10^6$.

Таблица 7

n	$\varepsilon(t)_{\text{КФНСТ}}$	$\varepsilon(t)_{\text{ОКФНСТ}}$	$\varepsilon(t)_{\text{точное}}$
10	4.79909	4.79347	4.79352
15	4.78931	4.79347	4.79352
20	4.79682	4.79347	4.79352

Как видно из приведённых выше таблиц, ОКФНСТ позволяют находить значение функции–оригинала с большей точностью по сравнению с КФНСТ. Причём наилучшие результаты достигаются при вычислениях в точках $0 < t < 1$. Таким образом, метод, основанный на применении ОКФНСТ для вычисления функции–оригинала по её изображению по Лапласу, зависящего от $1/p^a$, где $0 < a < 1$, является предпочтительным. При этом число узлов в ОКФНСТ достаточно брать равным $n = 10$.

Метод построения ОКФНСТ для обращения интегрального преобразования Лапласа рассматривался и изучался в работах [26], [43].

1.4. Обращение преобразования Лапласа с помощью метода Виддера

Наряду со специальными методами решения интегро-дифференциальных уравнений с дробными производными могут быть применены также методы Виддера, деформации контура и другие. Так, рассмотрим метод обращения, в основе которого лежит следующая

Теорема 6 ([63]). *Если $f(t)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0, T]$ при любом $T > 0$ и интеграл $\int_0^{\infty} \exp(-pt)f(t) dt = F(p)$ сходится абсолютно при некотором p , то*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n!} x_n^{n+1} F^{(n)}(x_n) = \frac{1}{2} [f(t-0) + f(t+0)],$$

где $x_n = (n + \theta_n)/t$, $0 \leq \theta_n \leq 1$.

Введём оператор Виддера (W_n), полагая $\theta_n = 0$:

$$W_n(f, t) = (-1)^n \frac{n^{n+1}}{n! t^{n+1}} F^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = t$, то при $n \rightarrow \infty$ приближение $W_n(f, t)$ сходится к $f(t)$. Скорость сходимости будет зависеть от степени гладкости функции и в случае непрерывности второй производной она будет величиной $O\left(\frac{1}{n}\right)$, но дальнейшее увеличение гладкости оригинала не увеличивает скорость сходимости, т. е. метод Виддера быстро насыщаем.

Существует специальный метод для ускорения сходимости метода Виддера [42]. Выберем k различных натуральных чисел $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ и положим $d_j = n_j/n_1$, $j = 1, 2, \dots, k$. Составим линейную комбинацию

$$W(n, k, f, t) = \sum_{j=1}^k c_{jk} W_{n_j}(f, t) \quad (17)$$

с коэффициентами c_{jk} , определяемыми из системы линейных алгебраических

уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k c_{jk} &= 1, & \sum_{j=1}^k c_{jk} d_j^{-1} &= 0, \\ \sum_{j=1}^k c_{jk} d_j^{-2} &= 0, \quad \dots & \sum_{j=1}^k c_{jk} d_j^{-(k-1)} &= 0. \end{aligned}$$

Решение этой системы легко находится:

$$c_{jk} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \frac{d_j}{d_j - d_i}, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (18)$$

Справедлива следующая

Теорема 7 ([59]). Пусть $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ ($0 < a < a_1 < b_1 < b < \infty$), и $f \in C(0, \infty)$, $f \in C^{2k}([a, b])$, тогда при $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно $t \in [a_1, b_1]$ справедливо равенство

$$n^k (W(n, k, f, t) - f(t)) = \sum_{m=k}^{2k} M_m t^m f^{(m)}(t) + o(1),$$

где M_m — константы, не зависящие от t и f .

Итак, при $n \rightarrow \infty$ имеет место равенство $W(n, k, f, t) - f(t) = O(n^{-k})$. Вычисление $W_n(f, t)$ непосредственно по формуле (16), содержащей производные изображения высокого порядка, затруднительно. Поэтому для преодоления этой трудности был использован путь, предложенный в работе [32] и для нашего случая состоит в следующем: пусть n, m — натуральные числа ($m > n$) и $r \in (0, 1)$. Положим

$$W_{n,m}(f, t) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{(re_m(j))^{-n}}{1 - re_m(j)} \varphi\left(\frac{n}{t}(1 - re_m(j))\right), \quad (19)$$

где $e_m(x) = \exp(2\pi \frac{ix}{m})$, $\varphi(p) = pF(p)$.

Покажем, что значение $W_n(f, t)$ можно заменить с необходимой точностью значением величины $W_{n,m}(f, t)$. Поскольку в работе [32] опущен вывод формулы

(19), поэтому приведём его здесь. Рассмотрим функцию

$$G(z, t) = \frac{1}{t} F\left(\frac{1-z}{t}\right), \quad t > 0.$$

При фиксированном $t > 0$ функция $G(z, t)$ регулярна в круге $|z| < 1$ и разлагается в сходящийся в этом круге ряд

$$G(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) z^n.$$

Коэффициенты $a_n(t)$ можно вычислять, применяя формулу Коши

$$\begin{aligned} a_n(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{G(z, t)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{G(re^{i\varphi}, t) ire^{i\varphi}}{(re^{i\varphi})^{n+1}} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (re^{i\varphi})^{-n} G(re^{i\varphi}, t) d\varphi, \end{aligned}$$

где r — любое положительное вещественное число, $r < 1$.

Для вычисления последнего получившегося интеграла применим формулу правых прямоугольников с шагом $h = 2\pi/m$, $\varphi_j = jh$, где $j = 1, 2, \dots, m$.

Получим

$$a_n(t) \approx \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (re^{i\varphi_j})^{-n} G(re^{i\varphi_j}, t).$$

Как показано в работе [42],

$$W_n(f, t) = a_n\left(\frac{t}{n}\right).$$

$$W_n(f, t) = a_n\left(\frac{t}{n}\right) \approx \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (re^{i\varphi_j})^{-n} G(re^{i\varphi_j}, t/n) = W_{n,m}(f, t),$$

таким образом получим формулу (19).

Предположим, что значения функции $\varphi(p)$ вычислены с погрешностью, по модулю не превосходящей ε , и искомый оригинал ограничен: $|f(t)| \leq M$, тогда справедливо неравенство

$$|W_{n,m}(f, t) - W_n(f, t)| \leq \Delta,$$

где

$$\Delta = \frac{Mr^m}{1-r^m} + \frac{\varepsilon}{(1-r)r^n}. \quad (20)$$

При любом фиксированном n при $\varepsilon \rightarrow 0$, т. е. с увеличением точности вычислений функции $\varphi(p)$, можно выбрать параметры r, m так, что $\Delta \rightarrow 0$. Отметим, что значение m следует выбирать из условия, что первое слагаемое справа в оценке (20) приближенно равно второму слагаемому, поскольку увеличение m суммарную погрешность не уменьшает, а лишь увеличивает объем вычислений по формуле (19).

Следовательно возникает задача нахождения оптимальных значений параметров r, m , при которых $\Delta \rightarrow 0$. Для их нахождения запишем условие (20) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{(1-r)r^n} &\approx \delta, \\ M \frac{r^m}{1-r^m} &\approx \delta. \end{aligned}$$

Заданными и известными величинами в условиях, приведённых выше, являются ε — точность вычислений (либо машинная точность, либо точность вычисления функции $\varphi(p)$), M — величина, ограничивающая модуль функции-оригинала. Задаём параметры n и δ (необходимая точность вычисления по методу Виддера) и из первого условия находим значение r . Затем найденное значение r подставляем во второе условие и находим величину m . Используя найденные значения величин r, m , находились коэффициенты c_{jk} по описанным выше формулам.

Таким образом для вычислений по формуле (17) вместо $W_{n_j}(f, t)$ используем приближения к ним $W_{n_j, m_j}(f, t)$, вычисленные по формуле (19) при подходе m_j .

Рассмотрим теперь следующую задачу: при фиксированном числе слагаемых k в формуле (17) выбрать такие номера приближений по Виддеру из заданного диапазона от n_1 до n_k , чтобы коэффициент $B = \sum_{j=1}^k c_{jk} d_j^{-k}$ имел наименьшее возможное значение по абсолютной величине (этот коэффициент опре-

деляет главный член погрешности приближения (17) к искомому оригиналу). В работе [32] показано, что оно достигается, если использовать приближения W_n с номерами $n_k, n_k - 1, \dots, n_k - k + 1$.

Однако при таком выборе чисел d_1, \dots, d_k мы получим наибольшие по модулю значения чисел c_{jk} , и в правой части (17) складываются большие числа разных знаков, что может привести к потере точности в вычислениях. Отсюда возникает следующая задача: для фиксированных значений k, n_1, n_k выбрать числа d_1, \dots, d_k так, чтобы величина $\sum_{j=1}^k |c_{jk}|$ была минимальна (тогда формула (17) наиболее устойчива по отношению к ошибкам в используемых приближениях по Виддеру).

Рассмотрим на отрезке $[\frac{1}{n_k}, \frac{1}{n_1}]$ смещенный многочлен Чебышева

$$\tilde{T}_{k-1}(x) = T_{k-1}\left(\frac{2x - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_k}}{\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_k}}\right), \quad k > 1.$$

Возьмём точки

$$x_{j+1} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_k} \right) \cos\left(\frac{j\pi}{k-1}\right) + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_k} \right],$$

в которых модуль многочлена $\tilde{T}_{k-1}(x)$ достигает максимума, т.е. $|\tilde{T}_{k-1}(x_j)| = 1$, $j = 1, 2, \dots, k$. Положим $m_j = \frac{1}{x_j}$, $j = 1, \dots, k$, а затем по числам $\bar{d}_j = \frac{m_j}{m_1}$, $j = 1, \dots, k$, построим числа \bar{c}_{jk} вида (18). Тогда, как показано в работе [32], величина $\sum_{j=1}^k |\bar{c}_{jk}|$ принимает минимальное значение, равное $(-1)^{k-1} \tilde{T}_{k-1}(0)$.

Числа m_j не целые, и поэтому следует в качестве искомым номеров приближений по Виддеру взять ближайшие целые к ним, т.е. положить $n_j = \lfloor m_j + \frac{1}{2} \rfloor$, $j = 1, 2, \dots, k$. Такие номера будем называть чебышевскими.

Необходимость вычислять оптимальные значения для параметров r, m как это описано выше, увеличивает трудоёмкость применения данного метода. Оптимальным значением параметров r, m являются $r = 0.95$, $m = 950$, параметр k — число натуральных чисел n_1, n_2, \dots, n_k , принимался равным 3. При этом с

увеличением m, k , а также длины промежутка $n_k - n_1$ точность вычислений не увеличивалась.

Метод, описанный в этой главе, был применён для вычисления функции ползучести (пространственная переменная x опущена)

$$\varepsilon(t) = 1 + 4 \int_0^t \Theta_{-0.8}(\tau) d\tau$$

по её изображению

$$\bar{\varepsilon}(p) = \frac{1}{p} + \frac{4}{p(p^{0.2} + 1)}.$$

Программа для вычисления представлена в Приложении Программа 3. Результаты вычислений находятся в Таблицах 8–10.

Результаты вычисления $\varepsilon(t)$ при $\alpha = -0.8$, $t = 0.001$.

Таблица 8

n	$\varepsilon(t)$	$\varepsilon(t)_{\text{точное}}$
100	1.86699	1.86696
150	1.86696	1.86696
200	1.86696	1.86696

Результаты вычисления $\varepsilon(t)$ при $\alpha = -0.8$, $t = 1$.

Таблица 9

n	$\varepsilon(t)$	$\varepsilon(t)_{\text{точное}}$
100	3.11565	3.11559
150	3.11560	3.11559
200	3.11559	3.11559

Результаты вычисления $\varepsilon(t)$ при $\alpha = -0.8$, $t = 10^6$.

Таблица 10

n	$\varepsilon(t)$	$\varepsilon(t)_{\text{точное}}$
100	4.79355	4.79352
150	4.79347	4.79352
200	4.79347	4.79352

Применяя метод Виддера к задаче нахождения функции–оригинала по изображению по Лапласу, можно добиться более точных значений по сравнению с рассмотренными в предыдущих параграфах методами (КФНСТ, ОКФНСТ). Но, чтобы добиться точности вычислений, необходимо увеличивать точность промежуточных вычислений — это проявление неустойчивости исходной задачи, и если её наращивать в КФ, то они также будут давать хорошие результаты.

Метод Виддера для обращения интегрального преобразования Лапласа рассматривался и изучался в работах [43], [27].

1.5. Деформирование контура интегрирования

Рассмотрим обращение преобразования Лапласа, исходя из формулы Римана–Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{zt} F(z) dz, \quad c > \gamma, \quad (21)$$

где γ — абсцисса сходимости интеграла Лапласа. Напомним, что интеграл (21) понимается в смысле главного значения, он не зависит от c и в случае разрыва оригинала в точке t мы получаем полусумму предельных значений оригинала слева и справа от точки t .

Положим в формуле обращения (21) $z = c + i\tau$, тогда $e^{zt} = e^{ct} e^{i\tau t}$. При фиксированном t первый сомножитель постоянен, а второй пробегает единичную окружность на комплексной плоскости бесконечное число раз. С ростом t первый сомножитель и скорость пробегания окружности вторым сомножителем неограниченно возрастают, поэтому римановыми суммами приблизить интеграл в (21) скорее всего не получится.

Для преодоления этих трудностей заменим линию интегрирования в (21) эквивалентным контуром $L = \{z \mid z = l(u), u \in (-\infty, +\infty)\}$, который начинается и заканчивается в левой полуплоскости так, что $\Re(z) \rightarrow -\infty$ на обоих его концах. Такая замена возможна при выполнении условий:

- 1) внутри контура L содержатся все особенности изображения $F(z)$;
- 2) $|F(z)| \rightarrow 0$ равномерно в полуплоскости $\Re(z) \leq \gamma$ при $|z| \rightarrow \infty$. Далее всюду предполагается, что эти условия выполняются.

Запишем интеграл (21) в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{zt} F(z) dz, \quad t > 0, \quad (22)$$

а затем положим $z = l(u)$, в результате формула (22) принимает вид

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_t(u) du, \quad (23)$$

где

$$G_t(u) = \frac{1}{2\pi i} e^{tl(u)} l'(u) F(l(u)). \quad (24)$$

Функция (24) не имеет особенностей как на линии интегрирования, так и в некоторой “полосе”, содержащей внутри себя линию интегрирования. Для вычисления интеграла (23) воспользуемся формулой трапеций с бесконечным числом узлов (см. [45], [49]). Заметим, что в (23) интегрирование происходит по бесконечному промежутку, а формула погрешности аппроксимации для классической формулы трапеции применима лишь для интегрирования по конечному промежутку.

Так, классическая составная формула трапеций выглядит следующим образом (составная формула трапеций Котеса):

$$\int_a^b f(x) dx = h \left(\frac{f_0 + f_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i \right) + E_n(f),$$

где h — шаг сетки, $E_n(f)$ — погрешность аппроксимации задаётся выражением

$$E_n(f) = -\frac{f''(\xi)}{12} (b-a)h^2, \quad \text{где } \xi \in (a,b).$$

Однако, в работе [45] показано, что формула трапеций может давать хорошую точность и для нашего случая (промежуток интегрирования — бесконечный), при этом скорость сходимости зависит от ширины области регулярности функции $G_t(u)$ и шага численного интегрирования.

Задача вычисления оценок погрешности в результате применения формулы трапеций с бесконечным числом узлов рассмотрена в работе [62].

Пусть $w = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$, функция $g(w)$ аналитична в полосе $-d \leq v \leq c$ для некоторых $c > 0$, $d > 0$, и равномерно в этой полосе $g(w) \rightarrow 0$ при $|w| \rightarrow \infty$ с такой скоростью, что существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(u + ir)| du, \quad r \in [-d, c].$$

Для вычисления интеграла

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) du$$

применим формулу трапеций с бесконечным числом узлов:

$$I \approx I_h = h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(kh),$$

и с конечным числом $(2N + 1)$ узлов:

$$I \approx I_{h,N} = h \sum_{k=-N}^N g(kh).$$

Положим $DE = |I - I_h|$, $TE = |I_h - I_{h,N}|$.

Теорема 8. Пусть для некоторых положительных чисел M_+ , M_- справедливы неравенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(u + ir)| du \leq M_-, \quad r \in [-d, 0],$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(u + is)| du \leq M_+, \quad s \in [0, c].$$

Тогда

$$|I - I_h| \leq DE_+ + DE_-,$$

где

$$DE_+ = \frac{M_+}{e^{2c\pi/h} - 1}, \quad DE_- = \frac{M_-}{e^{2d\pi/h} - 1}.$$

Доказательство теоремы 8 приведено в книге [42].

Константы M_+ , M_- не зависят от шага h численного интегрирования и значения N , и потому в дальнейшем ограничимся качественным поведением оценок с помощью соотношений

$$DE_+ = O(e^{-2c\pi/h}), \quad DE_- = O(e^{-2d\pi/h}), \quad h \rightarrow 0.$$

Для погрешности TE при постоянном h полагаем

$$TE = O(|g(hN)|), \quad N \rightarrow \infty.$$

Далее для избранного контура интегрирования приравниваем характеристики величин DE_+ , DE_- , TE , что приведет к некоторому способу выбора параметров контура и шага интегрирования в зависимости от N и возможности получения полной погрешности метода.

Результаты, описанные выше, применим для вычисления интеграла (23), положив $g(w) = G_t(w)$.

В работах [40] и [61] были предложены две линии интегрирования для интеграла (22), однако для них полоса регулярности имеет переменную ширину и стремится к нулю при неограниченном возрастании модуля переменной интегрирования.

В работе [62] предложены другие, более эффективные контуры, для которых получены априорные оценки погрешности. В работе [28] исследовались параболический и гиперболический контуры из [62] и даны оценки погрешности для каждого случая.

Так, в работе [62] в качестве контура предлагается брать кривую

$$z(u) = \mu(1 - u^2) + 2i\mu u, \quad (25)$$

где $\mu > 0$, тогда формула обращения примет вид:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{z(u)t} F(z(u)) z'(u) du.$$

Прямые $w = u - id$ при $v = d$, $d > 0$, и $w = u + ic$ при $v = c$, $0 < c < 1$ при отображении (25) переходят в параболы:

$$z(u) = \mu((1+d)^2 - u^2) + 2iu\mu(1+d), \quad z(u) = \mu((1-c)^2 - u^2) + 2iu\mu(1-c).$$

Предположим, что все особые точки изображения расположены в конечной части полуплоскости $\Re(z) < 0$, и не все они вещественны.

Существует оптимальное значение параметра d , при котором достигается наилучшая оценка [62]

$$DE_- = O\left(e^{\left(-\frac{\pi^2}{ih^2\mu} + \frac{2\pi}{h}\right)}\right), \quad h \rightarrow 0.$$

В нашем предположении ветви параболы не смыкаются, таким образом, наибольшее допустимое значение c удовлетворяет неравенству $0 < c < 1$.

Приравняв показатели величин DE_- , DE_+ , TE , найдем h , μ :

$$h = \frac{\sqrt{1 + 4c(c + 1)}}{N}, \quad \mu = \frac{\pi}{2(c + 1)th} = \frac{\pi}{2(c + 1)\sqrt{1 + 4c(c + 1)}} \frac{N}{t}.$$

Напомним, что число c здесь не произвольно. Например, в случае $f(t) = \sin(\omega t)$ изображение $F(z) = \omega/(z^2 + \omega^2)$ имеет особые точки $\pm i\omega$, которые должны лежать между точками пересечения параболы $z(u) = \mu((1 - c)^2 - u^2) + 2iu\mu(1 - c)$ с мнимой осью, т. е. должно выполняться неравенство $2\mu(1 - c)^2 > |\omega|$ или равносильное ему неравенство

$$N > \frac{|\omega| t(c + 1)\sqrt{1 + 4c(c + 1)}}{\pi(1 - c)^2}.$$

Погрешность метода в таком случае есть величина

$$O\left(\exp\left(-\frac{2\pi}{h}c\right)\right) = O\left(\exp\left(-\frac{2\pi c}{\sqrt{1 + 4c(c + 1)}}N\right)\right), \quad N \rightarrow \infty. \quad (26)$$

В качестве гиперболического контура предлагается брать кривую

$$z(u) = \mu(1 + \sin(iw - \alpha)), \quad w = u + iv.$$

Аналогично случаю параболического контура имеем оптимальное значение параметра d , при котором достигается наилучшая оценка [62]

$$DE_- = O(\exp(\mu t - 2\pi\alpha/h)), \quad h \rightarrow 0,$$

$$TE = O(\exp(\mu t(1 - \sin(\alpha) \cosh(hN))))), \quad N \rightarrow \infty.$$

Приравняв показатели величин DE_- , DE_+ , TE , найдем h , μ :

$$h = \frac{A(\alpha)}{N}, \quad \mu = \frac{4\pi\alpha - \pi^2 N}{A(\alpha) t},$$

где

$$A(\alpha) = \cosh^{-1}\left(\frac{2\alpha}{(4\alpha - \pi)\sin(\alpha)}\right).$$

Заметим, что в описанных выше случаях получен лишь порядок оценки убывания погрешности.

В статье [21] приводится кусочно прямолинейный контур (см. Рис. 1, Рис. 2), при использовании которого получены явные оценки погрешности. Далее для более полного понимания сути работы [21] и ввиду важности полученных в статье результатов приведём здесь её основные результаты.

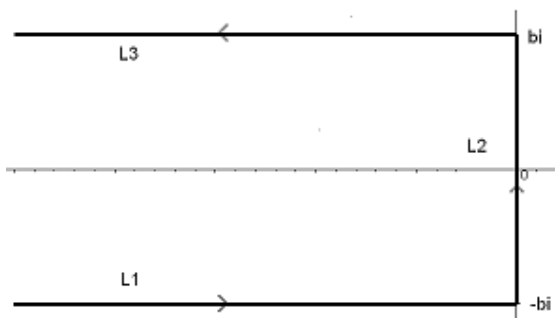


Рис. 1. Первый контур

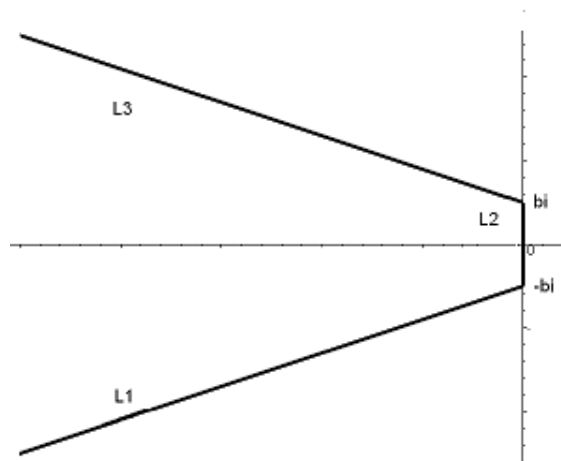


Рис. 2. Второй контур

Так, в [21] предлагается рассмотреть кусочно прямолинейный контур, состоящий из трёх участков. Обозначим их L_1, L_2, L_3 . На участке L_2 параметр z для обоих контуров изменяется по закону $z = xbi$, $x \in [-1, 1]$, $b > 0$. На участке L_1 имеем $z = x - bi$, $x \in (-\infty, 0]$, а на участке L_3 $z = -x + bi$, $x \in [0, \infty)$.

Заметим, что первый контур является частным случаем второго (если углы наклона участков L_1, L_3 второго контура равны нулю). Выбор контура из предложенных в [21] зависит от расположения особых точек изображения, однако характер исследования одинаков, и потому для простоты ограничимся рассмотрением первого контура.

Предполагается, что все особые точки изображения расположены в левой полуплоскости, поэтому в формуле обращения Римана–Меллина (21) можно положить $c = 0$. В противном случае вместо $F(z)$ рассмотрим функцию $F(z + a)$, $a > 0$ (она соответствует функции–оригиналу $f(t) \exp(-at)$) с особыми точками в левой полуплоскости.

Используя предложенный контур для вычисления (22), получим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{zt} F(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3} \right) e^{zt} F(z) dz.$$

После замены переменной z получим

$$\begin{aligned} \int_{L_1} e^{zt} F(z) dz &= e^{-ibt} \int_0^\infty e^{-xt} F(-x - bi) dx, \\ \int_{L_2} e^{zt} F(z) dz &= bi \int_{-1}^1 e^{ibt x} F(ibx) dx, \\ \int_{L_3} e^{zt} F(z) dz &= -e^{ibt} \int_0^\infty e^{-xt} F(-x + bi) dx. \end{aligned}$$

В работе [21] дано подробное описание способа вычисления интегралов, входящих в приведённые выше формулы. А также приведены оценки погрешности для вычисления каждого из интегралов.

В случае интегралов вида

$$\int_{-1}^1 e^{i\omega x} g(x) dx \quad (27)$$

предлагается производить вычисления следующим образом.

Воспользуемся предложенным в работе [3] способом приближенного вычисления интегралов вида (27): дана квадратурная формула Гаусса [15] с n узлами алгебраической степени точности $2n - 1$

$$\int_{-1}^1 v(x) dx \approx \sum_{j=1}^n A_j v(x_j). \quad (28)$$

Её узлы суть корни многочлена Лежандра $P_n(x)$.

Построим интерполяционный многочлен $L_{n-1}(x)$ для функции $g(x)$ по значениям $g(x_1), \dots, g(x_n)$ и представим его в виде разложения по многочленам Лежандра

$$L_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k P_k(x),$$

коэффициенты которого точно вычисляются с помощью формулы Гаусса (28):

$$c_k = \frac{2k+1}{2} \sum_{j=1}^n A_j g(x_j) P_k(x_j).$$

Погрешность интерполяции представима в виде

$$g(x) - L_{n-1}(x) = \frac{g^{(n)}(\xi) 2^n (n!)^2}{n! (2n)!} P_n(x), \quad \xi \in [-1, 1]. \quad (29)$$

Полагая в формуле (27) $g(x) \approx L_{n-1}(x)$ и используя известное равенство

$$\int_{-1}^1 e^{i\omega x} P_k(x) dx = i^k \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}} J_{k+1/2}(\omega),$$

где $J_\nu(\omega)$ — функции Бесселя, придем к интерполяционной квадратурной формуле

$$\int_{-1}^1 e^{i\omega x} g(x) dx \approx \sum_{j=1}^n D_j(\omega) g(x_j), \quad D_j(\omega) = A_j \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2} i^k J_{k+1/2}(\omega) P_k(x_j), \quad (30)$$

погрешность которой равна

$$R_n(g) = \int_{-1}^1 e^{i\omega x} (g(x) - L_{n-1}(x)) dx$$

и в силу представления (29) оценивается неравенством

$$|R_n(g)| \leq \frac{1}{(2n-1)!!} \frac{2}{\sqrt{2n+1}} \max_{[-1,1]} |g^{(n)}(x)|. \quad (31)$$

В нашем случае $g(x)$ это есть функция $F(ibx)$. Для того, чтобы вычислить коэффициенты $D_j(\omega)$ необходимы значения функций Бесселя. Один из способов их вычисления указан в [3]. Вычисления можно производить с использованием современных математических пакетов (например, Maple). Эффективный алгоритм нахождения корней многочленов Лежандра и построения формулы Гаусса (28) приведен в классической работе [60]. Если точность оценки (31) для выбранного n недостаточна, то предлагается поступить следующими способами: 1) построить формулу Гаусса с большим числом узлов; 2) применить составную квадратурную формулу на основе формулы (30).

В первом случае для построения формулы Гаусса наряду с методом работы [60] можно использовать алгоритм, разработанный в [5].

Во втором случае алгоритм состоит в следующем — надо разбить отрезок интегрирования в (27) на m равных частей, а затем на каждом полученном отрезке применить формулу (30) с фиксированным числом узлов n . Заметим, что оценка погрешности вида (31) для каждого отрезка станет в m^n раз меньше, а полная погрешность вычисления по составной формуле уменьшится в m^{n-1} раз. Как показали численные эксперименты, достаточно брать $n \leq 25$, а требуемой точности вычисления интегралов вида (27) добиваться за счет увеличения m .

Теперь рассмотрим вычисление интеграла

$$\int_{L_1} e^{zt} F(z) dz = e^{-ibt} \int_0^\infty e^{-xt} F(-x - bi) dx. \quad (32)$$

Первый способ состоит в применении квадратуры типа Гаусса с весом Лагерра e^{-x} . Но этот путь малоэффективен, так как может потребоваться построение формулы с очень большим числом узлов и с высокой точностью.

Пусть на линии L_1 выполняется неравенство $|F(z)| \leq M$. Положим

$$\int_0^\infty e^{-xt} F(-x - bi) dx \approx \int_0^X e^{-xt} F(-x - bi) dx \quad (33)$$

и выберем число X так, что для заданного положительного числа ε выполняется неравенство

$$\left| \int_X^\infty e^{-xt} F(-x - bi) dx \right| \leq M \int_X^\infty e^{-xt} dx = \frac{M}{t} e^{-Xt} \leq \varepsilon.$$

На отрезке $[0, X]$ подынтегральная функция в (33) не является осциллирующей, поэтому для вычисления правой части в формуле (33) можно применить составную формулу Гаусса (28) с n узлами и разбиением отрезка $[0, X]$ на m равных частей. Погрешность $R_n(v)$ формулы Гаусса (28) оценивается неравенством

$$|R_n(v)| \leq \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \frac{(n!)^4}{((2n)!)^3} \max_{[-1,1]} |v^{(2n)}(x)|.$$

Следовательно, погрешность составной формулы Гаусса уменьшится в m^{2n-1} раз. Таким образом, за счет выбора параметров ε и m можно добиться вычисления интеграла (32) с требуемой точностью. Интеграл по линии L_3 .

Метод, описанный в этой главе, был применён для вычисления функции ползучести (пространственная переменная x опущена)

$$\varepsilon(t) = 1 + 4 \int_0^t \mathfrak{E}_{-0.8}(\tau) d\tau$$

по её изображению

$$\bar{\varepsilon}(p) = \frac{1}{p} + \frac{4}{p(p^{0.2} + 1)}.$$

В Приложении Программа 4 представлена программа для вычисления функции-оригинала $\varepsilon(t)$ по её изображению с помощью замены линии интегрирования на параболический контур. Для получения нужной точности вычисления в программе изменялись значения параметра c — сдвиг контура, необходимы для того, чтобы все особые точки изображения лежали внутри контура интегрирования, а также параметр N — число узлов формулы трапеций. Как видно из приведённых ниже Таблиц 11, 12, для конкретной вычисляемой функции есть пороговое значение $c = 0.1$, при котором точность вычислений падает, но её можно улучшить, увеличивая число узлов формулы трапеций N .

Результаты вычисления $\varepsilon(t)$ при $\alpha = -0.8$, $t = 0.001$.

Таблица 11

N	c	$\varepsilon(t)$	$\varepsilon(t)_{\text{точное}}$
10	0.1	1.86765	1.86696
10	0.3	1.86696	1.86696
50	0.1	1.86696	1.86696
50	0.01	1.86905	1.86696

Результаты вычисления $\varepsilon(t)$ при $\alpha = -0.8$, $t = 1$.

Таблица 12

N	c	$\varepsilon(t)$	$\varepsilon(t)_{\text{точное}}$
10	0.1	3.11669	3.11559
10	0.3	3.11559	3.11559
50	0.1	3.11559	3.11559
50	0.06	3.11559	3.11559

Теперь приведём результаты вычисления функции $\sin(t)$ с помощью Программы 5 из Приложения. В представленной программе проводились вычисления также с помощью замены линии интегрирования на параболический контур, но для получения нужной точности изменялся сдвиг изображения на величину r для того, чтобы все его особые точки лежали внутри контура интегрирования. В конце программы для восстановления функции–оригинала происходит домножение на e^{rt} .

Результаты вычислений представлены в Таблицах 13, 14.

Результаты вычисления $\sin(t)$ при $t = 2$.

Таблица 13

N	r	$\sin(t)_{\text{прибл}}$	$\sin(t)_{\text{точное}}$
100	0.65	0.90978	0.90929
500	0.65	0.90929	0.90929
100	0.7	0.90979	0.90929
500	0.7	0.90929	0.90929

Результаты вычисления $\sin(t)$ при $t = 200$.

Таблица 14

N	r	$\sin(t)_{\text{прибл}}$	$\sin(t)_{\text{точное}}$
100	0.3	-0.87321	-0.87329
500	0.3	-0.87321	-0.87329
100	0.31	-0.87266	-0.87329
500	0.31	-0.87266	-0.87329

В Приложении Программа 6 представлена программа для вычисления функции-оригинала $\varepsilon(t)$ по её изображению с помощью замены линии интегрирования на кусочно прямолинейный контур. Для получения нужной точности вычисления в программе изменялись значения параметра b — расположение верхнего и нижнего участка контура, подбирался из условия, чтобы все особые точки изображения лежали внутри контура интегрирования. С этой же целью в программе задаётся параметр r — сдвиг изображения, а также параметр m_1 — число узлов составной квадратурной формулы Гаусса и m — число равных частей, на которые разбивается отрезок интегрирования $[0, X]$.

Результаты вычисления $\varepsilon(t)$ при

$$\alpha = -0.8, t = 0.001, b = 0.001, r = 0.24 \cdot 10^{-5}.$$

Таблица 15

m	m_1	$\varepsilon(t)$	$\varepsilon(t)_{\text{точное}}$
30	20	1.42350	1.86696
40	30	1.49695	1.86696
65	45	1.88286	1.86696

Результаты вычисления $\varepsilon(t)$ при $\alpha = -0.8$, $t = 1$, $b = 0.14$, $r = 0.003$.

Таблица 16

m	m_1	$\varepsilon(t)$	$\varepsilon(t)_{\text{точное}}$
30	20	3.11567	3.11559
40	30	3.11567	3.11559
65	45	3.11559	3.11559

Как видно из Таблиц 15, 16 использование кусочно прямолинейного контура для вычисления функции–оригинала по её изображению не является оптимальным, ввиду трудностей, связанных с подбором значений параметров b, r для получения наилучшего результата вычислений. Заметим, что подбор параметров зависит от значения аргумента вычисляемой функции. Так, в случае $t = 1$ удалось найти b, r , для которых результаты слабо зависят от m и m_1 (Таблица 16), а в случае малого значения аргумента $t = 0.001$ в Таблице 15 проиллюстрирована сильная зависимость результатов вычислений от m и m_1 .

Таким образом, данный метод можно рекомендовать для вычисления функции–оригинала лишь при значениях аргумента $t \geq 1$.

2. Задачи линейной вязкоупругости

2.1. Постановка задач линейной вязкоупругости.

Одной из областей применения интегрального преобразования Лапласа являются задачи линейной вязкоупругости. При малых деформациях, если убрать нагрузку, деформации исчезают и физические тела проявляют упругие свойства. Так в случае абсолютно упругого тела напряжение, то есть отношение модуля силы упругости к площади поперечного сечения, подчиняется закону Гука

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где E — это модуль упругости, который характеризует упругие свойства материала.

Однако, в реальности материалы отклоняются от закона Гука, например, проявляя и вязкоподобные, и упругие свойства. Так полимеры, даже при комнатных температурах проявляют способность медленно деформироваться во времени при постоянных напряжениях. С течением времени ползучесть может привести к значительным изменениям в напряженно-деформированном состоянии конструкций.

Экспериментально ползучесть можно исследовать при растяжении образцов материала. Верхний конец образца закрепляется, а к нижнему — прикладывается нагрузка. Проводится наблюдение за тем, как изменяется длина образца и строится кривая изменения деформации ε от времени t — кривая ползучести. При мгновенном приложении нагрузки возникает мгновенная деформация $\varepsilon_0 = \sigma_0/E_0$.

С ползучестью материала связана релаксация — явление перераспределения напряжения в теле при постоянной деформации. Пусть, образец "мгновенно" растянули так, что длина стала равной l . Следовательно, была приложена некоторая сила. После этого образец был закреплен в растянутом состоянии на время t . Затем его освободили и приложили нагрузку для растяжения образца

до длины l . В процессе экспериментов оказалось, что нагрузка во втором случае потребует меньше первоначальной. Это связано с явлением релаксации материала — уменьшение напряжения при постоянной деформации.

В реальных элементах конструкций ползучесть и релаксация материала проявляются одновременно и взаимосвязанно. Эта связь описывается соотношением Больцмана–Вольтерра, которое является обобщением закона Гука. Для простоты будем говорить об одномерном случае (вязкоупругий стержень).

Ползучесть материала описывается соотношением:

$$\varepsilon(x, t) = \frac{1}{E_0} \left(\sigma(x, t) + (E_0 - E_\infty) \int_0^t K(t - \tau) \sigma(x, \tau) d\tau \right), \quad (34)$$

где $K(t)$ — ядро ползучести, E_0 — мгновенный модуль упругости, E_∞ — длительный модуль упругости.

Релаксация материала описывается соотношением:

$$\sigma(x, t) = E_0 \varepsilon(x, t) - (E_0 - E_\infty) \int_0^t R(t - \tau) \varepsilon(x, \tau) d\tau, \quad (35)$$

где $R(t)$ — ядро релаксации. Оно является резольвентой ядра ползучести. Одно ядро может быть выражено через другое.

Таким образом, соотношение Больцмана–Вольтерра связывает две физические величины — напряжение и деформацию, то есть описывает характеристики материала. Полная же постановка динамической задачи вязкоупругости включает в себя ещё уравнение движения, начальные и граничные условия. Так, в случае задачи о распространении полубесконечного импульса нагрузки в полубесконечном вязкоупругом стержне уравнения имеют вид [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, t) &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t), \\ u(x, 0) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \\ \sigma(0, t) &= \sigma_0 \eta(t), \end{aligned}$$

где $u(x, t)$ — абсолютное перемещение ($\varepsilon(x, t) = \partial u(x, t)/\partial x$), ρ — линейная плотность материала стержня, $\eta(t)$ — единичная функция Хевисайда, возникающая из условия, что к концу одномерного вязкоупругого стержня в момент времени $t = 0$ прилагается нагрузка $P(t) = \sigma_0 \eta(t)$.

В качестве ядра релаксации возьмём ядро Ржаницына [4]:

$$R(t) = \frac{a^\beta}{\Gamma(\beta)} t^{\beta-1} \exp(-at),$$

где $a > 0$, $0 < \beta < 1$. Заметим, что при $\beta = 1$ ядро Ржаницына переходит в экспоненциальное ядро.

Покажем, как исходная задача о распространении полубесконечного импульса нагрузки в полубесконечном вязкоупругом стержне сводится к задаче в образах по Лапласу. По определению $\varepsilon(x, t) = \partial u(x, t)/\partial x$, тогда из уравнения движения для рассматриваемой задачи получим

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}(x, t) = \rho \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}(x, t).$$

Применяя преобразование Лапласа по t к этому уравнению (далее зависимость от пространственной переменной x опущена), придём к соотношению

$$\bar{\sigma}_{x^2}''(p) = \rho(p^2 \bar{\varepsilon}(p) - p\varepsilon(0) - \varepsilon'(0)),$$

также из (26) имеем

$$\bar{\sigma}(p) = (E_0 - (E_0 - E_\infty)\bar{R}(p)) \bar{\varepsilon}(p) = \left(E_0 - (E_0 - E_\infty) \frac{a^\beta}{(p+a)^\beta} \right) \bar{\varepsilon}(p).$$

Учитывая, что $\varepsilon(0) = \varepsilon'(0) = 0$, получим уравнение, из которого найдём выражение для образа по Лапласу напряжения:

$$\bar{\sigma}_{x^2}''(p) - \frac{\rho p^2}{E_0 - (E_0 - E_\infty) \frac{a^\beta}{(p+a)^\beta}} = 0.$$

Решая это дифференциальное уравнение с учётом ограниченности напряжения $\sigma = \sigma(x, t)$ при $x \rightarrow +\infty$, получим выражение для изображения по Лапласу

напряжения

$$\bar{\sigma}(p) = \frac{\sigma_0}{p} \exp \left(\frac{px\sqrt{\rho E_0}}{(1 - (1 - E_\infty/E_0)(a/p + a)^\beta)^{1/2}} \right).$$

Поскольку импульс имеет конечную скорость распространения, то в точку с координатой x напряжение приходит не сразу, а за время $\tau_x = x/c_0$, $c_0 = \sqrt{\frac{E_0}{\rho}}$, поэтому положим [4]

$$\sigma(x, \tau + \tau_x) = \begin{cases} 0, & \tau < 0, \\ \Phi(x, a\tau/\omega), & \tau \geq 0, \end{cases}$$

где $\omega = (1 - E_\infty/E_0)^{-1/\beta}$, тогда (далее зависимость от пространственной переменной x опущена)

$$\bar{\sigma}(p) = e^{-p\tau_x} \frac{\omega}{a} \bar{\Phi}(p\omega/a),$$

откуда

$$\bar{\Phi}(p) = \frac{a}{\omega} \exp \left(\frac{ap}{\omega} \tau_x \right) \bar{\sigma}(ap/\omega).$$

Подставив в это выражение $\bar{\sigma}(p)$, получим изображение функции $\Phi(t)$

$$\bar{\Phi}(p) = B(p) \exp \left(-\frac{\alpha p}{\omega \varphi(p)} \right),$$

где

$$B(p) = \sigma_0/p, \quad \varphi(p) = (p + \omega)^\beta - 1 + (p + \omega)^{\beta/2} \sqrt{(p + \omega)^\beta - 1}, \\ \alpha = ax\sqrt{\rho/E_0} = a\tau_x.$$

Из вида изображения функции $\Phi(t)$ следуют предельные соотношения:

- 1) $\sigma(x, t) \rightarrow \sigma_0$, при $t \rightarrow +\infty$;
- 2) при $0 < \beta < 1$ $\sigma(x, \tau_x + 0) = 0$, в случае же $\beta = 1$ $\sigma(x, \tau_x + 0) = \sigma_0 \exp \left(-\frac{ax}{2\omega c_0} \right)$. Таким образом заметим, что при $\beta = 1$ на фронте волны имеется убывающий по мере удаления от начала стержня скачок напряжения, при $0 < \beta < 1$ он отсутствует, что характерно для всех слабосингулярных ядер [4].

Далее возникает задача обращения получившегося образа с целью нахождения решения поставленной изначально задачи о распространении полубесконечного импульса нагрузки в полубесконечном вязкоупругом стержне. В работе [4] данная задача решается с помощью метода асимптотического расширения интервала. Покажем, что для нахождения оригинала функции $\bar{\sigma}(p)$ можно воспользоваться описанным выше методом КФНСТ.

Находить оригинал по известному образу по Лапласу, как отмечалось в Главе 1 данной работы, можно различными способами, но для выбора подходящего метода необходимо исследовать изображение с целью определения расположения особых точек.

Так, при применении квадратурной формулы для обращения преобразования Лапласа возникает функция $p\bar{\Phi}(x, p)$.

$$\Phi(x, \tau) \approx \sum_{k=1}^n A_k(p\bar{\Phi}(x, p)) \Big|_{p=\frac{p_k}{\tau}},$$

где $p\bar{\Phi}(x, p) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\alpha p}{\omega \varphi(p)}\right)$.

Для нахождения особых точек функции $p\bar{\Phi}(x, p)$ необходимо исследовать, когда функция $\varphi(p) = 0$,

$$\varphi(p) = (p + \omega)^\beta - 1 + (p + \omega)^{\beta/2} \sqrt{(p + \omega)^\beta - 1} = 0.$$

Сделаем замену переменной $z = (p + \omega)^{\beta/2}$ и получим уравнение

$$z^2 - 1 + z\sqrt{z^2 - 1} = 0.$$

Решая его, найдём формулу для особых точек исследуемой функции $p\bar{\Phi}(x, p)$

$$p = -\omega + 1^{1/\beta}.$$

В случае, если β — рациональное ($\beta = \frac{n}{m}$, n, m — натуральные числа), то на комплексной плоскости мы получим n значений для $\sqrt[n]{1^m}$ и все они располагаются на единичной окружности с центром в начале координат. Если β —

иррациональное, то получим бесконечно много значений для $1^{1/\beta}$ на единичной окружности.

Поскольку по определению длительного и мгновенного модуля упругости $E_\infty < E_0$, следовательно $\omega > 1$. Это утверждение следует из формулы, задающей ω : $\omega = (1 - E_\infty/E_0)^{-1/\beta}$ и оценок $0 < 1 - E_\infty/E_0 < 1$, $0 < \beta < 1$. Таким образом все особые точки исследуемой функции находятся в левой полуплоскости, а значит КФНСТ могут быть применены для решения задачи обращения преобразования Лапласа функции $\bar{\Phi}(p)$ и, как следствие, функции $\bar{\sigma}(p)$.

2.2. Ядра ползучести и релаксации

Для определения ядра ползучести, а как следствие и общей зависимости между напряжением и деформацией проводят эксперимент: верхний конец образца закрепляется, а к нижнему — прикладывается напряжение. Из экспериментов известна кривая ползучести, то есть значение $\varepsilon(t)$ в (34) при $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$. Тем самым получим уравнение зависимости функции ползучести от времени. По экспериментальным данным строится кривая изменения деформации ε от времени t — кривая ползучести.

Так как есть мгновенная деформация, то $\varepsilon'(0) = \infty$. Кроме того, на бесконечности деформация должна быть конечной — это требование обусловлено тем, что в случае бесконечной деформации изделие разрушается.

Следовательно, имеем ограничения на ядро ползучести:

- 1) $K(0) = \infty$;
- 2) $\int_0^t K(\tau) d\tau < \infty, t > 0$.

Таким образом, после экспериментального определения значений деформации и напряжения, возникает задача выбора ядра ползучести таким образом, чтобы уравнение Больцмана–Вольтерра корректно описывало поведение материала, т. е. ядро $K(t)$ следует выбирать в соответствии с полученными экспериментальными данными.

Рассмотрим ядро Абеля:

$$K(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, \quad -1 < \alpha \leq 0, \quad (36)$$

которое имеет интегрируемую особенность в нуле, но оно не удовлетворяет условию конечности интеграла на бесконечности.

Поэтому введём другой класс ядер, которые обладают необходимыми свойствами — класс резольвентных ядер, порождаемых ядром Абеля. Для этого надо применить преобразование Лапласа к уравнениям (34) и (35) в предположении, что все входящие в них величины обладают свойствами функции—

оригинала. Тогда получим

$$\bar{\varepsilon}(p) = \frac{1}{E_0} \bar{\sigma}(p) (1 + \beta \bar{K}(p)), \quad (37)$$

$$\bar{\sigma}(p) = E_0 \bar{\varepsilon}(p) (1 - \beta \bar{R}(p)). \quad (38)$$

В приведённых выше уравнениях пространственные переменные опущены.

Из уравнений (37) и (38) получим зависимость между образами ядер ползучести и релаксации:

$$\bar{R}(p) = \frac{\beta \bar{K}(p)}{1 + \beta \bar{K}(p)}. \quad (39)$$

Положим:

$$\bar{K}(p) = \frac{1}{p^{\alpha+1}}.$$

И из уравнения (39) находим представление образа по Лапласу для ядра релаксации:

$$\bar{R}(p) = \frac{1}{p^a - \beta}, \quad \text{где } a = \alpha + 1, \beta < 0. \quad (40)$$

Найдём функцию-оригинал для образа (40), для этого представим его в виде суммы ряда:

$$\begin{aligned} \bar{R}(p) &= \frac{1}{p^a - \beta} = \frac{1}{p^a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\beta}{p^a}} = \frac{1}{p^a} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\beta}{p^a} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k}{p^{a(k+1)}} \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \frac{t^{a(k+1)-1}}{\Gamma(a+k+1)} = t^\alpha \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k t^{k(\alpha+1)}}{\Gamma((\alpha+1)(k+1))} = \mathfrak{E}_\alpha(\beta, t). \end{aligned}$$

$\mathfrak{E}_\alpha(\beta, t)$ — дробно-экспоненциальная функция, введённая Ю. Н. Работновым [30]:

$$\mathfrak{E}_\alpha(\beta, t) = t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta t^{1+\alpha})^k}{\Gamma((1+\alpha)(1+k))}, \quad -1 < \alpha \leq 0. \quad (41)$$

Дробно-экспоненциальная функция удовлетворяет обоим свойствам — имеет интегрируемую особенность в нуле и удовлетворяет ограничению на выбор

ядра ползучести — условие конечности интеграла на бесконечности $\int_0^t K(\tau) d\tau < \infty$ при $\beta < 0$.

При $\beta < 0$ $\mathfrak{E}_\alpha(\beta, \infty) = 0$ и образ не имеет особых точек в правой комплексной полуплоскости [30], из чего следует сходимость интеграла от $\mathfrak{E}_\alpha(\beta, t)$.

Для доказательства рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = \int_0^t \mathfrak{E}_\alpha(\beta, \tau) d\tau.$$

Её изображение равно

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p^a - \beta}.$$

Используя свойства преобразования Лапласа, получим значение функции $\varphi(t)$ на бесконечности

$$\varphi(\infty) = \int_0^\infty \mathfrak{E}_\alpha(\beta, t) dt = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p^a - \beta}.$$

Последний предел равен $-1/\beta$ при условии, что $1/(p^a - \beta)$ не имеет особых точек в правой полуплоскости, что выполняется, как было сказано ранее, при $\beta < 0$.

Возьмём $\mathfrak{E}_\alpha(\beta, t)$ в качестве ядра ползучести (K) и найдём резольвенту этого ядра.

Применим преобразование Лапласа к уравнению (34), получим уравнение (37). С другой стороны, решение уравнения (34) можно записать в виде:

$$\sigma(t) = (1 - \Gamma^*)\varepsilon(t)$$

или, в развёрнутой форме,

$$\sigma(t) = \varepsilon(t) - \int_0^t \Gamma(t - \tau)\varepsilon(\tau) d\tau,$$

где Γ^* — разрешающий или резольвентный оператор Вольтерра, ядро этого оператора ($\Gamma(t, \tau)$) называется резольвентой ядра $K(t, \tau)$.

Следовательно, имеем следующее уравнение в образах по Лапласу

$$\bar{\sigma}(p) = (1 - \bar{\Gamma})\bar{\varepsilon}(p).$$

Откуда получим равенство:

$$\frac{1}{1 + \bar{K}} = 1 - \bar{\Gamma}.$$

Подставив вместо $\bar{K}(p) = \frac{1}{p^{\alpha-\beta}}$ получим, что образ резольвенты имеет такой же вид, что и образ дробно-экспоненциальной функции, но со смещённым параметром β . Таким образом, мы пришли к классу дробно-экспоненциальных функций, которые удовлетворяют необходимым свойствам ядра ползучести, в отличие от ядра Абеля.

Не умаляя общности, далее считаем $\beta = -1$, и пусть символ $\mathfrak{E}_\alpha(t)$ означает $\mathfrak{E}_\alpha(-1, t)$.

В наследственной механике твердого тела наряду с функцией (41) широко используется и интеграл от нее с переменным верхним пределом. Для облегчения использования этих величин составлены таблицы функций [30], [31]

$$F_1(\alpha, x) = t^{-\alpha}\mathfrak{E}_\alpha(x), \quad F_2(\alpha, x) = t^{-\alpha-1} \int_0^t \mathfrak{E}_\alpha(\tau) d\tau, \quad x = t^{\alpha+1}.$$

Заметим, что

$$F_1(\alpha, x) = E_{1/a}(-x, a), \quad a = \alpha + 1,$$

где

$$E_\rho(z, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n\rho^{-1})}$$

— функция Миттаг-Лёффлера [8].

Однако при решении конкретных задач части этих таблиц, соответствующие найденным параметрам \mathfrak{E}_α — функций, необходимо вводить в память компьютера. Заметим, что они заранее неизвестны и определяются в процессе решения задачи (и в итоге их в таблице может не оказаться). При изменении

параметров аналогичную работу приходится проделывать заново, а это неудобно и может привести к появлению ошибок.

Для более точного описания функции ползучести можно использовать ядра с большим числом параметров, например, ядро Гаврильяка–Негами, которое является обобщением дробно–экспоненциальных функций. В работе [10] предложены обобщения ядер Гаврильяка–Негами и указано их явное представление в виде тройного ряда.

Ядро Гаврильяка–Негами задаётся выражением

$$N_{\alpha,\beta,\gamma}(B, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{i+k} B^i \beta^k \frac{\Gamma[\gamma(i+1) + k] t^{a(\gamma+\gamma i+k)-1}}{\Gamma(k+1)\Gamma(\gamma(i+1))\Gamma(a(\gamma + \gamma i + k))},$$

где $a = \alpha + 1$.

Его изображение равно

$$\bar{N}_{\alpha,\beta,\gamma}(B, p) = C[(p^{\alpha+1} + \beta)^\gamma + B]^{-1}. \quad (42)$$

В частных случаях отсюда получаем целую экспоненту ($\alpha = B = 0, \gamma = 1$), ядро Абеля ($\beta = B = 0, \gamma = 1$), ядро Работнова ($B = 0, \gamma = 1$).

Применение многопараметрических функций $\bar{N}_{\alpha,\beta,\gamma}(A, p)$ позволяет существенно расширить область применения соответствующих им наследственных слабо сингулярных ядер за счет более точного описания с их помощью экспериментальных данных.

Составление таблиц таких ядер, аналогичных таблицам \mathcal{E}_α -функций, нецелесообразно из-за большого количества входных параметров. Поэтому для того, чтобы эти ядра можно было использовать на практике для аппроксимации экспериментальных данных и при решении задач вязкоупругости надо разрабатывать достаточно точные и эффективные методы вычисления этих функций и решений, определяемых ими [10].

Выражения для ядер, приведённых выше, являются трудоёмкими для вычисления, поэтому естественно задавать не ядра, а их изображения, обращение которых описанными методами позволяет упростить нахождение самих ядер.

Отметим, что это не единственный выбор ядер. Так, А. Р. Ржаницыным было предложено ядро $T_{\alpha,\beta}(t)$, описывающее ограниченную ползучесть

$$T_{\alpha,\beta}(t) = e^{-\beta t} I_{\alpha}(t) = e^{-\beta t} \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1 + \alpha)},$$

где $\beta > 0$.

Резольвента ядра Ржаницына была получена в [10]:

$$K_{\alpha,\beta}(A, t) = e^{-\beta t} \mathfrak{D}_{\alpha}(A, t).$$

Функции $K(t) = AK_{\alpha,\beta}(A, t)$ широко применялись М. А. Колтуновым [13].

Другие способы выбора ядер для решения задач линейной вязкоупругости можно найти и в современных исследованиях [58], [54]. В обозначенных работах исследуются различные ядра для жидкообразных (жидкоподобных) материалов.

В данной работе рассматриваются методы обращения преобразования Лапласа в предположении, что заданное изображение $F(p)$ искомой функции-оригинала фактически зависит от $1/p^a$, где a — произвольное положительное число из интервала $(0, 1)$. В случае $a = 1$ получаются известные методы [17], в противном случае получаем новые формулы, обладающие большей точностью по сравнению с известными для определенного класса изображений и имеющие большое прикладное значение.

3. Обращение функций специального вида

Рассмотрим случай длительно меняющихся во времени процессов, они описываются функциями, зависящими от t^a , в области изображения им соответствуют функции от $1/p^a$. Так, в данной главе рассматривается задача вычисления дробно-экспоненциальных функций и интегралов от них различными методами и сравнение значений, полученных с помощью этих методов, с табличными значениями.

Существует множество способов для вычисления функций Работнова, но каждый из них применим лишь для определённых значений параметров. В этой главе по порядку рассматриваются возможные пути вычисления, и приводятся конкретные значения для функций Работнова, вычисленные с помощью каждого метода. Вычисления проводились с помощью математического пакета Maple.

Вычисление значений дробно-экспоненциальных функций возможно проводить двумя путями: либо используя явные представления ($-1 < \alpha \leq 0$)

$$\Theta_\alpha(t) = t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n(1+\alpha)}}{\Gamma((n+1)(1+\alpha))}, \quad \Theta_\alpha^*(t) = \int_0^t \Theta_\alpha(\tau) d\tau,$$

либо используя их изображения

$$\bar{\Theta}_\alpha(p) = \frac{1}{p^{1+\alpha} + 1}, \quad \bar{\Theta}_\alpha^*(p) = \frac{1}{p(p^{\alpha+1} + 1)},$$

применяя методы обращения.

Сами функции будем задавать их изображениями по Лапласу, поскольку ряд, определяющий дробно-экспоненциальную функцию, плохо сходится ввиду растущих по модулю членов ряда, который к тому же является знакопеременным. Трудность в использовании изображений функций по Лапласу состоит в нахождении оригинала $f(t)$ по изображению $F(p)$, т. е. возникает задача обращения преобразования Лапласа. Есть различные таблицы соответствий между оригиналами и изображениями, но они охватывают далеко не все встречающиеся на практике случаи или значение оригинала выражается через сложные

функции, которые трудно вычисляемы. В результате точное нахождение оригинала или невозможно, или нецелесообразно. В связи с этим возникает необходимость в построении приближённых методов обращения преобразования Лапласа, которые были бы применимы для различных случаев.

Отдельно можно выделить случай, когда параметр α принимает рациональные значения ($\alpha = \frac{m}{n}$, где $0 < \frac{m}{n} < 1$ и m и n — взаимно простые числа). В этом случае В.М. Амербаевым были предложены формулы для вычисления дробно-экспоненциальной функции и интеграла от неё [1]. В качестве примера ниже приведём формулы для вычисления дробно-экспоненциальной функции.

$$\beta = -1:$$

а) n — чётное, m — чётное

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{\frac{m}{n}}(-1, t) &= \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k t^{\frac{m(k+1)}{n}}}{\Gamma[\frac{m(k+1)}{n}]} + \\ &+ \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\Gamma[\frac{m(k+1)}{n} + 1]} \left(e^t \int_0^t \tau^{\frac{m(k+1)}{n}} e^{-\tau} d\tau + e^{-t} \int_0^t \tau^{\frac{m(k+1)}{n}} e^{\tau} d\tau \right) + \\ &+ \frac{2}{m} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{r=1}^{\frac{m-2}{2}} \frac{(-1)^k e^{t \cos \frac{2r\pi}{m}}}{\Gamma[\frac{m(k+1)}{n} + 1]} \int_0^t \tau^{\frac{m(k+1)}{n}} e^{-\tau \cos \frac{2r\pi}{m}} \cos \left[\frac{4r\pi}{m} + (t - \tau) \sin \frac{2r\pi}{m} \right] d\tau, \end{aligned}$$

б) n — чётное, m — нечётное

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{\frac{m}{n}}(-1, t) &= \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k t^{\frac{m(k+1)}{n}}}{\Gamma[\frac{m(k+1)}{n}]} + \\ &+ \frac{e^t}{m} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\Gamma[\frac{m(k+1)}{n} + 1]} \left(\int_0^t \tau^{\frac{m(k+1)}{n}} e^{-\tau} d\tau + \right. \\ &\left. + \frac{2}{m} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{r=1}^{\frac{m-1}{2}} \frac{(-1)^k e^{t \cos \frac{2r\pi}{m}}}{\Gamma[\frac{m(k+1)}{n} + 1]} \int_0^t \tau^{\frac{m(k+1)}{n}} e^{-\tau \cos \frac{2r\pi}{m}} \cos \left[\frac{4r\pi}{m} + (t - \tau) \sin \frac{2r\pi}{m} \right] d\tau \right). \end{aligned}$$

В книге [1] приведены аналогичные формулы для вычисления дробно-экспоненциальной функции интеграла от неё для других случаев (n — нечётное).

Однако стоит заметить, что вычисления с помощью предложенных формул оказываются трудоёмкими, поскольку вычислительные формулы слишком громоздки, в них присутствуют интегралы от осциллирующих функций.

Теперь рассмотрим способы обращения преобразования Лапласа изображения, зависящего от $\frac{1}{p^a}$ способами, описанными в Главе 1.

3.1. Применение методов деформирования контура к задаче обращения преобразования Лапласа дробно-экспоненциальной функции.

Рассмотрим применение метода деформирования контура интегрирования описанного в Главе 2 Раздел 2.5 для вычисления дробно-экспоненциальной функции. Изображение Лапласа функции $\mathfrak{E}_\alpha(t)$ имеет точку ветвления при $p = 0$, а изображение интеграла от нее еще и простой полюс в той же точке [30]. Для устранения многозначности достаточно выбрать одну из ветвей, что делается стандартным образом: приведенные выше преобразования Лапласа функции $\mathfrak{E}_\alpha(t)$ и интеграла от нее не имеют особенностей на комплексной плоскости $C \setminus R_-$ с разрезом вдоль полупрямой

$$R_- = \{p \in C : \Im(p) = 0, \Re(p) \leq 0\}.$$

Пусть в формуле (22) контур интегрирования L состоит из нижнего и верхнего берегов разрезом, соединённых окружностью сколь угодно малого радиуса с центром в точке $p = 0$.

Изображения $F(p)$ вида

$$F(p) = \frac{1}{p^{1+\alpha} + 1}$$

фактически зависят от p^a , так что положим $F(p) = \Phi_1(p^a)$ и введем в рассмотрение функции

$$F^\pm(t) = \Phi_1(t^a \exp(\pm ia\pi)), \quad t > 0.$$

Очевидно, $F^+(t) = \overline{F^-(t)}$ в силу вещественности функции-оригинала. Воспользуемся полученным в работе [51] следующим результатом:

Лемма. Пусть выполнены условия

(A) $F(p) = o(1)$ при $|p| \rightarrow \infty$, $F(p) = o(|p|^{-1})$ при $|p| \rightarrow 0$ равномерно в любом секторе $|\arg p| < \pi - \eta$, $\pi > \eta > 0$;

(Б) существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого φ , удовлетворяющего неравенству $\pi - \varepsilon < \varphi \leq \pi$, справедливы соотношения

$$\frac{F(r \exp(\pm i\varphi))}{1+r} \in L_1(R_+), \quad |F(r \exp(\pm i\varphi))| \leq \alpha(r),$$

где $\alpha(r)$ не зависит от φ и $\alpha(r) \exp(-\delta r) \in L_1(R_+)$ для любого $\delta > 0$.

Тогда

$$f(x) = L^{-1}(F)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-xt} \Im F^-(t) dt. \quad (43)$$

Пусть $F(p) = 1/(p^a + 1)$, тогда

$$F^-(t) = \Im \frac{1}{t^a \exp(-i\pi a) + 1} = \frac{t^a \sin \pi a}{1 + 2t^a \cos \pi a + t^{2a}},$$

так что выполнены все условия леммы и формула (43) дает

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_\alpha(x) &= \frac{\sin \pi a}{\pi} \int_0^\infty e^{-xt} \frac{t^a dt}{1 + 2t^a \cos \pi a + t^{2a}} = \\ &= x^{a-1} \frac{\sin \pi a}{\pi} \int_0^\infty \frac{z^a e^{-z} dz}{z^{2a} + 2z^a x^a \cos \pi a + x^{2a}}. \end{aligned} \quad (44)$$

При $x \rightarrow 0$ последний интеграл в представлении (44) стремится к величине $\Gamma(1-a)$, и с учетом формулы $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \pi/\sin \pi a$ при $x \rightarrow 0$ из представления (44) получаем $\mathfrak{D}_\alpha(x) \approx x^{a-1}/\Gamma(a)$, что совпадает с первым членом ряда, определяющего дробно-экспоненциальную функцию.

Положим

$$g_a(x) = \int_0^x \mathfrak{D}_\alpha(t) dt.$$

Изображение этой функции равно

$$G_a(p) = \frac{1}{p(p^a + 1)}. \quad (45)$$

Для нее не выполняется условие (А) леммы (при $p \rightarrow 0$ величина $|G_a(p)|$ слишком быстро возрастает).

Представим $G_a(p)$ в виде

$$G_a(p) = \frac{1}{p} - \frac{p^{a-1}}{p^a + 1} \quad (46)$$

И ПОЛОЖИМ

$$Q_a(p) = \frac{p^{a-1}}{p^a + 1}. \quad (47)$$

Обозначим через $q_a(x)$ функцию–оригинал с изображением (47). Формула (46) означает, что $g_a(x) = 1 - q_a(x)$.

Изображение (47) удовлетворяет условиям леммы, для него находим

$$F^-(t) = \Im \frac{t^{a-1} \exp(-i\pi(a-1))}{t^a \exp(-i\pi a) + 1} = \frac{t^{a-1} \sin \pi a}{1 + 2t^a \cos \pi a + t^{2a}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} q_a(x) &= \frac{\sin \pi a}{\pi} \int_0^\infty e^{-xt} \frac{t^{a-1} dt}{1 + 2t^a \cos \pi a + t^{2a}} = \\ &= x^a \frac{\sin \pi a}{\pi} \int_0^\infty \frac{z^{a-1} e^{-z} dz}{z^{2a} + 2z^a x^a \cos \pi a + x^{2a}}. \end{aligned} \quad (48)$$

Из определения (45) следует равенство

$$g_a(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} p G_a(p) = 0,$$

поэтому необходимо $q_a(0) = 1$. Подставив $x = 0$ в первый интеграл в представлении (48) и сделав замену $t^a = z$, придем к табличному легко вычисляемому интегралу и таким образом убедимся в справедливости равенства $q_a(0) = 1$ при всех $a > 0$.

Итак, наши задачи обращения преобразования Лапласа свелись к вычислению интегралов

$$\mathfrak{D}_\alpha(x) = x^{a-1} \frac{\sin \pi a}{\pi} \int_0^\infty \frac{z^a e^{-z} dz}{z^{2a} + 2z^a x^a \cos \pi a + x^{2a}}, \quad (49)$$

$$q_a(x) = x^a \frac{\sin \pi a}{\pi} \int_0^\infty \frac{z^{a-1} e^{-z} dz}{z^{2a} + 2z^a x^a \cos \pi a + x^{2a}}. \quad (50)$$

Для их приближенного вычисления можно применить квадратурные формулы типа Гаусса [25] с весом Лагерра $z^a e^{-z}$ для первого интеграла и с весом $z^{a-1} e^{-z}$ для второго интеграла. Однако с уменьшением a точность формул будет уменьшаться.

Поэтому для приближенного вычисления интегралов (49) и (50) построим обобщенные квадратурные формулы вида

$$\int_0^{\infty} z^{\beta} e^{-z} f(z) dz \approx \sum_{k=1}^n A_k f(z_k), \quad \beta > -1, \quad (51)$$

точные для функций $f(z) = z^{am}$, $m = 0, 1, \dots, 2n - 1$.

В работе [27] доказана следующая

Теорема 9. *Для того чтобы формула (51) была точна для функций $f(z) = z^{am}$, $m = 0, 1, \dots, 2n - 1$, необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

- 1) формула (51) интерполяционная;
- 2) построенный по узлам формулы (51) многочлен

$$\omega_n(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k^a) \quad (52)$$

удовлетворяет условиям

$$\int_0^{\infty} z^{\beta} e^{-z} \omega_n(z^a) z^{am} dz = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (53)$$

Доказательство этой теоремы проводится точно так же, как в случае классических формул типа Гаусса [25].

Покажем, что многочлен (52), удовлетворяющий условиям (53), существует и определяется однозначно.

После замены переменной $z^a = x$ условия (53) принимают вид

$$\int_0^{\infty} x^{(\beta+1)/a-1} \exp(-x^{1/a}) \omega_n(x) x^m dx = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Функция $w(x) = x^{(\beta+1)/a-1} \exp(-x^{1/a})$ обладает свойствами веса на полуоси $(0, \infty)$, поскольку $(\beta + 1)/a > 0$, следовательно, искомый многочлен существует и единствен, а его корни, т.е. z_k^a , $k = 1, 2, \dots, n$, попарно различны и положительны. Все коэффициенты формулы положительны. Итак, квадратурная формула типа Гаусса вида (51) существует.

Опишем способ вычисления узлов и коэффициентов формулы (51). Будем искать многочлен (52) в виде

$$\omega_n(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n$$

с неизвестными коэффициентами b_k .

Условия (53) приводят к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^n \Gamma(\beta + (k + n - j)a + 1) b_j = -\Gamma(\beta + (k + n)a + 1), \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Ее решение существует и единственно, как показано выше. Далее находим корни уравнения $\omega_n(z) = 0$, т. е. числа z_k^a , $k = 1, 2, \dots, n$. Коэффициенты формулы (51) определяем из системы уравнений

$$\sum_{k=1}^n A_k (z_k^a)^{j-1} = \Gamma(\beta + (j - 1)a + 1), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Заметим, что узлы и коэффициенты формулы (51) вещественны.

Описанный метод был реализован в виде программы в математическом пакете Maple. Текст программы приведён в Приложении Программа 7. Здесь приведем результаты вычисления функций $F_1(\alpha, x)$, $F_2(\alpha, x)$.

Результаты вычисления $F_1(\alpha, x)$ при $\alpha = -0.4$.

Таблица 17

n	x	F_1	$F_{1\text{табл.}}$
30	0.1	$5.724888 \cdot 10^{-1}$	$5.725716 \cdot 10^{-1}$
30	0.15	$5.298362 \cdot 10^{-1}$	$5.298110 \cdot 10^{-1}$
30	0.2	$4.9090271 \cdot 10^{-1}$	$4.909080 \cdot 10^{-1}$
30	0.8	$2.167449 \cdot 10^{-1}$	$2.167449 \cdot 10^{-1}$
30	1	$1.7110228 \cdot 10^{-1}$	$1.711022 \cdot 10^{-1}$

Результаты вычисления $F_1(\alpha, x)$ при $\alpha = -0.65$.

Таблица 18

n	x	F_1	$F_{1\text{табл.}}$
30	1	$9.124 \cdot 10^{-2}$	$9.124 \cdot 10^{-2}$
20	4	$1.2219 \cdot 10^{-2}$	$1.222 \cdot 10^{-2}$
30	4	$1.2219 \cdot 10^{-2}$	$1.222 \cdot 10^{-2}$
30	400	$1.5759 \cdot 10^{-6}$	$1.576 \cdot 10^{-6}$

Результаты вычисления $F_2(\alpha, x)$ при $\alpha = -0.4$.

Таблица 19

n	x	F_2	$F_{2\text{табл.}}$
30	0.2	$9.5903 \cdot 10^{-1}$	$9.5907 \cdot 10^{-1}$
30	0.8	$6.5302 \cdot 10^{-1}$	$6.5302 \cdot 10^{-1}$
30	1	$5.8667 \cdot 10^{-1}$	$5.8667 \cdot 10^{-1}$

Результаты вычисления $F_2(\alpha, x)$ при $\alpha = -0.65$.

Таблица 20

n	x	F_2	$F_{2\text{табл.}}$
30	1	$5.507 \cdot 10^{-1}$	$5.507 \cdot 10^{-1}$
20	4	$2.101 \cdot 10^{-1}$	$2.101 \cdot 10^{-1}$
30	4	$2.101 \cdot 10^{-1}$	$2.101 \cdot 10^{-1}$
20	400	$2.495 \cdot 10^{-3}$	$2.495 \cdot 10^{-3}$

Как видно из результатов, приведённых в таблицах 17–20, наиболее точные значения (по сравнению с табличными) достигаются при значениях аргумента $x \geq 1$.

3.2. Обращение преобразования Лапласа по значениям изображения на вещественной оси

В работах [29] и [42] предложен один из вариантов обращения преобразования Лапласа по значениям изображения на вещественной оси, в основе которого лежит следующая теорема:

Теорема 10 ([63], с. 385). Пусть $f(t) \in L(0, \infty)$ и ее преобразование Лапласа равно

$$F(p) = \int_0^{\infty} \exp(-pt) f(t) dt.$$

Тогда для почти всех положительных значений t имеет место формула обращения

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n t^{n-1}}{n!(n-2)!} \int_0^{\infty} e^{-pt} p^{2n-1} F^{(n)}(p) dp. \quad (54)$$

Возможность применения этой формулы ограничена в связи с тем, что в ней присутствует производная изображения. Однако интегрированием по частям она может быть представлена иначе [29]:

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-pt} P_{2n-1}(pt) F(p) dp,$$

где

$$P_{2n-1}(p) = \frac{(-1)^{n-1} (2n-1)!}{n!(n-2)!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(-p)^{2n-j-1}}{(2n-j-1)!}.$$

Как показано в работе [29], этот многочлен выражается через многочлены Лагерра общего вида

$$L_n(x; \alpha) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n+\alpha}{n-m} \frac{x^m}{m!} \quad (55)$$

простой формулой:

$$P_{2n-1}(p) = \frac{p^{n-1}}{(n-2)!} L_n(p; n-1).$$

В результате этих преобразований утверждение (54) теоремы запишется в виде

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t), \quad f_n(t) = \frac{1}{t(n-2)!} \int_0^{\infty} e^{-p} p^{n-1} L_n(p; n-1) F(p/t) dp.$$

Для приближенного вычисления последнего интеграла применим квадратную формулу типа Гаусса с весом e^{-p} вида

$$\int_0^{\infty} e^{-p}\psi(p) dp \approx \sum_{k=1}^m A_k \psi(p_k), \quad (56)$$

точную для всех многочленов степени не выше $2m - 1$.

Такой метод обращения преобразования Лапласа, пригодный и для определения величин скачков оригинала в точках разрыва первого рода, был предложен и исследован в работе [37]. Скорость его сходимости можно увеличить, построив линейные комбинации $f_n(t)$, вычисленные для различных n [37]. Однако для этого могут потребоваться формулы (56) с большим числом узлов m . Рассмотрим алгоритм для их построения.

Узлы формулы (56) совпадают с корнями многочленов Лагерра, т. е.

$$L_m(p_k) = 0, \quad k = \overline{1, m}. \quad (57)$$

Будем находить корни уравнения (57) методом Ньютона:

$$p_k^{j+1} = p_k^j - L_m(p_k^j)/L'_m(p_k^j), \quad j = 0, 1, \dots \quad (58)$$

Начальные приближения ко всем корням многочленов (55), для которых метод (58) сходится, берем из приближенных равенств [60] (нам нужен только случай $\alpha = 0$, т. к. $L_m(p) = L_m(p; 0)$)

$$\begin{aligned} p_1 &\approx \frac{(1 + \alpha)(3 + 0.92\alpha)}{1 + 2.4m + 1.8\alpha}, \\ p_2 - p_1 &\approx \frac{15 + 6.25\alpha}{1 + 0.9\alpha + 2.5m}, \\ \frac{p_{k+2} - p_{k+1}}{p_{k+1} - p_k} &\approx \frac{1}{1 + 0.3\alpha} \left(\frac{1 + 2.55k}{1.9k} + \frac{1.26k\alpha}{1 + 3.5k} \right), \quad k = \overline{1, m-2}. \end{aligned}$$

После нахождения с требуемой точностью всех узлов вычисляем коэффициенты формулы (56):

$$A_k = \frac{p_k}{(L'_m(p_k))^2}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Для вычисления многочленов Лагерра следует использовать рекуррентное соотношение

$$(n + 1)L_{n+1}(x; \alpha) = (\alpha + 2n + 1 - x)L_n(x; \alpha) - (\alpha + n)L_{n-1}(x; \alpha),$$

$$n = 1, 2, \dots, \quad L_0(x; \alpha) = 1, \quad L_1(x; \alpha) = 1 + \alpha - x,$$

а значения их производных исключать с помощью соотношения

$$xL'_n(x; \alpha) = nL_n(x; \alpha) - (\alpha + n)L_{n-1}(x; \alpha).$$

Так, получим выражение для $L'_m(p_k)$

$$L'_m(p_k) = \frac{-mL_{m-1}(p_k)}{p_k}.$$

В [44] был предложен другой подход к построению функции-оригинала, использующий значения изображения в равноотстоящих точках вещественной полуоси $p > 0$. Исследование этого метода было проведено в работах [35], [36], там же приведены числовые параметры конкретных частных случаев общей схемы. Многочлены Лагерра, которые используются с целью ускорения сходимости метода, изучались в работах [2], [52].

3.3. Аддитивный метод вычисления дробно-экспоненциальной функции

Как отмечалось ранее изображения по Лапласу функции $\mathfrak{L}(\mathfrak{E}_\alpha(t))$ и интеграла от нее $\int_0^t \mathfrak{E}_\alpha(\tau) d\tau$ равны, соответственно,

$$\frac{1}{p^a + 1}, \quad \frac{1}{p(p^a + 1)}, \quad a = 1 + \alpha.$$

Для вычисления функции $F_1(\alpha, x)$ воспользуемся аддитивным методом. Рассмотрим его сущность сначала на примере изображения самой дробно-экспоненциальной функции $-\frac{1}{p^a+1}$. Заметим, что изображение представимо в виде ряда

$$\frac{1}{p^a + 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p^{a(k+1)}}.$$

Такое представление следует из следующих выкладок, где мы воспользовались формулой суммы для бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{p^a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{p^a}\right)^k = \frac{1}{p^a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{p^a}} = \frac{1}{p^a + 1}.$$

Разобьём исходную сумму на две

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p^{a(k+1)}} = \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{(-1)^k}{p^{a(k+1)}} + \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p^{a(k+1)}}, \quad (59)$$

где $k_0 \in \mathbb{N}$ определяется из условия, которое будет выведено позже.

Для вычисления второй суммы в правой части равенства (59) воспользуемся формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = -\frac{1}{p^a}$. В результате получим следующее выражение:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p^{a(k+1)}} = (-1)^{k_0} \frac{1}{(p^a + 1)p^{ak_0}}.$$

Полученное изображение, с другой стороны, есть разность между преобразованием Лапласа дробно-экспоненциальной функции и первой суммы из (59):

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p^{a(k+1)}} = \mathfrak{L}(\mathfrak{E}_\alpha(t)) - \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{(-1)^k}{p^{a(k+1)}}. \quad (60)$$

Отсюда видно, что функция–оригинал для этого изображения есть разность между дробно–экспоненциальной функцией и функцией–оригиналом для суммы в правой части равенства (60). То есть значение дробно–экспоненциальной функции находится как сумма двух оригиналов. Рассмотрим задачу обращения для обоих изображений в отдельности.

В силу линейности преобразования Лапласа оригиналом для изображения

$$\sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{(-1)^k}{p^{a(k+1)}}$$

будет сумма функций–оригиналов для каждого члена ряда, при условии $ak_0 \geq -\alpha$, $k_0 \in \mathbb{N}$, чего можно добиться соответствующим выбором параметра k_0 . Таким образом получим

$$\mathfrak{L}^{-1} \left(\sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{(-1)^k}{p^{a(k+1)}} \right) = \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{(-1)^k \cdot t^{ak+a-1}}{\Gamma(ak+a)},$$

где $ak_0 \geq -\alpha$, $k_0 \in \mathbb{N}$.

Теперь рассмотрим задачу обращения изображения $(-1)^{k_0} \frac{1}{(p^a+1)p^{ak_0}}$. Для этого воспользуемся ОКФНСТ, которые были рассмотрены в Главе 1 Раздел 1.3. Для нашего случая функция $\varphi(p) = p^s F(p)$ в (12) имеет вид $\frac{(-1)^{k_0}}{p^a+1}$, таким образом параметр $s = ak_0$. Используя теорему 3 из Главы 1 Раздел 1.3, были найдены узлы p_k и коэффициенты A_k ОКФНСТ, тем самым построен метод для нахождения значений оригинала для изображения

$$\frac{(-1)^{k_0}}{(p^a+1)p^{ak_0}}.$$

В результате получим конечную формулу для нахождения значений дробно–экспоненциальной функции:

$$\mathfrak{D}_\alpha(t) \approx t^{ak_0-1} \sum_{k=1}^n A_k \varphi(p_k/t) + \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{(-1)^k \cdot t^{ak+a-1}}{\Gamma(ak+a)},$$

где $\varphi(p) = \frac{(-1)^{k_0}}{p^a+1}$, $k_0 \in \mathbb{N}$ и находится из условия $ak_0 \geq -\alpha$.

Описанный алгоритм был реализован в среде Maple для нахождения значений функции $F_1(\alpha, x)$. Также была посчитана оценка погрешности вычисления самой функции $F_1(\alpha, x)$ и оценки погрешности для ОКФНСТ применительно к нашему случаю, которые были рассмотрены в статье [24]

$$|\varepsilon_n(t^a)| \leq M_{a\rho s} \cdot \sigma_n(t^a, \rho), \quad (61)$$

$$\sigma_n(t^a, \rho) = \left(\sum_{m=2n}^{\infty} \left(\frac{1}{\Gamma(s+am)} - \sum_{k=1}^n A_k \mu_k^m \right)^2 \cdot \left| \frac{t^a}{\rho} \right|^{2m} \right)^{1/2}, \quad (62)$$

$$M_{a\rho s} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P_{as}(\rho \exp(i\theta))|^2 d\theta \right)^{1/2}, \quad (63)$$

где $\mu_k = p_k^{-a}$, $0 < t^a < \rho \leq 1$.

Покажем, как будет вычисляться оценка погрешности ОКФНСТ для нашего случая. Понятно, что $\sigma_n(t^a, \rho)$ останется такой же, изменится лишь формула для вычисления $M_{a\rho s}$. Функция $P_{as}(t) = \varphi_s(t^{-1/a})$, где $s = ak_0$, есть

$$P_{as}(t) = \frac{(-1)^{k_0} \cdot t}{1+t}.$$

Тем самым имеем

$$P_{as}(\rho \exp(i\theta)) = \frac{(-1)^{k_0} \cdot \rho \exp(i\theta)}{1 + \rho \exp(i\theta)}.$$

Подставим выражения для функции $P_{as}(t)$ в формулу (63) и получим оценку сверху для величины $M_{a\rho s}$.

$$M_{a\rho s} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P_{as}(\rho \exp(i\theta))|^2 d\theta \right)^{1/2} \leq \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi \rho^2}{(1-\rho)^2} \right)^{1/2} \leq \frac{\rho}{1-\rho}.$$

В результате оценка погрешности ОКФНСТ будет

$$|\varepsilon_n(t^a)| \leq \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \left(\sum_{m=2n}^{\infty} \left(\frac{1}{\Gamma(s+am)} - \sum_{k=1}^n A_k \mu_k^m \right)^2 \cdot \left| \frac{t^a}{\rho} \right|^{2m} \right)^{1/2},$$

где $\mu_k = p_k^{-a}$, $0 < t^a < \rho \leq 1$.

Оценка погрешности (δ) вычисления функции $F_1(\alpha, x)$ зависит от оценки погрешности ОКФНСТ и вычисляется по следующей формуле

$$\delta = \frac{t^{s-1} \varepsilon_n(t^a)}{t^\alpha}.$$

Описанный метод был реализован в виде программы в математическом пакете Maple. Текст программы приведён в Приложении Программа 8. Здесь приведем результаты вычисления функции $F_1(\alpha, x)$.

Результаты вычисления $F_1(\alpha, x)$ при $\alpha = -0.75$, $x = 0.1$.

Таблица 21

n	k_0	F_1	$F_{1\text{табл.}}$	δ
5	3	0.226657	0.2266573	$9.80489 \cdot 10^{-12}$
5	7	0.226657	0.2266573	$6.673406 \cdot 10^{-17}$
10	3	0.226657	0.2266573	$2.764635 \cdot 10^{-22}$
10	7	0.226657	0.2266573	$7.942103 \cdot 10^{-28}$

Результаты вычисления $F_1(\alpha, x)$ при $\alpha = -0.75$, $x = 1.1$.

Таблица 22

n	k_0	F_1	$F_{1\text{табл.}}$	δ
5	3	0.057488	$0.5749 \cdot 10^{-1}$	$4.063073 \cdot 10^{-8}$
5	7	0.057488	$0.5749 \cdot 10^{-1}$	$3.93269 \cdot 10^{-9}$
10	3	0.057488	$0.5749 \cdot 10^{-1}$	$3.92322 \cdot 10^{-18}$
10	7	0.057488	$0.5749 \cdot 10^{-1}$	$1.62817 \cdot 10^{-19}$

Как видно из Таблиц 21, 22, оценка погрешности имеет порядок 10^{-10} , в то время как табличные значения функции $F_1(\alpha, x)$ из книги [30] даны с точностью до четырёх знаков после запятой. Тем самым значения, получаемые с помощью применения аддитивного метода, являются более точными по сравнению с табличными значениями.

3.4. Метод обращения преобразования Лапласа с помощью разложения оригинала в обобщенные степенные ряды

Для больших значений аргументов целесообразно использовать другой подход к вычислению, который основан на следующей теореме (см. [9]):

Теорема 11. Пусть

$$f(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\omega}^{\sigma + i\omega} e^{pt} F(p) dp,$$

причем функция $F(p)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана, имеет конечное число особых точек и все особые точки являются полюсами или точками ветвления, и в окрестностях особых точек $p = p_0$ с наибольшей вещественной частью функция $F(p)$ разлагается в ряды вида

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu}(p_0)(p - p_0)^{\lambda_{\nu}}, \quad -\infty < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots,$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ и $|p - p_0| < l_0$, здесь c_{ν} и λ_{ν} зависят от p_0 . Тогда функция $f(t)$ разлагается в асимптотический ряд

$$f(t) \approx \sum_{p_0} e^{p_0 t} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_{\nu}(p_0)}{\Gamma(-\lambda_{\nu})} t^{-\lambda_{\nu}-1},$$

где \sum_{p_0} означает суммирование по всем особым точкам p_0 .

Примечание. Если λ_{ν} — целое неотрицательное число, то $1/\Gamma(-\lambda_{\nu}) = 0$.

Применим эту теорему к изображениям дробно-экспоненциальной функции и интеграла от нее:

$$\frac{1}{1 + p^a} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n p^{an},$$

$$\frac{1}{p(p^a + 1)} = \frac{1}{p} - \frac{p^{a-1}}{p^a + 1} = \frac{1}{p} - p^{a-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n p^{an},$$

где $a = 1 + \alpha$. Следовательно,

$$F_1(\alpha, x) = \frac{1}{t^\alpha} \mathfrak{D}_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{-n-1}}{\Gamma(-an)},$$

$$F_2(\alpha, x) = \frac{1}{t^{\alpha+1}} \int_0^t \mathfrak{D}_\alpha(\tau) d\tau = 1 - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{-n}}{\Gamma(1-a-an)},$$

где $x = t^a$.

Для ядра Гаврильяка–Негами получим следующее разложение:

$$F(p, a, b, c, d) = \frac{1}{(p^a + b)^c + d} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k p^{ak} = \frac{1}{b^c + d} - \frac{b^c c}{(b^c + d)^2 b} p^a +$$

$$+ \frac{-b^c c(c-1)/2(b^c + d)b^2 + (b^c)^2 c^2 / (b^c + d)^2 b^2}{b^c + d} p^{2a} - \dots,$$

из которого по теореме 11 получаем асимптотическое разложение при больших t :

$$N(t, a, b, c, d) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\Gamma(-ak) t^{ak+1}}.$$

Для вычисления при больших t функции

$$\int_0^t N(x, a, b, c, d) dx,$$

имеющей изображение $F(p, a, b, c, d)/p$, аналогично получаем формулу

$$\int_0^t N(x, a, b, c, d) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\Gamma(1-ak) t^{ak}}.$$

Описанный метод был реализован в виде программы в математическом пакете Maple. Текст программы приведён в Приложении Программа 9. Здесь приведем результаты вычисления функций $F_1(\alpha, x)$ и $F_2(\alpha, x)$, полученные с помощью асимптотических формул.

Результаты вычисления $F_1(\alpha, x)$ и $F_2(\alpha, x)$ при $\alpha = -0.65$.

Таблица 23

n	x	F_1	$F_{1\text{табл.}}$	F_2	$F_{2\text{табл.}}$
10	900	$3.117 \cdot 10^{-7}$	$3.107 \cdot 10^{-7}$	$1.110 \cdot 10^{-3}$	$1.109 \cdot 10^{-3}$
10	600	$7.009 \cdot 10^{-7}$	$6.993 \cdot 10^{-7}$	$1.665 \cdot 10^{-3}$	$1.665 \cdot 10^{-3}$
10	20	$6.024 \cdot 10^{-4}$	$6.024 \cdot 10^{-4}$	$4.824 \cdot 10^{-2}$	$4.824 \cdot 10^{-2}$
10	4	$1.222 \cdot 10^{-2}$	$1.222 \cdot 10^{-2}$	$2.101 \cdot 10^{-1}$	$2.101 \cdot 10^{-1}$
10	2	$3.809 \cdot 10^{-2}$	$3.731 \cdot 10^{-2}$	$3.589 \cdot 10^{-1}$	$3.590 \cdot 10^{-1}$
20	2	$3.755 \cdot 10^{-2}$	$3.731 \cdot 10^{-2}$	$3.590 \cdot 10^{-1}$	$3.590 \cdot 10^{-1}$

Результаты вычисления $F_1(\alpha, x)$ и $F_2(\alpha, x)$ при $\alpha = -0.85$.

Таблица 24

n	x	F_1	$F_{1\text{табл.}}$	F_2	$F_{2\text{табл.}}$
10	900	$1.661 \cdot 10^{-7}$	$1.655 \cdot 10^{-7}$	$1.110 \cdot 10^{-3}$	$1.110 \cdot 10^{-3}$
10	600	$3.735 \cdot 10^{-7}$	$3.733 \cdot 10^{-7}$	$1.664 \cdot 10^{-3}$	$1.664 \cdot 10^{-3}$
10	20	$3.099 \cdot 10^{-4}$	$3.099 \cdot 10^{-4}$	$4.785 \cdot 10^{-2}$	$4.785 \cdot 10^{-2}$
10	4	$5.684 \cdot 10^{-3}$	$5.666 \cdot 10^{-3}$	$2.038 \cdot 10^{-1}$	$2.038 \cdot 10^{-1}$
20	2	$1.627 \cdot 10^{-2}$	$1.626 \cdot 10^{-2}$	$3.435 \cdot 10^{-1}$	$3.435 \cdot 10^{-1}$

Как видно из Таблиц 23, 24 при малых значениях $x < 2$ точность плохая. При увеличении числа слагаемых в бесконечной сумме точность метода не улучшается. Для больших $x > 2$ для достижения хороших результатов вполне достаточно число слагаемых равно 10. Причём, чем меньше α , тем лучше точность асимптотических формул.

Заключение

Перечислим основные результаты работы:

1. Исследованы различные методы обращения преобразования Лапласа и предложены алгоритмы по применению методов обращения к вычислению функций специального вида.
2. Рассмотрены задачи линейной вязкоупругости и применение преобразования Лапласа для их решения.
3. Исследованы свойства ядер, которые могут быть выбраны в качестве ядер ползучести и релаксации в соотношении Больцмана–Вольтерра; изучены их свойства.
4. Исследованы методы обращения преобразования Лапласа в предположении, что заданное изображение $F(p)$ искомой функции–оригинала фактически зависит от $1/p^a$, где a — произвольное положительное число из интервала $(0, 1)$; получены новые формулы, обладающие большей точностью по сравнению с известными для определенного класса изображений и имеющие большое прикладное значение.
5. Методы, рассматриваемые в работе, были реализованы в виде программ с использованием математического пакета Maple; все программы представлены в разделе Программы этой работы.
6. Проанализированы результаты работы программ и на основании их даны рекомендации по использованию методов обращения преобразования Лапласа применительно к функциям специального вида.

Остановимся подробнее на результатах применения рассмотренных в работе методов обращения интегрального преобразования Лапласа.

Все методы изученные и предложенные в этой работе условно можно разделить на следующие группы:

- методы, в основе которых лежит построение КФНСТ для вычисления интеграла Римана–Меллина (ОКФНСТ, КФНСТ);
- метод, основанный на теореме Виддера;
- методы, использующие деформирование контура интегрирования для интеграла Римана–Меллина (применение параболического контура, кусочно прямолинейного контура, метод, основанный на лемме A. V. Bobylev, C. Cercignani [51]);
- методы, использующие разложение в ряд (аддитивный метод, метод разложения оригинала в обобщённые степенные ряды).

Применимость того или иного метода существенно зависит от способа задания информации об изображении искомого оригинала, а также от того при каком значении аргумента необходимо получить значение функции–оригинала.

Методы, в основе которых лежит построение КФНСТ для интеграла Римана–Меллина (ОКФНСТ, КФНСТ), могут быть применены в случае, когда известны значения изображения $F(p)$ во всей полуплоскости $\Re p > \gamma$. Заметим, что по сути КФНСТ — это частный случай ОКФНСТ при $a = 1$. В случае же, когда $0 < a < 1$ и функция–оригинал $f(t)$ хорошо приближается функциями вида $t^s P(t^a)$, изображения которых имеют вид $p^{-s} Q(1/p^a)$, где P, Q — многочлены, уместнее использовать ОКФНСТ, которые точны для отрицательных степеней p^a .

Значения, полученные с помощью программ, реализованных в математическом пакете Maple, подтверждают вышесказанные утверждения. В работе предложены алгоритмы построения КФНСТ и ОКФНСТ, представлены программы для вычислений в разделе Приложение и даны результаты применения методов для получения значений дробно–экспоненциальных функций. ОКФНСТ позволяют находить значение функции–оригинала с большей точностью, по сравнению с КФНСТ. Причём наилучшие результаты достигаются при вычислениях в точках $0 < t < 1$. Таким образом, метод, основанный на применении ОКФНСТ для вычисления функции–оригинала по её изображению по

Лапласу, зависящего от $1/p^a$, где $0 < a < 1$, является предпочтительным. При этом число узлов в ОКФНСТ достаточно брать равным $n = 10$.

Метод, основанный на теореме Виддера, использует значения изображения $F(p)$ и его производных в некоторой фиксированной точке, отличной от бесконечности. Применяя метод Виддера к задаче нахождения функции–оригинала по изображению по Лапласу, можно добиться более точных значений по сравнению с рассмотренными в предыдущих параграфах методами (КФНСТ, ОКФНСТ) даже при больших значениях аргумента (например, $t = 10^6$), что видно из таблиц с результатами.

Методы, использующие деформирование контура интегрирования для интеграла Римана–Меллина (применение параболического контура, кусочно прямолинейного контура, метод, основанный на лемме A. V. Bobylev, C. Cercignani) могут быть применены в случае, когда все особые точки изображения лежат в левой полуплоскости и удаётся добиться их расположения внутри контура интегрирования. В работе предложены варианты контуров — кусочно прямолинейный и параболический, а также представлены результаты вычисления функции ползучести с их помощью. Показано, что наилучших значений можно добиться с использованием параболического контура. Применение же кусочно прямолинейного контура оказалось более трудоёмким в связи с необходимостью подбора значений большего числа параметров, отвечающих за границы контура.

В случае вычислений значений функции–оригинала для больших значений аргумента ($x \geq 100$) целесообразно использовать методы, использующие разложение в ряд (аддитивный метод, метод разложения оригинала в обобщённые степенные ряды).

Список литературы

- [1] *Амербаев В. М.* Операционное исчисление и обобщенные ряды Лагерра. Алма-Ата, 1974. 181 с.
- [2] *Амербаев В. М., Утембаев Н. А.* Численный анализ лагерровского спектра. Алма-Ата, 1982. 188 с.
- [3] *Бахвалов Н. С., Васильева Л. Г.* Вычисление интегралов от осциллирующих функций при помощи интерполяции по узлам формул Гаусса // Журн. вычислит. матем. и матем. физ. 1968. Т. 8. № 1. С. 175–181.
- [4] *Белов М. А., Цирулис Т. Т.* Асимптотические методы обращения интегральных преобразований. Рига, 1985. 286 с.
- [5] *Васильева Л. Г., Жилейкин Я. М.* О быстром вычислении узлов и весов квадратуры Гаусса // Журн. вычислит. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 1. С. 426–431.
- [6] *Гайер Д.* Лекции по аппроксимации в комплексной плоскости. М., 1986. 216 с.
- [7] *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М., 1971. 288 с.
- [8] *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной плоскости. М., 1966. 672 с.
- [9] *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., 1961. 524 с.
- [10] *Екельчик В. С., Рябов В. М.* Об использовании одного класса наследственных ядер в линейных уравнениях вязкоупругости // Механика композитных материалов. 1981. № 3. С. 393–404.

- [11] *Кабардов М. М.* О суммировании рядов Лагерра методом Эйлера-Кноппа в задаче обращения преобразования Лапласа // Вестн. С.-Петербург. ун-та. 2008. Сер. 1. Вып 4. С. 84–89.
- [12] *Кабардов М. М., Рябов В. М.* Ускорение сходимости рядов Лагерра в задаче обращения преобразования Лапласа // Журн. вычислит. математ. и математ. физ. 2009. Т. 49. № 4. С. 601–610.
- [13] *Колтунов М. А.* Ползучесть и релаксация. М., 1976. 277 с.
- [14] *Конторович М. И.* Операционное исчисление и процессы в электрических цепях. М., 1975. 319 с.
- [15] *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов. М., 1967. 500 с.
- [16] *Крылов В. И., Скобля Н. С.* Справочная книга по численному обращению преобразования Лапласа. Минск, 1968. 296 с.
- [17] *Крылов В. И., Скобля Н. С.* Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М., 1974. 224 с.
- [18] *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., 2002. 688 с.
- [19] *Лебедева А. В., Рябов В. М.* Об обращении преобразования Лапласа с помощью рядов Лагерра и квадратурных формул // Методы вычислений. Вып. 19. СПб., изд-во С.-Петербург. ун-та, 2001. С. 123–139.
- [20] *Лебедева А. В., Рябов В. М.* Специальные квадратурные формулы обращения преобразования Лапласа // Журн. вычислит. математ. и математ. физ. 2012. Т. 52. № 12. С. 2133–2139.
- [21] *Лебедева А. В., Рябов В. М.* О деформировании контура интегрирования в формуле обращения преобразования Лапласа // Журн. вычислит. матем. и математ. физ. 2015. Т. 55. № 7. С. 1118–1124.

- [22] *Лещенко Н. И.* О распараллеливании решения интегральных уравнений линейной вязкоупругости // "СПИСОК-2013: Материалы всероссийской научной конференции по проблемам информатики. 23-26 апр. 2013 г. ", СПб.: изд-во ВВМ. 2013. С. 318-325.
- [23] *Лурье А. И.* Операционное исчисление и его приложение к задачам механики. М.-Л., 1951. 433 с.
- [24] *Матвеева Т. А., Рябов В. М.* Об оценках погрешности квадратурных формул численного обращения преобразования Лапласа // Вестн. С.-Петербург. ун-та. 2000. № 25. С. 7–11.
- [25] *Мысовских И. П.* Лекции по методам вычислений. СПб., 1998. 472 с.
- [26] *Порошина Н. И.* Специальные квадратурные формулы обращения интегрального преобразования Лапласа // "СПИСОК-2012: Материалы всероссийской научной конференции по проблемам информатики. 25-27 апр. 2012 г. ", СПб.: изд-во ВВМ. 2012. С. 259-266.
- [27] *Порошина Н. И., Рябов В. М.* Об обращении преобразования Лапласа некоторых специальных функций // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 3. С. 50–60. (Перевод на английский язык: *N.I. Poroshina and V.M. Ryabov.* Inversion of the Laplace Transform for Some Special Functions // Vestnik St. Petersburg University. Mathematics, 2009, Vol. 42, No. 3, pp. 194–203. © Allerton Press, Inc., 2009.)
- [28] *Порошина Н. И., Рябов В. М.* О вычислении интеграла Римана–Меллина // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 4. С. 55–61. (Перевод на английский язык: *N.I. Poroshina and V.M. Ryabov.* Evaluation of the Riemann–Mellin Integral // Vestnik St. Petersburg University. Mathematics, 2009, Vol. 42, No. 4, pp. 293–298. © Allerton Press, Inc., 2009.)

- [29] Порошина Н. И., Рябов В. М. О методах обращения преобразования Лапласа // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 3. С. 55-64. (Перевод на английский язык: *N.I. Poroshina and V.M. Ryabov. Methods for Laplace Transform Inversion // Vestnik St. Petersburg University. Mathematics, 2011, Vol. 44, No. 3, pp. 214-222. © Allerton Press, Inc., 2011.*)
- [30] Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М., 1977. 384 с.
- [31] Работнов Ю. Н., Паперник Л. Х., Звонов Е. Н. Таблицы дробно-экспоненциальной функции отрицательных параметров и интеграла от нее. М., 1969. 132 с.
- [32] Рябов В. М. О некоторых задачах, возникающих при обращении преобразования Лапласа // Методы вычислений. Вып. 16. СПб., изд-во С.-Петерб. ун-та, 1991. С. 59–68.
- [33] Рябов В. М. Вычисление значений и скачков оригинала методом Виддера // Вестн. Ленингр. ун-та. 1989. № 1. С. 114–116.
- [34] Рябов В. М. О точности вычисления значений и скачков оригинала методом Виддера // Вестн. Ленингр. ун-та. 1989. № 15. С. 35–38.
- [35] Рябов В. М. Метод обращения преобразования Лапласа, использующий значения изображения на вещественной оси // Вестн. Ленингр. ун-та. 1982. № 1. С. 48–53.
- [36] Рябов В. М. О точности некоторых методов обращения преобразования Лапласа // Методы вычислений. Вып. 14. Л., изд-во Ленингр. ун-та, 1985. С. 59–71.
- [37] Рябов В. М. Формула обращения преобразования Лапласа, основанная на теореме Виддера // Вестн. Ленингр. ун-та. 1989. № 22. С. 35–39.

- [38] Рябов В. М. Свойства квадратурных формул наивысшей степени точности, применяемых для обращения преобразования Лапласа // ЖВМ и МФ. 1989. Т. 29, № 7. С. 1083-1087.
- [39] *Рябов В. М.* О многочленах, возникающих при численном обращении преобразования Лапласа // Методы вычислений. Вып. 12. Л., изд-во Ленингр. ун-та, 1981. С. 46–53.
- [40] *Рябов В. М.* Об одном способе обращения преобразования Лапласа // Кубатурные формулы и их приложения. Материалы X международного семинара-совещания. Улан-Удэ, 2009. С. 130–137.
- [41] *Рябов В. М.* Свойства квадратурных формул наивысшей степени точности, применяемых для обращения преобразования Лапласа // Журн. вычислит. матем. и математ. физ. 1989. Т. 29. № 7. С. 1083–1087.
- [42] *Рябов В. М.* Численное обращение преобразования Лапласа. — СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2013. 187 с.
- [43] *Рябов В. М., Порошина Н. И.* О вычислении дробно-экспоненциальной функции и интеграла от нее // Методы вычислений. Вып. 22. СПб., Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2008. С. 132-146.
- [44] *Рябцев И. И.* Приближенное вычисление оригинала по значениям изображения в равноотстоящих точках действительной оси // Математика. 1966. № 3. С. 139–143.
- [45] *Самокиш Б. А.* Замечание о вычислении определенных интегралов // Методы вычислений. Вып. 2. Л., 1963. С. 45–49.
- [46] *Слепян Л. И., Яковлев Ю. С.* Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. Л., 1980. 344 с.

- [47] *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.-Л., 1964. 440 с.
- [48] *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. М, 1976. 328 с.
- [49] *Фок В. А.* Об остаточном члене некоторых формул квадратур. // Изв.АН СССР, 1930, № 448. С. 419.
- [50] *Bellman R. E., Kalaba P. E., Lockett J. A.* Numerical inversion of the Laplace transform. N.-Y., 1966. 249 p.
- [51] *Bobylev A. V., Cercignani C.* The inverse Laplace transform of some analytic functions with an application to the eternal solutions of the Boltzmann equation // Applied Mathematics Letters. 2002. Vol. 15. P. 807–813.
- [52] *Boutros Y. Z.* Numerical methods for the inversion of Laplace transform. Zurich, 1964. 64 p.
- [53] *Bruin M. G., Saff E. B., Varga R. S.* On the zeros of generalised Bessel polynomials. I, II // Indagat. math. 1981. Vol. 43. No 1. P. 1–25.
- [54] *Colombaro I., Giusti A., Mainardi F.* A class of linear viscoelastic models based on bessel functions // E-print. arXiv:1602.04664v1 [math-ph], 2016.
- [55] *Gautschi W.* On the Condition of a Matrix Arising in the Numerical Inversion of the Laplace Transform // Mathematics of Computation, Vol. 23, No. 105 (Jan., 1969), pp. 109-118.
- [56] *Luke Y.* The special functions and their approximations. Vol. 2. New York, 1969. 485 p.
- [57] *Mainardi F.* Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. An Introduction to Mathematical Models 2010, Imperial College Press. 347 p.

- [58] *Mainardi F., Spada G.* Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology // Eur. Phys. J. Special Topics 193, 133–160 (2011) EDP Sciences, Springer-Verlag 2011.
- [59] *May C. P.* Saturation and inverse theorems for combinations of a class of exponential-type operators // Canad. J. Math. 1976. Vol. 28. No 6. P. 1224–1250.
- [60] *Stroud A. H., Secrest D.* Gaussian quadrature formulas. N.-Y., 1966. 374 p.
- [61] *Talbot A.* The accurate numerical inversion of Laplace transform // J. Inst. Maths. Applics. 1979. Vol. 23. P. 97–120.
- [62] *Weideman J. A. C., Trefethen L. N.* Parabolic and hyperbolic contours for computing the Bromwich integral // Math. Comput. 2007. Vol. 76. No 259. P. 1341–1356.
- [63] *Widder D. V.* The Laplace transform. Princeton, 1946. 406 p.

Приложение

В Приложении представлены тексты программ, реализующие описанные в данной работе методы обращения интегрального преобразования Лапласа. Программы выполнены с использованием математического пакета Maple.

Программа 1. Квадратурные формулы наивысшей степени точности.

Программа вычисляет функцию-оригинал для изображения по Лапласу функции $F_2(\alpha, x)$

$$F_2(\alpha, x) = \frac{1}{x} \int_0^t \Theta_\alpha(-1, \tau) d\tau,$$

$$x = t^{\alpha+1},$$

используя квадратурные формулы наивысшей степени точности. Описание этого метода есть в Главе 1 Раздел 1.2. В программе входными параметрами являются *Digits* — машинная точность вычислений, а также a, x, n .

```
restart: Digits:= 20; with(linalg);
a:= 1; n:= 20; s:= 1; x:= 400; al:= -0.4;
al:= al+1; t:= x^(1/(al+1));
A:=array(1..n,1..n): d:=vector(n): AA:=vector(n):
Z:=array(1..n,1..n): g:=vector(n):
for k from 0 to n-1 do
for j from n-1 by -1 to 0 do
A[k+1,n-j]:=1/GAMMA(s+(k+j)*a)
od:
d[k+1]:=-1/GAMMA(s+(n+k)*a)
od:
evalm(A): evalm(d):
b:=linsolve(A,d):
p:=1:
for k from 1 to n do p:=p*u+b[k] od:
```

```

expand(p):
xk:=evalf(allvalues(RootOf(p)));
for k from 1 to n do
pka[k]:=evalf(1/xk[k]):
pk[k]:=xk[k]^(-1/a):
mua[k]:=1/pka[k]:
od:
for j to n do
for k to n do
Z[j,k]:=mua[k]^(j-1) od:
g[j]:=evalf(1/GAMMA(s+a*(j-1)))
od:
AA:=linsolve(Z,g);
s1:=0;
for k to n do
s1:=s1+AA[k]*t^(s-1)/(1+(pk[k]/t)^a1)
end do;
s1/t^(a1+1);

```

Программа 2. Обобщённые квадратурные формулы наивысшей степени точности.

Программа вычисляет функцию-оригинал для изображения по Лапласу функции $F_1(\alpha, x)$

$$F_1(\alpha, x) = x^{\frac{-\alpha}{\alpha+1}} \mathfrak{D}_\alpha(-1, t),$$

$$x = t^{\alpha+1},$$

используя обобщённые квадратурные формулы наивысшей степени точности. Описание этого метода есть в Главе 1 Раздел 1.3. В программе входными параметрами являются *Digits* — машинная точность вычислений, а также a, x, n .

```

restart: Digits:= 20; with(linalg);
a:= .4; n:= 30; s:= a; x:= 400;
al:= a-1; t:= x^(1/(al+1));
A:=array(1..n,1..n): d:=vector(n): AA:=vector(n):
Z:=array(1..n,1..n): g:=vector(n):
for k from 0 to n-1 do
for j from n-1 by -1 to 0 do
A[k+1,n-j]:=1/GAMMA(s+(k+j)*a)
od:
d[k+1]:=-1/GAMMA(s+(n+k)*a)
od:
evalm(A): evalm(d):
b:=linsolve(A,d):
p:=1:
for k from 1 to n do p:=p*u+b[k] od:
expand(p):
xk:=evalf(allvalues(RootOf(p)));
for k from 1 to n do

```

```

pka[k]:=evalf(1/xk[k]):
pk[k]:=xk[k]^(-1/a):
mua[k]:=1/pka[k]:
od:
for j to n do
for k to n do
Z[j,k]:=mua[k]^(j-1) od:
g[j]:=evalf(1/GAMMA(s+a*(j-1)))
od:
AA:=linsolve(Z,g);
s1:= 0;
for k to n do
s1:= s1+AA[k]*t^(s-1)/(1+(pk[k]/t)^(-a))
end do;
s1/t^a;

```

Программа 3. Метод Виддера с ускорением сходимости для функции ползучести

Программа вычисляет функцию ползучести (пространственная переменная x опущена)

$$\varepsilon(t) = 1 + 4 \int_0^t \mathfrak{D}_{-0.8}(\tau) d\tau,$$

используя метод Виддера с ускорением сходимости. Описание этого метода есть в Главе 1 Раздел 1.4. Входными параметрами являются переменные r, n_1, t, m .

```

restart: Digits:= 60; pi:= evalf(Pi); r:=0.95;
n1:= 300; n2:= 2*n1; n3:=3*n1; t:= 0.100e-2;
em:= proc (m, x)
exp((2*I)*pi*x/m)
end proc:
pFp:= proc (p)
1+4/(p^0.2+1)
end proc:
w:= proc (n, m, t)
s:= 0;
for j to m do
z:= r*em(m, j);
s:=s+z^(-n)*pFp(n*(1-z)/t)/(1-z)
end do;
s/m
end proc:
a:= w(n1, 2*n1+1, t); b:= w(n2, 2*n2+1, t);
c:= w(n3, 2*n3+1, t); a/2-4*b+4.5*c;

```

Программа 4. Деформация контура интегрирования — параболический контур.

Программа вычисляет функцию ползучести (пространственная переменная x опущена)

$$\varepsilon(t) = 1 + 4 \int_0^t \mathfrak{E}_{-0.8}(\tau) d\tau,$$

используя метод деформации контура интегрирования — параболический контур. Описание этого метода есть в Главе 1 Раздел 1.5. В программе входными параметрами являются *Digits* — машинная точность вычислений, а также c, t, N .

```

restart: Digits:=50: pi:=evalf(Pi):
c:=0.17: t:=1.: N:=100:
l:=proc(x) a*(1+x+1)^2 end;
dl:=proc(x) 2*a*(1-x) end;
fp:=proc(p) 1./p*(1+4/(p^(0.2)+1)) end;
con:=t*(c+1)*sqrt(1+4*c*(c+1))/pi/(1-c)^2:
h:=sqrt(1+4*c*(c+1))/N:
a:=pi*N/(t*2*(c+1)*sqrt(1+4*c*(c+1)));
s:=0:
for k from 0 to N-1 do
xk:=k*h:
s:=s+(exp(l(xk)*t)*fp(l(xk))*dl(xk)+exp(l(xk+h)*t)*
fp(l(xk+h))*dl(xk+h))
od:
print(Re(s*h/(2*pi*I)));

```

Программа 5. Деформация контура интегрирования — параболический контур (сдвиг изображения).

Программа вычисляет функцию $\sin(t)$, используя метод деформации контура интегрирования — параболический контур. Описание этого метода есть в Главе 1 Раздел 1.5. В программе входными параметрами являются *Digits* — машинная точность вычислений, а также r, t, N .

```

restart: Digits:=50: pi:=evalf(Pi):
r:=0.3:
l:=proc(x) a*(1*x+1)^2-1. end;
dl:=proc(x) 2*a*(1-x) end;
fp:=proc(p) 1./((p+r)^2+1) end;
t:=200.: N:=1000: h:=0.01:
a:=1: s:=0:
for k from 0 to N-1 do
xk:=k*h:
s:=s+(exp(l(xk)*t)*fp(l(xk))*dl(xk)+exp(l(xk+h)*t)
*fp(l(xk+h))*dl(xk+h))
od:
print(Re(s*h/(2*pi*I))*exp(r*t), sin(t),
Re(s*h/(2*pi*I))*exp(r*t)-sin(t));

```

Программа 6. Деформация контура интегрирования — кусочно прямолинейный контур.

Программа вычисляет функцию ползучести (пространственная переменная x опущена)

$$\varepsilon(t) = 1 + 4 \int_0^t \mathfrak{E}_{-0.8}(\tau) d\tau,$$

используя метод деформации контура интегрирования — кусочно прямолинейный контур. Описание этого метода есть в Главе 1 Раздел 1.5. В программе входными параметрами являются *Digits* — машинная точность вычислений, а также $b, r, t, m1, m, n$.

```

restart: n:= 15;
with(orthopoly); Digits:= 35; pi:= evalf(Pi);
b:= 0.1e-2;
t:= 1000.00; d:= 25;
W:= ln(10.)*d/t; m1:= 45; m:= 65; r:= 0.3e-4;
x:= [fsolve(P(n, tt) = 0, tt)];
A:= vector(n);
Dom:= vector(n);
for k to n do
A[k]:= (2*(1-x[k]^2))/(n^2*P(n-1, x[k])^2)
end do;
F:= proc (p) 1.*(1+4./((p+r)^.2+1))/(p+r) end proc;
coefOm:= proc (om)
local j, s, k; global Dom;
for j to n do s:= 0;
for k from 0 to n-1 do
s:= s+(k+1/2)*I^k*BesselJ(k+0.5, om)*P(k, x[j])
end do;

```



```

Dom[j]:= s*A[j]*sqrt(2*pi/om)
end do;
end proc;
gausskostavn:= proc (a1, b1, m)
local k, j, h, wj, wj1, wk, ss1, ss3; global s1, s3;
h:= (b1-a1)/m; s1 := 0; s3 := 0;
for j from 0 to m-1 do
ss1:= 0; ss3 := 0;
wj:= a1+h*j; wj1:= a1+h*(j+1);
for k to n do
wk:= (1/2)*h*x[k]+(1/2)*wj1+(1/2)*wj;
ss1:= ss1+A[k]*F(-wk-I*b)*exp(-wk*t);
ss3:= ss3+A[k]*F(-wk+I*b)*exp(-wk*t)
end do;
s1:= s1+(1/2)*ss1*h; s3:= s3+(1/2)*ss3*h
end do;
end proc;
om:= b*t; s2:= 0;
for k from 0 to m-1 do
om1:= om/m; coefOm(om1); ss:= 0;
for j to n do
ss:= ss+Dom[j]*F(I*b*(x[j]/m-1+(2*k+1)/m))
end do;
ss:= ss*exp(I*om*((2*k+1)/m-1));
s2:= s2+ss
end do;
s2:= I*s2*b/m;
gausskostavn(0, W, m1);

```

$$s1 := s1 * \exp(-I * b * t);$$

$$s3 := -s3 * \exp(I * b * t);$$

$$\text{res} := (s1 + s2 + s3) * \exp(r * t) / (2 * \text{pi} * I);$$

Программа 7. Метод обращения преобразования Лапласа, основанный на деформации контура интегрирования и лемме A. V. Bobylev, C. Cercignani

Программа вычисляет функцию-оригинал для изображения по Лапласу функции $F_1(\alpha, x)$

$$F_1(\alpha, x) = x^{\frac{-\alpha}{\alpha+1}} \mathfrak{D}_\alpha(-1, t),$$

$$x = t^{\alpha+1},$$

используя метод обращения преобразования Лапласа, основанный на деформации контура интегрирования и лемме A. V. Bobylev, C. Cercignani [51]. Описание метода находится в Главе 3 Раздел 1.3. В программе входными параметрами являются *Digits* — машинная точность вычислений, а также al, x, n .

```
restart; with(linalg): Digits:=50:
al:=-0.4: a:=al+1: n:=30:
A:=array(1..n,1..n): b:=vector(n):
A1:=array(1..n,1..n): b1:=vector(n):
f:=proc(z,t) 1/(x^2+z^2+2*z*x*cos(Pi*a)) end:
for k from 0 to n-1 do
for j to n do
A[k+1,j]:=GAMMA(al+a*(k+n-j)+1) od:
b[k+1]:=-GAMMA(al+(n+k)*a+1) od:
bk:=linsolve(A,b):
p:=1: for k to n do
p:=p*xx+bk[k] od:
zcka:=evalf(allvalues(RootOf(p))):
for k to n do
zka[k]:=Re(zcka[k]): od:
for j to n do
for k to n do
```

```

A1[j ,k]:=zka[k]^(j-1) od:
b1[j]:=GAMMA(a1+1+a*(j-1)) od:
evalm(A1): bk1:=linsolve(A1,b1):
for j from 0 to 2*n-1 do
y:=GAMMA(a1+j*a+1):
s:=0:
for k to n do
s:=s+bk1[k]*zka[k]^j:
od:
od:
for x from 1 by 0.01 to 1.05 do
s:=0:
for k to n do
s:=s+bk1[k]*evalf(f(zka[k],x))
od:
print(evalf((sin(Pi*a)/Pi)*s))
od:

```

Программа 8. Аддитивный метод ослабления особенности для вычисления дробно-экспоненциальной функции.

Программа вычисляет функцию-оригинал для изображения по Лапласу функции $F_1(\alpha, x)$

$$F_1(\alpha, x) = x^{\frac{-\alpha}{\alpha+1}} \mathfrak{D}_\alpha(-1, t),$$

$$x = t^{\alpha+1},$$

используя квадратурные формулы наивысшей степени точности. Описание этого метода есть в Главе 3 Раздел 1.3. В программе входными параметрами являются *Digits* — машинная точность вычислений, а также a, x, n, k_0 .

```
restart: Digits:= 20; with(linalg);
a:=0.25; n:= 5; k0:= 3; s:= a*k0; z:=0.5;
A:=array(1..n,1..n): d:=vector(n): varphi:= proc (p, a, k0)
p^s*(-1)^k0/((p^a+1)*p^(a*k0))
end proc;
for k from 0 to n-1 do
for j from n-1 by -1 to 0 do
A[k+1,n-j]:=1/GAMMA(s+(k+j)*a)
od:
d[k+1]:=-1/GAMMA(s+(n+k)*a) od:
evalm(A): evalm(d): b:=linsolve(A,d): p:=1:
for k from 1 to n do p:=p*x1+b[k] od:
expand(p):
xk:=evalf(allvalues(RootOf(p))):
for k from 1 to n do
pka[k]:=evalf(1/xk[k]):
pk[k]:=xk[k]^(-1/a):
mua[k]:=1/pka[k]:
```

```

od:
for j to n do
for k to n do
A[j ,k]:=mua[k]^(j-1) od:
b[j]:=evalf(1/GAMMA(s+a*(j-1)))
od:
AA:=linsolve(A,b): g:= 0;
for m from 2*n to 2000 do
g1:= 0;
for k to n do
g1:= g1+AA[k]*mua[k]^m
end do;
g:= g+(1/GAMMA(a*m+s)-g1)^2*z^(2*m)
end do;
g:= Re(evalf(g^(1/2)));
for x from 0.1 by 0.1 to 0.9 do
print(x); t:= x^(1/a); s1:= 0;
for k to n do
s1:= s1+AA[k]*varphi(pk[k]/t, .25, k0)
end do;
s2:= 0;
for k from 0 to k0-1 do
s2:= s2+(-1)^k*t^(a*k+a-1)/GAMMA(a*k+a)
end do;
varepsilon_n:=g^(1/2)*t^a/(z-t^a);
delta:= varepsilon_n*t^(s-1)/(t^(a-1))
f:=evalf((t^(s-1)*(s1+varepsilon_n)+s2)/t^(a-1))
end do;

```

Программа 9. Разложение оригинала в обобщённые степенные ряды.

Программа вычисляет функции-оригиналы для изображений по Лапласу функций $F_1(\alpha, x)$ и $F_2(\alpha, x)$

$$F_1(\alpha, x) = x^{\frac{-\alpha}{\alpha+1}} \Theta_\alpha(-1, t), \quad F_2(\alpha, x) = \frac{1}{x} \int_0^t \Theta_\alpha(-1, \tau) d\tau,$$

$$x = t^{\alpha+1},$$

используя разложение оригинала в обобщённые степенные ряды. Описание этого метода есть в Главе 3 Раздел 1.4. В программе входными параметрами являются *Digits* — машинная точность вычислений, а также a, x, n .

```
restart: Digits(100): N:=30: s:=0; al:=-0.8; a:=al+1;
for x from 2 by 1 to 4 do
s:=0:
for n from 1 to N do
if (a*n<>trunc(a*n)) then s:=s+(-1)^n/x^(n+1)/GAMMA(-a*n)
fi end:
printf('\nn=%3d    x=%5.2f    approx=%15.8e  ',N,x,s);
od:
for x from 2 by 1 to 4 do
s:=0:
for n from 0 to N do
if (1-a-a*n<0)and(1-a-a*n<>trunc(1-a-a*n))
then s:=s+(-1)^n/x^(n+1)/GAMMA(1-a-a*n)
end if:
if (1-a-a*n>0) then s:=s+(-1)^n/x^(n+1)/GAMMA(1-a-a*n)
end if:
od:
s:=(1-s)/x:
printf('\nn=%3d    x=%5.2f    approx=%15.7e  ',N,x,s);
```

```
od:
for x from 400 by 200 to 800 do
s:=0:
for n from 2 to N do
s:=s+(-1)^n/x^n/GAMMA(a*(1-n)):
od:
-s;
od;
```