Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Попов Сергей Альбертович

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВ И АТТРАКТОРОВ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ, СВЯЗАННЫХ С ОДНО И ДВУХ-ФАЗОВОЙ ЗАДАЧАМИ НАГРЕВА И ИХ ЧИСЛЕННАЯ РЕКОНСТРУКЦИЯ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ТАКЕНСА

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Райтманн Ф.

Санкт-Петербург — 2018

Оглавление

Введение

Актуальность и степень разработанности темы. Эволюционные системы, порожденные разными задачами нагрева ([6]), в том числе задачей микроволнового нагрева ([43]), имеют широкое применение в различных областях медицины и промышленности. Большой интерес вызывают вопросы существования и локализации инвариантных множеств и аттракторов таких систем, которые были рассмотрены в работах Д. Хенри ([24]) и А. В. Бабина и М. И. Вишика ([1]). Под локализацией таких множеств подразумевается построение положительно инвариантных множеств, которые содержат в себе данные множества. В книгах ([1], [25]) для определенных классов эволюционных уравнений предлагаются методы построения и локализации таких инвариантных множеств и аттракторов. В работах Г. А. Леонова ([12], [13], [14]) данная задача локализации подробно изучена для уравнений с периодической нелинейностью в конечномерных пространствах. Основная идея локализации инвариантных множеств и аттракторов в таких системах основана на построении конусной сетки. Однако, для систем в бесконечномерных пространствах эти результаты до сих пор не были обобщены.

Зачастую, вместо того чтобы рассматривать аттрактор, оказывается удобнее рассматривать класс так называемых аменабельных (допустимых) решений. Впервые понятие аменабельных решений было введено Р. А. Смитом ([55]) для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с запаздыванием. Эффективным методом для построения допустимых решений является метод построения конечномерных проекторов. Близкой задачей построения конечномерных проекторов является определение конечной системы определяющих функционалов. Существование такой конечной системы позволяет описать решение рассматриваемой эволюционной системы в целом.

Помимо вопроса локализации инвариантных множеств, в теории и приложениях дифференциальных уравнений очень часто бывает важно иметь свойство ограниченности решений таких уравнений. Для обыкновенных дифференциальных уравнений вопрос ограниченности решений был широко изучен в книге Б. П. Демидовича ([7]). Условия ограниченности решений эволюционных уравнений рассматривались в книгах А. В. Бабина и М. И. Вишика ([1]), И. Д. Чуешова ([25]), G. R. Sell, Y. You ([54]). Важные результаты ограниченности решений эволюционных вариационных равенств и неравенств были получены Панковым А. А. ([20]). В этой книге рассматриваются эволюционные уравнения, заданные на тройке оснащенных гильбертовых пространств, а в качестве основного метода изучения рассматривается метод монотонных операторов ([31]). Кроме ограниченности решений в литературе рассматривается вопрос существования глобальных решений таких систем ([39], [1], [25]). Общая теория дифференциальных уравнений на оснащенных гильбертовых пространствах была предложена Ю. М. Брезанским ([2]). К общим вариационным уравнениям приводит широкий класс физических задач, в частности, одно- и двух-фазовые задачи нагрева метериала микроволнами. Изучению задач такого типа посвящено большое количество работ ([22], [35], [43], [61]), где доказано существование слабых решений, а также получены некоторые априорные оценки этих решений. При рассмотрении вопроса существования слабых решений для других уравнений данного типа широко используются методы, кторые были предложены в книге О. А. Ладыженской, Н. Н. Уральцевой и В. А. Солонникова ([10]). Важную роль также играют дважды нелинейные парные эволюционные уравнения, в которых нелинейность находится как в правой, так и в левой частях и которые возникают, например, при изучении двухфазовой задачи нагрева. Уравнения такого типа рассматривались Ж. Л. Лионсом и Э. Madженесом ([15]), а также в работе ([32]).

Кроме изучения заданных в явной форме уравнений большое значение имеет случай, когда в руках экспериментатора имеется только некоторая последовательность наблюдений за состоянием системы. Данная задача впервые была рассмотрена Ф. Такенсом для динамических систем, заданных на конечномерных многообразиях. Им было доказано, что в типичном с топологической точки зрения случае, то есть когда неизвестная динамическая система является в некотором смысле типичной, можно реконструировать поведение иходной динамической системы. Позднее результаты Такенса были обобщены для случая произвольного банахова пространства Робинсоном. Также Робинсоном было введено понятие превалентности - метрического аналога свойства топологической типичности для таких систем.

В данной работе изучаются вопросы огранничености решений и локализации инвариантных множеств аттракторов вариационных эволюционных уравнений для которых кроме стандартных методов (например, метода монотонных операторов) используется частотный метод. Частотная теорема Лихтарникова-Якубовича ([17], [18]) является мощным инструментом изучения эволюционных систем. В данной работе теорема Лихтарникова-Якубовича используется для построения функционалов Ляпунова с помощью которых исследуются свойства решений вариационных эволюционных уравнений. Кроме того в работе предложен метод построения функционалов Ляпунова без использования частотной теоремы, на основе рассмотрения функционалов энергии. Также в работе рассматривается метод положительно инвариантных конусов ([12], [44]) для эволюционных систем на оснащенном гильбертовом пространстве.

Цели и задачи работы. Целью работы является развитие метода локализации инвариантных множеств и аттракторов, основанного на методе Ляпунова для эволюционных систем, включающих задачу одно- и двухфазового микроволнового нагрева. В частности, ставится задача построения конечномерных проекторов для таких систем и разработка эффективного численного подхода, основанного на модификации метода Такенса-Робинсона.

Методология и методы исследования. В диссертации используются следующие методы исследования:

- Построение функционалов типа Ляпунова в виде квадратичных форм в функциональных пространствах.

- Частотный метод для построения функционала типа Ляпунова для эволюционных систем на основе частотной теоремы Лихтарникова-Якубовича.

- Численная аппроксимация аттрактора задачи микроволнового нагрева методом Такенса-Робинсона с использованием языка программирования Python.

Положения, выносимые на защиту.

- Доказано существование положительно инвариантного выпуклого множества для эволюционных систем с нелинейностью типа Клейна-Гордона.

- Получены достаточные условия ограниченности решений эволюционных систем с нелинейностью типа Клейна-Гордона.

- Приведены условия ограниченности решений двухфазовой задачи нагрева.

- Предложен метод построения проекторов для эволюционной системы, порожденной системой микроволнового нагрева.

- Доказано существование проектора из множества аменабельных решений эволюционных уравнений на некоторое подмножество конечномерного пространства

- Проведены численные исследования одномерной задачи микроволнового нагрева с помощью модифицированного метода вложения Такенса-Робинсона.

Степень достоверности и аппробация результатов. Все полученные результаты математически строго доказаны.

Результаты данной работы докладывались на международных конференциях "The 9th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential

Equations and Applications"(Орландо, Флорида, США, 2012), "Science and Progress"в рамках научного центра G-RISC (Санкт-Петербург, 2011), “The 8th International Conference on Differential and Functional Differential Equations” (Москва, 2017), на семинарах кафедры прикладной кибернетики Санкт-Петербургского государственного университета (2010 – 2013).

Научная новизна. Все основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми. Впервые вводится понятие аменабельных решений для эволюционных систем и доказывается существование проекторов для таких решений.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные условия ограниченности решений для задач микроволнового нагрева могут быть использованы для контроля за температурой нагреваемого материала.

Публикации на тему диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 6 печатных работах, в том числе в четырех статьях ([21], [45], [47], [48]). Статьи ([45], [47]) опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК РФ и индексируемых системой Scopus. В работах ([47], [48], [49]) соавтору (научному руководителю) принадлежит постановка задачи, диссертанту принадлежат все основные теоретические результаты и численное моделирование.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав и заключения.

Во введении аргументирована актуальность темы диссертации, приведен обзор литературы, определены цели и задачи работы а так же обоснована их научная ценность.

В первой главе рассмотрены вопросы существования решения для класса эволюционных уравнений с монотонной нелинейностью, а также изучаются эволюционные уравнения типа Клейна-Гордона, используя при этом метод положительно инвариантных конусов. Для обыкновенных дифференциальных уравнений в таком случае говорят о нелинейностях типа Дуффинга ([3]). В качестве частного случая таких систем рассматривается задача нагрева стержня, для данной задачи проверяются условия полученных теоретических результатов. Также в этой главе приведены условия ограниченности решений эволюционных систем с периодической нелинейностью и рассматривается локализация инвариантного множества данной системы на конусной сетке.

Во второй главе рассматриваются дважды нелинейные парные эволюционные уравнения с нелинейностями в правой и левой частях ([15], [32]). Для таких систем приведены достаточные условия ограниченности решений. В качестве частного случая таких систем рассматривается двухфазовая задача микроволнового нагрева. Аналогично тому как это сделано в ([22]), показывается возможность интерпретирования данной системы на языке многозначных динамических систем. Для данной задачи также приводятся достаточные условия ограниченности решений.

В третьей главе рассматриваются общие системы управления с обратной связью, состоящие из линейной и нелинейной частей, а также рассматривается вопрос построения проекторов из множества допустимых решений на подмножество конечномерного пространства. В заключение, в данной главе приводится частотное условие существования определяющих для диссипативности наблюдений для одномерной задачи микроволнового нагрева.

В четвертой главе приводятся основные элементы теории Такенса и Робинсона ([51], [52]), а также их применение при численном моделировании для построения аппроксимации аттрактора двухфазовой задачи микроволнового нагрева.

В заключении сформулированы основные результаты работы.

1. Положительно инвариантные множества и ограниченность решений эволюционных уравнений в пространстве с конусом

В данной главе изучается метод положительно инвариантных конусов для общих эволюционных систем. Метод положительно инвариантных конусов с использованием частотной теоремы впервые был представлен для обыкновенных дифференциальных уравнений в работах ([12], [44]). В работе ([12]) был доказан аналог кругового критерия абсолютной устойчивости нелинейных систем управления, дающий ограниченность решения нелинейных систем управления с периодической нелинейностью. Однако, в этой и последующих работах ([13], [40]) рассмотрен лишь только случай дифференциальных уравнений, заданных на конечномерных пространствах. В данной главе приводится аналог этого результата для случая эволюционных уравнений с периодической нелинейностью на оснащенном гильбертовом пространстве. В частности, сюда входят некоторые дифференциальные уравнения в частных производных с периодической нелинейностью.

Метод инвариантных конусов в данной главе рассматривается также для эволюционных систем с кубической нелинейностью типа Дуффинга, для которых доказана теорема о существовании положительно инвариантного выпуклого множества. Для этого доказана обобщенная лемма о разделимости конусов ([37]) для случая нестрогой разделимости. Впервые такая задача была рассмотрена для обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейностью типа Дуффинга в работе ([14]).

1.1. Системы управления с монотонной нелинейностью

Введем некоторые понятия, которые потребуются нам в дальнейшем в главе.

Рассмотрим *оснащение* вещественного гильбертова пространства Y_0, то есть тройку пространств

$$Y_1 \subset Y_0 \subset Y_{-1}, \tag{1.1.1}$$

где Y_1 и Y_{-1} - вещественные гильбертовы пространства, и вложения плотны и непрерывны. В дальнейшем тройку пространств с такими свойствами будем также для краткости называть *гильбертовой тройкой*. Пусть $(\cdot,\cdot)_i$ и $\|\cdot\|_i, i = 1, 0, -1$ - скалярное произведение и норма в Y_i, соответственно. Непрерывность вложения означает, что существуют такие константы $\kappa > 0$ и $\kappa' > 0$, что

$$\|y\|_0 \le \kappa \|y\|_1 \ , \quad \forall\, y \in Y_1 \tag{1.1.2}$$

и

$$\kappa' \|y\|_{-1} \le \|y\|_0 \ , \quad \forall\, y \in Y_0 \ . \tag{1.1.3}$$

Предположим, что оснащение (1.1.1) - (1.1.3) реализовано как показано в ([2], [60]). Также полагаем, что в гильбертовой тройке пространств (1.1.1) даны только $Y_1 \subset Y_0$, где для простоты предполагаем $\kappa = 1$. Введем на Y_0 следующую норму:

$$\|y\|_{-1} := \sup_{0 \ne \eta \in Y_1} \frac{|(y,\eta)_0|}{\|\eta\|_1} \tag{1.1.4}$$

и обозначим через Y_{-1} замыкание Y_0 по этой норме. Тогда Y_{-1} может быть рассмотрено как третье пространство в оснащении (1.1.1) (см. [2, 60]). Это пространство также можно рассматривать как сопряжённое к Y_1 относительно Y_0. Продолжив по непрерывности функцию $(u, v)_0$ на $Y_{-1} \times Y_1$, получим скобку двойственности между Y_{-1} и Y_1, то есть билинейную форму $(\cdot, \cdot)_{-1,1}$ на $Y_{-1} \times Y_1$, которая совпадает с $(\cdot, \cdot)_0$ на $Y_0 \times Y_1$ и удовлетворяет неравенству

$$|(h, y)_{-1,1}| \leq \|h\|_{-1} \|y\|_1 \ , \quad \forall\, h \in Y_{-1},\ \forall\, y \in Y_1 \ . \tag{1.1.5}$$

Рассмотрим три линейных оператора, заданные на гильбертовой тройке пространств (1.1.1) следующим образом:

$$A \in \mathcal{L}(Y_1, Y_{-1}) \ , \quad B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, Y_{-1}) \ , \quad C \in \mathcal{L}(Y_0, \mathbb{R}) \ . \tag{1.1.6}$$

Также будем рассматривать *сопряжённый к A относительно Y_0 оператор* $A^+ \in \mathcal{L}(Y_1, Y_{-1})$, который определяется следующим образом ([2]):

$$(Ay, \eta)_{-1,1} = (A^+ \eta, y)_{-1,1} \ , \quad \forall\, y, \eta \in Y_1 \ . \tag{1.1.7}$$

Если $A^+ = A$, то оператор A называется *самосопряжённым относительно Y_0*.

Введем далее вспомогательные функциональные пространства, которые нам потребуются для исследования эволюционных вариационных уравнений.

Пусть даны $-\infty \leq T_1 < T_2 \leq +\infty$ - два произвольных числа, определим норму для измеримых по Бохнеру функций ([60]) в $L^2(T_1, T_2; Y_j)$, $j = 1, 0, -1$, как

$$\|y\|_{2,j} := \left(\int_{T_1}^{T_2} \|y(t)\|_j^2 \, dt \right)^{1/2} \ . \tag{1.1.8}$$

Через $\mathcal{W}(T_1, T_2; Y_1, Y_{-1})$ обозначим пространство функций y таких, что $y \in L^2(T_1, T_2; Y_1)$, $\dot{y} \in L^2(T_1, T_2; Y_{-1})$ и нормой

$$\|y\|_{\mathcal{W}(T_1,T_2;Y_1,Y_{-1})} := \left(\|y\|_{2,1}^2 + \|\dot{y}\|_{2,-1}^2\right)^{1/2} \ . \tag{1.1.9}$$

Замечание 1.1. *По теореме вложения ([15, 60]) можно полагать, что любая функция из $\mathcal{W}(T_1, T_2; Y_1, Y_{-1})$ принадлежит $C(T_1, T_2; Y_0)$.*

Рассмотрим относительно гильбертовой тройки пространств $Y_1 \subset Y_0 \subset Y_{-1}$ на интервале $J \subset \mathbb{R}$ следующее уравнение:

$$\dot{y} = Ay + B\phi(t, Cy) + f(t)\,, \tag{1.1.10}$$

где $f \in L^2_{\text{loc}}(J; Y_{-1})$.

Для того чтобы получить свойства существования и единственности решения рассматриваемой задачи, введем следующее предположение.

(A.1.1) Нелинейность $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вместе с операторами A, B и C удовлетворяет следующему свойству. Семейство операторов $\{\mathbb{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}} := -A - B\phi(t, C\cdot) : Y_1 \to Y_{-1}$ такое, что для каждого $t \in \mathbb{R}$ оператор $\mathbb{A}(t)$ монотонный, семинепрерывный, такой, что выполнено неравенство

$$\|\mathbb{A}(t)y\|_{-1} \le c_1\|y\|_1 + c_2, \ \ \forall y \in Y_1, \tag{1.1.11}$$

где $c_1 > 0$ и $c_2 \in \mathbb{R}$ константы, не зависящие от t.

Также предположим, что

$$(\mathbb{A}(t)y, y)_{-1,1} \ge c_3\|y\|_1^2 + c_4, \ \ \forall y \in Y_1, \tag{1.1.12}$$

где $c_3 > 0$ и $c_4 \in \mathbb{R}$ константы, не зависящие от t.

Решением (1.1.10) назовём функцию $y \in L^2_{\mathrm{loc}}(J;Y_1) \cap C(J;Y_0)$ такую, что $\dot{y} \in L^2_{\mathrm{loc}}(J;Y_{-1})$ и y удовлетворяет уравнению (1.1.10) в вариационном смысле, то есть для почти всех $t \in J$

$$(\dot{y}(t) - Ay(t) - B\phi(t, Cy(t)) - f(t)\,,\ \eta - y(t))_{-1,1} = 0\,, \quad \forall\, \eta \in Y_1\,. \tag{1.1.13}$$

Для этого случая мы имеем следующие результаты существования и единственности ([27]).

Теорема 1.1. *Пусть выполнено предположение* **(A.1.1)**. *Тогда для любого* $T > 0$, *любого* $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;Y_{-1})$ *и любого* $y_0 \in Y_0$ *существует единственное решение* $y \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;Y_1) \cap C\,(\mathbb{R}_+;Y_0)$ *уравнения (1.1.13) такое, что* $y(0) = y_0$, *а также верно*

$$\|y\|_{L^2(0,T;Y_1)} \le k_1(\|f\|_{L^2(0,T;Y_{-1})},\, \|y_0\|_0) \tag{1.1.14}$$

и

$$\|y\|_{C([0,T];Y_0)} \le k_2(\|f\|_{L^2(0,T;Y_{-1})},\, \|y_0\|_0)\,, \tag{1.1.15}$$

где $k_1(\cdot,\cdot)$ *и* $k_2(\cdot,\cdot)$ *- непрерывные и неубывающие по каждой переменной функции.*

Дадим определение положительно инвариантного множества, которое будет использоваться далее в работе

Определение 1.1. *Пусть* $y(t,t_0,y_0)$ *- решение (1.1.13),* $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $y_0 \in Y_0$ *и* $\mathcal{G}$ *- некоторое подмножество* Y_0. *Тогда если для любого* $t \ge t_0$ *из того что* $y_0 \in \mathcal{G} \subset Y_0$ *следует что* $y(t,t_0,y_0) \in \mathcal{G}$, *множество* $\mathcal{G}$ *называется положительно инвариантным относительно системы (1.1.13).*

1.2. Эволюционные системы управления Лурье с нелинейностью типа Клейна-Гордона

Рассмотрим гильбертову тройку $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_{-1}$ со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{V}_j}$ и нормами $\|\cdot\|_{\mathcal{V}_j}$, $j = 1, 0, -1$. Через $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{V}_{-1},\mathcal{V}_1}$ обозначим скобку двойственности между $\mathcal{V}_{-1}$ и $\mathcal{V}_1$. Пусть $A_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_{-1})$ - линейный ограниченный оператор, $b_0 \in \mathcal{V}_{-1}$ - обобщённый вектор, $c_0 \in \mathcal{V}_0$ - вектор и $d_0 \leq 0$ - число. Введем линейные ограниченные операторы $C_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_0, \mathbb{R})$ и $B_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathcal{V}_{-1})$, соответствующие векторам c_0 и b_0, которые определяются следующим образом: $C_0\nu = (c_0, \nu)_{\mathcal{V}_0}$, $\forall\, \nu \in \mathcal{V}_0$ и $B_0\xi := \xi b_0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$.

Пусть $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - две скалярные функции. Рассмотрим систему непрямого управления, которая формально записывается как

$$\begin{aligned} \dot{\nu} &= A_0\nu + b_0[\phi(t, w) + g(t)]\,, \\ \dot{w} &= (c_0, \nu)_{\mathcal{V}_0} + d_0[\phi(t, w) + g(t)]\,. \end{aligned} \tag{1.2.16}$$

Перепишем (1.2.16) как систему управления в стандартном виде. Для этого рассмотрим гильбертову тройку пространств $Z_1 \subset Z_0 \subset Z_{-1}$, где $Z_j := \mathcal{V}_j \times \mathbb{R}$, $j = 1, 0, -1$. Скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_{Z_j}$ в Z_j вводится соотношением $\big((\nu_1, w_1), (\nu_2, w_2)\big)_{Z_j} := (\nu_1, \nu_2)_{\mathcal{V}_j} + w_1 w_2$, $(\nu_1, w_1), (\nu_2, w_2) \in Z_j$. Скобка двойственности между Z_{-1} и Z_1 определяется следующим образом

$$((h, \xi), (\nu, \varsigma))_{Z_{-1},Z_1} := (h, \nu)_{\mathcal{V}_{-1},\mathcal{V}_1} + \xi\,\varsigma,\ \ \forall (h, \xi) \in Z_{-1},\ (\nu, \varsigma) \in Z_1.$$

Пусть $\hat{b} := \begin{bmatrix} b_0 \\ d_0 \end{bmatrix} \in Z_{-1}$ и $\hat{c} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in Z_0$, а операторы $\hat{C} \in \mathcal{L}(Z_0, \mathbb{R})$ и $\hat{B} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, Z_{-1})$ задаются как

$$\hat{C}z = (\hat{c}, z)_{Z_0}\,, \quad \forall\, z \in Z_0\,, \qquad \hat{B}\xi = \xi\hat{b}\,, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}.$$

Также введем оператор $\hat{A} \in \mathcal{L}(Z_1, Z_{-1})$, который определяется следующим образом

$$\hat{A} := \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ C_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим систему

$$\dot{z} = \hat{A}z + \hat{B}\left[\phi(t,w) + g(t)\right],\ w = \hat{C}z\ . \tag{1.2.17}$$

Данная система эквивалентна (1.2.16) при $z := \left[\begin{smallmatrix} \nu \\ w \end{smallmatrix}\right]$. Для произвольных $-\infty \le T_1 < T_2 \le +\infty$ определим норму измеримых по Бохнеру функций в $L^2(T_1, T_2; Z_j)$, $j = 1, 0, -1$ соотношением

$$\|z\|_{2,j} := \left(\int_{T_1}^{T_2} \|z(t)\|_{Z_j}^2 dt\right)^{1/2}\ . \tag{1.2.18}$$

Пусть $\mathcal{W}(T_1, T_2; Z_1, Z_{-1})$ - пространство функций z таких, что $z \in L^2(T_1, T_2; Z_1)$ и $\dot{z} \in L^2(T_1, T_2; Z_{-1})$. Норму в пространстве $\mathcal{W}(T_1, T_2; Z_1, Z_{-1})$ определим следующим образом

$$\|z\|_{\mathcal{W}(T_1,T_2;Z_1,Z_{-1})} := \left(\|z\|_{2,-1}^2 + \|\dot{z}\|_{2,-1}^2\right)^{1/2}\ . \tag{1.2.19}$$

Введём предположения **(A.1.2)** – **(A.1.7)**, которые нам потребуются в дальнейшем.

(A.1.2) Для любого $T > 0$ и любой $f = (f_1, f_2) \in L^2(0, T; Z_{-1})$ задача

$$\dot{\nu} = A_0\nu + f_1(t), \tag{1.2.20}$$

$$\dot{w} = (c_0, \nu)_{\mathcal{V}_0} + f_2(t), \tag{1.2.21}$$

$$(\nu(0), w(0)) = (\nu_0, w_0) \tag{1.2.22}$$

корректно поставлена, то есть для произвольных $(\nu_0, w_0) \in Z_0$ и $(f_1, f_2) \in L^2(0, T; Z_{-1})$ существует единственное решение

$(\nu, w) \in \mathcal{W}(0,T;Z_1,Z_{-1})$, удовлетворяющее (1.2.20)–(1.2.22) в вариационном смысле, и которое непрерывно зависит от начальных данных, то есть для некоторых констант $k_3 > 0$ и $k_4 > 0$ выполнено неравенство

$$\|(\nu, w)\|^2_{W(0,T;Z_1,Z_{-1})} \leq k_3 \|(\nu_0, w_0)\|^2_{\mathcal{V}_0 \times \mathbb{R}} + k_4 \|(f_1, f_2)\|^2_{2,-1}. \tag{1.2.23}$$

(A.1.3) Существует $\lambda > 0$ такое, что $A_0 + \lambda I$ - гурвицев оператор.

(A.1.4) Для любых $T > 0$, $(\nu_0, w_0) \in Z_1$, $(\tilde{\nu}_0, \tilde{w}_0) \in Z_1$ и $(f_1, f_2) \in L^2(0,T;Z_1)$ решение прямой задачи (1.2.20)–(1.2.22) и решение смежной задачи

$$\dot{\tilde{\nu}} = -(A_0^* + \lambda\, I)\tilde{\nu} + f_1(t), \tag{1.2.24}$$

$$\dot{\tilde{w}} = -C_0^* \tilde{w} - \lambda\, \tilde{w} + f_2(t), \tag{1.2.25}$$

$$(\tilde{\nu}(0), \tilde{w}(0)) = (\tilde{\nu}_0, \tilde{w}_0) \tag{1.2.26}$$

непрерывно по t в сильном смысле по норме пространства Z_1.

Здесь $A_0^* \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_{-1}, \mathcal{V}_0)$ обозначает сопряженный к A_0 оператор, т. е.

$$(A_0 y, \eta)_{-1,1} = (y, A_0^* \eta)_{-1,1}, \quad \forall y, \eta \in \mathcal{V}_1.$$

(A.1.5) Пара (A_0, b_0) - L^2 - *управляема*, то есть для произвольного $\nu_0 \in \mathcal{V}_0$ существует управление $\xi\,(\cdot) \in L^2(0,\infty;\mathbb{R})$ такое, что задача

$$\dot{\nu} = A_0 \nu + b_0 \xi\ , \quad \nu(0) = \nu_0$$

корректно поставлена в вариационном смысле на $(0, \infty)$.

Обозначим через A_0^c, b_0^c и c_0^c комплексификацию A_0, b_0 и c_0, соответственно. Определим *передаточную функцию* для тройки (A_0^c, b_0^c, c_0^c) следующим образом

$$\chi(p) = \left(c_0^c, (A_0^c - pI^c)^{-1}\, b_0^c\right)_{Z_0}\,, \quad p \in \rho(A_0^c).$$

(A.1.6) Для $\lambda > 0$ из предположения **(A.1.3)** и для некоторого $\kappa_1 > 0$ выполнено

$$\lambda d_0 + \mathrm{Re}\,(-i\omega - \lambda)\chi(i\omega - \lambda) + \kappa_1\,|\,\chi(i\omega - \lambda) - d_0\,|^2 \le 0\,, \quad \forall\,\omega \ge 0\,. \tag{1.2.27}$$

(A.1.7) Функция $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и $\phi(t, 0) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$. Функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - непрерывна. Существуют числа $\kappa_1 > 0$ (из **(A.1.6)**), $0 \le \kappa_2 < \kappa_3 < +\infty, \beta_1 < \beta_2$ и $\zeta_2 < \zeta_1$ такие, что

a)

$$\beta_1 < g(t) < \beta_2\,,\ \forall t \in \mathbb{R}; \tag{1.2.28}$$

b)

$$(\phi(t, w) + \beta_i)(w - \zeta_i) \le \kappa_1 (w - \zeta_i)^2,\ i = 1, 2,$$
$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \forall\, w \in [\zeta_2, \zeta_1]\,; \tag{1.2.29}$$

c)

$$\kappa_2 (w_1 - w_2)^2 \le (\phi(t, w_1) - \phi(t, w_2))(w_1 - w_2) \le \kappa_3 (w_1 - w_2)^2,$$
$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \forall\, w_1, w_2 \in [\zeta_2, \zeta_1]\,. \tag{1.2.30}$$

Замечание 1.2. *Гиперболические уравнения с нелинейностью, обладающей свойствами b) и c), называются уравнениями типа Клейна-Гордона ([59]). Параболические уравнения с такими нелинейностями называются* *уравнениями типа Чэфи-Инфанте ([24], [28]). Для конечномерного случая такие нелинейности называются нелинейностями типа Дуффинга ([3]).*

Далее будем предполагать, что при введенных выше условиях решение уравнения (1.2.17) для любого $T > 0$ принадлежит пространству $\mathcal{W}(0, T; Z_1, Z_{-1})$. Для этого случая мы покажем существование решений с начальными данными из определённого множества. Для этого нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты.

Предположим, что $Y_1 \subset Y_0 \subset Y_{-1}$ - гильбертово оснащение пространства $Y_0, \|\cdot\|_j, (\cdot,\cdot)_j$ - норма и скалярное произведение соответственно, и $(\cdot,\cdot)_{-1,1}$ - скобка двойственности между Y_{-1} и Y_1. Рассмотрим линейную систему

$$\dot{y} = Ay\,, \quad w = (c, y)_0\,, \tag{1.2.31}$$

где $A \in \mathcal{L}(Y_1, Y_{-1})$ и $c \in Y_0$.

Предположим, что для каждого $y_0 \in Y_0$ существует единственное решение $y(\cdot, y_0)$ системы (1.2.31) в $\mathcal{W}(0, \infty; Y_1, Y_{-1})$, удовлетворяющее условию $y(0, y_0) = y_0$. В дальнейшем нам понадобится это предположение.

(A.1.8) Пространство Y_0 можно разложить в виде $Y_0 = Y_0^+ \oplus Y_0^-$ так, что верно следующее:

a) Для каждого $y_0 \in Y_0^+$ мы имеем $\lim\limits_{t\to\infty} y(t, y_0) = 0$, и для каждого $y_0 \in Y_0^-$ существует единственное решение $y_-(t) = y(t, y_0)$ системы (1.2.31), определённое на $(-\infty, 0)$, такое, что $\lim\limits_{t\to-\infty} y_-(t) = 0$ и $(c, y(t, y_0))_0 = 0,\ \forall\, t \geq 0$ тогда и только тогда, когда $y_0 = 0$.

b) Для каждого $y_0 \in Y_0^+$ равенство $(c, y(t, y_0))_0 = 0,\ \forall\, t \leq 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $y_0 = 0$, и для каждого $y_0 \in Y_0^-$ равенство

$(c, y(t, y_0))_0 = 0, \forall t \leq 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $y_0 = 0$.

Далее, запись $L \geq 0$ для линейного оператора $L \in \mathcal{L}(Y)$, где Y - гильбертово пространство, означает, что L - *положительный*, то есть, $(y, Ly)_Y > 0,\ \forall\, y \in Y \backslash \{0\}$; $\quad L \leq 0$ означает, что $-L$ - положительный.

Следующая лемма связана с нестрогой разделимостью квадратичных конусов с помощью специальных функционалов. Для дальнейшего изложения введем некоторые определения. Предположим, что Y - гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. *Конусом* в Y назовём множество $\mathcal{C} \subset Y$, $\mathcal{C} \neq \varnothing$ такое, что если $y \in \mathcal{C}$, $\zeta \in \mathbb{R}$, то $\zeta y \in \mathcal{C}$.

Предположим, что $P \in \mathcal{L}(Y), P = P^*$. Тогда множество $\mathcal{C} := \{y \in Y \,|\, (y, Py) \leq 0\}$ - конус, который мы будем называть *квадратичным.*

Предположим, что существует разложение $Y = Y^+ \oplus Y^-$ такое, что $P_{|Y^+} \geq 0$ и $P_{|Y^-} \leq 0$. Тогда квадратичный конус $\{y \in Y \,|\, (y, Py) \leq 0\}$ назовём *квадратичным конусом размерности* $\dim Y^-$.

Лемма 1.1. *Предположим, что:*

1. $Y_1 \subset Y_0 \subset Y_{-1}$ *- гильбертова тройка пространств со скалярными произведениями* $(\cdot, \cdot)_i$, *соответствующими нормами* $\|\cdot\|_i$, $i = 1, 0, -1$ *и скобкой двойственности* $(\cdot, \cdot)_{-1,1}$ *между* Y_{-1} *и* Y_1;

2. *существует самосопряженный оператор* $P \in \mathcal{L}(Y_{-1}, Y_0) \cap \mathcal{L}(Y_0, Y_1)$, *такой что* $\mathcal{C} := \{y \in Y_0 \,|\, (y, Py)_0 \leq 0\}$ *- одномерный квадратичный конус;*

3. *существуют векторы* $r \in Y_0$, $h \in Y_{-1}$ *и* $b \in Y_{-1}$, *такие, что* $Ph = r$, $(h,r)_{-1,1} = 0$, $Pb = h$, $(h,b) < 0$, $(r,b) < 0$, *а также* $2(h,Py)_{-1,1} = (r,y)_0 \ \forall y \in Y_0$.

Тогда справедливы соотношения

$$\{y \in Y_0 | (y,Py)_0 < 0, (r,y)_0 < 0\} = \{y \in Y_0 | (y,Py)_0 < 0, (h,y)_{-1} < 0\}, \tag{1.2.32}$$

$$\{y \in Y_0 | (y,Py)_0 \le 0, (h,y)_{-1} \le 0\} \subset \{y \in Y_0 | (y,Py)_0 \le 0, (r,y)_0 \le 0\}, \tag{1.2.33}$$

$$\{y \in Y_0 | (y,Py)_0 \le 0, (r,y)_0 < 0\} \subset \{y \in Y_0 | (y,Py)_0 \le 0, (h,y)_{-1} \le 0\}, \tag{1.2.34}$$

$$\begin{aligned} &\{y \in Y_0 | (y,Py)_0 \le 0, (h,y)_{-1} \le 0, (r,y)_0 = 0\} = \\ &\qquad = \{y \in Y_0 | Py = \mu r, \mu \in [0,+\infty)\}. \end{aligned} \tag{1.2.35}$$

Доказательство. Обозначим через y_0 такой вектор из Y_0, что $Py_0 = h$, а через $y_1 \in Y_{-1}$ такой вектор, что $Py_1 = r$. Такие векторы существуют в силу регулярности оператора P. Из условия леммы $(r,y_0)_0 = (h,y_1)_{-1} < 0$, $(h,y_0)_{-1} = (y_0,Py_0)_0 < 0$, $(r,y_1)_{-1} = (y_1,Py_1)_{-1} = 0$. Как показано в ([37]), при условиях леммы выполнено

$$\{y \in Y_0 | (y,Py)_0 < 0\} \cap \{y \in Y_0 | (r,y)_0 = 0\} = \emptyset, \tag{1.2.36}$$

$$\{y \in Y_0 | (y,Py)_0 \le 0\} \cap \{y \in Y_0 | (h,y)_{-1} = 0\} = \{0\}. \tag{1.2.37}$$

Докажем (1.2.32). Пусть для некоторого вектора $y \in Y_0$ выполнено $(y,Py)_0 < 0$, $(r,y)_0 < 0$, но $(h,y)_{-1} \ge 0$. Тогда из (1.2.37) $(h,y)_{-1} \ne 0$. Определим вектор $z \in Y_0$ по формуле $z = y + \alpha_1 y_0$, где $\alpha_1 = -(h,y)_0/(h,y_0)_{-1} > 0$. Из равенства $(h,z)_{-1} = 0$ и (1.2.37) следует $(z,Pz)_0 \ge 0$, но $(z, Pz)_0 = (y, Py)_0 + \alpha_1^2(y_0, Py_0)_0 + 2\alpha_1(y_0, Py)_0$, где $(y, Py)_0 < 0$, $(y_0, Py_0)_0 = 0$, поэтому $(y, Py_0)_0 > 0$. Определим вектор $z_1 \in Y_0$ по формуле $z_1 = y_1 - \beta_1 y_0$, где $\beta_1 = (r, y)_0/(r, y_0)_0 > 0$. Из равенства $(r, z_1)_0 = 0$ и (1.2.36) вытекает, что $(z_1, Pz_1)_0 \geq 0$, откуда $(y, Py_0)_0 < 0$, что противоречит с выведенным ранее неравенством $(y, Py_0)_0 > 0$. Обратное включение в (1.2.32), а также включения в (1.2.33) и (1.2.34) доказываются аналогично.

Для доказательства (1.2.35) достаточно показать, что при сделанных предположениях

$$\{y \in Y_0 | (y, Py)_0 \leq 0, (r, y)_0 = 0\} = \{y \in Y_0 | y = \mu y_1, \mu \in (-\infty, +\infty)\}. \tag{1.2.38}$$

Вектор вида μy_1, очевидно, принадлежит множеству в левой части (1.2.38), так как $(y_1, Py_1) = (r, y_1)_{-1} = 0$. Допустим, что существует вектор $y \in Y_{-1}$, линейно независимый от y_1, такой, что $(y, Py)_{-1} \leq 0$ и $(r, y)_{-1} = 0$. Из (1.2.36) $(h, y) \neq 0$. Определим вектор $z_2 = y_1 - \alpha_2 y$, где $\alpha_2 = (h, y_1)/(h, y)_{-1}$. Так как y и y_1 линейно независимы, то $z_2 \neq 0$. Очевидно, $(h, z_2) = 0$, откуда $(z_2, Pz_2) > 0$. В то же время
$(z_2, Pz_2) = (y_1, Py_1) + \alpha_2^2(y, Py)_0 - 2\alpha_2(y_1, Py_1)_{-1} < 0$. Полученное противоречие доказывает (1.2.38). □

Замечание 1.3. *Данная лемма является обобщением аналогичной леммы из ([14]) на случай гильбертовой тройки пространств.*

Приведем формулировку леммы из [3], которая будет использоваться при доказательстве теоремы 1.2.

Лемма 1.2. *Предположим, что* $t_0 \geq 0$, $k(\cdot), \varrho(\cdot), v_i(\cdot), u_i(\cdot) : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, *- непрерывные функции и* $\varkappa_1 > \varkappa_2$ *- числа такие, что выполнены* *следующие условия:*

1) *В некоторой окрестности множества*

$$\mathbb{T}_1 := \{t \in (t_0, \infty) \,|\, \varrho(t) = \varkappa_1 \ , \ v_i(t) \le 0 \ , \ i = 1, 2 \ , \ u_1(t) \le 0\}$$

функция ϱ *не возрастает, и в некоторой окрестности множества*

$$\mathbb{T}_2 := \{t \in (t_0, \infty) \,|\, \varrho(t) = \varkappa_2 \ , \ v_i(t) \le 0 \ , \ i = 1, 2 \ , \ u_2(t) \ge 0\}$$

функция ϱ *не убывает.*

2) *В некоторой окрестности множества*

$$\mathbb{T}_3 := \{t \in (t_0, \infty) \,|\, \varkappa_2 \le \varrho(t) \le \varkappa_1 \ , \ v_i(t) \le 0 \ , \ i = 1, 2 \ , \ u_1(t) = 0\}$$

функция u_1 *не возрастает, и в некоторой окрестности множества*

$$\mathbb{T}_4 := \{t \in (t_0, \infty) \,|\, \varkappa_2 \le \varrho(t) \le \varkappa_1 \ , \ v_i(t) \le 0 \ , \ i = 1, 2 \ , \ u_2(t) = 0\}$$

функция u_2 *не убывает.*

3) *На множестве* $\{t \in (t_0, \infty) \,|\, \varkappa_2 \le R(t) \le \varkappa_1\}$ *функция* $k(\cdot)$ *неотрицательна, и функции* $t \mapsto v_i(t) + \int_0^t k(\tau) v_i(\tau) d\tau$, $i = 1, 2$, *не возрастает.*

4) $R(t_0) \in [\varkappa_2, \varkappa_1]$, $v_i(t_0) \le 0$, $\quad i = 1, 2$, $u_1(t_0) \le 0$, $u_2(t_0) \ge 0$.

Тогда для любого $t \ge t_0$ *верно, что* $\varrho(t) \in [\varkappa_2, \varkappa_1]$, $v_i(t) \le 0$, $\quad i = 1, 2$, $u_1(t) \le 0$, $u_2(t) \ge 0$.

Следующая теорема дает существование положительно инвариантного выпуклого множества для системы (1.2.16). В работе ([37]) была доказана аналогичная теорема для случая строгой разделимости конусов.

Теорема 1.2. *Предположим, что для системы (1.2.16) выполнены* **(A.1.2)** – **(A.1.8)**. *Тогда существует замкнутое, положительно инвариантное и выпуклое множество* $\mathscr{G}$ *такое, что*

$$\{(\nu, w) \in \mathcal{V}_1 \times \mathbb{R} \,|\, \nu = 0, w \in [\zeta_2, \zeta_1]\} \subset \mathscr{G} \subset \{(\nu, w) \in \mathcal{V}_1 \times \mathbb{R} \,|\, w \in [\zeta_2, \zeta_1]\} \,. \tag{1.2.39}$$

Доказательство аналгоично доказательству из ([37]) с применением леммы 1.1 о нестрогой разделимости конусов.

Доказательство. Рассмотрим систему (1.2.16) в форме (1.2.17). По теореме Лихтарникова-Якубовича ([17]) предположения **(A.1.2)**, **(A.1.4)**, **(A.1.5)**, **(A.1.7)** гарантируют существование линейного непрерывного оператора $\hat{P} \in \mathcal{L}(Z_{-1}, Z_0) \cap \mathcal{L}(Z_0, Z_1)$, который является самосопряжённым в Z_0, такого, что следующая квадратичная форма в $Z_1 \times \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}(z, \xi) := 2\,((\hat{A} + \lambda I)z + \hat{b}\,\xi, \hat{P}z)_{Z_{-1}, Z_1} + (\kappa_1(\hat{c}, z)_{Z_0} - \xi)\,(\hat{c}, z)_{Z_0},$$

удовлетворяет неравенству

$$\mathcal{F}(z, \xi) \le 0\,, \quad \forall\, z \in Z_1, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}\,. \tag{1.2.40}$$

Подставив $\xi = 0$ в (1.2.40), получаем следующее неравенство

$$2\,((\hat{A} + \lambda I)z, \hat{P}z)_{Z_{-1}, Z_1} \le -\kappa_1(\hat{c}, z)^2_{Z_0}\,, \quad \forall\; z \in Z_1\,. \tag{1.2.41}$$

Так как выполнено предположение **(A.1.3)**, в силу обобщенной леммы Ляпунова ([30]) существует разложение $Z_0 = Z_0^+ \oplus Z_0^-$ при $\dim Z_0^- = 1$ такое, что выполняется **(A.1.8)** для $Y_j = Z_j, j = 1, 0, -1,\; A = \hat{A} + \lambda I$ и $c = \hat{c}$. Из (1.2.41) следует, что для любого $z_0 \in Z_0$ решение $z(\cdot)$ системы

$$\dot{z} = (\hat{A} + \lambda I)z\,, \quad z(0) = z_0 \tag{1.2.42}$$

удовлетворяет неравенству

$$V(y(t,y_0)) - V(y(s,y_0)) \le -\int_s^t (c, y(\tau,y_0))_0^2 \; d\tau \, . \tag{1.2.43}$$

при $V(z) = (z, \hat{P}z)_{Z_0}$ и $c = \hat{c}$. Тогда по лемме 3.4 из ([37]) выполнено

$$\hat{P}_{|Z_0^+} \ge 0 \qquad \text{и} \qquad \hat{P}_{|Z_0^-} \le 0 \, . \tag{1.2.44}$$

Таким образом, мы показали, что множество $\hat{\mathcal{C}} := \{z \in Z_0 \,|\, (z, \hat{P}z)_{Z_0} \le 0\}$ является одномерным квадратичным конусом. Также из (1.2.40) следует, что

$$2\,(\hat{b}, \hat{P}z)_{Z_{-1},Z_1} = (\hat{c}, z)_{Z_0} \; , \quad \forall\, z \in Z_1 \, . \tag{1.2.45}$$

Заметим, что относительно скобки двойственности $(\cdot,\cdot)_{Z_{-1},Z_1}$ мы имеем

$$(\hat{b}, \hat{c})_{Z_{-1},Z_1} = d_0 \le 0 \, . \tag{1.2.46}$$

Вариант строгого неравенства в (1.2.46) относится к случаю строгой разделимости конусов, который рассмотрен в работе ([37]). Рассморим случай $(\hat{b}, \hat{c})_{Z_{-1},Z_1} = 0$.

При выполнении (1.2.44) - (1.2.46) все гипотезы леммы 1.1 выполнены, поэтому справедливы включения (1.2.32) - (1.2.35), (1.2.37), где вектор $r = \hat{c}$ и обобщённый вектор $h = \hat{b}$. Выберем точки $z_1 = (0, \zeta_1) \in \mathcal{V}_1 \times \mathbb{R}$ и $z_2 := (0, \zeta_2) \in \mathcal{V}_1 \times \mathbb{R}$. Очевидно, что

$$(\hat{c}, z_1)_{Z_0} = \zeta_1 \, , \; \hat{A}z_1 = 0 \, , \; (\hat{c}, z_2)_{Z_0} = \zeta_2 \, , \; \hat{A}z_2 = 0 \, . \tag{1.2.47}$$

Определим вдоль произвольного решения $z(\cdot)$ уравнения (1.2.17) функции

$$\hat{V}_i(t) := (z(t) - z_i \, , \; \hat{P}(z(t) - z_i))_{Z_0} \; ,$$

$$\hat{U}_i(t) := (\hat{c}, z(t) - z_i)_{Z_0} \, , \; i = 1, 2 \, ,$$

и введём множество

$$\mathscr{G} := \{z \in Z_1 \,|\, (z-z_i, \hat{P}(z-z_i))_{Z_0} \le 0\,,\ i=1,2\,,\ (\hat{c}, z)_{Z_0} \in [\zeta_2, \zeta_1]\}\,. \quad (1.2.48)$$

Так как выполнены (1.2.44) и (1.2.37), то множество $\mathscr{G}$ выпукло и ограничено. Покажем, что $\mathscr{G}$ положительно инвариантно для решений уравнения (1.2.17). Для этого мы применим лемму 1.2 для временного интервала $[t_0, \infty)$, функций $k(t) \equiv 2\lambda$, $v_i(t) = \hat{V}_i(t)$, $u_i(t) = \hat{U}_i(t)$ и чисел $\varkappa_1 = w_1$, $\varkappa_2 = w_2$. Из (1.2.40) следует, что для $i = 1, 2$, $t_0 \le s \le t$, вдоль решения $z(t)$ и $w(t) = (\hat{c}, z(t))_{Z_0}$

$$\begin{aligned} &\hat{V}_i(\tau)\,|_s^t + 2\,\lambda \int_s^t \hat{V}_i(\tau) d\tau \\ &\le -\int_s^t [\kappa_1(w(\tau) - \zeta_i) - \,(\phi(\tau, w(\tau)) + \beta_i)]\,(w(\tau) - \zeta_i) d\tau \\ &+ \int_s^t (g(\tau) - \beta_i)(w(\tau) - \zeta_i) d\tau\ . \end{aligned} \quad (1.2.49)$$

Воспользовавшись **(A.1.7)**, мы заключаем, что для $i = 1, 2$ и всех $t \ge s \ge t_0$ таких, что

$$\begin{aligned} &w(\tau) \in [\zeta_2, \zeta_1], \tau \in [s, t], \\ &\int_s^t [\kappa_1(w(\tau) - \zeta_i) - (\phi(\tau, w(\tau)) + \beta_i)](w(\tau) - \zeta_i)\, d\tau \ge 0 \\ \text{и}\quad &\int_s^t (g(\tau) - \beta_i)\,(w(\tau) - \zeta_i)\, d\tau \le 0\ . \end{aligned} \quad (1.2.50)$$

Таким образом, из (1.2.49) и (1.2.50) следует, что для $i = 1, 2$ и $t \ge s \ge t_0$ мы имеем

$$\hat{V}_i(\tau)\,|_s^t + 2\lambda \int_s^t \hat{V}_i(\tau) d\tau \le 0\ ,$$

то есть, функции $t \mapsto \hat{V}_i(t) + 2\lambda \int_0^t \hat{V}_i(\tau)\, d\tau$ не возрастают. Получили, что условие 3) леммы 4 из [37] выполнено. В силу $z(t_0) \in \mathscr{G}$, условие 4) леммы также выполнено.

Далее, через $\mathbb{T}_i, i = 1, 2, 3, 4$ мы будем обозначать множества, которые определены в лемме 1.2. Из (1.2.35) следует, что если $t \in \mathbb{T}_1$, тогда $z(t) = z_1$. Таким образом, из (1.2.16) и (1.2.29) следует, что

$$\dot{w}(t) = d_0[\phi(t, w(t)) + g(t)] < 0\ . \tag{1.2.51}$$

Аналогично можно показать, что $w(t)$ не возрастает в окрестности $\mathbb{T}_2$.

Из (1.2.35) и равенства $(\hat{b}, \hat{c})_{Z_{-1},Z_1} = 0$ следует, что для $t \in \mathbb{T}_3$ мы имеем $z(t) = z_1$, и в силу (1.2.48) и **(A.1.7)** имеем

$$\begin{aligned}\dot{\hat{U}}_1(t) =&(\dot{z}(t), \hat{c})_{Z_{-1},Z_1} = (\hat{A}z(t) + \hat{b}\,[\phi(t, w(t)) + g(t)], \hat{c})_{Z_{-1},Z_1}\\ =&(\hat{b}, \hat{c})_{Z_{-1},Z_1}[\phi(t, w_1) + g(t)] < 0\ .\end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что $\hat{U}_2(t)$ не возрастает вблизи $\mathbb{T}_4$.

Таким образом, мы проверили все предположения леммы 1.2. Следовательно, $\mathscr{G}$ положительно инвариантно. Остаётся показать включение (1.2.39). Пусть $z = (0, w) \in \mathcal{V}_1 \times \mathbb{R}$, где $w \in [w_2, w_1]$. Так как $(\hat{c}, z)_{Z_0} = w$, то вложение (1.2.39) верно, если

$$(z - z_i\,,\ \hat{P}(z - z_i))_{Z_0} \leq 0\ , \quad i = 1, 2\,. \tag{1.2.52}$$

Из (1.2.35) и (1.2.47) следует, что для выполнения (1.2.52) достаточно, чтобы из $\hat{A}z = 0$ вытекало $(z, \hat{P}z)_{Z_0} \leq 0$. Но последнее неравенство следует из (1.2.41), так как

$$2\,\lambda(z, \hat{P}z)_{Z_0} \leq -\kappa_1(\hat{c}, z)^2_{Z_0} \leq 0\ .$$

$\square$

1.3. Однофазовая задача нагрева стержня

Рассмотрим сначала однофазовую задачу нагрева стержня, когда тепловой поток действует через нижнюю границу как показано на рисунке 1.1.

Рис. 1.1. Нагрев стержня.

Рассматривается стержень длины 1; x обозначает расстояние от верхнего края до точки на стержне. Распространение тепла внутри стержня описывается уравнением теплопроводности

$$\theta_t = \delta_1 \theta_{xx} - \delta_2 \theta, \qquad x \in [0,1], t > 0, \qquad (1.3.53)$$

где δ_1 - положительный коэффициент теплопроводности, δ_2 - положительный коэффициент оттока тепла, θ - температура. При этом в уравнении (1.3.53) $-\delta_2 \theta$ можно интерпретировать как охлаждение вдоль стержня.

Граничные условия заданы в виде

$$\theta_{x_{|x=0}} = 0, \theta_{x_{|x=1}} + \delta_3\theta_{|x=1} = \delta_4[\phi(t,w) + g(t)], \qquad t > 0, \quad (1.3.54)$$

$$\dot{w} = \int_0^1 \theta(x,t)k(x)dx + \delta_5[\phi(t,w) + g(t)], \qquad x \in (0,1), \ t > 0, \quad (1.3.55)$$

$$\phi(t,w) = w - \delta_6 w^3, \qquad t > 0, \quad (1.3.56)$$

где $\delta_3, \delta_4 \in \mathbb{R}, \delta_5 < 0, \delta_6 \geq 0$ - параметры системы, w - мощность теплового источника, k - некоторая непрерывная скалярная неотрицательная функция, g - непрерывная скалярная функция, ϕ - гладкая функция.

Условие (1.3.54) можно интерпретировать как индукционный нагрев, действующий на стержень, который можно рассматривать как управляемый параметр, а $\phi(t,w) = w - \delta_6 w^3$ - нелинейность типа Дуффинга.

В начальный момент времени распределение температуры в стержне известно. Его можно задать равенством

$$\theta(x,0) = \theta_0(x), \qquad x \in [0,1]. \quad (1.3.57)$$

Замечание 1.4. *Для уравнения теплопроводности (1.3.53) более общие граничные условия могут иметь вид*

$$\alpha_1\theta_x(0,t) = \alpha_2[f_1(t) - \theta(0,t)], \qquad t > 0, \quad (1.3.58)$$

$$\alpha_3\theta_x(1,t) = \alpha_4[f_2(t) - \theta(1,t)], \qquad t > 0, \quad (1.3.59)$$

где α_1, α_3 - положительные коэффициенты теплопроводности, α_2, α_4 - коэффициенты теплообмена между греющей средой и металлом, $f_1(t)$ и $f_2(t)$ - температуры греющей среды соответственно с одной и с другой стороны от пластины.

Граничные условия (1.3.58) и (1.3.59) могут также носить более сложный характер, точнее учитывающий природу внешнего теплообмена тела с греющей средой. Например, если во внешнем теплообмене помимо конвективного существенную роль играет еще и лучистый теплообмен (что в основном имеет место при высоких температурах), то в правые части уравнений (1.3.58), (1.3.59) необходимо добавить новые члены, учитывающие лучистый теплообмен по закону Стефана-Больцмана:

$$\alpha_1\theta_x(0,t) = \alpha_2[f_1(t) - \theta(0,t)] + c_1\{[f_1(t)]^4 - [\theta(0,t)]^4\}, \quad t > 0, \quad (1.3.60)$$

$$\alpha_3\theta_x(1,t) = \alpha_4[f_2(t) - \theta(1,t)] + c_2\{[f_2(t)]^4 - [\theta(1,t)]^4\}, \quad t > 0, \quad (1.3.61)$$

где c_1 и c_2 также некоторые положительные параметры.

Таким образом мы рассматриваем следующую задачу:

$$\theta_t = \delta_1\theta_{xx} - \delta_2\theta, \qquad x \in (0,1),\ t > 0, \quad (1.3.62)$$

$$\theta_{x_{|x=0}} = 0, \theta_{x_{|x=1}} + \delta_3\theta_{|x=1} = \delta_4[\phi(t,w) + g(t)], \qquad t > 0, \quad (1.3.63)$$

$$\theta_{|t=0} = 0, \qquad x \in (0,1), \quad (1.3.64)$$

$$\dot{w} = \int_0^1 \theta(x,t)k(x)dx + \delta_5[\phi(t,w) + g(t)], \qquad x \in (0,1),\ t > 0, \quad (1.3.65)$$

$$\phi(t,w) = w - \delta_6 w^3, \qquad t > 0, \quad (1.3.66)$$

где параметры системы были определены выше.

Запишем (1.3.62)-(1.3.64) в виде обыкновенного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве

$$\dot{\nu} = A_0\nu + B_0[\phi(t,w) + g(t)], \quad (1.3.67)$$

$$\dot{w} = C_0\nu + d_0[\phi(t,w) + g(t)]. \quad (1.3.68)$$

Введем пространства

$$\mathcal{V}_1 := W^{1,2}(0,1), \qquad \mathcal{V}_0 := L^2(0,1), \qquad \mathcal{V}_{-1} = \mathcal{V}_1^* \tag{1.3.69}$$

Скалярное произведение в пространстве $\mathcal{V}_1$ определим следующим образом:

$$(\nu,\vartheta)_1 := \int_0^1 [\nu\vartheta + \nu_x\vartheta_x]dx, \qquad \nu,\vartheta \in \mathcal{V}_1 \tag{1.3.70}$$

Оператор $A_0 : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_{-1}$ действует как

$$(A_0\nu,\vartheta) = -\int_0^1 [\delta_1\nu'(x)\vartheta'(x) + \delta_2\nu(x)\vartheta(x)]dx. \tag{1.3.71}$$

Оператор $B_0 : \mathbb{R} \to \mathcal{V}_{-1}$ представлен следующим образом:

$$(B_0\xi,\nu) = \delta_1\xi\nu(1), \qquad \xi \in \mathbb{R},\ \nu \in \mathcal{V}_1, \tag{1.3.72}$$

а оператор $C_0 : V_0 \to \mathbb{R}$ выглядит как

$$C_0\nu := \int_0^1 k(x)\nu(x)dx, \qquad \nu \in \mathcal{V}_1. \tag{1.3.73}$$

Проверим условия теоремы 1.2 для нашей системы.

Для начала определим, в каком смысле понимается вариационное решение для рассматриваемой задачи.

Пара функций $(\theta(x,t), w(t))$ называется слабым решением (1.3.62)-(1.3.64) на $(0,T)$, если $\theta(\cdot;t) \in W^{1,2}(0;1)$, $w, \dot{w} \in L^2(0,T)$,

$$\int_0^T \{\int_0^1 [\theta\eta_t - (\delta_1\theta_x\eta_x + \delta_2\theta\eta)]dx + \delta_1\delta_3[\phi(t,w) + g(t)]\eta(1,t)\}dt = 0, \tag{1.3.74}$$

$$\int_0^T \{w(t)\zeta(t) + (\int_0^1 \theta(x,t)k(x)dx + \delta_4[\phi(t,w) + g(t)])\zeta(t)\}dt = 0, \tag{1.3.75}$$

для любых тестовых функций $\eta(x,t)$, $\eta(x,0) = \eta(x,1) = 0$ и $\zeta(t)$, $\zeta(0) = \zeta(T) = 0$.

Далее для простоты будем считать, что $k(x) \equiv 1, \delta_1 = 1, \delta_4 = 1, \delta_5 = -1$. Также обозначим $\xi(t) := \phi(t, w(t)) + g(t)$ - выход системы. Построим передаточную функцию. Для этого применим к уравнению (1.3.62) преобразование Лапласа по временной переменной. Тогда мы получим следующее линейное однородное уравнение второго порядка

$$p\tilde{\theta} = \tilde{\theta}'' - \delta_2\tilde{\theta}, \tag{1.3.76}$$

$$\tilde{\theta}'_{|x=0} = 0, \tilde{\theta}'_{|x=1} + \delta_3\tilde{\theta}_{|x=1} = \tilde{\xi}, \tag{1.3.77}$$

где $\tilde{\theta}(x,p) = \mathcal{L}(\theta(x,t)) := \int_0^\infty e^{-pt}\theta(x,t)dt$ - преобразование Лапласа функции $\theta(x,t)$, а $\tilde{\xi}(p),\ p \in \mathcal{C}$ - преобразование Лапласа функции $\xi(t)$. Здесь мы использовали свойство преобразования Лапласа $\mathcal{L}(\theta_t(x,t)) = p\tilde{\theta}(x,p) - \theta(x,0)$.

Общее решение уравнения (1.3.76)–(1.3.77) выглядит следующим образом

$$\tilde{\theta}(x,p) = C_1 e^{\sqrt{p+\delta_2}x} + C_2 e^{-\sqrt{p+\delta_2}x}. \tag{1.3.78}$$

Подставляя общее решение в первое уравнение из (1.3.77), получаем:

$$\tilde{\theta}'_{|x=0} = (C_1 - C_2)\sqrt{p+\delta_2} = 0. \tag{1.3.79}$$

Следовательно, $C_1 = C_2 = C$. Далее, подставляя общее решение во второе уравнение из (1.3.77), получаем:

$$\begin{aligned} &\tilde{\theta}'_{|x=1} + \delta_3\tilde{\theta}_{|x=1} = \\ &\quad = C\sqrt{p+\delta_2}e^{\sqrt{p+\delta_2}} - C\sqrt{p+\delta_2}e^{-\sqrt{p+\delta_2}} + \delta_3(Ce^{\sqrt{p+\delta_2}} + Ce^{-\sqrt{p+\delta_2}}) = \tilde{\xi}. \end{aligned} \tag{1.3.80}$$

Отсюда

$$C = \frac{\tilde{\xi}}{2(\sqrt{p+\delta_2}\sinh(\sqrt{p+\delta_2}) + \delta_3\cosh(\sqrt{p+\delta_2}))}, \tag{1.3.81}$$

а решение уравнения (1.3.76)–(1.3.77)

$$\tilde{\theta}(x,p) = \frac{\cosh(\sqrt{p+\delta_2})x}{\sqrt{p+\delta_2}\sinh(\sqrt{p+\delta_2}) + \delta_3\cosh(\sqrt{p+\delta_2})}\tilde{\xi}. \tag{1.3.82}$$

Тперь, применив преобразование Лапласа к уравнению (1.3.66) и подставив в получившееся выражение $\tilde{\theta}(x,p)$, получаем

$$p\tilde{w} = \frac{\tilde{\xi}}{\sqrt{p+\delta_2}\sinh(\sqrt{p+\delta_2}) + \delta_3\cosh(\sqrt{p+\delta_2})}\int_0^1 \cosh(\sqrt{p+\delta_2})xdx + \delta_4\tilde{\xi}. \tag{1.3.83}$$

Отсюда

$$\tilde{w} = (\frac{1}{p}\frac{\sinh(\sqrt{p+\delta_2})}{\sqrt{p+\delta_2}\sinh(\sqrt{p+\delta_2}) + \delta_3\cosh(\sqrt{p+\delta_2})} + \frac{1}{p}\delta_4)\tilde{\xi}, \tag{1.3.84}$$

и, следовательно, передаточная функция имеет вид

$$\chi(p) = \frac{\sinh(\sqrt{p+\delta_2})}{\sqrt{p+\delta_2}\sinh(\sqrt{p+\delta_2}) + \delta_3\cosh(\sqrt{p+\delta_2})}. \tag{1.3.85}$$

Заметим, что при $\delta_3 = 0$ вид передаточной функции преобразуется к $\chi(p) = \frac{1}{p+\delta_2}$. Рассмотрим этот случай и проверим предположения теоремы 1.2 (в случае $\delta_3 \neq 0$ условия теоремы могут быть проверенны численно).

Предположим, что

$$|g(t)| < \frac{2}{3\sqrt{3\delta_5}}, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{1.3.86}$$

$$\text{и } \kappa_2 = \phi'(r_1), \quad \kappa_3 = 1. \tag{1.3.87}$$

Тогда выполняется условие (**A.1.7**). При $\lambda \in (0, \delta_2)$ выполнено условие (**A.1.3**). Подставим точный вид передаточной функции $\chi(p)$ в частотное условие и получим неравенство

$$\lambda^2 - \delta_2\lambda + \kappa_1 \leq 0. \tag{1.3.88}$$

Если оно выполнено, то автоматически выполняется частотное условие (**A.1.6**). Можно заключить, что если выполнено $\delta_2^2 \geq 4\kappa_1$, то автоматически выполняется (**A.1.3**)-(**A.1.6**).

Покажем, что κ_1 удовлетворяет неравенству $\delta_2^2 \geq 4\kappa_1$. Выберем r_1 и r_2 следующим образом:

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{3\delta_5}} - \alpha, \qquad r_2 = \frac{1}{\sqrt{3\delta_5}} + \alpha, \tag{1.3.89}$$

где α - столь малое положительное число, что выполнено неравенство

$$(\phi(t,w) - \phi(t,r_i))(w - r_i) \leq \frac{\alpha^2}{4}(w - r_i)^2, \tag{1.3.90}$$

$$-\phi(t,r_1) < g(t) < \phi(t,r_2). \tag{1.3.91}$$

Из этого соотношения видно, что выполнено (**A.1.7**), где $\kappa_1 = \frac{\alpha^2}{4}$, $\beta_1 = -\phi(t,r_1)$ и $\beta_2 = \phi(t,r_2)$.

Таким образом, все условия теоремы 1.2 для нашей системы выполнены, а следовательно для нее существует замкнутое, положительно инвариантное и выпуклое множество, удовлетворяющее условию (1.2.39).

1.4. Эволюционные уравнения с периодической нелинейностью

В этом разделе будем рассматривать эволюционные системы, где нелинейность является периодической относительно части пространственных переменных функцией.

Рассмотрим гильбертову тройку пространств $Y_1 \subset Y_0 \subset Y_{-1}$, которая вводится аналогично тому, как она введена в первом разделе.

Пусть $A : Y_1 \to Y_{-1}$ линейный непрерывный оператор, имеющий ноль, как собственное число, b – вектор из Y_{-1}, c – вектор из Y_0. Определим операторы $C \in \mathcal{L}(Y_0, \mathbb{R})$ и $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, Y_{-1})$ следующим образом:

$$Cy = (c, y)_0, \;\; \forall y \in Y_0, \quad B\xi = \xi b, \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}. \tag{1.4.92}$$

Определим также нелинейность $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая является непрерывной периодической функцией с периодом ζ.

Рассмотрим задачу Коши для эволюционного вариационного уравнения ([31])

$$\begin{aligned} &\dot{y}(t) = Ay(t) + B\phi(Cy(t)), \\ &y(0) = y_0 \in Y_0. \end{aligned} \tag{1.4.93}$$

Функция $y \in \mathcal{W}(T_1, T_2; Y_1, Y_{-1}) \cap C(T_1, T_2; Y_0)$ называется решением (1.4.93) на (T_1, T_2), если $y(0) = y_0$ и уравнение (1.4.93) выполнено в вариационном смысле (1.1.13).

В дальнейшем будем предполагать что для решения (1.4.93) выполнены свойства существования и единственности решения.Также будем предполагать в дальнейшем что $\lambda > 0$ некоторое фиксированное число. Введем некоторые предположения.

(A.1.9) Для любого $T > 0$ и любого $f \in L^2(0, T; Y_1)$ задача

$$\dot{y} = (A + \lambda I)y + f(t), \;\; y(0) = y_0 \tag{1.4.94}$$

корректно поставлена, т. е. для произвольного $y_0 \in Y_0, f \in L^2(0, T; Y_{-1})$ существует единственное решение $y \in \mathcal{W}(0, T; Y_1, Y_{-1})$, удовлетворяющее (1.4.94) в том смысле что

$$(\dot{y}, \eta)_{-1,1} = ((A + \lambda I)y, \eta)_{-1,1} + (f(t), \eta)_{-1,1}, \;\; \forall \eta \in Y_1, \text{ для п. в. } t \in [0, T]$$

и зависящее непрерывно от начальных данных, т. е.

$$\|y(\cdot)\|^2_{\mathcal{W}(0,T;Y_1,Y_{-1})} \le c_1 \|y_0\|_0^2 + c_2 \|f\|^2_{2,-1}, \tag{1.4.95}$$

где $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ некоторые константы.

(A.1.10) Пара $(A + \lambda I, B)$ L^2-управляема ([17]), т. е. для произвольного $y_0 \in Y_0$ существует управление $\xi(\cdot) \in L^2(0, \infty; \mathbb{R})$ такое что задача

$$\dot{y} = (A + \lambda I)y + B\xi, \quad y(0) = y_0 \tag{1.4.96}$$

корректно поставлена на полуоси $[0, +\infty)$, т. е. существет решение $y(\cdot) \in L^\infty$ с $y(0) = y_0$.

Обозначим через H^c и L^c комплексификацию вещественного линейного пространства H и вещественного линейного оператора L, соответственно, и введем через

$$\chi(p) = C^c(A^c - pI^c)^{-1}B^c, \quad p \in \rho(A^c) \tag{1.4.97}$$

передаточную функцию тройки (A^c, B^c, C^c).

Следующее предположение описывает класс нелинейностей, которые мы будем рассматривать в будущем.

(A.1.11) Предположим, что ϕ принадлежит сектору $M[\kappa_1, \kappa_2]$, т. е.

$$\kappa_1 \le \frac{\phi(w)}{w} \le \kappa_2, \quad w \ne 0. \tag{1.4.98}$$

Следующая теорема связана с постороением конусной сетки.

Теорема 1.3. *Предположим, что с некоторым $\lambda > 0$ выполнены следующие условия для системы (1.4.93)*

1) *Рассмотрим уравнение*

$$\dot{y} = (A + \lambda I)y \tag{1.4.99}$$

в Y_0. Пространство Y_0 может быть разложено на $Y_0 = Y_0^- \oplus Y_0^+$ где

$dimY_0^- = 1$. Обозначим через $y(\cdot, y_0)$ глобальное решение (1.4.99), удовлетворяющее $y(0, y_0) = y_0$. Для любого $y_0 \in Y_0^-$ будем предполагать, что $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t, y_0) = 0$ и для любого $y_0 \in Y_0^+$ будем предполагать, что $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t, y_0) = 0$;

2) Выполнено частотное условие

$$\mathrm{Re}[(1 + \chi(i\omega - \lambda)\kappa_1)^*(1 + \chi(i\omega - \lambda)\kappa_2)] < 0 \ \ \forall \omega \in \mathbb{R}; \qquad (1.4.100)$$

3) $(c, b)_{-1} < 0$.

Тогда система (1.4.93) устойчива по Лагранжу, т. е. любое решение системы (1.4.93) ограничено на $[t_0, +\infty)$.

Доказательство. Пусть $y(\cdot, t_0, y_0)$ - решение системы (1.4.93) с $y(t_0, t_0, y_0) = y_0$. Пусть $d \in Y_1$ - собственная функция оператора A, которая соответствует нулевому собственному числу, такая что $(c, d)_0 = \zeta$.

По теореме Лихтарникова-Якубовича ([17]) существуют оператор $P = P^* \in \mathcal{L}(Y_{-1}, Y_0) \cap \mathcal{L}(Y_0, Y_1)$ и число $\delta > 0$, такие, что

$$2((A + \lambda I)y + B\xi, Py)_{-1,1} + (\kappa_2^{-1}\xi - Cy)(\kappa_1^{-1}\xi - Cy) \le -\delta(\|y\|_1^2 + |\xi|^2) \quad \forall y \in Y_1, \xi \in \mathbb{R}. \qquad (1.4.101)$$

Подставив в (1.4.101) $\xi = 0$, получаем наравенство

$$2((A + \lambda I)y, Py)_{-1,1} + (Cy)^2 \le -\delta\|y\|_1^2 \ \ \forall y \in Y_1. \qquad (1.4.102)$$

В силу неравенства (1.4.102), предположения 1) теоремы, а также наблюдаемости пары $(A+\lambda I, C)$, мы можем использовать обобщенную лемму

Ляпунова ([30]), в силу которой существует разложение $Y_0 = Y_0^+ \oplus Y_0^-$ при $\dim Y_0^- = 1$ такое, что выполняется

$$P_{|Y_0^+} \geq 0 \qquad \text{и} \qquad P_{|Y_0^-} \leq 0\ . \tag{1.4.103}$$

Рассмотрим функцию Ляпунова $V(y) = (y, Py)_0$. Ее производная в силу системы (1.4.93) для п. в. $t \geq t_0$

$$\dot{V}(y(t)) = 2(Ay(t) + B\phi(Cy(t)), Py(t))_0 \tag{1.4.104}$$

Тогда из соотношения (1.4.101) и предположения **(A.1.11)** получаем, что для $v(t) := V(y(t))$, где y - решение (1.4.93) выполнено

$$\frac{d}{dt}v(t) \leq -2\lambda v(t) \ \text{ для п. в. } \ t \geq t_0. \tag{1.4.105}$$

Отсюда, в силу леммы 3.1.1 ([40]), множество $\{y | (y, Py)_0 < 0\}$ является положительно инвариантным для системы (1.4.93).

Из вышесказанного следует что $\mathcal{C} := \{y \in Y_1 | (y, Py)_0 < 0\}$ является положительно инвариантным квадратичным конусом размерности 1.

Легко проверить, что для решений системы (1.4.93) выполнено соотношение

$$y(t, t_0, y_0) - jd = y(t, t_0, y_0 - jd) \ \ \forall t \geq t_o, j \in \mathbb{Z}. \tag{1.4.106}$$

Следовательно внутренность

$$\Omega_j := \{y \in Y_1 | (y - jd, P(y - jd))_0 < 0\} \tag{1.4.107}$$

квадратичного конуса

$$\{y \in Y_1 | (y - jd, P(y - jd))_0 \leq 0\} \tag{1.4.108}$$

является положительно инвариантным множеством.

В силу условия 3) в формулировке теоремы, по лемме 5 ([37]) существует вектор $r \in Y_0$, такой, что

$$\mathrm{int}\mathcal{C} \cap \{y \in Y_1 | (y, r)_0 = 0\} = \emptyset. \qquad (1.4.109)$$

Подставив в (1.4.101) $y = d,\ \xi = 0$, получаем $(d, Pd)_{-1,1} < 0$. Следовательно можно найти такое j, что

$$|(r, y_0)_0| < j|(r, d)_0|, \quad (y_0, Py_0)_0 \mp (y_0, Pd)_0 + j^2(d, Pd)_0 < 0. \qquad (1.4.110)$$

Из вышесказанного следует, что

$$y(t, t_0, y_0) \in \Gamma_j := \Omega_j \cap \Omega_{-j}. \qquad (1.4.111)$$

Теперь покажем, что

$$|(r, y(t, t_0, y_0))_0| < j|(r, d)_0| \;\; t \geq t_0. \qquad (1.4.112)$$

Действительно, если это не так, то существует $\bar{t} > t_0$, такое что $|(r, y(t, t_0, y_0))_0| = j|(r, d)_0|$. А это значит, что для $\alpha = 1$ или $\alpha = -1$ имеем $(y(\bar{t}, t_0, y_0 + \alpha jd), P(y(\bar{t}, t_0, y_0) + \alpha jd))_0 > 0$, что противоречит условию $y(t, t_0, y_0) \in \Gamma_j$.

Теперь покажем ограниченность $y(t, t_0, y_0)$. В силу условия (1.4.109) оператор P может быть представлен в форме $P = M - \tau(r, r)_0$, где M - положительно определенный оператор, а τ положительное число.

Пусть ε будет положительным числом, таким что $M > \varepsilon I$. Для решения $y(t) = y(t, t_0, y_0)$, которое удовлетворяет неравенствам (1.4.111) и

(1.4.112) справедливо

$$\begin{aligned}\varepsilon\|y(t)-jd\|^2 \leq &(y(t)-jd, M(y(t)-jd))_0 \\ =&(y(t)-jd, P(y(t)-jd))_0+\tau|(r,y(t)-jd)_0|^2 \\ <&\tau[2(r,y)_0^2+2j^2(r,d)^2] \\ <&4\tau j^2(r,d)^2\end{aligned} \tag{1.4.113}$$

для $t \geq t_0$, что означает ограниченность $y(\cdot, t_0, y_0)$ на $[t_0, +\infty)$. $\square$

Замечание 1.5. *Эволюционные уравнения (1.4.93) описывают широкий класс дифференциальных уравнений в частных производных с периодическими нелинейностями. Например, можно показать, что уравнение синус-Гордона ([59]) может быть представлено в виде (1.4.93).*

2. Ограниченность решений дважды нелинейных парных эволюционных уравнений и двухфазовой задачи микроволнового нагрева

В данной главе рассматриваются неявные парные эволюционные уравнения с нелинейностями в правой и левой частях ([15], [32]). Для таких уравнений приводятся достаточные условия ограниченности решений. Полученные результаты проверяются для двухфазовой задачи микроволнового нагрева.

2.1. Частотные условия ограниченности решений дважды нелинейного парного эволюционного уравнения

Рассмотрим следующую эволюционную систему, заданную на паре гильбертовых троек $Y_{1,1} \subset Y_{1,0} \subset Y_{1,-1}$ и $Y_{2,1} \subset Y_{2,0} \subset Y_{2,-1}$:

$$\frac{d}{dt}y_1 = A_1 y_1 + B_1(g_1(z_1) + g_2(z_1, z_2)),\ z_1 = C_1 y_1, \tag{2.1.1}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbb{B}_2 y_2) = A_2 y_2 + B_2 \phi_2(z_1, z_2),\ z_2 = C_2 y_2, \tag{2.1.2}$$

$$y_1(0) = y_{01}, y_2(0) = y_{02}, \tag{2.1.3}$$

где $y_i \in Y_{i,1},\ A_i : Y_{i,1} \to Y_{i,-1},\ B_i : \Xi_i \to Y_{i,-1},\ C_i : Y_{i,1} \to Z_i,\ i = 1, 2$ - линейные ограниченные операторы, $\mathbb{B}_2 : Y_{2,1} \to Y_{2,1}$ - нелинейный оператор, $g_1 : Z_1 \to \Xi_1$, $g_2 : Z_1 \times Z_2 \to \Xi_2$, $\phi_2 : Z_1 \times Z_2 \to \Xi_2$ - нелинейные функции, а

Ξ_i и $Z_i,\ i = 1,2$ - некоторые гильбертовы пространства. Такая система называется *дважды нелинейной парной эволюционной системой* ([31], [42]). Важным свойством таких систем является их *гибридность* ([36]). Так первая подсистема может порождаться уравнением гиперболического типа, а вторая - параболического типа.

Определим следующие пространства $Y_1 = Y_{1,1} \times Y_{2,1}$, $Y_0 = Y_{1,0} \times Y_{2,0}$, $Y_{-1} = Y_{1,-1} \times Y_{2,-1}$ со скалярными произведениями

$$((y_1, w_1), (y_2, w_2))_j = (y_1, y_2)_{1,j} + (w_1, w_2)_{2,j}, \quad , y_1 \;\; j = 1, 0, -1$$

и соответствующими нормами. Также пусть $(\cdot,\cdot)_{-1,1}$ будет скобкой двойственности между Y_{-1} и Y_1.

Далее пусть $A := (A_1, A_2) : Y_1 \to Y_{-1},\ B := (B_1, B_2) : \Xi_1 \times \Xi_2 \to Y_{-1}$ и $C := (C_1, C_2) : Y_1 \to Z_1 \times Z_2$ - линейные ограниченные операторы, $\mathbf{B} := (I, \mathbb{B}_2) : Y_1 \to Y_2$ - нелинейный оператор и
$\hat{\phi}(\cdot,\cdot) := (g_1(\cdot) + g_2(\cdot,\cdot), \phi_2(\cdot,\cdot)) : Z_1 \times Z_2 \to \Xi_1 \times \Xi_2$ - некоторая нелинейная функция.

Тогда систему (2.1.1) – (2.1.3) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{B}y) = Ay + B\hat{\phi}(z),\ z = Cy, \tag{2.1.4}$$

$$y(0) = y_0, \tag{2.1.5}$$

где $y = (y_1, y_2),\ z = (z_1, z_2),\ y_0 = (y_{01}, y_{02})$.

Решением (2.1.4) – (2.1.5) будем называть функцию
$y \in \mathcal{W}(T_1, T_2, Y_1, Y_{-1}) \cap C(T_1, T_2; Y_0)$, (где пространство $\mathcal{W}(T_1, T_2, Y_1, Y_{-1})$ вводится аналогично тому, как оно было введено в главе 1) удовлетворяющую уравнению (2.1.4) – (2.1.5) в вариационном смысле. То есть для почти

всех $t \in [T_1, T_2]$ выполнено

$$(\frac{d}{dt}(\mathbf{B}y(t)) - Ay(t) - B\hat{\phi}(z(t)), \eta - y(t))_{-1,1} = 0, \tag{2.1.6}$$

$$\forall \eta \in V_1, z(t) = Cy(t), y(0) = y_0. \tag{2.1.7}$$

Введем следующие предположения.

(A.2.1) Система (2.1.4) – (2.1.5) имеет глобальное слабое решение для любого $y_0 \in Y_1$ (для некторых случаев существование такого решения показано в работах [20] и [15]).

(A.2.2) $Z_1 = \Xi_1 = \Xi_2 = \mathbb{R}$.

(A.2.3) Существуют κ_1, κ_2, $\kappa_1 < \kappa_2$ такие, что для функции

$$\tilde{\phi}_1(z_1, t) := g_1(z_1) + g_2(z_1, z_2(t)),$$

где $z_2(t) = C_2 y_2(t)$ и $y_2(t)$ - решение (2.1.1) – (2.1.3) выполняется

$$\kappa_1 z_1^2 \leq \tilde{\phi}_1(z_1, t) z_1 \leq \kappa_2 z_1^2, \ \forall z_1 \in \mathbb{R}, \, t \geq 0.$$

(A.2.4) Оператор A_1 является *регулярным* ([17]), т. е. для любых $T > 0, y_{10} \in Y_{1,1}, \tilde{y}_{1T} \in Y_{1,1}$ и $f_1 \in L^2(0, T; Y_{1,0})$ решения прямой задачи

$$\frac{d}{dt} y_1 = A_1 y_1 + f_1(t), \ \ y_1(0) = y_{10}, \ \ \text{п. в. } t \in (0, T)$$

и двойственной задачи

$$\frac{d}{dt} \tilde{y}_1 = -A_1^* \tilde{y}_1 + f_1(t), \ \ \tilde{y}_1(T) = \tilde{y}_{1T}, \ \ \text{п. в. } t \in (0, T)$$

строго непрерывны по t по норме порстранства $Y_{1,1}$.

(A.2.5) Пара (A_1, B_1) является L^2-управляемой ([17]), т. е. для произвольного $y_{10} \in Y_{1,0}$ существует управление $\xi_1(\cdot) \in L^2(0, T; Z_1)$ такое, что задача

$$\frac{d}{dt} y_1 = A_1 y_1 + B_1 \xi_1, \ \ y_1(0) = y_{10} \tag{2.1.8}$$

имеет решение y_1 для любого $T > 0$.

(A.2.6) Обозначим через A_1^c, B_1^c и C_1^c комплексификацию операторов A_1, B_1 и C_1, соответственно. введем передаточную функцию системы (2.1.1) - $\chi(p) = C_1^c(A_1^c - pI^c_{Y_{1,1}})^{-1}B_1^c,\ p \in \rho(A_1^c)$ и рассмотрим следующую эрмитову форму:

$$\mathcal{F}(\xi_1, z_1) := \mathrm{Re}(\xi_1 - \kappa_1 z_1)^*(\kappa_2 z_1 - \xi_1),$$

тогда выполнено частотное условие

$$\mathrm{Re}(\kappa_1\chi(i\omega) + I_{\Xi_1})^*\kappa_2\chi(i\omega) + I_{\Xi_1}) \geq 0.$$

(A.2.7) Существует число κ_3 такое, что

$$(\mathbb{B}_2 y_2, A_2 y_2)_{2,1} \leq -\kappa_3\|y_2\|^2_{2,1},\ \forall y_2 \in Y_{2,1}.$$

(A.2.8) Существует число κ_4 такое, что

$$(\mathbb{B}_2 y_2, B_2\tilde{\phi}_2(t, y_2))_{2,1} \leq \kappa_4\|y_2\|^2_{2,1},\ \forall y_2 \in Y_{2,1}, t \geq 0$$

для $\tilde{\phi}_2(t, z_2) = \phi_2(z_1(t), z_2)$.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены предположения* **(A.2.1)** - **(A.2.8)**. *Тогда решения системы (2.1.1) - (2.1.3) ограничены на* $(0, +\infty)$.

Доказательство. С учетом предположений **(A.2.1)** и **(A.2.2)** первая часть системы (2.1.1) - (2.1.3) принимает вид

$$\frac{d}{dt}y_1 = A_1 y_1 + B_1\tilde{\phi}_1(z_1, t),\ z_1 = C_1 y_1, \tag{2.1.9}$$

$$y_1(0) = y_{01}. \tag{2.1.10}$$

Квадратичная форма $\mathcal{F}(\xi_1, z_1)$ из условия **(A.2.6)** описывает нелинейность системы (2.1.9) - (2.1.10). Эта форма является эрмитовой на пространствах, заданных в условии **(A.2.3)**.

Из условий **(A.2.4)**–**(A.2.6)** по теореме Лихтарникова-Якубовича ([17]) существуют оператор $P = P^* \in \mathcal{L}(Y_{1,-1}, Y_0) \cap \mathcal{L}(Y_{1,0}, Y_{1,1})$ и число $\delta > 0$, такие, что

$$2((A + \lambda I)y + B\xi, Py)_{1,1} + (\kappa_2^{-1}\xi - Cy)(\kappa_1^{-1}\xi - Cy) \leq -\delta(\|y\|_1^2 + |\xi|^2)$$
$$\forall y \in Y_1, \xi \in \mathbb{R}. \tag{2.1.11}$$

Подставив в (2.1.11) $\xi = 0$, получаем наравенство

$$2((A + \lambda I)y, Py)_{1,1} + (Cy)^2 \leq -\delta\|y\|_1^2 \ \ \forall y \in Y_1. \tag{2.1.12}$$

Используя обобщенную лемму Ляпунова ([30]) получаем, что существует разложение $Y_{1,0} = Y_{1,0}^+ \oplus Y_{1,0}^-$ при $\dim Y_{1,0}^- = 1$ такое, что выполняется

$$P_{|Y_{1,0}^+} \geq 0 \qquad \text{и} \qquad P_{|Y_{1,0}^-} \leq 0 \ . \tag{2.1.13}$$

Рассмотрим функцию Ляпунова $V(y_1) = (y_1, Py_1)_{1,1}$. Ее производная в силу системы (2.1.1) - (2.1.3)

$$\dot{V}(y_1(t)) = 2(Py_1(t), A_1 y_1(t) + B_1\tilde{\phi}_1(y_1(t), t))_{1,1} \tag{2.1.14}$$

Тогда из соотношения (2.1.11) и предположения **(A.2.3)** получаем, что для $V(y_1(t))$, где y_1 - решение (2.1.9) - (2.1.10) выполнено

$$\frac{d}{dt}V(y_1(t)) \leq 0 \ \text{ для п. в. } \ t \geq t_0. \tag{2.1.15}$$

Отсюда получаем:

$$\|y_1\|_1 \leq c_1\|y_{01}\|_1 + c_2 \leq c_3, \tag{2.1.16}$$

где коэффициенты $c_1,\ c_2$ зависят только от $A_1,\ B_1,\ C_1,\ \kappa_1,\ \kappa_2$.

Теперь рассмотрим вторую часть системы (2.1.1) - (2.1.3), которая имеет вид

$$\frac{d}{dt}(\mathbb{B}_2 y_2) = A_2 y_2 + B_2 \tilde{\phi}_2(t, z_2),\ z_2 = C_2 y_2 \tag{2.1.17}$$

$$y_2(0) = y_{02}. \tag{2.1.18}$$

Рассмотрим функционал Ляпунова следующего вида:

$$V(y_2) = (\mathbb{B}_2 y_2, \mathbb{B}_2 y_2)_2. \tag{2.1.19}$$

Теперь посчитаем производную в силу системы:

$$\frac{d}{dt}V(y_2) = (\mathbb{B}_2 y_2, \frac{d}{dt}\mathbb{B}_2 y_2)_2 = (\mathbb{B}_2 y_2, A_2 y_2 + B_2 \tilde{\phi}_2(t, z_2))_2 = \tag{2.1.20}$$

$$(\mathbb{B}_2 y_2, A_2 y_2)_2 + (\mathbb{B}_2 y_2, B_2 \tilde{\phi}_2(t, z_2))_2. \tag{2.1.21}$$

Из предположений **(A.2.7)** и **(A.2.8)** следует что $\frac{d}{dt}V(y_2(t)) < 0$, откуда, в свою очередь, следует ограниченность $\|y_2\|_2$.

$\square$

2.2. Сведение двухфазовой задачи нагрева к дважды нелинейному парному эволюционному уравнению

В наши дни широко распространен метод стерилизации пищевых продуктов, основанный на использовании электромагнитного излучения. Процесс стерилизации при помощи микроволн имеет ряд преимуществ, по сравнению с другими методами стерилизации. Так данный метод в значительной степени сохраняет содержание протеинов и витаминов, а так же вкусовые качества продукта. Итоговый продукт не содержит консервантов и может храниться при комнатной температуре в течении значительного времени с момента обработки. Кроме того важным преимуществом является высокая скорость обработки продукта с использоваием микроволнового излучения.

Однако, при нагреве продуктов питания микроволнами возникает ряд проблем. Вероятно одной из самых важных проблем является проблема контроля за температурой нагрева. Многие продукты чувствительны к повышенным температурам и при достижении некоторого критического значения теряют свои питательные и вкусовые свойства. Поэтому важной задачей является получение таких условий, при которых температура нагреваемого матерала будет ограничена. Распределение температуры сильно зависит от того, насколько глубоко микроволны могут проникать в материал, что в свою очередь зависит от некоторых параметров материала, таких как магнитная проницаемость, электрическая проницаемость, электрическая проводимость и т. д. В данном разделе мы рассмотрим задачу микроволнового нагрева материала с фазовым переходом и преведем условия ограниченности ее решений.

а) Опишем формальную постановку задачи микроволнового нагрева. Предположим, что имеется генератор микроволнового излучения, который действует непосредственно на наш материал. Электромагнитное излучение, приходящее от источника, описывается уравнениями Максвелла ([11]). Они представляют из себя уравнения, которые устанавливают взаимодействие электрического и магнитного полей в среде. Если среда является однородной, то уравнения, учитывающие необходимые свойства среды, можно записать в более компактной форме.

Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с C^1-гладкой границей $\partial\Omega$. Уравнения Максвелла для неоднородной среды выглядят следующим образом

$$\begin{aligned} &\varepsilon(x)E_t(x,t) + \sigma(x)E(x,t) = \mathrm{rot}H(x,t), && (x,t) \in Q_T, \\ &\mu(x)H_t(x,t) + \mathrm{rot}E(x,t) = 0, && (x,t) \in Q_T \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

где $T \in \mathbb{R}_+$, $Q_T = \Omega \times (0,T]$, $E(x,t)$ и $H(x,t)$ - векторы напряженности электрического и магнитного поля, соответственно, $\varepsilon(x), \mu(x)$ и $\sigma(x)$ - диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость и электрическая проводимость, соответсвенно.

Дополним эти уравнения начально-краевыми условиями. Пусть $S_T = \partial\Omega \times (0,T]$. Тогда граничные и начальные условия для задачи (2.2.22) будем рассматривать в виде

$$\begin{aligned} &\nu(x) \times E(x,t) = \nu(x) \times G(x,t), && (x,t) \in S_T, \\ &E(x,0) = E_0(x), && x \in \Omega, \\ &H(x,0) = H_0(x), && x \in \Omega, \end{aligned} \tag{2.2.23}$$

где $\nu(x)$ - внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$ в точке x, $G(x,t)$ - векторная функция, которая описывает внешнее поле генератора излучения, $E_0(x), H_0(x)$ - некоторые заданные векторные функции.

Под действием электромагнитного излучения в материале появляется источник тепла, который описывается законом Джоуля-Ленца ([11])

$$q(x,t) = j(x,t) \cdot E(x,t), \qquad x \in \Omega, t \in [0,T], \tag{2.2.24}$$

где q - мощность выделения тепла в единице объёма, j - вектор плотности электрического тока в момент времени t в точке x.

Далее, если применить закон Ома о плотности тока $j(x,t) = \sigma(x)E(x,t)$, то из уравнения (2.2.24) мы получаем

$$q(x,t) = \sigma(x) \cdot |E(x,t)|^2, \qquad x \in \Omega, t \in [0,T]. \tag{2.2.25}$$

Запишем уравнение теплопроводности, которое описывает распространение тепла. Пусть $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ заданная функция, такая что выполняются:

1. $k(s) \in [k_0, k_1],\ \forall s \in \mathbb{R}$, где $0 < k_0 < k_1 < \infty$,
2. $k(\cdot)$ непрерывна при $s \neq m$, причем $k(m+0) - k(m-0) > 0$, где m - некоторая точка вещественной прямой.

b) Введем задачу со свободной границей ([15]). Для этого рассмотрим процесс с двумя фазами, где состояние i-ой фазы характеризуется функцией $\theta_i(x,t),\ i = 1,2$, где $\theta_1(x,t) < m$ (твердая фаза), а $\theta_2(x,t) > m$ (жидкая фаза).

Пусть неизвестная граница имеет вид $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где фазе θ_i отвечает граница Γ_i. Уравнения, описывающие эволюцию фаз, имеют вид

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} - \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_l}(k(\theta_1)\frac{\partial}{\partial x_l}\theta_1) = f, \qquad \theta_1 < m, \tag{2.2.26}$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} - \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_l}(k(\theta_2)\frac{\partial}{\partial x_l}\theta_2) = f, \qquad \theta_2 > m, \tag{2.2.27}$$

где, учитывая источник тепла в материале,

$$f(x,t) = \sigma(x)|E(x,t)|^2,\ x \in \Omega,\ t \in [0,T].$$

Граничные условия принимают следующий вид.

Пусть $S := \cup_{t \in (0,T)} \Gamma(t)$. На S выполняется:

1. $\theta_1 = \theta_2 = m$,

2. $\beta \cos(\nu, t) - \sum_{l=1}^{3} k(m+0) \frac{\partial \theta_2}{\partial x_l} \cos(\nu, x_l) +$
   $+ \sum_{l=1}^{3} k(m-0) \frac{\partial \theta_1}{\partial x_l} \cos(\nu, x_l) = 0$,

где $\beta > 0$ заданная константа, ν - нормаль к $\Gamma(t)$, направленная внутрь второй фазы.

Начальные условия принимают следующий вид:

1. $\theta_1(x, 0) = \theta_{01}(x)$, $\theta_{01}(x) < m$,

2. $\theta_2(x, 0) = \theta_{02}(x)$, $\theta_{02}(x) > m$.

Для дальнейшего изучения преобразуем уравнения (2.2.26) – (2.2.27). Для этого введем функцию (преобразование Кирхгофа)

$$K(\theta) := \int_0^\theta k(s) ds, \tag{2.2.28}$$

а так же новые неизвестные функции $\Theta_i = K(\theta_i), i = 1, 2$. Тогда уравнения (2.2.26) – (2.2.27) примут вид

$$\frac{1}{k(K^{-1}(\Theta_i))} \frac{\partial \Theta_i}{\partial t} - \triangle \Theta_i = f, \; i = 1, 2, \; (x, t) \in Q_T, \tag{2.2.29}$$

причем $\Theta_1 < M := K(m)$, $\Theta_2 > M$.

Граничные условия принимают вид

1. $\Theta_i = K(g_i)$ на Σ_i, $i = 1, 2$,

2.
   - $\Theta_1 = \Theta_2 = M$ на S,
   - $\beta \cos(n, t) + \frac{\partial \Theta_1}{\partial n} - \frac{\partial \Theta_2}{\partial n} = 0$, где $\frac{\partial}{\partial n}$ нормальная производная к S, направленная внутрь второй фазы.

Определим функцию $b(s)$ из следующих условий:

1. $\frac{d}{ds}b(s) = \frac{1}{k(K^{-1}(s))}, \ s \neq M,$

2. $b(M+0) - b(M-0) = \beta,$

Заметим, что b определяется с точностью до аддитивной константы.

Введем также новую функцию

$$\theta(x,t) = \begin{cases} \Theta_1(x,t), & \text{в фазе 1}, \\ \Theta_2(x,t), & \text{в фазе 2}, \\ M, & \text{на } S. \end{cases} \tag{2.2.30}$$

Тогда уравнение, описывающее изменение температуры будет иметь вид

$$b(\theta)_t = \triangle\theta + \sigma(\theta)v_t^2, \qquad (x,t) \in Q_T. \tag{2.2.31}$$

c) Теперь перейдем к описанию задачи микроволнового нагрева в одномерном случае. Рассмотрим систему состоящую из уравнений Максвелла и уравнения теплопроводности.

$$\varepsilon(x)E_t(x,t) + \sigma(\theta)E(x,t) = \mathrm{rot}H(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{2.2.32}$$

$$\mu(x)H_t(x,t) + \mathrm{rot}E(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in Q_T \tag{2.2.33}$$

$$b(\theta(x,t))_t = \nabla[k(x)\nabla\theta(x,t)] + \sigma(\theta)|E(x,t)|^2 \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{2.2.34}$$

$$\nu(x) \times E(x,t) = \nu(x) \times G(x,t), \qquad (x,t) \in S_T, \tag{2.2.35}$$

$$\theta(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in S_T, \tag{2.2.36}$$

$$E(x,0) = E_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{2.2.37}$$

$$H(x,0) = H_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{2.2.38}$$

$$\theta(x,0) = \theta_0(x), \qquad x \in \Omega. \tag{2.2.39}$$

Введем переменную $W(x,t) = \int_0^t E(x,\tau)d\tau$ и для простоты будем считать что $G(x,t) \equiv 0$. Тогда система (2.2.32)-(2.2.39) примет следующий вид

$$\varepsilon(x)W_{tt} + \sigma(\theta)W_t = \mathrm{rot}(\frac{1}{\mu(x)}(H_0 - \mathrm{rot}W(x,t))) \qquad (x,t) \in Q_T, \qquad (2.2.40)$$

$$\mu(x)H_t(x,t) + \mathrm{rot}E(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in Q_T \qquad (2.2.41)$$

$$b(\theta(x,t))_t = \nabla[k(x)\nabla\theta(x,t)] + \sigma(\theta)|W_t(x,t)|^2 \qquad (x,t) \in Q_T, \qquad (2.2.42)$$

$$\nu(x) \times W_t(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in S_T, \qquad (2.2.43)$$

$$\theta(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in S_T, \qquad (2.2.44)$$

$$W_t(x,0) = E_0(x), \qquad x \in \Omega, \qquad (2.2.45)$$

$$W(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega, \qquad (2.2.46)$$

$$\theta(x,0) = \theta_0(x), \qquad x \in \Omega. \qquad (2.2.47)$$

Предположим, что $Q_T = \{(x,t)|0 < x < 1, 0 < t < T\}$, а E и H определим следующим образом: $E(x,t) = (0, e(x,t), 0)$, $H(x,t) = (0,0,h(x,t))$, где $e(x,t)$ и $h(x,t)$ - некоторые скалярные функции. Тогда система (2.2.40) – (2.2.47) примет вид

$$\varepsilon(x)w_{tt} - (\frac{1}{\mu(x)}w_x)_x + \sigma(\theta)w_t = 0, \qquad (x,t) \in Q_T, \qquad (2.2.48)$$

$$b(\theta)_t - \theta_{xx} = \sigma(\theta)w_t^2 \qquad (x,t) \in Q_T, \qquad (2.2.49)$$

$$w(0,t) = w(1,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \qquad (2.2.50)$$

$$\theta(0,t) = \theta(1,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \qquad (2.2.51)$$

$$w(x,0) = 0, w_t(x,0) = v_0(x), \qquad x \in (0,1), \qquad (2.2.52)$$

$$\theta(x,0) = \theta_0(x), \qquad x \in (0,1). \qquad (2.2.53)$$

Теперь определим, в каком смысле мы понимаем решение задачи (2.2.48)–(2.2.53).

Определение 2.1. *Пара функций* $(w(x,t),\theta(x,t))$ *называется слабым решением системы (2.2.48)–(2.2.53) на промежутке* $[0,T]$, $T>0$, *если* $w\in C^1(0,T;H_0^1(\Omega))$, $\theta\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap C(0,T;L^2(\Omega))$, *а также выполняются следующие интегральные тождества*

$$\int_0^T\int_0^1[-\varepsilon(x)w_t\psi_t+\frac{1}{\mu(x)}w_x\psi_x+\sigma(\theta)w_t]dxdt=\int_0^1\varepsilon(x)w_1(x)\psi(x,0)dx,$$
$$\int_0^T\int_0^1[-b(\theta)\eta_t+\theta_x\eta_x-\sigma(\theta)w_t^2\eta]dxdt=\int_0^1 b(\theta_0)\eta(x,0),$$

для любых тестовых функций $\psi\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap C(0,T;L^2(\Omega))$,
$\forall\eta\in H^1(0,T;H^1(\Omega))$, *таких что* $\psi(x,T)=\eta(x,T)=0$, $\forall x\in\Omega$.

Тогда имеет место следующая теорема существования слабого решения ([43]).

Теорема 2.2. *Пусть выполнено условие*

- $\varepsilon(x),\mu(x)\in L^\infty(\Omega),\exists\sigma_0>0:0\le\sigma(\theta)\le\sigma_0(1+\theta),\forall(x,t,\theta)\in Q_T\times[0,\infty)$

Тогда задача (2.2.48-2.2.53) имеет глобальное (на $\mathbb{R}_+$*) слабое решение.*

В дальнейшем для простоты будем полагать $\varepsilon(x)\equiv 1$ и $\mu(x)\equiv 1$

$$w_{tt}-w_{xx}+\sigma(\theta)w_t=0,\qquad (x,t)\in Q_T,\tag{2.2.54}$$
$$b(\theta)_t-\theta_{xx}=\sigma(\theta)w_t^2\qquad (x,t)\in Q_T,\tag{2.2.55}$$
$$w(0,t)=w(1,t)=0,\qquad t\in[0,T],\tag{2.2.56}$$
$$\theta(0,t)=\theta(1,t)=0,\qquad t\in[0,T],\tag{2.2.57}$$
$$w(x,0)=0,w_t(x,0)=0,\qquad x\in(0,1),\tag{2.2.58}$$
$$\theta(x,0)=\theta_0(x),\qquad x\in(0,1).\tag{2.2.59}$$

Покажем, что решения задачи (2.2.54)–(2.2.59) ограничены. Для этого введем дополнительное предположение:

(A.2.9) Существует такое $a_1 > 0$, что:

$$|b(z)| \leq a_1 |z|, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{2.2.60}$$

(A.2.9) Существует такое $a_2 > 0$, что:

$$|\sigma(z)| \leq a_2 |z|, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{2.2.61}$$

Рассмотрим первую подсистему нашей системы

$$w_{tt} - w_{xx} + \sigma(\theta) w_t = 0, \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{2.2.62}$$

$$w(0,t) = w(1,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{2.2.63}$$

Далее введем следующие обозначения:

$$y(x,t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(x,t) \\ w_t(x,t) \end{pmatrix}, \; y_0(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\xi(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\sigma}(\theta(x)) w_t(x,t) \end{pmatrix}.$$

В последнем выражении мы использовали новую функцию $\bar{\sigma}$, которая появляется из разложения

$$\sigma(\theta) = \sigma_0 + \bar{\sigma}(\theta),$$

где $\sigma_0 > 0$ константа и $\bar{\sigma}(\theta) > 0, \theta > 0$.

Пусть Λ будет самосопряженным положительно определенным оператором, порожденным на $L^2(0,1)$ дифференциальным выражением $\Lambda v = -v_{xx}$ для однородных граничных условий Дирихле.

Рассмотрим пространства $Y_0 = L^2(0,1) \times H_0^1(0,1)$, $Y_1 = H_0^1(0,1)$ и $\Xi = L^2(0,1) \times L^2(0,1)$. Предположим, что норма в Y_0 задается следующим образом $\|(v_1, v_2)\|_0 = \max\limits_{i=1,2} \|v_i\|_{L^2(\Omega)}$ и $(\cdot,\cdot)_0$ - ассоциированное скалярное произведение. Аналогичные норма и скалярное произведение рассматриваются в Ξ. Используя оператор Λ, мы можем определить гильбертову тройку $Y_1 \subset Y_0 \subset Y_{-1}$

$$Y_1 = \mathcal{D}(\Lambda) = H_0^1(0,1) \times H_0^2(0,1),$$

используя норму $\|\cdot\|_1$, порожденную скалярным произведением $(\eta_1, \eta_2)_1 = (\Lambda^{-1}\eta_1, \Lambda^{-1}\eta_2)_0$ для произвольного $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{D}(\Lambda)$.

Скобка двойственности $(\cdot,\cdot)_{-1,1}$ на $Y_{-1} \times Y_1$ вводится как непрерывное продолжение функционала $(\cdot, \eta)_0$ на Y_{-1}. Это процедура была описана в разделе 3.1.

Теперь определим линейные операторы $A : Y_1 \to Y_{-1}$ и $B : \Xi \to Y_{-1}$ через

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\Lambda & -\sigma_0 I \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

Покажем, что пара (A, B) L^2-управляема. Для этого покажем, что спектр A лежит в левой части комплексной плоскости.

Рассмотрим задачу нахождения собственных чисел

$$Av = \alpha v, \tag{2.2.64}$$

где $v = (v_1, v_2)^T$ - собственный вектор, а α - соответствующее собственное число.

Уравнение (2.2.64) может быть записано в форме

$$\begin{cases} v_2 = \alpha v_1, \\ -\Lambda v_1 - \sigma_0 v_2 = \alpha v_2. \end{cases} \tag{2.2.65}$$

Рассмотрим представление

$$v_i = \sum_k c_i^k e_k, \quad i = 1, 2,$$

где α_k - собственные числа оператора Λ, e_k - соответствующие собственные функции и c_i^k - некоторые коэффициенты. Теперь уравнение (2.2.65) эквивалентно новой системе

$$\sum_k c_2^k e_k = \alpha \sum_k c_1^k e_k, \tag{2.2.66}$$

$$-\sum_k \alpha_k c_1^k e_k - \sigma_0 \alpha \sum_k c_2^k e_k = \alpha \sum_k c_2^k e_k. \tag{2.2.67}$$

Из (2.2.66), (2.2.67) следует, что для любого k должно выполняться

$$\alpha^2 + \sigma_0 \alpha + \alpha_k = 0. \tag{2.2.68}$$

Очевидно, что любое α удовлетворяющее (2.2.68) имеет отрицательную вещественную часть, а следовательно, пара (A, B) L^2-управляема.

Рассмотрим квадратичную форму

$$\mathcal{F}(y, \xi) = (y_1, \xi)_\Xi = \int_\Omega y\xi dx = \int_0^1 \bar{\sigma}(\theta) w_t^2 dx.$$

Теперь проверим частотное условие в соответствии с частотной теоремой Лихтарникова-Якубовича для вырожденного случая ([17]). Предположим, что $\{\alpha_k\}$ - собственные числа Λ и $\{e_k\}$ - соответствующие собственные функции, которые формируют базис пространства $L^2(0, 1)$. Используя это свойство, мы можем написать

$$w(x,t) = \sum_k w^k(t) e_k, \xi(x,t) = \sum_k \xi^k(t) e_k,$$

где $w^k(t)$ и $\xi^k(t)$ - соответствующие коэффициенты Фурье.

Предположим, что $\mathcal{F}^c$ эрмитово расширение $\mathcal{F}$ на $Y_1^c \times \Xi^c$. Рассмотрим $\mathcal{F}^c(y,\xi)$ для $i\omega y = A^c y + B^c \xi, \omega \in \mathbb{R}, \xi \in \Xi^c$, т. е. форму

$$\mathcal{F}^c(y,\xi) = (\Pi_0(i\omega)\xi, \xi). \tag{2.2.69}$$

Предположим, что $\tilde{w}^k$ и $\tilde{\xi}^k$ - преобразование Фурье w^k и ξ^k, соответственно. Из (2.2.69) следует, что

$$(\Pi_0(i\omega)\tilde{\xi}, \tilde{\xi}) = \sum_k (\Pi_0^k(i\omega)\tilde{\xi}^k, \tilde{\xi}^k). \tag{2.2.70}$$

Для того чтобы вычислить $\Pi_0(i\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$ применим преобразование Фурье к (2.2.62). В результате мы получим

$$-\omega^2 \tilde{w}^k(i\omega) + i\omega\sigma_0 \tilde{w}^k(i\omega) - \alpha_k \tilde{w}^k(i\omega) + \tilde{\xi}^k(i\omega) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{2.2.71}$$

Из (2.2.71) мы имеем

$$\tilde{w}^k(i\omega) = \chi(i\omega, \alpha_k)\tilde{\xi}^k(i\omega),$$

где

$$\chi(i\omega, \alpha_k) = (\omega^2 - i\omega\sigma_0 + \alpha_k)^{-1}.$$

Из этой формулы и из (2.2.70) следует, что

$$(\Pi_0^k(i\omega)\tilde{\xi}^k, \tilde{\xi}^k) = \mathrm{Re}(\tilde{w}_t^k \tilde{\xi}^k) = \mathrm{Re}(i\omega\chi)|\tilde{\xi}^k(i\omega)|^2.$$

Следовательно, мы имеем представление

$$\Pi_0^k(i\omega) = \mathrm{Re}(i\omega\chi),$$

и нам осталось показать, что

$$\mathrm{Re}(i\omega\chi) \le 0, \quad \omega \in \mathbb{R}. \tag{2.2.72}$$

Неравенство (2.2.72) означает, что

$$\mathrm{Re}\left(\frac{i\omega}{\omega^2 - i\omega\sigma_0 + \alpha_k}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{(\alpha_k\omega + \omega^3)i - \omega^2\sigma_0}{(\alpha_k + \omega^2)^2 + \omega^2\sigma_0^2}\right) \le 0,$$

т. е. $-\omega^2\sigma_0 \le 0, \quad \forall\omega \in \mathbb{R}$. Последнее неравенство выполняется, так-как $\sigma_0 > 0$.

Далее проверим условие **(A.2.7)**. В данном случае оно принимает вид

$$\int_0^1 b(\theta)\theta_{xx}dx \le -\kappa_3(\int_0^1 \theta^2 dx + \int_0^1 \theta_x^2 dx).$$

В силу **(A.2.9)** имеем

$$\int_0^1 b(\theta)\theta_{xx}dx \le a_1 \int_0^1 \theta\theta_{xx}dx = -a_1 \int_0^1 \theta_x^2 dx$$

откуда очевидно, что условие **(A.2.7)** выполнено.

Аналогично, условие **(A.2.8)** принимает для нашей системы вид

$$\int_0^1 b(\theta)c(t)\sigma(\theta)dx \le \kappa_4(\int_0^1 \theta^2 dx + \int_0^1 \theta_x^2 dx).$$

В силу **(A.2.9)** и **(A.2.10)** имеем

$$\int_0^1 b(\theta)c(t)\sigma(\theta)dx \le a_1 a_2 c(t) \int_0^1 \theta^2 dx,$$

откуда следует выполнение условия **(A.2.8)**.

Таким образом, мы показали, что все условия теоремы 2.1 выполнены, и, следовательно, решения нашей системы ограничены.

3. Построение проекторов для инвариантных множеств эволюционных систем и их применение в однофазовой задаче микроволнового нагрева

В этой главе рассматривается класс эволюционных вариационных уравнений в оснащенном гильбертовом пространстве (то есть гильбертовой тройке пространств). Вариационные уравнения рассматриваются как общие системы управления с обратной связью, состоящие из линейной и нелинейной частей. Распространенным методом качественного исследования таких систем является частотная теорема для уравнений эволюционного типа ([17, 18]). Используя некоторые свойства передаточной функции линейной части данной системы, частотная теорема дает достаточные условия существования функционалов Ляпунова для диссипативности, глобальной устойчивости или неустойчивости нелинейных систем ([16, 18]). В этой главе мы расширим частотный подход на случай исследования множества аменабельных решений и глобальных аттракторов, генерируемых вариационными уравнениями. Также рассматривается применение данного метода для изучения однофазовой задачи микроволнового нагрева.

3.1. Системы управления с обратной связью

Предположим, что Y_0 вещественное гильбертово пространство с $(\cdot, \cdot)_0$ и $\|\cdot\|_0$ в качестве скалярного произведения и нормы, соответственно. Также предположим, что на Y_0 существует неограниченный самосопряженный оператор Λ с всюду плотной областью определения $\mathcal{D}(\Lambda)$ такой, что

$$(\Lambda y, y)_0 \geq \|y\|_0^2, \quad \forall y \in \mathcal{D}(\Lambda).$$

Рассмотрим в Y_0 новое скалярное произведение

$$(y, \eta)_{-1} := (\Lambda^{-1} y, \Lambda^{-1} \eta)_0, \quad \forall y, \eta \in Y_0$$

и пусть Y_{-1} будет пополнением Y_0 по отношению к норме $\|\cdot\|_{-1}$, полученной из этого скалярного произведения, то есть пространство $(Y_{-1}, \|\cdot\|_{-1})$ - полное банахово пространство. Очевидно, что Y_{-1} является вещественным гильбертовым пространством. Обозначим скалярное произведение и норму Y_{-1} через $(\cdot,\cdot)_{-1}$ и $\|\cdot\|_{-1}$, соответственно. Предположим, что $Y_1 \subset Y_0$ - это всюду плотное гильбертово пространство, являющееся непрерывным вложением в Y_0. Следовательно, мы имеем плотное и непрерывное вложение $Y_1 \subset Y_0 \subset Y_{-1}$, то есть гильбертову тройку. Из вышесказанного следует, что для $y \in Y_1$ и $\eta \in Y_0$ мы имеем

$$|(\eta, y)_0| = |(\Lambda^{-1}\eta, \Lambda y)_0| \leq \|\Lambda^{-1}\eta\|_0 \|\Lambda y\|_0 = \|\eta\|_{-1} \|y\|_1.$$

Расширяя по непрерывности функционал $(\cdot, y)_0$ на Y_{-1}, мы получаем билинейную форму $(\cdot,\cdot)_{-1,1}$ (скобку двойственности) на $Y_{-1} \times Y_1$, совпадающую с $(\cdot,\cdot)_0$ на $Y_0 \times Y_1$ и удовлетворяющую $|(\eta, y)_{-1,1}| \leq \|\eta\|_{-1} \|y\|_1$, $\forall \eta \in Y_{-1}, y \in Y_1$.

Замечание 3.1. *Гильбертова тройка пространств может быть получена с использованием генератора полугруппы. А именно, пусть Y_0 - гильбертово пространство, описанное выше, и пусть $A : \mathcal{D}(A) \to Y_0$ - генератор C_0-полугруппы на Y_0. Тогда определим множество $Y_1 := \mathcal{D}(A)$. Здесь $\mathcal{D}(A)$ - область определения A, которая является плотной и непрерывно* *вложенной в Y_0, так как A - генератор. Обозначим через $\rho(A)$ резольвентное множество оператора A. Спектр A, который является дополнением $\rho(A)$, обозначим через $\sigma(A)$. Если мы определим произвольное но фиксированное $\beta \in \rho(A) \cap \mathbb{R}$ для любого $y, \eta \in Y_1$, величину*

$$(y, \eta)_1 := ((\beta I - A)y, (\beta I - A)y)_0,$$

тогда множество Y_1, снабженное скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_1$ и соответствующей нормой $\|\cdot\|_1$, будет гильбертовым пространством (различные числа β дадут разные, но эквивалентные нормы). Обозначим через Y_{-1} гильбертово пространство, которое является пополнением Y_0 по отношению к норме $\|y\|_{-1} := \|(\beta I - A)^{-1}y\|_0$ и которое имеет соответствующее скалярное произведение

$$(y, \eta)_{-1} := ((\beta I - A)^{-1}y, (\beta I - A)^{-1}\eta)_0, \forall y, \eta \in Y_{-1}.$$

Следовательно, мы имеем включения $Y_0 \subset Y_0 \subset Y_{-1}$, которые являются плотными и непрерывными вложениямиш.

Предположим, что Ξ и W два вещественных гильбертовых пространства со скалярными произведениями $(\cdot, \cdot)_\Xi$, $(\cdot, \cdot)_W$ и нормами $\|\cdot\|_\Xi$, $\|\cdot\|_W$, соответственно, и

$$A : Y_1 \to Y_{-1}, \quad B : \Xi \to Y_{-1}, \quad C : Y_{-1} \to W$$

линейные непрерывные операторы. Определим нелинейность следующим образом: $\phi : W \to \Xi$.

Рассмотрим задачу Коши для эволюционных вариационных уравнений

$$
\begin{aligned}
&\dot{y}(t) = Ay(t) + B\phi(Cy(t)), \\
&y(0) = y_0 \in Y_0.
\end{aligned}
\tag{3.1.1}
$$

Вариационная интерпретация (3.1.1) означает, что

$$
(\dot{y}(t) - Ay(t) - B\xi(t), \eta - y(t))_{-1,1} = 0,
$$
$$
\forall \eta \in Y_1,\ w(t) = Cy(t),\ \xi(t) = \phi(w(t)),\ y(0) = y_0.
$$

Функция $y \in \mathcal{W}(T_1, T_2, Y_1, Y_{-1}) \cap C(T_1, T_2; Y_0)$, где пространство $\mathcal{W}(T_1, T_2, Y_1, Y_{-1})$ было введено в первой главе, называется решением (3.1.1) на (T_1, T_2) если $y(0) = y_0$ и уравнение (3.1.1) выполняется для п. в. $t \in (T_1, T_2)$.

Для того чтобы иметь свойство существования и единственности решения (3.1.1), введем следующие предположения.

(A.3.1) Нелинейность $\phi : W \to \Xi$ удовлетворяет следующему свойству: оператор $\mathbb{A} := -A - B\phi(C\cdot) : Y_1 \to Y_{-1}$ является монотонным и семинепрерывным, таким что выполняется неравенство

$$
\|\mathbb{A}y\|_{-1} \le c_1 \|y\|_1 + c_2,\ \ \forall y \in Y_1, \tag{3.1.2}
$$

где $c_1 > 0$ и $c_2 \in \mathbb{R}$ некоторые константы.

Так же предположим, что

$$
(\mathbb{A}y, y)_{-1,1} \ge c_3 \|y\|_1^2 + c_4,\ \ \forall y \in Y_1 \tag{3.1.3}
$$

где $c_3 > 0$ и $c_4 \in \mathbb{R}$ снова константы. Тогда из ([20, 27]) следует, что для произвольного $y_0 \in Y_0$ существует единственное вариационное решение $y \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; Y_1) \cap C(\mathbb{R}_+; Y_0),\ \dot{y} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; Y_1)$ с $y(0) = y_0$ (см. теорему 1.1).

Кроме того, решение (3.1.1) удовлетворяет неравенствам

$$\|y\|_{L^2(0,T;Y_1)} \le g_1(\|y_0\|_0) \ \text{ и}$$

$$\|y\|_{C(0,T;Y_0)} \le g_2(\|y_0\|_0),$$

где $g_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, i = 1, 2$, некотрые непрывные и монотонно возрастающие функции.

3.2. Частотный метод построения проектора

Основным инструментом построения функционалов Ляпунова является следующая версия частотной теоремы Лихтарникова-Якубовича ([17], [18]). Для формулировки этой теоремы необходимы некоторые свойства регулярности линейной части системы ((3.1.1)), которые мы приведем в начале этого раздела.

Предположим, что в дальнейшем $\lambda > 0$ - некоторое фиксированное число.

(A.3.2) Для любого $T > 0$ и лобой функции $f \in L^2(0, T; Y_1)$ задача

$$\dot{y} = (A + \lambda I)y + f(t), \ \ y(0) = y_0 \tag{3.2.4}$$

является корректно поставленной, т. е. для произвольного $y_0 \in Y_0$, $f \in L^2(0, T; Y_{-1})$ существует единственное решение $y \in \mathcal{W}(0, T; Y_1, Y_{-1})$, удовлетворяющее (3.2.4) в том смысле, что

$$(\dot{y}, \eta)_{-1,1} = ((A + \lambda I)y, \eta)_{-1,1} + (f(t), \eta)_{-1,1}, \ \ \forall \eta \in Y_1, \text{ для п. в. } t \in (0, T)$$

и является непрерывно зависящим от данных, т. е.

$$\|y(\cdot)\|^2_{\mathcal{W}(0,T,Y_1,Y_{-1})} \le c_1\|y_0\|_0^2 + c_2\|f\|^2_{2,-1}, \tag{3.2.5}$$

где $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ - некоторые константы.

Замечание 3.2 ([17])**.** *Пусть* $y(\cdot)$ *- решение задачи (3.2.4) для* $f(t) \equiv 0$ *и* $\lambda = 0$. *Введем оператор* $G(\cdot)$ *следующим образом:* $G(t)y_0 = y(t), y_0 \in Y_0$. *По предположению* $y(\cdot) \in \mathcal{W}(0, T, Y_1, Y_{-1})$, *т. е.* $G(t)y_0 \in Y_1$ *для почти всех* $t \in (0, T)$ *для произвольного* $T > 0$. *Из теоремы вложения Соболева следует, что:*

1. $G(t) \in \mathcal{L}(Y_0, Y_0), \ \ t \in (0, T)$*;*

2. *Отображение* $t \mapsto G(t)y_0$ *является непрерывным как отображение* $(0, T) \to Y_0$*;*

3. $G(0) = I$, *где* I *- тождественный оператор на* Y_0*;*

4. $G(t + s) = G(t)G(s) = G(s)G(t), \ \forall t, s \in (0, T), t + s \in (0, T)$.

Следовательно, $G(t)$ *строго непрерывная полугруппа линейных ограниченных операторов на гильбертовом пространстве* Y_0. *Оператор* $A \in \mathcal{L}(Y_1, Y_{-1})$ *может быть рассмотрен как расширение на пространство* Y_1 *генератора* $A : \mathcal{D}(A) \in Y_0 \to Y_0$ *полугруппы.*

(A.3.3) Оператор $A + \lambda I \in \mathcal{L}(Y_1, Y_{-1})$ является *регулярным* ([17]), т. е. для любых $T > 0, y_0 \in Y_1, \psi_T \in Y_1$ и $f \in L^2(0, T; Y_0)$ решения прямой задачи

$$\dot{y} = (A + \lambda I)y + f(t), \ \ y(0) = y_0, \ \ \text{п. в. } t \in (0, T)$$

и двойственной задачи

$$\dot{\psi} = -(A + \lambda I)^* \psi + f(t), \ \ \psi(T) = \psi_T, \ \ \text{п. в. } t \in (0, T)$$

строго непрерывны по t по норме порстранства Y_1.

Здесь $(A+\lambda I)^* \in \mathcal{L}(Y_{-1}, Y_0)$ обозначает сопряженный к $A+\lambda I$ оператор, т. е.

$$((A+\lambda I)y, \eta)_{-1,1} = (y, (A+\lambda I)^*\eta)_{-1,1}, \quad \forall y, \eta \in Y_1.$$

Заметим, что предположение **(A.3.3)** выполняется если вложение $Y_1 \subset Y_0$ вполне непрерывно ([17]).

(A.3.4) Пара $(A+\lambda I, B)$ является L^2-управляемой ([17]), т. е. для произвольного $y_0 \in Y_0$ существует управление $\xi(\cdot) \in L^2(0,\infty;\Xi)$ такое, что задача

$$\dot{y} = (A+\lambda I)y + B\xi, \quad y(0) = y_0 \tag{3.2.6}$$

является корректно поставленной на полуоси $[0,+\infty)$, т. е. существует решение $y(\cdot) \in L^\infty$ с $y(0) = y_0$.

Легко увидеть, что пара $(A+\lambda I, B)$ является L^2-управляемой, если эта пара является *экспоненциально устойчивой*, т. е. если существует оператор $K \in \mathcal{L}(Y_0, \Xi)$ такой, что решение $y(\cdot)$ задачи Коши $\dot{y} = (A+\lambda I + BK)y,\ y(0) = y_0$, экспонениципально убывает при $t \to \infty$, т. е.

$$\exists c > 0, \ \ \exists \varepsilon > 0 : \|y(t)\|_0 \le ce^{-\varepsilon t}\|y_0\|_0, \ \ \forall t \ge 0. \tag{3.2.7}$$

Обозначим через H^c и L^c комплексификацию вещественного линейного пространства H и вещественного линейного оператора L, соответственно, и введем как и раньше передаточную функцию тройки (A^c, B^c, C^c), определяемую следующим образом

$$\chi(p) = C^c(pI^c - A^c)^{-1}B^c, \ \ p \in \rho(A^c). \tag{3.2.8}$$

Следующее предположение описывает класс монотонных нелинейностей, которые мы будем рассматривать в дальнейшем. Заметим, что это предположение является обобщением хорошо известного условия сектора из теоремы об абсолютной устойчивости ([16]).

(A.3.5) Предположим, что $\Xi = W$ и существует оператор $M = M^* \in \mathcal{L}(\Xi, \Xi)$ такой, что

$$
\begin{aligned}
&(\phi(Cy_1) - \phi(Cy_2), M(\phi(Cy_1) - \phi(Cy_2)))_\Xi \\
&\qquad\qquad \le (\phi(Cy_1) - \phi(Cy_2), C(y_1 - y_2))_\Xi, \quad \forall y_1, y_2 \in Y_1.
\end{aligned} \tag{3.2.9}
$$

В нашей первой теореме мы получим частотные условия для существования функционалов Ляпунова V, которые описывают асимптотическое поведение нормы разницы двух произвольных решений системы (3.1.1).

Теорема 3.1. *Предположим, что выполнены условия* **(A.3.2)** – **(A.3.5)** *и существует число $\lambda > 0$ такое, что выполняется следующее условие:*

1) *Пара $(A + \lambda I, B)$ экспоненциально устойчива;*

2) *Пространство состояний Y_0 системы*

$$\dot{y} = (A + \lambda I)y \tag{3.2.10}$$

может быть разложено следующим образом $Y_0 = Y_0^- \oplus Y_0^+$, где $dim Y_0^- =: k < \infty$. Обозначим через $y(\cdot, y_0)$ (глобальное) решение (3.2.10), удовлетворяющее $y(0, y_0) = y_0$. Тогда для любого $y_0 \in Y_0^-$ выполнено $\lim\limits_{t \to -\infty} y(t, y_0) = 0$ и для любого $y_0 \in Y_0^+$ выполнено $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t, y_0) = 0$;

3) *Выполнено частотное условие*

$$\operatorname{Re}(\chi(i\omega - \lambda)\xi, \xi)_{\Xi^c} - (\xi, M^c \xi)_{\Xi^c} < 0, \tag{3.2.11}$$

для всех $\omega \in \mathbb{R}$ с $i\omega \notin \sigma(A^c)$ и всех $\xi \in \Xi^c$, $\xi \ne 0$.

Тогда существует вещественный оператор

$P = P^* \in \mathcal{L}(Y_{-1}, Y_0) \cap \mathcal{L}(Y_0, Y_1)$ *отрицательно определенный на* Y_0^- *и положительно определенный на* Y_0^+, *и существует число* $\varepsilon > 0$ *такое, что с*

$V(y) := (y, Py)_0,\ \forall y \in Y_0$ *неравенство*

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}V(y_1(t) - y_2(t)) + 2\lambda V(y_1(t) - y_2(t)) \\ &\qquad \le -2\varepsilon \|y_1(t) - y_2(t)\|_1^2 \ \text{для п. в. } t \ge 0 \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

выполнено для любых двух решений y_1 *и* y_2 *задачи (3.1.1).*

Доказательство. Предположим, что y_1 и y_2 два произвольных решения (3.1.1). Тогда $y := y_1 - y_2$ решение задачи

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + B\psi(t) \tag{3.2.13}$$

с $\psi(t) := \xi_1(t) - \xi_2(t)$, где $\xi_i(t) = \phi(Cy_i(t)),\ t \in \mathbb{R}_+,\ i = 1, 2.$

По предположению **(A.3.5)** мы имеем с $\sigma_i(t) = Cy_i(t),\ i = 1, 2,$

$$(\xi_1(t) - \xi_2(t), M(\xi_1(t) - \xi_2(t)))_\Xi \le (\xi_1(t) - \xi_2(t), \sigma_1(t) - \sigma_2(t))_\Xi \ \text{для п. в. } t \ge 0. \tag{3.2.14}$$

Из условий 1) и 3), в нашем случае применима теорема Лихтарникова-Якубовича ([17]) с эрмитовой формой

$$\mathcal{F}^c(y, \xi) = \mathrm{Re}(\xi, C^c y)_{\Xi^c} - (\xi, M^c \xi)_{\Xi^c} \tag{3.2.15}$$

на $Y_1^c \times \Xi^c$. Из этой теоремы следует, что существуют вещественный оператор $P = P^* \in \mathcal{L}(Y_{-1}, Y_0) \cap \mathcal{L}(Y_0, Y_1)$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что выполняется неравенство

$$\begin{aligned} &((A + \lambda I)y + B\xi, Py)_{-1,1} + (\xi, Cy)_\Xi - (\xi, M\xi)_\Xi \\ &\qquad \le -2\varepsilon[\|y\|_1^2 + \|\xi\|_\Xi^2] \quad \forall y \in Y_1, \xi \in \Xi. \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Для $\xi = 0$ мы имеем из (3.2.16) неравенство

$$((A + \lambda I)y, Py)_{-1,1} \leq -2\varepsilon \|y\|_1^2, \quad \forall y \in Y_1. \tag{3.2.17}$$

Из (3.2.17) следует по теореме Ляпунова ([30]), что оператор P отрицательно определен на Y_0^- и положительно определен на Y_0^+.

Подставляя в (3.2.16) $y = y_1 - y_2$, $\xi = \xi_1 - \xi_2$ и используя тот факт, что по **(A.3.5)** выполнено неравенство

$$(\xi, Cy)_\Xi - (\xi, M\xi)_\Xi \geq 0$$

вдоль решений $y_1(\cdot)$, $y_2(\cdot)$ и ассоциированных функций $\xi_i = \phi(Cy_i)$, мы получаем из (3.2.16) с $V(y) := (y, Py)_0$ неравенство

$$\frac{d}{dt}V(y_1(t) - y_2(t)) + 2\lambda V(y_1(t) - y_2(t))$$
$$\leq -2\varepsilon \|y_1(t) - y_2(t)\|_1^2, \quad \text{для п. в. } t \geq 0.$$

□

3.3. Построение гомеоморфных отображений из множества аменабельных решений на подмножество конечномерного пространства

При предположениях из раздела 3.1 эволюционное уравнение (3.1.1) порождает полудинамическую систему $\{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ на фазовом пространстве Y_0. Напомним здесь кратко определение. Здесь, как и раньше $Y_1 \subset Y_0 \subset Y_{-1}$ - гильбертова тройка пространств.

Определение 3.1. *Пусть* $\{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *семейство отбражений в пространстве* Y_0. *Пара* $(\{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, Y_0)$ *называется полудинамической системой, если выполнено*

1. *$\varphi^0 = Id_{Y_0}$ - тождественное отображение на Y_0;*

2. *$\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$ для любых $s, t \in \mathbb{R}_+$;*

3. *для любого $t \in \mathbb{R}_+$ $\quad \varphi^t(\cdot) : Y_0 \to Y_0$ является непрерывным отображением.*

Если рассматривать моменты времени $t \in \mathbb{R}$, то система называется *динамической.*

Предположим, что существует множество $\mathcal{A} \subset Y_0$. Напомним определение (Y_1, Y_0)-аттрактора, а также введем связанное с ним понятие множества аменабельных решений ([55], [1]).

Определение 3.2. *Множество $\mathcal{A} \subset Y_0$ называется (Y_1, Y_0)-аттрактором относительно полудинамической системы $\{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, если:*

1. *множество $\mathcal{A}$ - замкнуто и ограничено;*

2. *множество $\mathcal{A}$ инвариантно относительно отображений φ^t, то есть $\varphi^t(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$;*

3. *для любого ограниченного в Y_1 множества $B \subset Y_1$ выполняется $dist(\varphi^t(B), \mathcal{A}) \to 0$ при $t \to \infty$.*

Определение 3.3. *Предположим, что $\kappa > 0$ - некоторое число. Решение $y(\cdot)$ задачи (3.1.1) называется аменабельным, если $y(\cdot)$ задано на $\mathbb{R}$ и существует число $\tau \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall\, t \leq \tau$ и $\int_{-\infty}^{\tau} e^{2\kappa t} \|y(t)\|_0^2 dt < +\infty$.*

Для случая ОДУ и дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом понятие аменабельных решений было введено Р. А. Смитом ([55]). Обозначим множество всех аменабельных решений уравнения (3.1.1) (*аменабельное множество*) через $\mathfrak{A}$. Заметим, что в том случае, когда динамическая или полудинамическая система имеет (Y_1, Y_0)-аттрактор, этот аттрактор может быть использован в качестве множества аменабельных решений. Одним из способов показать существование такого аттрактора является применение частотной теоремы о компактной диссипативности для полудинамических систем. Из свойства компактной диссипативности легко вывести существование глобального (Y_1, Y_0)-аттрактора $\mathcal{A}$ ([54]).

Наша цель использовать свойства теоремы 3.1 для построения гомеоморфного отображения из множества аменабельных решений на подмножество конечномерного подпространства. Заметим, что мы не используем какой-либо информации о фрактальной размерности $\mathfrak{A}$.

Теорема 3.2. *Предположим, что выполнены условия теоремы 3.1 с параметрами* $\lambda > 0$ *по отношению к разложению* $Y_0 = Y_0^- \oplus Y_0^+$, *где* $\mathrm{dim} Y_0^- = k$. *Тогда существует линейный оператор* $\Pi : Y_0 \to Y_0^-$ *такой, что* $\Pi : \mathfrak{A} \to \Pi\mathfrak{A}$ *является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Предположим, что y_1 и y_2 два решения на $\mathfrak{A}$, т. е. мы можем предположить, что $y_1(t), y_2(t) \in \mathfrak{A}$, $t \in \mathbb{R}$. Введем функцию V аналогично тому, как это сделано в теореме 3.1.

Из свойств аменабельных решений, а так же из (3.2.12) следует, что

$$\frac{d}{dt}[e^{2\lambda t} V(y_1(t) - y_2(t))] \le -2\varepsilon e^{2\lambda t} \|y_1(t) - y_2(t)\|_1^2, \text{ для п. в. } t \le \tau. \quad (3.3.18)$$

Интегрирование (3.3.18) по интервалу $[s, \tau]$ дает

$$\begin{aligned} e^{2\lambda\tau} V(y_1(\tau) - y_2(\tau)) &\le e^{2\lambda s} V(y_1(s) - y_2(s)) \\ &\quad - 2\varepsilon \int_s^\tau e^{2\lambda t} \|y_1(t) - y_2(t)\|_1^2 dt, \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

так как $e^{\lambda t}\|y_1(t)\|_1$ и $e^{\lambda t}\|y_2(t)\|_1$ лежат в $L^2(-\infty,\tau;\mathbb{R})$ функция $e^{\lambda t}\|y_1(t)-y_2(t)\|_1$ также лежит в $L^2(-\infty,\tau;\mathbb{R})$. Отсюда следует, что существует последовательность $s_i \to -\infty$ при $j\to\infty$, удовлетворяющая

$$\|y_1(s_j)-y_2(s_j)\|_1 e^{\lambda s_j} \to 0.$$

Подставляя в (3.3.19) $s=s_j$ и предполагая что $j\to\infty$, мы имеем

$$e^{2\lambda\tau}V(y_1(\tau)-y_2(\tau)) \le -2\varepsilon\int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{2\lambda t}\|y_1(t)-y_2(t)\|_1^2 dt \le 0. \tag{3.3.20}$$

Теперь выберем обратимое линейное отображение $S: Y_1\to Y_1$ такое, что функция V имеет форму

$$V(y) = -\|u\|_1^2 + \|v\|_1^2$$

где $\binom{u}{v} = S^{-1}y,\ y\in Y_1$ и $(u,v)\in Y_0^-\oplus Y_0^+$.

Определим отображение Π через $\Pi y := u \in Y_0^-$.

$\square$

Замечание 3.3. *Построение гомеоморфизма* $\Pi: \mathcal{A}\to\Pi\mathcal{A}$ *тесно связано с вопросом существования конечного числа определяющих функционалов. Напомним следующее определение, введенное О. А. Ладыженской ([33, 9]). Предположим, что вариационная система (3.1.1) порождает полудинамическую систему* $\{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *в фазовом пространстве* $Y_1\subset Y_0$. *Также предположим, что эта полудинамическая система имеет аттрактор* $\mathcal{A}$ *и конечномерный проектор* Π *со следующими свойствами: Для любых двух траекторий* γ_1,γ_2 *на аттракторе* $\mathcal{A}$ *условие* $\Pi\gamma_1=\Pi\gamma_2$ *влечет, что* $\gamma_1=\gamma_2$. *В этом случае мы говорим, что число определяющих функционалов для полудинамической системы* $\{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *конечно. Отсюда следует, что при условиях теоремы 3.2 существует конечное число* *определяющих функционалов. Свойства квадратичной формы $V(y)$ из доказательства теоремы 3.2 связаны с конструкциями, используемыми в работах ([34, 50, 52, 51]).*

Далее в этом разделе мы приведем конечномерную версию теоремы 3.2

Рассмотрим систему

$$\dot{y} = Ay + B\phi(Cy(t)) \,, \tag{3.3.21}$$

где A, B и C матрицы порядка $n \times n, n \times 1$ и $1 \times n$, соответственно. Введем так же как это было сделано в (3.2.8) передаточную функцию $\chi(p) = C(pI - A)^{-1}B$ для $p \in \mathbb{C} : \det(pI - A) \neq 0$.

Пеусть нелинейная функция $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям существования глобального решения для системы (3.3.21). Условие **(A.3.5)** для нелинейности ϕ превратится в конечномерном случае в следующее условие :

(A.3.5)' Существуют параметры $\kappa_1 < 0 < \kappa_2$ такие, что

$$\kappa_1(w_1 - w_2)^2 \leq [\phi(w_1) - \phi(w_2)](w_1 - w_2) \leq w_2(w_1 - w_2)^2 \quad \forall\, w_1, w_2 \in \mathbb{R}. \tag{3.3.22}$$

Теорема 3.3. *Предположим, что для ϕ из (3.3.21) выполнено условие* **(A.3.5)'** *и существует число $\lambda > 0$ такое, что выполнено:*

1. *Пара $(A + \lambda I, B)$ экспоненциально устойчива*

2. *Матрица $A+\lambda I$ имеет ровно два собственных числа с положительной вещественной частью и $(n - 2)$ собственных числа с отрицательной вещественной частью;*

3. $\mathrm{Re}\,[1+\kappa_1\chi(i\omega-\lambda)]\,[1+\kappa_2\chi(i\omega-\lambda)]^*>0,\ \forall\,\omega\in\mathbb{R}.$

Тогда существует $n\times n$ матрица $P=P^*$, имеющая 2 отрицательных и $(n-2)$ положительных собственных числа, и число $\varepsilon>0$ такие, что выполнено

$$2\,y^*P[(A+\lambda I)y+B\psi]+(\kappa_2 Cy-\psi)(\psi-\kappa_1 Cy)\le -\,\varepsilon\big[\,\|y\|^2+|\psi|^2\,\big]$$
$$\forall\,y\in\mathbb{R}^n,\ \forall\,\psi\in\mathbb{R}\,. \tag{3.3.23}$$

Выберем регулярную матрицу $S=S^*$ порядка $n\times n$ такую, что

$$S^*PS=\begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & 0 \\ & & +1 & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & +1 \end{pmatrix} \tag{3.3.24}$$

и определим линейное отображение $\Pi\,:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^2$ через

$$\Pi\,y:=u,\quad \text{где}\ \begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=S^{-1}y,\quad u\in\mathbb{R}^2,\ v\in\mathbb{R}^{n-2}. \tag{3.3.25}$$

Тогда если $\mathfrak{A}$ множество аменабельных решений задачи (3.3.21), отображение

$$\Pi\,:\mathfrak{A}\to\Pi\,\mathfrak{A} \tag{3.3.26}$$

является гомеоморфизмом.

Доказательство схоже с доказательством теоремы 3.2. Отличие заключается в том, что в данном случае нужно использовать частотную теорему для конечномерных систем из ([26]).

Геометрическая интерпретация теоремы 3.3 для $\mathbf{n=3}$

Предположим, что $P = P^*$ - 3×3 матрица из (3.3.23), имеющая 2 отрицательных и одно положительное собственное число, и $V(y) = y^* P y$ ассоциированная квадратичная форма. Из (3.3.23) следует, что для любых двух решений $y_1(\cdot), y_2(\cdot)$ задачи (3.3.21) мы имеем

$$V(y_1(t) - y_2(t)) \leq 0, \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.3.27}$$

Введем множество $\mathcal{K} := \{y \in \mathbb{R}^3 | V(y) \leq 0\}$. Тогда $\mathcal{C} := \mathbb{R}^3 \backslash \mathcal{K}$ - 1-мерный конус (рис. 3.1). Пусть l будет направлением главной оси $\mathbb{R}^3 \backslash \mathcal{K}$ с $l^* P l > 0, E$ будет ортогональной к l плоскостью, проходящей через начало координат, и Π будет ортогональной проекцией на E.

Предположим, что $y_1(\cdot), y_2(\cdot)$ два произвольных различных решения задачи (3.3.21) в $\mathbb{R}^3$, т. е. $y_1(t) \neq y_2(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Из (3.3.27) мы имеем $V(y_1(t) - y_2(t)) \leq 0$, $\forall\, t \geq 0$, т. е. $y_1(t) - y_2(t) \in \mathcal{K}, \quad \forall\, t \geq 0$.

Тогда

$$\Pi\, y_1(t) \neq \Pi\, y_2(t), \quad \forall\, t \geq 0\ . \tag{3.3.28}$$

Предположим противное, т. е. предположим, что

$$\exists\, t_0 \geq 0 : \Pi\, y_1(t_0) = \Pi\, y_2(t_0)\ . \tag{3.3.29}$$

Из (3.3.29) следует, что $\Pi\, [y_1(t_0) - y_2(t_0)] = 0$, т. е. точка $y_1(t_0) - y_2(t_0)$ проецируется под действием Π в 0. Но тогда существует $k \neq 0$ такое, что $y_1(t_0) - y_2(t_0) = kl$. Следовательно, мы имеем $V(kl) = k^2 l^* P l > 0$, противоречие с тем фактом, что $V(y_1(t_0) - y_2(t_0)) \leq 0$.

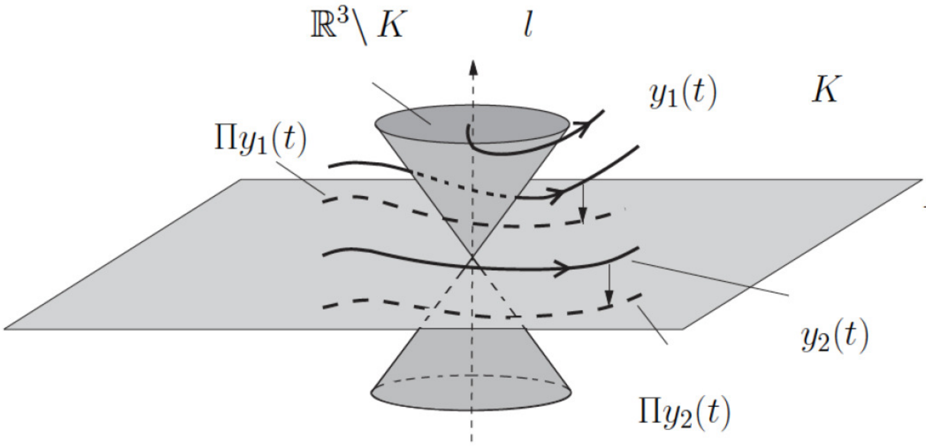

Рис. 3.1. Построение конуса

3.4. Построение редуцированной системы по измерениям

В этом разделе мы опишем алгоритм построения гомеоморфного отображения Π в смысле раздела. 3.3. Для простоты будем рассматривать конечномерный случай.

Предположим, что

$$\dot{y} = f(y) \tag{3.4.30}$$

данное (неизвестное) дифференциальное уравнение в $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ гладкое векторное поле, которое порождает полугруппу $\{\varphi^t\}_{t\geq 0}$. Предположим, что $\mathcal{A}$ глобальный $\mathcal{B}$-аттрактор полугруппы. Наша цель построить гомеоморфное отображение $\Pi : \mathcal{A} \to \Pi\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$. (Более общий случай $\Pi : \mathcal{A} \to \Pi\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^k, k = 2, 3, \ldots, n-1$, может быть рассмотрен аналогично.)

Шаг 1: **Выбор линейной части**

Выберем число $\lambda > 0$ и матрицы A, B и C порядка $n \times n, n \times 1$ и $1 \times n$, соответственно, таким образом, что $(A + \lambda I, B)$ стабилизируемы, и $A + \lambda I$ имеет 2 собственных числа с положительной вещественной частью и $n - 2$

собственных чисел с отрицательной вещественной частью.

Шаг 2: **Реконструирование класса нелинейностей**

Определим на $[0,T]$ линейную полугруппу $G(t)=e^{At}$ с A из Шага 1. Возьмем $\varepsilon>0$, вещественное число N и будем наблюдать вблизи аттрактора решения $y_i(\cdot), i=1,2,\dots,N$, задачи (3.4.30) на $[0,T]$. Найдем для любого $i=1,2,\dots,N$ решение $\xi_i\in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^n)$ линейного неравенства

$$\sup_{t\in[0,T]}|Cy_i(t)-CG(t)y_i(0)-\int\limits_0^t CG(t-s)B\xi_i(s)ds|<\varepsilon. \tag{3.4.31}$$

Отсюда следует, что $\xi_i(t)\approx\phi(Cy_i(t))$ в смысле $L^2(0,T)$, где $\dot y_i(t)=Ay_i+B\phi(Cy_i(t))$ на $[0,T]$.

Определим две константы $-\infty\le\mu_1<\mu_2\le+\infty\,(\mu_2<+\infty$ если $\mu_1=-\infty$ и $\mu_1>-\infty$ если $\mu_2=+\infty)$ такие, что

$$\begin{aligned}\mu_1[C(y_i(t)-y_j(t))]^2\le[\xi_i(t)-\xi_j(t)]C[y_i(t)-y_j(t)]\\ \le\mu_2[C(y_i(t)-y_j(t))]^2,\ i,j=1,\dots,N,\ t\in[0,T].\end{aligned} \tag{3.4.32}$$

Шаг 3: **Графический тест частотного условия**

Вычислим частотную характеристику $\chi(i\omega-\lambda)=C((i\omega-\lambda)I-A)^{-1}B$ и сравним график $\chi(i\omega-\lambda)$ с кругом $\mathcal{C}[\mu_1,\mu_2]$ из Шага 2 (см. рис. 3.2).

Из ([26]) следует что если нет пересечений между $\chi(i\omega-\lambda)$ и $\mathcal{C}[\mu_1,\mu_2]$ частотное условие выполняется. В этом случае переходим к Шагу 4. В противном случае меняем A,B,C и начинаем снова с Шага 1. Оба случая показаны на рисунке. 3.2.

Шаг 4: **Построение гомеоморфизма** $\Pi:\mathcal{A}\to\Pi\,\mathcal{A}$

Найдем с A,B,C из Шага 1 и $\mu_1<\mu_2$ из Шага 3 $n\times n$ матрицу $P=P^*$ как решение матричного неравенства (3.3.23).

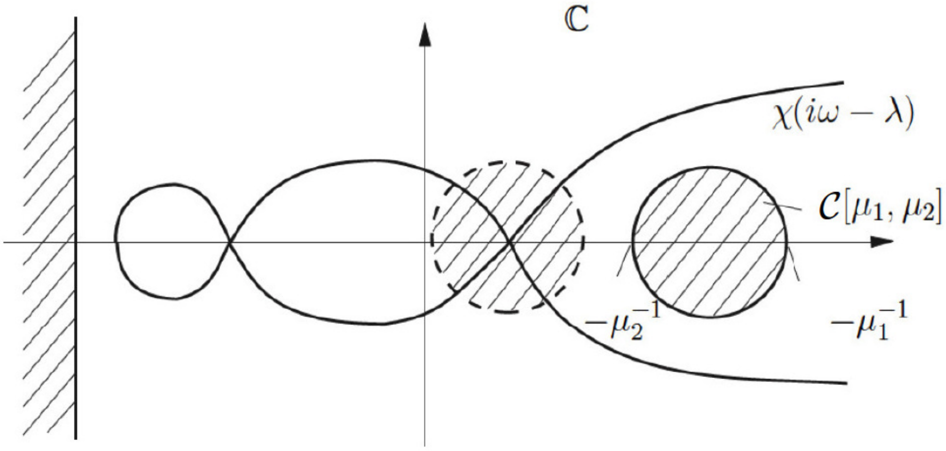

Рис. 3.2. Частотная характеристика

Такое решение существует в силу частотной теоремы и определяется за конечное число шагов. Любое решение $P = P^*$ задачи (3.3.23) имеет 2 отрицательных и $n-2$ положительных собственных числа. Определим регулярную матрицу $S = S^*$ через (3.3.24).

Тогда проекция $\Pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ определяется выражением (3.3.26).

Из теоремы 3.3 следует, что если $\mathcal{A}$ глобальный $\mathcal{B}$-аттрактор задачи (3.4.30), тогда $\Pi : \mathcal{A} \to \Pi\mathcal{A}$ является гомеоморфизмом.

Шаг 5: **Определение редуцированного ОДУ для полного уравнения**

Пусть $\Pi : \mathcal{A} \to \Pi\mathcal{A}$ будет гомеоморфизмом из Шага 4. Определим редуцированное 2-мерное ОДУ $\dot{u} = \underbrace{\Pi\, f(\tilde{h}(u))}_{\tilde{g}(u)}$ из наблюдений $\Pi\, y_i(t)$, где $y_i(t)$ произвольные решения задачи (3.4.30) в окрестности аттрактора и используем теорему расширения Штейна ([56]) для того чтобы расширить это векторное поле из замкнутого множества $\Pi\mathcal{A} \subset E \cong \mathbb{R}^2$ на липшицево векторное поле на всем E.

В следующем разделе мы рассмотрим некоторые вопросы, касающиеся определяющих функционалов.

3.5. Определяющие функционалы для вариационных уравнений

Предположим, что $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ квадратичные формы на $Y_1 \times \Xi$. Класс $\mathcal{N}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ нелинейностей для (3.1.1) состоит из всех отображений ϕ таких, что выполняются следующие условия:

Для любого $T > 0$ и любых двух функция $y(\cdot) \in L^2(0,T;Y_1)$ и $\xi(\cdot) \in L^2(0,T;\Xi)$ с

$$\xi(t) = \phi(Cy(t)), \text{ для п. в. } t \in [0,T] \tag{3.5.33}$$

следует, что

$$\mathcal{F}(y(t),\xi(t)) \geq 0, \text{ для п. в. } t \in [0,T] \tag{3.5.34}$$

и существует непрерывная функция $\Phi : Y_1 \to \mathbb{R}$ (обобщенный потенциал) и числа $\lambda > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что

$$\begin{gathered}\int\limits_s^t \mathcal{G}(y(\tau),\xi(\tau))d\tau \geq \frac{1}{2}[\Phi(y(t)) - \Phi(y(s))] \\ + \lambda \int\limits_s^t \Phi(y(\tau))d\tau \ \ \forall \ \ 0 \leq s < t \leq T\end{gathered} \tag{3.5.35}$$

и

$$\Phi(y) \geq \gamma\|y\|_0^2, \ \forall y \in Y_0. \tag{3.5.36}$$

Предположим, что Z другое гильбертово пространство, которое мы будем называть *пространством наблюдений*. Любой ограниченный линейный оператор $M : Y_1 \to Z$ называется *оператором наблюдений.*

Предположим, что $P \in \mathcal{L}(Y_{-1}, Y_0) \cap \mathcal{L}(Y_0, Y_1),\ P = P^*$ в Y_0 и введем функцию

$$V(y) := \frac{1}{2}(y, Py)_0 + \frac{1}{2}\Phi(y),\ \forall y \in Y_0.$$

Предположим, что существуют числа $\lambda > 0$ и $\mu > 0$ такие, что для произвольного решения $y(\cdot)$ задачи (3.1.1) мы имеем

$$\frac{d}{dt}V(y(t)) + 2\lambda V(y(t)) \leq \mu \|My(t)\|_Z^2,\ \text{для п. в. } t \geq 0.$$

Тогда наблюдение

$$\sigma(t) := \mu \|My(t)\|_Z^2 \tag{3.5.37}$$

мы будем называть *определяющим для диссипативности с областью $\mathcal{D}$ задачи (3.1.1)*, т. е. свойство

$$\int_t^\tau \|My(\tau)\|_Z^2 d\tau \to 0 \text{ для } t \to +\infty$$

влечет что $\limsup\limits_{t \to +\infty} V(y(t)) \leq C$ и, следовательно, (3.1.1) является диссипативным с областью диссипативности $\mathcal{D} := \{y \in Y_0 | \|y\|_0^2 \leq \frac{2C}{\gamma}\}$.

Эквивалентное определение определяющих для диссипативности наблюдений вариационного неравенства приведено в работе ([38]).

Для того, чтобы сформулировать частотную теорему существования определяющих для диссипативности наблюдений, нам потребуются следующие условия.

(A.3.6) Существуют числа $\lambda > 0$ и $\mu > 0$ такие, что следующие три свойства выполнены:

а) Любое решение задачи $\dot{y} = (A + \lambda I)y,\ y(0) = y_0$ экспоненциально возрастает при $t \to +\infty$, т. е. существуют константы $c_3 > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\|y(t)\|_0 \leq c_3 e^{-\varepsilon t} \|y_0\|_0,\ t > 0; \tag{3.5.38}$$

b) $\mathcal{F}^c(y,\xi)+\mathcal{G}^c(y,\xi)-\mu\|M^c\|^2_{Z^c}\le 0,\ \forall (y,\xi)\in Y_1^c\times\Xi^c:\exists\omega\in\mathbb{R},$ где $i\omega y=(A^c+\lambda I^c)y+B^c\xi;$

c) Функционал

$$\mathcal{J}(y(\cdot),\xi(\cdot)):=\int\limits_0^\infty[\mathcal{F}^c(y(\tau),\xi(\tau))+\mathcal{G}^c(y(\tau),\xi(\tau))-\mu\|M^c y(\tau)\|^2_{Z^c}]d\tau$$

ограничен сверху на множестве

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{y_0}:=\{y(\cdot),\xi(\cdot)|\dot y=&(A^c+\lambda I^c)y+B^c\xi,\\ &y(0)=y_0,y(\cdot)\in W^c(0,\infty),\xi(\cdot)\in L^2(0,\infty;\Xi^c)\}\end{aligned}$$

для любого $y_0\in Y_0^c$.

Теорема 3.4. *Предположим, что существуют числа $\lambda>0$ и $\mu>0$ такие, что предположения* **(A.3.2)**-**(A.3.4)**, **(A.3.6)** *выполняются для вариационного уравнения (3.1.1) с нелинейностью $\phi\in\mathcal{N}(\mathcal{F},\mathcal{G})$. Тогда наблюдение заданное (3.5.37) является определяющим для диссипативности вариационного уравнения (3.1.1).*

Доказательство. Из предположений **(A.3.2)**-**(A.3.4)**, **(A.3.6)** следует ([17]), что существует опрератор $P=P^*\in\mathcal{L}(Y_{-1},Y_0)\cap\mathcal{L}(Y_0,Y_1)$ такой, что

$$\begin{aligned}((A+\lambda I)y+B\xi,Py)_{-1,1}+\mathcal{F}(y,\xi)+\mathcal{G}(y,\xi)&\\ \le\mu\|My\|^2_Z,\ \forall y\in Y_1,\forall\xi\in\Xi.&\end{aligned}\tag{3.5.39}$$

Из (3.5.39) и предположения **(A.3.6)** следует ([30]), что $(y,Py)_0\ge 0,\ \forall y\in Y_0$. Для произвольного решения $y(\cdot)$ задачи (3.1.1) и $\xi(t)=\phi(Cy(t))$ мы получаем из (3.5.39) неравенство

$$\begin{aligned}(\dot y(t),Py(t))_{-1,1}+\lambda(y(t),Py(t))_0+\mathcal{F}(y(t),\xi(t))&\\ +\mathcal{G}(y(t),\xi(t))-\mu\|My(t)\|^2_Z\le 0,\ \text{для п. в. } t>0.&\end{aligned}\tag{3.5.40}$$

Интегрирование (3.5.40) по временному интервалу $0 < s < t$ дает

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(y(t), Py(t))_0 - \frac{1}{2}(y(s), Py(s))_0& \\ + \lambda \int\limits_s^t (y(\tau), Py(\tau))_0 d\tau + \int\limits_s^t \mathcal{F}(y(\tau), \xi(\tau)) d\tau& \\ + \int\limits_s^t \mathcal{G}(y(\tau), \xi(\tau)) d\tau \le \mu \int\limits_s^t \|My(\tau)\|_Z^2 d\tau.&\end{aligned} \tag{3.5.41}$$

Из неравенства (3.5.34) и (3.5.35) следует, что

$$\int\limits_s^t \mathcal{F}(y(\tau), \xi(\tau)) d\tau \ge 0 \tag{3.5.42}$$

и

$$\begin{aligned}\int\limits_s^t \mathcal{G}(y(\tau), \xi(\tau)) d\tau \ge \frac{1}{2}[\Phi(y(t)) - \Phi(y(s))]& \\ + \lambda \int\limits_s^t \Phi(y(\tau)) d\tau,\ 0 < s < t.&\end{aligned} \tag{3.5.43}$$

Принимая во внимание (3.5.41) – (3.5.43), мы получаем что

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(y(t), Py(t))_0 + \frac{1}{2}\Phi(y(t)) - \frac{1}{2}(y(s), Py(s))_0 - \frac{1}{2}\Phi(y(s))& \\ + 2\lambda \int\limits_s^t [\frac{1}{2}(y(\tau), Py(\tau))_0 - \frac{1}{2}\Phi(y(\tau))] d\tau& \\ \le \mu \int\limits_s^t \|My(\tau)\|_Z^2 d\tau.&\end{aligned} \tag{3.5.44}$$

Введем функции

$$m(t) := \frac{1}{2}(y(t), Py(t))_0 + \frac{1}{2}\Phi(y(t))$$

и

$$g(t) := -\mu \|My(t)\|_Z^2.$$

Тогда мы иммем из (3.5.44) неравенство

$$m(t) - m(s) + 2\lambda \int_s^t m(\tau)d\tau \leq \int_s^t g(\tau)d\tau.$$

Последнее неравенство влечет за собой утверждение теоремы.

□

3.6. Система уравнений Максвелла и теплопроводности в одномерном случае

Рассмотрим парную систему уравнений Максвелла и уравнения теплопроводности в одномерном пространстве ([43]) которая была введена в предыдущей главе. В отличие от системы (2.2.54)–(2.2.59) в этой главе мы будем рассматривать систему без фазового перехода ($b(\theta) := \theta$).

$$w_{tt} = w_{xx} - \sigma(\theta)w_t, \qquad (x,t) \in Q_T, \qquad (3.6.45)$$

$$\theta_t = \theta_{xx} + \sigma(\theta)\omega_t^2, \qquad (x,t) \in Q_T, \qquad (3.6.46)$$

$$w(0,t) = 0, w(1,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \qquad (3.6.47)$$

$$\theta(0,t) = \theta(1,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \qquad (3.6.48)$$

$$w(x,0) = w_0(x), w_t(x,0) = w_1(x), \qquad x \in \Omega, \qquad (3.6.49)$$

$$\theta(x,0) = \theta_0(x), \qquad x \in \Omega, \qquad (3.6.50)$$

где $T > 0, \Omega = (0,1)$ и $Q_T = \Omega \times (0,T]$.

Для того чтобы записать эту систему в форме (3.1.1), введем следующие обозначения:

$$y(x,t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_t(x,t) \\ w(x,t) \\ \theta(x,t) \end{pmatrix}, \ y_0(x) = \begin{pmatrix} w_1(x) \\ w_0(x) \\ \theta_0(x) \end{pmatrix}$$

$$\xi(x,t) = \begin{pmatrix} \xi_1(x,t) \\ \\ \xi_2(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}(\theta) w_t(x,t) \\ \\ \sigma(\theta) w_t^2(x,t) \end{pmatrix}.$$

В последнем выражении мы использовали новую функцию $\bar{\sigma}$, которая появляется из разложения

$$\sigma(\theta) = \sigma_0 + \bar{\sigma}(\theta),$$

где $\sigma_0 > 0$ константа и $\bar{\sigma}(\theta) > 0, \theta > 0$.

Пусть Λ будет самосопряженным положительно определенным оператором, порожденным на $L^2(0,1)$ дифференциальным выражением $\Lambda v = -v_{xx}$ для однородных граничных условий Дирихле.

Рассмотрим пространства $Y_0 = L^2(0,1) \times H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$, $Y_1 = H_0^1(0,1)$ и $\Xi = L^2(0,1) \times L^2(0,1)$. Предположим, что норма в Y_0 задается следующим образом $\|(v_1, v_2, v_3)\|_0 = \max\limits_{i=1,2,3} \|v_i\|_{L^2(\Omega)}$ и $(\cdot,\cdot)_0$ - ассоциированное скалярное произведение. Аналогичные норма и скалярное произведение рассматриваются в Ξ. Используя оператор Λ, мы можем определить гильбертову тройку $Y_1 \subset Y_0 \subset Y_{-1}$

$$Y_1 = \mathcal{D}(\Lambda) = H_0^1(0,1) \times H_0^2(0,1) \times H_0^1(0,1),$$

используя норму $\|\cdot\|_1$, порожденную скалярным произведением $(\eta_1, \eta_2)_1 = = (\Lambda^{-1}\eta_1, \Lambda^{-1}\eta_2)_0$ для произвольного $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{D}(\Lambda)$.

Скобка двойственности $(\cdot,\cdot)_{-1,1}$ на $Y_{-1} \times Y_1$ вводится как непрерывное продожение функционала $(\cdot, \eta)_0$ на Y_{-1}. Эта процедура была описана в разделе. 3.1.

Теперь определим линейные операторы $A : Y_1 \to Y_{-1}$ и $B : \Xi \to Y_{-1}$

через

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma_0 I & -\Lambda & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Исходная начально-кравевая задача (3.6.45) – (3.6.50) может быть записана как

$$\dot{y} = Ay + B\xi, \quad y(0) = y_0. \tag{3.6.51}$$

В дальнейшем в этом разделе мы проверим частотные условия необходимые для применения теоремы 3.4 к начально-краевой задаче (3.6.51).

Покажем, что пара (A, B) L^2-управляема. Для этого покажем, что спектр A лежит в левой части комплексной плоскости.

Рассмотрим задачу нахождения собственных чисел

$$Av = \alpha v, \tag{3.6.52}$$

где $v = (v_1, v_2, v_3)^T$ - собственный вектор, а α - соответствующее собственное число.

Уравнение (3.6.52) может быть записано в форме

$$\begin{cases} -\sigma_0 v_1 - \Lambda v_2 = \alpha v_1, \\ \quad v_1 = \alpha v_2, \\ -\Lambda v_3 = \alpha v_3. \end{cases} \tag{3.6.53}$$

Предположим, что α_k - два собственных числа оператора Λ и e_k - соответствующие собственные функции. Хорошо известно, что система $\{e_k\}_k$ формирует базис пространства $L^2(\Omega)$. Следовательно, любой элемент $v_i, i = 1, 2, 3$, может быть записан как

$$v_i = \sum_k c_i^k e_k, \quad i = 1, 2, 3,$$

где c_i^k некоторые коэффициенты. Теперь уравнение (3.6.53) эквивалентно новой системе

$$-\sigma_0 \sum_k c_1^k e_k - \sum_k \alpha_k c_2^k e_k = \alpha \sum_k c_1^k e_k, \tag{3.6.54}$$

$$\sum_k c_1^k e_k = \alpha \sum_k c_2^k e_k, \tag{3.6.55}$$

$$-\sum_k \alpha_k c_3^k e_k = \alpha \sum_k c_3^k e_k. \tag{3.6.56}$$

Покажем, что любое α, удовлетворяющее (3.6.54) – (3.6.56), имеет отрицательную вещественную часть. Из (3.6.54), (3.6.55) следует, что для любого k либо $c_1^k = c_2^k = 0$ (в этом случае $c_3^k \neq 0$ для некоторого k), либо

$$\alpha^2 + \sigma_0 \alpha + \alpha_k = 0. \tag{3.6.57}$$

Очевидно, что любое α удовлетворяющее (3.6.57) имеет отрицательную вещественную часть.

Из (3.6.56) следует, что для любого k либо $c_3^k = 0$ (в этом случае мы имеем $c_1^k \neq 0$ или $c_2^k \neq 0$), либо $\alpha = -\alpha_k$.

Следовательно, мы показали, что спектр оператора A лежит в левой части мнимой оси. Отсюда следует, что пара (A, B) L^2-управляема ([17], [18]).

Рассмотрим квадратичную форму

$$\mathcal{F}(y, \xi) = \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \right)_\Xi = \int\limits_\Omega y_1 \xi_1 dx = \int\limits_0^1 \bar{\sigma}(\theta) w_t^2 dx$$

и проверим условия теоремы 3.4 раздела. 3.5.

Предположим, что $\mathcal{F}^c$ эрмитово расширение $\mathcal{F}$ на $Y_1^c \times \Xi^c$. Для того, чтобы показать ограниченность функционала $\mathcal{J}(y(\cdot), \xi(\cdot))$ на множестве

$\mathcal{M}_{y_0}$, достаточно использовать равенство

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 (w_t^2+w_x^2)dx + \int_0^1 \sigma(\theta)w_t^2 dx = 0, \tag{3.6.58}$$

которое следует из (3.6.45) – (3.6.50). Вместе с (3.6.58) получаем

$$\int_0^1 (w_t^2+w_x^2)dx + \int_0^\infty \int_0^1 \sigma(\theta)w_t^2 dxdt = c,$$

где $c > 0$ некоторая константа. Из последнего равенство следует, что

$$\int_0^\infty \int_0^1 \sigma(\theta)w_t^2 dxdt = \int_0^\infty \mathcal{F}^c(y(\tau),\xi(\tau))d\tau \le c.$$

Теперь проверим частотное условие в соответствии с частотной теоремой Лихтарникова-Якубовича для вырожденного случая ([18]). Предположим, что $\{\alpha_k\}$ - собственные числа Λ и $\{e_k\}$ - соответствующие собственные функции, которые формируют базис пространства $L^2(0,1)$. Используя это свойство, мы можем написать

$$w(x,t) = \sum_k w^k(t)e_k, \theta(x,t) = \sum_k \theta^k(t)e_k, \xi(x,t) = \sum_k \xi^k(t)e_k, \tag{3.6.59}$$

где $w^k(t), \theta^k(t)$ и $\xi^k(t)$ соответствующие коэффициенты Фурье.

Рассмотрим $\mathcal{F}^c(y,\xi)$ для $i\omega y = A^c y + B^c\xi, \omega \in \mathbb{R}, \xi \in \Xi^c$, т. е. форму

$$\mathcal{F}^c(y,\xi) = (\Pi_0(i\omega)\xi,\xi). \tag{3.6.60}$$

Предположим, что $\tilde{w}^k, \tilde{\theta}^k$ и $\tilde{\xi}^k$ - преобразование Фурье w^k, θ^k и ξ^k, соответственно. Из (3.6.60) следует, что

$$(\Pi_0(i\omega)\tilde{\xi},\tilde{\xi}) = \sum_k (\Pi_0^k(i\omega)\tilde{\xi}^k,\tilde{\xi}^k). \tag{3.6.61}$$

Для того чтобы вычислить $\Pi_0(i\omega),\ \omega \in \mathbb{R}$, мы применим формальное преобразование Фурье к (3.6.45) и (3.6.46). В результате с использованием (3.6.59) мы получим уравнения

$$-\omega^2 \tilde{w}^k(i\omega) + i\omega\sigma_0 \tilde{w}^k(i\omega) - \alpha_k \tilde{w}^k(i\omega) + \tilde{\xi}_1^k(i\omega) = 0, \tag{3.6.62}$$

$$i\omega\tilde{\theta}^k(i\omega) + \alpha_k\tilde{\theta}^k(i\omega) - \tilde{\xi}_2^k(i\omega) = 0, \quad k = 1, 2, \dots. \tag{3.6.63}$$

Из (3.6.62), (3.6.63) мы имеем

$$\tilde{w}^k(i\omega) = \chi_0(i\omega, \alpha_k)\xi_1^k(i\omega) \ \text{ и}$$

$$\tilde{\theta}^k(i\omega) = \chi_1(i\omega, \alpha_k)\xi_2^k(i\omega),$$

где

$$\chi_0(i\omega, \alpha_k) = (-\omega^2 - i\omega\sigma_0 + \alpha_k)^{-1} \ \text{ и}$$

$$\chi_1(i\omega, \alpha_k) = (i\omega - \alpha_k)^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Из этой формулы и из (3.6.61) следует, что

$$(\Pi_0^k(i\omega)\tilde{\xi}^k, \tilde{\xi}^k) = \mathrm{Re}(\tilde{w}_t^k \tilde{\xi}_1^k) = \mathrm{Re}(i\omega\chi_0)|\tilde{\xi}_1^k(i\omega)|^2.$$

Следовательно, мы имеем представление

$$\Pi_0^k(i\omega) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(i\omega\chi_0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы получить неравенство $\Pi_0^k(i\omega) \le 0$, мы должны показать, что

$$\mathrm{Re}(i\omega\chi_0) \le 0, \quad \omega \in \mathbb{R}. \tag{3.6.64}$$

Неравенство (3.6.64) означает, что

$$\mathrm{Re}\left(\frac{i\omega}{\omega^2 - i\omega\sigma_0 + \alpha_k}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{(\alpha_k\omega + \omega^3)i - \omega^2\sigma_0}{(\alpha_k + \omega^2)^2 + \omega^2\sigma_0^2}\right) \le 0,$$

т. е. $-\omega^2\sigma_0 \leq 0, \quad \forall\omega \in \mathbb{R}$. Последнее неравенство выполняется, так-как $\sigma_0 > 0$.

Следовательно, мы показали, что все условия теоремы 3.4 выполнены. Следовательно, можно заключить, что наша система имеет определяющие для диссипативности наблюдения.

4. Развитие метода Такенса для задачи микроволнового нагрева

В главе 3 были построены проекторы из множества аменабельных решений (аттрактора) на подмножество конечномерного подпространства. Подход, описанный в предыдущей главе, позволяет получить проектор в явном виде, однако требует некоторых дополнительных знаний о системе. Зачастую, при проведении экспериментов эксперементатор этими знаниями не обладает. В данной главе будут строиться не проекторы, а топологические вложения, при этом сама система будет рассматриваться в виде «черного ящика». Кроме того, вложения будут топологическими только на *превалентном* множестве динамических систем.

4.1. Модификация теоремы вложения Такенса для системы нагрева

Часто при проведении научных экспериментов возникает ситуация, когда исследуемый объект или явление не допускает непосредственного исследования своей структуры, либо эта структура слишком сложна, но для анализа доступен сигнал, производимый системой. Абстрагируясь от конкретной природы объекта, можно представить себе «черный ящик», на выходе которого наблюдатель измеряет значение какой-то функции от состояния системы. Задача заключается в том, чтобы по этим наблюдениям установить какие-либо свойства системы.

Наиболее часто для реконструкции фазового пространства применяется метод координат, сдвинутых по времени. А именно, пусть J - некоторое дискретное множество моментов времени наблюдений. Имея зависимость наблюдаемой скалярной функции от времени $h(t)$, задается положительный временной шаг δ, целое число d, и строятся d-мерные вектора

$$\mathcal{H}(t_j) = (h(t_j), h(t_j+\delta), \ldots, h(t_j+(d-1)\delta)),\ j \in J.$$

Полученные вектора $\{\mathcal{H}(t_j)\}_{j\in J}$ рассматриваются как точки в реконструированном фазовом пространстве. Остается вопрос, при каких предположениях такая реконструкция провомерна. На него отвечает теорема Такенса ([57]).

Теорема служит теоретическим обоснованием определения по наблюдениям характеристик системы, например, фрактальной размерности аттрактора и ляпуновских показателей, а также решения задач управления и прогнозирования поведения системы, понижения шума и разделения сигналов.

Теорема Такенса изначально была доказана для конечномерных многообразий. Опишем подробно модель, с которой работает теорема Такенса. Пусть $\mathcal{M}$ - компактное n-мерное C^r-многообразие ($r \geq 1$). Рассматривается дифференциальное уравнение вида:

$$\dot{u}(t) = f(u(t)). \tag{4.1.1}$$

Здесь $f : \mathcal{M} \to T\mathcal{M}$ - гладкое векторное поле на $\mathcal{M}$. Предположим, что решения этого уравнения порождают динамическую систему $(\{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}}, \mathcal{M})$.

Обозначим $t \to \varphi^t(u), t > 0$ - положительное движение произвольной точки $u \in \mathcal{M}$.

Предположим, что задана C^r - функция $h : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, называемая *функцией наблюдения*, значения которой доступны наблюдателю. Пусть δ - интервал между наблюдениями. Тогда имеется последовательность наблюдений, называемая временным рядом

$$z_0 = h(u), z_1 = h(\varphi^\delta(u)), \ldots, z_i = h(\varphi^{i\delta}(u)),\ i = 1, \ldots, N_0, \tag{4.1.2}$$

где N_0 - натуральное число. Пусть $d < N_0 + 1$ - произвольное натуральное число, тогда получаем последовательность векторов:

$$\zeta_i := (z_i, z_{i+1}, \ldots, z_{i+d-1}) \in \mathbb{R}^d,\ i = 0, \ldots, N_0 - d + 1. \tag{4.1.3}$$

Теорема Такенса говорит, что в типичном случае с помощью реконструированных точек z_i хорошо аппроксимируется динамика системы при размерности вложения d не меньше чем $2n + 1$. Говоря более конкретно, отображение $\Phi_{\varphi,h}(u)$ определенное как

$$\Phi_{\varphi,h}(u) := (h(u), h(\varphi^\delta(u)), \ldots, h(\varphi^{\delta(d-1)}(u)), u \in \mathcal{M}$$

является топологическим вложением для типичных систем (4.1.1).

Важную роль в теории вложения играет то, в каком смысле определяется понятие "типичности". Изначально в работе Такенса типичность рассматривалась следующим образом: свойство типично на топологическом пространстве X всех C^r-гладких систем типа (4.1.1) с топологией Уитни, если оно выполняется на массивном подмножестве $Z \subset X$, то есть на подмножестве, содержащем счетное пересечение открытых плотных множеств. Позднее в работе ([53]) теорема Такенса была доказана для случая, когда вместо выше описанного понятия топологической типичности использовалось понятие превалентности. В дальнейшем в работах Робинсона с использованием понятия превалентности был доказан аналог теоремы Такенса для случая произвольного банахова пространства $\mathbb{E}$. Приведем строгое определение превалентности, а так же некоторые другие определения, необходимые для формулировки теоремы Робинсона для гильбертовых троек пространств.

Определение 4.1. *Борелевское подмножество $\mathcal{S}$ нормированного линейного пространства $\mathbb{E}$ называется превалентным, если существует вероятностная мера $meas$ с компактным носителем, такая что $meas(v+\mathcal{S}) = 1$ для всех $v \in \mathbb{E}$.*

Замечание 4.1. *Заметим, что в русскоязычной литературе свойство превалентности рассматривалось в работах ([19]) и ([8]). Во второй работе использовался термин метрически существенное множество.*

Также введем понятия показателя толщины и фрактальной размерности. Пусть Z - подпространство банахова пространства $\mathbb{E}$, тогда показатель толщины пространства Z в $\mathbb{E}$, $\tau(Z;\mathbb{E})$ - мера того, насколько хорошо пространство Z аппроксимируется линейными подпространствами $\mathbb{E}$. Приведем формальное определение из ([57]).

Определение 4.2. *Пусть $\epsilon_{\mathbb{E}}(Z,n)$ - минимальное расстояние между Z и любым n-мерным линейным подпространством пространства $\mathbb{E}$. Тогда*

$$\tau(Z,\mathbb{E}) = \lim_{n\to\infty} \frac{-\log(n)}{\log(\epsilon_{\mathbb{E}}(Z,n))} \tag{4.1.4}$$

называется показателем толщины подпространства Z относительно $\mathbb{E}$.

Далее пусть $Z \subset \mathbb{E}$ - относительно компактное множество. Введем определение фрактальной размерности Z.

Определение 4.3. *Фрактальной размерностью множества Z называется число*

$$\dim_F(Z) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(Z, \varepsilon)}{-\log \varepsilon}, \tag{4.1.5}$$

где $N(Z, \varepsilon)$ - минимальное число шаров радиуса ε необходимых для покрытия пространства Z

В следующем параграфе эти определения будут использоваться для формулировки теоремы вложения Робинсона для гильбертовых троек пространств.

4.2. Теорема Робинсона о вложении для гильбертовых троек пространств

Как и в предыдущих главах, будем рассматривать гильбертову тройку, то есть оснащение вещественного гильбертова пространства Y_0

$$Y_1 \subset Y_0 \subset Y_{-1}, \tag{4.2.6}$$

в которой Y_1 и Y_{-1} - вещественные гильбертовы пространства, вложения плотны и непрерывны. Пусть $(\cdot, \cdot)_i$ и $\|\cdot\|_i, i = 1, 0, -1$ - скалярное произведение и норма в Y_i соответственно.

Также введем в рассмотрение два новых вещественных гильбертовых пространства Ξ и W со скалярными произведениями $(\cdot, \cdot)_\Xi$, $(\cdot, \cdot)_W$ и нормами $\|\cdot\|_\Xi$, $\|\cdot\|_W$, соответственно, и

$$A : Y_1 \to Y_{-1}, \quad B : \Xi \to Y_{-1}, \quad C : Y_{-1} \to W$$

линейные непрерывные операторы. Нелинейность определим следующим образом: $\phi : W \to \Xi$.

Рассмотрим задачу Коши для эволюционных вариационных уравнений аналогично тому как это делалось в главе 3.

$$\begin{aligned} &\dot{y}(t) = Ay(t) + B\phi(Cy(t)), \\ &y(0) = y_0 \in Y_0. \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Вариационная интерпретация понимается в том же смысле, что и ранее:

$$(\dot{y}(t) - Ay(t) - B\xi(t), \eta - y(t))_{-1,1} = 0,$$
$$\forall \eta \in Y_1,\ w(t) = Cy(t),\ \xi(t) = \phi(w(t)),\ y(0) = y_0.$$

Предположим что нелинейность ϕ удовлетворяет свойствам, введенным в главе 3 и необходимым для существования и единственности решений системы (4.2.7). Предположим также, решения нашей задачи порождают динамическую систему $\{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ и отображение $\varphi : Y_1 \to Y_1$ задается следующим образом $\varphi := \varphi^1$.

Теперь приведем формулировку теоремы Робинсона о вложении ([52]) для гильбертовой тройки пространств.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathcal{S}$ - компактное подмножество Y_1, удовлетворяющее условию $dim_F(\mathcal{S}) < d$, $d \in \mathbb{N}$, и имеющее показатель толщины $\tau(\mathcal{S}, Y_1)$. Выберем некоторое натуральное число $k > (2+\tau)d$ и предположим, что $\mathcal{S}$ является инвариантным множеством для липшицева отображения $\varphi : Y_1 \to Y_1$, так что*

1. *Подмножество $\mathcal{E}$ точек множества $\mathcal{S}$ такое, что $\varphi(u) = u$, $\forall u \in \mathcal{E}$ удовлетворяет неравенству $dim_F(\mathcal{E}) < 1/2$.*

2. *$\mathcal{S}$ не содержит периодических траекторий отображения φ периодов $2, \ldots, k$.*

Тогда на превалентном множестве липшицевых отображений $h : Y_1 \to \mathbb{R}$ *отображение* $\Phi_{\varphi,h} : Y_1 \to \mathbb{R}^k$ *взаимооднозначно на* $\mathcal{S}$.

Полученная модификация теоремы непосредственно вытекает из оригинальной реоремы Робинсона ([52]). Приведенная выше теорема будет использоваться в следующем разделе для численного моделирования.

4.3. Численное исследование задачи нагрева с использованием теоремы вложения Робинсона

Рассмотрим задачу микроволнового нагрева, которая была введена в предыдущей главе

$$\varepsilon w_{tt} = \frac{1}{\mu} w_{xx} - \sigma(\theta) w_t, \qquad (x,t) \in Q_T, \qquad (4.3.8)$$

$$\theta_t = \theta_{xx} + \sigma(\theta) w_t^2, \qquad (x,t) \in Q_T, \qquad (4.3.9)$$

$$w(0,t) = 0, w(1,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \qquad (4.3.10)$$

$$\theta(0,t) = \theta(1,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \qquad (4.3.11)$$

$$w(x,0) = w_0(x), w_t(x,0) = w_1(x), \qquad x \in \Omega, \qquad (4.3.12)$$

$$\theta(x,0) = \theta_0(x), \qquad x \in \Omega, \qquad (4.3.13)$$

где $T > 0, \Omega = (0,1)$ и $Q_T = \Omega \times (0,T]$, ε и μ - константы, отличные от нуля.

Аналогично тому, как это было сделано ранее, мы можем записать эту систему в форме

$$\dot{y} = Ay + B\xi, \quad y(0) = y_0, \qquad (4.3.14)$$

где

$$y(x,t)=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} w_t(x,t) \\ w(x,t) \\ \theta(x,t) \end{pmatrix},\ y_0(x)=\begin{pmatrix} w_1(x,t) \\ w_0(x,t) \\ \theta_0(x,t) \end{pmatrix}$$

$$\xi(x,t)=\begin{pmatrix} \xi_1(x,t) \\ \xi_2(x,t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \bar\sigma(\theta)w_t(x,t) \\ \sigma(\theta)w_t^2(x,t) \end{pmatrix}.$$

Гильбертова тройка пространств и гильбертово пространство Ξ задаются следующим образом. Положим $Y_0 = L^2(0,1) \times H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$, $Y_{-1} = H_0^1(0,1)$ и $\Xi = L^2(0,1) \times L^2(0,1)$. Норма в Y_0 задается как $\|(v_1,v_2,v_3)\|_0 = \max\limits_{i=1,2,3} \|v_i\|_{L^2(\Omega)}$ и $(\cdot,\cdot)_0$ – ассоциированное скалярное произведение. Аналогичные норма и скалярное произведение рассматриваются в Ξ. Используя самосопряженный положительно определенный оператор Λ, который порождается на $L^2(0,1)$ дифференциальным выражением $\Lambda v = -v_{xx}$ для однородных граничных условий Дирихле, мы можем определить пространство Y_1 для гильбертовой тройки пространств $Y_1 \subset Y_0 \subset Y_{-1}$ следующим образом

$$Y_1 = \mathcal{D}(\Lambda) = H_0^1(0,1) \times H_0^2(0,1) \times H_0^1(0,1),$$

используя норму $\|\cdot\|_1$ порожденную скалярным произведением $(\eta_1,\eta_2)_1 = (\Lambda^{-1}\eta_1, \Lambda^{-1}\eta_2)_0$ для произвольного $\eta_1,\eta_2 \in \mathcal{D}(\Lambda)$.

Линейные операторы $A : Y_1 \to Y_{-1}$ и $B : \Xi \to Y_{-1}$ имеют следующий вид

$$A=\begin{pmatrix} -\sigma_0 I & -\Lambda & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы сформулировать теорему существования и единственности решения для рассматриваемой задачи, введем следующие предположения.

(A.4.1) Существуют константы σ_0 и σ_1, такие, что
$0 < \sigma_0 \le \sigma(\theta) \le \sigma_1(1+\theta),\ \forall\theta > 0;$

(A.4.2) σ удовлетворяет локальному условию Липшица на $(0, +\infty)$;

(A.4.3) $w_t(x, 0),\ \theta_0(x) \in L^2(0, 1)$.

Тогда имеет место следующая теорема существования и единственности слабого решения.

Теорема 4.2. *Если выполнены предоложения* **(A.4.1)** – **(A.4.3)***, система (4.3.8) – (4.3.13) имеет единственное глобальное слабое решение* $(w(x, t), v(x, t), \theta(x, t))$*, где* $v = w_t,\ \theta \in L^2(0, T; H^1(0, 1))$*,*
$w, v \in C([0, T]; L^2(0, 1))$ *для любого* $T > 0$*.*

В работе ([22]) была доказана непрерывная зависимость от параметров и построена динамическая система $\{\varphi^t(\cdot)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, порождаемая решениями задачи (4.3.8) – (4.3.13). Кроме этого в работе ([22]) было показано существование единственного стационарного решения задачи (4.3.8) – (4.3.13), а также глобальная устойчивость по отношению к этому стационарному решению. По аналогии, используя те же функционалы Ляпунова, можно доказать существование единственного слабого стационарного решения и глобальную устойчивость по отношению к этому решению. Из этого факта следует, что для отображения $\varphi := \varphi^1$ выполнены следующие свойства:

- Если обозначить, через $\mathcal{E}$ - множество стационарных точек отображения φ, то $\dim_F(\mathcal{E}) = 0$;

- Отображение φ не имеет периодических траекторий.

Таким образом выполнены все достаточные для применения теоремы Робинсона условия.

Далее, для иллюстрации применения теоремы Робинсона к задаче нагрева, будем использовать конечномерную аппроксимацию процесса нагрева материала с помощью численного моделирования методом разностной схемы.

Пусть $\mathcal{A}$ - аттрактор рассматриваемой аппроксимационной задачи. Для оценки фрактальной размерности введем понятие корреляционной размерности: Корреляционная размерность определяется следующим образом:

$$\dim_{\mathrm{cor}}(\mathcal{A}) = \lim_{\epsilon \to +0} \frac{\ln(C(\epsilon))}{\ln(\epsilon)}, \tag{4.3.15}$$

где $C(\epsilon)$ корреляционный интеграл, определяющийся следующим образом:

$$C(\epsilon) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^{N} \mathbb{H}(\epsilon - \|y_i - y_j\|), \tag{4.3.16}$$

где y_i - N векторов из $\mathcal{A}$, $\|\cdot\|$ - расстояние на $\mathcal{A}$ и $\mathbb{H}(x)$ функция Хэвисайда

$$\mathbb{H}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0 \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases} \tag{4.3.17}$$

Пусть $\theta_0(t)$ - температурная компонента решения аппроксимационной задачи (1.1)-(1.6) в фиксированной точке $x_1 \in (0,1)$ в момент времени t. Пусть $\delta > 0$ - промежуток времени между измерениями. Тогда можно рассматривать вложение фазового пространства размерности m, состоящее из точек: $z_j^m = \{\theta_0(\delta j), \theta_0(\delta(j+1)), \ldots, \theta_0(\delta(j+m-1))\}, j = 1, 2, \ldots, n = N-m+1.$

Здесь N - достаточно большое натуральное число. Тогда мы можем вычислить корреляционный интеграл по следующей формуле:

$$C_{m,N}(\epsilon) = \frac{1}{N^2} \sum_{j,k=1}^{N} \mathbb{H}(\epsilon - \|z_i^m - z_j^m\|), \tag{4.3.18}$$

где $m \in [1, N+1]$.

Эта формула зависит от параметров m, n и ϵ. На следующем рисунке показана связь между оценкой фрактальной размерности и параметром m.

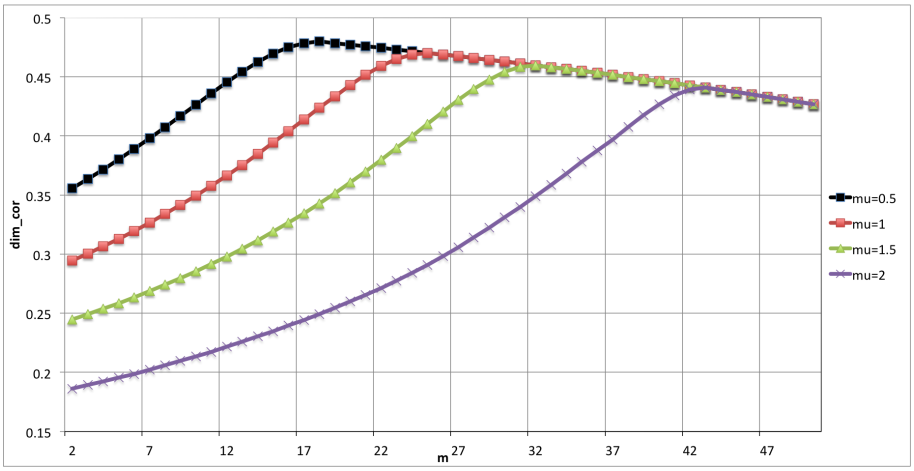

Рис. 1 Оценка корреляционной размеронсти однофазовой задачи нагрева с фиксированным $\varepsilon = 1$ и меняющимися μ

По графикам оценки корреляционной размерности видно, что она меньше 0,5. Также, в соответствии с замечанием из работы ([52]), при предположении, что решения нашей системы гладкие функции, показатель толщины $\tau(\mathcal{S}, Y_1)$, где $\mathcal{S} = \mathcal{A},\ Y_1 = H^1(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1)$ равняется 0. Таким образом, исходя из теоремы 4.1, при предположении превалентности, аппроксимация аттрактора одномерной системы нагрева может быть вложена в пространство $\mathbb{R}^3$ по формуле (4.1.4) для различных параметров системы ε и μ.

На рисунках ниже приведены численные результаты аппроксимации аттрактора рассматриваемой системы в пространстве $\mathbb{R}^3$. Рисунки показывают, что изменение параметров системы не сильно влияет на структуру аппроксимационного аттрактора. Аналогичные численные результаты были получены для двухфазовой задачи микроволнового нагрева в работе ([23]).

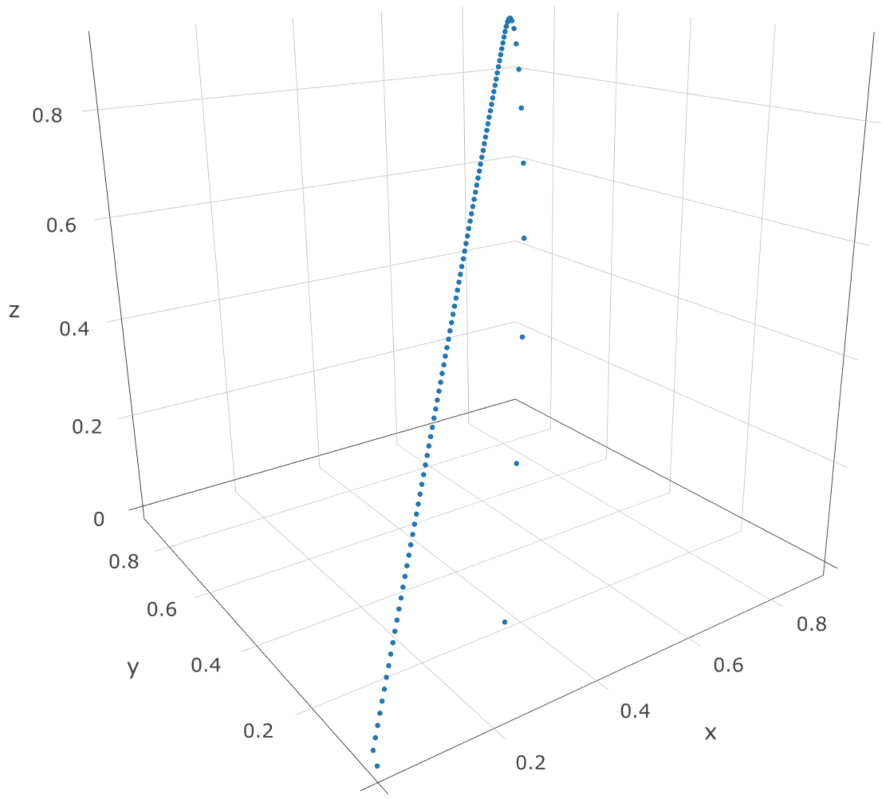

Рис. 2 Вложение аппроксимационного аттрактора в пространство $\mathbb{R}^3$, $\varepsilon = 1$ и $\mu = 0.5$.

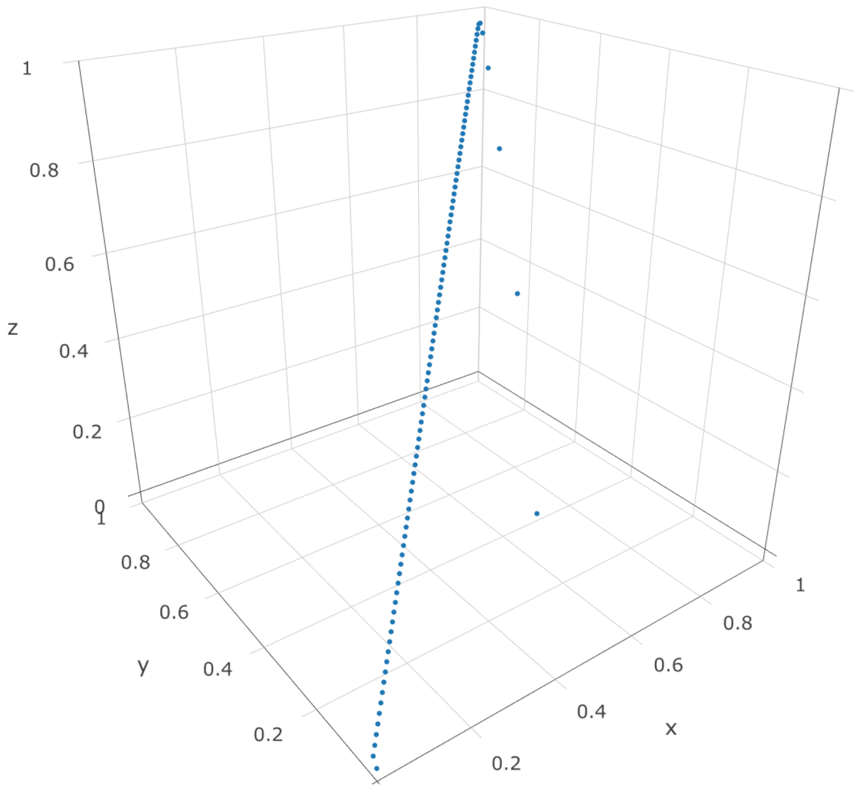

Рис. 3 Вложение аппроксимационного аттрактора в пространство $\mathbb{R}^3$, $\varepsilon = 0.5$ и $\mu = 1$.

Заключение

В диссертационной работе рассматриваются вопросы локализации инвариантных множеств и аттракторов эволюционных систем, связанных с одно и двух-фазовой задачами нагрева.

Доказано существование положительно инвариантного выпуклого множества для эволюционных систем с нелинейностью типа Клейна-Гордона. Получены достаточные условия ограниченности решений эволюционных систем с нелинейностью типа Клейна-Гордона.

Доказана ограниченность решений дважды нелинейных парных эволюционных уравнений. Приведены условия ограниченности решений двухфазовой задачи нагрева.

Предложен метод построения проекторов для эволюционной системы, порожденной системой микроволнового нагрева. Доказано существование проектора из множества аменабельных решений эволюционных уравнений на некоторое подмножество конечномерного пространства.

Описан модифицированный метод вложения Такенса-Робинсона с помощью которого получены численные результаты по аппроксимации аттрактора для одномерной задачи нагрева.

Литература

1. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы Эволюционных Уравнений. – М.: Наука, 1989. – 293 с.

2. *Березанский Ю. М.* Разложение по Собственным Функциям Самосопряженных Операторов. – Киев, Наукова думка, 1965. – 800 с.

3. *Блягоз З. У., Леонов Г. А.* Частотные критерии устойчивости в большом нелинейных систем // *Вестник ЛГУ.* – 1978. – № 13, – С. 18–23.

4. *Брусин В. А.* Уравнения Лурье в гильбертовом пространстве и их разрешимость // *Прикл. мат. и механика.* – 1976. – Том 40, № 5. – С. 947–955.

5. *Буркин И. М., Якубович В. А.* Частотные условия существования двух почти периодических решений у нелинейной системы автоматического регулирования // *Сибирск. математ. журн.* – 1975. – Том 16, № 5. – С. 916–924.

6. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1975. – 568 с.

7. *Демидович Б. П.* Лекции по Математической Теории Устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

8. *Ильяшенко Ю. С., Вейгу Ли* Нелокальные бифуркации. – М.: МЦНМО, 1999. – 416 с.

9. *Ладыженская О. А.* Об оценках фрактальной размерности и числа определяющих мод для инвариантных множеств динамических систем // *Зап. научн. сем. ЛОМИ.* – 1987. – Том 163. – С. 105–129.

10. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и Квазилинейные Уравнения Параболического Типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

11. *Ландау Л., Лифшиц Е.* Электродинамика Сплошных Сред. – М.: Наука, 1982. – 620 с.

12. *Леонов Г. А.* Об ограниченности траекторий фазовых систем // *Сибирск. математ. журн.* – 1974. – Том 15, № 3. – С. 687–692.

13. *Леонов Г. А.* Фазовая синхронизация. Теория и приложения // *Автомат. и телемех.* – 2006. – Том 67, № 10. – С. 47–85.

14. *Леонов Г. А., Чурилов А. Н.* Частотные условия ограниченности решений фазовых систем // *Динамика систем.* – 1976. – № 10. – С. 3–20.

15. *Лионс Ж. Л., Мадженес Э.* Неоднородные Граничные Задачи и их Приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.

16. *Лихтарников А. Л.* Критерии абсолютной устойчивости нелинейных операторных уравнений // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* – 1977. – Том 41, № 5. – С. 1064–1083.

17. *Лихтарников А. Л., Якубович В. А.* Частотная теорема для уравнений эволюционного типа // *Сибирск. математ. журн.* – 1976. – Том 17, № 5. – С. 1069–1085.

18. *Лихтарников А. Л., Якубович В. А.* Дихотомия и абсолютная устойчивость неопределенных нелинейных систем в гильбертовых пространствах // *Алгебра и анализ.* – 1997. – Том 9, № 6. – С. 132–155.

19. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. – М.: Мир, 1975. – 304 с.

20. *Панков А. А.* Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциально операторных уравнений. – Киев, Наукова думка, 1985. – 180 с.

21. *Попов С. А.* Метод положительно инвариантных конусов для эволюционных систем с кубическими и периодическими нелинейностями // *Дифференциальные уравнения и процессы управления.* – 2014. – № 3. – С. 1–21.

22. *Райтманн Ф., Юмагузин Н. Ю.* Асимптотическое поведение решений двухфазовой задачи нагрева в одномерном случае // *Вестник Санкт-Петербургского Университета.* – 2012. – Сер. 1, Вып. 3. – С. 59–62.

23. *Целуйко Д. С.* Применение метода Такенса для исследования аттрактора коцикла, порожденного двухфазной системой нагрева // *Дипл. раб.* – СПбГУ. – 2014.

24. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.

25. *Чуешов И. Д.* Введение в теорию бесконечномерных диссипативных систем. – Харьков, Акта, 1999. – 433 с.

26. *Якубович В. А.* Частотная теорема в теории управления // *Сибирск. математ. журн.* – 1976. – Том 14, № 2. – С. 384–420.

27. *Brézis H.* Problemes unilateraux *J. Math. Pures Appl.* – 1972. – Vol. 51. – Pp. 1–168.

28. *Chafee N., Infante E. F.* A bifurcation problem for nonlinear parabolic equations // *J. Appl. Anal.* – 1974. – Vol. 4. – Pp. 17–37.

29. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Attractors for equations of mathematical physics. – American Mathematical Society Providence, RI, 2002. – Vol. 49. – 363 p.

30. *Datko R.* Extending a theorem of A. M. Liapunov to Hilbert spaces // *J. Math. Anal. Appl.* – 1970. – Vol. 32. – Pp. 610–616.

31. *Duvant G., Lions J. L.* Inequalities in Mechanics and Physics. – Berlin, Springer-Verlag, 1976. – 400 p.

32. *Eden A., Michaux B., Rakotoson J. M.* Doubly Nonlinear Parabolic-Type Equations as Dynamical Systems // *Journal of Dynamics and Differential Equations.* – 1991. – Vol. 3, № 1. – Pp. 87 – 130.

33. *Ermakov I. N., Kalinin Y. N., Reitmann V.* Determining modes and almost periodic integrals for cocycles // *J. Differential Equations.* – 2011. – Vol. 47, № 13. – Pp. 1837 – 1852.

34. *Foias C., Sell G. R., Temam R.* Inertial manifolds for nonlinear evolution equations // *J. Differential Equations.* – 1988. – Vol. 73. – Pp. 309 – 353.

35. *Glassey R., Yin H.-M.* On Maxwell's equations with a temperature effect // *Communications in Mathematical Physics.* – 1997. – Vol. 194, № 2. – Pp. 343 – 358.

36. *Guo B. Z.* On the boundary control of a hybrid system with variable coefficients // *Journal of Optimization Theory and Applications.* – 2002. – Vol. 114, № 2. – Pp. 373 – 395.

37. *Kalinin Yu. N., Reitmann V.* Almost periodic solutions in control systems with monotone nonlinearities // *Differential equations and control processes.* – 2012. – № 4. – Pp. 40–68.

38. *Kalinichenko D., Reitmann V., Skopinov S.* Asymptotic behaviour of solutions to a coupled system of Maxwell's equations and a controlled differential inclusion // *Proc. 9AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications.* – 2012. – Orlando, Florida, USA.

39. *Ladyzhenskaya O. A.* Attractors for Semi-groups and Evolution Equations. – Cambridge, Cambridge University Press, 1991. – 88 p.

40. *Leonov G. A., Reitmann V., Smirnova V. B.* Non-Local Methods for Pendulum-like Feedback Systems. – Stuttgart, Teubner, 1992. – 242 p.

41. *Louis J., Wexler D.* The Hilbert space regulator problem and operator Riccati equation under stabilizability // *Annales de la Societe Scientifique de Bruxelles.* – 1991. – Vol. 105. – Pp. 137 – 165.

42. *Maitre E., Witomski P.* A pseudo-monotonicity adapted to doubly nonlinear elliptic–parabolic equations // *Nonlinear Anal.* – 2002. – Vol. 50. – Pp. 223 – 250.

43. *Manoranjan R. V., Yin H.-M.* On two-phase Stefan problem arising from a microwave heating process // *Discrete and Continuous Dynamical Systems.* – 2006. – Vol. 15. – P. 1155 – 1168.

44. *Noldus E.* New direct Lyapunov-type method for studying synchronization problems // *Automatika.* – 1977. – Vol. 13, № 2. – Pp. 139–151.

45. + *Popov S. A.* Method of positively invariant cones for evolution systems with cubic and periodic nonlinearities // *Differential Equations.* – 2015. – Vol. 50, № 13. – Pp. 1739–1751.

46. *Popov S. A.* Taken's time delay embedding theorem for dynamical systems on infinite-dimensional manifolds // *Book of abstracts of G-RISC International Student's Conference "Science and Progress 2011". Saint-Petersburg, Russia.* – 2011.

47. + *Popov S. A., Reitmann V.* Frequency domain conditions for finite-dimensional projectors and determining observations for the set of amenable solutions // *Discrete and Continuous Dynamical Systems.* – 2014. – Vol. 34, № 1. – Pp. 249–267.

48. *Popov S. A., Reitmann V.* Frequency domain conditions for the existence of finite-dimensional projectors and determining observations of attractors // *Differential Equations and Control Processes.* – 2013. – № 1. – Pp. 59–79.

49. *Popov S., Reitmann V., Skopinov S.* Boundedness and finite-time stability for multivalued doubly-nonlinear evolution systems generated by a microwave heating problem // *Abstracts of "The 8th International*

Conference on Differential and Functional Differential Equations". – 2017. – Moscow, Russia. – Pp. 142–143.

50. *Robinson J. C.* Inertial manifolds and the cone condition // *Dyn. Syst. Appl.* – 1993. – Vol. 2. – Pp. 311 – 330.

51. *Robinson J. C.* Infinite-dimensional Dynamical Systems: an Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors. – Cambridge, Cambridge University Press, 2001. – 480 p.

52. *Robinson J. C.* Taken's embedding theorem for infinite-dimensional dynamical systems // *J. Nonlinearity.* – 2005. – Vol. 18. – Pp. 2135 – 2143.

53. *Sauer T.,Yorke J. A. and Casdagli M.* Embedology // *J. Stat. Phys.* – 1991. – Vol. 65. – Pp. 579-616.

54. *Sell G. R., You Y.* Dynamics of Evolutionary Equations. – New York, Springer, 1990. – 672 p.

55. *Smith R. A.* Convergence theorems for periodic retarded functional differential equations // *Proc. London Math. Soc.* – 1990. – Vol. 60, № 3. – Pp. 581–608.

56. *Stein E. M.* Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. – Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1970. – 304 p.

57. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence // *Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag.* – 1981. – Vol. 898. – Pp. 366–381.

58. *Temam R.* Infinite-dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. – New York, Springer-Verlag, 2nd edition, 1997. – 650 p.

59. *Webb G. F.* A bifurcation problem for a nonlinear hyperbolic partial differential equation // *SIAM J. Math. Anal.* – 1979. – Vol. 10, № 5. – Pp. 922-932.

60. *Wloka J.* Partial Differential Equations. – Cambridge, Cambridge University Press, 1987. – 518 p.

61. *Yin H.-M.* Global solutions of Maxwell's equations in an electromagnetic field with the temperature-dependent electrical inductivity // *European Journal of Appl. Math.* – 1994. – Vol. 5. – Pp. 57-64.

62. Yin H.-M. On Maxwell's equations in an electromagnetic field with the temperature effect // *SIAM J. Math. Anal.* – 1998. – Vol. 29. – Pp. 637-651.