Санкт-Петербургское отделение
Математического института имени В.А.Стеклова
Российской академии наук

На правах рукописи

Растегаев Никита Владимирович

СПЕКТРАЛЬНЫЕ АСИМПТОТИКИ В ЗАДАЧАХ С САМОПОДОБНЫМ ВЕСОМ

Специальность 01.01.02 —
«Дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Назаров Александр Ильич

Санкт-Петербург — 2018

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования. Анализ асимптотики спектра краевых задач с сингулярным весом — классическая задача, изучение которой ведется с середины прошлого века и восходит к серии работ М. Г. Крейна [16—18], в которых для распределения собственных значений задачи

$$\begin{cases} -y'' = \lambda \mu y, \\ y(0) = y(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

в случае неотрицательной весовой меры μ была получена формула

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^1 \sqrt{P'_{ac}}\, dx, \tag{2}$$

где P_{ac} — абсолютно непрерывная составляющая первообразной меры μ.

В случае чисто сингулярной меры μ из соотношения (2) следует, что считающая функция $N(\lambda) = \#\{n : \lambda_n < \lambda\}$ собственных значений задачи (1) допускает оценку $o(\sqrt{\lambda})$ вместо обычной асимптотики $N(\lambda) \sim C\sqrt{\lambda}$ в случае меры, содержащей абсолютно непрерывную составляющую (см. также [15], [60]).

В [3] получены похожие результаты для операторов произвольного четного порядка в многомерном случае и лучшие оценки сверху на считающую функцию собственных значений для некоторых специальных классов мер.

В работе [1] получены общие результаты для многомерных интегральных операторов, ядра которых имеют особенность на диагонали. В частности, для дифференциальных операторов четного порядка из результатов этой работы следует, что если весовая мера содержит абсолютно непрерывную компоненту, то ее сингулярная составляющая не влияет на главный член асимптотики спектра.

В последние 20 лет наблюдается новый интерес к этим задачам, а также к близким задачам о спектре краевых задач с сингулярным потенциалом. В работах [5; 10; 12] рассматривается случай индефинитного самоподобного веса в задаче Штурма-Лиувилля. В этом случае для положительной и отрицательной составляющей спектра имеет место асимптотика, аналогичная (3), однако показатель $D \in (0,1)$. В работе [20] асимптотика (3) обобщается на случай дифференциального оператора произвольного четного порядка. Кроме того, показано, что функция s в этой асимптотике является непрерывной. В работах [9] (для уравнения Штурма-Лиувилля) и [62; 8] (для уравнения произвольного четного порядка) рассматривается случай дискретного самоподобного веса. В этом случае собственные числа растут экспоненциально. В работе [30] для уравнения Штурма-Лиувилля рассматриваются самоподобные веса из пространства мультипликаторов в пространствах Соболева. Задача Штурма-Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева, в том числе с потенциалами-распределениями, рассматривается в работах [22—26], [42—47], [49], [53]. Операторы Крейна-Феллера, являющиеся обобщением весовых операторов Штурма-Лиувилля, рассматриваются в серии работ [35—38] (см. также [6]) в случае, когда хотя бы одна из входящих в определение оператора мер является самоподобной.

Степень разработанности темы исследования. Точный степенной порядок D роста считающей функции $N(\lambda)$ для задачи (1) в случае сингулярной самоподобной меры μ был установлен в [39] (см. также более ранние работы [41] и [60], где получены частные результаты, касающиеся классической канторовой лестницы).

В работах [67] и [52] был выделен главный член спектральной асимптотики в случае сингулярной самоподобной меры μ, и показано, что считающая функция собственных значений задачи (1) имеет асимптотику

$$N(\lambda) = \lambda^D \cdot \big(s(\ln \lambda) + o(1)\big), \quad \lambda \to +\infty, \tag{3}$$

где s — некоторая ограниченная и отделенная от нуля T-периодическая функция, а степенной показатель $D \in (0,\frac{1}{2})$. Как функция s (в частности, период T), так и показатель D определяются параметрами самоподобия веса μ. В случае неарифметического типа самоподобия (см. Определение 1 ниже) канторовой лестницы, производной которой является μ, функция s вырождается в константу.

В работе [20] сформулирована следующая гипотеза.

Гипотеза 1. *Функция s в формуле* (3) *является непостоянной для произвольного неравномерного веса μ с арифметически самоподобной первообразной.*

Подтверждению этой гипотезы для определенных классов арифметически самоподобных весов было посвящено несколько работ.

В работе [12] при помощи компьютерных вычислений доказано, что функция s действительно не может являться постоянной в том простейшем случае, когда обобщённая первообразная веса μ представляет собой классическую канторову лестницу.

В работе [11] гипотеза 1 была подтверждена для "ровных" лестниц (см. ниже условия (0.1)). Для таких лестниц была доказана следующая характеризационная теорема.

Теорема А. *Пусть первообразная меры μ представляет собой "ровную" лестницу. Тогда коэффициент s из асимптотики* (3) *допускает представление*

$$\forall t \in [0,T] \quad s(t) = e^{-Dt}\,\sigma(t), \tag{4}$$

где σ — некоторая чисто сингулярная неубывающая функция (т.е. ее производная в смысле обобщенных функций есть мера, сингулярная относительно меры Лебега).

Отсюда утверждение о непостоянстве функции $s(t)$ следует немедленно. Этот результат позднее обобщен в работе [7] на случай уравнения четвертого порядка.

Цели и задачи. В главах 1 и 2 данной диссертации доказывается формула (4) из теоремы А и, следовательно, подтверждается гипотеза 1 для более широкого класса лестниц.

Заметим, что асимптотика (3) является частным случаем *почти регулярной* спектральной асимптотики

$$N(\lambda) \sim \lambda^D \varphi(\lambda) s(\ln \lambda), \qquad \lambda \to +\infty,$$

где $D \in (0,1)$, φ — медленно меняющаяся функция, s — T-периодическая функция.

В главе 3 рассматривается асимптотика спектра тензорного произведения компактных операторов с почти регулярной спектральной асимптотикой (см. соотношение (7) ниже).

Научная новизна. Выносимые на защиту положения являются новыми и получены автором самостоятельно.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Результаты представляют интерес для специалистов по спектральной теории дифференциальных и интегральных операторов. Известные приложения подобных результатов встречаются в задачах, касающихся асимптотик квантования случайных величин и векторов (см. например [40], [58]), сложности в среднем линейных задач, то есть задач приближения непрерывного линейного оператора (см. например [64]), а также в рамках интенсивно развивающейся теории малых уклонений случайных процессов, а именно, для малых уклонений гауссовских случайных процессов в L_2-норме (см. например [51], [50]).

Методология и методы исследования. При доказательстве основных результатов данной диссертации были использованы: классические методы спектральной теории операторов в гильбертовых пространствах; асимптотические методы; методы анализа асимптотики спектра тензорного произведения операторов; методы анализа асимптотики спектра, основанные на связи между спектрами задач на отрезке и его подотрезках, в том числе свойство спектральной периодичности и специально введенное в данной работе свойство спектральной квазипериодичности; свертка Меллина, а также введенная в данной работе обобщающая ее почти меллиновская свертка и ее свойства.

Методы анализа асимптотики спектра тензорного произведения операторов, обобщаемые в данной диссертации, были разработаны в [51] и [50]. В [51] рассматривается случай, в котором считающие функции собственных значений операторов-множителей имеют так называемое *регулярное* асимптотическое поведение:

$$\mathcal{N}(t, \mathcal{T}) \sim \frac{\varphi(1/t)}{t^{1/p}}, \qquad t \to +0,$$

где $p > 0$, а φ — *медленно меняющаяся* функция (в зарубежной литературе — SVF). В работе [50] данный подход переносится на случай, когда считающая функция имеет асимптотику медленно меняющейся функции.

Положения, выносимые на защиту.

1. В случае резонанса 1:1:...:1 доказана спектральная квазипериодичность для задачи Робена, обобщающая свойство спектральной периодичности, выполненное в случае "ровной" лестницы.
2. В случае общего резонанса доказаны теоремы, описывающие связь между спектрами задачи на отрезке и подотрезках, содержащих носитель меры.
3. Теорема A доказана для лестниц с ненулевыми промежуточными интервалами в случаях резонанса 1:1:...:1 и общего резонанса.
4. Исследованы асимптотические свойства почти меллиновской свертки, обобщающей свертку Меллина на случай функций с периодической компонентой.
5. Получен главный член спектральной асимптотики тензорного произведения компактных операторов с почти регулярной спектральной асимптотикой для всех возможных комбинаций параметров маргинальных асимптотик.

Степень достоверности и апробация. Все результаты диссертации снабжены подробными доказательствами и опубликованы в ведущих научных изданиях. Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

– Семинар им. В.И. Смирнова по математической физике в Санкт-Петербургском отделении математического института им. В.А.Стеклова РАН (Санкт-Петербург, 2014, 2017, рук: Н. Н. Уральцева, А. И. Назаров, Т. А. Суслина).
– Seminar at the Institute of Stochastics and Applications, University of Stuttgart (Штутгарт, Германия, 2016, 2017, рук: U. R. Frieberg).
– Семинар «Операторные модели в математической физике» лаборатории операторных моделей и спектрального анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, 2017, рук: А. А. Шкаликов).

– Конференция «Спектральная теория и дифференциальные уравнения», посвящённая столетию Б. М. Левитана (Москва, 2014).
– 6th St.Petersburg Conference in Spectral Theory dedicated to the memory of M.Sh.Birman (Санкт-Петербург, 2014).
– 8th St.Petersburg Conference in Spectral Theory dedicated to the memory of M.Sh.Birman (Санкт-Петербург, 2016).
– Конференция Days on Diffraction (Санкт-Петербург, 2016).
– 26th St.Petersburg Summer Meeting In Mathematical Analysis (Санкт-Петербург, 2017).
– Symposium on Probability Theory and Random Processes (Санкт-Петербург, 2017).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [69—71], [72—75]. Работы [71] и [69] опубликованы в журналах из перечня ВАК. Работа [70] опубликована в издании, удовлетворяющем достаточному условию включения в перечень ВАК (переводная версия этого издания “Journal of Mathematical Sciences” входит в систему цитирования Scopus).

Структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, содержащих 13 параграфов, заключения и списка литературы.

Во введении описаны актуальность темы исследования и степень ее разработанности, поставлены цели и задачи, аргументирована научная новизна, достоверность, теоретическая и практическая значимость результатов, перечислены использованные методы, выносимые на защиту положения, публикации и доклады по теме диссертации, кратко изложена структура работы.

В главе 0 изложены определения основных объектов исследования, их свойства, а также некоторые вспомогательные утверждения, не принадлежащие автору, со ссылками на первоисточники.

В главе 1 утверждение теоремы A обобщается на класс арифметически самоподобных мер, обладающих резонансом $1{:}1{:}\ldots{:}1$ и ненулевыми промежуточными интервалами (см. определение 1 и условия (0.2) ниже).

Заметим, что при доказательстве теоремы A для “ровных” лестниц важную роль играет свойство *спектральной периодичности* для задач Неймана и Робена.

Отличительной особенностью рассматриваемого в данной главе класса мер является наличие свойства спектральной периодичности, аналогичного случаю “ровных” лестниц, для задачи Неймана. Для задачи Робена спектральная периодичность имеет место не всегда, однако мы формулируем и доказываем для нее более слабое свойство *спектральной квазипериодичности.*

Основные результаты главы 1 следующие:

Теорема 1. (спектральная периодичность для задачи Неймана) *Пусть мера μ принадлежит классу самоподобных мер с условиями* (0.2), *и пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений задачи* (1). *Тогда независимо от выбора индекса $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство*

$$\tau\lambda_{mn} = \lambda_n, \tag{5}$$

где τ введена в определении 1.

Теорема 2. (спектральная квазипериодичность для задачи Робена) *Пусть мера μ принадлежит классу самоподобных мер с условиями* (0.2). *Пусть $\{\mu_n^{(1)}\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений граничной задачи*

$$\begin{cases} -y'' = \lambda\mu y, \\ y'(0) - \gamma^{(1)}y(0) = y'(1) + \gamma^{(1)}y(1) = 0, \end{cases}$$

а $\{\mu_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty}$ — аналогичная последовательность для отвечающей тому же уравнению граничной задачи

$$y'(0) - \gamma^{(2)}y(0) = y'(1) + \gamma^{(2)}y(1) = 0.$$

Тогда существуют значения $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)} \geqslant 0$, определяемые параметрами самоподобия, такие что независимо от выбора индекса $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\tau\mu^{(2)}_{m(n+1)-1} \leqslant \mu^{(1)}_n.$$

Эти вспомогательные свойства позволяют доказать для класса самоподобных мер с условиями (0.2) аналог теоремы А.

Теорема 3. *Пусть мера μ принадлежит классу самоподобных мер с условиями* (0.2). *Тогда коэффициент s из асимптотики* (3) *допускает представление*

$$\forall t \in [0,T] \quad s(t) = e^{-Dt}\,\sigma(t),$$

где σ — некоторая чисто сингулярная неубывающая функция.

В главе 2 рассматривается случай общего резонанса, и утверждение теоремы A обобщается на случай произвольной арифметически самоподобной меры с ненулевыми промежуточными интервалами (см. условие (0.3) ниже). Для таких мер в общем случае не выполняется свойство спектральной периодичности, поэтому возникает необходимость скорректировать схему доказательства и вывести некоторые обобщенные свойства задач Неймана и Робена, которые хоть и являются в некотором смысле родственными спектральной периодичности, не связаны с ней прямой импликацией.

Обозначим через $\lambda_n([a,b])$, $n \geqslant 0$, $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$, собственные числа задачи

$$\begin{cases} -y'' = \lambda\mu y, \\ y'(a) = y'(b) = 0, \end{cases}$$

а через

$$N(\lambda,[a,b]) = \#\{n : \lambda_n([a,b]) < \lambda\}$$

их считающую функцию. Заметим, что $\lambda_0([a,b]) = 0$.

Следующие утверждения позволяют связать спектр весовой задачи Штурма-Лиувилля на отрезке со спектрами задач на подотрезках, содержащих носитель меры.

Теорема 4. *Пусть $J_1 = [c_1,d_1]$, $J_2 = [c_2,d_2]$ — подотрезки* $[0,1]$, *и пусть $c_2 - d_1 \geqslant 0$, а $\mu|_{[d_1,c_2]} \equiv 0$. Обозначим $J := [c_1,d_2]$. Тогда функция*

$$F(\lambda) := N(\lambda,J) - N(\lambda,J_1) - N(\lambda,J_2) \tag{6}$$

имеет разрывы в точках $\lambda_n(J)$, $\lambda_n(J_1)$, $\lambda_n(J_2)$. При этом элементы наборов $\{\lambda_n(J)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\lambda_n(J_1)\}_{n=0}^{\infty} \cup \{\lambda_n(J_2)\}_{n=0}^{\infty}$ нестрого чередуются начиная с элемента второго набора. Более того, в точках из $\{\lambda_n(J_1)\}_{n=0}^{\infty} \cup \{\lambda_n(J_2)\}_{n=0}^{\infty}$ функция

F меняет значение с 0 на -1, а в точках из $\{\lambda_n(J)\}_{n=0}^{\infty}$, не содержащихся в $\{\lambda_n(J_1)\}_{n=0}^{\infty} \cup \{\lambda_n(J_2)\}_{n=0}^{\infty}$, меняет значение с -1 на 0.

Теорема 5. *Пусть выполнены предположения Теоремы 4, и пусть $c_2 - d_1 > 0$. Обозначим за $\{\mu_n(J)\}_{n=0}^{\infty}$ элементы набора $\{\lambda_n(J_1)\}_{n=0}^{\infty} \cup \{\lambda_n(J_2)\}_{n=0}^{\infty}$, занумерованные в возрастающем порядке. Тогда*

$$\sum_{n=2}^{\infty} |\ln \lambda_n(J) - \ln \mu_n(J)| < +\infty.$$

Эти свойства замещают свойства спектральной периодичности и квазипериодичности при доказательстве основной теоремы.

Теорема 6. *Пусть мера μ принадлежит классу самоподобных мер с условием* (0.3). *Тогда коэффициент s из асимптотики* (3) *допускает представление*

$$\forall t \in [0,T] \quad s(t) = e^{-Dt}\,\sigma(t),$$

где σ — некоторая чисто сингулярная неубывающая функция.

В главе 3 доказываются общие теоремы об асимптотике спектра тензорного произведения компактных операторов с почти регулярной спектральной асимптотикой. Эти теоремы позволяют перенести результаты о виде асимптотики 3 на некоторые компактные операторы типа тензорного произведения, а также, в ограниченном числе случаев, перенести на получившиеся асимптотики результат о непостоянстве периодической компоненты (теоремы А, 3, 6).

Говоря более развернуто, рассматриваются компактные неотрицательные самосопряженные операторы $\mathcal{T} = \mathcal{T}^* \geqslant 0$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и $\widetilde{\mathcal{T}}$ в гильбертовом пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}$. Через $\lambda_n = \lambda_n(\mathcal{T})$ обозначены собственные числа оператора $\mathcal{T}$, упорядоченные по убыванию и повторяемые согласно кратностям. Для него рассматривается считающая функция

$$\mathcal{N}(t) = \mathcal{N}(t, \mathcal{T}) = \#\{n : \lambda_n(\mathcal{T}) > t\}.$$

Аналогично определяются $\widetilde{\lambda}_n$ и $\widetilde{\mathcal{N}}(t)$ для $\widetilde{\mathcal{T}}$.

Имея заданные при $t \to 0$ асимптотики $\mathcal{N}(t, \mathcal{T})$ и $\mathcal{N}(t, \widetilde{\mathcal{T}})$, мы хотим установить асимптотику $\mathcal{N}(t, \mathcal{T} \otimes \widetilde{\mathcal{T}})$. Полученные результаты легко обобщаются на случай тензорных произведений нескольких сомножителей.

В данной диссертации рассматриваются операторы с почти регулярной асимптотикой

$$\mathcal{N}(t, \mathcal{T}) \sim \frac{\varphi(1/t) \cdot s(\ln(1/t))}{t^{1/p}}, \qquad t \to +0, \tag{7}$$

где $p > 0$, φ — медленно меняющаяся, а s — непрерывная T-периодическая функция. Примерами таких операторов являются гриновские интегральные операторы с сингулярной арифметически самоподобной весовой мерой.

Основные результаты главы 3 заключаются в том, что мы получаем главный член спектральной асимптотики тензорного произведения для всех возможных комбинаций параметров маргинальных асимптотик, налагая лишь незначительные технические ограничения в некоторых случаях. Рассматриваются оператор $\mathcal{T}$ со спектральной асимптотикой (7) и оператор $\widetilde{\mathcal{T}}$, имеющий либо асимптотику

$$\mathcal{N}(t, \widetilde{\mathcal{T}}) = O(t^{-1/\widetilde{p}}), \quad t \to 0+, \qquad \widetilde{p} > p,$$

либо аналогичную (7) асимптотику

$$\mathcal{N}(t, \widetilde{\mathcal{T}}) \sim \frac{\widetilde{\varphi}(1/t) \cdot \widetilde{s}(\ln(1/t))}{t^{1/p}}, \qquad t \to +0, \tag{8}$$

где $\widetilde{\varphi}$ — медленно меняющаяся функция, $\widetilde{s}$ имеет период $\widetilde{T}$. Результаты разделены на несколько случаев в зависимости от соотношений между параметрами спектральных асимптотик операторов $\mathcal{T}$ и $\widetilde{\mathcal{T}}$:

1. $\widetilde{p} > p$.
2. $\widetilde{p} = p$.
   2.1. $\int\limits_1^\infty \varphi(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} = \int\limits_1^\infty \widetilde{\varphi}(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} = \infty$.
      2.1.1. Периоды T и $\widetilde{T}$ функций s и $\widetilde{s}$ соизмеримы.
      2.1.2. Периоды T и $\widetilde{T}$ несоизмеримы.
   2.2. $\int\limits_1^\infty \varphi(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} < \infty, \quad \int\limits_1^\infty \widetilde{\varphi}(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} = \infty$.
   2.3. $\int\limits_1^\infty \varphi(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} < \infty, \quad \int\limits_1^\infty \widetilde{\varphi}(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} < \infty$.

В случаях 1, 2.1.1 асимптотика тензорного произведения оказывается почти регулярной, в случае 2.1.2 – регулярной. В случаях 2.2 и 2.3 получается асимптотика более сложного вида.

Лемма 1. *В формуле (7) функция s имеет вид $s(\tau) = e^{-\tau/p}\varrho(\tau)$, где ϱ — монотонная функция, и значит s — функция ограниченной вариации.*

Теорема 7. *Пусть оператор $\mathcal{T}$ в пространстве $\mathcal{H}$ имеет спектральную асимптотику (7), а оператор $\widetilde{\mathcal{T}}$ в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}$ имеет асимптотику*

$$\widetilde{\mathcal{N}}(t) := \widetilde{\mathcal{N}}(t, \widetilde{\mathcal{T}}) = O(t^{-1/\widetilde{p}}), \quad t \to 0+, \qquad \widetilde{p} > p.$$

Тогда оператор $\mathcal{T} \otimes \widetilde{\mathcal{T}}$ в пространстве $\mathcal{H} \otimes \widetilde{\mathcal{H}}$ имеет асимптотику

$$\mathcal{N}_\otimes(t) := \mathcal{N}(t, \mathcal{T} \otimes \widetilde{\mathcal{T}}) \sim \frac{\varphi(1/t) \cdot s^*(\ln(1/t))}{t^{1/p}}, \quad t \to +0, \tag{9}$$

где

$$s^*(\tau) := \sum_k s(\tau + \ln(\widetilde{\lambda}_k)) \cdot \widetilde{\lambda}_k^{1/p} \tag{10}$$

— периодическая функция с периодом T (ряд сходится, поскольку $\widetilde{p} > p$).

Замечание 1. Отметим, что если функция s имеет структуру (4), то такую же структуру имеет и функция s^* в формуле (10), что влечет ее непостоянство. В случае периодической функции s общего вида функция s^* может вырождаться в константу.

Теорема 8. *Пусть оператор $\mathcal{T}$ имеет спектральную асимптотику (7), а оператор $\widetilde{\mathcal{T}}$ — асимптотику (8). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ выполняются оценки*

$$\mathcal{N}_\otimes(t) \lessgtr \frac{\alpha_\pm(\varepsilon)}{t^{1/p}} \cdot \left[S(t,\varepsilon) + \widetilde{S}(t,\varepsilon) + \int\limits_{\alpha_\mp(\varepsilon)/\varepsilon}^{\varepsilon\tau} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) \widetilde{\varphi}(\sigma) s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right) \widetilde{s}(\ln\sigma) \frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} \right]$$

равномерно по $t > 0$. Здесь интеграл понимается как интеграл Лебега-Стилтьеса, $\tau = \alpha_\pm(\varepsilon)/t$. При $\varepsilon\tau < a_\mp(\varepsilon)/\varepsilon$ интеграл считаем равным нулю. Коэффициенты $\alpha_\pm(\varepsilon) \to 1$ при $\varepsilon \to 0$, а функции $S(t,\varepsilon)$, $\widetilde{S}(t,\varepsilon)$ имеют следующие *асимптотики при* $t \to +0$*:*

$$S(t,\varepsilon) \sim \varphi(1/t) \cdot \sum_{\widetilde{\lambda}_k \geqslant \varepsilon} s(\ln(1/t) + \ln(\widetilde{\lambda}_k))\widetilde{\lambda}_k^{1/p},$$

$$\widetilde{S}(t,\varepsilon) \sim \widetilde{\varphi}(1/t) \cdot \Big(\sum_{\lambda_k \geqslant \varepsilon} \widetilde{s}(\ln(\tau) + \ln(\lambda_k))\lambda_k^{1/p} + \varphi(1/\varepsilon)s(\ln(1/\varepsilon))\widetilde{s}(\ln(\tau\varepsilon))\Big).$$

В теоремах 9–11 мы предполагаем, что

$$\int_1^\infty \varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau} = \int_1^\infty \widetilde{\varphi}(\tau)\frac{d\tau}{\tau} = \infty. \tag{11}$$

Теорема 9. *Пусть операторы* $\mathcal{T}$ *и* $\widetilde{\mathcal{T}}$ *удовлетворяют условиям Теоремы 8. Пусть, кроме того, выполняется соотношение* (11)*, а периоды* s *и* $\widetilde{s}$ *соизмеримы, и наименьший общий период этих функций равен* T*. Тогда*

$$\mathcal{N}_\otimes(t) \sim \frac{\phi(1/t) \cdot s_\otimes(\ln(1/t))}{t^{1/p}}, \quad t \to +0,$$

где $\phi(s) := (\varphi * \widetilde{\varphi})(s)$ *— медленно меняющаяся функция,*

$$s_\otimes(\eta) = \frac{(s \star \widetilde{s})(\eta)}{p} + (s \star \widetilde{s})'(\eta) = e^{-\eta/p}\frac{1}{T}\int_0^T \varrho(\eta - \sigma)d\widetilde{\varrho}(\sigma) \tag{12}$$

— непрерывная положительная T*-периодическая функция.*

Теорема 10. *Пусть операторы* $\mathcal{T}$ *и* $\widetilde{\mathcal{T}}$ *удовлетворяют условиям Теоремы 8. Пусть, кроме того, выполняется соотношение* (11)*, а периоды* T *и* $\widetilde{T}$ *функций* s *и* $\widetilde{s}$ *несоизмеримы. Тогда*

$$\mathcal{N}_\otimes(t) \sim \frac{\psi(1/t)\phi(1/t)}{t^{1/p}}, \quad t \to +0,$$

где $\phi(s) = (\varphi * \widetilde{\varphi})(s)$*,* $\psi(t)$ *— некоторая ограниченная и отделенная от нуля медленно меняющаяся функция.*

Теорема 11. *Пусть операторы* $\mathcal{T}$ *и* $\widetilde{\mathcal{T}}$ *удовлетворяют условиям Теоремы 10. Потребуем дополнительно, чтобы для функций* φ *и* $\widetilde{\varphi}$ *были ограничены следу-*

ющие величины:

$$\left|\frac{\sigma\ln(\sigma)\varphi'(\sigma)}{\varphi(\sigma)}\right| \leqslant C, \quad \left|\frac{\sigma\ln(\sigma)\widetilde{\varphi}'(\sigma)}{\widetilde{\varphi}(\sigma)}\right| \leqslant C, \qquad \sigma \geqslant 1. \tag{13}$$

Тогда

$$\mathcal{N}_\otimes(t) \sim \frac{\mathfrak{C}\phi(1/t)}{t^{1/p}}, \quad t \to +0,$$

где $\phi(s) = (\varphi * \widetilde{\varphi})(s)$, *а константа* $\mathfrak{C}$ *определена следующим соотношением:*

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{T}\int\limits_0^T s(t)dt \cdot \frac{1}{\widetilde{T}}\int\limits_0^{\widetilde{T}} \widetilde{s}(t)dt.$$

Теорема 12. *Пусть операторы* $\mathcal{T}$ *и* $\widetilde{\mathcal{T}}$ *удовлетворяют условиям Теоремы 8, и пусть*

$$\int\limits_1^\infty \varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau} < \infty, \quad \int\limits_1^\infty \widetilde{\varphi}(\tau)\frac{d\tau}{\tau} = \infty,$$

а периоды s *и* $\widetilde{s}$ *совпадают и равны* T. *Кроме того, пусть для* $(\varphi, \widetilde{\varphi})$ *выполняется п.4 Предложения 6. Тогда*

$$\mathcal{N}_\otimes(t) \sim \frac{h_{\tilde{\varphi},\varphi}(1/t) \cdot s_\otimes(\ln(1/t)) + \widetilde{\varphi}(1/t) \cdot \widetilde{s}^*(\ln(1/t))}{t^{1/p}},$$

где $s_\otimes$ *определена в* (12), *а*

$$\widetilde{s}^*(\tau) = \sum_n \widetilde{s}(\tau + \ln(\lambda_n))\lambda_n^{1/p} \tag{14}$$

(ср. (10)*).*

Теорема 13. *Пусть операторы* $\mathcal{T}$ *и* $\widetilde{\mathcal{T}}$ *удовлетворяют условиям Теоремы 8, и пусть*

$$\int\limits_1^\infty \varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau} < \infty, \quad \int\limits_1^\infty \widetilde{\varphi}(\tau)\frac{d\tau}{\tau} < \infty,$$

а для $(\varphi, \widetilde{\varphi})$ *и* $(\widetilde{\varphi}, \varphi)$ *выполняется п.4 Предложения 6. Тогда*

$$\mathcal{N}_\otimes(t) \sim \frac{\varphi(1/t) \cdot s^*(\ln(1/t)) + \widetilde{\varphi}(1/t) \cdot \widetilde{s}^*(\ln(1/t))}{t^{1/p}},$$

где s^* *определена в* (10), $\widetilde{s}^*$ *определена в* (14).

Применение полученных общих теорем продемонстрировано на примере интегральных операторов, отвечающих изученным в главах 1 и 2 задачам.

В § 3 главы 3 полученные результаты применяются к задаче L_2-малых уклонений случайных гауссовских полей, в частности, малых уклонений броуновского листа в единичном кубе с нормой $L_2(\mu)$, где $\mu = \bigotimes_{j=1}^{d} \mu_j$, и каждая из мер μ_j является самоподобной мерой обобщенного канторовского типа.

<u>В заключении</u> перечисляются основные результаты диссертации, а также предлагаются возможные направления для дальнейшей работы.

Работа поддержана совместным грантом СПбГУ и DFG No. 6.65.37.2017 и Российским фондом фундаментальных исследований (проект 16-01-00258а).

Глава 0. Основные определения и вспомогательные сведения

§ 1. Самоподобные функции обобщенного канторовского типа

Пусть $m \geqslant 2$, $\{I_i = [a_i,b_i]\}_{i=1}^m$ — подотрезки $[0,1]$, не пересекающиеся по внутренности, $b_j \leqslant a_{j+1}$, $\{\rho_i\}_{i=1}^m$ — набор положительных чисел, таких что $\sum\limits_{i=1}^m \rho_i = 1$, $\{e_i\}_{i=1}^m$ — булевские величины.

Определим семейство аффинных преобразований

$$S_i(t) = \begin{cases} a_i + (b_i - a_i)\, t, & e_i = 0, \\ b_i - (b_i - a_i)\, t, & e_i = 1, \end{cases}$$

сжимающих $[0,1]$ на I_i и меняющих ориентацию, если $e_i = 1$.

Определим оператор $\mathcal{S}$, действующий в пространстве $L_\infty[0,1]$ следующим образом:

$$\mathcal{S}(f) = \sum_{i=1}^m \left(\chi_{I_i}(e_i + (-1)^{e_i} f \circ S_i^{-1}) + \chi_{\{x>b_i\}}\right) \rho_i.$$

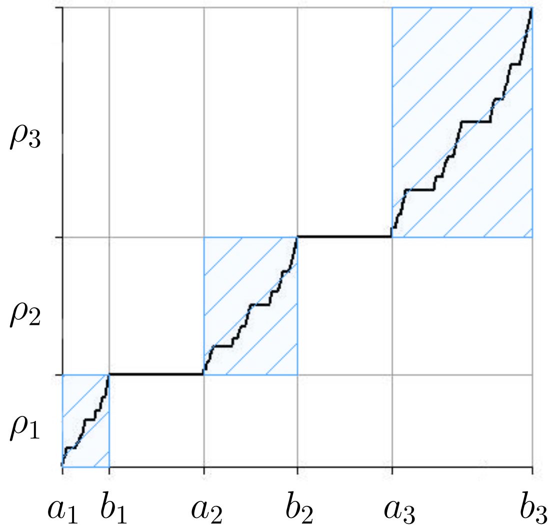
Оператор $\mathcal{S}$ сжимает график f на отрезки I_i и продолжает функцию константами на промежуточных интервалах.

Предложение 1. ([31, Лемма 2.1]) $\mathcal{S}$ — *сжимающее отображение в* $L_\infty[0,1]$.

Отсюда по теореме Банаха о неподвижной точке существует (единственная) функция $\mathscr{C} \in L_\infty[0,1]$ такая, что $\mathcal{S}(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$. Такую функцию $\mathscr{C}(t)$ будем называть *обобщенной канторовой лестницей* с m ступеньками. Пример обобщенной канторовой лестницы с 3 ступеньками показан на рисунке 1.

Функцию $\mathscr{C}(t)$ можно искать как равномерный предел последовательности $\mathcal{S}^k(f)$ для $f(t) \equiv t$, что позволяет считать ее непрерывной и монотонной, причем $\mathscr{C}(0) = 0$, $\mathscr{C}(1) = 1$. Производная функции $\mathscr{C}(t)$ в смысле обобщенных функций — сингулярная мера μ без атомов, самоподобная по Хатчинсону (см.

Рисунок 1 — Пример обобщенной канторовой лестницы с 3 ступеньками.



[48]), т.е. для любого измеримого множества E удовлетворяющая соотношению

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{m} \rho_i \cdot \mu(S_i^{-1}(E \cap I_i)).$$

Более общие способы построения самоподобных функций описаны в [31].

Замечание 2. Не умаляя общности, можно считать, что $a_1 = 0$, $b_m = 1$, в противном случае меру можно растянуть, что приведет к домножению спектра на константу.

Определение 1. Самоподобие будем называть *арифметическим*, если логарифмы величин $\rho_i(b_i - a_i)$ соизмеримы. Иначе говоря,

$$\rho_i(b_i - a_i) = \tau^{k_i}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

для некоторой постоянной τ и $k_i \in \mathbb{N}$, таких, что НОД$(k_i, i = 1, \ldots, m) = 1$. Будем говорить, что имеет место резонанс $k_1{:}k_2{:}\ldots{:}k_m$.

В противном случае самоподобие называется *неарифметическим.*

Будем называть обобщенную канторову лестницу *ровной*, если

$$\rho_i = \rho_1 = \frac{1}{m}, \quad b_i - a_i = b_1 - a_1, \quad a_i - b_{i-1} = a_2 - b_1 > 0, \qquad i = 2, \ldots, m. \quad (0.1)$$

Именно такой класс лестниц рассмотрен в работе [11].

В главе 1 формула (4) из теоремы А доказывается для арифметически самоподобных лестниц с ненулевыми промежуточными интервалами в случае резонанса $1 : 1 : \ldots : 1$, т.е. для арифметически самоподобных лестниц со следующими условиями:

$$a_i - b_{i-1} > 0, \quad k_i = k_1 = 1, \qquad i = 2, \ldots, m. \tag{0.2}$$

В главе 2 формула (4) доказывается для случая общего резонанса, то есть уже лишь с одним ограничением:

$$a_i - b_{i-1} > 0, \qquad i = 2, \ldots, m, \tag{0.3}$$

Замечание 3. Для описанного класса лестниц показатель D и период функции $s(t)$ определяются следующими соотношениями, полученными в [67]:

$$\sum_{i=1}^{m} \tau^{k_i D} = 1, \quad T = -\ln \tau. \tag{0.4}$$

§ 2. Вспомогательные сведения о спектре задачи Штурма-Лиувилля

Осцилляционные свойства

Будем рассматривать на произвольном отрезке $[a,b] \subseteq [0,1]$ формальную граничную задачу

$$\begin{cases} -y'' = \lambda \mu y, \\ y'(a) - \gamma_0 y(a) = y'(b) + \gamma_1 y(b) = 0, \end{cases} \tag{0.5}$$

где μ — произвольная мера. Ее обобщенным решением называется функция $y \in W_2^1[a,b]$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_a^b y'\eta'\,dx + \gamma_0 y(a)\eta(a) + \gamma_1 y(b)\eta(b) = \lambda \int_a^b y\eta\,\mu(dx) \tag{0.6}$$

для любой функции $\eta \in W_2^1[a,b]$.

Нам потребуется следующий частный случай Утверждения 11 из [4].

Предложение 2. *Пусть* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ — *последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений граничной задачи* (0.5) *с произвольной мерой* μ. *Тогда независимо от выбора индекса* $n \in \mathbb{N}_0$ *собственное значение* λ_n *является простым, причём отвечающая ему собственная функция не обращается в нуль на границе отрезка* $[0,1]$ *и имеет внутри этого отрезка в точности* n *различных нулей.*

В частности, Предложение 2 выполняется для произвольных определенных выше самоподобных мер.

Связь спектральных асимптотик для различных краевых задач

Хорошо известно, что изменение граничных условий задачи влечет возмущение ранга два квадратичной формы, отвечающей уравнению. Из общей вариационной теории (см. [2, § 10.3]) потому следует, что считающие функции собственных значений граничных задач, отвечающих одному и тому же уравнению, но разным граничным условиям, не могут различаться более, чем на 2. Таким образом, главный член спектральной асимптотики не зависит от граничных условий.

Кроме того, из [59, Теорема 3.2] (см. также [62, Лемма 5.1] для простого вариационного доказательства) следует, что относительно компактные возмущения оператора (например, младшие члены) не влияют на главный член асимптотики (3).

В связи с вышесказанным, основные результаты в главах 1 и 2 будут сформулированы для задачи Неймана

$$\begin{cases} -y'' = \lambda\mu y, \\ y'(0) = y'(1) = 0, \end{cases} \tag{0.7}$$

где весовая мера μ представляет собой обобщенную производную самоподобной функции обобщенного канторовского типа, хотя некоторые вспомогательные результаты будут касаться собственных чисел задачи Робена для того же уравнения.

Произведение отношений собственных чисел

Предложение 3. ([11, Утверждение 5.2.1]) *Пусть* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ *— последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений граничной задачи* (0.7) *с самоподобным весом, а* $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ *— аналогичная последовательность для отвечающей тому же уравнению граничной задачи*

$$y'(0) - \gamma_0 y(0) = y'(1) + \gamma_1 y(1) = 0,$$

где $\gamma_0, \gamma_1 \geqslant 0$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\ln \mu_n - \ln \lambda_n| < +\infty.$$

Замечание 4. Этот результат можно переписать следующим образом:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{\lambda_n} = \exp \sum_{n=1}^{\infty} |\ln \mu_n - \ln \lambda_n| < +\infty.$$

Более общие результаты, касающиеся похожих произведений отношений собственных чисел, рассмотрены в работе [21].

§ 3. Критерий сингулярности

Предложение 4. ([11, Утверждение 4.1.3]) *Пусть $f \in L_2[0,1]$ — ограниченная непостоянная неубывающая функция, $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность неубывающих непостоянных ступенчатых функций, а $\{\mathfrak{A}_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность множеств точек разрыва функций f_n. Пусть также при $n \to \infty$ выполняется асимптотическое соотношение*

$$\#\mathfrak{A}_n \cdot \|f - f_n\|_{L_2[0,1]} = o(1).$$

Тогда монотонная функция f является чисто сингулярной (т.е. f' сингулярна относительно меры Лебега).

Замечание 5. Другие критерии сингулярности функции, например, в терминах приближения по норме L_p, $p \geqslant 1$, а также их многомерные аналоги и критерии свободные от условия монотонности, можно найти в работах [28], [29].

§ 4. Вспомогательные сведения о медленно меняющихся функциях

Напомним, что положительная функция $\varphi(\tau)$, $\tau > 0$, называется *медленно меняющейся* (на бесконечности), если для любой постоянной $c > 0$

$$\varphi(c\tau)/\varphi(\tau) \to 1, \qquad \text{при } \tau \to +\infty. \tag{0.8}$$

Известны следующие простые свойства медленно меняющихся функций (доказательства можно найти, к примеру, в [65]).

Предложение 5. *Пусть φ — медленно меняющаяся функция. Тогда выполняются следующие свойства:*

1. *Сходимость в (0.8) равномерна по $c \in [a,b]$ при любых $0 < a < b < +\infty$.*
2. *Функция $\tau \mapsto \tau^p \varphi(\tau)$, $p \neq 0$, монотонна при больших значениях τ.*

3. *Существует эквивалентная медленно меняющаяся функция* $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ *(то есть* $\varphi(\tau)/\psi(\tau) \to 1$ *при* $\tau \to \infty$*), такая что*

$$\tau \cdot (\ln(\psi))'(\tau) \to 0, \quad \tau^2 \cdot (\ln(\psi))''(\tau) \to 0, \qquad \tau \to \infty.$$

4. *Если* $\int_1^\infty \varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau} < \infty$*, то* $\varphi(\tau) \to 0$ *при* $\tau \to \infty$*.*

Следуя [51], мы определяем *свертку Меллина* двух медленно меняющихся функций φ и ψ:

$$(\varphi * \psi)(\tau) = \int\limits_1^\tau \varphi(\sigma)\psi(\tau/\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} = h_{\varphi,\psi}(\tau) + h_{\psi,\varphi}(\tau),$$

где

$$h_{\varphi,\psi}(\tau) = \int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \varphi(\sigma)\psi(\tau/\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Предложение 6 ([51], Теорема 2.2)**.** *Выполняются следующие свойства:*

1. *Если* $\int_1^\infty \varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau} = \infty$*, то* $\psi(\tau) = o(h_{\varphi,\psi}(\tau))$ *при* $\tau \to \infty$*.*
2. *Если* $\psi(\tau) = \psi_1(\tau)(1 + o(1))$ *при* $\tau \to \infty$*, то*

$$h_{\varphi,\psi}(\tau) = h_{\varphi,\psi_1}(\tau)(1 + o(1)), \quad \tau \to \infty.$$

Если вдобавок $\int_1^\infty \psi(\tau)\frac{d\tau}{\tau} = \infty$*, то*

$$h_{\psi,\varphi}(\tau) = h_{\psi_1,\varphi}(\tau)(1 + o(1)), \quad \tau \to \infty.$$

3. $h_{\varphi,\psi}$ *— медленно меняющаяся функция.*
4. *Пусть* $\int_1^\infty \varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau} < \infty$*, и, кроме того,*

$$\int_1^\infty \varphi(\sigma)m_\psi(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} < \infty,$$

где

$$m_\psi(\sigma) = \sup_{\tau > \sigma^2} \frac{\psi(\tau/\sigma)}{\psi(\tau)}.$$

Тогда

$$h_{\varphi,\psi}(\tau) = \psi(\tau)\int\limits_1^{\infty} \varphi(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}\cdot(1+o(1)), \qquad \tau\to\infty. \tag{0.9}$$

§ 5. Почти регулярная спектральная асимптотика

Для асимптотики (7) имеет место следующий факт, являющийся аналогом Леммы 3.1 из [51], который мы приведем без доказательства.

Предложение 7. *Следующие утверждения равносильны:*

1. *Для считающей функции собственных значений оператора $\mathcal{T}$ имеет место асимптотика*

$$\mathcal{N}(t,\mathcal{T}) \sim \mathcal{N}_{as}(t) := \frac{\varphi(1/t)\cdot s(\ln(1/t))}{t^{1/p}}, \qquad t\to+0, \tag{0.10}$$

   где $p>0$, φ — медленно меняющаяся функция, s — T-периодическая функция.

2. *Для собственных чисел оператора $\mathcal{T}$ имеет место асимптотика*

$$\lambda_n(\mathcal{T}) \sim \frac{\psi(n)\cdot\mathfrak{s}(\ln(n))}{n^p}, \quad n\to+\infty, \tag{0.11}$$

   где $p>0$, ψ — медленно меняющаяся, $\mathfrak{s}$ — T/p-периодическая функция.

Более того, сходимость интеграла $\int_1^\infty \varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau}$ равносильна сходимости ряда $\sum_n \lambda_n^{1/p}(\mathcal{T})$.

§ 6. Малые уклонения случайных гауссовских процессов

Напомним некоторые определения из теории малых уклонений в L_2 гауссовских случайных функций.

Пусть есть гауссовская случайная функция $X(x)$, $x \in \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$, с нулевым средним и ковариационной функцией $G_X(x,u) = EX(x)X(u)$, $x,u \in \mathcal{O}$. Пусть μ — конечная мера на $\mathcal{O}$. Положим

$$\|X\|_\mu = \Big(\int_{\mathcal{O}} X^2(x)d\mu(x)\Big)^{1/2}$$

Логарифмической асимптотикой малых уклонений в L_2 называется асимптотика $\ln \mathbf{P}\{\|X\|_\mu \leqslant \varepsilon\}$ при $\varepsilon \to 0$.

Согласно хорошо известному разложению Кархунена-Лоева (см. например [19, § 12]) выполняется равенство по распределению

$$\|X(x)\|_\mu^2 \stackrel{d}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \xi_n^2,$$

где ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, — независимые стандартные гауссовские случайные величины, а $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\sum_n \lambda_n < \infty$ — собственные числа интегрального уравнения

$$\lambda f(x) = \int_{\mathcal{O}} G_X(x,u)f(u)d\mu(u). \tag{0.12}$$

Таким образом, задача сводится к изучению асимптотического поведения при $\varepsilon \to 0$ величины $\ln \mathbf{P}\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \xi_n^2 \leqslant \varepsilon^2\}$. Согласно [61], при некоторых технических ограничениях ответ зависит только от главного члена асимптотики считающей функции последовательности λ_n.

Случай чисто степенной асимптотики $\lambda_n \sim Cn^{-p}$, $p > 1$, известен из работ [68], [13], [34], [14]. В работе [51] рассматривается случай регулярного асимптотического поведения, а в работе [20] — почти степенной случай с периодическим множителем.

В § 3 главы 3 мы рассмотрим более общий случай

$$\lambda_n = \phi(n) := \frac{\psi(n) \cdot \theta(\ln(n))}{n^p},$$

где $p > 1$, а функция θ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, ограничена, отделена от нуля, причем функция $\phi(t)$ монотонна на $\mathbb{R}$.

Функция $\phi(n)$ удовлетворяет условиям Теоремы 2 из статьи [57], которая для данного случая выглядит так:

Предложение 8.

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\phi(n)\xi_n^2 \leqslant r\right\} \sim \frac{\exp(L(u)+ur)}{\sqrt{2\pi u^2 L''(u)}}, \quad r \to 0, \tag{0.13}$$

где

$$L(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln f(u\phi(n)), \quad f(t) := (1+2t)^{-1/2},$$

$u = u(r)$ — *любая функция, удовлетворяющая*

$$\lim_{r\to 0} \frac{L'(u)+r}{\sqrt{L''(u)}} = 0.$$

Пусть теперь есть два гауссовских процесса $X(x)$, $x \in \mathcal{O}_1 \subseteq \mathbb{R}^{m_1}$, и $Y(y)$, $y \in \mathcal{O}_2 \subseteq \mathbb{R}^{m_2}$, с нулевыми средними и ковариационными функциями $G_X(x,u)$, $x,u \in \mathcal{O}_1$, и $G_Y(y,v)$, $y,v \in \mathcal{O}_2$, соответственно. Рассмотрим новую гауссовскую функцию $Z(x,y)$, $x \in \mathcal{O}_1$, $y \in \mathcal{O}_2$, с нулевым средним и ковариацией $G_Z((x,y),(u,v)) = G_X(x,u)G_Y(y,v)$. Такая гауссовская функция очевидно существует, а интегральный оператор с ядром G_Z является тензорным произведением операторов с ядрами G_X и G_Y. Поэтому мы используем обозначение $Z = X \otimes Y$ и называем процесс Z тензорным произведением процессов X и Y. Обобщение на большее число множителей с получением $\bigotimes_{j=1}^{d} X_j$ очевидно.

Глава 1. Задача Штурма-Лиувилля с арифметически самоподобным весом. Асимптотика спектра в случае резонанса 1:1:...:1

§ 1. Спектральная периодичность

Рассмотрим краевую задачу Неймана

$$\begin{cases} -y'' = \lambda\mu y, \\ y'(0) = y'(1) = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где μ — самоподобная сингулярная мера. Подставляя в интегральное тождество (0.6), отвечающее данной задаче, функции $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1[a,b]$, устанавливаем, что производная y' является первообразной сингулярной меры без атомов $-\lambda\mu y$, откуда следует, что $y \in \mathcal{C}^1[a,b]$. Аналогичное утверждение верно также для краевой задачи Робена.

Теорема 1. *Пусть для первообразной меры μ выполняются условия* (0.2)*, и пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений задачи* (1.3)*. Тогда независимо от выбора индекса $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство*

$$\tau\lambda_{mn} = \lambda_n. \tag{1.2}$$

Доказательство. Схема доказательства повторяет [11, п. 3.1.1]. Зафиксируем отвечающую собственному значению λ_n собственную функцию y_n. Сопоставим ей функцию $z \in \mathcal{C}[0,1]$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$z = c_k \cdot (y_n \circ S_k^{-1}) \text{ на отрезках } I_k,$$

кроме того, продолжим ее константами на промежуточные отрезки. Не равные нулю величины c_k подбираются таким образом, чтобы совпали значения функции z на концах промежуточных интервалов. Нетрудно видеть, что получившаяся функция непрерывно дифференцируема и удовлетворяет равенству

$$z'(0) = z'(1) = 0.$$

Легко проверить, используя (0.2), что функция z представляет собой собственную функцию краевой задачи (1.3), отвечающую собственному значению $\tau^{-1}\lambda_n$. Кроме того, она имеет на отрезке [0,1] в точности mn корней, что и означает (Предложение 2) выполнение равенства (1.2). $\square$

Замечание 6. В доказательстве Теоремы 1 не используется условие $a_k - b_{k-1} > 0$, поэтому она верна и в случае лестницы, имеющей пустые промежуточные отрезки.

В [11, п.3.1.2] было получено также соотношение, связывающее собственные числа с номерами n и $m(n+1)-1$ в определенных задачах со смешанными граничными условиями вида (0.5). В точности аналогичное утверждение в более общем случае не может быть доказано, поэтому мы выведем одностороннюю оценку, которую назовем *спектральной квазипериодичностью.* Зафиксируем функцию y_n, отвечающую собственному значению $\mu_n^{(1)}$ задачи с граничным условием

$$y'(0) - \gamma^{(1)}y(0) = y'(1) + \gamma^{(1)}y(1) = 0.$$

Построим функцию z следующим образом. Определим

$$z = c_k \cdot (y_n \circ S_k^{-1}) \text{ на отрезках } I_k,$$

кроме того, продолжим ее гладко[1] линейными функциями на промежуточные отрезки до пересечения с осью абсцисс. Если положить $\gamma^{(1)} = \max\limits_k \left(\frac{2}{|a_{k+1}-b_k|}\right)$, то пересечения окажутся близко к краям I_k, и в серединах промежуточных отрезков функция останется не определена[2]. Мы определим ее нулем на всех оставшихся интервалах. Знаки ненулевых параметров c_k определим таким образом, чтобы на каждом промежуточном отрезке функция z имела смену знака. Согласно условиям (0.2) получившаяся функция почти всюду удовлетворяет уравнению (1.3) для $\mu = \tau^{-1}\mu_n^{(1)}$, но, к сожалению, не является гладкой. Мы проведем с ней некоторое непрерывное преобразование, не увеличивающее значения μ и не меняющее числа перемен знака. В результате мы получим гладкую

[1] Здесь и далее в этом параграфе имеется в виду $\mathcal{C}^1$-гладкость.

[2] Длина отрезка до пересечения с осью абсцисс рядом с I_k составляет $|I_k| \cdot (\gamma^{(1)})^{-1}$, что при таком выборе $\gamma^{(1)}$ меньше половины длины любого промежуточного отрезка.

функцию, являющуюся собственной для некоторой краевой задачи, и сможем написать оценку собственных значений этой краевой задачи через $\mu_n^{(1)}$.

Наше преобразование будет состоять из нескольких шагов. На шаге j функция z склеена из собственных функций краевых задач на подотрезках I_k с некоторыми граничными условиями

$$z'(a_k) - \alpha_j^{(k)} z(a_k) = z'(b_k) + \beta_j^{(k)} z(b_k) = 0$$

и продолжена линейно на промежуточные отрезки. На некоторых промежуточных отрезках z уже гладкая, на остальных кусочно линейна. Мы зафиксируем на краях $\alpha_j^{(1)} = \gamma^{(1)} \cdot |I_1|^{-1}$ и $\beta_j^{(m)} = \gamma^{(1)} \cdot |I_m|^{-1}$ и будем непрерывно изменять остальные значения $\alpha_j^{(k)}$ и $\beta_j^{(k)}$ таким образом, чтобы собственные числа, которым отвечают функции на отрезках I_k оставались одинаковыми, z оставалась гладкой на промежутках, где гладкость уже была достигнута, и $\beta_j^{(k)}$, $\alpha_j^{(k+1)}$ уменьшались на концах промежутков, где гладкости еще нет.[3] Эта процедура уменьшает значение μ в силу вариационного принципа и не меняет числа перемен знака согласно Предложению 2.

В некоторый момент хотя бы на одном из промежуточных отрезков нулевой интервал функции z сожмется в точку. Допустим, это произошло между отрезками I_l и I_{l+1}. В этот момент мы умножаем c_{l+1} и все последующие на общий коэффициент таким образом, чтобы z была гладкой на отрезке $[a_l, b_{l+1}]$.

После $m-1$ шага z станет полностью гладкой. После этого можно уменьшить один из параметров краевых условий на концах, чтобы выполнялось

$$\alpha_m^{(1)} = \beta_m^{(m)} = \gamma^{(2)} := \gamma^{(1)} \cdot \min\{|I_1|^{-1}, |I_m|^{-1}\}.$$

Заметим, что получившаяся функция z имеет в точности $m(n+1)-1$ корней, а значит, является собственной функцией, отвечающей собственному числу $\mu_{m(n+1)-1}^{(2)}$ краевой задачи

$$z'(0) - \gamma^{(2)} z(0) = z'(1) + \gamma^{(2)} z(1) = 0.$$

---

[3]Это оказывается возможным в силу непрерывной и монотонной зависимости собственных значений уравнения от параметра.

Кроме того, по построению получившееся $\mu^{(2)}_{m(n+1)-1}$ не превышает исходного значения $\tau^{-1}\mu^{(1)}_n$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Положим* $\gamma^{(1)} = \max\limits_k \left(\frac{2}{|a_{k+1}-b_k|}\right)$, $\gamma^{(2)} = \gamma^{(1)} \cdot \min\{|I_1|^{-1}, |I_m|^{-1}\}$. *Пусть* $\{\mu^{(1)}_n\}_{n=0}^{\infty}$ *— последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений граничной задачи*

$$\begin{cases} -y'' = \lambda\mu y, \\ y'(0) - \gamma^{(1)} y(0) = y'(1) + \gamma^{(1)} y(1) = 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

а $\{\mu^{(2)}_n\}_{n=0}^{\infty}$ *— аналогичная последовательность для отвечающей тому же уравнению граничной задачи*

$$y'(0) - \gamma^{(2)} y(0) = y'(1) + \gamma^{(2)} y(1) = 0.$$

Тогда независимо от выбора индекса $n \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство*

$$\tau\mu^{(2)}_{m(n+1)-1} \leqslant \mu^{(1)}_n.$$

§ 2. Доказательство основного результата

Теорема 3. *Пусть мера* μ *принадлежит классу самоподобных мер с условиями* (0.2). *Тогда коэффициент* s *из асимптотики* (3) *допускает представление*

$$\forall t \in [0,T] \quad s(t) = e^{-Dt}\,\sigma(t),$$

где σ *— некоторая чисто сингулярная неубывающая функция.*

Доказательство. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\mu^{(1)}_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\mu^{(2)}_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений уравнения (1.3), отвечающих граничным условиям

$$\begin{aligned} \lambda_n: &\quad y'(0) = y'(1) = 0, \\ \mu_n^{(1)}: &\quad y'(0) - \gamma^{(1)} y(0) = y'(1) + \gamma^{(1)} y(1) = 0, \\ \mu_n^{(2)}: &\quad y'(0) - \gamma^{(2)} y(0) = y'(1) + \gamma^{(2)} y(1) = 0, \end{aligned}$$

где параметры $\gamma^{(1)}$ and $\gamma^{(2)}$ введены в Теореме 2.

Положим $\sigma_k(t) := m^{-k} N(e^{kT+t})$, где N — считающая функция λ_n. Заметим, что из соотношений (3) и (0.4) следует $\sigma_k(t) = e^{Dt}\big(s(t)+o(1)\big)$ при $k \to +\infty$, а значит при всех $t \in [0,T]$ существует предел $\sigma(t) = \lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k(t)$.

Очевидно, что $\sigma(t)$ монотонна как предел монотонных функций. Утверждение Теоремы 3, таким образом, сводится к утверждению о сингулярности функции $\sigma(t)$.

Докажем, что $\sigma_k(t)$ и $\sigma_{k+1}(t)$ для всех $t \in [0,T]$ различаются не более чем на m^{-k}. Действительно, в силу (0.4) мы имеем

$$|\sigma_k(t) - \sigma_{k+1}(t)| = m^{-k-1} |mN(e^{kT+t}) - N(\tau^{-1} e^{kT+t})|.$$

Для $\lambda_n < e^{kT+t} \leqslant \lambda_{n+1}$ верно $N(e^{kT+t}) = n+1$, а из (1.2) можно увидеть, что $mn + 1 \leqslant N(\tau^{-1} e^{kT+t}) \leqslant m(n+1)$. Отсюда значение модуля в правой части не превышает m, и утверждение доказано.

Далее, в силу равенства (1.2) независимо от выбора индекса $k \in \mathbb{N}$ для всех $t \in [0,T]$, удовлетворяющих при некотором $n \in \mathbb{N}$ неравенствам

$$\lambda_{m(n+1)-1} < e^{(k+1)T+t} < \lambda_{m(n+1)}, \tag{1.4}$$

значения функций σ_k и σ_{k+1} совпадают. Оценим меру множества всех прочих t. Если для $t \in [0,T]$ не выполняется (1.4), то для него верно следующее:

$$(k+1)T + t \in \Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} \big[\ln \lambda_{mn}, \ln \lambda_{m(n+1)-1}\big] \Big) \cap [(k+1)T, (k+2)T].$$

Оценим последовательность частичных сумм ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\ln\lambda_{m(n+1)-1} - \ln\lambda_{mn}| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\ln\lambda_{m(n+1)-1} - \ln\mu^{(2)}_{m(n+1)-1}| + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} |\ln\mu^{(2)}_{m(n+1)-1} - \ln\lambda_{mn}|.$$

Оценим отдельно каждую сумму.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\ln\lambda_{m(n+1)-1} - \ln\mu^{(2)}_{m(n+1)-1}| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\ln\lambda_n - \ln\mu^{(2)}_n| \leqslant C.$$

Здесь первое неравенство получается расширением множества слагаемых, а второе — применением Предложения 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\ln\mu^{(2)}_{m(n+1)-1} - \ln\lambda_{mn}| = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\mu^{(2)}_{m(n+1)-1} - \ln\lambda_{mn} \leqslant \\ \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \ln\mu^{(1)}_n - \ln\lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty} |\ln\mu^{(1)}_n - \ln\lambda_n| \leqslant C.$$

Здесь первое неравенство следует из Теоремы 2, второе из Предложения 3, равенства верны в силу соотношений

$$\mu^{(2)}_{m(n+1)-1} > \mu^{(2)}_{mn} > \lambda_{mn}, \quad \mu^{(1)}_n > \lambda_n.$$

Таким образом мы показали, что мера множества $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \left[\ln\lambda_{mn}, \ln\lambda_{m(n+1)-1}\right]$ ограничена, а это значит, что после пересечения с уходящими на бесконечность отрезками $[(k+1)T, (k+2)T]$ мы получим, что

$$\operatorname{mes}\{t \in [0,T] \,:\, \sigma_{k+1}(t) \neq \sigma_k(t)\} = o(1), \quad k \to \infty.$$

Соответственно, справедливы оценки

$$\|\sigma_{k+1} - \sigma_k\|_{L_2[0,T]} = o(m^{-k}),$$

а тогда и вытекающая из них асимптотика

$$\|\sigma_k - \sigma\|_{L_2[0,T]} = o(m^{-k}).$$

Убедимся, что число точек разрыва функций σ_k допускает при $k \to \infty$ оценку $O(m^k)$. Используя соотношение (1.2), получим следующее неравенство:

$$m^{k+c} + 1 = N(\lambda_{m^{k+c}}) = N(\tau^{-k-c}\lambda_1) \geqslant N(e^{kT+t})$$

для любого целого $c > (1 - T^{-1}\ln\lambda_1)$. Остается заметить, что число разывов функции $N(\lambda)$ на отрезке не превосходит ее значения на правом конце.

Таким образом, функция σ вместе с последовательностью кусочно постоянных приближений σ_k удовлетворяют всем условиям Предложения 4, что и доказывает утверждение теоремы. $\square$

Глава 2. Задача Штурма-Лиувилля с арифметически самоподобным весом. Асимптотика спектра в случае общего резонанса

§ 1. Вспомогательные свойства спектра

Обозначим через $\lambda_n([a,b])$, $n \geqslant 0$, собственные числа задачи

$$\begin{cases} -y'' = \lambda\mu y, \\ y'(a) = y'(b) = 0, \end{cases}$$

а через

$$N(\lambda, [a,b]) = \#\{n : \lambda_n([a,b]) < \lambda\}$$

их считающую функцию. Заметим, что во всех случаях $\lambda_0([a,b]) = 0$.

Из самоподобия меры μ следует такое утверждение.

Лемма 1.

$$\lambda_n(I_i) = \tau^{-k_i}\lambda_n([0,1]),$$

$$N(\lambda, I_i) = N(\tau^{k_i}\lambda, [0,1]).$$

Доказательство. Второе утверждение напрямую следует из первого. Чтобы доказать первое утверждение, рассмотрим отвечающую собственному числу $\lambda_n(I_i)$ собственную функцию y_n и построим функцию z на $[0,1]$ по следующей формуле:

$$z = y_n \circ S_i,$$

где S_i — определенное в § 1 главы 0 аффинное сжатие. Ясно, что z удовлетворяет граничным условиям Неймана на концах отрезка $[0,1]$, и для него выполняется следующее соотношение:

$$z'' = (y_n'' \circ S_i) \cdot (b_i - a_i)^2 = \lambda_n(I_i)(b_i - a_i)^2 \cdot (\mu \circ S_i) \cdot (y_n \circ S_i).$$

Заметим также, что

$$\mathscr{C} \circ S_i = \mathcal{S}(\mathscr{C}) \circ S_i = \rho_i \cdot (e_i + (-1)^{e_i}\mathscr{C}) + \sum_{j=1}^{i-1} \rho_j,$$

откуда взятием производной получаем

$$\mu \circ S_i = \rho_i (b_i - a_i)^{-1} \mu,$$

а значит,

$$z'' = \lambda_n(I_i)\rho_i(b_i - a_i)\mu z = \lambda_n(I_i)\tau^{k_i}\mu z.$$

Таким образом, функция z отвечает собственному числу $\lambda_n(I_i)\tau^{k_i}$ задачи Неймана на отрезке [0,1] и имеет на нем ровно n корней, а значит, утверждение доказано. $\square$

Докажем теперь основные утверждения этого параграфа.

Теорема 4. *Пусть* $J_1 = [c_1, d_1]$, $J_2 = [c_2, d_2]$ *— подотрезки* [0,1], *и пусть* $c_2 - d_1 \geqslant 0$, *а* $\mu|_{[d_1,c_2]} \equiv 0$. *Обозначим* $J := [c_1, d_2]$. *Тогда функция*

$$F(\lambda) := N(\lambda, J) - N(\lambda, J_1) - N(\lambda, J_2) \tag{2.1}$$

имеет разрывы в точках $\lambda_n(J)$, $\lambda_n(J_1)$, $\lambda_n(J_2)$. *При этом элементы наборов* $\{\lambda_n(J)\}_{n=0}^{\infty}$ *и* $\{\lambda_n(J_1)\}_{n=0}^{\infty} \cup \{\lambda_n(J_2)\}_{n=0}^{\infty}$ *нестрого чередуются начиная с элемента второго набора, и в точках* $\{\lambda_n(J_1)\}_{n=0}^{\infty} \cup \{\lambda_n(J_2)\}_{n=0}^{\infty}$ *функция* F *меняет значение с* 0 *на* -1, *а в точках* $\{\lambda_n(J)\}_{n=0}^{\infty}$, *не содержащихся в* $\{\lambda_n(J_1)\}_{n=0}^{\infty} \cup \{\lambda_n(J_2)\}_{n=0}^{\infty}$, *меняет значение с* -1 *на* 0.

Доказательство. Зафиксируем отвечающую собственному значению $\lambda_n(J_1)$ собственную функцию y_n. Построим функцию $z \in \mathcal{C}(J)$ следующим образом:

$$z = y_n \text{ на отрезке } J_1,$$

$$z \equiv y_n(d_1) \text{ на отрезке } [d_1, c_2],$$

наконец, на отрезке J_2 определим z как решение задачи Коши

$$\begin{cases} -z'' = \lambda_n(J_1)\mu z, \\ z(c_2) = y_n(d_1), \\ z'(c_2) = 0. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что получившаяся функция непрерывно дифференцируема и является решением задачи

$$\begin{cases} -z'' = \lambda_n(J_1)\mu z, \\ z'(c_1) = z'(d_2) + \gamma z(d_2) = 0, \end{cases}$$

где $\gamma := -\dfrac{z'(d_2)}{z(d_2)}$ (если $z(d_2) = 0$, то полагаем $\gamma = \infty$).

Обозначим через n_1 и n_2 число корней функции z внутри отрезков J_1 и J_2 соответственно. Число $\lambda_n(J_1)$ является собственым числом задачи Неймана-Робена (или задачи Неймана-Дирихле при $\gamma = \infty$) на отрезке J, имеющим внутри него $n_1 + n_2$ корней, а поскольку в силу вариационного принципа собственные числа задачи монотонно зависят от γ, то можно, учитывая Предложение 2, написать следующие оценки:

$$\begin{aligned} \lambda_{n_1+n_2}(J) <& \lambda_n(J_1) < \lambda_{n_1+n_2+1}(J) && \text{при } \gamma > 0 \text{ или } \gamma = \infty, \\ \lambda_{n_1+n_2-1}(J) <& \lambda_n(J_1) \leqslant \lambda_{n_1+n_2}(J) && \text{при } \gamma \leqslant 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Заметим, что по определению считающей функции

$$N(\lambda_j(J), J) = j, \quad N(\lambda_j(J) + 0, J) = j + 1,$$

для всех $j \geqslant 0$, что позволяет переписать оценки (2.2) в виде следующей формулы:

$$N(\lambda_n(J_1), J) \;=\; \begin{cases} n_1 + n_2 & \text{при } \gamma \leqslant 0, \\ n_1 + n_2 + 1 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2.3}$$

Рассмотрим теперь функцию $z|_{J_2}$. Она является собственной функцией Неймана-Робена с параметром γ на J_2, отвечающей собственному числу $\lambda_n(J_1)$ и имеющей n_2 корней, а значит, рассуждением, аналогичным предыдущему, получаем формулу

$$N(\lambda_n(J_1), J_2) \;=\; \begin{cases} n_2 & \text{при } \gamma \leqslant 0, \\ n_2+1 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2.4}$$

Заметим, также, что в силу Предложения 2

$$n = N(\lambda_n(J_1), J_1) = n_1. \tag{2.5}$$

Складывая формулы (2.3), (2.4), (2.5), приходим к выводу, что

$$F(\lambda_n(J_1)) = N(\lambda_n(J_1), J) - N(\lambda_n(J_1), J_1) - N(\lambda_n(J_1), J_2) = 0.$$

Если $\lambda_n(J_1)$ — одновременно точка разрыва двух считающих функций, то $\gamma = 0$, а значит она оказывается точкой разрыва всех трех. Поэтому во всех случаях

$$F(\lambda_n(J_1) + 0) = -1,$$

так как при увеличении аргумента изменяется на единицу либо только слагаемое $N(\lambda_n(J_1), J)$, либо все три слагаемых изменяются на единицу одновременно.

Точно так же, начиная строить для $\lambda_n(J_2)$ функцию z с J_2 и продолжая на оставшиеся части отрезка, получаем

$$F(\lambda_n(J_2)) = 0, \quad F(\lambda_n(J_2) + 0) = -1.$$

Во всех остальных точках разрывов (в точках разрывов $N(\lambda,J)$, не являющихся разрывами других слагаемых) функция F может только увеличиваться и только на 1, а потому наборы $\{\lambda_n(J)\}$ и $\{\lambda_n(J_1)\} \cup \{\lambda_n(J_2)\}$ должны нестрого чередоваться, и для n, для которых $\lambda_n(J) \notin \{\lambda_n(J_1)\} \cup \{\lambda_n(J_2)\}$, выполняется

$$F(\lambda_n(J)) = -1, \quad F(\lambda_n(J) + 0) = 0.$$

Кроме того, $F(0) = 0$, и в нуле сосредоточены три собственных числа $\lambda_0(J) = \lambda_0(J_1) = \lambda_0(J_2)$, а первая ненулевая точка разрыва — это собственное значение

$\lambda_1(J)$. Таким образом, чередование начинается с элемента набора $\{\lambda_n(J_1)\} \cup \{\lambda_n(J_2)\}$. $\square$

Замечание 7. В доказательстве Теоремы 4 не используется условие $a_k - b_{k-1} > 0$, поэтому она верна и в случае лестницы, имеющей пустые промежуточные отрезки. Кроме того, в нем используются осцилляционные свойства собственных функций (Предложение 2), но не используется самоподобие меры μ.

В случае, когда $m = 2$, $k_1 = k_2 = 1$, из Теоремы 4 с учетом Леммы 1 следует, в частности, соотношение

$$N(\tau^{-1}\lambda_n) = 2N(\lambda_n)$$

и соответствующее ему свойство спектральной периодичности

$$\tau\lambda_{2n} = \lambda_n.$$

Пусть выполнены предположения теоремы 4. Определим F согласно соотношению (2.1). Обозначим за $\{\mu_n(J)\}_{n=0}^{\infty}$ элементы набора $\{\lambda_n(J_1)\}_{n=0}^{\infty} \cup \{\lambda_n(J_2)\}_{n=0}^{\infty}$, упорядоченные по возрастанию. Согласно теореме 4 имеем

$$F(\lambda) = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \in \bigcup_{n=0}^{\infty}(\mu_n(J), \lambda_n(J)].$$

Напомним, что $\mu_0(J) = \lambda_0(J) = \mu_1(J) = 0$, но остальные $\mu_n(J)$, $\lambda_n(J)$ положительны, и мы хотим показать, что множество $\{\ln\lambda > 0 : F(\lambda) = -1\}$ имеет конечную меру, т.е.

$$\left|\bigcup_{n=2}^{\infty}(\ln\mu_n(J), \ln\lambda_n(J)]\right| < +\infty.$$

Теорема 5. *Пусть выполнены предположения теоремы 4 и пусть $c_2 - d_1 > 0$. Тогда*

$$\sum_{n=2}^{\infty} |\ln\lambda_n(J) - \ln\mu_n(J)| < +\infty.$$

Доказательство. Обозначим через $\nu_n(J_1)$ собственные числа задачи

$$\begin{cases} -y'' = \lambda\mu y, \\ y'(c_1) = y'(d_1) + \dfrac{2}{c_2-d_1}\cdot y(d_1) = 0, \end{cases}$$

через $\nu_n(J_2)$ – собственные числа задачи

$$\begin{cases} -y'' = \lambda\mu y, \\ y'(c_2) - \dfrac{2}{c_2-d_1}\cdot y(c_2) = y'(d_2) = 0. \end{cases}$$

Зафиксируем отвечающую $\lambda_n(J)$ собственную функцию y_n и рассмотрим ее сужение на отрезки J_1 и J_2. Поскольку $\mu|_{[d_1,c_2]} \equiv 0$, то $y_n|_{[d_1,c_2]}$ – линейная функция, а значит, выполняется соотношение

$$\frac{y_n(c_2)}{y_n'(c_2)} - \frac{y_n(d_1)}{y_n'(d_1)} = c_2 - d_1.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{y_n(c_2)}{y_n'(c_2)} \geqslant \frac{c_2-d_1}{2} \text{ или } -\frac{y_n(d_1)}{y_n'(d_1)} \geqslant \frac{c_2-d_1}{2},$$

а значит выполняется одна из следующих оценок:

$$0 \leqslant -\frac{y_n'(d_1)}{y_n(d_1)} \leqslant \frac{2}{c_2-d_1}, \tag{2.6}$$

либо

$$0 \leqslant \frac{y_n'(c_2)}{y_n(c_2)} \leqslant \frac{2}{c_2-d_1}.$$

Заметим, что $\lambda_n(J)$ является собственным числом задачи

$$\begin{cases} -y'' = \lambda\rho y, \\ y'(c_1) = y'(d_1) + \gamma\cdot y(d_1) = 0, \end{cases}$$

при $\gamma = -\dfrac{y_n'(d_1)}{y_n(d_1)}$. Его номер совпадает с количеством нулей функции y_n на отрезке J_1. Заметим также, что $\lambda_k(J_1)$ является собственным числом той же задачи при $\gamma = 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$, а $\nu_k^{(1)}$ — собственным числом той же задачи при $\gamma = \dfrac{2}{c_2 - d_1}$.

В силу вариационного принципа, это означает, что если выполняется (2.6), то

$$\lambda_k(J_1) \leqslant \lambda_n(J) \leqslant \nu_k^{(1)},$$

где k — число нулей y_n на отрезке J_1. Иначе, аналогичные доводы влекут

$$\lambda_k(J_2) \leqslant \lambda_n(J) \leqslant \nu_k^{(2)},$$

где k — число нулей y_n на отрезке J_2. Кроме того, согласно теореме 4 наборы $\{\mu_n(J)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\lambda_n(J)\}_{n=0}^{\infty}$ нестрого чередуются начиная с $\mu_0(J)$. Потому, имеем $\mu_n(J) \leqslant \lambda_n(J) \leqslant \mu_{n+1}(J)$. Поскольку все $\lambda_k(J_{1,2})$ принадлежат набору $\{\mu_n(J)\}_{n=0}^{\infty}$, отношение $\lambda_k(J_{1,2}) \leqslant \lambda_n(J)$ влечет $\lambda_k(J_{1,2}) \leqslant \mu_n(J)$. Таким образом, мы получаем, что для любого n, если выполняется (2.6) то существует k, такое, что

$$\lambda_k(J_1) \leqslant \mu_n(J) \leqslant \lambda_n(J) \leqslant \nu_k^{(1)},$$

иначе, существует k, такое, что

$$\lambda_k(J_2) \leqslant \mu_n(J) \leqslant \lambda_n(J) \leqslant \nu_k^{(2)}.$$

Таким образом, каждый из непересекающихся полуинтервалов $(\mu_n(J), \lambda_n(J)]$ содержится в объединении отрезков $\Big(\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}[\lambda_k(J_1), \nu_k^{(1)}]\Big) \cup \Big(\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}[\lambda_k(J_2), \nu_k^{(2)}]\Big)$, откуда следует, что

$$\bigcup_{n=0}^{\infty}(\mu_n(J), \lambda_n(J)] \subset \Big(\bigcup_{k=0}^{\infty}[\lambda_k(J_1), \nu_k^{(1)}]\Big) \cup \Big(\bigcup_{k=0}^{\infty}[\lambda_k(J_2), \nu_k^{(2)}]\Big), \tag{2.7}$$

и если отбросить отрезки, относящиеся к $k = 0$ в правой части (2.7), то нам нужно будет отбросить лишь конечное число отрезков в правой части, иначе говоря, существует число n_0, такое, что

$$\bigcup_{n=n_0}^{\infty}(\mu_n(J), \lambda_n(J)] \subset \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}[\lambda_k(J_1), \nu_k^{(1)}]\Big) \cup \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}[\lambda_k(J_2), \nu_k^{(2)}]\Big),$$

и потому

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |\ln\lambda_n(J) - \ln\mu_n(J)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\ln\nu_k^{(1)} - \ln\lambda_k(J_1)| \\ + \sum_{k=1}^{\infty} |\ln\nu_k^{(2)} - \ln\lambda_k(J_2)|. \tag{2.8}$$

Из (2.8) используя Предложение 3 и тот факт, что $0 < \mu_n(J) \leqslant \lambda_n(J)$ для всех $n \geqslant 2$, мы получаем оценку

$$\sum_{n=2}^{\infty} |\ln\lambda_n(J) - \ln\mu_n(J)| \leqslant \sum_{n=2}^{n_0-1} |\ln\lambda_n(J) - \ln\mu_n(J)| \\ + \sum_{k=1}^{\infty} |\ln\nu_k^{(1)} - \ln\lambda_k(J_1)| + \sum_{k=1}^{\infty} |\ln\nu_k^{(2)} - \ln\lambda_k(J_2)| < +\infty.$$

□

§ 2. Доказательство основного результата

Теорема 6. *Пусть мера μ принадлежит классу самоподобных мер с условием* (0.3)*. Тогда коэффициент s из асимптотики* (3) *допускает представление*

$$\forall t \in [0,T] \quad s(t) = e^{-Dt}\,\sigma(t),$$

где σ — некоторая чисто сингулярная неубывающая функция.

Доказательство. Из (3) имеем

$$N(\lambda) = \lambda^D\big(s(\ln\lambda) + \varepsilon(\lambda)\big),$$

где $\varepsilon(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$. Для произвольного $k \in \mathbb{N}$ получаем

$$N(\tau^{-k}\lambda) = \tau^{-kD}\lambda^D(s(\ln\lambda) + \varepsilon(\tau^{-k}\lambda)),$$

откуда

$$s(\ln\lambda)\lambda^D = \lim_{k\to\infty} \tau^{kD} N(\tau^{-k}\lambda)$$

равномерно на отрезке. Введем обозначение

$$\sigma(t) := s(t)e^{Dt} = \lim_{k\to\infty} \tau^{kD} N(\tau^{-k}e^t), \quad t \in [0,T].$$

Определим более удобную для нас последовательность ступенчатых приближений этой функции.

Случай $m = 2$**.** Рассмотрим сперва для наглядности случай $m = 2$. Пусть, не умаляя общности, $k_1 \leqslant k_2$, где $k_{1,2}$ введены в определении 1. Определим

$$f_j(t) := C\tau^{jD} \sum_{i=0}^{k_2-1} C_i N(\tau^{-i-j}e^t), \quad t \in [0,T].$$

Подберем коэффициенты C_i таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$f_{j+1}(t) - f_j(t) = C\tau^{jD}\Big(N(\lambda) - N(\tau^{k_1}\lambda) - N(\tau^{k_2}\lambda)\Big), \tag{2.9}$$

где $\lambda = \tau^{-k_2-j}e^t$. Прямым вычислением с использованием (0.4) несложно убедиться, что

$$C_i = \begin{cases} \tau^{-(k_2-i)D} & k_2 - i = 1\ldots k_1, \\ \tau^{-(k_2-i)D}\cdot\big(1-\tau^{k_1 D}\big) & k_2 - i = k_1 + 1\ldots k_2. \end{cases}$$

Вторая строчка не реализуется при $k_1 = k_2$. Заметим, что

$$\lim_{j\to+\infty} f_j(t) = C\sum_{i=0}^{k_2-1} C_i\tau^{-iD} \lim_{j\to+\infty} \tau^{(i+j)D} N(\tau^{-i-j}e^t) = \sigma(t)\cdot C\sum_{i=0}^{k_2-1} C_i\tau^{-iD},$$

поэтому если положить

$$C = \Big(\sum_{i=0}^{k_2-1} C_i\tau^{-iD}\Big)^{-1},$$

то будет выполнено

$$\sigma(t) = \lim_{j\to+\infty} f_j(t).$$

Заметим, что по Лемме 1

$$N(\lambda) - N(\tau^{k_1}\lambda) - N(\tau^{k_2}\lambda) = N(\lambda, [0,1]) - N(\lambda, I_1) - N(\lambda, I_2), \tag{2.10}$$

а значит, с учетом Теоремы 4 из (2.9) легко получить оценку

$$|f_{j+1}(t) - f_j(t)| \leqslant C\tau^{jD}. \tag{2.11}$$

Далее, поскольку f_j является суммой k_2 слагаемых, каждое из которых имеет не более $N(\tau^{-k_2-j})$ точек разрыва, число разрывов f_j допускает оценку

$$\#\mathfrak{A}_j \leqslant k_2 N(\tau^{-k_2-j}) \leqslant \widetilde{C}\tau^{-jD}. \tag{2.12}$$

Все, что нам осталось для применения Предложения 4 — это доказать оценку

$$\operatorname{mes}\{t \in [0,T] : f_j(t) \neq f_{j+1}(t)\} = o(1), \quad j \to \infty. \tag{2.13}$$

Мы обозначим через $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ последовательность упорядоченных по возрастанию элементов набора $\{\lambda_n(I_1)\} \cup \{\lambda_n(I_2)\}$. Так как λ_n и μ_n нестрого чередуются, и чередование начинается с μ_0, имеем $\mu_n \leqslant \lambda_n$ для всех $n \geqslant 0$. Учитывая (2.9) и (2.10), для того, чтобы доказать (2.13), нам нужно оценить лебегову меру множества таких t, для которых

$$N(\lambda, [0,1]) - N(\lambda, I_1) - N(\lambda, I_2) \neq 0,$$

где $\lambda = \tau^{-k_2-j}e^t$, $t \in [0,T]$. Это верно только если

$$\lambda \in \bigcup_{n=0}^{\infty} [\mu_n, \lambda_n],$$

а учитывая $\lambda = \tau^{-k_1-j}e^t$ и $t \in [0,T]$, получаем

$$(k_1 + j)T + t \in \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} [\ln\mu_n, \ln\lambda_n]\right) \cap [(k_1 + j)T, (k_1 + j + 1)T].$$

Мера объединения

$$\Big|\bigcup_{n=0}^{\infty}[\ln\mu_n,\ln\lambda_n]\Big| = \sum_{n=1}^{\infty}|\ln\lambda_n - \ln\mu_n|$$

ограничена в силу Теоремы 5, а значит мера его пересечения с уходящими на бесконечность отрезками стремится к нулю, что доказывает оценку (2.13).

Из соотношений (2.11) и (2.13) получаем оценку

$$\|f_{j+1} - f_j\|_{L_2[0,1]} = o(\tau^{jD}),$$

откуда следует, что

$$\|\sigma - f_j\|_{L_2[0,1]} = o(\tau^{jD}).$$

Применяя эту оценку вместе с (2.12), получаем

$$(\#\mathfrak{A}_n + 2)\cdot\|\sigma - f_n\|_{L_2[0,1]} = o(1),$$

что позволяет применить Предложение 4 для функции σ, завершая доказательство теоремы для данного случая.

Общий случай. Пусть $\{\kappa_i\}_{i=1}^{p}$ — упорядоченные по возрастанию элементы множества $\{k_i\}_{i=1}^{m}$ без повторений, $\{l_i\}_{i=1}^{p}$ — их кратности (количество отрезков I_n, которым отвечает значение с соответствующим номером). Аналогично случаю $m=2$ определяем функции и константы

$$f_j(t) := C\tau^{jD}\sum_{i=0}^{\kappa_p-1} C_i N(\tau^{-i-j}e^t), \quad t\in[0,T],$$

$$C_i = \begin{cases} \tau^{-(\kappa_p-i)D} & \kappa_p - i = 1\ldots\kappa_1,\\ \tau^{-(\kappa_p-i)D}\cdot\left(1 - l_1\tau^{\kappa_1 D}\right) & \kappa_p - i = \kappa_1+1\ldots\kappa_2,\\ \tau^{-(\kappa_p-i)D}\cdot\left(1 - l_1\tau^{\kappa_1 D} - l_2\tau^{\kappa_2 D}\right) & \kappa_p - i = \kappa_2+1\ldots\kappa_3,\\ \ldots & \\ \tau^{-(\kappa_p-i)D}\cdot\left(1 - \sum\limits_{j=1}^{p-1} l_j\tau^{\kappa_j D}\right) & \kappa_p - i = \kappa_{p-1}+1\ldots\kappa_p, \end{cases}$$

$$C=\Big(\sum_{i=0}^{\kappa_p-1}C_i\tau^{-iD}\Big)^{-1}.$$

Из (0.4) имеем

$$\sum_{i=1}^{p}l_i\tau^{\kappa_i D}=1,$$

откуда

$$1-\sum_{i=1}^{r}l_i\tau^{\kappa_i D}>0,\quad r=1\dots p-1,$$

а значит, константы C_i положительны, и константа C определена корректно. Так же, как и в предыдущем случае, такой выбор констант C_i обеспечивает нам соотношение

$$f_{j+1}(t)-f_j(t)=C\tau^{jD}\Big(N(\lambda)-\sum_{j=1}^{p}l_jN(\tau^{\kappa_j}\lambda)\Big),$$

где $\lambda=\tau^{-\kappa_p-j}e^t$, а выбор константы C — соотношение

$$\sigma(t)=\lim_{j\to+\infty}f_j(t).$$

Учитывая Лемму 1,

$$f_{j+1}(t)-f_j(t)=C\tau^{jD}\Big(N(\lambda,[0,1])-\sum_{j=1}^{m}N(\lambda,I_j)\Big)=$$

$$=C\tau^{jD}\sum_{j=1}^{m-1}\Big(N(\lambda,[a_j,1])-N(\lambda,[a_{j+1},1])-N(\lambda,I_j)\Big).$$

С учетом Теоремы 4 легко видеть, что

$$|f_{j+1}(t)-f_j(t)|\leqslant C(m-1)\tau^{jD},$$

а число разрывов f_j допускает оценку

$$\#\mathfrak{A}_j\leqslant\kappa_pN(\tau^{-\kappa_p-j})\leqslant\widetilde{C}\tau^{-jD}.$$

Все, что нам осталось для применения Предложения 4 — это доказать оценку

$$\operatorname{mes}\{t \in [0,T] : f_k(t) \neq f_{k+1}(t)\} = o(1), \quad k \to \infty,$$

которая напрямую следует из Теоремы 5 так же, как и в случае $m = 2$. $\square$

Глава 3. Асимптотика спектра тензорного произведения операторов с почти регулярными маргинальными асимптотиками

§ 1. Предварительные факты об асимптотике почти меллиновских сверток

В этом параграфе φ и $\widetilde{\varphi}$ — медленно меняющиеся функции, s и $\widetilde{s}$ — непрерывные, ограниченные, отделенные от нуля функции, имеющие периоды T и $\widetilde{T}$ соответственно, и представимые в виде

$$s(\tau) = e^{-\tau/p}\varrho(\tau), \qquad \widetilde{s}(\tau) = e^{-\tau/p}\widetilde{\varrho}(\tau),$$

где $p > 0$, ϱ и $\widetilde{\varrho}$ монотонны. Отсюда, в частности, следует, что s и $\widetilde{s}$ — функции ограниченной вариации.

Определим *почти меллиновскую свертку*

$$\begin{aligned}
(\varphi s * \widetilde{\varphi s})(\tau) &= \int\limits_1^{\tau} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} = \\
&= H[\varphi s, \widetilde{\varphi s}](\tau) + H_1[\varphi s, \widetilde{\varphi s}](\tau), \\
H[\varphi s, \widetilde{\varphi s}](\tau) &= \int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)}, \\
H_1[\varphi s, \widetilde{\varphi s}](\tau) &= \int\limits_{\sqrt{\tau}}^{\tau} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)}.
\end{aligned}$$

Здесь интеграл понимается как интеграл Лебега-Стилтьеса. При $s = \widetilde{s} \equiv 1$ это определение соответствует свертке Меллина, определенной в § 4 главы 0.

Лемма 2.

$$(\varphi s * \widetilde{\varphi s})(\tau) \asymp (\varphi * \widetilde{\varphi})(\tau), \quad \tau \to \infty,$$

$$H[\varphi s, \widetilde{\varphi s}](\tau) \asymp h_{\widetilde{\varphi},\varphi}(\tau), \quad \tau \to \infty,$$

$$H_1[\varphi s, \widetilde{\varphi}\widetilde{s}](\tau) \asymp h_{\varphi,\widetilde{\varphi}}(\tau), \quad \tau \to \infty.$$

Доказательство. Докажем оценку сверху для первого соотношения, остальные оценки получаются аналогично. Введем оператор

$$F_\sigma[\varphi](\xi) = \varphi(e^{j\widetilde{T}}\sigma) \text{ для } \xi \in [e^{j\widetilde{T}}, e^{(j+1)\widetilde{T}}), \tag{3.1}$$

делающий функцию φ ступенчатой.

Отметим, что

$$F_\sigma[\varphi](\tau) = \varphi(\tau)(1 + o(1)), \quad \tau \to \infty \tag{3.2}$$

равномерно по $\sigma \in [1, e^{\widetilde{T}}]$. Пусть $k \in \mathbb{N}$ такое, что $e^{(k-1)\widetilde{T}} < \tau \leqslant e^{k\widetilde{T}}$. Тогда

$$(\varphi s * \widetilde{\varphi}\widetilde{s})(\tau) \leqslant C \int\limits_1^{e^{k\widetilde{T}}} F_{e^{k\widetilde{T}}/\tau}[\varphi]\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) F_1[\widetilde{\varphi}](\sigma) \frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)}.$$

Заметим, что функция $F_{e^{k\widetilde{T}}/\tau}[\varphi](\dfrac{\tau}{\sigma})F_1[\widetilde{\varphi}](\sigma)$ постоянна по σ на каждом промежутке $(e^{j\widetilde{T}}, e^{(j+1)\widetilde{T}})$, $j = 0 \ldots k-1$. Мера $\dfrac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} = d\ln(\widetilde{s}(\ln\sigma)\sigma^{1/p})$ периодична по логарифму, что позволяет нам заменить интеграл суммой. Получим

$$\begin{aligned}
(\varphi s * \widetilde{\varphi}\widetilde{s})(\tau) &\leqslant C \int_1^{e^{\widetilde{T}}} \frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} \sum_{j=0}^{k-1} F_{e^{k\widetilde{T}}/\tau}[\varphi](\frac{\tau}{e^{j\widetilde{T}}})F_1[\widetilde{\varphi}](e^{j\widetilde{T}}) \leqslant \\
&\leqslant C \int_1^{e^{\widetilde{T}}} \frac{d\sigma}{\sigma} \sum_{j=0}^{k-1} F_{e^{k\widetilde{T}}/\tau}[\varphi](\frac{\tau}{e^{j\widetilde{T}}})F_1[\widetilde{\varphi}](e^{j\widetilde{T}}) = \\
&= C \int\limits_1^{e^{k\widetilde{T}}} F_{e^{k\widetilde{T}}/\tau}[\varphi]\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) F_1[\widetilde{\varphi}](\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} \leqslant C \int\limits_1^{\tau} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}.
\end{aligned}$$

$\square$

Доказательство следующего предложения аналогично Теореме 2.2 из [51], и мы его опускаем.

Предложение 9. *Пусть* $\widetilde{\varphi}(\tau) = \psi_1(\tau)(1 + o(1))$ *при* $\tau \to \infty$, *тогда*

$$H[\varphi s, \widetilde{\varphi}\widetilde{s}](\tau) = H[\varphi s, \psi_1\widetilde{s}](\tau)(1 + o(1)).$$

Если, кроме того, $\int\limits_1^\infty \widetilde{\varphi}(\tau)\dfrac{d\tau}{\tau} = \infty$, *то*

$$H_1[\varphi s, \widetilde{\varphi}\widetilde{s}](\tau) = H_1[\varphi s, \psi_1\widetilde{s}](\tau)(1+o(1)).$$

Лемма 3. *Пусть* $\int\limits_1^\infty \varphi(\tau)\dfrac{d\tau}{\tau} = \infty$, $\int\limits_1^\infty \widetilde{\varphi}(\tau)\dfrac{d\tau}{\tau} = \infty$. *Тогда*

$$H_1[\varphi s, \widetilde{\varphi}\widetilde{s}](\tau) = H[\widetilde{\varphi}\widetilde{s}, \varphi s](\tau)(1+o(1)), \quad \tau\to\infty,$$

а почти меллиновская свертка асимптотически симметрична, т.е.

$$(\varphi s * \widetilde{\varphi}\widetilde{s})(\tau) = (\widetilde{\varphi}\widetilde{s} * \varphi s)(\tau)(1+o(1)), \quad \tau\to\infty.$$

Доказательство. Второе соотношение напрямую следует из первого. Чтобы разобраться в первом, напишем

$$H_1[\varphi s, \widetilde{\varphi}\widetilde{s}](\tau) = \tau^{-1/p}\int\limits_{\sqrt{\tau}}^{\tau} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)\rho\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)d(\widetilde{\rho}(\ln\sigma)).$$

Проведем замену σ на τ/σ и проинтегрируем по частям.

$$H_1[\varphi s, \widetilde{\varphi}\widetilde{s}](\tau) = -\tau^{-1/p}\int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \varphi(\sigma)\widetilde{\varphi}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\rho(\ln\sigma)d\left(\widetilde{\rho}\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\right) =$$

$$= \tau^{-1/p}\int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \varphi(\sigma)\widetilde{\varphi}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\rho}\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)d(\rho(\ln\sigma)) + \varphi(\sigma)\widetilde{\varphi}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)s(\ln\sigma)\widetilde{s}\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\Big|_1^{\sqrt{\tau}} +$$

$$+\int\limits_1^{\sqrt{\tau}}\Big(\frac{\sigma\varphi'(\sigma)}{\varphi(\sigma)} - \frac{(\tau/\sigma)\widetilde{\varphi}'(\tau/\sigma)}{\widetilde{\varphi}(\tau/\sigma)}\Big)\varphi(\sigma)\widetilde{\varphi}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{s}\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)s(\ln\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Первое слагаемое равно $H[\widetilde{\varphi}\widetilde{s}, \varphi s](\tau)$. Остается убедиться, что второе и третье слагаемые удовлетворяют оценке $o(H[\widetilde{\varphi}\widetilde{s}, \varphi s](\tau))$. Разберемся с подстановкой.

$$\varphi(\sigma)\widetilde{\varphi}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) s(\ln\sigma)\widetilde{s}\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\Big|_1^{\sqrt{\tau}} = \varphi(\sqrt{\tau})\widetilde{\varphi}(\sqrt{\tau})s(\ln\sqrt{\tau})\widetilde{s}(\ln\sqrt{\tau}) - \\ - \varphi(1)\widetilde{\varphi}(\tau)s(0)\widetilde{s}(\ln\tau).$$

Все периодические составляющие ограничены.

$$\widetilde{\varphi}(\tau) = o(h_{\varphi,\widetilde{\varphi}}(\tau)) = o(H[\widetilde{\varphi}\widetilde{s}, \varphi s](\tau)), \quad \tau \to \infty$$

по п.1 Предложения 6 с учетом Леммы 2. Остается оценить

$$\varphi(\sqrt{\tau})\widetilde{\varphi}(\sqrt{\tau}) = \varphi(1)\widetilde{\varphi}(\tau) + \int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \left(\varphi(\sigma)\widetilde{\varphi}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\right)'_\sigma d\sigma =$$

$$= \varphi(1)\widetilde{\varphi}(\tau) + \int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \Big(\frac{\sigma\varphi'(\sigma)}{\varphi(\sigma)} - \frac{(\tau/\sigma)\widetilde{\varphi}'(\tau/\sigma)}{\widetilde{\varphi}(\tau/\sigma)}\Big)\varphi(\sigma)\widetilde{\varphi}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma} =$$

$$= \varphi(1)\widetilde{\varphi}(\tau) + \int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \Big(1 + \frac{\sigma\varphi'(\sigma)}{\varphi(\sigma)}\Big)\varphi(\sigma)\widetilde{\varphi}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma} -$$

$$- \int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \varphi(\sigma)\Big(1 + \frac{(\tau/\sigma)\widetilde{\varphi}'(\tau/\sigma)}{\widetilde{\varphi}(\tau/\sigma)}\Big)\widetilde{\varphi}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma} =$$

$$= o(h_{\varphi,\widetilde{\varphi}}(\tau)) + h_{\varphi,\widetilde{\varphi}}(\tau)(1 + o(1)) - h_{\varphi,\widetilde{\varphi}}(\tau)(1 + o(1)) =$$

$$= o(h_{\varphi,\widetilde{\varphi}}(\tau)) = o(H[\widetilde{\varphi}\widetilde{s}, \varphi s](\tau)), \quad \tau \to \infty.$$

При оценке интегралов мы воспользовались п.2 Предложения 6 с учетом п.3 Предложения 5.

Аналогичным рассуждением с использованием Предложения 9 получаем оценку

$$\int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \Big(\frac{\sigma\varphi'(\sigma)}{\varphi(\sigma)} - \frac{(\tau/\sigma)\widetilde{\varphi}'(\tau/\sigma)}{\widetilde{\varphi}(\tau/\sigma)}\Big)\varphi(\sigma)\widetilde{\varphi}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{s}\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)s(\ln\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} = o(H[\widetilde{\varphi}\widetilde{s},\varphi s](\tau))$$

при $\tau\to\infty$, и лемма доказана. □

Случай совпадающих периодов. Рассмотрим случай, когда функции s и $\widetilde{s}$ имеют совпадающие периоды ($T=\widetilde{T}$). Обозначим

$$(s\star\widetilde{s})(\eta) := \frac{1}{T}\int\limits_0^T s(\eta-\lambda)\widetilde{s}(\lambda)d\lambda.$$

Заметим, что определена и непрерывна производная

$$(s\star\widetilde{s})'(\eta) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T s(\eta-\lambda)d(\widetilde{s}(\lambda)) = -\frac{1}{p}(s\star\widetilde{s})(\eta) + e^{-\eta/p}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \varrho(\eta-\lambda)d\widetilde{\varrho}(\lambda). \quad (3.3)$$

Непрерывность следует из непрерывности ϱ и $\widetilde{\varrho}$.

Лемма 4. *Пусть* $\int\limits_1^\infty \widetilde{\varphi}(\tau)\frac{d\tau}{\tau}=\infty$, *$s$ и $\widetilde{s}$ имеют общий период T. Тогда*

$$\int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} \sim h_{\widetilde{\varphi},\varphi}(\tau)(s\star\widetilde{s})(\ln\tau), \quad \tau\to\infty.$$

Если, кроме того, $\int\limits_1^\infty \varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau}=\infty$, *то*

$$\int\limits_1^{\tau} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} \sim (\varphi*\widetilde{\varphi})(\tau)(s\star\widetilde{s})(\ln\tau), \quad \tau\to\infty.$$

Доказательство. Для $e^{2(k-1)T} < \tau \leqslant e^{2kT}$ можно записать

$$\int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} \sim \int\limits_1^{e^{kT}} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1}\int\limits_1^{e^T} \varphi(e^{-jT}\cdot\frac{\tau}{\sigma}) s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(e^{jT}\sigma)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} =$$

$$= \int\limits_1^{e^T} s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{s}(\ln\sigma)\sum_{j=0}^{k-1}\varphi(e^{-jT}\cdot\frac{\tau}{\sigma})\widetilde{\varphi}(e^{jT}\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} =$$

$$= \int\limits_1^{e^T} s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{s}(\ln\sigma)T^{-1}\int\limits_1^{e^{kT}} F_{e^{-(k-1)T}\cdot\frac{\tau}{\sigma}}[\varphi](e^{kT}/\xi)F_\sigma[\widetilde{\varphi}](\xi)\frac{d\xi}{\xi}\frac{d\sigma}{\sigma},$$

где оператор F введен в (3.1). Учитывая асимптотику (3.2) и п.2 Предложения 6, получаем

$$\int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} \sim h_{\widetilde{\varphi},\varphi}(e^{kT})(s\star\widetilde{s})(\ln\tau) \sim h_{\widetilde{\varphi},\varphi}(\tau)(s\star\widetilde{s})(\ln\tau).$$

Второе утверждение леммы получается аналогично, с учетом $\int\limits_1^\infty \varphi(\tau)\dfrac{d\tau}{\tau} = \infty$. □

Лемма 5. *Пусть* $\int\limits_1^\infty \widetilde{\varphi}(\tau)\dfrac{d\tau}{\tau} = \infty$, s *и* $\widetilde{s}$ *имеют общий период* T. *Тогда*

$$H[\varphi s, \widetilde{\varphi s}](\tau) \sim h_{\widetilde{\varphi},\varphi}(\tau)\Big(\frac{1}{p}(s\star\widetilde{s}) + (s\star\widetilde{s})'\Big)(\ln\tau), \quad \tau\to\infty.$$

Если, кроме того, $\int\limits_1^\infty \varphi(\tau)\dfrac{d\tau}{\tau} = \infty$, *то*

$$(\varphi s * \widetilde{\varphi s})(\tau) \sim (\varphi * \widetilde{\varphi})(\tau)\Big(\frac{1}{p}(s\star\widetilde{s}) + (s\star\widetilde{s})'\Big)(\ln\tau), \quad \tau\to\infty.$$

Доказательство. Доказательство в точности такое же, как и в предыдущей лемме. Нужно только убедиться, что

$$\int\limits_1^{e^T} s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} = \tau^{-1/p}\int\limits_0^T \varrho(\ln\tau-\lambda)d\widetilde{\varrho}(\lambda),$$

что очевидно, если в левом интеграле провести замену $\lambda = \ln\sigma$. □

Случай несоизмеримых периодов. Пусть теперь функции s и $\widetilde{s}$ не имеют общего периода.

Лемма 6. *Если периоды T и $\widetilde{T}$ несоизмеримы, то*

$$\int\limits_1^{\tau} s(\ln(\omega/\sigma))\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} = (\mathfrak{C}+o(1))\ln\tau, \qquad \tau\to+\infty$$

равномерно по $\omega\in\mathbb{R}$, где

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{T}\int\limits_0^T s(t)dt\cdot\frac{1}{\widetilde{T}}\int\limits_0^{\widetilde{T}}\widetilde{s}(t)dt. \tag{3.4}$$

Доказательство. Шаг 1. Докажем оценку

$$\int\limits_1^{\tau} s(\ln(\tau/\sigma))\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} = (\mathfrak{C}+o(1))\ln\tau, \qquad \tau\to+\infty. \tag{3.5}$$

Проведем замену $t=\ln\tau$, $r=\ln\sigma$.

$$\int\limits_1^{\tau} s(\ln(\tau/\sigma))\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} = \int\limits_0^t s(t-r)e^{-r/p}d\widetilde{\varrho}(r) =: Q(t).$$

Определим $\widetilde{T}$-периодическую функцию

$$q(t) := \int\limits_0^T s(r)\widetilde{s}(t+T-r)dr = \int\limits_t^{t+T} s(t-r)\widetilde{s}(r)dr.$$

Заметим, что определена и непрерывна ее производная

$$q'(t) = \int\limits_0^T s(r)d\widetilde{s}(t+T-r) = \int\limits_t^{t+T} s(t-r)d\widetilde{s}(r) = -\frac{1}{p}\cdot q(t) + \int\limits_t^{t+T} s(t-r)e^{-r/p}d\widetilde{\varrho}(r).$$

Поэтому

$$Q(t+T) - Q(t) = \int\limits_t^{t+T} s(t-r)e^{-r/p}d\widetilde{\varrho}(r) = q'(t) + \frac{1}{p}\cdot q(t) =: q_1(t),$$

где $q_1(t)$ — непрерывная $\widetilde{T}$-периодическая функция. Отсюда

$$Q(t+nT) = Q(t) + \sum_{k=0}^{n-1} q_1(t+kT). \tag{3.6}$$

По эргодической теореме Окстоби (см. [63]) имеем

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} q_1(t+kT) = \frac{1}{\widetilde{T}}\int\limits_0^{\widetilde{T}} q_1(t)dt \tag{3.7}$$

равномерно по t. Из (3.6) и (3.7) получаем оценку

$$Q(t) = (\mathfrak{C} + o(1))t, \qquad t\to+\infty,$$

где

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{T\widetilde{T}}\int\limits_0^{\widetilde{T}} q_1(t)dt = \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{T}\int\limits_0^T s(t)dt\cdot\frac{1}{\widetilde{T}}\int\limits_0^{\widetilde{T}} \widetilde{s}(t)dt.$$

Подставляем $t = \ln\tau$, и формула (3.5) доказана.

Шаг 2. Для любого значения τ можно подобрать $k(\tau)\in\mathbb{Z}$, такое что

$$0 \leqslant \tau - \omega - Tk(\tau) < T.$$

Тогда

$$\int\limits_{1}^{\tau} s(\ln(\omega/\sigma))\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} = \int\limits_{\omega+Tk(\tau)}^{\tau} s(\ln(\omega/\sigma))\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} + \\ + \int\limits_{1}^{\omega+Tk(\tau)} s(\ln((\omega+Tk(\tau))/\sigma))\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)}.$$

Первое слагаемое равномерно ограничено, а второе допускает оценку

$$(\mathfrak{C}+o(1))\ln(\omega+Tk(\tau)) = (\mathfrak{C}+o(1))\ln\tau, \qquad \tau\to+\infty.$$

$\square$

§ 2. Спектральная асимптотика тензорных произведений

Лемма 7. *В формуле* (0.10) *функция* s *имеет вид*

$$s(\tau) = e^{-\tau/p}\varrho(\tau),$$

где ϱ *— монотонная функция, и значит* s *— функция ограниченной вариации.*

Доказательство. Асимптотика может быть переписана следующим образом:

$$\frac{s(\ln(1/t))}{t^{1/p}} = \frac{\mathcal{N}(t)}{\varphi(1/t)}(1+\varepsilon(t)), \quad \varepsilon(t)\to 0 \text{ при } t\to+0.$$

Сделав замену t на $e^{-kT}t$, получаем

$$\frac{s(\ln(1/t))}{(e^{-kT}t)^{1/p}} = \frac{\mathcal{N}(e^{-kT}t)}{\varphi(e^{kT}/t)}(1+\varepsilon(e^{-kT}t)).$$

Отсюда

$$\frac{s(\ln(1/t))}{t^{1/p}} = \lim_{k\to+\infty} e^{-\frac{kT}{p}}\frac{\mathcal{N}(e^{-kT}t)}{\varphi(e^{kT}/t)},$$

причем сходимость равномерна на отрезке $[1, e^T]$. Таким образом, для фиксированного $\varepsilon > 0$ мы получаем выражение

$$s(\ln(1/t)) = t^{\frac{1}{p}+\varepsilon} \cdot \lim_{k\to+\infty} \frac{e^{-\frac{kT}{p}-kT\varepsilon}\mathcal{N}(e^{-kT}t)}{(e^{kT}/t)^{-\varepsilon}\varphi(e^{kT}/t)}.$$

Заметим, что числитель дроби монотонно убывает по t, а функция в знаменателе монотонно растет по t при достаточно больших значениях k по п.2 Предложения 5. Введем обозначение

$$\varrho_\varepsilon(\ln(1/t)) := \lim_{k\to+\infty} \frac{e^{-\frac{kT}{p}-kT\varepsilon}\mathcal{N}(e^{-kT}t)}{(e^{kT}/t)^{-\varepsilon}\varphi(e^{kT}/t)}.$$

Как равномерный предел монотонных функций, ϱ_ε монотонна. Функция s имеет вид

$$s(\tau) = e^{-(\frac{1}{p}+\varepsilon)\tau}\varrho_\varepsilon(\tau).$$

Перейдя к пределу по $\varepsilon \to 0$ и обозначив $\varrho(\tau) := \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varrho_\varepsilon(\tau)$, получаем выражение

$$s(\tau) = e^{-\tau/p}\varrho(\tau),$$

где ϱ — тоже монотонная функция. □

Замечание 8. Для некоторых гриновских интегральных операторов с сингулярной арифметически самоподобной весовой мерой (теоремы A, 3, 6), удается показать, что $\varrho(\tau)$ — непрерывная чисто сингулярная функция, то есть ее обобщенная производная есть мера, сингулярная относительно меры Лебега.

Далее считаем, что все возникающие в асимптотиках периодические функции непрерывны (таким образом выполняются все предварительные требования § 3), а согласно п.3 Предложения 5, все медленно меняющиеся функции можно считать C^2-гладкими.

Теорема 7. *Пусть оператор $\mathcal{T}$ в пространстве $\mathcal{H}$ имеет спектральную асимптотику* (0.10)*, а оператор $\widetilde{\mathcal{T}}$ в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}$ имеет асимптотику*

$$\widetilde{\mathcal{N}}(t) := \mathcal{N}(t, \widetilde{\mathcal{T}}) = O(t^{-1/\widetilde{p}}), \quad t \to 0+, \qquad \widetilde{p} > p.$$

Тогда оператор $\mathcal{T}\otimes\widetilde{\mathcal{T}}$ *в пространстве* $\mathcal{H}\otimes\widetilde{\mathcal{H}}$ *имеет асимптотику*

$$\mathcal{N}_{\otimes}(t):=\mathcal{N}(t,\mathcal{T}\otimes\widetilde{\mathcal{T}})\sim\frac{\varphi(1/t)\cdot s^{*}(\ln(1/t))}{t^{1/p}},\quad t\to+0,\tag{3.8}$$

где

$$s^{*}(\tau):=\sum_{k}s(\tau+\ln(\widetilde{\lambda}_k))\cdot\widetilde{\lambda}_k^{1/p}\tag{3.9}$$

— периодическая функция с периодом T *(ряд сходится, поскольку* $\widetilde{p}>p$*).*

Доказательство. Поскольку собственные числа тензорного произведения операторов равны произведениям их собственных чисел, имеем

$$\mathcal{N}_{\otimes}(t)=\#\{k,j:\lambda_k\widetilde{\lambda}_j>t\}=\sum_{k}\#\{j:\lambda_j>t/\widetilde{\lambda}_k\}=\sum_{k}\mathcal{N}(t/\widetilde{\lambda}_k).$$

Таким образом,

$$\frac{t^{1/p}}{\varphi(1/t)}\sum_{k}\mathcal{N}(t/\widetilde{\lambda}_k)=\sum_{k}\left(\frac{(t/\widetilde{\lambda}_k)^{1/p}\mathcal{N}(t/\widetilde{\lambda}_k)}{\varphi(\widetilde{\lambda}_k/t)s(\ln(\widetilde{\lambda}_k/t))}\right)\left(\frac{\varphi(\widetilde{\lambda}_k/t)}{\varphi(1/t)}\right)s(\ln(\widetilde{\lambda}_k/t))\widetilde{\lambda}_k^{1/p}.$$

Первый множитель равномерно ограничен и стремится к единице при $t\to 0+$ ввиду (0.10). Второй множитель также стремится к единице, кроме того, поскольку для любого ε функция $\tau^{\varepsilon}\varphi(\tau)$ возрастает при $\tau>\tau_0(\varepsilon)$ по п.2 Предложения 5, имеет место оценка

$$\frac{\lambda^{\varepsilon}\varphi(\lambda\tau)}{\varphi(\tau)}=\frac{(\lambda\tau)^{\varepsilon}\varphi(\lambda\tau)}{\tau^{\varepsilon}\varphi(\tau)}\leqslant 1\quad\text{при }\lambda\tau>\tau_0(\varepsilon),\lambda<1.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ равномерно по $t<1$ выполняется оценка

$$\frac{\varphi(\widetilde{\lambda}_k/t)}{\varphi(1/t)}\leqslant C(\varepsilon)\widetilde{\lambda}_k^{-\varepsilon},$$

откуда

$$\frac{\varphi(\widetilde{\lambda}_k/t)}{\varphi(1/t)}\widetilde{\lambda}_k^{1/p}\leqslant C(\varepsilon)\cdot k^{-\widetilde{p}(1/p-\varepsilon)},$$

что при выборе достаточно малого ε (т.ч. $\widetilde{p}(1/p-\varepsilon)>1$) дает нам оценку, необходимую для применения теоремы Лебега о мажорированной сходимости. Переходя к пределу, получаем (3.8). $\square$

Замечание 9. При произвольном выборе функции s и оператора $\widetilde{\mathcal{T}}$ функция $s^*(\tau)$, вообще говоря, может вырождаться в константу. Мы можем, например, потребовать $s(\tau)+s(\tau+T/2)=1$, $T=2p\ln 2$, а оператор $\widetilde{\mathcal{T}}$ взять конечномерным с тремя собственными числами 2^p, 2^p и 2^{2p}. Тогда

$$s^*(\tau)=s(\tau+p\ln 2)\cdot 2+s(\tau+p\ln 2)\cdot 2+s(\tau+2p\ln 2)\cdot 2^2=$$
$$=4(s(\tau)+s(\tau+T/2))=const.$$

Однако, если $s(\tau)=\exp(-\tau/p)\varrho(\tau)$, где $\varrho(\tau)$ — неубывающая чисто сингулярная функция (как в Замечании 8), то никакая линейная комбинация сдвигов не будет постоянной. Более того, можно отметить, что в этом случае функция $s^*(\tau)$ тоже имеет вид

$$s^*(\tau)=\exp(-\tau/p)\varrho^*(\tau),\qquad \varrho^*(\tau)=\sum_k \varrho(\tau+\ln\widetilde{\lambda}_k),$$

и $\varrho^*(\tau)$ является чисто сингулярной функцией в силу монотонности $\varrho(\tau)$.

Рассмотрим теперь случай, когда операторы имеют совпадающие степенные показатели спектральной асимптотики.

Теорема 8. *Пусть оператор $\mathcal{T}$ имеет спектральную асимптотику* (0.10), *а оператор $\widetilde{\mathcal{T}}$ — асимптотику*

$$\mathcal{N}(t,\widetilde{\mathcal{T}})\sim\widetilde{\mathcal{N}}_{as}(t):=\frac{\widetilde{\varphi}(1/t)\cdot\widetilde{s}(\ln(1/t))}{t^{1/p}},\qquad t\to+0.\tag{3.10}$$

Здесь $\widetilde{\varphi}$ — медленно меняющаяся функция, $\widetilde{s}$ имеет период $\widetilde{T}$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ выполняются оценки

$$\mathcal{N}_{\otimes}(t)\leqslant\frac{\alpha_{\pm}(\varepsilon)}{t^{1/p}}\cdot\left[S(t,\varepsilon)+\widetilde{S}(t,\varepsilon)+\int\limits_{\alpha_{\mp}(\varepsilon)/\varepsilon}^{\varepsilon\tau}\varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)}\right]$$

равномерно по $t>0$. Здесь интеграл понимается как интеграл Лебега-Стилтьеса, $\tau=\alpha_\pm(\varepsilon)/t$. При $\varepsilon\tau<a_\mp(\varepsilon)/\varepsilon$ интеграл считаем равным нулю. Коэффициенты $\alpha_\pm(\varepsilon)\to 1$ при $\varepsilon\to 0$, а функции $S(t,\varepsilon)$, $\widetilde{S}(t,\varepsilon)$ имеют следующие асимптотики при $t\to +0$:

$$S(t,\varepsilon)\sim\varphi(1/t)\cdot\sum_{\widetilde{\lambda}_k\geqslant\varepsilon}s(\ln(1/t)+\ln(\widetilde{\lambda}_k))\widetilde{\lambda}_k^{1/p},$$

$$\widetilde{S}(t,\varepsilon)\sim\widetilde{\varphi}(1/t)\cdot\Big(\sum_{\lambda_k\geqslant\varepsilon}\widetilde{s}(\ln(\tau)+\ln(\lambda_k))\lambda_k^{1/p}+\varphi(1/\varepsilon)s(\ln(1/\varepsilon))\widetilde{s}(\ln(\tau\varepsilon))\Big). \quad (3.11)$$

Доказательство. Доказательство следует схеме Теоремы 3.3 в [51]. Докажем оценку сверху, оценка снизу может быть получена аналогично.

$$t^{1/p}\mathcal{N}_\otimes(t)=t^{1/p}\sum_{\widetilde{\lambda}_k<\varepsilon}\mathcal{N}(t/\widetilde{\lambda}_k)+S(t,\varepsilon),$$

где

$$S(t,\varepsilon)=t^{1/p}\sum_{\widetilde{\lambda}_k\geqslant\varepsilon}\mathcal{N}(t/\widetilde{\lambda}_k).$$

Асимтотика $S(t,\varepsilon)$ получается из Теоремы 7 для конечномерного оператора $\widetilde{\mathcal{T}}$.

Обозначим за $\widetilde{\mu}$ обратную функцию к $\widetilde{\mathcal{N}}_{as}$. Тогда $\widetilde{\lambda}_k/\widetilde{\mu}(k)\to 1$ при $k\to\infty$, а значит

$$\alpha_-(\varepsilon)\widetilde{\mu}(k)\leqslant\widetilde{\lambda}_k\leqslant\alpha_+(\varepsilon)\widetilde{\mu}(k)\quad \text{при } \widetilde{\lambda}_k<\varepsilon$$

для некоторых $\alpha_\pm(\varepsilon)$, причем $\alpha_\pm(\varepsilon)\to 1$ при $\varepsilon\to 0$.

Пользуясь монотонностью $\mathcal{N}$, получаем

$$\sum_{\widetilde{\lambda}_k<\varepsilon}\mathcal{N}(t/\widetilde{\lambda}_k)\leqslant\sum_{\widetilde{\mu}(k)<\alpha_-^{-1}(\varepsilon)\varepsilon}\mathcal{N}\Big(\frac{t}{\alpha_+(\varepsilon)\widetilde{\mu}(k)}\Big),$$

а из монотонности функции $k\mapsto\mathcal{N}\big(\frac{t}{\alpha_+(\varepsilon)\widetilde{\mu}(k)}\big)$ получается

$$t^{1/p}\sum_{\widetilde{\lambda}_k<\varepsilon}\mathcal{N}(t/\widetilde{\lambda}_k)\leqslant t^{1/p}\mathcal{N}\Big(\frac{\alpha_-(\varepsilon)t}{\alpha_+(\varepsilon)\varepsilon}\Big)+t^{1/p}\int\limits_0^{\varepsilon\alpha_-^{-1}(\varepsilon)}\mathcal{N}\Big(\frac{t}{\alpha_+(\varepsilon)\mu}\Big)(-d\widetilde{\mathcal{N}}_{as}(\mu)). \quad (3.12)$$

Первое слагаемое оценивается как $O(\varepsilon^{1/p}\varphi(1/t))$, а потому, добавляя его к слагаемому $S(t,\varepsilon)$, получаем $\alpha_+(\varepsilon)S(t,\varepsilon)$. Далее, рассматриваем $-d\widetilde{\mathcal{N}}_{as}(\mu)$ как меру Лебега-Стилтьеса, и записываем

$$-d\widetilde{\mathcal{N}}_{as}(\mu) = \frac{1}{\mu}\widetilde{\varphi}(1/\mu)\widetilde{\varrho}(\ln(1/\mu))\Big(\frac{-\mu d(\widetilde{\varrho}(\ln(1/\mu)))}{\widetilde{\varrho}(\ln(1/\mu))} + \frac{\widetilde{\varphi}'(1/\mu)}{\mu\widetilde{\varphi}(1/\mu)}d\mu\Big). \tag{3.13}$$

Плотность второго слагаемого стремится к нулю при $\mu \to 0$, тогда как первое слагаемое

$$\frac{-\mu d(\widetilde{\varrho}(\ln(1/\mu)))}{\widetilde{\varrho}(\ln(1/\mu))} = \frac{d\widetilde{\varrho}(\ln(1/\mu))}{\widetilde{\varrho}(\ln(1/\mu))} = d(\ln(\widetilde{\varrho}(\lambda))),$$

где $\lambda = \ln(1/\mu)$, является положительной периодической мерой, так как

$$\ln(\varrho(\tau+T)) = \ln(\varrho(\tau)) + \frac{T}{p}.$$

Значит, при малых значениях ε вклад второго слагаемого в (3.13) в интеграл из (3.12) пренебрежимо мал, и этот интеграл можно оценить через

$$\alpha_+(\varepsilon)t^{1/p}\int\limits_0^{\varepsilon\alpha_-^{-1}(\varepsilon)} \mathcal{N}\Big(\frac{t}{\alpha_+(\varepsilon)\mu}\Big)\widetilde{\varphi}(1/\mu)(-d(\widetilde{\varrho}(\ln(1/\mu)))).$$

Разбивая на два интеграла и заменяя переменные, получаем оценку

$$\alpha_+(\varepsilon)t^{1/p}\int\limits_\varepsilon^{+\infty}\mathcal{N}(s)\widetilde{\varphi}(\tau s)d(\widetilde{\varrho}(\ln(\tau s))) + \alpha_+(\varepsilon)t^{1/p}\int\limits_{\alpha_-(\varepsilon)/\varepsilon}^{\varepsilon\tau}\mathcal{N}(\sigma/\tau)\widetilde{\varphi}(\sigma)d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)).$$

Замена во втором интеграле $\mathcal{N}$ на $\alpha_+(\varepsilon)\mathcal{N}_{as}$ дает в точности третье слагаемое желаемой оценки. Первый же интеграл дает слагаемое $\widetilde{S}(t,\varepsilon)$. Кроме того,

$$\frac{\widetilde{\varphi}(\alpha_+(\varepsilon)s/t)}{\widetilde{\varphi}(1/t)} \to 1 \quad \text{при } t \to 0$$

раномерно по $s \in [\varepsilon, \lambda_1(\mathcal{T})]$. Таким образом,

$$\widetilde{S}(t,\varepsilon) \sim \widetilde{\varphi}(1/t)\int\limits_\varepsilon^{+\infty}\mathcal{N}(s)d(\widetilde{s}(\ln(\tau s))s^{1/p}).$$

Ясно, что $\mathcal{N}(s) = 0$ при $s > \lambda_1(\mathcal{T})$. Интегрируя по частям, получаем асимптотику (3.11). $\square$

В Теоремах 3-5 мы предполагаем, что

$$\int_1^\infty \varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau} = \int_1^\infty \widetilde{\varphi}(\tau)\frac{d\tau}{\tau} = \infty. \tag{3.14}$$

Теорема 9. *Пусть операторы $\mathcal{T}$ и $\widetilde{\mathcal{T}}$ удовлетворяют условиям Теоремы 8. Пусть, кроме того, выполняется соотношение* (3.14), *а периоды s и $\widetilde{s}$ соизмеримы, и наименьший общий период этих функций равен T. Тогда*

$$\mathcal{N}_\otimes(t) \sim \frac{\phi(1/t)\cdot s_\otimes(\ln(1/t))}{t^{1/p}}, \quad t \to +0,$$

где $\phi(s) := (\varphi * \widetilde{\varphi})(s)$ — медленно меняющаяся функция,

$$s_\otimes(\eta) = \frac{(s\star\widetilde{s})(\eta)}{p} + (s\star\widetilde{s})'(\eta) = e^{-\eta/p}\frac{1}{T}\int_0^T \varrho(\eta-\sigma)d\widetilde{\varrho}(\sigma) \tag{3.15}$$

— непрерывная положительная T-периодическая функция.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и рассматриваем полученную в Теореме 8 оценку. Согласно п.1 Предложения 6 имеем

$$S(t,\varepsilon) = o(\phi(1/t)), \quad \widetilde{S}(t,\varepsilon) = o(\phi(1/t)), \qquad t \to +0.$$

Далее, можем расширить промежуток интегрирования, поскольку, учитывая $\tau = \alpha_\pm(\varepsilon)/t$ и пользуясь п.1 Предложения 6, имеем

$$\int_{\varepsilon\tau}^{\tau} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} \sim$$

$$\sim \widetilde{\varphi}(\tau)\int_1^{1/\varepsilon} \varphi(\sigma)s(\ln\sigma)\widetilde{s}(\ln(\tau/\sigma))\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln(\tau/\sigma)))}{\widetilde{\varrho}(\ln(\tau/\sigma))} = o(\phi(1/t)), \quad t \to +0,$$

$$\int\limits_{1}^{\alpha_{\mp}(\varepsilon)/\varepsilon} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} \sim$$

$$\sim \varphi(\tau)\int\limits_{1}^{\alpha_{\mp}(\varepsilon)/\varepsilon} \widetilde{\varphi}(\sigma)s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} = o(\phi(1/t)), \quad t\to+0.$$

Таким образом

$$\mathcal{N}_{\otimes}(t) \lesseqgtr \frac{\alpha_{\pm}(\varepsilon)}{t^{1/p}}(\varphi s * \widetilde{\varphi}\widetilde{s})(\tau)(1+o(1)). \tag{3.16}$$

Применяя теперь Лемму 5, получаем

$$\mathcal{N}_{\otimes}(t) \lesseqgtr \alpha_{\pm}(\varepsilon)\frac{\phi(\tau)}{t^{1/p}}\Big(\frac{(s\star\widetilde{s})}{p} + (s\star\widetilde{s})'\Big)(\ln(\tau))(1+o(1)), \quad t\to+0.$$

Заметим, кроме того, что $\phi(\tau) = \phi(1/t)(1+o(1))$ при $t\to+0$. Отсюда

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to+0}\mathcal{N}_{\otimes}(t)\left(\frac{\phi(1/t)\cdot s_{\otimes}(\ln(1/t))}{t^{1/p}}\right)^{-1} &\leqslant \alpha_{+}(\varepsilon)\cdot\sup_{t\in[1,e^T]}\frac{s_{\otimes}(\ln(\alpha_{+}(\varepsilon))+\ln(1/t))}{s_{\otimes}(\ln(1/t))},\\
\liminf_{t\to+0}\mathcal{N}_{\otimes}(t)\left(\frac{\phi(1/t)\cdot s_{\otimes}(\ln(1/t))}{t^{1/p}}\right)^{-1} &\geqslant \alpha_{-}(\varepsilon)\cdot\inf_{t\in[1,e^T]}\frac{s_{\otimes}(\ln(\alpha_{-}(\varepsilon))+\ln(1/t))}{s_{\otimes}(\ln(1/t))}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Функция $s_{\otimes}$ равномерно непрерывна на отрезке, значит, супремум и инфимум в правых частях (3.17) стремятся к единице с уменьшением ε. Переходим к пределу по $\varepsilon\to+0$, и теорема доказана. $\square$

Замечание 10. Вопрос о непостоянстве $s_{\otimes}$ остается открытым. Даже если предположить, что $s(\tau) = \exp(-\tau/p)\varrho(\tau)$, $\widetilde{s}(\tau) = \exp(-\tau/p)\widetilde{\varrho}(\tau)$, а функции ϱ и $\widetilde{\varrho}$ чисто сингулярны, мы имеем $s_{\otimes}(\tau) = \exp(-\tau/p)\varrho_{\otimes}(\tau)$, где

$$\varrho_{\otimes}(\tau) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \varrho(\tau-\lambda)d\widetilde{\varrho}(\lambda).$$

Ясно, что $\varrho'_{\otimes} = \varrho'\star\widetilde{\varrho}\,'$ — свертка сингулярных мер. Однако свертка сингулярных мер часто оказывается абсолютно непрерывной относительно меры Лебега (см., например, [33]).

Теорема 10. *Пусть операторы $\mathcal{T}$ и $\widetilde{\mathcal{T}}$ удовлетворяют условиям Теоремы 8. Пусть, кроме того, выполняется соотношение (3.14), а периоды T и $\widetilde{T}$ функций s и $\widetilde{s}$ несоизмеримы. Тогда*

$$\mathcal{N}_{\otimes}(t) \sim \frac{\psi(1/t)\phi(1/t)}{t^{1/p}}, \quad t \to +0,$$

где $\phi(s) = (\varphi * \widetilde{\varphi})(s)$, $\psi(t)$ — некоторая ограниченная и отделенная от нуля медленно меняющаяся функция.

Доказательство. Повторим доказательство Теоремы 9 до выражения (3.16). Далее, получим оценку, которую можно применить вместо Леммы 5.

Введем функцию $r(\tau)$ согласно следующему равенству:

$$(\varphi s * \widetilde{\varphi}\widetilde{s})(\tau) = \phi(\tau) r(\ln\tau).$$

Функция r ограничена и отделена от нуля по Лемме 2. Убедимся в том, что она равномерно непрерывна. Имеем

$$r(\ln\tau+\delta) - r(\ln\tau) = r(\ln\tau+\delta)\Big(\frac{\phi(\tau e^{\delta})}{\phi(\tau)} - 1\Big) +$$

$$+ \frac{1}{\phi(\tau)} \cdot \int\limits_{1}^{\tau} \left(\frac{\varphi(\frac{\tau e^{\delta}}{\sigma}) s(\ln\frac{\tau e^{\delta}}{\sigma})}{\varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)} - 1 \right) \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right) \widetilde{\varphi}(\sigma)\widetilde{s}(\ln\sigma) \frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} +$$

$$+ \frac{1}{\phi(\tau)} \cdot \int\limits_{\tau}^{\tau e^{\delta}} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right) \widetilde{\varphi}(\sigma)\widetilde{s}(\ln\sigma) \frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)}.$$

Покажем, что каждое слагаемое здесь стремится к нулю при $\delta \to 0$ равномерно по τ. Не умаляя общности считаем, что $0 < \delta \leqslant \delta_0$ для некоторого δ_0. Для первого слагаемого напишем формулу конечных приращений:

$$\frac{\phi(\tau e^{\delta}) - \phi(\tau)}{\phi(\tau)} = (\tau e^{\delta} - \tau)\frac{\phi'(\zeta)}{\phi(\tau)} = (e^{\delta} - 1) \cdot \frac{\tau}{\zeta} \cdot \frac{\phi(\zeta)}{\phi(\tau)} \cdot \frac{\zeta\phi'(\zeta)}{\phi(\zeta)},$$

где $\zeta \in [\tau, \tau e^{\delta}]$. Множитель $\dfrac{\tau}{\zeta}$ ограничен. Для последних двух множителей существуют пределы

$$\frac{\phi(\zeta)}{\phi(\tau)} \to 1, \quad \frac{\zeta\phi'(\zeta)}{\phi(\zeta)} \to 0, \quad \tau \to \infty,$$

поэтому они тоже ограничены. Таким образом,

$$\left|\frac{\phi(\tau e^{\delta})}{\phi(\tau)} - 1\right| \leqslant C(e^{\delta} - 1) \to 0, \quad \delta \to 0$$

равномерно по $\tau \in \mathbb{R}_+$.

Аналогично показывается, что во втором слагаемом равномерно стремится к нулю выражение

$$\frac{\varphi(\frac{\tau e^{\delta}}{\sigma})s(\ln \frac{\tau e^{\delta}}{\sigma})}{\varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) s\left(\ln \frac{\tau}{\sigma}\right)} - 1,$$

так как φ — медленно меняющаяся, s — непрерывная, периодическая, ограниченная и отделенная от нуля. Остальные сомножители во втором слагаемом дают ограниченную поправку согласно Лемме 2.

В третьем слагаемом аналогично Лемме 2 получаем оценку

$$\int\limits_{\tau}^{\tau e^{\delta}} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right) \widetilde{\varphi}(\sigma)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} = O(\phi(\tau e^{\delta}) - \phi(\tau)), \quad \tau \to \infty,$$

и потому оно стремится к нулю так же, как первое. Таким образом, равномерная непрерывность доказана.

Докажем теперь, что $r(\ln\tau)$ — медленно меняющаяся функция. Из определения имеем

$$r(\ln\tau + T)\phi(\tau e^{T}) - r(\ln\tau)\phi(\tau) = \int\limits_{\tau}^{\tau e^{T}} \varphi\left(e^{T}\cdot\frac{\tau}{\sigma}\right) s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right) \widetilde{\varphi}(\sigma)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} +$$
$$+ \int\limits_{1}^{\tau} \left(\varphi\left(e^{T}\cdot\frac{\tau}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\right) s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right) \widetilde{\varphi}(\sigma)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)}. \tag{3.18}$$

Левая часть (3.18) с учетом соотношения $\phi(\tau e^T) = \phi(\tau)(1 + o(1))$ переписывается

$$r(\ln\tau + T)\phi(\tau e^T) - r(\ln\tau)\phi(\tau) = \big(r(\ln\tau + T) - r(\ln\tau)\big)\phi(\tau) + o(\phi(\tau)), \quad \tau \to \infty. \tag{3.19}$$

В правой части (3.18) при $\tau \to \infty$ первый интеграл допускает оценку

$$\begin{gathered}\int\limits_{\tau}^{\tau e^T} \varphi\left(e^T \cdot \frac{\tau}{\sigma}\right) s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right) \widetilde{\varphi}(\sigma)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} \sim \\ \sim \widetilde{\varphi}(\tau)\int\limits_{1}^{e^T} \varphi(\frac{e^T}{\sigma}) s\left(\ln\frac{1}{\sigma}\right) \widetilde{s}(\ln(\tau\sigma))\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln(\tau\sigma)))}{\widetilde{\varrho}(\ln(\tau\sigma))} = o(\phi(\tau)).\end{gathered} \tag{3.20}$$

Для оценки второго интеграла используется Предложение 9. Поскольку $\varphi(\tau e^T) = \varphi(\tau)(1 + o(1))$ при $\tau \to \infty$, имеем

$$\begin{aligned}&\int\limits_{1}^{\tau} \varphi\left(e^T \cdot \frac{\tau}{\sigma}\right) s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right) \widetilde{\varphi}(\sigma)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} = \\ &\qquad = \int\limits_{1}^{\tau} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right) \widetilde{\varphi}(\sigma)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)}(1 + o(1)).\end{aligned}$$

По Лемме 2 интеграл в правой части можно оценить как $O(\phi(\tau))$, а значит

$$\int\limits_{1}^{\tau} \left(\varphi\left(e^T \cdot \frac{\tau}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\right) s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right) \widetilde{\varphi}(\sigma)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} = o(\phi(\tau)), \quad \tau \to \infty. \tag{3.21}$$

Из (3.19), (3.20), (3.21) следует, что

$$r(\ln\tau + T) - r(\ln\tau) = o(1), \quad \tau \to \infty.$$

Совершенно аналогично получается, что

$$r(\ln\tau + \widetilde{T}) - r(\ln\tau) = o(1), \quad \tau \to \infty.$$

Значит для произвольных $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ выполняется

$$r(\ln\tau + z_1 T + z_2\widetilde{T}) - r(\ln\tau) = o(1), \quad \tau \to \infty.$$

Поскольку периоды несоизмеримы, множество $\{z_1 T + z_2\widetilde{T} | z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\}$ плотно в $\mathbb{R}$, а значит, из равномерной непрерывности r для любого $c \in \mathbb{R}$ имеем

$$r(\ln\tau + c) - r(\ln\tau) = o(1), \quad \tau \to \infty.$$

Отсюда, учитывая, что r ограничена и отделена от нуля, получаем, что функция $\psi(\tau) := r(\ln(\tau))$ является медленно меняющейся. $\square$

При некоторых дополнительных условиях можно показать, что $\psi = const$.

Теорема 11. *Пусть операторы $\mathcal{T}$ и $\widetilde{\mathcal{T}}$ удовлетворяют условиям Теоремы 10. Потребуем дополнительно, чтобы для функций φ и $\widetilde{\varphi}$ были ограничены следующие величины:*

$$\left|\frac{\sigma\ln(\sigma)\varphi'(\sigma)}{\varphi(\sigma)}\right| \leqslant C, \quad \left|\frac{\sigma\ln(\sigma)\widetilde{\varphi}'(\sigma)}{\widetilde{\varphi}(\sigma)}\right| \leqslant C, \qquad \sigma \geqslant 1. \tag{3.22}$$

Тогда

$$\mathcal{N}_{\otimes}(t) \sim \frac{\mathfrak{C}\phi(1/t)}{t^{1/p}}, \quad t \to +0,$$

где $\phi(s) = (\varphi * \widetilde{\varphi})(s)$, а константа $\mathfrak{C}$ определена в (3.4).

Доказательство. Мы хотим получить оценку

$$(\varphi s * \widetilde{\varphi}\widetilde{s})(\tau) \sim \mathfrak{C}\phi(\tau), \quad \tau \to \infty. \tag{3.23}$$

Оценим сперва $H[\varphi s, \widetilde{\varphi}\widetilde{s}](\tau)$. Для этого проинтегрируем по частям и применим Лемму 6.

$$H[\varphi s, \widetilde{\varphi}\widetilde{s}](\tau) = \int_1^{\sqrt{\tau}} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma) d\left(\int_1^{\sigma} s(\ln\frac{\tau}{\xi})\widetilde{s}(\ln\xi)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\xi))}{\widetilde{\varrho}(\ln\xi)}\right) =$$

$$= \varphi(\sqrt{\tau})\widetilde{\varphi}(\sqrt{\tau}) \int\limits_1^{\sqrt{\tau}} s(\ln\frac{\tau}{\xi})\widetilde{s}(\ln\xi)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\xi))}{\widetilde{\varrho}(\ln\xi)} -$$

$$-\int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \Big(\varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)\Big)'_\sigma \int\limits_1^{\sigma} s(\ln\frac{\tau}{\xi})\widetilde{s}(\ln\xi)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\xi))}{\widetilde{\varrho}(\ln\xi)} d\sigma =$$

$$= \varphi(\sqrt{\tau})\widetilde{\varphi}(\sqrt{\tau})(\mathfrak{C}+o(1))\ln(\sqrt{\tau}) - \int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \Big(\varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)\Big)'_\sigma (\mathfrak{C}+o(1))\ln\sigma d\sigma.$$

Преобразуем главный член асимптотики обратным интегрированием по частям:

$$\mathfrak{C}\Big(\varphi(\sqrt{\tau})\widetilde{\varphi}(\sqrt{\tau})\ln(\sqrt{\tau}) - \int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \Big(\varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)\Big)'_\sigma \ln\sigma d\sigma\Big) = \mathfrak{C}h_{\widetilde{\varphi},\varphi}(\tau).$$

Оценим теперь добавки, вносимые каждым из $o(1)$.

$$\mathfrak{C}h_{\widetilde{\varphi},\varphi}(\tau) + \int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \Big(\varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)\Big)'_\sigma \ln\sigma\cdot o(1) d\sigma =$$

$$= \mathfrak{C}\int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \Big[1+\Big(\frac{\sigma\ln(\sigma)\widetilde{\varphi}'(\sigma)}{\widetilde{\varphi}(\sigma)}+\frac{\ln(1/\sigma)}{\ln(\tau/\sigma)}\cdot\frac{(\tau/\sigma)\ln(\tau/\sigma)\varphi'(\tau/\sigma)}{\varphi(\tau/\sigma)}\Big)o(1)\Big]\cdot\varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} =$$

$$= (\mathfrak{C}+o(1))h_{\widetilde{\varphi},\varphi}(\tau).$$

по п.2 Предложения 6, т. к. выражение в круглых скобках ограничено благодаря дополнительным условиям (3.22). По той же причине имеем

$$\varphi(\sqrt{\tau})\widetilde{\varphi}(\sqrt{\tau})\ln(\sqrt{\tau})\cdot o(1) = o(1)\cdot\Big(h_{\widetilde{\varphi},\varphi}(\tau)+\int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \Big(\varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)\Big)'_\sigma \ln\sigma d\sigma\Big) = o(h_{\widetilde{\varphi},\varphi}(\tau)).$$

Получаем оценку

$$H[\varphi s, \widetilde{\varphi}\widetilde{s}](\tau) = (\mathfrak{C}+o(1))h_{\widetilde{\varphi},\varphi}(\tau). \tag{3.24}$$

Аналогично, учитывая Лемму 3, получаем

$$H_1[\varphi s, \widetilde{\varphi}\widetilde{s}](\tau) = H[\widetilde{\varphi}\widetilde{s}, \varphi s](\tau)(1+o(1)) = (\mathfrak{C} + o(1))h_{\varphi,\widetilde{\varphi}}(\tau). \tag{3.25}$$

Из асимптотик (3.24) и (3.25) получаем искомую асимптотику (3.23). □

Замечание 11. Из дополнительных ограничений (3.22) следует, что для некоторой $C > 0$ выполняются оценки

$$\varphi(e)(\ln\sigma)^{-C} \leqslant \varphi(\sigma) \leqslant \varphi(e)(\ln\sigma)^{C}, \quad \widetilde{\varphi}(e)(\ln\sigma)^{-C} \leqslant \widetilde{\varphi}(\sigma) \leqslant \widetilde{\varphi}(e)(\ln\sigma)^{C}$$

при $\sigma \geqslant e$. Дополнительные ограничения очевидно имеют место для медленно меняющихся функций вида $(1+\ln(\tau))^{\varkappa}$. В общем случае вопрос о постоянстве функции ψ в Теореме 10 остается открытым.

Рассмотрим теперь случаи, когда один или оба интеграла медленно меняющихся функций конечны.

Теорема 12. *Пусть операторы $\mathcal{T}$ и $\widetilde{\mathcal{T}}$ удовлетворяют условиям Теоремы 8, и пусть*

$$\int\limits_1^\infty \varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau} < \infty, \quad \int\limits_1^\infty \widetilde{\varphi}(\tau)\frac{d\tau}{\tau} = \infty,$$

а периоды s и $\widetilde{s}$ совпадают и равны T. Кроме того, пусть для $(\varphi, \widetilde{\varphi})$ выполняется п.4 Предложения 6. Тогда

$$\mathcal{N}_\otimes(t) \sim \frac{h_{\tilde{\varphi},\varphi}(1/t)\cdot s_\otimes(\ln(1/t)) + \widetilde{\varphi}(1/t)\cdot \widetilde{s}^*(\ln(1/t))}{t^{1/p}},$$

где $s_\otimes$ определена в (3.15), *а*

$$\widetilde{s}^*(\tau) = \sum_n \widetilde{s}(\tau + \ln(\lambda_n))\lambda_n^{1/p} \tag{3.26}$$

(ср. (3.9)*).*

Замечание 12. Сумма в (3.26) сходится по Предложению 7.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. По п.1 Предложения 6 получаем

$$S(t,\varepsilon) = o(h_{\widetilde{\varphi},\varphi}(1/t)), \quad t \to +0.$$

По п.4 Предложения 5 имеем

$$\widetilde{S}(t,\varepsilon) \sim \widetilde{\varphi}(1/t) \cdot \Big(\sum_n \widetilde{s}(\ln\tau + \ln\lambda_k)\lambda_k^{1/p} + \nu(\varepsilon)\Big),$$

где $\nu(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to +0$. Остается оценить интегральное слагаемое.

$$\int\limits_{\alpha_{\mp}(\varepsilon)/\varepsilon}^{\varepsilon\tau} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} =$$

$$= \int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} -$$

$$- \int\limits_1^{\alpha_{\mp}(\varepsilon)/\varepsilon} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} +$$

$$+ \int\limits_{1/\varepsilon}^{\sqrt{\tau}} \varphi(\sigma)\widetilde{\varphi}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)s(\ln\sigma)\widetilde{s}(\ln(\tau/\sigma))\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln(\tau/\sigma)))}{\widetilde{\varrho}(\ln(\tau/\sigma))}.$$

Первое слагаемое оценивается по Лемме 5. Второе слагаемое можно оценить как $O(\varphi(\tau)) = o(h_{\widetilde{\varphi},\varphi}(\tau))$ при $\tau \to \infty$. Остается лишь третье слагаемое, которое оценивается аналогично п.4 Предложения 6:

$$\int\limits_{1/\varepsilon}^{\sqrt{\tau}} \varphi(\sigma)\widetilde{\varphi}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)s(\ln\sigma)\widetilde{s}(\ln(\tau/\sigma))\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln(\tau/\sigma)))}{\widetilde{\varrho}(\ln(\tau/\sigma))} \leqslant C\widetilde{\varphi}(\tau)\int\limits_{1/\varepsilon}^{\infty}\varphi(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}, \quad \tau \to \infty.$$

Здесь

$$\int\limits_{1/\varepsilon}^{\infty}\varphi(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} \to 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

а значит, это слагаемое не вносит вклада в асимптотику. □

Замечание 13. Аналогично Теореме 10, если периоды T и $\widetilde{T}$ несоизмеримы, вместо $s_{\otimes}(\ln(\tau))$ в асимптотике возникает ограниченная и отделенная от нуля медленно меняющаяся функция, равная константе в тех же частных случаях, что и в Теореме 11.

Теорема 13. *Пусть операторы $\mathcal{T}$ и $\widetilde{\mathcal{T}}$ удовлетворяют условиям Теоремы 8, и пусть*

$$\int_1^\infty \varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau} < \infty, \quad \int_1^\infty \widetilde{\varphi}(\tau)\frac{d\tau}{\tau} < \infty,$$

а для $(\varphi, \widetilde{\varphi})$ и $(\widetilde{\varphi}, \varphi)$ выполняется п.4 Предложения 6. Тогда

$$\mathcal{N}_\otimes(t) \sim \frac{\varphi(1/t)\cdot s^*(\ln(1/t)) + \widetilde{\varphi}(1/t)\cdot \widetilde{s}^*(\ln(1/t))}{t^{1/p}},$$

где s^* определена в (3.9)*, $\widetilde{s}^*$ определена в* (3.26)*.*

Эта теорема доказывается аналогично предыдущей.

Замечание 14. В отличие от предыдущих теорем, асимптотика в последних двух случаях содержит два слагаемых. Одно из них может подавляться другим, в этом случае получается снова почти регулярная асимптотика, однако в общем случае нельзя предсказать их поведение, и возможна ситуация, когда ни одно из слагаемых не превалирует. В этом случае асимптотика может не являться почти регулярной.

Пример 1. Пусть при $t \to +0$

$$\mathcal{N}(t, \mathcal{T}) \sim \frac{\ln^{\varkappa_1}(1/t)\cdot s(\ln(1/t))}{t^{1/p}}, \ \mathcal{N}(t, \widetilde{\mathcal{T}}) \sim \frac{\ln^{\varkappa_2}(1/t)\cdot \widetilde{s}(\ln(1/t))}{t^{1/p}}.$$

Не умаляя общности, можно считать, что $\varphi(\tau) = (1+\ln(\tau))^{\varkappa_1}$, $\widetilde{\varphi}(\tau) = (1+\ln(\tau))^{\varkappa_2}$. Асимптотика меллиновской свертки в этом случае посчитана в Примере 1 работы [51]. Рассмотрим все возможные случаи.

Случай 1. $\varkappa_1 \geqslant -1, \varkappa_2 \geqslant -1$. В этом случае применимы Теорема 9, если у периодических функций есть общий период, и Теорема 11 иначе.

Если у функций s и $\widetilde{s}$ есть общий период T, то

$$\mathcal{N}_\otimes(t) \sim \frac{\phi(1/t)\cdot s_\otimes(\ln(1/t))}{t^{1/p}}, \quad t \to +0,$$

где функция $s_\otimes$ определена в (3.15),

$$\phi(\tau) = \begin{cases} \mathbf{B}(\varkappa_1+1, \varkappa_2+1)(1+\ln(\tau))^{\varkappa_1+\varkappa_2+1}, & \varkappa_1 > -1, \varkappa_2 > -1, \\ \ln(\ln(\tau)) \cdot (1+\ln(\tau))^{\varkappa_2}, & \varkappa_1 = -1, \varkappa_2 > -1, \\ 2\ln(\ln(\tau)) \cdot (1+\ln(\tau))^{-1}, & \varkappa_1 = \varkappa_2 = -1, \end{cases}$$

где $\mathbf{B}$ — бета-функция Эйлера. Отметим, что получившаяся асимптотика также почти регулярна.

Если же периоды T и $\widetilde{T}$ несоизмеримы, то

$$\mathcal{N}_\otimes(t) \sim \frac{\mathfrak{C}\phi(1/t)}{t^{1/p}}, \quad t \to +0,$$

где константа $\mathfrak{C}$ определена в (3.4), и получившаяся асимптотика регулярна.

Случай 2. $\varkappa_1 < -1 \leqslant \varkappa_2$**.** В этом случае применима Теорема 12, причем прямым вычислением можно убедиться, что

$$h_{\tilde{\varphi},\varphi}(\tau) = o(\widetilde{\varphi}(\tau)), \quad \tau \to \infty,$$

а значит,

$$\mathcal{N}_\otimes(t) \sim \frac{\ln^{\varkappa_2}(1/t) \cdot \widetilde{s}^*(\ln(1/t))}{t^{1/p}}, \tag{3.27}$$

где $\widetilde{s}^*$ определена в (3.26), и получившаяся асимптотика вновь почти регулярна.

Случай 3. $\varkappa_1 < \varkappa_2 < -1$**.** В этом случае применима Теорема 13, причем

$$\varphi(\tau) = o(\widetilde{\varphi}(\tau)), \quad \tau \to \infty,$$

значит, снова имеет место асимптотика (3.27).

Случай 4. $\varkappa_1 = \varkappa_2 < -1$**.** В этом случае применима Теорема 13, причем оба слагаемых имеют одинаковый порядок роста, а значит,

$$\mathcal{N}_\otimes(t) \sim \frac{\ln^{\varkappa_1}(1/t)\big(s^*(\ln(1/t)) + \widetilde{s}^*(\ln(1/t))\big)}{t^{1/p}},$$

где s^* определена в (3.9), $\widetilde{s}^*$ определена в (3.26). В случае, когда у функций s и $\widetilde{s}$ есть общий период, эта асимптотика оказывается почти регулярной, однако в случае, когда периоды несоизмеримы, получается почти регулярная асимптотика с квазипериодической компонентой.

§ 3. Приложение к задаче об асимптотике малых уклонений случайных гауссовских процессов

Изучение задачи малых уклонений было инициировано в работе [27] и продолжено множеством других исследователей. Истории задачи и основным результатам посвящены обзоры [56] и [55]. Ссылки на недавние результаты в области малых уклонений случайных процессов можно найти на сайте [66].

Изучение малых уклонений гауссовских полей типа тензорного произведения было начато в классической работе [32], где логарифмическая асимптотика L_2-малых уклонений была получена для броуновского листа

$$\mathbb{W}_d(x_1, \ldots, x_d) = W_1(x_1) \otimes W_2(x_2) \otimes \ldots \otimes W_d(x_d)$$

в единичном кубе (здесь W_k — независимые винеровские процессы). Этот результат был позже обобщен в работе [54] на некоторые другие маргинальные процессы. В работах [51] и [50] результаты о малых уклонениях широких классов гауссовских полей типа тензорного произведения были получены как следствие результатов о спектральной асимптотике соответствующих операторов.

Мы хотим аналогичным образом вывести из доказанных в § 2 этой главы результатов о спектральной асимптотике тензорных произведений операторов результаты о малых уклонениях соответствующих им гауссовских полей. Мы рассмотрим общий случай

$$\lambda_n = \phi(n) := \frac{\psi(n) \cdot \theta(\ln(n))}{n^p}, \tag{3.28}$$

где $p > 1$, а функция θ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, ограничена, отделена от нуля, причем функция $\phi(t)$ монотонна на $\mathbb{R}$. Для этого используется предложение 8.

Начнем с анализа асимптотики $L'(u)$ при $u \to +\infty$. В нашем случае

$$uL'(u) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u\psi(n)\theta(\ln(n))}{n^p + 2u\psi(n)\theta(\ln(n))} \to -\infty, \quad u \to +\infty.$$

Поскольку $\phi(t)$ — убывающая функция, можно оценить

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u\psi(n)\theta(\ln(n))}{n^p + 2u\psi(n)\theta(\ln(n))} \geqslant \int_1^{\infty} \frac{u\psi(t)\theta(\ln(t))\,dt}{t^p + 2u\psi(t)\theta(\ln(t))} \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{n=2}^{\infty} \frac{u\psi(n)\theta(\ln(n))}{n^p + 2u\psi(n)\theta(\ln(n))} \sim -uL'(u),$$

и потому

$$uL'(u) \sim I_1(u) := -\int_1^{\infty} \frac{u\psi(t)\theta(\ln(t))\,dt}{t^p + 2u\psi(t)\theta(\ln(t))}.$$

Заменив промежуток интегрирования на $(0, \infty)$ и выполнив подстановку

$$t = t(z) := z\phi^{-1}(1/u) = z\gamma(u),$$

$$\gamma(u) := \phi^{-1}(1/u) \sim u^{1/p}\varphi(u)\vartheta(\ln(u)), \quad u \to \infty,$$

где φ — медленно меняющаяся, а ϑ — равномерно непрерывная, ограниченная, отделенная от нуля функция, получим

$$I_1(u) = -\gamma(u) \cdot \int_0^{\infty} \frac{dz}{2 + z^p \cdot \dfrac{(\gamma(u))^p}{u\psi(t(z))\theta(\ln(t(z)))}} + O(1), \quad u \to \infty.$$

Из выражения $1/u = \phi(\gamma(u))$ мы получаем формулу

$$(\gamma(u))^p/u = \psi(t(z)/z)\theta(\ln(t(z)/z)).$$

Подставляя ее в интеграл и учитывая определение $\gamma(u)$, получаем

$$I_1(u) = -\gamma(u) \cdot \int\limits_0^\infty \frac{dz}{2 + z^p \cdot \dfrac{\psi(\gamma(u))\theta(\ln(\gamma(u)))}{\psi(z\gamma(u))\theta(\ln(z\gamma(u)))}} + O(1), \quad u \to \infty.$$

Легко видеть, что

$$\theta(\ln(z\gamma(u))) = \theta\Big(\frac{\ln(u)}{p} + \ln(z)\Big)(1 + o(1)), \quad u \to \infty.$$

Заметим также, что согласно п.2 Предложения 5, для любого $\varepsilon > 0$ отношение $\psi(t)/t^\varepsilon$ убывает при больших t, а значит при $z > 1$

$$\frac{\psi(t)}{\psi(zt)} = \frac{1}{z^\varepsilon} \cdot \frac{\psi(t)}{t^\varepsilon} \cdot \frac{(zt)^\varepsilon}{\psi(zt)} \geqslant \frac{C(\varepsilon)}{z^\varepsilon}.$$

Это дает нам мажоранту, позволяющую использовать теорему Лебега. В результате имеем

$$I_1(u) = -u^{1/p}\vartheta(u) \cdot \int\limits_0^\infty \frac{dz}{2 + z^p \cdot \dfrac{\theta(\ln(u)/p)}{\theta(\ln(u)/p + \ln(z))}} + O(1), \quad u \to \infty. \tag{3.29}$$

Поскольку интеграл — равномерно непрерывная, ограниченная и отделенная от нуля функция $\ln(u)$, получаем

$$L'(u) \sim -u^{-\frac{p-1}{p}}\varphi(u)\vartheta_1(\ln(u)), \quad u \to \infty, \tag{3.30}$$

где φ — медленно меняющаяся функция из асимптотики γ, а ϑ_1 — равномерно непрерывная, ограниченная и отделенная от нуля функция.

Аналогично получаем

$$u^2 L''(u) \sim 2\int\limits_1^\infty \frac{(u\psi(t)\theta(\ln(t)))^2\,dt}{(t^p + 2u\psi(t)\theta(\ln(t)))^2} \asymp u^{1/p}\varphi(u), \tag{3.31}$$

$$L(u) \sim -\frac{1}{2}u^{1/p}\varphi(u)\vartheta(\ln(u)) \cdot \int_0^\infty \ln\left(1 + \frac{2\theta(\ln(u)/p + \ln(z))}{z^p\theta(\ln(u)/p)}\right) dt.$$

Поскольку $L''(u) > 0$, уравнение $L'(u) + r = 0$ имеет для достаточно малых r единственное решение $u(r)$, такое, что $u(r) \to \infty$ при $r \to 0$. Более того, соотношение (3.30) дает

$$u(r) \sim r^{-\frac{p}{p-1}}\eta(1/r)\vartheta_2(\ln(1/r)), \quad r \to 0, \tag{3.32}$$

где η — медленно меняющаяся, а ϑ_2 — равномерно непрерывная, ограниченная и отделенная от нуля функции.

Подставляя (3.31) в (0.13), заключаем, что

$$\begin{aligned} \ln \mathbf{P}\left\{\sum_{n=1}^\infty \phi(n)\xi_n^2 \leqslant r\right\} &\sim L(u) + ur = L(u) - uL'(u) \sim \\ &\sim -u^{1/p}\varphi(u)\vartheta(\ln(u)) \cdot \int_0^\infty \left[\frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{2\theta(\ln(u)/p + \ln(z))}{z^p\theta(\ln(u)/p)}\right) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2 + z^p \cdot \dfrac{\theta(\ln(u)/p)}{\theta(\ln(u)/p + \ln(z))}}\right] dz. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Нам остается лишь заметить, что стоящее под интегралом выражение

$$\frac{1}{2}\ln(1+2x) - \frac{x}{2x+1}$$

положительно, поэтому интеграл есть равномерно непрерывная положительная функция $\ln(u)$, ограниченная и отделенная от нуля. Подставляя полученную выше асимптотику u и заменяя r на ε^2, можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 14. *Пусть собственные числа ковариационного оператора* (0.12) *имеют вид* (3.28). *Тогда при* $\varepsilon \to 0$

$$\ln \mathbf{P}\left\{\|X\|_\mu \leqslant \varepsilon\right\} \sim -\varepsilon^{-\frac{2}{p-1}}\xi(1/\varepsilon)\zeta(\ln(1/\varepsilon)), \tag{3.34}$$

где ξ — медленно меняющаяся функция, ζ — равномерно непрерывная, ограниченная и отделенная от нуля функция. Более того, если функция θ в (3.28) асимптотически $\frac{T}{p}$-периодическая, то функция ζ может быть выбрана $\frac{T(p-1)}{2p}$-периодической.

Доказательство. Первое утверждение следует из (3.33) и (3.32), если заменить r на ε^2. Далее, если θ асимптотически $\frac{T}{p}$-периодическая, то функция ϑ асимптотически T-периодическая, а по теореме Лебега легко проверить, что асимптотически T-периодическими от $\ln(u)$ будут и интегралы в (3.29) и (3.33). Таким образом, функция ϑ_1 в (3.30) асимптотически T-периодическая, значит ϑ_2 в (3.32) асимптотически $\frac{T(p-1)}{p}$-периодическая. Остается лишь заметить, что из (3.32) следует

$$\ln(u) = \frac{p}{p-1}\ln(1/r)(1+o(1)), \quad r \to 0,$$

а значит в (3.33) интеграл и функция $\vartheta(\ln(u))$ являются асимптотически $\frac{T(p-1)}{p}$-периодическими функциями $\ln(1/r)$, и второе утверждение теоремы также доказано. $\square$

Пример 2. Продемонстрируем применение теорем из § 2 на примере броуновского листа

$$\mathbb{W}_d(x_1, \dots, x_d) = W_1(x_1) \otimes W_2(x_2) \otimes \dots \otimes W_d(x_d)$$

в единичном кубе с нормой $L_2(\mu)$, где $\mu = \bigotimes\limits_{j=1}^{d} \mu_j$, и каждая из мер μ_j является самоподобной мерой обобщенного канторовского типа. Спектральные асимптотики операторов-множителей в этом случае известны из [52] и [67]:

$$\mathcal{N}_j(t) \sim \frac{s_j(\ln(1/t))}{t^{1/p_j}}, \quad t \to 0+,$$

где s_j — непрерывны и T_j-периодичны, $p_j > 1$. Данные степенные асимптотики рассмотрены в Примере 1 и отвечают случаю $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$.

Для некоторых мер μ_j функции s_j могут быть константами, но в главах 1 и 2 приведены широкие классы мер, для которых доказано непостоянство периодических функций.

Пусть $\mathfrak{p} := p_1 = \min p_j$. Первым шагом мы применяем Теорему 7 для каждого оператора, для которого $p_j > \mathfrak{p}$, перемножая его с первым. В результате можно считать, не умаляя общности, что все оставшиеся операторы имеют одинаковую степень асимптотики.

Если среди оставшихся операторов хоть у одного вырождена периодическая компонента, у произведения она также будет вырождена. Если хотя бы два периода несоизмеримы, то у произведения соответствующих операторов периодическая компонента выродится в константу согласно Примеру 1, и в результате выродится в константу периодическая компонента всего произведения.

Если же все периоды соизмеримы, то в результате применения Примера 1 мы получим

$$\mathcal{N}_{\otimes}(t) \sim \frac{C \ln^{\mathfrak{d}-1}(1/t) s_{\otimes}^{(\mathfrak{d})}(\ln(1/t))}{t^{1/\mathfrak{p}}}, \quad t \to 0+,$$

где $\mathfrak{d}$ — число степенных показателей, равных $\mathfrak{p}$, $s_{\otimes}^{(\mathfrak{d})}$ получается итерированием формулы (3.15) нужное количество раз. Это позволяет применять для данного гауссовского поля Теорему 14, более того, прямыми вычислениями можно убедиться, что в формулах (3.32) и (3.34)

$$\eta(1/r) \sim \ln^{\frac{(\mathfrak{d}-1)\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1}}(1/r), \quad r \to 0,$$

$$\xi(1/r) \sim \ln^{\frac{(\mathfrak{d}-1)\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1}}(1/r), \quad r \to 0.$$

Таким образом, при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\ln \mathbf{P}\left\{\|\mathbb{W}_d\|_{\mu} \leqslant \varepsilon\right\} \sim -\varepsilon^{-\frac{2}{\mathfrak{p}-1}} \ln^{\frac{(\mathfrak{d}-1)\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1}}(1/\varepsilon)\zeta(\ln(1/\varepsilon)),$$

где ζ — некоторая $\frac{T(\mathfrak{p}-1)}{2\mathfrak{p}}$-периодическая функция.

Разберем простейший случай, когда все меры одинаковые и канторовские. Для этого случая известны значения параметров

$$p = \log_2 6, \quad T = \ln 6.$$

Подставляя эти значения в асимптотику, при $\varepsilon \to 0$ получаем

$$\ln \mathbf{P}\left\{\|\mathbb{W}_d\|_\mu \leqslant \varepsilon\right\} \sim -\varepsilon^{-2\log_3 2} \ln^{(d-1)\log_3 6}(1/\varepsilon)\zeta(\ln(1/\varepsilon)),$$

где ζ — некоторая $\frac{\ln 3}{2}$-периодическая функция.

Замечание 15. Аналогичные результаты имеют место, если вместо винеровских рассмотреть другие независимые гриновские гауссовские процессы. Примеры хорошо известных гриновских гауссовских процессов можно найти в [20].

Заключение

В данной диссертации рассматривается задача Неймана для уравнения Штурма-Лиувилля с сингулярной самоподобной весовой мерой обобщенного канторовского типа. Исследуется главный член спектральной асимптотики этой задачи. Кроме того, исследуется асимптотика спектра оператора типа тензорного произведения с почти регулярными маргинальными асимптотиками. Получены следующие результаты.

Свойство спектральной периодичности, выполненное в случае “ровной” лестницы для задач Неймана и Робена обобщено на случай резонанса 1:1:...:1. Для задачи Неймана в этом случае доказана спектральная периодичность, а для задачи Робена — определенная в данной диссертации спектральная квазипериодичность.

В случае общего резонанса доказаны теоремы, описывающие связь между спектрами задачи на отрезке и подотрезках, содержащих носитель меры. Эти теоремы заменяют спектральную периодичность и квазипериодичность при доказательстве теоремы A.

Теорема A доказана для лестниц с ненулевыми промежуточными интервалами. Для доказательства в случае резонанса 1:1:...:1 использованы свойства спектральной периодичности и квазипериодичности. Для случая общего резонанса существенно изменена схема доказательства и использованы теоремы, описанные в предыдущем абзаце.

Введено определение почти меллиновской свертки, обобщающей свертку Меллина на случай функций с периодической компонентой. Исследованы асимптотические свойства почти меллиновской свертки.

Главный член спектральной асимптотики тензорного произведения компактных операторов с почти регулярной спектральной асимптотикой получен для всех возможных комбинаций параметров маргинальных асимптотик.

Возможные направления для дальнейшей работы: обобщение результатов о спектральной асимптотике задачи Штурма-Лиувилля с сингулярной самоподобной весовой мерой на более широкие классы лестниц, а также на случай уравнения произвольного четного порядка.

Список литературы

Литература на русском языке

1. *Бирман М. С.*, *Соломяк М. З.* Асимптотика спектра слабо полярных интегральных операторов // Известия Академии Наук СССР. Отделение математических и естественных наук. Серия математическая. — 1970. — Т. 34, № 6. — С. 1143—1158.

2. *Бирман М. С.*, *Соломяк М. З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — Санкт-Петербург : Лань, 2010.

3. *Борзов В. В.* О количественных характеристиках сингулярных мер // Проблемы математической физики. — 1970. — Т. 4. — С. 42—47.

4. *Владимиров А. А.* К осцилляционной теории задачи Штурма–Лиувилля с сингулярными коэффициентами // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2009. — Т. 49, № 9. — С. 1609—1621.

5. *Владимиров А. А.* О вычислении собственных значений задачи Штурма–Лиувилля с фрактальным индефинитным весом // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2007. — Т. 47, № 8. — С. 1350—1355.

6. *Владимиров А. А.* Об одном классе сингулярных задач Штурма–Лиувилля [Электронный ресурс] // arXiv.org. — 2012. — https://arxiv.org/abs/1211.2009.

7. *Владимиров А. А.* Осцилляционный метод в задаче о спектре дифференциального оператора четвертого порядка с самоподобным весом // Алгебра и анализ. — 2015. — Т. 27, № 2. — С. 83—95.

8. *Владимиров А. А.*, *Шейпак И. А.* Асимптотика собственных значений задачи высшего четного порядка с дискретным самоподобным весом // Алгебра и анализ. — 2012. — Т. 24, № 2. — С. 104—119.

9. *Владимиров А. А.*, *Шейпак И. А.* Асимптотика собственных значений задачи Штурма-Лиувилля с дискретным самоподобным весом // Математические заметки. — 2010. — Т. 88, № 5. — С. 662—672.

10. *Владимиров А. А.*, *Шейпак И. А.* Индефинитная задача Штурма-Лиувилля для некоторых классов самоподобных сингулярных весов // Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ, Сборник статей, Тр. МИАН. — 2006. — Т. 255. — С. 88—98.

11. *Владимиров А. А.*, *Шейпак И. А.* О задаче Неймана для уравнения Штурма–Лиувилля с самоподобным весом канторовского типа // Функциональный анализ и его приложения. — 2013. — Т. 47, № 4. — С. 18—29.

12. *Владимиров А. А.*, *Шейпак И. А.* Самоподобные функции в пространстве $L_2[0,1]$ и задача Штурма–Лиувилля с сингулярным индефинитным весом // Математический сборник. — 2006. — Т. 197, № 11. — С. 13—30.

13. *Золотарев В. М.* Асимптотическое поведение гауссовской меры в l_2 // Проблемы устойчивости стохастических моделей. — 1984. — С. 54—58.

14. *Ибрагимов И. А.* О вероятности попадания гауссова вектора со значениями в гильбертовом пространстве в сферу малого радиуса // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1979. — Т. 85. — С. 75—93.

15. *Кац И. С.*, *Крейн М. Г.* Критерий дискретности спектра сингулярной струны // Известия высших учебных заведений. Математика. — 1958. — № 2. — С. 136—153.

16. *Крейн М. Г.* Об обратных задачах для неоднородной струны // Доклады Академии Наук СССР. — 1952. — Т. 82, № 5. — С. 669—672.

17. *Крейн М. Г.* Об одном обобщении исследований Стилтьеса // Доклады Академии Наук СССР. — 1952. — Т. 87, № 6. — С. 881—884.

18. *Крейн М. Г.* Определение плотности неоднородной симметричной струны по спектру // Доклады Академии Наук СССР. — 1951. — Т. 76, № 3. — С. 345—348.

19. *Лифшиц М. А.* Лекции по гауссовским процессам. Учебное пособие. — Санкт-Петербург : Лань, 2016.

20. *Назаров А. И.* Логарифмическая асимптотика малых уклонений для некоторых гауссовских случайных процессов в L_2-норме относительно самоподобной меры // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2004. — Т. 311. — С. 190—213.

21. *Назаров А. И.* Об одном семействе преобразований гауссовских случайных функций // Теория вероятностей и ее применения. — 2009. — Т. 54, № 2. — С. 209—225.

22. *Савчук А. М.*, *Шкаликов А. А.* О собственных значениях оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева // Математические заметки. — 2006. — Т. 80, № 6. — С. 864—884.

23. *Савчук А. М.*, *Шкаликов А. А.* Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость // Функциональный анализ и его приложения. — 2010. — Т. 44, № 4. — С. 34—53.

24. *Савчук А. М.*, *Шкаликов А. А.* Операторы Штурма Лиувилля с потенциалами-распределениями // Труды московского математического общества. — 2003. — Т. 64. — С. 159—212.

25. *Савчук А. М.*, *Шкаликов А. А.* Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Математические заметки. — 1999. — Т. 66, № 6. — С. 897—912.

26. *Савчук А. М.*, *Шкаликов А. А.* Формула следа для операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Математические заметки. — 2001. — Т. 69, № 3. — С. 427—442.

27. *Сытая Г. Н.* О некоторых асимптотических представлениях гауссовской меры в гильбертовом пространстве // Теория случайных процессов. — 1974. — Т. 2. — С. 93—104.

28. *Тихонов Ю. В.* О скорости приближения сингулярных функций кусочно-постоянными // Математические заметки. — 2014. — Т. 95, № 4. — С. 590—604.

29. *Тихонов Ю. В.*, *Шапошников С. В.*, *Шейпак И. А.* О сингулярности функций и квантовании вероятностных мер // Математические заметки. — 2017. — Т. 102, № 4. — С. 628—631.

30. *Тихонов Ю. В.*, *Шейпак И. А.* Об уравнении струны с сингулярным весом из пространства мультипликаторов в пространствах Соболева с отрицательным показателем гладкости // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 2016. — Т. 80, № 6. — С. 258—273.

31. *Шейпак И. А.* О конструкции и некоторых свойствах самоподобных функций в пространствах $L_p[0,1]$ // Математические заметки. — 2007. — Т. 81, № 6. — С. 924—938.

Литература на английском языке

32. *Csáki E.* On small values of the square integral of a multiparameter Wiener process // Statistics and Probability. Proc. of the 3rd Pannonian Symp. on Math. Stat. — 1982. — С. 19—26.

33. *Damanik D.*, *Gorodetski A.*, *Solomyak B.* Absolutely continuous convolutions of singular measures and an application to the square Fibonacci Hamiltonian // Duke Mathematical Journal. — 2015. — Т. 164, № 8. — С. 1603—1640.

34. *Dudley R. M.*, *Hoffmann-Jorgensen J.*, *Shepp L. A.* On the Lower Tail of Gaussian Seminorms // The Annals of Probability. — 1979. — Т. 7, № 2. — С. 319—342.

35. *Freiberg U.* Prüfer angle methods in spectral analysis of Krein-Feller-operators // RIMS Kôkyûroku Bessatsu B. — 2008. — Т. 6. — С. 74—81.

36. *Freiberg U.* Analytical properties of measure geometric Krein-Feller-operators on the real line // Mathematische Nachrichten. — 2003. — Т. 260, № 1. — С. 34—47.

37. *Freiberg U.* Refinement of the spectral asymptotics of generalized Krein Feller operators // Forum Mathematicum. Т. 23. — 2011. — С. 427—445.

38. *Freiberg U.* Spectral asymptotics of generalized measure geometric Laplacians on Cantor like sets // Forum Mathematicum. T. 17. — 2005. — C. 87—104.

39. *Fujita T.* A fractional dimension, self-similarity and a generalized diffusion operator, Probabilistic Method on Mathematical Physics // Proc. of Taniguchi International Symp. — 1987. — C. 83—90.

40. *Graf S.*, *Luschgy H.*, *Pagès G.* Functional quantization and small ball probabilities for Gaussian processes // Journal of Theoretical Probability. — 2003. — T. 16, № 4. — C. 1047—1062.

41. *Hong I.*, *Uno T.* Some consideration of asymptotic distribution of eigenvalues for the equation d2u/dx2+ $\lambda\rho$ (x) u= 0 // Japanese journal of mathematics: transactions and abstracts. T. 29. — The Mathematical Society of Japan. 1959. — C. 152—164.

42. *Hryniv R. O.*, *Mykytyuk Y. V.* 1D Schrödinger operators with singular periodic potentials // Methods Func. Anal. Topol. — 2001. — T. 7, № 4. — C. 31—42.

43. *Hryniv R. O.*, *Mykytyuk Y. V.* Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials // Inverse Problems. — 2003. — T. 19, № 3. — C. 665—684.

44. *Hryniv R. O.*, *Mykytyuk Y. V.* Transformation Operators for Sturm-Liouville Operators with Singular Potentials // Mathematical Physics, Analysis and Geometry. — 2004. — T. 7, № 2. — C. 119—149.

45. *Hryniv R.*, *Mykytyuk Y.* Eigenvalue asymptotics for Sturm–Liouville operators with singular potentials // Journal of Functional Analysis. — 2006. — T. 238, № 1. — C. 27—57.

46. *Hryniv R. O.*, *Mykytyuk Y. V.* Inverse Spectral Problems for Sturm-Liouville Operators with Singular Potentials, II. Reconstruction by Two Spectra // Functional Analysis and its Applications. T. 197. — 2004. — C. 97—114.

47. *Hryniv R. O.*, *Mykytyuk Y. V.* Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials. IV. Potentials in the Sobolev space scale // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. — 2006. — T. 49, № 2. — C. 309—329.

48. *Hutchinson J. E.* Fractals and self similarity // Indiana University Mathematics Journal. — 1981. — T. 30, № 5. — C. 713—747.

49. *Kappeler T.*, *Möhr C.* Estimates for periodic and Dirichlet eigenvalues of the Schrödinger operator with singular potentials // Journal of Functional Analysis. — 2001. — T. 186, № 1. — C. 62—91.

50. *Karol A. I.*, *Nazarov A. I.* Small ball probabilities for smooth Gaussian fields and tensor products of compact operators // Mathematische Nachrichten. — 2014. — T. 287, № 5—6. — C. 595—609.

51. *Karol A.*, *Nazarov A.*, *Nikitin Y.* Small ball probabilities for Gaussian random fields and tensor products of compact operators // Transactions of the American Mathematical Society. — 2008. — T. 360, № 3. — C. 1443—1474.

52. *Kigami J.*, *Lapidus M. L.* Weyl's problem for the spectral distribution of Laplacians on pcf self-similar fractals // Communications in mathematical physics. — 1993. — T. 158, № 1. — C. 93—125.

53. *Korotyaev E.* Characterization of the spectrum of Schrödinger operators with periodic distributions // International Mathematics Research Notices. — 2003. — T. 2003, № 37. — C. 2019—2031.

54. *Li W. V.* Comparison results for the lower tail of Gaussian seminorms // Journal of Theoretical Probability. — 1992. — T. 5, № 1. — C. 1—31.

55. *Li W. V.*, *Shao Q.-M.* Gaussian processes: inequalities, small ball probabilities and applications // Handbook of Statistics. — 2001. — T. 19. — C. 533—597.

56. *Lifshits M.* Asymptotic behavior of small ball probabilities // Probab. Theory and Math. Statist. Proc. VII International Vilnius Conference. — 1999. — C. 453—468.

57. *Lifshits M.* On the lower tail probabilities of some random series // The Annals of Probability. — 1997. — T. 25, № 1. — C. 424—442.

58. *Luschgy H.*, *Pagès G.* Sharp asymptotics of the functional quantization problem for Gaussian processes // The Annals of Probability. — 2004. — T. 32, № 2. — C. 1574—1599.

59. *Markus A. S.*, *Matsaev V. I.* Comparison theorems for spectra of linear operators and spectral asymptotics // Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva. — 1982. — Т. 45. — С. 133—181.

60. *McKean Jr H.*, *Ray D.* Spectral distribution of a differential operator // Duke Mathematical Journal. — 1962. — Т. 29, № 2. — С. 281—292.

61. *Nazarov A.* Log-level comparison principle for small ball probabilities // Statistics & Probability Letters. — 2009. — Т. 79, № 4. — С. 481—486.

62. *Nazarov A. I.*, *Sheipak I.* Degenerate self-similar measures, spectral asymptotics and small deviations of Gaussian processes // Bulletin of the London Mathematical Society. — 2012. — Т. 44, № 1. — С. 12—24.

63. *Oxtoby J. C.* Ergodic sets // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1952. — Т. 58, № 2. — С. 116—136.

64. *Papageorgiou A.*, *Wasilkowski G. W.* On the average complexity of multivariate problems // Journal of Complexity. — 1990. — Т. 6, № 1. — С. 1—23.

65. *Seneta E.* Regularly varying functions. Т. 508. — Springer, 2006.

66. Small Deviations for Stochastic Processes and Related Topics. — http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/smalldev/.

67. *Solomyak M.*, *Verbitsky E.* On a Spectral Problem Related to Self-Similar Measures // Bulletin of the London Mathematical Society. — 1995. — Т. 27, № 3. — С. 242—248.

68. *Zolotarev V.* Gaussian measure asymptotics in l2 on a set of centered spheres with radii tending to zero // 12th Europ. Meeting of Statisticians, Varna. Т. 254. — 1979.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в рецензируемых изданиях

69. *Растегаев Н. В.* Об асимптотике спектра задачи Неймана для уравнения Штурма–Лиувилля с арифметически самоподобным весом обобщен-

ного канторовского типа // Функциональный анализ и его приложения. — 2018. — Т. 52, № 1. — С. 85—88.

70. *Растегаев Н. В.* Об асимптотике спектра задачи Неймана для уравнения Штурма–Лиувилля с самоподобным весом обобщенного канторовского типа // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2014. — Т. 425. — С. 86—98. — Перевод: J. Math. Sci. (N. Y.), 210:6 (2015), 814–821.

71. *Растегаев Н. В.* Об асимптотике спектра тензорного произведения операторов с почти регулярными маргинальными асимптотиками // Алгебра и анализ. — 2017. — Т. 29, № 6. — С. 197—229.

Прочие публикации

72. *Rastegaev N. V.* On spectral asymptotics of the mixed boundary value problems for the Sturm–Liouville equation with generalized Cantor type weight // Спектральная теория и дифференциальные уравнения: конференция, посвященная 100-летию Б.М. Левитана, тезисы докладов. — Москва, 2014. — С. 30—31.

73. *Rastegaev N. V.* On spectral asymptotics of the Neumann problem for the Sturm-Liouville equation with arithmetically self-similar singular weight // XXVI St. Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis, Abstracts. — Санкт-Петербург, 2017. — С. 22.

74. *Rastegaev N. V.* On spectral asymptotics of the tensor product of operators with almost regular marginal asymptotics // International conference Days on Diffraction, Abstracts. — Санкт-Петербург, 2016. — С. 107—108.

75. *Rastegaev N. V.* Spectral asymptotics of operators of the tensor product type with almost regular marginal asymptotics // 8th St. Petersburg Conference in Spectral Theory, Abstracts. — Санкт-Петербург, 2016. — С. 18.