

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Фаизова Анна Андреевна

**МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЗЕРВОВ ПО ДОЛГОСРОЧНОМУ СТРАХОВАНИЮ
С УЧЕТОМ ЗАВИСИМОСТИ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ
ОТ РАЗМЕРА ИНВЕСТИЦИЙ**

Специальность 08.00.13–Математические и инструментальные методы экономики

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата экономических наук

Санкт-Петербург

2016

Диссертационная работа выполнена на кафедре управления рисками и страхования экономического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет».

Научный руководитель: доктор экономических наук, доцент,
Кудрявцев Андрей Алексеевич
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Официальные оппоненты: доктор экономических наук, профессор,
Чернов Виктор Петрович
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный экономический университет»

кандидат экономических наук, доцент,
Назарова Варвара Вадимовна
СПб филиал ФГАОУ ВО "Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Пермский государственный национальный исследовательский университет»

Защита состоится «15» июня 2016 г. в «15:00» часов на заседании Совета Д 212.232.34 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 191123, Санкт-Петербург, ул. Чайковского д. 62, ауд. 415

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Санкт-Петербургского государственного университета.

Автореферат разослан «___» _____ 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат экономических наук, доцент

Л.В. Попова

1.Общая характеристика работы

Актуальность. Резерв по долгосрочному страхованию является важнейшим источником выполнения принятых страховой организацией обязательств, за счет чего обеспечивается ее финансовая устойчивость и платежеспособность. Поэтому определение размера такого резерва, адекватного страховым обязательствам, является чрезвычайно важной и актуальной задачей.

Договор долгосрочного страхования предполагает разбиение порожденных им денежных потоков на рисковую компоненту, предполагающую покрытие текущего риска, и накопительную компоненту, отражающую необходимость перераспределения денежных средств во времени. Длительный срок страхования усиливает потребность в более точном анализе обеих компонент, но особенно – накопительной. В частности, актуарные оценки резерва должны основываться на прогнозе инвестиционного дохода страховой организации, получаемого ей от размещения временно свободных средств (части страховой премии и резервов). Это делает такие оценки чувствительными к изменению доходности. В результате задача анализа устойчивости оценок резерва к колебаниям ставок процента, заложенных в актуарные расчеты, является ключевой с точки зрения финансового менеджмента страховой организации, что и определяет актуальность исследования.

В качестве одной из предпосылок классических моделей резерва по долгосрочному страхованию используется предположение об изменении процентной ставки с течением времени. Однако на практике изменение процентной ставки зависит от гораздо большего количества факторов, например таких, как состояние экономики страны, срок инвестирования, уровень инфляции и других.

В этой связи возникает необходимость выделения среди прочих такого фактора оценки резерва по долгосрочному страхованию как зависимость средней процентной ставки размещения (инвестирования) данного резерва от его размера. Наличие такой зависимости можно объяснить разными объемами рынков, на которые можно выходить при различном размере инвестируемых средств, относительным уменьшением удельных транзакционных издержек при росте инвестиций и т.д.

В целом выбранная тема диссертационного исследования направлена на решение важной **хозяйственной задачи** – определение достаточного резерва по долгосрочному страхованию, учитывающего влияние на процентную ставку размера инвестируемого капитала.

Степень разработанности задачи исследования. Для моделирования резерва по долгосрочному личному страхованию, отражающего влияние на него существенных факторов, в том числе учитывающего зависимость процентной ставки от размера инвестируемых средств, в диссертационном исследовании предлагается использовать модели с конечным числом состояний. Это – универсальные модели, применяемые для решения многих эконо-

мических задач. Использованию подобных моделей в актуарном моделировании страховых операций посвящены работы С. Хабермана, Э. Питакко, Абдюшевой С.Р., Спивака С.И., Баскакова В.Н. и др.

Для описания эволюции риска, застрахованного по договору долгосрочного страхования, в рамках модели с конечным числом состояний используются случайные процессы, обладающие марковским свойством. Применению подобных процессов в страховании посвящены работы М. Амслера, Я. Хоема, М. Балеера, Х. Рамлау-Хансена, Х. Вольфуиса, Кудрявцева А.А. и др.

В настоящее время существует достаточно большое количество научной литературы, посвященной учету в актуарных моделях изменчивости процентной ставки во времени. Простейшие модели включают детерминированные сценарии развития процентной ставки, более современные подходы предлагают использовать стохастические модели. Ключевыми в данной области следует считать работы таких исследователей как Т. Мёллер, М. Стеффенсен, Н. Бауэрс и др. Однако исследований, посвященных учету влияния на процентную ставку не только текущего момента времени, но и других параметров, на сегодняшний день не проводилось, что и определяет выбор темы данного исследования.

Целью диссертационной работы является разработка моделей оценки резерва по долгосрочному страхованию, учитывающих влияние на такую оценку зависимости средней нормы доходности от размера размещаемых (инвестируемых) средств.

Реализация цели предусматривает решение следующих **частных задач**:

- Выявление особенностей формирования резервов в долгосрочном страховании, учитываемых при моделировании резерва;
- Построение экономико-математической модели резерва по смешанному страхованию жизни, учитывающей зависимость процентной ставки размещения (инвестирования) страхового резерва от его размера, и ее сравнение с традиционной моделью резерва, не учитывающей подобной зависимости;
- Разработка экономико-математической модели резерва по смешанному страхованию жизни, учитывающей зависимость процентной ставки от размера совокупного резерва, сформированного страховщиком по данному виду страхования;
- Построение экономико-математической модели резервов по страхованию потери доходов вследствие полной постоянной утраты трудоспособности, позволяющей учесть зависимость процентной ставки размещения (инвестирования) страхового резерва от размера инвестируемого капитала;
- Разработка экономико-математической модели резервов по страхованию потери доходов вследствие временной утраты трудоспособности, учитывающей зависимость процентной ставки от размера страховых резервов.

Объектом исследования диссертационной работы является страховая организация (страховщик), осуществляющая долгосрочное страхование.

Предметом исследования диссертационной работы является процесс формирования страховой организацией резервов по долгосрочным видам страхования.

Теоретико-методологической основой диссертационной работы являются основные положения экономической теории, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей, принципы построения актуарных экономико-математических моделей, теория оценивания страховых операций, актуарный анализ. При написании работы использовались нормативные акты Российской Федерации, статьи и монографии отечественных и зарубежных авторов в области страхования и актуарных расчетов.

Научная новизна работы заключается в развитии методов актуарных расчётов и построении новых моделей процессов в страховом секторе экономики, а именно моделей формирования и оценки резервов по долгосрочному страхованию, учитывающих зависимость процентной ставки от различных параметров, в том числе от размера инвестиций, и обеспечивающих адекватность их размера страховым обязательствам в течение всего срока действия договора.

Наиболее значимыми являются следующие **результаты диссертационного исследования**, полученные лично соискателем и выносимые на защиту:

1. Схема построения модели страховых резервов, разработанная автором на основе проведенного анализа особенностей формирования резервов в долгосрочном страховании. Она дает возможность создания и использования унифицированного подхода к построению моделей резерва, учитывающих зависимость процентной ставки от различных параметров, в том числе от размера инвестируемых средств, и обеспечивает адекватность размера резерва в течение всего срока действия договора принятым и выполняемым обязательствам.
2. Экономико-математическая модель резерва, сформированного по договору смешанного страхования жизни, учитывающая зависимость процентной ставки от размера резерва по этому договору. Расчеты проведены для кусочно-постоянной и линейной зависимостей. По сравнению с классическими выводами данный результат исследования позволяет принимать во внимание при формировании резерва влияние на величину процентной ставки размера инвестируемых средств, что позволяет принимать более обоснованные решения в области финансового менеджмента;
3. Экономико-математическая модель резерва для договора смешанного страхования жизни, позволяющая учесть кусочно-постоянную зависимость процентной ставки от размера совокупного резерва, сформированного страховщиком по данному виду страхования.

Предложенная в работе модель отвечает более широкому кругу практических ситуаций, чем традиционная, не содержащая подобной зависимости;

4. Экономико-математическая модель, описывающая резервы по страхованию потери доходов вследствие полной постоянной утраты трудоспособности при наличии кусочно-постоянной зависимости интенсивности начисления процента от размера резерва. Она отличается от известных работ Хабермана и Питакко тем, что позволяет учесть влияние на размер резервов по данному виду страхования большего количества факторов, и, как следствие, определить потребность в страховых резервах, более адекватных принятым страховым обязательствам;
5. Экономико-математическая модель, описывающая резервы по страхованию потери доходов вследствие временной утраты трудоспособности, позволяющая учесть кусочно-постоянную зависимость интенсивности начисления процента от размера резервов. По сравнению с известными результатами, данная модель дает возможность при формировании резервов принимать во внимание большее количество причин, оказывающих влияние на размер процентной ставки, что позволяет повысить эффективность инвестиционной политики.

Область исследования. Диссертационное исследование проведено в соответствии с п. 1.6. «Математический анализ и моделирование процессов в финансовом секторе экономики, развитие метода финансовой математики и актуарных расчетов» Паспорта специальностей ВАК РФ (экономические науки) по специальности 08.00.13 – «Математические и инструментальные методы экономики».

Теоретическая значимость диссертации состоит в расширении научных знаний в области теории и методологии актуарного анализа, усовершенствовании инструментария актуарных экономико-математических методов, а именно, в разработке моделей резерва по отдельному договору долгосрочного страхования, учитывающих сценарии развития процентных ставок, в частности, их зависимость от размера инвестируемого капитала.

Практическая значимость определяется возможностью использования результатов исследования в качестве конкретных рекомендаций по формированию резерва для отдельного договора долгосрочного страхования. Построенные модели позволяют страховщику рассчитывать резерв, опираясь на существующие на рынке предложения по инвестированию средств, учитывая при этом прогноз доходности будущих инвестиций страховой организации. Предложенные модели позволят страховщику:

- Повысить точность оценки резерва по долгосрочному страхованию;
- Повысить эффективность инвестиционной политики;
- Рассчитывать более точные страховые тарифы.

Объём и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованных источников (39 наименований), 31 рисунка. Общий объем работы составляет 106 страниц.

Во введении обоснована актуальность и охарактеризована разработанность выбранной темы исследования, поставлены цели и задачи исследования, определены предмет, объект, научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы.

В первой главе «**Моделирование резерва по долгосрочному страхованию**» выявлены особенности актуарных расчетов в долгосрочном страховании, проанализированы основные функции резервирования, представлены основные методы учета инвестиционного дохода при расчете резервов по долгосрочному страхованию, разработана общая схема построения моделей резервов, приведено математическое описание вспомогательных моделей.

Во второй главе «**Модель резерва по договору смешанного страхования жизни**» разработаны модели, позволяющие вычислить размер резерва, а также значение нетто-премии, обеспечивающее адекватность страхового резерва принятым обязательствам в любой момент времени действия договора, для случаев кусочно-постоянной и линейной зависимости процентной ставки от размера резерва. Проведено сравнение построенных моделей с традиционной актуарной моделью, не учитывающей подобной зависимости. На основе построенных моделей страхового резерва для отдельного договора сконструирована модель страхового резерва для всего портфеля договоров.

В третьей главе «**Модель резерва по иным договорам долгосрочного страхования**» приводятся модели, позволяющие учесть зависимость процентной ставки от размера инвестируемых средств при расчете резерва для договоров страхования потери доходов вследствие утраты трудоспособности (как полной постоянной, так и временной). Построены формулы, позволяющие вычислить необходимый размер резерва, а также значение нетто-премии, при наличии кусочно-постоянной зависимости подобного рода.

В **Заключении** представлены основные выводы исследования.

Публикации. По теме исследования опубликовано 12 печатных работ общим объемом 2,9 п.л. (авторский объем 2,6 п.л.). В том числе в изданиях, рекомендуемых ВАК для публикаций результатов диссертационных исследований, — 4 работы объемом 2,1 п.л. (авторский объем 1,8 п.л.).

Апробация и реализация результатов исследования. Основные результаты диссертационного исследования были представлены на следующих международных научных конференциях:

- 16 международный конгресс «Страхование: математика и экономика» (Insurance: mathematics and economics) – Гонконг, 2012;

- XIV международная научно-практическая конференция «Страховые интересы современного общества и их обеспечение» – Саратов, 2013;
- международная научно-практическая конференция, посвященная 290-летию Санкт-Петербургского государственного университета «Устойчивое развитие: общество и экономика» – Санкт-Петербург, 2014;
- II международная научно-практическая конференция, посвященная 75-летию Экономического факультета Санкт-Петербургского государственного университета «Устойчивое развитие: общество и экономика». – Санкт-Петербург, 2015.

В 2011, 2012, 2015 годах положения работы обсуждались на межкафедральном научном семинаре экономического факультета СПбГУ под руководством к.э.н., доцента Д.Н.Колесова, д.э.н., доцента В.Г.Халина, д.э.н., профессора Г.В.Черновой.

Результаты, полученные в диссертационной работе, реализованы и внедрены в ОАО «Либерти Страхование» для оценки страховых резервов и совершенствования процедур принятия решений в данной области.

2. Основные результаты диссертации

1. Схема построения модели страховых резервов, разработанная автором на основе проведенного анализа особенностей формирования резервов в долгосрочном страховании.

Актуарные методы, применяемые для обоснования операций в долгосрочном страховании, имеют ряд особенностей:

- необходимость сопоставления денежных потоков, осуществляющихся в разные (возможно удаленные друг от друга) моменты времени;
- учет дохода, получаемого страховщиком от инвестиционной деятельности, который в долгосрочном страховании оказывает существенное влияние на актуарное обоснование соответствующих страховых операций;
- использование моделей, позволяющих учесть характер выбытия из совокупности застрахованных;
- выгодоприобретателю явно или неявно гарантируется получение определенного инвестиционного дохода. Также возможны договоры с участием страхователя в прибыли страховщика. В этом случае требуется применение специфических актуарных методов, позволяющих прогнозировать будущий доход от инвестиций.

Необходимость прямого рассмотрения накопительной компоненты в договорах долгосрочного страхования означает, что актуарная модель страхового резерва должна учитывать среди прочего прогноз доходности будущих инвестиций страховой организации. При этом важно учесть наибольшее количество возможных параметров, от которых может зави-

сеть получаемый инвестиционный доход. Это повысит точность оценок, а, значит, уменьшит вероятность невыполнения страховой организацией своих обязательств и, как следствие, вероятность ее разорения.

Для учета возможного инвестиционного дохода в актуарную модель страхового резерва при использовании непрерывной модели вводится функция интенсивности начисления процента (силы процента), которая представляет собой аналог ставки в непрерывном времени. В простейших случаях ее считают детерминированной и постоянной. Однако на практике она может зависеть от многих переменных, таких как текущий момент времени, срок инвестирования средств, размер инвестируемого капитала.

Для построения актуарной модели резерва по долгосрочному личному страхованию, которая бы отражала влияние на него существенных факторов, в том числе, позволяла бы учитывать зависимость нормы доходности от размера инвестируемого капитала, предлагается использовать актуарные модели с конечным числом состояний и системы дифференциальных уравнений Тиле. При этом особенности моделей определяются конкретными условиями договоров долгосрочного личного страхования.

Многообразие видов личного страхования и соответствующих им страховых продуктов определяет множество вариантов формул расчета страховых резервов, однако сама схема построения модели страхового резерва, как показал проведенный анализ, является единой для всех этих вариантов (рис.1). Сначала на основе модели с конечным числом состояний строится модель эволюции риска, подлежащего страхованию, позволяющая описать ее с помощью нескольких состояний, которым соответствует некоторое значение определенных числовых параметров, а также переходов из одного состояния в другое. Параметры конкретной модели с несколькими состояниями определяются видом долгосрочного страхования, для которого строится модель резерва. На следующем этапе построенная модель эволюции застрахованного риска дополняется числовым параметром, определяющим для конкретного страхового продукта денежный поток, в частности совокупность премий и выплат. На основе построенной таким образом модели денежного потока на следующем шаге конструируется требуемая модель страхового резерва. Для этого динамика изменения резервов по данному виду долгосрочного страхования представляется в непрерывном времени в виде системы дифференциальных уравнений Тиле. Решение системы позволяет получить требуемую модель страхового резерва. Для учета влияния на процентную ставку различных факторов, в том числе отражения ее связи с размером инвестируемых средств, в систему уравнений Тиле вводится специальная функция, описывающая требуемую зависимость.

Использование данной схемы дает возможность унифицированного построения модели, позволяющей найти размер страхового резерва, который будет адекватен обязательствам страховщика в любой момент времени t .

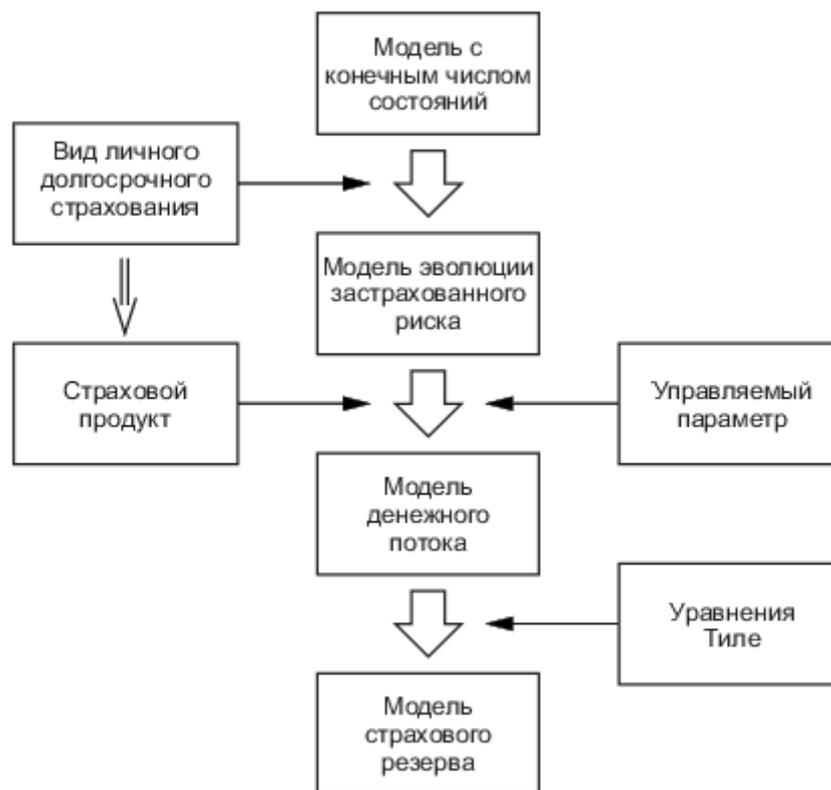


Рис. 1. Схема построения модели резерва для договора долгосрочного личного страхования

При построении моделей резервов использованы следующие обозначения:

δ – интенсивность начисления процента (интенсивность изменения прироста инвестированного капитала), определенная для каждого момента времени;

$\mu_{ij}(t)$ – интенсивности перехода, то есть «мгновенные» по времени вероятности смены состояния i на состояние j в момент времени t .

$\mu_x(t)$ – интенсивность смертности по достижению возраста $x+t$ при условии заключения договора страхования жизни в возрасте x .

$p_i(t)$ – интенсивность уплаты нетто-премии, которая производится, пока застрахованный риск находится в состоянии с номером i ;

$b_i(t)$ – интенсивность выплаты аннуитета, которая производится, пока застрахованный риск находится в определенном состоянии с номером i ;

$c_{ij}(t)$ – размер страховой выплаты, производимой при переходе застрахованного риска из состояния с номером i в состояние с номером j ;

$d_i(n)$ – размер страховой выплаты, производимой в случае, если застрахованный риск будет находиться в состоянии с номером i в момент окончания договора;

$\bar{V}_i(t)$ – размер страхового резерва, который необходимо сформировать в момент времени t , если застрахованный риск находится в состоянии с номером i .

2. Экономико-математическая модель резерва, сформированного по договору смешанного страхования жизни, учитывающая зависимость процентной ставки от размера резерва по этому договору.

Страхование жизни предназначено для уменьшения неблагоприятных финансовых последствий, вызванных смертью застрахованного лица. Смешанное страхование подразумевает, что обеспечение выплачивается выгодоприобретателю в случае смерти застрахованного лица в течение срока страхования и, возможно в другом размере, при его дожитии до окончания договора.

Рассмотрим договор смешанного страхования жизни для некоторого лица (возраста x), по которому предусмотрены нетто-премия, выплачиваемая непрерывно с интенсивностью $p_1(t)$ в год, пока застрахованное лицо живо; выплаты на случай смерти $c_{12}(t)$; выплаты на случай дожития $d_1(n)$.

Такой договор описывается моделью с двумя состояниями (состояние 1 "застрахованное лицо живо" и состояние 2 "застрахованное лицо умерло") и единственным возможным переходом из первого состояния во второе (рис. 2).



Рис. 2. Модель с двумя состояниями для договора смешанного страхования жизни

Введение в существующие модели резервов по смешанному страхованию жизни кусочно-постоянной зависимости интенсивности начисления процента от инвестируемого капитала позволит проанализировать влияние использования шкал процентных ставок. Если функция δ зависит от размера резерва следующим образом:

$$\delta(\bar{V}_1(t)) = \begin{cases} \delta_0, & \bar{V}_1(t) < V_0, \\ \delta_1, & \bar{V}_1(t) \geq V_0, \end{cases} \quad (1)$$

где $V_0 > 0$ – критический уровень резерва, $0 < \delta_0 < \delta_1$, то динамика изменения резерва описывается дифференциальным уравнением Тиле:

$$\frac{d\bar{V}_1(t)}{dt} = p_1(t) + \delta(\bar{V}_1(t)) \cdot \bar{V}_1(t) + \mu_x(t)\bar{V}_1(t) - c_{12}(t)\mu_x(t). \quad (2)$$

Решение этого уравнения с кусочно-постоянной функцией интенсивности начисления процента (1) будет иметь вид:

$$\bar{V}_1(t) = \begin{cases} \int_0^t (p_1(\tau) - c_{12}(\tau)\mu_x(\tau)) e^{\int_0^t (\delta_0 + \mu_x(s)) ds} d\tau, & t < t_0, \\ V_0 e^{\int_0^{t_0} (\delta_1 + \mu_x(\tau)) d\tau} + \int_{t_0}^t (p_1(\tau) - c_{12}(\tau)\mu_x(\tau)) e^{\int_{t_0}^t (\delta_1 + \mu_x(s)) ds} d\tau, & t \geq t_0, \end{cases} \quad (3)$$

где параметры $p_1(t)$ и t_0 удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} \bar{V}_1(t_0) = V_0 \\ \bar{V}_1(n) = d_1(n). \end{cases} \quad (4)$$

Решить в общем виде данную систему не представляется возможным, но в частных случаях решение можно получить приближенно с помощью численных методов.

Приведенная формула (3) дает возможность учесть при формировании резерва по смешанному страхованию жизни не только кусочно-постоянную зависимость процентной ставки от размера резерва по этому виду страхования. Также пользуясь данной моделью можно рассматривать зависимость интенсивности начисления процента от прочих факторов, не входящих в качестве параметров в систему уравнений Тиле (например, от срока инвестирования и т.п.).

Аналогичным образом может быть построена модель резерва по смешанному страхованию жизни, учитывающая линейную зависимость интенсивности начисления процента от размера инвестируемых средств, т.е. зависимость вида:

$$\delta(\bar{V}_1(t)) = k\bar{V}_1(t) + l,$$

где k, l – некоторые константы, $k \neq 0$.

По сравнению с классическими выводами, построенные модели резервов по смешанному страхованию жизни позволяют принимать во внимание при формировании резерва влияние на величину процентной ставки большего набора факторов. Таким образом, эти модели отвечают более широкому кругу практических ситуаций, чем традиционные, учитывающие зависимость процентной ставки только от текущего момента времени, что позволяет принимать более обоснованные решения в области финансового менеджмента.

3. Экономико-математическая модель резерва для договора смешанного страхования жизни, позволяющая учесть кусочно-постоянную зависимость процентной ставки от размера совокупного резерва, сформированного страховщиком по данному виду страхования.

Несмотря на то, что законодательством предписывается расчет резерва отдельно по каждому договору смешанного страхования жизни, инвестируется чаще всего совокупный резерв, сформированный для некоторого портфеля (набора) договоров. Таким образом, на практике чаще всего возникает зависимость процентной ставки не от размера резерва по каждому договору, а от совокупного резерва по портфелю. Для учета подобной зависимости необходимо рассмотрение всего набора договоров как единого целого.

Под портфелем понимается совокупность отдельных договоров страхования, при этом они могут различаться по некоторым параметрам (например, сроку действия договора, возрасту застрахованного, страховым суммам и т.д.). В модель вводятся предположения о зави-

симости интенсивности начисления процента не от размера резерва по каждому договору, а от совокупного резерва по всему портфелю. В случае кусочно-постоянной зависимости такого типа с одним разрывом, функция интенсивности начисления процента задается соотношением

$$\delta(\bar{V}(t)) = \begin{cases} \delta_0, & \bar{V}(t) < V_0, \\ \delta_1, & \bar{V}(t) \geq V_0, \end{cases} \quad (5)$$

где $\bar{V}(t) = \sum_{i=1}^m \bar{V}_1^i(t)$ – совокупный резерв по портфелю из m договоров, $\bar{V}_1^i(t)$ – размер резерва в момент времени t , сформированного по договору с номером i , $V_0 > 0$ – критический уровень резерва, $0 < \delta_0 < \delta_1$.

Динамика общего резерва по портфелю описывается суммой уравнений для каждого договора, которые являются дифференциальными уравнениями Тиле с определенной выше интенсивностью начисления процента:

$$\frac{d\bar{V}_1^i(t)}{dt} = p_1^i(t) + \delta(\bar{V}(t)) \cdot \bar{V}_1^i(t) + \mu_{x_i}^i(t) \bar{V}_1^i(t) - c_{12}^i(t) \mu_{x_i}^i(t), \quad (6)$$

где $i = 1 \dots m$.

Тогда формула для расчета величины резерва для каждого отдельного договора страхования будет иметь вид:

$$\bar{V}_1^i(t) = \begin{cases} \int_0^t (p_1^i(\tau) - c_{12}^i(\tau) \mu_{x_i}^i(\tau)) e^{\int_0^\tau (\delta_0 + \mu_{x_i}^i(s)) ds} d\tau, & t \leq t_0, \\ \bar{V}_1^i(t_0) e^{\int_0^{t_0} (\delta_1 + \mu_{x_i}^i(\tau)) d\tau} + \int_{t_0}^t (p_1^i(\tau) - c_{12}^i(\tau) \mu_{x_i}^i(\tau)) e^{\int_{t_0}^\tau (\delta_1 + \mu_{x_i}^i(s)) ds} d\tau, & t > t_0, \end{cases} \quad (7)$$

где момент времени t_0 и нетто-премии p_1^i можно найти, решив с использованием численных методов систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \bar{V}_1^i(t_0) = V_0 \\ \bar{V}_1^i(n) = d_1^i(n). \end{cases} \quad (8)$$

Формула расчета совокупного резерва получается суммированием формул для отдельных договоров страхования. Решение задачи учета кусочно-постоянной зависимости процентной ставки от размера совокупного резерва по всему портфелю договоров с произвольным числом разрывов может быть построено аналогичным образом.

Предложенная в работе модель резерва для договора смешанного страхования жизни, учитывающая кусочно-постоянную зависимость процентной ставки от размера совокупного

резерва, сформированного страховщиком по данному виду страхования, отвечает более широкому кругу практических ситуаций, чем традиционно используемая модель.

4. Экономико-математическая модель, описывающая резервы по страхованию потери доходов вследствие полной постоянной утраты трудоспособности при наличии кусочно-постоянной зависимости интенсивности начисления процента от размера резерва.

Страхования потери доходов вследствие постоянной полной утраты трудоспособности (Total Permanent Disability Insurance) представляет собой страхование от урона, вызванного неспособностью заниматься приносящей доход деятельностью из-за психического или физического ущерба, классифицируемого как постоянный в соответствии с условиями договора страхования. Это долгосрочный вид страхования, договор должен действовать не менее 5 лет. По данному виду страхования, как правило, предоставляются регулярные выплаты страхового обеспечения при стойкой утрате трудоспособности до смерти застрахованного лица или достижения им оговоренного возраста (например, возраста выхода на пенсию).

В России данный вид страхования не распространен. Тем не менее, модели, используемые для соответствующих страховых операций, могут быть применены для обоснования социального обеспечения и операций социального страхования, что делает актуальным их рассмотрение.

Рассмотрим индивидуальный договор страхования на случай постоянной полной потери трудоспособности, заключенный сроком на n лет, по которому предусмотрены премия, непрерывно уплачиваемая с интенсивностью $p_1(t)$, пока застрахованное лицо трудоспособно; выплата аннуитета с интенсивностью $b_2(t)$, производимая в случае постоянной полной потери трудоспособности; выплата в размере $c_{23}(t)$, осуществляющаяся в случае смерти постоянно полностью нетрудоспособного застрахованного лица.

Подобный договор страхования описывается моделью с тремя состояниями, соответствующими трудоспособности, полной постоянной нетрудоспособности и смерти застрахованного лица (рис. 3).

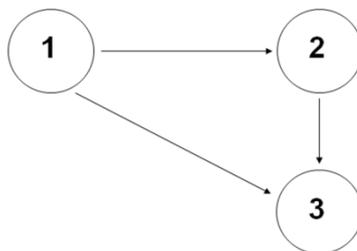


Рис. 3. Модель с тремя состояниями для договора страхования потери доходов вследствие полной постоянной нетрудоспособности

Пусть функция интенсивности начисления процента δ зависит кусочно-постоянно от размера инвестируемого капитала, то есть от размера резерва $\bar{V}_i(t)$, сформированного по договору страхования на случай постоянной полной потери трудоспособности в момент времени t :

$$\delta(\bar{V}_i(t)) = \begin{cases} \delta_0, & \bar{V}_i(t) < V_0, \\ \delta_1, & \bar{V}_i(t) \geq V_0, \end{cases} \quad (9)$$

где $V_0 > 0$ – критический уровень резерва, $0 < \delta_0 < \delta_1$.

Динамика изменения резервов описывается системой дифференциальных уравнений Тиле:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{V}_1(t)}{dt} = p_1(t) + (\delta(\bar{V}_1(t)) + \mu_{12}(t) + \mu_{13}(t)) \cdot \bar{V}_1(t) - \mu_{12}(t) \bar{V}_2(t) \\ \frac{d\bar{V}_2(t)}{dt} = (\delta(\bar{V}_2(t)) + \mu_{23}(t)) \cdot \bar{V}_2(t) - b_2(t) - \mu_{23}(t) c_{23}(t) \end{cases} \quad (10)$$

с функцией интенсивности начисления процента вида (9).

Формулы для расчета резерва $\bar{V}_1(t)$ и $\bar{V}_2(t)$ получается при решении указанной системы и может быть представлена в следующем виде:

$$\bar{V}_2(t) = \begin{cases} V_0 \cdot e^{-\int_0^t (\delta_1 + \mu_{23}(s)) ds} + \int_t^{t_0} (b_2(\tau) + c_{23}(\tau) \mu_{23}(\tau)) e^{\int_t^\tau (\delta_1 + \mu_{23}(s)) ds} d\tau, & t < t_0, \\ \int_t^n (b_2(\tau) + c_{23}(\tau) \mu_{23}(\tau)) e^{\int_t^\tau (\delta_0 + \mu_{23}(s)) ds} d\tau, & t \geq t_0, \end{cases} \quad (11)$$

где момент времени t_0 определяется соотношением

$$V_0 = \int_{t_0}^n (b_2(\tau) + c_{23}(\tau) \mu_{23}(\tau)) e^{\int_{t_0}^\tau (\delta_0 + \mu_{23}(s)) ds} d\tau. \quad (12)$$

Формула для расчета резерва $\bar{V}_1(t)$, формируемого в случае, если застрахованное лицо трудоспособно, может быть представлена в виде:

$$\bar{V}_1(t) = \int_t^n (\bar{V}_2(\tau) \mu_{12}(\tau) - p_1(\tau)) e^{\int_t^\tau (\delta_0 + \mu_{12}(s) + \mu_{13}(s)) ds} d\tau. \quad (13)$$

Для нахождения интенсивности премии $p_1(t)$ необходимо воспользоваться принципом эквивалентности, который в данном случае соответствует требованию о равенстве нулю резерва в начальный момент времени. Построенные формулы для расчета резервов $\bar{V}_1(t)$ и $\bar{V}_2(t)$ дают возможность учесть зависимость интенсивности начисления процента не только от размера инвестируемого капитала, но и прочих факторов, не входящих в систему (10) в качестве параметров.

Построенная модель резервов по страхованию потери доходов вследствие полной постоянной утраты трудоспособности при наличии кусочно-постоянной зависимости интенсивности начисления процента от размера резерва позволяет учесть влияние на размер резервов по данному виду страхования большего количества факторов, и, как следствие, определить потребность в страховых резервах более адекватно принятым страховым обязательствам. Применение разработанной модели на практике позволит принимать более обоснованные решения в области финансового менеджмента, что будет способствовать повышению финансовой устойчивости страховой организации.

5. Экономико-математическая модель, описывающая резервы по страхованию потери доходов вследствие временной утраты трудоспособности, позволяющая учесть кусочно-постоянную зависимость интенсивности начисления процента от размера резервов.

Рассмотрим более общий вид страхования – страхование потери доходов вследствие временной утраты трудоспособности (Disability Insurance, Disability Income Insurance или Income Protection). Объектом страхования в этом случае являются имущественные интересы, связанные со здоровьем и трудоспособностью застрахованного лица. Временный характер нетрудоспособности предполагает, что застрахованное лицо может восстановить способность заниматься приносящей доход деятельностью.

Пусть по договору страхования на случай временной нетрудоспособности, заключенному сроком на n лет, предусмотрены премия, непрерывно уплачиваемая с интенсивностью $p_1(t)$, пока застрахованное лицо трудоспособно; выплата аннуитета с интенсивностью $b_2(t)$, производимая в случае потери трудоспособности. Такие условия наиболее часто встречаются на практике. Подобный договор страхования описывается моделью с тремя состояниями, отвечающими трудоспособности, нетрудоспособности и смерти застрахованного лица (рис. 4).

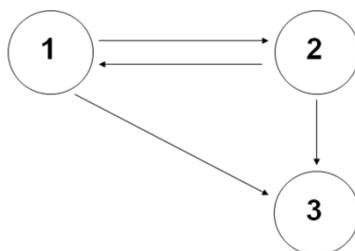


Рис. 4. Модель с тремя состояниями для договора страхования потери доходов вследствие временной нетрудоспособности

Такая модель может быть использована не только для расчета резерва по договору страхования потери доходов вследствие временной утраты трудоспособности. Ее можно использовать для договоров страхования здоровья, страхования от несчастных случаев на про-

изводстве, страхования на случай увольнения, для учета в страховании жизни оценки смертности курящих и некурящих людей и т.д. Различие будет лишь в видах денежного потока и функциях, описывающих интенсивности переходов из одного состояния в другое.

Предположим также, что интенсивности переходов будут постоянными, и имеет место быткусочно-постоянная зависимость интенсивности начисления процента от размера инвестируемого капитала вида (9).

Тогда динамика изменения резервов, которые необходимо сформировать по договору страхования потери доходов вследствие временной нетрудоспособности, будет описываться системой:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{V}_1(t)}{dt} = p_1 + (\delta_0 + \mu_{12} + \mu_{13}) \cdot \bar{V}_1(t) - \mu_{12}\bar{V}_2(t) \\ \frac{d\bar{V}_2(t)}{dt} = (\delta(\bar{V}_2(t)) + \mu_{21} + \mu_{23}) \cdot \bar{V}_2(t) - b_2 - \mu_{21}\bar{V}_1(t). \end{cases} \quad (14)$$

Отметим, что явные формулы, описывающие резервы $\bar{V}_1(t)$ и $\bar{V}_2(t)$, которые можно построить, решив систему (14), будут достаточно громоздкие. Однако для конкретных данных указанные резервы могут быть вычислены.

Разработанные автором модели позволяют определить потребность в страховых резервах более адекватно принятым страховым обязательствам, чем традиционные, не учитывающие наличие зависимости интенсивности начисления процента от различных факторов, в том числе от размера инвестируемых средств. Приведенные формулы позволят строить более точные оценки резервов, и, как следствие, будут способствовать повышению финансовой устойчивости страховой организации.

3. Заключение

Диссертационное исследование посвящено разработке моделей оценки резерва по долгосрочному страхованию, учитывающих влияние на такую оценку зависимости средней нормы доходности от размера размещаемых (инвестируемых) средств.

После проведенного анализа особенностей формирования резервов в долгосрочном страховании соискателем разработана схема построения модели резервов, учитывающих зависимость процентной ставки от различных параметров. На ее основе построены модели оценки резерва по долгосрочному страхованию, позволяющие учесть влияние на него зависимости доходности от размера инвестируемого капитала, а именно:

- экономико-математическая модель резерва, сформированного по договору смешанного страхования жизни, учитывающая зависимость процентной ставки от размера резерва по этому договору;

- экономико-математическая модель резерва для договора смешанного страхования жизни, позволяющая учесть кусочно-постоянную зависимость процентной ставки от размера совокупного резерва, сформированного страховщиком по данному виду страхования;
- экономико-математическая модель, описывающая резервы по страхованию потери доходов вследствие полной постоянной утраты трудоспособности при наличии кусочно-постоянной зависимости интенсивности начисления процента от размера резерва;
- экономико-математическая модель, описывающая резервы по страхованию потери доходов вследствие временной утраты трудоспособности, позволяющая учесть кусочно-постоянную зависимость интенсивности начисления процента от размера резервов.

Таким образом, заявленные частные задачи решены полностью, а цель диссертационного исследования достигнута.

Кроме того, предложенные модели резервов

- дают возможность их пересчета в любой момент времени срока действия договора страхования для многих различных состояний застрахованного риска и переходов из одного состояния в другое;
- отражают влияние на страховой резерв таких существенных факторов как интенсивности переходов из одного состояния в другое, возникающие денежные потоки, инвестиционный доход;
- учитывают особенности того или иного вида долгосрочного личного страхования и конкретного страхового продукта внутри каждого вида.

Предложенные модели могут быть использованы для практических приложений учета любой формы зависимости между процентной ставкой и размером инвестируемых средств, так как ее аппроксимация может быть построена с помощью кусочно-постоянных функций.

Построенные модели позволяют учесть зависимость доходности не только от размера инвестируемого капитала, но и от других параметров, таких как срок инвестирования, волатильность доходности и т.д. Кроме того, они позволяют вычислить необходимый размер нетто-премии, обеспечивающий адекватность размера страхового резерва принятым обязательствам в любой момент времени действия договора.

Выведенные для конкретных видов страхования значения параметров и формул, используемых в актуарных моделях, обуславливают реальную возможность их применения на практике.

4. Основные научные публикации по теме диссертационного исследования

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК:

1. Моделирование резерва по страхованию жизни при наличии положительной обратной связи // Вестник СПбГУ, Серия «Экономика». - 2010, вып. 3. - с.57-65 (в соавторстве с Кудрявцевым А.А.; авторских - 0,28 п.л.);
2. Моделирование резерва по страхованию жизни с учетом сценариев развития процентной ставки // Научные труды Вольного экономического общества России. - 2013, т. 172. – с. 437-449. 0,46 п.л.;
3. Модель определения резерва по долгосрочному личному страхованию // Вестник СПбГУ, Серия «Экономика». - 2013, вып. 3. - с.129-133. 0,3 п.л.;
4. Модель резерва по долгосрочному личному страхованию и возможности ее применения// Финансы и кредит.- 2015, 17(641). – с. 59-66. 0,76 п.л.

Прочие публикации:

5. Вдовина (Фаизова) А.А. Моделирование резерва по страхованию жизни для некоторых сценариев развития процентных ставок. В кн.: Модернизация экономики: проблемы и перспективы: материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию со дня основания Экономического факультета СПбГУ. 14-15 октября 2010 г. Секции 7-13.
6. Вдовина (Фаизова) А.А. О проблемах применения модели с несколькими состояниями в долгосрочном страховании. В кн.: Пути развития теории и практики современного страхования. 28 октября 2011 г., Санкт-Петербург. Сборник тезисов международной научно-практической конференции, посвященной 10-летию юбилею кафедры управления рисками и страхования. СПб.: ЭФ СПбГУ, 2012. С.45-46.
7. Фаизова А. А. Использование актуарной модели с конечным числом состояний для отражения денежного потока по отдельному договору страхования. В кн.: Страховые интересы современного общества и их обеспечение: сборник материалов XIV Международной научно-практической конференции: в 2 т. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2013. Т. 2. С.133-137.
8. Фаизова А.А. Моделирование совокупного резерва при долгосрочном страховании с учетом сценариев развития процентной ставки. В кн.: Предпринимательство и реформы в России: материалы восемнадцатой международной конференции молодых ученых-экономистов. 22-23 ноября 2012 г. ЭФ СПбГУ, 2012. С.49-50.
9. Фаизова А.А. Модель резерва в долгосрочном страховании, учитывающая сценарии развития будущих норм доходности. В кн.: Международный экономический симпозиум — 2015: Материалы II международной научной-практической конференции, посвященной

75-летию экономического факультета Санкт-Петербургского государственного университета 22–25 апреля 2015 г. / ред. колл.: О. Л. Маргания, С. А. Белозеров [и др.]. СПб.: Изд-во Скифия-принт, 2015. С.489-490.

http://econ-conf.spbu.ru/files/Symposium_abstracts.pdf [Дата обращения 10.06.2015]

10. Фаизова А. А. Об учете инвестиционного дохода при резервировании в долгосрочном страховании. В кн.: Устойчивое развитие: общество и экономика: Материалы международной научно-практической конференции, посвященной 290-летию Санкт-Петербургского государственного университета, 23-26 апреля 2014 г. СПб.: Нестор-История, 2014. С.331-332.
11. Фаизова А.А. О проблеме учета процентных ставок при формировании резервов в долгосрочном страховании. В кн.: Интеграционные процессы: влияние на экономическое развитие: Материалы весенней конференции молодых ученых-экономистов. Санкт-Петербург, 19 апреля 2013 г. СПб.: Издат. центр экон. ф-та СПбГУ, 2013. С.119-120.
12. Фаизова А.А. Учет зависимости инвестиционного дохода от размера страховых резервов при долгосрочном страховании. В кн.: Инвестиционный климат: влияние на экономику: материалы весенней конференции молодых ученых экономистов 27 апреля 2012 г. СПб.: ОЦЭиМ, 2012. С.84-85.