

**Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Тульский государственный университет»**

**ОТЗЫВ**

официального оппонента на диссертацию

**Малых Артема Евгеньевича**

**«Алгебраическая аппроксимация глобальных аттракторов динамических систем  
на многообразии и некоторые вопросы ее стратификации»**,

представленную на соискание ученой степени кандидата

физико-математических наук по специальности

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические  
системы и оптимальное управление

Диссертационная работа посвящена изучению алгебраической аппроксимации глобальных аттракторов динамических систем и ее анализу.

Задачи, требующие выяснения формы аттрактора или его приближения возникают повсеместно. Среди классических работ на эту тему можно отметить, например, многочисленные работы, посвященные анализу аттрактора системы Лоренца. Существует несколько подходов к решению этой задачи (например, использование функций Ляпунова), однако подход, использующий алгебраические множества имеет ряд преимуществ. Во-первых, он позволяет аппроксимировать аттракторы, не наделенные структурой многообразия, во-вторых, алгебраические множества позволяют использовать для дальнейшего анализа широкий спектр техник из алгебраической геометрии, которая является быстро развивающимся разделом математики, в-третьих, большинство пакетов компьютерного моделирования содержат в себе инструменты для работы с алгебраическими множествами. Начало изучению алгебраической аппроксимации положили работы Фояша и Темама (1988), рассматривающие динамические системы с непрерывным временем в банаховых пространствах. В диссертационной работе изучается алгебраическая аппроксимация дискретных динамических систем, а также делаются первые шаги для распространения результатов Фояша и Темама на случай проективного многообразия. Такие задачи ставятся впервые.

Оригинальная теорема Фояша-Темама для систем с непрерывным временем в конечномерном линейном фазовом пространстве доставляет возможность аппроксимации аттрактора динамической системы алгебраическими многочленами. Изложению техники построения аппроксимирующих аттрактор алгебраических многочленов, а также программной реализации этой техники с помощью символьных вычислений в пакете Matlab для аппроксимации аттрактора системы Лоренца посвящены первые 3 раздела главы 1 диссертации. Наиболее впечатляющим

достижением диссертанта следует считать последующие разделы главы 1, посвященные расширению аппроксимационной теоремы Фояша-Темама на динамические системы с дискретным временем, заданные уравнением с вещественно аналитической правой частью. Полученная в этих разделах модифицированная аппроксимационная теорема позволила, в частности, провести алгебраическую аппроксимацию аттрактора известной системы Хенона.

Следующая глава диссертации посвящена аппроксимации аттракторов динамических систем на многообразиях. Вводятся основные понятия динамических систем на многообразиях, подробно изучаются динамические системы на плоском цилиндре. В частности показано, что аппроксимационную теорему Фояша-Темама можно адаптировать для систем на плоском цилиндре. Основное внимание уделено системам на проективном многообразии. Дело в том, что рассмотрение динамической системы на проективном многообразии дает возможность удобного анализа локализации аттракторов исходной системы. Поскольку в оригинальной теореме Фояша-Темама центральную роль играет интегральное представление точки, лежащей на аттракторе, возникает необходимость получить аналогичное представление для точек аттрактора на проективном многообразии. Основная проблема в получении такого представления состоит в том, что решение может находиться на разных картах проективного многообразия. Центральным результатом второй главы диссертации является интегральное уравнение для координат точки, лежащей на аттракторе системы, заданной на проективном многообразии.

Заключительная глава диссертации посвящена изучению вопроса построения стратификации Уитни алгебраических множеств, аппроксимирующих аттрактор некоторой системы. Основное достоинство стратификации определяется доставляемой ею возможностью изучать структуру самих аттракторов, или их аппроксимаций в случае, когда точная форма аттрактора неизвестна. В диссертации предложен алгоритм стратификации алгебраического множества в двумерном евклидовом пространстве, использующий цилиндрическую алгебраическую декомпозицию. Автором доказано, что процедура цилиндрической алгебраической декомпозиции, примененная к алгебраическому множеству в  $R^2$ , дает стратификацию Уитни. Реализация предложенного диссертантом алгоритма стратификации иллюстрируется на примере аппроксимации аттрактора системы Хенона.

По содержанию и оформлению диссертации имеются **замечания**.

1. Автор не приводит оценки скорости сходимости аппроксимационных множеств аттрактора дискретной динамической системы к исходному аттрактору, хотя для оригинальной теоремы Фояша-Темама такие оценки приведены.
2. В записи системы уравнений и матрицы  $A$  на странице 16 диссертации имеются ошибки.

