САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Плотников Павел Владимирович

РЕШЕНИЕ МИНИМАКСНЫХ ЗАДАЧ РАЗМЕЩЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ С ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕТРИКОЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ИДЕМПОТЕНТНОЙ АЛГЕБРЫ

05.13.17 — «Теоретические основы информатики»
01.01.09 — «Дискретная математика и математическая кибернетика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, доцент
Кривулин Н.К.

Санкт-Петербург
2018

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования. Одной из перспективных и быстро развивающихся областей прикладной математики и алгебраической информатики является тропическая математика, которая связана с изучением теории и приложений полуколец с идемпотентным сложением. В технике, экономике и управлении при автоматизации и информатизации различных процессов достаточно часто можно встретить оптимизационные задачи, которые могут быть сформулированы и решены в терминах тропической математики (задачи тропической оптимизации).

Существует важный с практической точки зрения класс задач оптимизации, возникающих при оптимальном проектировании информационных систем и процессов (оптимизация структуры информационной системы, оптимизация топологии сети передачи данных, оптимизация архитектуры распределенных систем обработки данных и др.), в которых требуется найти наилучший способ разместить объект без ограничений или с дополнительными ограничениями на допустимую область размещения. Такую задачу часто называют задачей 1-центра (1-center problem), которая представляет важный класс задач оптимизации и находит широкое применение в Data Mining. Задачу в самом общем случае можно сформулировать так: задано множество объектов информационной системы, в которых может осуществляться создание, обработка или потребление информации, допустимая область размещения целевого объекта и функция для расчета характеристик взаимосвязи целевого объекта и заданных объектов, являющихся элементами рассматриваемой системы (целевая функция). Необходимо найти оптимальное положение объекта с целью оптимизации значения характеристики, описывающей его взаимосвязи с заданными объектами.

Решение задачи находит свое применение на практике в различных областях, связанных с проектированием процессов создания, накопления и обработки информации, исследованием принципов создания и функционирования аппаратных средств автоматизации, моделированием информационных потребностей коллективных и индивидуальных пользователей и способов их удовлетворения, разработкой и анализом моделей информационных процессов и структур и др.

Существенную роль при решении таких задач играет выбор метрики, при помощи которой осуществляется вычисление значения целевой функции. В случае евклидовой метрики, задача, известная также как задача о наименьшей ограничивающей сфере, имеет геометрическое решение и итерационное решение в виде алгоритма.

Большим прикладным значением обладает решение минимаксной задачи размещения с прямоугольной метрикой (l_1-метрика). Такого рода оптимизационную задачу называют задачей Ролса или задачей посыльного. Известно геометрическое решение этой задачи, а также решение с помощью методов линейного программирования, в частности, с использованием симплекс-метода.

Научно-технические задачи. На практике рассматриваемый класс задач может встречаться, например, при проектировании размещения центров управления, хранения и обработки данных, собранных с видеокамер системы видеонаблюдения в здании [1].

Система видеонаблюдения такого рода состоит из трех главных компонент [2–4]: (1) видеокамеры, производящие входной поток видеоинформации, (2) система передачи сигнала от камер до центра управления, хранения и обработки данных и (3) сам этот центр. В качестве объектов, относительно которых необходимо решать задачу 1-центра, выступают видеокамеры внутреннего и наружного наблюдения. Суть задачи размещения состоит в поиске оптимального положения центра управления системой. При этом необходимо минимизировать функцию расстояния до самой дальней камеры, чтобы снизить влияние шумов и повысить качество сигнала, благодаря уменьшению длины кабеля, а также увеличить зону охвата видеонаблюдением при минимальных расходах на материалы. Внутри одного этажа кабели чаще всего прокладывают вдоль линий разделения пола, стен и потолка. Межэтажные перекрытия проходятся по вентиляционным шахтам. Поэтому можно считать, что все изгибы кабеля осуществляются под прямыми углами, что позволяет измерять его длину при помощи прямоугольной метрики.

Решение задачи 1-центра в рассмотренном случае позволяет обеспечить высоконадежную обработку информации и помехоустойчивость информационных коммуникаций для целей передачи и защиты передаваемой информации. Решение подобных задач обладает высокой актуальностью.

В связи с бурным ростом информатизации всех сфер жизни в 21 веке, а вместе с тем с увеличением информационных потребностей коллективных и индивидуальных пользователей, важным является повышение уровня доступности информационных ресурсов, в том числе с использованием широкополосного доступа к сети «Интернет». Для этого необходима прокладка в населенных пунктах сетей проводных и оптоволоконных линий связи. В силу масштабности и высокой ресурсоемкости этой задачи, принципиальное значение приобретает поиск оптимальных (по критерию минимизации потерь при передаче информации) способов ее решения, что позволит обеспечить помехоустойчивость информационных коммуникаций, безопасность использования информационных технологий, осуществить научно обоснованную организацию информационного обслуживания населения.

Известно, что в современных городах есть большое количество районов, дорожная сеть которых представляет из себя систему параллельных и перпендикулярных между собой улиц. Прокладка оптоволоконных и проводных сетей осуществляется вдоль уличной сети. Поэтому для описания и решения задач оптимального размещения аппаратных комплексов обработки интернет-трафика может быть использована прямоугольная метрика («манхэттенская планировка»). При этом, по различным причинам (градостроительные регламенты, социальные ограничения, требования радиоэлектронной совместимости, соображения информационной безопасности и др.) могут возникать ограничения на допустимую область размещения.

В качестве еще одной важной области применения результатов решения задачи 1-центра с прямоугольной метрикой могут рассматриваться задачи размещения компонентов на микросхеме [5–7] и проектирования печатных плат для электронных изделий [8–10] с прямоугольной сетью межкомпонентных соединений. Эффективное решение этих задач весьма актуально и имеет принципиально важное значение при создании аппаратных средств автоматизации различных процессов, проектировании современных информационных систем на базе использования электронных компонентов и средств вычислительной техники, формировании оптимальных информационных процессов и структур, базирующихся на использовании электронной компонентной базы.

Аналогичная с оптимизацией систем видеонаблюдения задача решается при проектировании систем автоматического пожаротушения в зданиях. Рабочее тело в таких системах подводится с помощью труб. Основная задача состоит в поиске оптимального положения пункта управления в здании для минимизации затрат на материалы, а также уменьшение длины подводящих труб с целью увеличения скорости реакции системы. В рассматриваемой ситуации также можно использовать прямоугольную метрику для описания математической постановки задачи.

Имеются и другие примеры применения рассматриваемой оптимизационной задачи. Например, оптимальное размещение объектов экстренной помощи населению (противопожарные службы, службы скорой помощи и др.). В современных мегаполисах есть большое количество новых районов, дорожная сеть которых представляет собой систему параллельных и перпендикулярных между собой улиц. В этих условиях для описания задачи размещения точечного объекта подходит прямоугольная метрика (l_1-метрика). При оптимальном размещении пунктов экстренной помощи населению необходимо минимизировать максимальное расстояние от объекта экстренной службы до самого дальнего клиента (жилого дома или группы домов) с тем, чтобы сократить время реагирования на экстренный вызов и соблюсти установленные нормативы. В силу возможных обстоятельств социального, градостроительного, технического и др. характера могут возникать разного рода ограничения на допустимую область размещения. Таким образом, в рассматриваемой ситуации необходимо решать задачу 1-центра с ограничениями на этапах проектирования, осуществления застройки или реорганизации городских территорий.

Важно отметить, что некоторые простейшие (по исходным данным и ограничениям) из описанных выше задач имеют аналитические решения, более сложные задачи можно решить алгоритмически, например при помощи методов линейного и смешанного целочисленного линейного программирования. Алгоритмический подход обычно обеспечивает численное нахождение одного из решений и требует применения специальных программных средств. Такой подход не позволяет получить все решения аналитически в виде явных формульных зависимостей, удобном для дальнейшего анализа и непосредственных расчетов. Поэтому есть необходимость в разработке новых методов для получения в явном виде аналитических решений задачи 1-центра. Возможностью получать такие решения обладает подход на основе применения методов тропической математики.

Таким образом, актуальной теоретической и практической задачей является разработка методов тропической оптимизации для решения задач 1-центра с прямоугольной метрикой с разного рода ограничениями на допустимую область размещения, которые возникают при исследовании принципов создания и функционирования аппаратных средств автоматизации различных процессов, проектировании и развитии информационных систем различного назначения.

Степень разработанности темы. Диссертационное исследование базируется на теоретических положениях, методологических подходах и концептуальных выводах, обоснованных в трудах отечественных и зарубежных ученых.

Значительный вклад в развитие теории и методов тропической математики внесли Н. Н. Воробьев [11–13], В. П. Маслов [14, 15], И. В. Романовский [16–18], А. А. Корбут [19], Р. А. Кунингхайм-Грин [20], У. Циммерманн [21], Г. Л. Литвинов [22, 23], Г. Б. Михалкин [24, 25], А. Э. Гутерман [26, 27], Д. С. Голан [28], П. Буткович [29], М. Гондран [30], Д. Ю. Григорьев [31, 32], Д. Гунаварден [33], И. Итенберг [34], Г. Кохен [35], Д. Д. Лоусон [36], У. Макэнини [37], Я. Н. Шитов [38, 39] и др.

При этом учеными разрабатывались не только теоретические положения, но также рассматривались прикладные задачи, которые формулируются и эффективно решаются в терминах идемпотентной алгебры, составляющей важный раздел тропической математики. Такие задачи изучались в работах Ф. Бачелли [40], Я. Г. Олсдера [41], Б. Хейдерготта [42, 43], В. Д. Матвеенко [44–46], Н. К. Кривулина [1, 47–49], С. Л. Блюмина [50], Д. А. Николаева [51–53] и др.

Описание подходов к решению задачи 1-центра с использованием евклидовой метрики приведено в работах М. Колебрука [54], Н. Мегиддо [55], А. Фоула [56], О. Худека [57] и др. Ее геометрическое решение предложено в [58], а итерационное решение в виде алгоритма – в [59]. Оптимизационная задача Ролса с прямоугольной метрикой решена в [60,61]. Также известно геометрическое решение этой задачи, описанное в [62,63]. Итерационные алгоритмы ее решения разработаны в [64–66]. Возможно также использование для ее решения методов линейного программирования, в частности, симплекс-метода [67–70] и др. Однако, известные подходы и методы решения этих задач не позволяют получить полного решения задач в явном виде с прямоугольной метрикой, в том числе при наличии ограничений на допустимую область размещения. Применение итерационных методов позволяет найти частное решение задачи 1-центра в виде одной точки, одного из возможных решений задачи. Это исключает возможность аналитического исследования множества всех решений, включая корректировку этого множества при добавлении ограничений, что значительно снижает теоретическую и практическую значимость получаемых таким способом решений. Кроме того, вычислительная сложность решения в явном виде, может быть определена точно, в то время как для алгоритмических решений обычно известны только оценки порядка сложности вычислений. Это становится особенно важным преимуществом аналитических решений, когда полученные расчетные формулы обеспечивают низкую (например, линейную) вычислительную сложность.

Решения некоторого класса задач размещения с чебышевской метрикой в терминах тропической математики представлены в работах [71–73] и др.

Таким образом, несмотря на наличие значительного количества разработок в области тропической математики, они в незначительной степени рассматривают подходы к аналитическому решению минимаксных задач размещения точечных объектов на плоскости с прямоугольной метрикой. Требуется обоснование новых математических методов, позволяющих эффективно решать указанные задачи, применение которых позволит рационализировать проектирование комплексов аппаратных средств автоматизации информационных процессов, а также решать иные прикладные задачи, связанные с развитием современных информационных технологий и ускорением на этой основе научно-технического прогресса.

Цель работы – разработка новых математических методов решения минимаксных задач размещения точечных объектов на плоскости и в трехмерном пространстве с прямоугольной метрикой на основе применения методов идемпотентной алгебры и программно-алгоритмического обеспечения для их реализации при проектировании комплексов аппаратных средств автоматизации информационных процессов.

В соответствии с указанной целью, были поставлены следующие **задачи** исследования:

– разработка методов решения задач оптимизации функций, заданных на идемпотентных полуполях, с несколькими переменными на основе решения расширенной задачи в векторной форме с использованием экстремальных свойств идемпотентного спектрального радиуса матрицы;

– разработка методов решения задач оптимизации функций на идемпотентных полуполях с несколькими переменными с помощью сведения задачи оптимизации к системе параметризованных неравенств и последующего нахождения всех ее решений;

– исследование минимаксных задач размещения с прямоугольной метрикой на плоскости и в трехмерном пространстве с ограничениями и без ограничений, включая представление этих задач в виде задач оптимизации в терминах тропической алгебры, построение прямых решений таких задач в явном виде и оценку вычислительной сложности решений;

– разработка рекомендаций по оптимальному размещению центрального сервера управления в сети локальных коммуникаций и оптимальному размещению центра управления системой видеонаблюдения на основе реализации разработанных методов;

– разработка на основе полученных результатов программных средств для решения задач размещения и их практическое применение для решения тестовых задач.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности.

Содержание диссертационного исследования соответствует паспорту научной специальности 05.13.17 – Теоретические основы информатики (пп. 2. Исследование информационных структур, разработка и анализ моделей информационных процессов и структур; 11.Разработка методов обеспечения высоконадежной обработки информации и обеспечения помехоустойчивости информационных коммуникаций для целей передачи, хранения и защиты информации; 16. Общие принципы организации телекоммуникационных систем и оценки их эффективности. Разработка научных принципов организации информационных служб по отраслям народного хозяйства. Изучение социально-экономических аспектов информатизации и компьютеризации общества), а также 01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика (п. 3. Математическое программирование (методы минимизации функций)).

Научная новизна результатов исследования заключается в разработке комплекса математических методов оптимального размещения точечных объектов на плоскости и в пространстве с прямоугольной метрикой с использованием инструментария идемпотентной алгебры, отличающегося возможностью получения явных результатов в аналитическом виде, без использования итерационных алгоритмов в целях повышения эффективности организации и функционирования информационных систем и применения современных информационных технологий. Итерационные решения минимаксных задач размещения с прямоугольной метрикой позволяют находить только частные, одноточечные решения. Использование инструментария идемпотентной алгебры, напротив, позволяет получать полные решения в виде явных формул, удобных для применения при решении практических задач, анализе и интерпретации получаемых результатов. К тому же процедуры, построенные на основе разработанных в диссертационной работе методах имеют меньшую алгоритмическую сложность в сравнении с известными итерационными алгоритмами.

Наиболее существенными результатами, полученными лично автором, содержащими элементы научной новизны и выносимыми для публичной защиты, являются следующие:

– разработаны математические методы для решения класса минимаксных задач, заданных на идемпотентных полуполях с несколькими переменными, базирующиеся на решении расширенной задачи в векторной форме с использованием экстремальных свойств идемпотентного спектрального радиуса матрицы и на процедуре сведения задачи оптимизации к системе параметризованных неравенств с последующим нахождением всех ее решений;

- получены прямые решения в явном виде минимаксных задач размещения с прямоугольной метрикой на плоскости и в трехмерном пространстве с ограничениями и без ограничений для оптимизации выбора мест локализации объектов обработки и хранения информации в информационных системах, а также результаты оценки вычислительной сложности соответствующих алгоритмов;

- предложены рекомендации по применению разработанных аналитических методов для решения задач оптимального размещения центрального сервера управления в сети локальных коммуникаций и оптимального размещения центра управления системой видеонаблюдения для обеспечения высоконадежной обработки информации и помехоустойчивости информационных коммуникаций;

- предложена программная реализация алгоритмов численного определения областей оптимального (по минимаксному критерию) размещения точечных объектов на плоскости с прямоугольной метрикой в условиях действия ограничений, на основе применения методов идемпотентной алгебры.

Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми и получены автором лично или при его непосредственном участии.

Теоретическая и практическая значимость работы. Полученные в диссертации результаты направлены на развитие теоретических подходов и математических методов решения научных и технических, фундаментальных и прикладных оптимизационных задач теоретической информатики, основанных на применении инструментария идемпотентной алгебры и математического программирования. С практических позиций, полученные результаты позволяют находить решение большого класса прикладных задач (организация систем видеонаблюдения, проектирование топологии интегральных микросхем, формирование архитектуры телекоммуникационных сетей и др.) размещения объектов на плоскости и в пространстве с прямоугольной метрикой с разного рода ограничениями на область размещения, такими как прямая, отрезок прямой линии, вертикальная или горизонтальная полоса, а также прямоугольник, стороны которого параллельны координатным осям.

Методология и методы исследования. В диссертации использована общая методология математической науки, общенаучные методы анализа и синтеза, приемы описания на символьном математическом языке свойств и связей объектов реального мира, применение методов тропической математики в сочетании с результатами классической линейной алгебры и теории оптимизации. Указанная методология использована в тесной связи с научными методами теории информатики, в части тех ее подходов, которые связаны с исследованием и формированием структурных характеристик информационных систем. При проведении диссертационного исследования для получения новых научных результатов использованы методы математического программирования и теории исследования операций, в частности – методы минимизации функций.

Методика исследования базируется на использовании методического аппарата идемпотентной алгебры для решения задач размещения, обладающего рядом преимуществ перед другими известными методами

– если традиционно использование операций $\max$ и $\min$ при формулировке математических постановок прикладных задач часто усложняет их решение, то на языке идемпотентной алгебры работа с такими операциями существенно упрощается, в силу того, что в качестве идемпотентной операции сложения можно взять одну из операция $\max$ или $\min$. Вследствие этого, методы данного раздела математики могут оказаться удобными и эффективными при решении минимаксных задач, изучению методов решения которых посвящены труды [71–73];

– к тому же тропический подход, заключающийся в замене обычных арифметических операций $(+,\times)$ на пару операций $(\oplus,\otimes)$ с идемпотентным сложением, позволяет решать задачи в общем виде, не выбирая заранее полукольцо, в котором рассматривается задача. Так, одновременно с решением в смысле $(\max,+)$-алгебры получают решение и для других постановок ($(\min,+)$-алгебры, $(\max,\times)$-алгебры и т.д.). Например, если решается минимаксная задача размещения в терминах $(\max,+)$-алгебры, то одноверменно с этим может быть получено решение максиминной задачи размещения в терминах $(\min, +)$-алгебры. Это существенно расширяет область применения данного подхода;

– стоит отметить также важную особенность, заключающуюся в возможности преобразовывать сложные нелинейные задачи в линейные в терминах идемпотентной алгебры. Это позволяет использовать общие методы и результаты линейной алгебры, что часто упрощает решение и интерпретацию полученных результатов. Так, решение минимаксной задачи размещения точечного объекта на плоскости и в пространстве сводится в терминах идемпотентной алгебры к решению параметризованной системы неравенств или к минимизации некоторой функции, заданной в матричном виде с использованием свойств идемпотентного спектрального радиуса матрицы. Получение явных аналитических решений позволяет анализировать результат и следить за его изменением после введения дополнительных ограничений;

– важным преимуществом идемпотентной алгебры является то, что в отличии от итерационных решений задач оптимизации, время сходимости которых можно только оценивать, идемпотентный подход позволяет получать аналитические решения в виде точных формул, время расчета по которым можно определить напрямую.

Степень достоверности результатов обеспечивается строгим математическим доказательством указанных результатов, непротиворечивостью постановок исследовательских задач, использованием апробированной методологии и методов научных исследований, подбором достоверных исходных данных, а также проведением тестовых расчетов с использованием разработанных соискателем программных средств. Кроме того, достоверность результатов подтверждается их близостью к ранее полученным результатами, включая геометрические решения, предложенные Д. Эльзингом и Р. Френсисом [62,63], и алгебраические решения Н. К. Кривулина [74], которые были получены с использованием альтернативных методик исследования.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались на ряде научных конференций, в том числе на Международной научно-практической конференции «Актуальные вопросы развития современного общества» (Курск, Россия – 2014), Международной научно-практической конференции «Тренды развития современного общества: управленческие, правовые, экономические и социальные аспекты» (Курск, Россия – 2014), 7-й научно-практической internet-конференции «Междисциплинарные исследования в области математического моделирования и информатики» (Тольятти, Россия – 2016), 7-й всероссийской научной конференции по проблемам информатики СПИСОК-2017 (Санкт-Петербург, Россия – 2017), Всероссийской конференции «Третьи чтения памяти профессора Б. Л. Овсиевича. Экономико-математические исследования: математические модели и информационные технологии» (Санкт-Петербург, Россия – 2017); на семинарах кафедры статистического моделирования и кафедры системного программирования Санкт-Петербургского государственного университета и семинаре Санкт-Петербургского государственного университета и Санкт-Петербургского экономико-математического института РАН по тропической математике и смежным вопросам.

Результаты диссертационной работы были получены при поддержке грантов №13-02-00338 – «Модели и методы тропической математики в прикладных задачах экономики и управления» и №16-02-00059 – «Развитие моделей и методов тропической математики в прикладных задачах экономики и управления» Российского гуманитарного научного фонда, а также №18-010-00723А – «Разработка моделей и методов тропической математики для прикладных задач экономики и управления» Российского фонда фундаментальных исследований.

Публикации. Основные результаты работы представлены в 2 печатных работах [75, 76], которые опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России, а их переводы [77, 78] опубликованы в журналах, индексируемых в международных библиографических базах Scopus и Web of Science. Всего по результатам диссертации автором опубликовано 7 работ [75, 76, 79–83].

В совместных работах с Кривулиным Н. К. [75, 76, 81, 82] соискателю принадлежит формулировка и доказательства теорем о решении задачи размещения на плоскости точечного объекта с прямоугольной метрикой и ограничениями на область размещения, разработка алгоритмов и программных средств, а также проведение вычислительных экспериментов для верификации полученных результатов, соавтору принадлежат постановки задач и разработка общих методов решения.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, заключения и одного приложения. Полный объем диссертации составляет 122 страницы машинописного текста. Список литературы содержит 116 наименования.

В первой главе систематизированы основные сведения об идемпотентной алгебре, на которые опираются дальнейшие исследования. Сформулированы основные определения и введены используемые обозначения. Вводится понятие идемпотентного полуполя. Проведен обзор алгебры векторов и матриц над идемпотентными полуполями. Сформулирована задача оптимизации в терминах идемпотентной алгебры в матричной форме, на основе которой будет в последующих материалах диссертации предложено решение частной оптимизационной задачи.

Вторая глава посвящена изучению класса задач тропической оптимизации с одной, двумя и тремя переменными. Получено решение задачи в матричной форме на основе записи расширенной задачи в векторной форме с использованием экстремальных свойств идемпотентного спектрального радиуса матрицы. Затем проведено решение рассматриваемых задач скалярным методом с помощью сведения задачи оптимизации к системе параметризованных неравенств и последующего нахождения всех ее решений.

В третьей главе разработаны приложения полученных во второй главе теорем для решения задач оптимального размещения центрального сервера управления в сети локальных коммуникаций и оптимального размещения центра управления системой видеонаблюдения. Рассмотрены задачи размещения на плоскости с прямоугольной метрикой точечного объекта без ограничений на область размещения, с ограничениями в виде прямой линии, отрезка прямой, полосы и прямоугольника. Завершается глава постановкой и решением задачи размещения в трехмерном пространстве.

В заключении представлены итоги выполненного исследования, рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы.

В приложении представлен компьютерный код алгоритмов вычисления координат оптимальной области размещения для задачи размещения без ограничений и с ограничениями на допустимую область размещения.

Глава 1

Элементы идемпотентной алгебры

1.1 Введение

Идемпотентная алгебра – это раздел прикладной математики, занимающейся изучением полуколец с идемпотентным сложением. Использование таких полуколец объясняется тем, что они естественным образом появляются при решении задач, возникающих на практике. Некоторые множества обладают структурой полукольца. Примерами могут служить натуральные, целые и рациональные числа относительно заданных на них операций сложения и умножения. Повидимому, как отмечается в работе Д. Голана [84], впервые понятие полукольца было использовано в работах Ф. Макалая [85] и Е. Нетера [86], опубликованных в начале двадцатого века, в контексте изучения идеалов некоторых колец. В явном виде понятие полукольца появляется в работе Х. Вандивера [87], связанной с аксиоматизацией натуральных чисел. Изучение тропической математики, как отдельной ветви прикладной математики, началось в 1950-х годах. Многие авторы связывают начало развития полуколец с идемпотентным сложением и их приложений с публикацией работы С. К. Клини [88] в 1956 году.

Идемпотентная алгебра оказалась достаточно удобным инструментом при решении широкого круга задач, возникающих в таких областях, как комбинаторика, теория оптимизации, дискретная математика и алгебраическая геометрия. Также методы тропической математики можно эффективно использовать при решении задач имитационного моделирования и теории управления, а также при анализе производственных систем [89–91].

Дальнейшее развитие тропической математики (раздел прикладной математики, включающий в себя идемпотентную алгебру) можно связать с публикациями Н. Н. Воробьева [11–13], в работах которого рассматривалась теория идемпотентных полумодулей. В его статьях для обозначения идемпотентных полуколец использовались термины экстремальная алгебра и экстремальная математика. «К сожалению, идеи Н. Н. Воробьева в свое время не получили широкой известности, поэтому его терминология не прижилась и сейчас почти не используется,» – отмечает в своей работе Г. Л. Литвинов [92].

Большое влияние на развитие методов тропической математики оказали работы Р. А. Кунингхайм-Грина [20, 90], в которых описан ряд подходов к решению различных задач в терминах тропической математики. Отметим монографию [90]. В ней рассматриваются схожие вопросы с теми, что ранее изучались Н. Н. Воробьевым, но используется несколько иная алгебраическая техника. При этом решения представлены в удобной и компактной матричной форме.

Значительный вклад в развитие идемпотентной математики внесли представители научной школы, возглавляемой академиком В. П. Масловым, разработавшие теорию идемпотентного функционального анализа (области исследования полумодулей функций со значением в полукольце с идемпотентным сложением) [14, 22, 93, 94]. Работы представителей этой научной школы заложили теоретические и методологические основы идемпотентной математики, которая включает в себя идемпотентную алгебру, идемпотентный анализ и идемпотентный функциональный анализ.

В работах [21, 72, 73] изучен класс задач оптимизации с ограничениями с целевой функцией, зависящей от n переменных, для которой существует представление в виде максимума n функций, каждая из которых зависит от одной собственной переменной. Такой класс функций называется max-сепарабельным.

Подробный обзор моделей, методов и приложений тропической математики представлен в работах [14, 28, 40, 43, 47]. Важным объектом изучения тропической математики, активно использующимся при решении практических задач, является $(\max,+)$-алгебра. Множество вещественных чисел, дополненное минус бесконечностью, с заданными на нем операциями взятия максимума из пары чисел (операция тропического сложения) и обычного сложения (операция тропического умножения) образует тропическое полукольцо, которое обычно называют $(\max,+)$-алгеброй.

Развитие методов тропической математики во многом обусловлено тем, что ряд задач, которые являются нелинейными в обычной алгебре, может быть сведен к линейным. Отметим, что многие понятия линейной алгебры, а также вычислительные процедуры, такие как решение систем линейных уравнений, проблема поиска собственного значения и собственного вектора, метод Якоби и Гауса-Зейделя имеют собственные аналоги в тропической алгебре [47]. Следует ожидать, что использование общих методов и результатов линейной алгебры в некоторых случаях позволит получать решения в более удобной форме и проще интерпретировать результат. Часто решение в терминах тропической математики позволяет найти полные решения некоторых задач в ситуациях, где это иначе было бы непросто или невозможно.

Пример применения методов тропической математики при решении задач на сетях Петри и на графах, предложен в работе [43], где рассматривается железнодорожная сеть между двумя городами, представленная в терминах тропической математики.

Подходы к решению прикладных производственных задач при помощи методов $(\max,+)$-алгебры приведены в работе П. Бутковича [29]. Исследованию систем с очередями посвящены работы [48, 95], исследование задачи принятия решений для анализа результатов оценки альтернатив на основе парных сравнений проведено в [96]. Большой класс задач тропической оптимизации изучен в работах Н. К. Кривулина [1, 97–99]. Полные решения в явном виде некоторых задач математического программирования с использованием методов тропической оптимизации получены в работе [100].

1.2 Идемпотентное полуполе

Приведем обзор основных понятий и результатов тропической математики, на которые опирается последующее исследование и решение задач размещения. Более детальное рассмотрение вопросов, связанных с идемпотентной алгеброй представлено в работах [21, 47, 90].

Введем в рассмотрение числовое множество $\mathbb{X}$, на котором определены ассоциативные и коммутативные операции сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$. Обозначим через $\langle \mathbb{X}, \oplus, \otimes, \mathbb{0}, \mathbb{1} \rangle$ заданное на $\mathbb{X}$ при помощи этих операций коммутативное полукольцо с нулем $\mathbb{0}$ и единицей $\mathbb{1}$. Сложение будем считать идемпотентным (т.е. для любого числа $x \in \mathbb{X}$ выполняется $x \oplus x = x$), а умножение – обратимым (т.е. для каждого $x \neq \mathbb{0}$ существует обратный элемент x^{-1} такой, что $x \otimes x^{-1} = \mathbb{1}$). Так как $\langle \mathbb{X} \setminus \{\mathbb{0}\}, \otimes, \mathbb{1} \rangle$ образует коммутативную группу по умножению, то описанную структуру $\langle \mathbb{X}, \oplus, \otimes, \mathbb{0}, \mathbb{1} \rangle$ принято называть идемпотентным полуполем.

Операция возведения в степень с целым показателем вводится стандартным образом. Для любого ненулевого числа $x \in \mathbb{X}$ и натурального числа n определим $x^0 = \mathbb{1}$, $x^n = x \otimes x^{n-1}$, $x^{-n} = (x^{-1})^n$ и $\mathbb{0}^n = \mathbb{0}$. Будем считать, что операция возведения в целую степень ненулевого числа x может быть естественным образом распространена в полуполе на случай рационального показателя степени.

Далее для упрощения математических выкладок знак умножения $\otimes$ в алгебраических выражениях, как обычно, будет опускаться.

В силу того, что сложение идемпотентно, можно определить отношение частичного порядка $\leq$ так: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x \oplus y = y$. Из этого определения следует пара неравенств $x \leq x \oplus y$ и $y \leq x \oplus y$, а также равносильность неравенства $x \oplus y \leq z$ и системы неравенств $x \leq z$ и $y \leq z$ для любых $x,y,z \in \mathbb{X}$. Кроме того, нетрудно проверить свойства монотонности операций сложения и умножения, по которым при условии $x \leq y$ для любого z выполняются неравенства $x \oplus z \leq y \oplus z$ и $xz \leq yz$. Наконец, для любых $x,y \neq \mathbb{0}$ из неравенства $x \leq y$ следует $x^{-1} \geq y^{-1}$. В дальнейшем будем дополнительно предполагать, что введенный частичный порядок является линейным. Кроме того, несложно проверить неравенство $x^{1/2}y^{1/2} \leq x \oplus y$, которое является тропическим аналогом неравенства между геометрическим и арифметическим средними.

В качестве примеров алгебраических структур рассматриваемого типа можно привести вещественные идемпотентные полуполя

$$\mathbb{R}_{\max,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0 \rangle, \quad \mathbb{R}_{\min,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +, +\infty, 0 \rangle,$$
$$\mathbb{R}_{\max,\times} = \langle \mathbb{R}_{+} \cup \{0\}, \max, \times, 0, 1 \rangle, \quad \mathbb{R}_{\min,\times} = \langle \mathbb{R}_{+} \cup \{+\infty\}, \min, \times, +\infty, 1 \rangle,$$

где $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел и $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | \ x > 0\}$.

Нулевым элементом для полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$, которое обычно называют $(\max,+)$-алгеброй, является $-\infty$, единичным – число 0. В этом полуполе любому числу $x \in \mathbb{R}$ можно сопоставить обратный x^{-1}, который совпадает с противоположным числом $-x$ в обычной алгебре. Для любой пары чисел $x,y \in \mathbb{R}$ можно определить степень x^y, значение которой равно арифметическому произведению xy. Порядок, порожденный операцией идемпотентного сложения, совпадает с обычным линейным порядком на множестве $\mathbb{R}$.

1.3 Идемпотентная алгебра векторов и матриц

Множество вектор-столбцов размерности n, с элементами из $\mathbb{X}$ будем обозначать через $\mathbb{X}^n$. Для любой пары векторов $\boldsymbol{a} = (a_i)$ и $\boldsymbol{b} = (b_i)$ из $\mathbb{X}^n$, скаляра $w \in \mathbb{X}$ верны следующие покомпонентные равенства:

$$\{\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}\}_i = a_i \oplus b_i, \quad \{w\boldsymbol{a}\}_i = wa_i.$$

После ввода этих операций, множество $\mathbb{X}^n$ оказывается конечномерным полумодулем над идемпотентным полукольцом $\mathbb{X}$.

Операции сложения векторов и умножение вектора на скаляр являются монотонными, то есть для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{X}^n$ и числа $t \in \mathbb{X}$ из покоординатного неравенства $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ следует

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{z}, \qquad \boldsymbol{x} \leq t\boldsymbol{y}.$$

Регулярным вектором назовем вектор $\boldsymbol{x} = (x_i) \in \mathbb{X}^n$, все элементы которого ненулевые, то есть $x_i \neq \mathbb{0}$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Нулевым назовем вектор $\mathbf{0} = (\mathbb{0}, \ldots, \mathbb{0})^T \in \mathbb{X}^n$.

Вектор $\boldsymbol{a}$ линейно зависит от набора векторов $\boldsymbol{b_1}, \ldots, \boldsymbol{b_n}$, если верно равенство $\boldsymbol{a} = w_1\boldsymbol{b_1} \oplus \ldots \oplus w_n\boldsymbol{b_n}$ для некоторых скаляров $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{X}$.

Для любого ненулевого вектора определена операция мультипликативно сопряженного транспонирования, которая каждому вектор-столбцу $\boldsymbol{a} \in \mathbb{X}^n$ ставит в соответствие вектор-строку $\boldsymbol{a}^- \in \mathbb{X}^n$ с элементами $a_i^- = a_i^{-1}$, если $a_i \neq \mathbb{0}$, и $a_i^- = \mathbb{0}$ в противном случае.

Обозначим через $\mathbb{X}^{m\times n}$ множество матриц из m строк и n столбцов, состоящих из элементов множества $\mathbb{X}$.

Матрицу, все элементы которой равны $\mathbb{0}$, будем называть нулевой. Регулярной по строкам (по столбцам) является матрица без нулевых строк (столбцов). Матрица, регулярная по строкам и по столбцам, называется регулярной.

Сложение и умножение матриц, а также умножение матрицы на скаляр производится по тем же правилам, что и в обычной математике, в которых скалярные операции имеют иной смысл. Так, если $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ и $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ матрицы, состоящие из элементов полукольца $\mathbb{X}$, подходящего размера для осуществления операций сложения и вычитания, а $w \in \mathbb{X}$ скаляр, то верны следующие выражения:

$$\{\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}\}_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}, \quad \{\boldsymbol{BC}\}_{ij} = \bigoplus_k b_{ik}c_{kj}, \quad \{w\boldsymbol{A}\}_{ij} = wa_{ij}.$$

Описанные матричные операции обладают свойством монотонности, то есть для любых подходящих по размеру матриц $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ и числа $e \in \mathbb{X}$ из покоординатного неравенства $\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{B}$ следует

$$\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{C} \leq \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{C}, \qquad \boldsymbol{AD} \leq \boldsymbol{BD}, \qquad e\boldsymbol{A} \leq e\boldsymbol{B}.$$

Рассмотрим квадратные матрицы из множества $\mathbb{X}^{n\times n}$. Матрица, диагональные элементы которой равны $\mathbb{1}$, а остальные элементы равны $\mathbb{0}$, называется единичной и обозначается $\boldsymbol{I}$. Для любой матрицы $\boldsymbol{A}$ и целого числа $p > 0$ выполнены следующие соотношения:

$$\boldsymbol{A}^0 = I, \quad \boldsymbol{A}^p = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{p-1} = \boldsymbol{A}^{p-1}\boldsymbol{A}.$$

След матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ – это величина, вычисляемая по формуле:

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{A} = a_{11} \oplus \ldots \oplus a_{nn}.$$

Матрицей Клини называется матрица

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1}.$$

Под собственным числом матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$ будем понимать скалярную величину λ, для которой существует вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ такой, что выполняется равенство

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}.$$

Собственным вектором матрицы будем называть любой вектор $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, удовлетворяющий этому равенству.

Максимальное собственное число называется спектральным радиусом и вычисляется по формуле:

$$\lambda = \bigoplus_{m=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/m}(\boldsymbol{A}^m). \tag{1.1}$$

1.4 Предварительные результаты

В работе [74] изучается минимаксная задача размещения одиночного объекта на плоскости с прямоугольной метрикой (задача Ролса), которая сводится в терминах тропической математики к задаче нахождения таких векторов $\boldsymbol{x}$, при которых достигается минимум

$$\min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \tag{1.2}$$

где $\boldsymbol{x}^{-}$ обозначает мультипликативно сопряженный вектор и $\boldsymbol{A}$ – некоторая матрица.

Известно [101], что минимум в задаче (1.2) равен спектральному радиусу λ матрицы $\boldsymbol{A}$ и достигается на любом собственном векторе, который отвечает λ. Для решения задачи размещения Ролса в работе [74] потребовалось показать, что на самом деле множество решений задачи (1.2) шире, чем множество собственных векторов матрицы $\boldsymbol{A}$. Было построено решение задачи Ролса в явном виде, однако проверить, что таким образом получены все решения и других решений нет, при этом не удалось.

Новое общее решение задачи (1.2) при весьма общих условиях было затем найдено в работах [49,102,103], что позволяет теперь уточнить полученные в [74] результаты.

В работах [49, 102] все вектора, на которых достигается минимум в задаче (1.2), представлены в замкнутой векторной форме. Сформулируем следующую теорему.

Теорема 1. *[103] Пусть* $\boldsymbol{A}$ *— матрица со спектральным радиусом* $\lambda \neq \mathbb{0}$ *и* $\boldsymbol{A}_\lambda = \lambda^{-1}\boldsymbol{A}$. *Тогда минимум задачи* (1.2) *равен* λ. *Общее регулярное решение будет иметь вид:*

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}_\lambda^* \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^n$$

Глава 2

Решение некоторых задач тропической оптимизации

В этом разделе диссертации будет рассмотрено несколько задач тропической оптимизации с одной, двумя и тремя переменными. Будут предложены два подхода – матричный, основанный на использовании результатов, описанных в теореме 1, и скалярный, состоящий в преобразовании задачи к системе параметризованных неравенств, для получения аналитических решений в явном виде с использованием методов тропической математики.

2.1 Задача тропической оптимизации в матричной форме

Пусть задан набор чисел $a,b,c,d \in \mathbb{X}$, удовлетворяющих условию $a,b,c,d > \mathbb{0}$.

Сформулируем задачу тропической оптимизации. Необходимо найти ненулевые числа $t,s \in \mathbb{X}$, на которых достигается минимум целевой функции

$$\min_{t,s\in\mathbb{X}} \quad at^{-1}s^{-1} \oplus bts^{-1} \oplus ct^{-1}s \oplus dts. \tag{2.1}$$

Чтобы перейти к векторной форме записи задачи, введем вектор и матрицу

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} t \\ s \\ t^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & c & \mathbb{0} \\ b & \mathbb{0} & a \\ \mathbb{0} & d & \mathbb{0} \end{pmatrix}.$$

Теперь вместо исходной задачи можно решить расширенную задачу

$$\min_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{X}^3} \boldsymbol{u}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}, \tag{2.2}$$

а затем выбрать из числа ее решений те векторы, у которых первый и последний элемент – взаимно-обратные в терминах тропической математики.

2.1.1 Анализ и решение задачи

Пусть μ – спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}$ и

$$\boldsymbol{A}_\mu = \mu^{-1}\boldsymbol{A}.$$

По теореме 1, минимум в задаче (2.2) равен μ. Все решения имеют вид

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}_\mu^*\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v}\in\mathbb{X}^3, \tag{2.3}$$

и поэтому образуют линейную оболочку столбцов матрицы $\boldsymbol{A}_\mu^*$.

Для определения спектрального радиуса μ найдем степени матрицы $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} bc & \mathbb{0} & ac \\ \mathbb{0} & ad\oplus bc & \mathbb{0} \\ bd & \mathbb{0} & ad \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^3 = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & bc^2\oplus acd & \mathbb{0} \\ b^2c\oplus abd & \mathbb{0} & abc\oplus a^2d \\ \mathbb{0} & bcd\oplus ad^2 & \mathbb{0} \end{pmatrix},$$

а затем вычислим

$$\mu = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A})\oplus\operatorname{tr}^{1/2}(\boldsymbol{A}^2)\oplus\operatorname{tr}^{1/3}(\boldsymbol{A}^3) = (ad\oplus bc)^{1/2}.$$

После возведения в квадрат равенство принимает следующий вид:

$$\mu^2 = ad\oplus bc.$$

Тогда после замены знака равенства на знак неравенства и применения свойств введенного линейного порядка, получаем

$$\mu^2 \geq ad, \qquad \mu^2\geq bc, \qquad \mu^4\geq abcd.$$

Чтобы записать решения расширенной задачи (2.2), необходимо вычислить матрицу

$$\boldsymbol{A}_\mu^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A}_\mu \oplus \boldsymbol{A}_\mu^2 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mu^{-1}c & \mu^{-2}ac \\ \mu^{-1}b & \mathbb{1} & \mu^{-1}a \\ \mu^{-2}bd & \mu^{-1}d & \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что второй столбец матрицы $\boldsymbol{A}_\mu^*$ является линейной комбинацией двух других. Действительно,

$$\mu^{-1}c \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \mu^{-1}b \\ \mu^{-2}bd \end{pmatrix} \oplus \mu^{-1}d \begin{pmatrix} \mu^{-2}ac \\ \mu^{-1}a \\ \mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^{-1}c \\ \mathbb{1} \\ \mu^{-1}d \end{pmatrix}.$$

Тогда для представления всех решений (2.3) достаточно построить линейную оболочку только первого и последнего столбцов $\boldsymbol{A}_\mu^*$ в форме

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mu^{-2}ac \\ \mu^{-1}b & \mu^{-1}a \\ \mu^{-2}bd & \mathbb{1} \end{pmatrix} \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2.$$

Переходя к скалярной форме записи, получим три равенства

$$u_1 = v_1 \oplus \mu^{-2}acv_2, \qquad u_2 = \mu^{-1}bv_1 \oplus \mu^{-1}av_2, \qquad u_3 = \mu^{-2}bdv_1 \oplus v_2.$$

Для решения исходной задачи сначала нужно найти все векторы $\boldsymbol{u} = (u_1,u_2,u_3)^T$, которые удовлетворяют этим равенствам и условию для координат

$$u_1 = u_3^{-1}.$$

После этого останется найти все векторы $(t,s)^T$, координаты которых определяются равенствами

$$t = v_1 \oplus \mu^{-2}acv_2, \qquad s = \mu^{-1}bv_1 \oplus \mu^{-1}av_2. \tag{2.4}$$

Условие для первой и третьей координаты $\boldsymbol{u}$ записывается в виде

$$v_1 \oplus \mu^{-2}acv_2 = (\mu^{-2}bdv_1 \oplus v_2)^{-1}.$$

После умножения на $\mu^{-2}bdv_1 \oplus v_2$ имеем равенство

$$\mu^{-2}bdv_1^2 \oplus v_1v_2 \oplus \mu^{-2}acv_2^2 = \mathbb{1}.$$

Полученное равенство равносильно системе неравенств

$$v_1 \leq \mu b^{-1/2}d^{-1/2}, \qquad v_1v_2 \leq \mathbb{1}, \qquad v_2 \leq \mu a^{-1/2}c^{-1/2}, \tag{2.5}$$

в которой хотя бы одно неравенство должно выполняться как равенство.

Рассмотрим три случая, в которых одно из неравенств заменяется равенством.

Случай 1. Первое неравенство выполняется как равенство

Заменим первое неравенство в (2.5) равенством, которое будет однозначно определять значение v_1. После подстановки этого значения во второе неравенство имеем систему

$$v_1 = \mu b^{-1/2}d^{-1/2}, \qquad v_2 \leq \mu^{-1}b^{1/2}d^{1/2}, \qquad v_2 \leq \mu a^{-1/2}c^{-1/2}.$$

В силу условия $abcd \leq \mu^4$ выполняется неравенство

$$\mu^{-1}b^{1/2}d^{1/2} \leq \mu a^{-1/2}c^{-1/2},$$

а тогда система принимает вид

$$v_1 = \mu b^{-1/2}d^{-1/2}, \qquad v_2 \leq \mu^{-1}b^{1/2}d^{1/2}.$$

Подставим найденные значения в решение (2.4). Применяя неравенства

$$ad \leq \mu^2, \qquad bc \leq \mu^2,$$

находим, что

$$\mu^{-2}acv_2 \le \mu^{-3}ab^{1/2}cd^{1/2} \le v_1, \qquad \mu^{-1}av_2 \le \mu^{-2}ab^{1/2}d^{1/2} \le \mu^{-1}bv_1.$$

Тогда решение (2.4) принимает вид

$$t = v_1 = \mu b^{-1/2}d^{-1/2}, \qquad s = \mu^{-1}bv_1 = b^{1/2}d^{-1/2}.$$

Нетрудно проверить, что при условии $\alpha = 1$ решение можно записать в форме

$$\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^{2\alpha-1}(a^{1-\alpha}b^{-\alpha}c^{1-\alpha}d^{-\alpha})^{1/2} \\ (a^{1-\alpha}b^{\alpha}c^{\alpha-1}d^{-\alpha})^{1/2} \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Случай 2. Второе неравенство выполняется как равенство

Предположим, что второе неравенство в системе (2.5) является равенством. В этом случае система принимает вид

$$v_1 \le \mu b^{-1/2}d^{-1/2}, \qquad v_1v_2 = \mathbb{1}, \qquad v_2 \le \mu a^{-1/2}c^{-1/2}.$$

Воспользуемся равенством $v_2 = v_1^{-1}$. Первое и третье условия системы можно объединить в виде двойного неравенства

$$\mu^{-1}a^{1/2}c^{1/2} \le v_1 \le \mu b^{-1/2}d^{-1/2}.$$

Чтобы записать решение исходной задачи в форме (2.4), сначала заметим, что

$$\mu^{-2}acv_2 \le \mu^{-1}a^{1/2}c^{1/2} \le v_1.$$

При этом, если $\mu^2 = bc$, то имеем неравенство

$$\mu^{-1}av_2 \le \mu^{-1}a^{1/2}b^{1/2} \le \mu^{-1}bv_1,$$

откуда следует, что решение можно записать в виде

$$t = v_1, \qquad s = \mu^{-1}bv_1, \qquad \mu^{-1}a^{1/2}c^{1/2} \le v_1 \le \mu b^{-1/2}d^{-1/2}.$$

Введем параметр $0 \leq \alpha \leq 1$ и запишем решение в параметрической форме. Сначала заменим двойное неравенство для v_1 выражением

$$v_1 = a^{(1-\alpha)/2} b^{(\alpha-1)/2} c^{\alpha/2} d^{-\alpha/2} = \mu^{2\alpha-1} (a^{1-\alpha} b^{-\alpha} c^{1-\alpha} d^{-\alpha})^{1/2}.$$

Заметим, что при $\alpha = 0$ это выражение совпадает с левой границей двойного неравенства для v_1, а при $\alpha = 1$ оно равно правой границе.

После подстановки приходим к результату, который обобщает решение (2.6) в форме

$$\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^{2\alpha-1} (a^{1-\alpha} b^{-\alpha} c^{1-\alpha} d^{-\alpha})^{1/2} \\ (a^{1-\alpha} b^{\alpha} c^{\alpha-1} d^{-\alpha})^{1/2} \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1. \tag{2.7}$$

В случае, когда $\mu^2 = ad$, справедливо неравенство

$$\mu^{-1} b v_1 \leq \mu^{-1} a^{1/2} b^{1/2} \leq \mu^{-1} a v_2.$$

С учетом этого неравенства, имеем

$$t = v_1, \qquad s = \mu^{-1} a v_2 = a^{1/2} d^{-1/2} v_1^{-1}, \qquad \mu^{-1} a^{1/2} c^{1/2} \leq v_1 \leq \mu b^{-1/2} d^{-1/2}.$$

Записывая двойное неравенство для v_1 в параметрическом виде

$$v_1 = a^{\alpha/2} b^{-\alpha/2} c^{(1-\alpha)/2} d^{(\alpha-1)/2} = \mu^{2\alpha-1} (a^{1-\alpha} b^{-\alpha} c^{1-\alpha} d^{-\alpha})^{1/2},$$

снова получаем решение задачи, представленное как (2.7).

Случай 3. Третье неравенство выполняется как равенство

Заменив третье неравенства в системе (2.5) на равенство, получаем

$$v_1 \leq \mu b^{-1/2} d^{-1/2}, \qquad v_1 \leq \mu^{-1} a^{1/2} c^{1/2}, \qquad v_2 = \mu a^{-1/2} c^{-1/2}.$$

В силу неравенства $\mu b^{-1/2} d^{-1/2} \geq \mu^{-1} a^{1/2} c^{1/2}$, система принимает вид

$$v_1 \leq \mu^{-1} a^{1/2} c^{1/2}, \qquad v_2 = \mu a^{-1/2} c^{-1/2}.$$

Учитывая, что

$$v_1 \leq \mu^{-1}a^{1/2}c^{1/2} = \mu^{-2}acv_2, \qquad \mu^{-1}bv_1 \leq \mu^{-2}a^{1/2}bc^{1/2} \leq \mu^{-1}av_2,$$

имеем

$$t = \mu^{-2}acv_2 = \mu^{-1}a^{1/2}c^{1/2}, \qquad s = \mu^{-1}av_2 = a^{1/2}c^{-1/2}.$$

Осталось проверить, что это решение совпадает с (2.6) при $\alpha = 0$.

2.1.2 Формулировка основного результата

Результаты анализа задачи (2.1) для всех рассмотренных случаев можно объединить в виде следующего утверждения, которое уточняет решение, полученное в [74].

Теорема 2. *Минимум в задаче* (2.1) *равен*

$$\mu = (ad \oplus bc)^{1/2}$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^{2\alpha-1}(a^{1-\alpha}b^{-\alpha}c^{1-\alpha}d^{-\alpha})^{1/2} \\ (a^{1-\alpha}b^{\alpha}c^{\alpha-1}d^{-\alpha})^{1/2} \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Запишем общий результат в терминах обычных арифметических операций. В качестве примера, рассмотрим полученный результат в контексте $(\max,+)$-алгебры. Для другого полуполя запись будет иной. Полное решение исходной задачи (2.1) представим в следующей форме.

Следствие 1. *Минимум в задаче* (2.1) *равен*

$$\mu = \max(a + d, b + c)/2$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2\alpha - 1)\mu + (1 - \alpha)(a + c)/2 - \alpha(b + d)/2 \\ (1 - \alpha)(a - c)/2 - \alpha(d - b)/2 \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1$$

Заметим, что последнее решение по форме соответствует результатам [62, 63].

2.2 Решение задач оптимизации в скалярной форме

В этом разделе для решения задач тропической оптимизации с ограничениями применим подход, развитый в работе [49], который заключается в замене исходной задачи оптимизации на параметризованную систему неравенств.

2.2.1 Решение задачи с одной переменной

Пусть заданы числа $a,b,c,d,f,g \in \mathbb{X}$, удовлетворяющие условию $a,b,c,d,f,g > \mathbb{0}$, а также вещественное число k. Требуется найти ненулевые решения $t \in \mathbb{X}$ задачи

$$\begin{aligned} &\min_{t\in\mathbb{X}} \quad at^{k-1} \oplus bt^{-(k-1)} \oplus ct^{-(k+1)} \oplus dt^{k+1}, \\ &f \leq t \leq g. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Следующий результат описывает все решения рассматриваемой задачи.

Теорема 3. *Пусть $a,b,c,d,f,g > \mathbb{0}$ и k – вещественное число. Справедливы следующие утверждения:*

1) *если $k < -1$, то минимум в задаче (2.8) равен*

$$\mu = a^{1/2}b^{1/2} \oplus a^{(k+1)/2k}c^{(k-1)/2k} \oplus b^{(k+1)/2k}d^{(k-1)/2k} \oplus c^{1/2}d^{1/2} \oplus \\ \oplus ag^{k-1} \oplus bf^{-(k-1)} \oplus cf^{-(k+1)} \oplus dg^{k+1}$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$t = ((\mu a^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu d^{-1})^{1/(k+1)} \oplus f)^{1-\alpha}((\mu b^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu c^{-1})^{1/(k+1)} \oplus g^{-1})^{-\alpha};$$

2) *если $-1 \leq k \leq 1$, то минимум равен*

$$\mu = a^{1/2}b^{1/2} \oplus a^{(k+1)/2}d^{-(k-1)/2} \oplus b^{(k+1)/2}c^{-(k-1)/2} \oplus c^{1/2}d^{1/2} \oplus \\ \oplus ag^{k-1} \oplus bf^{-(k-1)} \oplus cg^{-(k+1)} \oplus df^{k+1}$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$t = ((\mu a^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} c)^{1/(k+1)} \oplus f)^{1-\alpha} ((\mu b^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} d)^{1/(k+1)} \oplus g^{-1})^{-\alpha};$$

3) *если* $k > 1$, *то минимум равен*

$$\mu = a^{1/2} b^{1/2} \oplus a^{(k+1)/2k} c^{(k-1)/2k} \oplus b^{(k+1)/2k} d^{(k-1)/2k} \oplus c^{1/2} d^{1/2} \oplus \\ \oplus a f^{k-1} \oplus b g^{-(k-1)} \oplus c g^{-(k+1)} \oplus d f^{k+1}$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$t = ((\mu^{-1} b)^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} c)^{1/(k+1)} \oplus f)^{1-\alpha} ((\mu^{-1} a)^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} d)^{1/(k+1)} \oplus g^{-1})^{-\alpha},$$

где α *– любое вещественное число, удовлетворяющее условию* $0 \leq \alpha \leq 1$.

Доказательство. Обозначим минимум целевой функции в задаче (2.8) через μ. Тогда все решения задачи определяются системой, состоящей из уравнения и неравенства,

$$a t^{k-1} \oplus b t^{-(k-1)} \oplus c t^{-(k+1)} \oplus d t^{k+1} = \mu, \qquad f \leq t \leq g.$$

В силу того, что μ – минимальное значение целевой функции, равенство в системе можно заменить на неравенство, что приводит к системе

$$a t^{k-1} \oplus b t^{-(k-1)} \oplus c t^{-(k+1)} \oplus d t^{k+1} \leq \mu, \qquad f \leq t \leq g.$$

Полученная система неравенств эквивалентна системе

$$a t^{k-1} \leq \mu, \quad b t^{-(k-1)} \leq \mu, \quad c t^{-(k+1)} \leq \mu, \quad d t^{k+1} \leq \mu, \quad f \leq t, \quad t \leq g. \qquad (2.9)$$

Заметим, что перемножение соответствующих частей первых двух неравенств дает неравенство $ab \leq \mu^2$, откуда с учетом условия леммы следует, что $\mu \geq a^{1/2} b^{1/2} > \mathbb{0}$.

Теперь рассмотрим различные условия, которым может удовлетворять значение k.

Сначала предположим, что выполняется условие $k < -1$. Тогда значения $k-1$ и $k+1$ являются отрицательными, а решения неравенств $at^{k-1} \leq \mu$ и $dt^{k+1} \leq \mu$ относительно t имеют вид $t \geq (\mu a^{-1})^{1/(k-1)}$ и $t \geq (\mu d^{-1})^{1/(k+1)}$. Объединив эти решения с условием $t \geq f$, приходим к неравенству

$$t \geq (\mu a^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu d^{-1})^{1/(k+1)} \oplus f.$$

Рассмотрим неравенства $bt^{-(k-1)} \leq \mu$ и $ct^{-(k+1)} \leq \mu$, которые решим относительно t^{-1} в виде $t^{-1} \geq (\mu b^{-1})^{1/(k-1)}$ и $t^{-1} \geq (\mu c^{-1})^{1/(k+1)}$. Найденные решения вместе с условием $t^{-1} \geq g^{-1}$ дают неравенство

$$t^{-1} \geq (\mu b^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu c^{-1})^{1/(k+1)} \oplus g^{-1}$$

или эквивалентное ему неравенство

$$t \leq ((\mu b^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu c^{-1})^{1/(k+1)} \oplus g^{-1})^{-1}.$$

Записывая вместе оба неравенства для t, получим двойное неравенство

$$\begin{multline}(\mu a^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu d^{-1})^{1/(k+1)} \oplus f \leq t \leq \\ \leq t \leq ((\mu b^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu c^{-1})^{1/(k+1)} \oplus g^{-1})^{-1}. \quad (2.10)\end{multline}$$

Это двойное неравенство задает непустое множество, если выполняется очевидное условие

$$(\mu a^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu d^{-1})^{1/(k+1)} \oplus f \leq ((\mu b^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu c^{-1})^{1/(k+1)} \oplus g^{-1})^{-1},$$

которое равносильно условию

$$((\mu a^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu d^{-1})^{1/(k+1)} \oplus f)((\mu b^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu c^{-1})^{1/(k+1)} \oplus g^{-1}) \leq \mathbb{1}.$$

Раскроем скобки в левой части, а затем заменим полученное неравенство эквивалентной системой неравенств, включая неравенство $fg^{-1} \leq \mathbb{1}$, которое прямо следует из условия $f \leq g$. Решение остальных неравенств системы относительно μ дает

$$\begin{array}{llll} \mu \geq a^{1/2}b^{1/2}, & \mu \geq a^{(k+1)/2k}c^{(k-1)/2k}, & \mu \geq b^{(k+1)/2k}d^{(k-1)/2k}, & \mu \geq c^{1/2}d^{1/2}, \\ \mu \geq ag^{k-1}, & \mu \geq bf^{-(k-1)}, & \mu \geq cf^{-(k+1)}, & \mu \geq dg^{k+1}. \end{array}$$

Полученная система эквивалентна одному неравенству

$$\mu \geq a^{1/2}b^{1/2} \oplus a^{(k+1)/2k}c^{(k-1)/2k} \oplus b^{(k+1)/2k}d^{(k-1)/2k} \oplus c^{1/2}d^{1/2} \oplus \\ \oplus ag^{k-1} \oplus bf^{-(k-1)} \oplus cf^{-(k+1)} \oplus dg^{k+1}.$$

Учитывая, что μ обозначает минимальное значение целевой функции, в последнем неравенстве знак неравенства можно заменить на знак равенства. Осталось представить двойное неравенство (2.10) для t в параметрической форме

$$t = ((\mu a^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu d^{-1})^{1/(k+1)} \oplus f)^{1-\alpha}((\mu b^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu c^{-1})^{1/(k+1)} \oplus g^{-1})^{-\alpha},$$

где вещественный параметр α в показателе степени удовлетворяет условию $0 \leq \alpha \leq 1$.

Перейдем к исследованию задачи в случае, когда выполняется условие $-1 \leq k \leq 1$.

Пусть сначала величина k удовлетворяет строгому неравенству $-1 < k < 1$, при котором значение $k-1$ является отрицательным, а $k+1$ – положительным. Тогда решение неравенств $at^{k-1} \leq \mu$ и $ct^{-(k+1)} \leq \mu$ системы (2.9) приводит к неравенствам $t \geq (\mu a^{-1})^{1/(k-1)}$ и $t \geq (\mu^{-1}c)^{1/(k+1)}$. Кроме того, неравенства $bt^{-(k-1)} \leq \mu$ и $dt^{k+1} \leq \mu$ могут быть представлены в виде $t^{-1} \geq (\mu b^{-1})^{1/(k-1)}$ и $t^{-1} \geq (\mu^{-1}d)^{1/(k+1)}$.

Заметим, что полученные неравенства останутся справедливыми, если положить $k = -1$ или $k = 1$. Например, при $k = -1$ решения неравенств $at^{k-1} \leq \mu$ и $bt^{-(k-1)} \leq \mu$ не меняются, а неравенства $ct^{-(k+1)} \leq \mu$ и $dt^{k+1} \leq \mu$ сводятся к неравенствам $c \leq \mu$ и $d \leq \mu$. Последние два неравенства можно записать в виде $\mu^{-1}c \leq \mathbb{1}$ и $\mu^{-1}d \leq \mathbb{1}$, откуда следует, что при $k = -1$ выполняются формальные равенства $(\mu^{-1}c)^{1/(k+1)} = \mathbb{0}$ и $(\mu^{-1}d)^{1/(k+1)} = \mathbb{0}$, а потому очевидно, что $t \geq (\mu^{-1}c)^{1/(k+1)}$ и $t^{-1} \geq (\mu^{-1}d)^{1/(k+1)}$.

В результате объединения полученных неравенств, к которым добавляются неравенства $t \geq f$ и $t^{-1} \geq g^{-1}$, имеем двойное неравенство

$$(\mu a^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} c)^{1/(k+1)} \oplus f \leq t \leq ((\mu b^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} d)^{1/(k+1)} \oplus g^{-1})^{-1}.$$

Теперь так же, как в первой части доказательства, следует решить относительно μ неравенство

$$(\mu a^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} c)^{1/(k+1)} \oplus f \leq ((\mu b^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} d)^{1/(k+1)} \oplus g^{-1})^{-1}.$$

После выполнения необходимых алгебраических преобразований, получаем неравенство для μ, которое для минимума целевой функции принимает форму равенства

$$\mu = a^{1/2} b^{1/2} \oplus a^{(k+1)/2} d^{-(k-1)/2} \oplus b^{(k+1)/2} c^{-(k-1)/2} \oplus c^{1/2} d^{1/2} \oplus \\ \oplus a g^{k-1} \oplus b f^{-(k-1)} \oplus c g^{-(k+1)} \oplus d f^{k+1}.$$

С помощью параметра α такого, что $0 \leq \alpha \leq 1$, множество решений t задачи записывается в виде

$$t = ((\mu a^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} c)^{1/(k+1)} \oplus f)^{1-\alpha} ((\mu b^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} d)^{1/(k+1)} \oplus g^{-1})^{-\alpha}.$$

Это утверждение завершает доказательство теоремы.

Построение решения задачи для случая, когда $k > 1$, осуществляется таким же образом как в случае $k < -1$ и здесь для краткости опускается.

Нетрудно проверить, что формулировку доказанной теоремы можно записать в более компактном виде, объединив результаты для $k < -1$ и $k > 1$ в одну общую формулу.

Следствие 2. *Пусть $a,b,c,d,f,g > \mathbb{0}$ и k – вещественное число. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $k < -1$ или $k > 1$, то минимум в задаче (2.8) равен*

$$\mu = a^{1/2} b^{1/2} \oplus a^{(k+1)/2k} c^{(k-1)/2k} \oplus b^{(k+1)/2k} d^{(k-1)/2k} \oplus c^{1/2} d^{1/2} \oplus$$

$$\oplus a(f^{-(k-1)} \oplus g^{-(k-1)})^{-1} \oplus b(f^{k-1} \oplus g^{k-1})^{-1} \oplus \\ \oplus c(f^{k+1} \oplus g^{k+1})^{-1} \oplus d(f^{-(k+1)} \oplus g^{-(k+1)})^{-1}$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$t = (((\mu a^{-1})^{-1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} b)^{-1/(k-1)})^{-1} \oplus \\ \oplus ((\mu^{-1} c)^{-1/(k+1)} \oplus (\mu d^{-1})^{-1/(k+1)})^{-1} \oplus f)^{1-\alpha} \\ (((\mu^{-1} a)^{-1/(k-1)} \oplus (\mu b^{-1})^{1/(k-1)})^{-1} \oplus \\ \oplus ((\mu c^{-1})^{1/(k+1)} \oplus (\mu^{-1} d)^{-1/(k+1)})^{-1} \oplus g^{-1})^{-\alpha};$$

2) *если* $-1 \leq k \leq 1$, *то минимум равен*

$$\mu = a^{1/2} b^{1/2} \oplus a^{(k+1)/2} d^{-(k-1)/2} \oplus b^{(k+1)/2} c^{-(k-1)/2} \oplus c^{1/2} d^{1/2} \oplus \\ \oplus a g^{k-1} \oplus b f^{-(k-1)} \oplus c g^{-(k+1)} \oplus d f^{k+1}$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$t = ((\mu a^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} c)^{1/(k+1)} \oplus f)^{1-\alpha} \\ ((\mu b^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} d)^{1/(k+1)} \oplus g^{-1})^{-\alpha},$$

где α *– любое число, удовлетворяющее условию* $0 \leq \alpha \leq 1$.

Теперь рассмотрим два следствия из полученного результата, которые будут использованы в примерах приложений в следующей главе.

Предположим, что заданы числа $a,b,c,f,g \in \mathbb{X}$ и необходимо найти ненулевые значения неизвестного $t \in \mathbb{X}$, которые решают задачу

$$\begin{aligned} \min_{t \in \mathbb{X}} \quad & a t^{-2} \oplus b t^{2} \oplus c, \\ & f \leq t \leq g. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Нетрудно видеть, что эта задача имеет форму задачи (2.8), в которой необходимо положить $k = -1$ и $d = c$. Тогда применение теоремы 3 дает следующее утверждение.

Следствие 3. *Пусть $a,b,c,f,g > \mathbb{0}$. Минимум в задаче (2.11) равен*

$$\mu = a^{1/2}b^{1/2} \oplus ag^{-2} \oplus bf^2 \oplus c$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$t = (\mu^{-1/2}a^{1/2} \oplus f)^{1-\alpha}(\mu^{-1/2}b^{1/2} \oplus g^{-1})^{-\alpha}, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Теперь получим решение задачи, которая формулируется так:

$$\begin{aligned} \min_{t \in \mathbb{X}} \quad & at^{-1} \oplus bt, \\ & f \leq t \leq g. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Ясно, что эта задача сводится к задаче (2.8) при условии, что $k = 0$, $c = a$ и $d = b$. Решение задачи (2.12) находится как следствие из теоремы 3 в следующем виде.

Следствие 4. *Пусть $a,b,f,g > \mathbb{0}$. Минимум в задаче (2.12) равен*

$$\mu = a^{1/2}b^{1/2} \oplus ag^{-1} \oplus bf$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$t = (\mu^{-1}a \oplus f)^{1-\alpha}(\mu^{-1}b \oplus g^{-1})^{-\alpha}, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Заметим, что если добавить числовое значение $c \in \mathbb{X}$ в целевой функции задачи, то задача оптимизации будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \min_{t \in \mathbb{X}} \quad & at^{-1} \oplus bt \oplus c, \\ & f \leq t \leq g. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Нетрудно проверить, что множество значений t, на которых достигается минимум целевой функции, будет иметь то же формульное представление, что и в следствии 3, а к значению минимума добавится c. Решение задачи (2.13) можно записать в виде следствия.

Следствие 5. *Пусть* $a,b,c,f,g > \mathbb{0}$. *Минимум в задаче* (2.13) *равен*

$$\mu = a^{1/2}b^{1/2} \oplus ag^{-1} \oplus bf \oplus c$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$t = (\mu^{-1}a \oplus f)^{1-\alpha}(\mu^{-1}b \oplus g^{-1})^{-\alpha}, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Преобразуем утверждение следствия 5 к другому, более удобному для дальнейшего использования виду.

Следствие 6. *Пусть* $a,b,c,f,g > \mathbb{0}$. *Минимум в задаче* (2.13) *равен*

$$\mu = a^{1/2}b^{1/2} \oplus ag^{-1} \oplus bf \oplus c$$

и справедливы следующие утверждения:

1) *если* $\mu = a^{1/2}b^{1/2}$, *то* $t = a^{1/2}b^{-1/2}$;

2) *если* $\mu = ag^{-1}$, *то* $t = g$;

3) *если* $\mu = bf$, *то* $t = f$;

4) *если* $\mu = c$, *то* $t = (ac^{-1} \oplus f)^{1-\alpha}(bc^{-1} \oplus g^{-1})^{-\alpha}$, *для любого* $0 \leq \alpha \leq 1$.

Доказательство. Представим t из формулы (2.10) в виде двойного неравенства

$$\mu^{-1}a \oplus f \leq t \leq (\mu^{-1}b \oplus g^{-1})^{-1}.$$

Рассмотрим возможные значения μ. Пусть $\mu = a^{1/2}b^{1/2}$. После подстановки в предыдущую формулу и применения свойств монотонности идемпотентного сложения получим

$$a^{1/2}b^{-1/2} \leq a^{1/2}b^{-1/2} \oplus f \leq t \leq (a^{-1/2}b^{1/2} \oplus g^{-1})^{-1} \leq a^{1/2}b^{-1/2},$$

откуда можно заключить, что $t = a^{1/2}b^{-1/2}$.

Аналогично проверяется, что при $\mu = ag^{-1}$ получим $t = g$, а при $\mu = bf$ значение t будет равно f.

Если $\mu = c$, то используем представление для t в параметрической форме.

Полученные выражения для решения представим в более компактной форме.

Следствие 7. *Пусть* $a,b,c,f,g > \mathbb{0}$. *Минимум в задаче* (2.13) *равен*

$$\mu = a^{1/2}b^{1/2} \oplus ag^{-1} \oplus bf \oplus c$$

и справедливы следующие утверждения:

1) *если* $\mu = a^{1/2}b^{1/2} \oplus ag^{-1} \oplus bf$, *то* $t = (a^{-1/2}b^{1/2} \oplus g^{-1})^{-1} \oplus f$;

2) *если* $\mu = c$, *то* $t = (ac^{-1} \oplus f)^{1-\alpha}(bc^{-1} \oplus g^{-1})^{-\alpha}, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1.$

Доказательство. Объединим результаты первых трех пунктов в формулировке следствия 6 в один. Заметим, что общее значение μ может быть записано, как сумма

$$\mu = a^{1/2}b^{1/2} \oplus ag^{-1} \oplus bf.$$

Покажем, что в этом случае все значения, при которых достигается минимум вычисляются по формуле

$$t = (a^{-1/2}b^{1/2} \oplus g^{-1})^{-1} \oplus f.$$

Предположим, что $\mu = a^{1/2}b^{1/2}$. Тогда выполняются неравенства $a^{1/2}b^{1/2} \geq ag^{-1}$ и $a^{1/2}b^{1/2} \geq bf$, которые после преобразования могут быть записаны следующим образом: $a^{-1/2}b^{1/2} \geq g^{-1}$ и $a^{1/2}b^{-1/2} \geq f$. Тогда

$$t = (a^{-1/2}b^{1/2} \oplus g^{-1})^{-1} \oplus f = a^{1/2}b^{-1/2},$$

что соответствует результату первого пункта следствия 6.

Аналогичным образом проверяется, что при $\mu = ag^{-1}$ выполняется равенство

$$t = (a^{-1/2}b^{1/2} \oplus g^{-1})^{-1} \oplus f = g,$$

а при $\mu = bf$ – равенство

$$t = (a^{-1/2}b^{1/2} \oplus g^{-1})^{-1} \oplus f = f.$$

.

2.2.2 Решение второй задачи с одной переменной

Предположим, что необходимо найти ненулевые решения $u \in \mathbb{X}$ задачи

$$\min_{u \in \mathbb{X}} \; au^{-1/2} \oplus bu^{1/2} \oplus cu^{-1} \oplus du \oplus e, \tag{2.14}$$

где a,b,c,d,e – числа из $\mathbb{X}$, удовлетворяющие условию a,b,c,d,$e > \mathbb{0}$.

Решение этой задачи дает следующий результат.

Теорема 4. *Минимум в задаче (2.14) равен*

$$\mu = a^{1/2}b^{1/2} \oplus a^{2/3}d^{1/3} \oplus b^{2/3}c^{1/3} \oplus \oplus c^{1/2}d^{1/2} \oplus e$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$u = (\mu^{-2}a^2 \oplus \mu^{-1}c)^{1-\alpha}(\mu^{-2}b^2 \oplus \mu^{-1}d)^{-\alpha}, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1. \tag{2.15}$$

При этом,

1) *если* $\mu = a^{1/2}b^{1/2}$, *то* $u = ab^{-1}$;

2) *если* $\mu = a^{2/3}d^{1/3}$, *то* $u = a^{2/3}d^{-2/3}$;

3) *если* $\mu = b^{2/3}c^{1/3}$, *то* $u = b^{-2/3}c^{2/3}$;

4) *если* $\mu = c^{1/2}d^{1/2}$, *то* $u = c^{1/2}d^{-1/2}$;

5) *если* $\mu = e$, *то* $u = (a^2e^{-2} \oplus ce^{-1})^{1-\alpha}(b^2e^{-2} \oplus de^{-1})^{-\alpha}$, *для любого* $0 \leq \alpha \leq 1$.

Доказательство. Обозначим минимум целевой функции в задаче (2.14) через μ. Тогда все решения задачи определяются уравнением

$$au^{-1/2} \oplus bu^{1/2} \oplus cu^{-1} \oplus du \oplus e = \mu.$$

В силу того, что μ – минимальное значение целевой функции, равенство в системе можно заменить на неравенство, что приводит к неравенству

$$au^{-1/2} \oplus bu^{1/2} \oplus cu^{-1} \oplus du \oplus e \leq \mu.$$

Полученное неравенство эквивалентно системе

$$au^{-1/2} \leq \mu, \quad bu^{1/2} \leq \mu, \quad cu^{-1} \leq \mu, \quad du \leq \mu, \quad e \leq \mu. \tag{2.16}$$

Заметим, что перемножение соответствующих частей, например, первого и второго неравенств дает неравенство $ab \leq \mu^2$, откуда с учетом условия леммы следует, что $\mu \geq a^{1/2}b^{1/2} > \mathbb{0}$.

Решение относительно u первых четырех неравенств (2.16) дает

$$u \geq \mu^{-2}a^2, \quad u \leq \mu^2 b^{-2}, \quad u \geq \mu^{-1}c, \quad u \leq \mu d^{-1}.$$

Двойное неравенство для u можно записать следующим образом:

$$\mu^{-2}a^2 \oplus \mu^{-1}c \leq u \leq (\mu^{-2}b^2 \oplus \mu^{-1}d)^{-1}. \tag{2.17}$$

Множество значений u, удовлетворяющих этому неравенству, непусто, если выполняется условие

$$(\mu^{-2}a^2 \oplus \mu^{-1}c)(\mu^{-2}b^2 \oplus \mu^{-1}d) \leq \mathbb{1}.$$

Раскроем скобки в левой части, а затем заменим полученное неравенство эквивалентной системой неравенств

$$\mu^{-4}a^2b^2 \leq \mathbb{1}, \qquad \mu^{-3}a^2d \leq \mathbb{1}, \qquad \mu^{-3}b^2c \leq \mathbb{1}, \qquad \mu^{-2}cd \leq \mathbb{1}.$$

Решая неравенства системы относительно μ, получим

$$\mu \geq a^{1/2}b^{1/2}, \qquad \mu \geq a^{2/3}d^{1/3}, \qquad \mu \geq b^{2/3}c^{1/3}, \qquad \mu \geq c^{1/2}d^{1/2}.$$

Эта система, с учетом последнего неравенства из (2.16), равносильна неравенству

$$\mu \geq a^{1/2}b^{1/2} \oplus a^{2/3}d^{1/3} \oplus b^{2/3}c^{1/3} \oplus c^{1/2}d^{1/2} \oplus e.$$

Заметим, что переход от исходной задачи к этому неравенству, в котором μ обозначает минимум целевой функции, включал только эквивалентные преобразования. Из этого следует, что полученное неравенство задает точную нижнюю границу для μ, а значит знак неравенства можно заменить на знак равенства

$$\mu = a^{1/2}b^{1/2} \oplus a^{2/3}d^{1/3} \oplus b^{2/3}c^{1/3} \oplus c^{1/2}d^{1/2} \oplus e.$$

Двойное неравенство для u (2.17) можно записать с помощью параметра $0 \leq \alpha \leq 1$, представив его в виде (2.15).

Рассмотрим возможные значения μ. Пусть $\mu = a^{1/2}b^{1/2}$. После подстановки в формулу (2.17) и применения свойств монотонности идемпотентного сложения получим

$$ab^{-1} \leq a^{-1}b^{-1}a^2 \oplus a^{-1/2}b^{-1/2}c \leq u \leq (a^{-1}b^{-1}b^2 \oplus a^{-1/2}b^{-1/2}d)^{-1} \leq ab^{-1},$$

откуда можно заключить, что $u = ab^{-1}$.

Аналогичным образом можно проверить, что при $\mu = a^{2/3}d^{1/3}$ имеет место равенство $u = a^{2/3}d^{-2/3}$, при $\mu = b^{2/3}c^{1/3}$ равенство $u = b^{-2/3}c^{2/3}$, а при $\mu = c^{1/2}d^{1/2}$ равенство $u = c^{1/2}d^{-1/2}$.

При условии, что $\mu = e$, представление для μ (2.15) принимает вид

$$u = (a^2e^{-2} \oplus ce^{-1})^{1-\alpha}(b^2e^{-2} \oplus de^{-1})^{-\alpha},$$

для любого $0 \leq \alpha \leq 1$.

2.2.3 Решение задачи с двумя переменными с ограничениями

Пусть заданы числа $a,b,c,d,f,p,g,q > \mathbb{0}$. Требуется найти ненулевые решения $t,s \in \mathbb{X}$ задачи

$$\begin{gathered} \min_{t,s\in\mathbb{X}} \ at^{-1}s^{-1} \oplus bts^{-1} \oplus ct^{-1}s \oplus dts, \\ f \leq t \leq g, \qquad p \leq s \leq q. \end{gathered} \tag{2.18}$$

Следующий результат описывает все решения рассматриваемой задачи.

Теорема 5. *Введем обозначения*

$$u = a^{1/2}c^{1/2} \oplus aq^{-1} \oplus cp, \qquad v = b^{1/2}d^{1/2} \oplus bq^{-1} \oplus dp.$$

Тогда минимум в задаче (2.18) равен

$$\mu = u^{1/2}v^{1/2} \oplus ug^{-1} \oplus vf \oplus a^{1/2}d^{1/2} \oplus b^{1/2}c^{1/2}$$

и справедливы следующие утверждения:

1) *если* $\mu = u^{1/2}v^{1/2}$ *при* $u = a^{1/2}c^{1/2}$ *и* $v = bq^{-1}$ *или* $u = aq^{-1}$, *то*

$$t = (a^{1/4}c^{1/4} \oplus a^{1/2}q^{-1/2})(b^{1/2}q^{-1/2} \oplus v^{1/2})^{-1}, \qquad s = q;$$

2) *если* $\mu = u^{1/2}v^{1/2}$ *при* $u = a^{1/2}c^{1/2}$ *и* $v = dp$ *или* $u = cp$, *то*

$$t = (a^{1/4}c^{1/4} \oplus c^{1/2}p^{1/2})(d^{1/2}p^{1/2} \oplus v^{1/2})^{-1}, \qquad s = p;$$

3) *если* $\mu = ug^{-1}$, *то*

$$t = g, \quad s = (a^{-1/2}c^{1/2} \oplus q^{-1})^{-1} \oplus p;$$

4) *если* $\mu = vf$, *то*

$$t = f, \quad s = (b^{-1/2}d^{1/2} \oplus q^{-1})^{-1} \oplus p;$$

5) *если* $\mu = a^{1/2}d^{1/2}$, *то*

$$t = (a^{-1/2}d^{-1/2}u \oplus f)^{1-\alpha}(a^{-1/2}d^{-1/2}v \oplus g^{-1})^{-\alpha}, \qquad s = a^{1/2}d^{-1/2}t^{-1};$$

6) *если* $\mu = b^{1/2}c^{1/2}$, *то*

$$t = (b^{-1/2}c^{-1/2}u \oplus f)^{1-\alpha}(b^{-1/2}c^{-1/2}v \oplus g^{-1})^{-\alpha}, \qquad s = b^{1/2}c^{-1/2}t,$$

где α *– вещественное число, удовлетворяющее условию* $0 \leq \alpha \leq 1$.

Доказательство. Обозначим минимум целевой функции в задаче (2.18) через μ. Тогда все решения задачи определяются системой, состоящей из уравнения и двух неравенств,

$$at^{-1}s^{-1} \oplus bts^{-1} \oplus ct^{-1}s \oplus dts = \mu, \qquad f \leq t \leq g, \qquad p \leq s \leq q.$$

В силу того, что μ – минимальное значение целевой функции, равенство в первом уравнении можно заменить на неравенство и записать систему так:

$$at^{-1}s^{-1} \oplus bts^{-1} \oplus ct^{-1}s \oplus dts \leq \mu, \qquad f \leq t \leq g, \qquad p \leq s \leq q.$$

Полученная система неравенств эквивалентна системе

$$\begin{array}{cccc} at^{-1}s^{-1} \leq \mu, & bts^{-1} \leq \mu, & ct^{-1}s \leq \mu, & dts \leq \mu, \\ f \leq t, & t \leq g, & p \leq s, & s \leq q. \end{array}$$

Заметим, что перемножение соответствующих частей, например, первого и четвертого неравенств дает $ad \leq \mu^2$, откуда с учетом условия леммы следует, что $\mu \geq a^{1/2}d^{1/2} > \mathbb{0}$.

Решим систему относительно неизвестного s, считая t параметром.

Решения неравенств $at^{-1}s^{-1} \leq \mu$ и $bts^{-1} \leq \mu$ относительно s имеют вид $s \geq \mu^{-1}at^{-1}$ и $s \geq \mu^{-1}bt$. Объединив их с условием $s \geq p$, приходим к неравенству

$$s \geq \mu^{-1}at^{-1} \oplus \mu^{-1}bt \oplus p.$$

Рассмотрим неравенства $ct^{-1}s \leq \mu$ и $dts \leq \mu$, которые решим относительно s^{-1}, чтобы получить $s^{-1} \geq \mu^{-1}ct^{-1}$ и $s^{-1} \geq \mu^{-1}dt$. Найденные решения вместе с условием $s^{-1} \geq q^{-1}$ приводят к неравенству $s^{-1} \geq \mu^{-1}ct^{-1} \oplus \mu^{-1}dt \oplus q^{-1}$ или к эквивалентному ему неравенству

$$s \leq (\mu^{-1}ct^{-1} \oplus \mu^{-1}dt \oplus q^{-1})^{-1}.$$

Записывая вместе неравенства для s и граничные условия на t, получим систему

$$\mu^{-1}at^{-1} \oplus \mu^{-1}bt \oplus p \leq s \leq (\mu^{-1}ct^{-1} \oplus \mu^{-1}dt \oplus q^{-1})^{-1}, \quad f \leq t \leq g. \tag{2.19}$$

Множество значений s, удовлетворяющих первому неравенству, непусто, если выполняется условие

$$\mu^{-1}at^{-1} \oplus \mu^{-1}bt \oplus p \leq (\mu^{-1}ct^{-1} \oplus \mu^{-1}dt \oplus q^{-1})^{-1},$$

которое равносильно условию

$$(\mu^{-1}at^{-1} \oplus \mu^{-1}bt \oplus p)(\mu^{-1}ct^{-1} \oplus \mu^{-1}dt \oplus q^{-1}) \leq \mathbb{1}.$$

Раскроем скобки в левой части, а затем заменим полученное неравенство эквивалентной системой неравенств, включая неравенство $pq^{-1} \leq \mathbb{1}$, которое прямо следует из условия $p \leq q$. Решение остальных неравенств системы относительно μ дает

$$\begin{array}{llll} \mu \geq a^{1/2}c^{1/2}t^{-1}, & \mu \geq a^{1/2}d^{1/2}, & \mu \geq b^{1/2}c^{1/2}, & \mu \geq b^{1/2}d^{1/2}t, \\ \mu \geq aq^{-1}t^{-1}, & \mu \geq dpt, & \mu \geq cpt^{-1}, & \mu \geq bq^{-1}t. \end{array}$$

Полученная система, с учетом граничных условий на t, равносильна паре неравенств

$$\mu \geq a^{1/2}d^{1/2} \oplus a^{1/2}c^{1/2}t^{-1} \oplus b^{1/2}d^{1/2}t \oplus b^{1/2}c^{1/2} \oplus aq^{-1}t^{-1} \oplus dpt \oplus cpt^{-1} \oplus bq^{-1}t,$$
$$f \leq t \leq g.$$

Заметим, что переход от исходной задачи к полученной системе, в которой μ обозначает минимум целевой функции, включал только эквивалентные преобразования. Из этого следует, что первое неравенство системы задает точную нижнюю границу для μ, выраженную через t, а потому теперь необходимо решить задачу оптимизации следующего вида:

$$\begin{aligned} \min \quad & (a^{1/2}c^{1/2} \oplus aq^{-1} \oplus cp)t^{-1} \oplus (b^{1/2}d^{1/2} \oplus bq^{-1} \oplus dp)t \oplus a^{1/2}d^{1/2} \oplus b^{1/2}c^{1/2}, \\ & f \leq t \leq g. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Введем обозначения

$$u = a^{1/2}c^{1/2} \oplus aq^{-1} \oplus cp, \quad v = b^{1/2}d^{1/2} \oplus bq^{-1} \oplus dp, \quad w = a^{1/2}d^{1/2} \oplus b^{1/2}c^{1/2}. \tag{2.21}$$

Задача (2.20) может быть записана в форме (2.13), где a заменяется на u, b на v, и c на w. Применение следствия 6 для решения задачи дает минимальное значение

$$\mu = u^{1/2}v^{1/2} \oplus ug^{-1} \oplus vf \oplus w,$$

причем согласно следствию 6 выполняются следующие условия:

1) если $\mu = u^{1/2}v^{1/2}$, то $t = u^{1/2}v^{-1/2}$;

2) если $\mu = ug^{-1}$, то $t = g$;

3) если $\mu = vf$, то $t = f$;

4) если $\mu = w$, то $t = (w^{-1}u \oplus f)^{1-\alpha}(w^{-1}v \oplus g^{-1})^{-\alpha}, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1.$

Теперь уточним полученное решение, рассматривая различные значения, которые может принимать величина μ.

Случай $\mu = u^{1/2}v^{1/2}$

Предположим, что $\mu = u^{1/2}v^{1/2}$. В этом случае $t = u^{1/2}v^{-1/2}$, а двойное неравенство (2.19) для s можно записать в виде

$$u^{-1}a \oplus v^{-1}b \oplus p \leq s \leq (u^{-1}c \oplus v^{-1}d \oplus q^{-1})^{-1}.$$

Рассмотрим все значения, которые могут принимать u и v, определенные по формулам (2.21). Найдем соответствующие представления для s и μ.

Пусть $u = a^{1/2}c^{1/2}$, тогда $\mu = a^{1/4}c^{1/4}v^{1/2}$, а $t = a^{1/4}c^{1/4}v^{-1/2}$. Проверим, какие значения может принимать v и найдем соответствующие величины t и s.

Исследуем случай, когда выполняется равенство $v = b^{1/2}d^{1/2}$. В силу тропического аналога неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим выполняется неравенство

$$\mu = u^{1/2}v^{1/2} = a^{1/4}b^{1/4}c^{1/4}d^{1/4} \leq a^{1/2}d^{1/2} \oplus b^{1/2}c^{1/2} = w.$$

Полученное неравенство с учетом условия $u^{1/2}v^{1/2} \geq w$ приводит к равенству $\mu = w$, а потому решение при $v = b^{1/2}d^{1/2}$ можно рассматривать как частный случай для общего случая $\mu = w$, который будет изучен ниже.

Теперь пусть $v = bq^{-1}$. В этом случае

$$\mu = a^{1/4} b^{1/2} c^{1/4} q^{-1/2}, \qquad t = a^{1/4} b^{-1/2} c^{1/4} q^{1/2}.$$

Двойное неравенство для s принимает следующий вид:

$$q \leq a^{1/2} c^{-1/2} \oplus q \oplus p \leq s \leq (a^{-1/2} c^{1/2} \oplus b^{-1} q d \oplus q^{-1})^{-1} \leq q,$$

откуда следует, что $s = q$.

Пусть $v = dp$ тогда

$$\mu = a^{1/4} c^{1/4} d^{1/2} p^{1/2}, \qquad t = a^{1/4} c^{1/4} d^{-1/2} p^{-1/2}.$$

Двойное неравенство для s записывается так:

$$p \leq a^{-1/2} c^{-1/2} a \oplus d^{-1} p^{-1} b \oplus p \leq s \leq (a^{-1/2} c^{-1/2} c \oplus p^{-1} \oplus q^{-1})^{-1} \leq p,$$

что дает равенство $s = p$.

Предположим, что $u = aq^{-1}$. Тогда

$$\mu = a^{1/2} q^{-1/2} v^{1/2}, \qquad t = a^{1/2} q^{-1/2} v^{-1/2}.$$

Для s запишем двойное неравенство

$$q \leq a^{-1} q a \oplus v^{-1} b \oplus p \leq s \leq (a^{-1} q c \oplus v^{-1} d \oplus q^{-1})^{-1} \leq q,$$

а значит $s = q$.

При $u = cp$ выполняется $\mu = c^{1/2} p^{1/2} v^{1/2}$ и $t = c^{1/2} p^{1/2} v^{-1/2}$. Двойное неравенство для s в этом случае можно записать следующим образом:

$$p \leq c^{-1} p^{-1} a \oplus v^{-1} b \oplus p \leq s \leq (p^{-1} \oplus v^{-1} d \oplus q^{-1})^{-1} \leq p,$$

что означает $s = p$.

Записывая вместе предыдущие результаты для $\mu = u^{1/2} v^{1/2}$, получим, что если $u = a^{1/2} c^{1/2}$ и $v = bq^{-1}$, то $t = a^{1/4} b^{-1/2} c^{1/4} q^{1/2}$ и $s = q$;

если $u = aq^{-1}$, то $t = a^{1/2}q^{-1/2}v^{-1/2}$ и $s = q$;
если $u = a^{1/2}c^{1/2}$ и $v = dp$, то $t = a^{1/4}c^{1/4}d^{-1/2}p^{-1/2}$ и $s = p$;
если $u = cp$, то $t = c^{1/2}p^{1/2}v^{-1/2}$ и $s = p$.

Покажем, что выражения для t, которые соответствуют случаю $u = a^{1/2}c^{1/2}$ и $v = bq^{-1}$ и случаю $u = aq^{-1}$, можно представить с помощью одной формулы

$$t = (a^{1/4}c^{1/4} \oplus a^{1/2}q^{-1/2})(b^{1/2}q^{-1/2} \oplus v^{1/2})^{-1}.$$

Предположим, что $u = a^{1/2}c^{1/2}$ и $v = bq^{-1}$. Из первого условия следует неравенство $a^{1/2}c^{1/2} \geq aq^{-1}$, а значит $a^{1/4}c^{1/4} \geq a^{1/2}q^{-1/2}$. С учетом последнего неравенства и равенства $v^{1/2} = b^{1/2}q^{-1/2}$ получаем, что

$$t = (a^{1/4}c^{1/4} \oplus a^{1/2}q^{-1/2})(b^{1/2}q^{-1/2} \oplus v^{1/2})^{-1} = a^{1/4}b^{-1/2}c^{1/4}q^{1/2}.$$

В случае, если $u = aq^{-1}$, выполняется неравенство $aq^{-1} \geq a^{1/2}c^{1/2}$, из которого получаем $a^{1/2}q^{-1/2} \geq a^{1/4}c^{1/4}$. Кроме того, всегда выполняется неравенство $v \geq bq^{-1}$. Следовательно

$$t = (a^{1/4}c^{1/4} \oplus a^{1/2}q^{-1/2})(b^{1/2}q^{-1/2} \oplus v^{1/2})^{-1} = a^{1/2}q^{-1/2}v^{-1/2}.$$

Аналогичным образом проверяется, что при $u = a^{1/2}c^{1/2}$ и $v = dp$ или $u = cp$ справедливо общее выражение для t в виде

$$t = (a^{1/4}c^{1/4} \oplus c^{1/2}p^{1/2})(d^{1/2}p^{1/2} \oplus v^{1/2})^{-1}$$

Случай $\mu = ug^{-1}$

Рассмотрим случай, когда $\mu = ug^{-1}$ и $t = g$. Двойное неравенство (2.19) для s принимает форму

$$u^{-1}a \oplus u^{-1}bg^2 \oplus p \leq s \leq (u^{-1}c \oplus u^{-1}dg^2 \oplus q^{-1})^{-1}.$$

Найдем соответствующие значения для s и μ при различных значениях u.

Предположим, что $u = a^{1/2}c^{1/2}$. Тогда $\mu = a^{1/2}c^{1/2}g^{-1}$. Учитывая, что $t = g$, представление для s можно записать в виде двойного неравенства

$$a^{1/2}c^{-1/2} \leq a^{1/2}c^{-1/2} \oplus a^{-1/2}bc^{-1/2}g^2 \oplus p \leq s \leq \\ \leq s \leq (a^{-1/2}c^{1/2} \oplus a^{-1/2}c^{-1/2}dg^2 \oplus q^{-1})^{-1} \leq a^{1/2}c^{-1/2},$$

из чего вытекает равенство $s = a^{1/2}c^{-1/2}$.

Аналогичным образом находим, что при $u = aq^{-1}$ выполняются равенства $\mu = aq^{-1}g^{-1}$ и $s = q$, а при $u = cp$ – равенства $\mu = cpg^{-1}$ и $s = p$.

Нетрудно проверить, что все значения s, при которых достигается минимум в этом случае, вычисляются по формуле

$$s = (a^{-1/2}c^{1/2} \oplus q^{-1})^{-1} \oplus p.$$

Пусть, например $u = a^{1/2}c^{1/2}$. В этом случае выполняются условия $a^{1/2}c^{1/2} \geq aq^{-1}$ и $a^{1/2}c^{1/2} \geq cp$. Эти неравенства равносильны неравенствам $a^{-1/2}c^{1/2} \geq q^{-1}$ и $a^{1/2}c^{-1/2} \geq p$, откуда следует, что

$$s = (a^{-1/2}c^{1/2} \oplus q^{-1})^{-1} \oplus p = a^{1/2}c^{-1/2}.$$

Случаи, когда $u = aq^{-1}$ и $u = cp$ проверяются аналогично.

Таким образом, если $\mu = ug^{-1}$, то минимум достигается при

$$t = g, \qquad s = (a^{-1/2}c^{1/2} \oplus q^{-1})^{-1} \oplus p.$$

Случай $\mu = vf$

Рассмотрим случай, при котором $\mu = vf$ и $t = f$. Двойное неравенство (2.19) для s можно записать с учетом значений μ и t так:

$$v^{-1}af^{-2} \oplus v^{-1}b \oplus p \leq s \leq (v^{-1}cf^{-2} \oplus v^{-1}d \oplus q^{-1})^{-1}.$$

Исследуем значения, которые может принимать v, и найдем соответствующие представления для s и μ.

Если $v = b^{1/2}d^{1/2}$, то $\mu = b^{1/2}d^{1/2}f$. В силу того, что $t = f$, двойное неравенство для s принимает вид

$$b^{1/2}d^{-1/2} \leq v^{-1}af^{-2} \oplus b^{1/2}d^{-1/2} \oplus p \leq s \leq (v^{-1}cf^{-2} \oplus b^{-1/2}d^{1/2} \oplus q^{-1})^{-1} \leq b^{1/2}d^{-1/2},$$

из которого следует, что $s = b^{1/2}d^{-1/2}$.

Аналогичным образом можно проверить, что при $v = bq^{-1}$ выполняются равенства $\mu = bq^{-1}f$ и $s = q$, а при $v = dp$ – равенства $\mu = dpf$ и $s = p$.

Все значения s, при которых достигается минимум в этом случае, вычисляются по формуле

$$s = (b^{-1/2}d^{1/2} \oplus q^{-1})^{-1} \oplus p.$$

Если, например $v = b^{1/2}d^{1/2}$, то справедливы неравенства $b^{1/2}d^{1/2} \geq bq^{-1}$ и $b^{1/2}d^{1/2} \geq dp$, которые равносильны паре неравенств $b^{-1/2}d^{1/2} \geq q^{-1}$ и $b^{1/2}d^{-1/2} \geq p$. Это означает, что

$$s = (b^{-1/2}d^{1/2} \oplus q^{-1})^{-1} \oplus p = b^{1/2}d^{-1/2}.$$

Аналогично могут быть проверены случаи $v = bq^{-1}$ и $v = dp$.

В результате получим, что если $\mu = vf$, то минимум достигается при

$$t = f, \qquad s = (b^{-1/2}d^{1/2} \oplus q^{-1})^{-1} \oplus p.$$

Случай $\mu = w$

В случае, когда $\mu = w$, выражение для t включает параметр α. Покажем, что в этом случае величина s может принимать только два значения.

Пусть сначала $\mu = a^{1/2}d^{1/2}$. Тогда двойное неравенство (2.19) для s можно записать следующим образом:

$$a^{1/2}d^{-1/2}t^{-1} \oplus a^{-1/2}bd^{-1/2}t \oplus p \leq s \leq (a^{-1/2}cd^{-1/2}t^{-1} \oplus a^{-1/2}d^{1/2}t \oplus q^{-1})^{-1}.$$

При этом для выражений слева и справа выполняются неравенства

$$a^{1/2}d^{-1/2}t^{-1} \leq a^{1/2}d^{-1/2}t^{-1} \oplus a^{-1/2}bd^{-1/2}t \oplus p,$$

$$(a^{-1/2}cd^{-1/2}t^{-1} \oplus a^{-1/2}d^{1/2}t \oplus q^{-1})^{-1} \leq (a^{-1/2}d^{1/2}t)^{-1} = a^{1/2}d^{-1/2}t^{-1}.$$

Отсюда можно сделать вывод, что если $\mu = a^{1/2}d^{1/2}$, то выполняется равенство $s = a^{1/2}d^{-1/2}t^{-1}$, где

$$t = (a^{-1/2}d^{-1/2}u \oplus f)^{1-\alpha}(a^{-1/2}d^{-1/2}v \oplus g^{-1})^{-\alpha}, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

При $\mu = b^{1/2}c^{1/2}$ аналогичным образом получим $s = b^{1/2}c^{-1/2}t$, где

$$t = (b^{-1/2}c^{-1/2}u \oplus f)^{1-\alpha}(b^{-1/2}c^{-1/2}v \oplus g^{-1})^{-\alpha}, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Исследование этого случая завершает доказательство теоремы.

Сформулируем полученный результат в более компактной форме.

Следствие 8. *Введем обозначения*

$$u = a^{1/2}c^{1/2} \oplus aq^{-1} \oplus cp, \quad v = b^{1/2}d^{1/2} \oplus bq^{-1} \oplus dp, \quad w = a^{1/2}d^{1/2} \oplus b^{1/2}c^{1/2}.$$

Тогда минимум в задаче (2.18) *равен*

$$\mu = u^{1/2}v^{1/2} \oplus ug^{-1} \oplus vf \oplus w$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$t = (\mu^{-1}u \oplus f)^{1-\alpha}(\mu^{-1}v \oplus g^{-1})^{-\alpha}, \tag{2.22}$$

$$s = (\mu^{-1}at^{-1} \oplus \mu^{-1}bt \oplus p)^{1-\alpha}(\mu^{-1}ct^{-1} \oplus \mu^{-1}dt \oplus q^{-1})^{-\alpha}, \tag{2.23}$$

где α – вещественное число, удовлетворяющее условию $0 \leq \alpha \leq 1$.

Доказательство. При доказательстве теоремы 5 было показано, что множество решений (t,s) задачи (2.18) описывается при помощи двойного неравенства

$$\mu^{-1}at^{-1} \oplus \mu^{-1}bt \oplus p \leq s \leq (\mu^{-1}ct^{-1} \oplus \mu^{-1}dt \oplus q^{-1})^{-1},$$

где величина t является решением задачи (2.20).

Решение задачи (2.20) с помощью следствия 5 дает результат в параметрической форме (2.22).

Ясно, что двойное неравенство для s также может быть записано в виде равенства с использованием некоторого параметра. Заметим, что в каждом из случаев решения, исследованных в теореме 5, по крайней мере одна из величин t и s определяется однозначно без помощи параметров. В силу этого, параметрическое представление для s можно также записать с использованием α в виде (2.23).

Теперь рассмотрим два частных случая задачи, когда одна из переменных не имеет ограничений. Сначала рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &\min_{t,s\in\mathbb{X}} \quad at^{-1}s^{-1} \oplus bts^{-1} \oplus ct^{-1}s \oplus dts, \\ &\qquad f \leq t \leq g. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Следующий результат описывает все решения рассматриваемой задачи.

Следствие 9. *Минимум в задаче* (2.24) *равен*

$$\mu = a^{1/2}c^{1/2}g^{-1} \oplus b^{1/2}d^{1/2}f \oplus a^{1/2}d^{1/2} \oplus b^{1/2}c^{1/2}$$

и справедливы следующие утверждения:

1) *если* $\mu = a^{1/2}c^{1/2}g^{-1}$, *то*

$$t = g, \qquad s = a^{1/2}c^{-1/2};$$

2) *если* $\mu = b^{1/2}d^{1/2}f$, *то*

$$t = f, \qquad s = b^{1/2}d^{-1/2};$$

3) *если* $\mu = a^{1/2}d^{1/2}$, *то*

$$t = (c^{1/2}d^{-1/2} \oplus f)^{1-\alpha}(a^{-1/2}b^{1/2} \oplus g^{-1})^{-\alpha}, \qquad s = a^{1/2}d^{-1/2}t^{-1};$$

4) *если* $\mu = b^{1/2}c^{1/2}$, *то*

$$t = (a^{1/2}b^{-1/2} \oplus f)^{1-\alpha}(c^{-1/2}d^{1/2} \oplus g^{-1})^{-\alpha}, \qquad s = b^{1/2}c^{-1/2}t,$$

где α – вещественное число, удовлетворяющее условию $0 \leq \alpha \leq 1$.

Теперь рассмотрим вариант, когда у t отсутствуют ограничения.

$$\begin{aligned} &\min_{t,s \in \mathbb{X}} \quad at^{-1}s^{-1} \oplus bts^{-1} \oplus ct^{-1}s \oplus dts, \\ &\qquad\quad p \leq s \leq q. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Следующий результат описывает все решения рассматриваемой задачи.

Следствие 10. *Введем обозначения*

$$u = a^{1/2}c^{1/2} \oplus aq^{-1} \oplus cp, \qquad v = b^{1/2}d^{1/2} \oplus bq^{-1} \oplus dp.$$

Тогда минимум в задаче (2.25) равен

$$\mu = u^{1/2}v^{1/2} \oplus a^{1/2}d^{1/2} \oplus b^{1/2}c^{1/2}$$

и справедливы следующие утверждения:

1) *если $\mu = u^{1/2}v^{1/2}$ при $u = a^{1/2}c^{1/2}$ и $v = bq^{-1}$ или $u = aq^{-1}$, то*

$$t = (a^{1/4}c^{1/4} \oplus a^{1/2}q^{-1/2})(b^{1/2}q^{-1/2} \oplus v^{1/2})^{-1}, \qquad s = q;$$

2) *если $\mu = u^{1/2}v^{1/2}$ при $u = a^{1/2}c^{1/2}$ и $v = dp$ или $u = cp$, то*

$$t = (a^{1/4}c^{1/4} \oplus c^{1/2}p^{1/2})(d^{1/2}p^{1/2} \oplus v^{1/2})^{-1}, \qquad s = p;$$

3) *если $\mu = a^{1/2}d^{1/2}$, то*

$$t = (a^{-1/2}d^{-1/2}u)^{1-\alpha}(a^{-1/2}d^{-1/2}v)^{-\alpha} = \mu^{2\alpha-1}u^{1-\alpha}v^{-\alpha}, \qquad s = a^{1/2}d^{-1/2}t^{-1};$$

4) *если $\mu = b^{1/2}c^{1/2}$, то*

$$t = (b^{-1/2}c^{-1/2}u)^{1-\alpha}(b^{-1/2}c^{-1/2}v)^{-\alpha} = \mu^{2\alpha-1}u^{1-\alpha}v^{-\alpha}, \qquad s = b^{1/2}c^{-1/2}t,$$

где α – вещественное число, удовлетворяющее условию $0 \leq \alpha \leq 1$.

2.2.4 Решение задачи с двумя переменными

Пусть заданы числа $a,b,c,d,e,f,g,h,k > \mathbb{0}$. Требуется найти ненулевые решения $u,v \in \mathbb{X}$ задачи

$$\min_{u,v\in\mathbb{X}} \quad au^{-1} \oplus bv^{-1} \oplus cu \oplus dv \oplus eu^{-1}v^{-1} \oplus fu^{-1}v \oplus guv^{-1} \oplus huv \oplus k. \tag{2.26}$$

Теорема 6. *Введем обозначения*

$$\begin{aligned} &a_1 = b^{1/2}f^{1/2} \oplus d^{1/2}e^{1/2}, \qquad b_1 = b^{1/2}h^{1/2} \oplus d^{1/2}g^{1/2}, \qquad c_1 = e^{1/2}f^{1/2} \oplus a, \\ &d_1 = g^{1/2}h^{1/2} \oplus c, \qquad e_1 = b^{1/2}d^{1/2} \oplus f^{1/2}g^{1/2} \oplus e^{1/2}h^{1/2} \oplus k. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Тогда минимум в задаче (2.26) *равен*

$$\mu = a_1^{1/2}b_1^{1/2} \oplus a_1^{2/3}d_1^{1/3} \oplus b_1^{2/3}c_1^{1/3} \oplus c_1^{1/2}d_1^{1/2} \oplus e_1$$

и справедливы следующие утверждения:

1) *если* $\mu = a_1^{1/2}b_1^{1/2}$, *то* $u = a_1 b_1^{-1}$ *и*

$$v = \begin{cases} b^{3/4}f^{-1/4}b_1^{-1/2}, & \text{если } a_1 = b^{1/2}f^{1/2}, \\ d^{-3/4}e^{1/4}b_1^{1/2}, & \text{если } a_1 = d^{1/2}e^{1/2}; \end{cases}$$

2) *если* $\mu = a_1^{2/3}d_1^{1/3}$, *то* $u = a_1^{2/3}d_1^{-2/3}$ *и*

$$v = \begin{cases} b^{2/3}f^{-1/3}d_1^{-1/3}, & \text{если } a_1 = b^{1/2}f^{1/2}, \\ d^{-2/3}e^{1/3}d_1^{1/3}, & \text{если } a_1 = d^{1/2}e^{1/2}; \end{cases}$$

3) *если* $\mu = b_1^{2/3}c_1^{1/3}$, *то* $u = b_1^{-2/3}c_1^{2/3}$ *и*

$$v = \begin{cases} b^{2/3}h^{-1/3}c_1^{-1/3}, & \text{если } b_1 = b^{1/2}h^{1/2}, \\ d^{-2/3}g^{1/3}c_1^{1/3}, & \text{если } b_1 = d^{1/2}g^{1/2}; \end{cases}$$

4) *если* $\mu = c_1^{1/2} d_1^{1/2}$, *то* $u = c_1^{1/2} d_1^{-1/2}$ *и*

$$v = \begin{cases} e^{1/2} f^{-1/2}, & \text{если } c_1 = e^{1/2} f^{1/2}, \\ g^{1/2} h^{-1/2}, & \text{если } d_1 = g^{1/2} h^{1/2}, \\ (a^{-1/2} c^{-1/2} b \oplus a^{-1} e \oplus c^{-1} g)^{1-\alpha} \otimes & \\ \otimes (a^{-1/2} c^{-1/2} d \oplus a^{-1} f \oplus c^{-1} h)^{-\alpha}, & \text{если } c_1 = a, d_1 = c; \end{cases}$$

5) *если* $\mu = e_1$, *то* $u = (a_1^2 e_1^{-2} \oplus c_1 e_1^{-1})^{1-\alpha} (b_1^2 e_1^{-2} \oplus d_1 e_1^{-1})^{-\alpha}$ *и*

$$v = \begin{cases} b^{1/2} d^{-1/2}, & \text{если } e_1 = b^{1/2} d^{1/2}, \\ f^{-1/2} g^{1/2} u, & \text{если } e_1 = f^{1/2} g^{1/2}, \\ e^{1/2} h^{-1/2} u^{-1}, & \text{если } e_1 = e^{1/2} h^{1/2}, \\ (b k^{-1} \oplus k^{-1} e t^{-1} \oplus k^{-1} g t)^{1-\beta} \otimes & \\ \otimes (k^{-1} d \oplus k^{-1} f t^{-1} \oplus k^{-1} h t)^{-\beta}, & \text{если } e_1 = k, \end{cases}$$

где α, β *– вещественные числа, удовлетворяющие условиям* $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq 1$.

Доказательство. Обозначим минимум целевой функции в задаче (2.26) через μ. Тогда все решения задачи определяются неравенством

$$a u^{-1} \oplus b v^{-1} \oplus c u \oplus d v \oplus e u^{-1} v^{-1} \oplus f u^{-1} v \oplus g u v^{-1} \oplus h u v \oplus k \leq \mu.$$

Полученное неравенство эквивалентно системе

$$\begin{gathered} a u^{-1} \leq \mu, \quad b v^{-1} \leq \mu, \quad c u \leq \mu, \quad d v \leq \mu, \\ e u^{-1} v^{-1} \leq \mu, \quad f u^{-1} v \leq \mu, \quad g u v^{-1} \leq \mu, \quad h u v \leq \mu, \quad k \leq \mu. \end{gathered} \tag{2.28}$$

Заметим, что перемножение соответствующих частей, например, первого и третьего неравенств дает $ac \leq \mu^2$, откуда с учетом условия леммы следует, что $\mu \geq a^{1/2} c^{1/2} > \mathbb{0}$.

Решим систему относительно v, считая u параметром. Рассмотрим неравенства, в которых имеется переменная v, и представим их в виде

$$\begin{aligned} &v \geq \mu^{-1}b, &&v \leq \mu d^{-1}, &&v \geq \mu^{-1}eu^{-1}, \\ &v \leq \mu f^{-1}u, &&v \geq \mu^{-1}gu, &&v \leq \mu h^{-1}u^{-1}. \end{aligned}$$

Объединив вместе соответствующие неравенства, получим двойное неравенство

$$\mu^{-1}(b \oplus eu^{-1} \oplus gu) \leq v \leq \mu(d \oplus fu^{-1} \oplus hu)^{-1}. \tag{2.29}$$

Множество значений v, удовлетворяющих этому неравенству, непусто, если выполняется условие

$$(b \oplus eu^{-1} \oplus gu)(d \oplus fu^{-1} \oplus hu) \leq \mu^2.$$

Раскроем скобки слева и извлечем квадратный корень из обоих частей неравенства. После добавления тех неравенств из (2.28), которые не зависят от v, получим

$$\begin{aligned} \mu \geq (b^{1/2}f^{1/2} \oplus d^{1/2}e^{1/2})u^{-1/2} \oplus (b^{1/2}h^{1/2} \oplus d^{1/2}g^{1/2})u^{1/2} \oplus \\ \oplus (e^{1/2}f^{1/2} \oplus a)u^{-1} \oplus (g^{1/2}h^{1/2} \oplus c)u \oplus (b^{1/2}d^{1/2} \oplus f^{1/2}g^{1/2} \oplus e^{1/2}h^{1/2} \oplus k). \end{aligned}$$

Заметим, что переход от исходной задачи к этому неравенству, в котором μ обозначает минимум целевой функции, включал только эквивалентные преобразования. Из этого следует, что полученное неравенство задает точную нижнюю границу для μ, выраженную через u, а потому необходимо решить задачу оптимизации следующего вида

$$\begin{aligned} \min \quad & (b^{1/2}f^{1/2} \oplus d^{1/2}e^{1/2})u^{-1/2} \oplus (b^{1/2}h^{1/2} \oplus d^{1/2}g^{1/2})u^{1/2} \oplus \\ & \oplus (e^{1/2}f^{1/2} \oplus a)u^{-1} \oplus (g^{1/2}h^{1/2}c)u \oplus \\ & \oplus (b^{1/2}d^{1/2} \oplus f^{1/2}g^{1/2} \oplus e^{1/2}h^{1/2} \oplus k). \end{aligned} \tag{2.30}$$

С учетом обозначений (2.27), задача (2.30) может быть записана в краткой форме

$$\min \quad a_1 u^{-1/2} \oplus b_1 u^{1/2} \oplus c_1 u^{-1} \oplus d_1 u \oplus e_1.$$

Применение теоремы 4 для решения задачи дает минимальное значение

$$\mu = a_1^{1/2} b_1^{1/2} \oplus a_1^{2/3} d_1^{1/3} \oplus b_1^{2/3} c_1^{1/3} \oplus c_1^{1/2} d_1^{1/2} \oplus e_1,$$

причем выполняются следующие условия:

1) если $\mu = a_1^{1/2} b_1^{1/2}$, то $u = a_1 b_1^{-1}$;

2) если $\mu = a_1^{2/3} d_1^{1/3}$, то $u = a_1^{2/3} d_1^{-2/3}$;

3) если $\mu = b_1^{2/3} c_1^{1/3}$, то $u = b_1^{-2/3} c_1^{2/3}$;

4) если $\mu = c_1^{1/2} d_1^{1/2}$, то $u = c_1^{1/2} d_1^{-1/2}$;

5) если $\mu = e_1$, то $u = (a_1^2 e_1^{-2} \oplus c_1 e_1^{-1})^{1-\alpha} (b_1^2 e_1^{-2} \oplus d_1 e_1^{-1})^{-\alpha}, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1.$

Рассмотрим различные значения, которые может принимать величина μ и уточним полученное решение.

Случай $\mu = a_1^{1/2} b_1^{1/2}$

Предположим, что $\mu = a_1^{1/2} b_1^{1/2}$. В этом случае $u = a_1 b_1^{-1}$, а двойное неравенство (2.29) для v можно записать в виде

$$a_1^{-1/2} b_1^{-1/2} (b \oplus a_1^{-1} b_1 e \oplus a_1 b_1^{-1} g) \leq v \leq a_1^{1/2} b_1^{1/2} (d \oplus a_1^{-1} b_1 f \oplus a_1 b_1^{-1} h)^{-1}.$$

Рассмотрим все значения, которые может принимать a_1, определенное по формулам (2.27). Найдем соответствующие представления для v и μ.

Пусть $a_1 = b^{1/2} f^{1/2}$.

Двойное неравенство для v в этом случае преобразуется к виду

$$b^{-1/4} f^{-1/4} b_1^{-1/2} (b \oplus b^{-1/2} f^{-1/2} b_1 e \oplus b^{1/2} f^{1/2} b_1^{-1} g) \leq v \leq$$
$$\leq v \leq b^{1/4} f^{1/4} b_1^{1/2} (d \oplus b^{-1/2} f^{-1/2} b_1 f \oplus b^{1/2} f^{1/2} b_1^{-1} h)^{-1},$$

$$b^{3/4}f^{-1/4}b_1^{-1/2} \le b^{3/4}f^{-1/4}b_1^{-1/2} \oplus b^{-3/4}f^{-3/4}b_1^{1/2}e \oplus b^{1/4}f^{1/4}b_1^{-3/2}g \le v \le$$
$$\le v \le (b^{-1/4}f^{-1/4}b_1^{-1/2}d \oplus b^{-3/4}f^{1/4}b_1^{1/2} \oplus b^{1/4}f^{1/4}b_1^{-3/2}h)^{-1} \le b^{3/4}f^{-1/4}b_1^{-1/2},$$

откуда следует, что $v = b^{3/4}f^{-1/4}b_1^{-1/2}$.

Применяя такие же рассуждения, находим, что при $a_1 = d^{1/2}e^{1/2}$ выполняется равенство $v = d^{-3/4}e^{1/4}b_1^{1/2}$.

Случай $\mu = a_1^{2/3}d_1^{1/3}$

Предположим, что $\mu = a_1^{2/3}d_1^{1/3}$. В этом случае $u = a_1^{2/3}d_1^{-2/3}$, а двойное неравенство (2.29) для v можно записать в виде

$$a_1^{-2/3}d_1^{-1/3}(b \oplus a_1^{-2/3}d_1^{2/3}e \oplus a_1^{2/3}d_1^{-2/3}g) \le$$
$$\le v \le a_1^{2/3}d_1^{1/3}(d \oplus a_1^{-2/3}d_1^{2/3}f \oplus a_1^{2/3}d_1^{-2/3}h)^{-1}.$$

Рассмотрим все значения, которые может принимать a_1, определенное по формулам (2.27). Найдем соответствующие представления для v и μ.

Пусть $a_1 = b^{1/2}f^{1/2}$.

Двойное неравенство для v в этом случае преобразуется к виду

$$b^{-1/3}f^{-1/3}d_1^{-1/3}(b \oplus b^{-1/3}f^{-1/3}d_1^{2/3}e \oplus b^{1/3}f^{1/3}d_1^{-2/3}g) \le v \le$$
$$\le v \le b^{1/3}f^{1/3}d_1^{1/3}(d \oplus b^{-1/3}f^{-1/3}d_1^{2/3}f \oplus b^{1/3}f^{1/3}d_1^{-2/3}h)^{-1},$$

$$b^{2/3}f^{-1/3}d_1^{-1/3} \le b^{2/3}f^{-1/3}d_1^{-1/3} \oplus b^{-2/3}f^{-2/3}d_1^{1/3}e \oplus d_1^{-1}g \le v \le$$
$$\le v \le (b^{-1/3}f^{-1/3}d_1^{-1/3}d \oplus b^{-2/3}f^{1/3}d_1^{1/3} \oplus d_1^{-1}h)^{-1} \le b^{2/3}f^{-1/3}d_1^{-1/3},$$

откуда следует, что $v = b^{2/3}f^{-1/3}d_1^{-1/3}$.

Повторим рассуждения для случая $a_1 = d^{1/2}e^{1/2}$ и получим равенство $v = d^{-2/3}e^{1/3}d_1^{1/3}$.

Случай $\mu = b_1^{2/3}c_1^{1/3}$

Предположим, что $\mu = b_1^{2/3}c_1^{1/3}$. В этом случае $u = b_1^{-2/3}c_1^{2/3}$, а двойное неравенство (2.29) для v можно записать в виде

$$b_1^{-2/3}c_1^{-1/3}(b \oplus b_1^{2/3}c_1^{-2/3}e \oplus b_1^{-2/3}c_1^{2/3}g) \leq v \leq$$
$$\leq v \leq b_1^{2/3}c_1^{1/3}(d \oplus b_1^{2/3}c_1^{-2/3}f \oplus b_1^{-2/3}c_1^{2/3}h)^{-1}.$$

Рассмотрим все значения, которые может принимать b_1, определенное по формулам (2.27). Найдем соответствующие представления для v и μ.

Пусть $b_1 = b^{1/2}h^{1/2}$.

Двойное неравенство для v в этом случае преобразуется к виду

$$b^{-1/3}h^{-1/3}c_1^{-1/3}(b \oplus b^{1/3}h^{1/3}c_1^{-2/3}e \oplus b^{-1/3}h^{-1/3}c_1^{2/3}g) \leq v \leq$$
$$\leq v \leq b^{1/3}h^{1/3}c_1^{1/3}(d \oplus b^{1/3}h^{1/3}c_1^{-2/3}f \oplus b^{-1/3}h^{-1/3}c_1^{2/3}h)^{-1},$$

$$b^{2/3}h^{-1/3}c_1^{-1/3} \leq b^{2/3}h^{-1/3}c_1^{-1/3} \oplus c_1^{-1}e \oplus b^{-2/3}h^{-2/3}c_1^{1/3}g \leq v \leq$$
$$\leq v \leq (b^{-1/3}h^{-1/3}c_1^{-1/3}d \oplus c_1^{-1}f \oplus b^{-2/3}h^{1/3}c_1^{1/3})^{-1} \leq b^{2/3}h^{-1/3}c_1^{-1/3},$$

откуда следует, что $v = b^{2/3}h^{-1/3}c_1^{-1/3}$.

В случае, если $b_1 = d^{1/2}g^{1/2}$ аналогично можно получить $v = d^{-2/3}g^{1/3}c_1^{1/3}$.

Случай $\mu = c_1^{1/2}d_1^{1/2}$

Предположим, что $\mu = c_1^{1/2}d_1^{1/2}$. В этом случае $u = c_1^{1/2}d_1^{-1/2}$, а двойное неравенство (2.29) для v можно записать в виде

$$c_1^{-1/2}d_1^{-1/2}(b \oplus c_1^{-1/2}d_1^{1/2}e \oplus c_1^{1/2}d_1^{-1/2}g) \leq v \leq$$
$$\leq v \leq c_1^{1/2}d_1^{1/2}(d \oplus c_1^{-1/2}d_1^{1/2}f \oplus c_1^{1/2}d_1^{-1/2}h)^{-1}.$$

Рассмотрим все значения, которые могут принимать c_1 и d_1, определенное по формулам (2.27). Найдем соответствующие представления для v и μ.

Пусть $c_1 = e^{1/2}f^{1/2}$.

Двойное неравенство для v в этом случае преобразуется к виду

$$
\begin{aligned}
e^{-1/4}f^{-1/4}d_1^{-1/2}(b \oplus e^{-1/4}f^{-1/4}d_1^{1/2}e \oplus e^{1/4}f^{1/4}d_1^{-1/2}g) \leq v \leq \\
\leq v \leq e^{1/4}f^{1/4}d_1^{1/2}(d \oplus e^{-1/4}f^{-1/4}d_1^{1/2}f \oplus e^{1/4}f^{1/4}d_1^{-1/2}h)^{-1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{1/2}f^{-1/2} \leq e^{-1/4}f^{-1/4}d_1^{-1/2}b \oplus e^{1/2}f^{-1/2} \oplus d_1^{-1}g \leq v \leq \\
\leq v \leq (e^{-1/4}f^{-1/4}d_1^{-1/2}d \oplus e^{-1/2}f^{1/2} \oplus d_1^{-1}h)^{-1} \leq e^{1/2}f^{-1/2},
\end{aligned}
$$

откуда следует, что $v = e^{1/2}f^{-1/2}$.

Рассмотрим случай $d_1 = g^{1/2}h^{1/2}$. Проведем аналогичные рассуждения и получим $v = g^{1/2}h^{-1/2}$.

Пусть $c_1 = a$, $d_1 = c$.

Двойное неравенство для v в этом случае преобразуется к следующему виду, записанному в параметрической форме:

$$
v = (a^{-1/2}c^{-1/2}b \oplus a^{-1}e \oplus c^{-1}g)^{1-\alpha}(a^{-1/2}c^{-1/2}d \oplus a^{-1}f \oplus c^{-1}h)^{-\alpha} \quad 0 \leq \alpha \leq 1.
$$

Случай $\mu = e_1$

Пусть сначала $\mu = b^{1/2}d^{1/2}$. Тогда двойное неравенство (2.29) для v можно записать следующим образом:

$$
b^{-1/2}d^{-1/2}(b \oplus eu^{-1} \oplus gu) \leq v \leq b^{1/2}d^{1/2}(d \oplus fu^{-1} \oplus hu)^{-1}
$$

При этом для выражений слева и справа выполняются неравенства

$$
b^{1/2}d^{-1/2} \leq b^{-1/2}d^{-1/2}b \oplus b^{-1/2}d^{-1/2}eu^{-1} \oplus b^{-1/2}d^{-1/2}gu,
$$

$$
(b^{-1/2}d^{-1/2}d \oplus b^{-1/2}d^{-1/2}fu^{-1} \oplus b^{-1/2}d^{-1/2}hu)^{-1} \leq b^{1/2}d^{-1/2}.
$$

Отсюда можно сделать вывод, что если $\mu = b^{1/2}d^{1/2}$, то выполняется равенство $v = b^{1/2}d^{-1/2}$.

Теперь пусть $\mu = f^{1/2}g^{1/2}$, тогда проводя аналогичные рассуждения получим $v = f^{-1/2}g^{1/2}u$, где

$$u = (a_1^2 f^{-1}g^{-1} \oplus c_1 f^{-1/2}g^{-1/2})^{1-\alpha}(b_1^2 f^{-1}g^{-1} \oplus d_1 f^{-1/2}g^{-1/2})^{-\alpha}, \qquad 0 \le \alpha \le 1.$$

Если в качестве μ выбрать $\mu = e^{1/2}h^{1/2}$, то, повторяя рассуждения выше, можно получить равенство $v = e^{1/2}h^{-1/2}u^{-1}$, где

$$u = (a_1^2 e^{-1}h^{-1} \oplus c_1 e^{-1/2}h^{-1/2})^{1-\alpha}(b_1^2 e^{-1}h^{-1} \oplus d_1 e^{-1/2}h^{-1/2})^{-\alpha}, \qquad 0 \le \alpha \le 1.$$

Пусть $\mu = k$. Тогда двойные неравенства (2.29) для s и (2.15) для u можно записать следующим образом с использованием параметров $0 \le \alpha \le 1, 0 \le \beta \le 1$ в параметрической форме:

$$u = (a_1^2 k^{-2} \oplus c_1 k^{-1})^{1-\alpha}(b_1^2 k^{-2} \oplus d_1 k^{-1})^{-\alpha},$$

$$v = (bk^{-1} \oplus k^{-1}eu^{-1} \oplus k^{-1}gu)^{1-\beta}(k^{-1}d \oplus k^{-1}fu^{-1} \oplus k^{-1}hu)^{-\beta};$$

Исследование этого случая завершает доказательство теоремы.

2.2.5 Решение задачи с тремя переменными

Пусть заданы числа $a,b,c,d,e,f,g,h > \mathbb{0}$. Требуется найти ненулевые решения $u, v, w \in \mathbb{X}$ задачи

$$\begin{aligned} \min \quad & au^{-1}v^{-1}w^{-1} \oplus bu^{-1}v^{-1}w \oplus cu^{-1}vw^{-1} \oplus du^{-1}vw \oplus \\ & \oplus euv^{-1}w^{-1} \oplus fuv^{-1}w \oplus guvw^{-1} \oplus huvw. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Следующий результат описывает все решения рассматриваемой задачи.

Теорема 7. *Введем обозначения*

$$\begin{aligned} & a_1 = a^{1/2}d^{1/2} \oplus b^{1/2}c^{1/2}, \qquad b_1 = a^{1/2}f^{1/2} \oplus b^{1/2}e^{1/2}, \\ & c_1 = e^{1/2}h^{1/2} \oplus f^{1/2}g^{1/2}, \qquad d_1 = c^{1/2}h^{1/2} \oplus d^{1/2}g^{1/2}, \\ & e_1 = a^{1/2}b^{1/2}, \qquad f_1 = c^{1/2}d^{1/2}, \qquad g_1 = e^{1/2}f^{1/2}, \\ & h_1 = g^{1/2}h^{1/2}, \qquad k_1 = a^{1/2}h^{1/2} \oplus b^{1/2}g^{1/2} \oplus c^{1/2}f^{1/2} \oplus d^{1/2}e^{1/2}, \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}
&a_2 = b_1^{1/2} f_1^{1/2} \oplus d_1^{1/2} e_1^{1/2}, \qquad b_2 = b_1^{1/2} h_1^{1/2} \oplus d_1^{1/2} g_1^{1/2},\\
&c_2 = e_1^{1/2} f_1^{1/2} \oplus a_1, \qquad d_2 = g_1^{1/2} h_1^{1/2} \oplus c_1,\\
&e_2 = b_1^{1/2} d_1^{1/2} \oplus f_1^{1/2} g_1^{1/2} \oplus e_1^{1/2} h_1^{1/2} \oplus k_1.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Тогда минимум в задаче (2.31) *равен*

$$\mu = a_2^{1/2} b_2^{1/2} \oplus a_2^{2/3} d_2^{1/3} \oplus b_2^{2/3} c_2^{1/3} \oplus c_2^{1/2} d_2^{1/2} \oplus e_2$$

и справедливы следующие утверждения:

1) *если* $\mu = a_1^{1/2} b_1^{1/2}$, *то*

$$\begin{aligned}
u &= a_2 b_2^{-1},\\
v &= \begin{cases} b_1^{3/4} f_1^{-1/4} b_2^{-1/2}, & \text{если } a_2 = b_1^{1/2} f_1^{1/2},\\ d_1^{-3/4} e_1^{1/4} b_2^{1/2}, & \text{если } a_2 = d_1^{1/2} e_1^{1/2}, \end{cases}\\
w &= (\mu^{-1} a u^{-1} v^{-1} \oplus \mu^{-1} c u^{-1} v \oplus \mu^{-1} e u v^{-1} \oplus \mu^{-1} g u v)^{1-\alpha} \otimes\\
&\otimes (\mu^{-1} b u^{-1} v^{-1} \oplus \mu^{-1} d u^{-1} v \oplus \mu^{-1} f u v^{-1} \oplus \mu^{-1} h u v)^{-\alpha};
\end{aligned}$$

2) *если* $\mu = a_2^{2/3} d_2^{1/3}$, *то*

$$\begin{aligned}
u &= a_2^{2/3} d_2^{-2/3},\\
v &= \begin{cases} b_1^{2/3} f_1^{-1/3} d_2^{-1/3}, & \text{если } a_2 = b_1^{1/2} f_1^{1/2},\\ d_1^{-2/3} e_1^{1/3} d_2^{1/3}, & \text{если } a_2 = d_1^{1/2} e_1^{1/2}, \end{cases}\\
w &= (\mu^{-1} a u^{-1} v^{-1} \oplus \mu^{-1} c u^{-1} v \oplus \mu^{-1} e u v^{-1} \oplus \mu^{-1} g u v)^{1-\alpha} \otimes\\
&\otimes (\mu^{-1} b u^{-1} v^{-1} \oplus \mu^{-1} d u^{-1} v \oplus \mu^{-1} f u v^{-1} \oplus \mu^{-1} h u v)^{-\alpha};
\end{aligned}$$

3) *если* $\mu = b_2^{2/3} c_2^{1/3}$, *то*

$$u = b_2^{-2/3} c_2^{2/3},$$

$$v = \begin{cases} b_1^{2/3} h_1^{-1/3} c_2^{-1/3}, & \text{если } b_2 = b_1^{1/2} h_1^{1/2}, \\ d_1^{-2/3} g_1^{1/3} c_2^{1/3}, & \text{если } b_2 = d_1^{1/2} g_1^{1/2}, \end{cases}$$

$$w = (\mu^{-1} a u^{-1} v^{-1} \oplus \mu^{-1} c u^{-1} v \oplus \mu^{-1} e u v^{-1} \oplus \mu^{-1} g u v)^{1-\alpha} \otimes$$
$$\otimes (\mu^{-1} b u^{-1} v^{-1} \oplus \mu^{-1} d u^{-1} v \oplus \mu^{-1} f u v^{-1} \oplus \mu^{-1} h u v)^{-\alpha};$$

4) *если* $\mu = c_2^{1/2} d_2^{1/2}$, *то*

$$u = c_2^{1/2} d_2^{-1/2},$$

$$v = \begin{cases} e_1^{1/2} f_1^{-1/2}, & \text{если } c_2 = e_1^{1/2} f_1^{1/2}, \\ g_1^{1/2} h_1^{-1/2}, & \text{если } d_2 = g_1^{1/2} h_1^{1/2}, \\ (a_1^{-1/2} c_1^{-1/2} b_1 \oplus a_1^{-1} e_1 \oplus c_1^{-1} g_1)^{1-\alpha} \otimes & \\ \otimes (a_1^{-1/2} c_1^{-1/2} d_1 \oplus a_1^{-1} f_1 \oplus c_1^{-1} h_1)^{-\alpha}, & \text{если } c_2 = a_1, d_2 = c_1, \end{cases}$$

$$w = (\mu^{-1} a u^{-1} v^{-1} \oplus \mu^{-1} c u^{-1} v \oplus \mu^{-1} e u v^{-1} \oplus \mu^{-1} g u v)^{1-\beta} \otimes$$
$$\otimes (\mu^{-1} b u^{-1} v^{-1} \oplus \mu^{-1} d u^{-1} v \oplus \mu^{-1} f u v^{-1} \oplus \mu^{-1} h u v)^{-\beta};$$

5) *если* $\mu = e_2$, *то*

$$u = (a_2^2 e_2^{-2} \oplus c_2 e_2^{-1})^{1-\alpha} (b_2^2 e_2^{-2} \oplus d_2 e_2^{-1})^{-\alpha},$$

$$v = \begin{cases} b_1^{1/2} d_1^{-1/2}, & \text{если } e_2 = b_1^{1/2} d_1^{1/2}, \\ f_1^{-1/2} g_1^{1/2} u, & \text{если } e_2 = f_1^{1/2} g_1^{1/2}, \\ e_1^{1/2} h_1^{-1/2} u^{-1}, & \text{если } e_2 = e_1^{1/2} h_1^{1/2}, \end{cases}$$

$$w = (\mu^{-1} a u^{-1} v^{-1} \oplus \mu^{-1} c u^{-1} v \oplus \mu^{-1} e u v^{-1} \oplus \mu^{-1} g u v)^{1-\beta} \otimes$$
$$\otimes (\mu^{-1} b u^{-1} v^{-1} \oplus \mu^{-1} d u^{-1} v \oplus \mu^{-1} f u v^{-1} \oplus \mu^{-1} h u v)^{-\beta};$$

6) *если* $\mu = k_1$, *то*

$$
\begin{aligned}
u &= (a_2^2 k_1^{-2} \oplus c_2 k_1^{-1})^{1-\alpha} (b_2^2 k_1^{-2} \oplus d_2 k_1^{-1})^{-\alpha}, \\
v &= (b_1 k_1^{-1} \oplus k_1^{-1} e_1 u^{-1} \oplus k_1^{-1} g_1 u)^{1-\beta} (k_1^{-1} d_1 \oplus k_1^{-1} f_1 u^{-1} \oplus k_1^{-1} h_1 u)^{-\beta}, \\
w &= \begin{cases}
a^{1/2} h^{-1/2} u^{-1} v^{-1}, & \text{если } k_1 = a^{1/2} h^{1/2}, \\
c^{1/2} f^{-1/2} u^{-1} v, & \text{если } k_1 = c^{1/2} f^{1/2}, \\
d^{-1/2} e^{1/2} u v^{-1}, & \text{если } k_1 = d^{1/2} e^{1/2}, \\
b^{-1/2} g^{1/2} u v, & \text{если } k_1 = b^{1/2} g^{1/2},
\end{cases}
\end{aligned}
$$

где α, β *– вещественные числа, удовлетворяющие условиям* $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq 1$.

Доказательство. Обозначим минимум целевой функции в задаче (2.31) через μ. Тогда все решения задачи определяются неравенством

$$
a u^{-1} v^{-1} w^{-1} \oplus b u^{-1} v^{-1} w \oplus c u^{-1} v w^{-1} \oplus d u^{-1} v w \oplus e u v^{-1} w^{-1} \oplus
$$

$$
\oplus f u v^{-1} w \oplus g u v w^{-1} \oplus h u v w \leq \mu.
$$

Полученное неравенство эквивалентно системе

$$
\begin{aligned}
a u^{-1} v^{-1} w^{-1} &\leq \mu, & b u^{-1} v^{-1} w &\leq \mu, \\
c u^{-1} v w^{-1} &\leq \mu, & d u^{-1} v w &\leq \mu, \\
e u v^{-1} w^{-1} &\leq \mu, & f u v^{-1} w &\leq \mu, \\
g u v w^{-1} &\leq \mu, & h u v w &\leq \mu.
\end{aligned}
$$

Заметим, что перемножение соответствующих частей первого и восьмого неравенств дает неравенство $ah \leq \mu^2$, откуда с учетом условия леммы следует, что $\mu \geq a^{1/2} h^{1/2} > \mathbb{0}$.

Решим систему относительно w, считая u и v параметрами.

$$
\begin{aligned}
w &\geq \mu^{-1}au^{-1}v^{-1}, & w &\leq \mu b^{-1}uv,\\
w &\geq \mu^{-1}cu^{-1}v, & w &\leq \mu d^{-1}uv^{-1},\\
w &\geq \mu^{-1}euv^{-1}, & w &\leq \mu f^{-1}u^{-1}v,\\
w &\geq \mu^{-1}guv, & w &\leq \mu h^{-1}u^{-1}v^{-1}.
\end{aligned}
$$

Записывая правую и левую часть неравенства для w получим

$$
\begin{multline}
\mu^{-1}(au^{-1}v^{-1} \oplus cu^{-1}v \oplus euv^{-1} \oplus guv) \leq w \leq \\
\leq w \leq \mu(bu^{-1}v^{-1} \oplus du^{-1}v \oplus fuv^{-1} \oplus huv)^{-1}. \quad (2.34)
\end{multline}
$$

Множество значений w, удовлетворяющих этому неравенству, непусто, если выполняется условие

$$
(au^{-1}v^{-1} \oplus cu^{-1}v \oplus euv^{-1} \oplus guv)(bu^{-1}v^{-1} \oplus du^{-1}v \oplus fuv^{-1} \oplus huv) \leq \mu^2.
$$

Раскроем скобки слева и извлечем квадратный корень из обоих частей неравенства. Тогда полученная система равносильна неравенству

$$
\begin{multline}
\mu \geq (a^{1/2}d^{1/2} \oplus b^{1/2}c^{1/2})u^{-1} \oplus (a^{1/2}f^{1/2} \oplus b^{1/2}e^{1/2})v^{-1} \oplus \\
\oplus (e^{1/2}h^{1/2} \oplus f^{1/2}g^{1/2})u \oplus (c^{1/2}h^{1/2} \oplus d^{1/2}g^{1/2})v \oplus \\
\oplus a^{1/2}b^{1/2}u^{-1}v^{-1} \oplus c^{1/2}d^{1/2}u^{-1}v \oplus e^{1/2}f^{1/2}uv^{-1} \oplus g^{1/2}h^{1/2}uv \oplus \\
\oplus (a^{1/2}h^{1/2} \oplus c^{1/2}f^{1/2} \oplus d^{1/2}e^{1/2} \oplus b^{1/2}g^{1/2}).
\end{multline}
$$

Заметим, что переход от исходной задачи к этому неравенству, в котором μ обозначает минимум целевой функции, включал только эквивалентные преобразования. Из этого следует, что полученное неравенство задает точную нижнюю границу для μ, выраженную через u и v, а потому необходимо решить задачу оптимизации следующего вида.

$$
\begin{multline}
\min \quad (a^{1/2}d^{1/2} \oplus b^{1/2}c^{1/2})u^{-1} \oplus (a^{1/2}f^{1/2} \oplus b^{1/2}e^{1/2})v^{-1} \oplus \\
\oplus (e^{1/2}h^{1/2} \oplus f^{1/2}g^{1/2})u \oplus (c^{1/2}h^{1/2} \oplus d^{1/2}g^{1/2})v \oplus
\end{multline}
$$

$$\oplus a^{1/2}b^{1/2}u^{-1}v^{-1} \oplus c^{1/2}d^{1/2}u^{-1}v \oplus e^{1/2}f^{1/2}uv^{-1} \oplus$$
$$\oplus g^{1/2}h^{1/2}uv \oplus (a^{1/2}h^{1/2} \oplus c^{1/2}f^{1/2} \oplus d^{1/2}e^{1/2} \oplus b^{1/2}g^{1/2}). \quad (2.35)$$

С учетом обозначений (2.32) задача (2.35) может быть записана в более короткой форме

$$\min \quad a_1u^{-1} \oplus b_1v^{-1} \oplus c_1u \oplus d_1v \oplus e_1u^{-1}v^{-1} \oplus f_1u^{-1}v \oplus g_1uv^{-1} \oplus h_1uv \oplus k_1.$$

Решение такой задачи предложено в теореме 6. Если воспользоваться условием (2.33), то минимум в задаче (2.31) равен $\mu = a_2^{1/2}b_2^{1/2} \oplus a_2^{2/3}d_2^{1/3} \oplus b_2^{2/3}c_2^{1/3} \oplus \oplus c_2^{1/2}d_2^{1/2} \oplus e_2$, и справедливы следующие утверждения:

1) если $\mu = a_2^{1/2}b_2^{1/2}$, то $u = a_2b_2^{-1}$ и

$$v = \begin{cases} b_1^{3/4}f_1^{-1/4}b_2^{-1/2}, & \text{если } a_2 = b_1^{1/2}f_1^{1/2}, \\ d_1^{-3/4}e_1^{1/4}b_2^{1/2}, & \text{если } a_2 = d_1^{1/2}e_1^{1/2}; \end{cases}$$

2) если $\mu = a_2^{2/3}d_2^{1/3}$, то $u = a_2^{2/3}d_2^{-2/3}$ и

$$v = \begin{cases} b_1^{2/3}f_1^{-1/3}d_2^{-1/3}, & \text{если } a_2 = b_1^{1/2}f_1^{1/2}, \\ d_1^{-2/3}e_1^{1/3}d_2^{1/3}, & \text{если } a_2 = d_1^{1/2}e_1^{1/2}; \end{cases}$$

3) если $\mu = b_2^{2/3}c_2^{1/3}$, то $u = b_2^{-2/3}c_2^{2/3}$ и

$$v = \begin{cases} b_1^{2/3}h_1^{-1/3}c_2^{-1/3}, & \text{если } b_2 = b_1^{1/2}h_1^{1/2}, \\ d_1^{-2/3}g_1^{1/3}c_2^{1/3}, & \text{если } b_2 = d_1^{1/2}g_1^{1/2}; \end{cases}$$

4) если $\mu = c_2^{1/2}d_2^{1/2}$, то $u = c_2^{1/2}d_2^{-1/2}$ и

$$v = \begin{cases} e_1^{1/2}f_1^{-1/2}, & \text{если } c_2 = e_1^{1/2}f_1^{1/2}, \\ g_1^{1/2}h_1^{-1/2}, & \text{если } d_2 = g_1^{1/2}h_1^{1/2}, \\ (a_1^{-1/2}c_1^{-1/2}b_1 \oplus a_1^{-1}e_1 \oplus c_1^{-1}g_1)^{1-\alpha} \otimes & \\ \otimes (a_1^{-1/2}c_1^{-1/2}d_1 \oplus a_1^{-1}f_1 \oplus c_1^{-1}h_1)^{-\alpha}, & \text{если } c_2 = a_1, d_2 = c_1; \end{cases}$$

5) если $\mu = e_2$, то $u = (a_2^2 e_2^{-2} \oplus c_2 e_2^{-1})^{1-\alpha} (b_2^2 e_2^{-2} \oplus d_2 e_2^{-1})^{-\alpha}$ и

$$v = \begin{cases} b_1^{1/2} d_1^{-1/2}, & \text{если } e_2 = b_1^{1/2} d_1^{1/2}, \\ f_1^{-1/2} g_1^{1/2} u, & \text{если } e_2 = f_1^{1/2} g_1^{1/2}, \\ e_1^{1/2} h_1^{-1/2} u^{-1}, & \text{если } e_2 = e_1^{1/2} h_1^{1/2}, \\ (b_1 k_1^{-1} \oplus k_1^{-1} e_1 u^{-1} \oplus k_1^{-1} g_1 u)^{1-\beta} \otimes & \\ \otimes (k_1^{-1} d_1 \oplus k_1^{-1} f_1 u^{-1} \oplus k_1^{-1} h_1 u)^{-\beta}, & \text{если } e_2 = k_1, \end{cases}$$

где α, β – вещественные числа, удовлетворяющие условиям $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq 1$. Во всех случаях кроме последнего формулу для w в виде двойного неравенства (2.34) запишем с использованием параметра $0 \leq \beta \leq 1$ следующим образом:

$$w = (\mu^{-1} a u^{-1} v^{-1} \oplus \mu^{-1} c u^{-1} v \oplus \mu^{-1} e u v^{-1} \oplus \mu^{-1} g u v)^{1-\beta} \otimes \\ \otimes (\mu^{-1} b u^{-1} v^{-1} \oplus \mu^{-1} d u^{-1} v \oplus \mu^{-1} f u v^{-1} \oplus \mu^{-1} h u v)^{-\beta}.$$

Покажем, что в последнем случае w может быть записано без использования дополнительного параметра.

Пусть $\mu = k_1 = a^{1/2} h^{1/2}$. Тогда двойные неравенства (2.34) для w можно записать следующим образом:

$$a^{1/2} h^{-1/2} u^{-1} v^{-1} \leq a^{-1/2} h^{-1/2} a u^{-1} v^{-1} \oplus a^{-1/2} h^{-1/2} c u^{-1} v \oplus \\ \oplus a^{-1/2} h^{-1/2} e u v^{-1} \oplus a^{-1/2} h^{-1/2} g u v \leq w \leq (a^{-1/2} h^{-1/2} b u^{-1} v^{-1} \oplus a^{-1/2} h^{-1/2} d u^{-1} v \oplus \\ \oplus a^{-1/2} h^{-1/2} f u v^{-1} \oplus a^{-1/2} h^{-1/2} h u v)^{-1} \leq a^{1/2} h^{-1/2} u^{-1} v^{-1},$$

что означает $w = a^{1/2} h^{-1/2} u^{-1} v^{-1}$.

Аналогичным путем устанавливаем, что при $\mu = k_1 = c^{1/2} f^{1/2}$ выполняется равенство $w = c^{1/2} f^{-1/2} u^{-1} v$, при $\mu = k_1 = d^{1/2} e^{1/2}$ – равенство $w = d^{-1/2} e^{1/2} u v^{-1}$, при $\mu = k_1 = b^{1/2} g^{1/2}$ – равенство $w = b^{-1/2} g^{1/2} u v$.

Рассмотрение этих случаев завершает доказательство.

В главе был рассмотрен ряд задач тропической оптимизации без ограничений и с ограничениями на допустимое решение. Предложены два подхода:

матричный, основная идея которого состоит в записи расширенной задачи оптимизации в векторной форме, а затем применения экстремальных свойств идемпотентного спектрального радиуса матрицы, а также скалярный, при котором задача оптимизации сводится к системе параметризованных неравенств и последующего нахождения всех ее решений. Практическое применение результатов, полученных в главе будет изучено в следующем разделе диссертационной работы.

Глава 3

Решение задач размещения точечного объекта на плоскости с прямоугольной метрикой и ее приложения

3.1 История развития задачи

На практике большое значение имеет решение задач выбора мест размещения объектов пространственно распределенных информационных, социальных, экономических и иных систем. В качестве примеров можно привести такие задачи, как выбор мест размещения маршрутизаторов сети передачи данных, центров обработки информации в распределенных вычислительных сетях, перегрузочных узлов на транспортной сети, обоснование распределения на некоторой территории элементов производственного комплекса, расчет оптимального размещения в городе магазинов шаговой доступности и др. Задачи размещения объектов в пространстве образуют широкий класс задач оптимизации. Задачи размещения можно разделить по способу задания ограничений и по выбору критерия оптимальности. Основная цель при решении состоит в определении оптимального места расположения нового объекта с учетом уже имеющихся.

Изучение задач размещения началось, по-видимому, в 1909 году, когда Альфред Вебер [104] предложил решить задачу по определению местонахождения отдельного склада. При этом было необходимо минимизировать суммарное расстояние между складом и несколькими клиентами. В середине 1960-х годов теория размещения объектов продолжила свое развитие. Наряду с большим количеством работ в этой области стоит отметить статью С. Хакими [105]. В этой работе был предложен способ определения местоположения полицейских участков в системе шоссе. При описании задачи размещения следует рассматривать два множества: объекты, которые уже расположены в точках или на маршрутах в области исследования, и объекты, для которых оптимальное место расположения следует найти. Также нужно задать параметры пространства, в котором объекты находятся, и выбрать метрику, в которой необходимо оценивать и оптимизировать расстояние или время.

Среди публикаций, посвященных задачам размещения, можно отметить работу Х. Эйселта и В. Марианова [106], в которой приведен обзор задач размещения. В работе Р. Френсиса [107] изучены часто встречающиеся типы задач размещения одного или нескольких объектов на плоскости. Примеры решения задач размещения на графах предложены в работах П. Мирчандэни и Р. Фрэнсиса [108] и М. Даскина [109]. В работах З. Дрезнера [110], а также С. Никела и Ж. Пуэрто [111] проведены обзоры задач размещения и варианты их решения. Традиционно рассматривают два типа задач размещения: минисуммные (минимизируется сумма расстояний) [112, 113] и минимаксные (минимизируется максимальное расстояние) задачи размещения [114, 115].

Для описания и решения минимаксных задач размещения с прямоугольной и чебышевской метрикой достаточно полезным оказывается применение методов тропической оптимизации. Такие задачи могут быть сформулированы в терминах одного из идемпотентных полуколец – $(\max,+)$-алгебры. Обзор тропических задач оптимизации приведен в работах В. Н. Колокольцова [116] и Н. К. Кривулина [49]. Одномерная задача размещения на графах рассмотрена в работах [20, 21]. При этом задача сводится к минимизации рациональной функции в терминах тропической математики. Однако, полученные решения не удается записать в многомерном случае, что сужает область применения результатов.

Решение задач пространственного размещения объектов зависят от метрики, в которой вычисляется расстояние между объектами. Так в работе [71] предложен метод решения различных задач размещения в чебышевской метрике на основе спектральной теории матриц тропической математики.

В этом разделе будет изучена минимаксная задача размещения на плоскости с прямоугольной метрикой (задача Ролса), которая может быть представлена в терминах идемпотентной алгебры. Подход к решению основывается на преобразовании задач размещения к экстремальным задачам, решение которых описанно в главе 2.

В ходе исследования были получены аналитические зависимости, предлагающие на основе известных данных о размещении обслуживаемых объектов (групп населения, камер видеонаблюдения или иных источников потока информации, пожароопасных объектов и др.) найти оптимальные зоны размещения обслуживающих объектов (например, маршрутизаторов, серверов, центров управления систем видеонаблюдения и т.д.). При этом требуется разместить новый обслуживающий объект так, чтобы минимизировать расстояние от этого объекта до самого удаленного из обслуживаемых объектов.

Важно подчеркнуть, что полученные результаты позволяют указать не только одну точку, где размещение будет оптимальным, а выбрать зону, поле оптимального размещения. Это весьма важно с прикладных позиций, т.к. позволяет учесть при проектировании возможность использования, например, земельных участков или зданий и сооружений.

Кроме того, важным преимуществом исследуемого подхода является простота итоговых формульных зависимостей, что позволяет легко использовать его на практике при решении задач пространственного планирования при создании и развитии информационных и иных систем.

3.2 Постановка задачи размещения центрального сервера управления в сети локальных коммуникаций

Решение задач размещения точечного объекта на плоскости (задача 1-центра) находит применение при оптимизации процесса сбора, обработки и хранения информации. Рассмотрим в качестве примера задачу, появляющуюся при размещении аппаратного комплекса обработки интернет-трафика (центрального сервера управления сетью локальных коммуникаций), в условиях городской инфраструктуры.

Пусть необходимо собирать, обрабатывать и хранить информацию, поступающую от m клиентов локальной сети. Координаты этих клиентов задаются векторами $\boldsymbol{r}_i = (r_{1i}, r_{2i})^T \in \mathbb{R}^2$, где $i = 1, \dots, m$. Задача размещения состоит в том, чтобы найти оптимальное местоположение центрального сервера, которое задано неизвестным вектором $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$. При этом, необходимо минимизировать расстояние от этого центра до самого дальнего клиента. Основная задача состоит в снижении величины затухания сигнала, которое прямо пропорционально зависит от расстояния (длины кабеля), что и оправдывает минимаксную постановку задачи.

Прокладка оптоволоконных и проводных сетей осуществляется вдоль уличной сети. Поэтому для описания и решения задач оптимального размещения может быть использована прямоугольная (манхэттенская метрика). При этом, по различным причинам (градостроительные регламенты, социальные ограничения, требования радиоэлектронной совместимости, соображения информационной безопасности и др.) могут возникать ограничения на допустимую область размещения.

Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ имеются два вектора $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)^T$ и $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)^T$. Расстояние между этими векторами в прямоугольной метрике вычисляется по формуле

$$\rho(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = |u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|.$$

Тогда задача 1-центра для сети локальных коммуникаций состоит в поиске минимума функции

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \max_{1 \le i \le m} (\rho(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{x}) + w_i) = \max_{1 \le i \le m} (|r_{1i} - x_1| + |r_{2i} - x_2| + w_i) = \phi(x_1, x_2),$$

которая определяет максимальное по всем i расстояние в прямоугольной метрике от центра управления системой (сервера) $\boldsymbol{x}$ до клиентов $\boldsymbol{r}_i$ с учетом дополнительного слагаемого w_i. Числа w_i могут отражать дополнительные затраты, связанные, например, с важностью объектов или с особенностями их внутренней планировки. В данной постановке задачи, эти числа могут иметь смысл высоты (вертикальной координаты) объекта.

В общем виде задачи размещения центра управления (сервера) локальной сетью принимает следующий вид:

$$\mu = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2} \phi(\boldsymbol{x}).$$

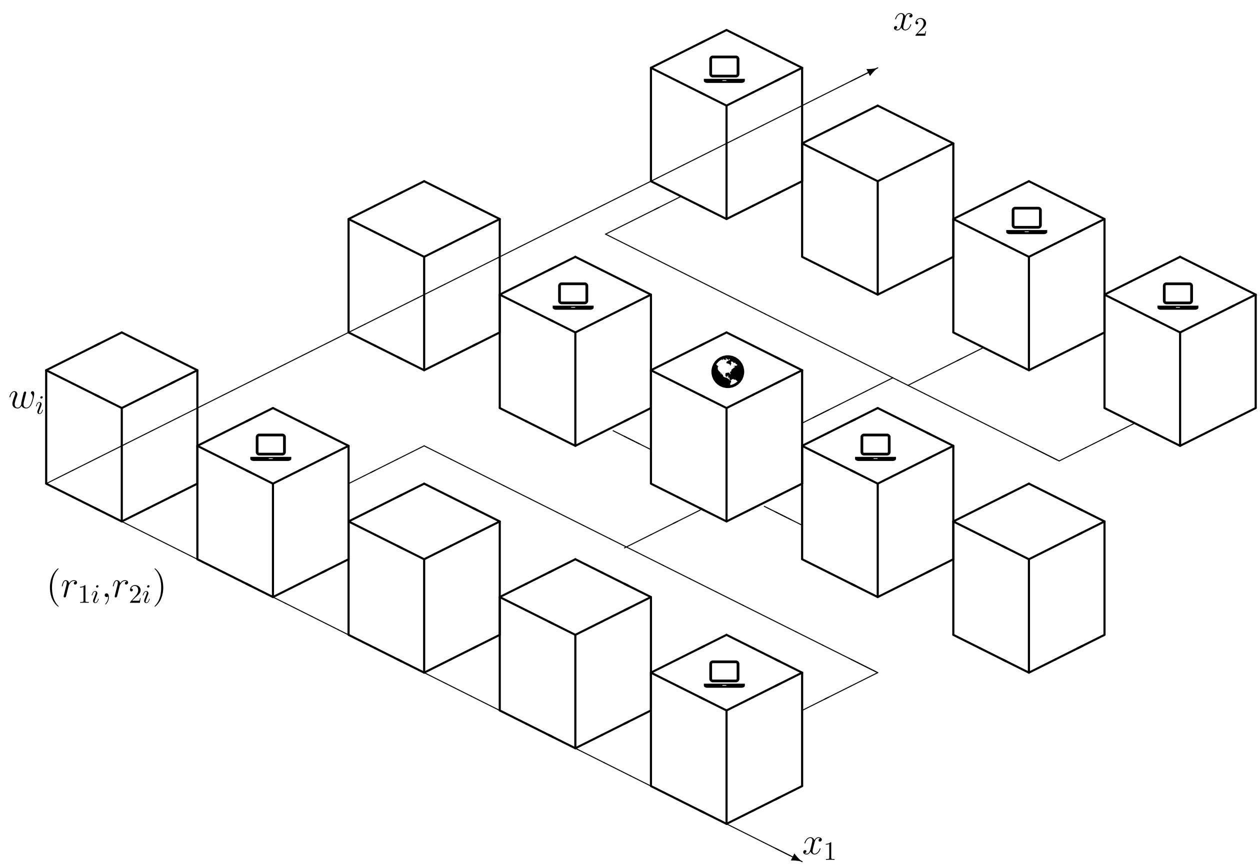

Рисунок 3.1 - Размещения центрального сервера управления в сети локальных коммуникаций

3.3 Постановка задачи размещения центра управления системой видеонаблюдения

Рассмотрим задачу размещения центра управления системой видеонаблюдения в здании (задача 1-центра). Пусть необходимо собирать, обрабатывать и хранить информацию от m видеокамер внутреннего и наружного наблюдения. Координаты этих объектов задаются векторами $\boldsymbol{r}_i = (r_{1i}, r_{2i}, r_{3i})^T \in \mathbb{R}^3$, где $i = 1, \ldots, m$. Задача размещения состоит в том, чтобы найти оптимальное положение центра управления, хранения и обработки информации, заданное вектором $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3)^T$.

Необходимо решить задачу минимизации расстояния от этого центра до наиболее удаленной камеры. При этом преследуется цель, состоящая в повышении качества информационного обмена за счет снижения уровня затухания сигнала, которое находится в прямой пропорциональной зависимости от длины кабеля (расстояния). Указанные моменты оправдывают минимаксную постановку задачи. В силу того, что кабели внутри одного этажа чаще всего прокладывают вдоль линий разделения пола, стен и потолка, а межэтажные перекрытия проходятся по вентиляционным шахтам, можно считать, что расстояние между любыми двумя объектами измеряется в прямоугольной метрике.

Пусть в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ имеются два вектора $\boldsymbol{u} = (u_1,u_2,u_3)^T$ и $\boldsymbol{v} = (v_1,v_2,v_3)^T$. Расстояние между этими векторами в прямоугольной метрике вычисляется по формуле

$$\rho(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = |u_1 - v_1| + |u_2 - v_2| + |u_3 - v_3|.$$

Тогда задача 1-центра для системы видеокамер состоит в поиски минимума функции

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \max_{1\le i\le m} (\rho(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{x})+w_i) = \max_{1\le i\le m} (|r_{1i}-x_1|+|r_{2i}-x_2|+|r_{3i}-x_3|+w_i) = \phi(x_1,x_2,x_3),$$

которая определяет максимальное по всем i расстояние в прямоугольной метрике от центра управления системой (сервера) видеонаблюдения $\boldsymbol{x}$ до видеокамер $\boldsymbol{r}_i$ с учетом дополнительного слагаемого w_i. Числа w_i могут отражать дополнительные затраты, связанные с важностью объекта.

В общем виде задача размещения центра управления системой видеонаблюдения принимает следующий вид:

$$\mu = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3} \phi(\boldsymbol{x}).$$

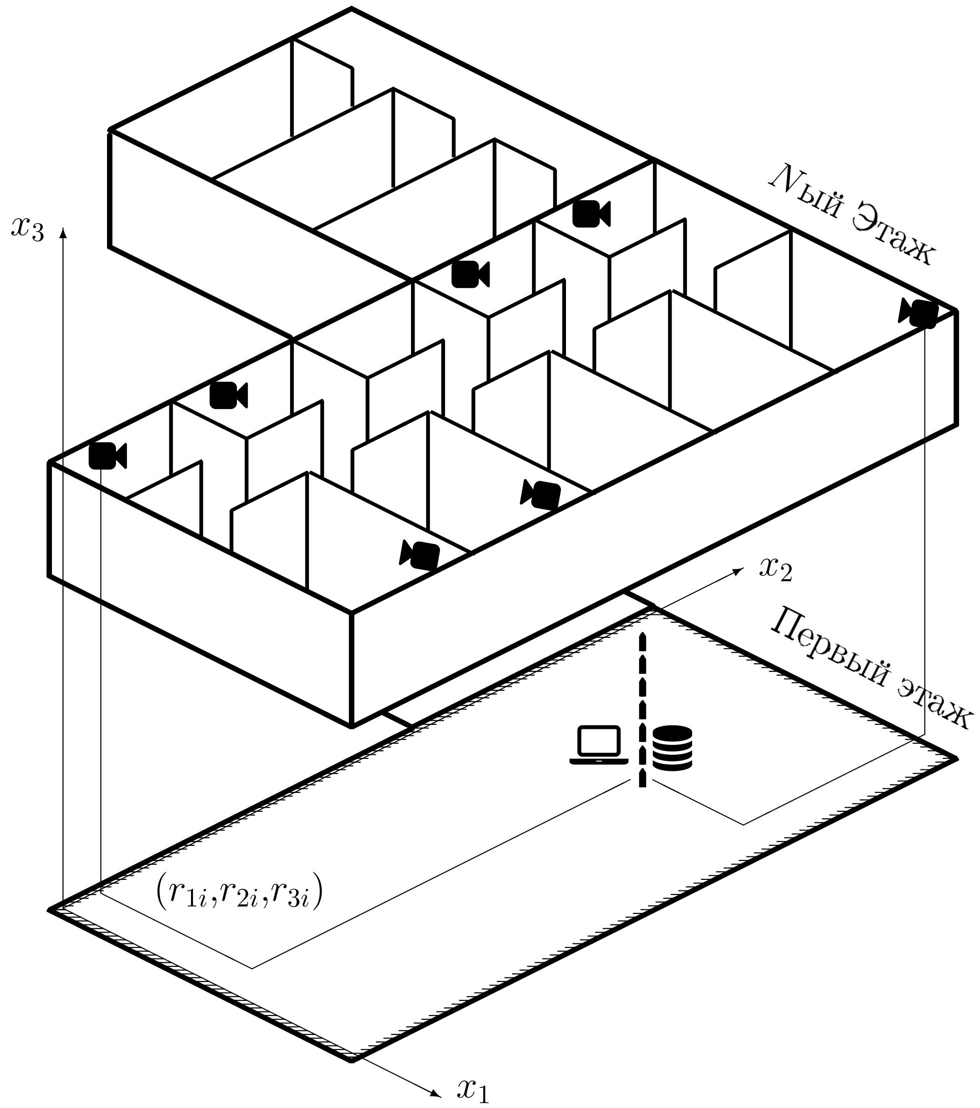

Рисунок 3.2 - Размещения центра управления системой видеонаблюдения в здании [1].

3.4 Постановка задачи размещения на плоскости

Рассмотрим минимаксную задачу размещения на плоскости с прямоугольной метрикой и ограничениями на допустимую область размещения. Предположим, что на множестве $\mathbb{R}^2$ задан набор точек и определено некоторое допустимое подмножество $S \subset \mathbb{R}^2$. Требуется разместить новую точку на множестве S так, чтобы минимизировать расстояние от этой точки до самой удаленной от нее из числа заданных точек.

Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ имеются два вектора $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2)^T$ и $\boldsymbol{y} = (y_1,y_2)^T$. Расстояние между этими векторами в прямоугольной метрике вычисляется по

формуле
$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

Рассмотрим набор точек $\boldsymbol{r}_i = (r_{1i},r_{2i})^T \in \mathbb{R}^2$ и чисел $w_i \in \mathbb{R}$, заданных для всех $i = 1,\ldots,m$. Для произвольного вектора $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2)^T$ введем функцию

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \max_{1\leq i\leq m}(\rho(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{x}) + w_i) = \max_{1\leq i\leq m}(|r_{1i} - x_1| + |r_{2i} - x_2| + w_i) = \phi(x_1,x_2),$$

которая определяет максимальное по всем i расстояние в прямоугольной метрике от точки $\boldsymbol{x}$ до точки $\boldsymbol{r}_i$ с учетом дополнительного слагаемого w_i.

Задача размещения, которую иногда называют задачей Ролса или задачей посыльного, состоит в том, чтобы найти все векторы $\boldsymbol{x}$, которые обеспечивают минимум
$$\min_{\boldsymbol{x}\in S} \ \phi(\boldsymbol{x}). \tag{3.1}$$

3.5 Решение задачи размещения на плоскости без ограничений

Существует геометрическое решение задачи (3.1) без ограничений на множество размещения [62,63], известной как задача Ролса или задача посыльного. Алгебраическое решение в терминах тропической математики было дано в работе [74], однако, оставалось неясным является ли оно полным.

Чтобы построить полное решение сначала представим задачу в терминах идемпотентного полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$. Прямоугольная метрика записывается следующим образом:

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (x_1^{-1}y_1 \oplus y_1^{-1}x_1)(x_2^{-1}y_2 \oplus y_2^{-1}x_2). \tag{3.2}$$

Целевая функция в задаче (3.1) может быть представлена в форме

$$\bigoplus_{i=1}^{m} w_i(x_1^{-1}r_{1i} \oplus r_{1i}^{-1}x_1)(x_2^{-1}r_{2i} \oplus r_{2i}^{-1}x_2) =$$
$$= ax_1^{-1}x_2^{-1} \oplus bx_1x_2^{-1} \oplus cx_1^{-1}x_2 \oplus dx_1x_2, \tag{3.3}$$

где после группировки членов использованы обозначения

$$a = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i} r_{2i}, \qquad b = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i}^{-1} r_{2i},$$
$$c = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i} r_{2i}^{-1}, \qquad d = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1}.$$

Тогда задача размещения (3.1) принимает вид

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2} \quad a x_1^{-1} x_2^{-1} \oplus b x_1 x_2^{-1} \oplus c x_1^{-1} x_2 \oplus d x_1 x_2. \tag{3.4}$$

Решение такой задачи предложено в теореме 2.

Теорема 8. *Минимум в задаче* (3.1) *равен*

$$\mu = (ad \oplus bc)^{1/2}$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \mu^{2\alpha-1}(a^{1-\alpha} b^{-\alpha} c^{1-\alpha} d^{-\alpha})^{1/2} \\ (a^{1-\alpha} b^{\alpha} c^{\alpha-1} d^{-\alpha})^{1/2} \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \alpha \le 1,$$

где

$$a = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i} r_{2i}, \qquad b = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i}^{-1} r_{2i},$$
$$c = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i} r_{2i}^{-1}, \qquad d = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1}.$$

Записывая общий результат в терминах обычных арифметических операций, получим полное решение исходной задачи размещения (3.1) в следующей форме.

Следствие 11. *Минимум в задаче* (3.1) *равен*

$$\mu = \max(a + d, b + c)/2$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} (2\alpha-1)\mu + (1-\alpha)(a+c)/2 - \alpha(b+d)/2 \\ (1-\alpha)(a-c)/2 - \alpha(d-b)/2 \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \alpha \le 1,$$

где

$$a = \max_{1\le i\le m}(w_i + r_{1i} + r_{2i}), \qquad b = \max_{1\le i\le m}(w_i - r_{1i} + r_{2i}),$$

$$c = \max_{1\le i\le m}(w_i + r_{1i} - r_{2i}), \qquad d = \max_{1\le i\le m}(w_i - r_{1i} - r_{2i}).$$

Рассмотрим пример, в котором описана задача размещения с числом заданных точек $m = 7$.

Пусть дан набор координат:

$$r_1 = (1,7), r_2 = (3,3), r_3 = (4,6), r_4 = (5,3), r_5 = (7,2), r_6 = (9,1), r_7 = (9,9).$$

Воспользуемся теоремой и получим результат.

Для начала вычислим

$$a = \max(8; 6; 10; 8; 9; 10; 18) = 18,$$

$$b = \max(6; 0; 2; -2; -5; -8; 0) = 6,$$

$$c = \max(-6; 0; -2; 2; 5; 8; 0) = 8,$$

$$d = \max(-8; -6; -10; -8; -9; -10; -18) = -6.$$

Пользуясь формулой для μ получаем:

$$\mu = \max(18 + (-6); 8 + 6)/2 = 7.$$

Теперь осталось подставить полученные значения в итоговую формулу.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 7(2\alpha-1) + (1-\alpha)(8+18)/2 - \alpha(6+(-6))/2 \\ (1-\alpha)(18-8)/2 - \alpha(-6-6)/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14\alpha - 7 + 13 - 13\alpha \\ 5 - 5\alpha + 6\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 6 \\ \alpha + 5 \end{pmatrix}.$$

Для любого значения $\alpha \in (0; 1)$. Результаты вычислений предложены на рисунке 3.3.

Если в качестве w_i в задаче выбрать набор

$$w_1 = 1, \quad w_2 = 3, \quad w_3 = 2, \quad w_4 = 2, \quad w_5 = 1, \quad w_6 = 1, \quad w_7 = 3,$$

то результат с учетом изменений можно видеть на рисунке 3.4.

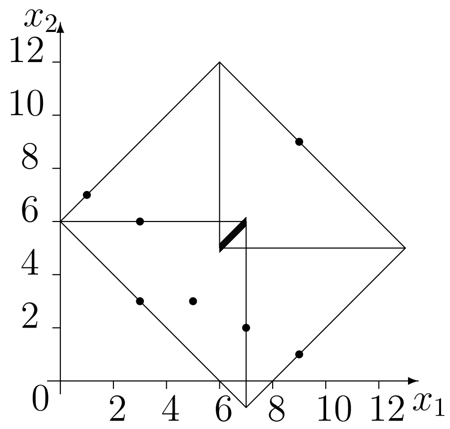

Рисунок 3.3 - Случай $w_i = 0$

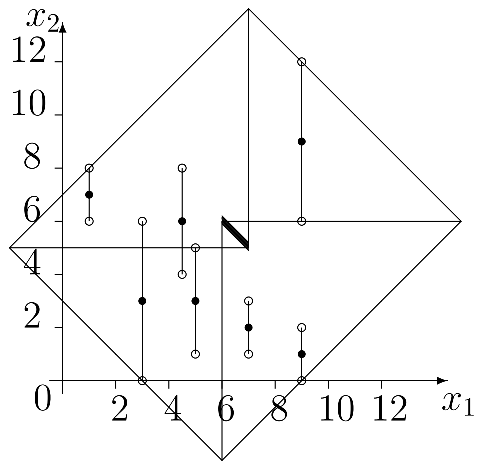

Рисунок 3.4 - Случай $w_i \neq 0$

3.6 Решение задач размещения на плоскости с ограничениями

3.6.1 Размещение на отрезке прямой

Для решения задачи при условии, что допустимое множество S задается на плоскости в виде отрезка прямой, применим разработанные выше методы. Для этого задачу размещения будем представлять в виде задачи тропической оптимизации с ограничениями, а затем решать с использованием результатов предыдущего раздела.

Сначала запишем целевую функцию задачи (3.1) в терминах идемпотентного полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$. Учитывая, что с помощью операций этого полуполя прямоугольную метрику для векторов $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2)^T$ и $\boldsymbol{y} = (y_1,y_2)^T$ можно представить в форме (3.2), а целевая функция задачи принимает вид (3.3).

Ниже решение задачи (3.1) будет получено для различных случаев расположения на плоскости прямой, на которой выполняется размещение.

Размещение на горизонтальной и вертикальной прямой

Предположим, что заданы числа $f,g,q \in \mathbb{R}$ при условии $f \leq g$. Рассмотрим задачу размещения на отрезке горизонтальной прямой, для которой определим множество

$$S = \{(x_1,x_2)^T \,| f \leq x_1 \leq g,\, x_2 = q\}. \tag{3.5}$$

Решение задачи приводит к следующему результату.

Лемма 1. *Минимум в задаче* (3.1) *при условии* (3.5) *равен*

$$\mu = a^{1/2}b^{1/2} \oplus ag^{-1} \oplus bf$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$x_1 = (\mu^{-1}a \oplus f)^{1-\alpha}(\mu^{-1}b \oplus g^{-1})^{-\alpha}, \qquad x_2 = q,$$

где α *– любое число, удовлетворяющее условию* $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$a = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i}(q^{-1}r_{2i} \oplus r_{2i}^{-1}q), \qquad b = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i}^{-1}(q^{-1}r_{2i} \oplus r_{2i}^{-1}q).$$

Доказательство. Запишем целевую функцию (3.1), используя введенные выше обозначения a и b, в следующем виде:

$$\phi(x_1,x_2) = \bigoplus_{i=1}^{m}(w_i r_{1i}(q^{-1}r_{2i} \oplus r_{2i}^{-1}q)x_1^{-1} \oplus w_i r_{1i}^{-1}(q^{-1}r_{2i} \oplus qr_{2i}^{-1})x_1) = ax_1^{-1} \oplus bx_1.$$

Теперь рассматриваемая задача сводится к задаче (2.12), в которой t заменяется на x_1. После применения следствия 4 получаем необходимое решение.

Представление решения в обычных обозначениях дает следующий результат.

Следствие 12. *Минимум в задаче* (3.1) *при условии* (3.5) *равен*

$$\mu = \max((a+b)/2, a-g, b+f)$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$x_1 = (1-\alpha)\max(-\mu+a, f) - \alpha\max(-\mu-b, -g), \qquad x_2 = q,$$

где α *– любое число, удовлетворяющее условию* $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$a = \max_{1\leq i\leq m}(w_i + r_{1i} + r_{2i} - q, w_i + r_{1i} - r_{2i} + q),$$
$$b = \max_{1\leq i\leq m}(w_i - r_{1i} + r_{2i} - q, w_i - r_{1i} - r_{2i} + q).$$

Заметим, что решение задачи размещения на отрезке вертикальной прямой при условии $S = \{(x_1, x_2)^T \,|x_1 = p,\ f \leq x_2 \leq g\}$, где $f, g, p \in \mathbb{R}$ – заданные числа, прямо получается из решения предыдущей путем замены x_1 на x_2, x_2 на x_1, а также q на p.

Размещение на прямой, наклоненной под углом $45°$

Перейдем к решению задачи размещения на отрезке прямой, наклоненной к горизонтальной оси координат под углом 45 градусов. Пусть заданы числа $f, g, p, q \in \mathbb{R}$, где $f \leq g$. Тогда отрезок прямой можно определить при помощи параметра t в виде

$$S = \{(x_1, x_2)^T \,|x_1 = p + t,\ x_2 = q + t,\ f \leq t \leq g\}. \tag{3.6}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Минимум в задаче* (3.1) *при условии* (3.6) *равен*

$$\mu = a^{1/2}b^{1/2} \oplus ag^{-2} \oplus bf^2 \oplus c$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$x_1 = p(\mu^{-1/2}a^{1/2} \oplus f)^{1-\alpha}(\mu^{-1/2}b^{1/2} \oplus g^{-1})^{-\alpha},$$

$$x_2 = q(\mu^{-1/2}a^{1/2} \oplus f)^{1-\alpha}(\mu^{-1/2}b^{1/2} \oplus g^{-1})^{-\alpha},$$

где α – любое число, удовлетворяющее условию $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$a = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i p^{-1} q^{-1} r_{1i} r_{2i}, \quad b = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i pq r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1},$$

$$c = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i (p^{-1} q r_{1i} r_{2i}^{-1} \oplus pq^{-1} r_{1i}^{-1} r_{2i}).$$

Доказательство. Записывая равенства $x_1 = p + t$ и $x_2 = q + t$ в терминах тропических операций, имеем $x_1 = pt$ и $x_2 = qt$. После подстановки в целевую функцию (3.3) с учетом введенных обозначений a, b и c получим

$$\phi(x_1,x_2) = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i (p^{-1} r_{1i} t^{-1} \oplus r_{1i}^{-1} pt)(q^{-1} r_{2i} t^{-1} \oplus r_{2i}^{-1} qt) = at^{-2} \oplus bt^2 \oplus c.$$

Рассматриваемая задача принимает вид (2.11), решение которой дает следствие 3.

С использованием обычных обозначений полученный результате можно представить следующей форме.

Следствие 13. *Минимум в задаче (3.1) при условии (3.6) равен*

$$\mu = \max((a+b)/2, c, a - 2g, b + 2f)$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$x_1 = (1-\alpha)\max((a-\mu)/2, f) - \alpha \max((b-\mu)/2, -g) + p,$$
$$x_2 = (1-\alpha)\max((a-\mu)/2, f) - \alpha \max((b-\mu)/2, -g) + q,$$

где α – любое число, удовлетворяющее условию $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$a = \max_{1 \leq i \leq m}(w_i + r_{1i} + r_{2i} - p - q), \qquad b = \max_{1 \leq i \leq m}(w_i - r_{1i} - r_{2i} + p + q),$$
$$c = \max_{1 \leq i \leq m}(w_i + r_{1i} - r_{2i} - p + q, w_i - r_{1i} + r_{2i} + p - q).$$

Нетрудно видеть, что допустимое множество для задачи размещения на отрезке прямой, наклоненной под углом $135°$ к горизонтальной оси, может быть представлено в виде

$$S = \{(x_1,x_2)^T \; | x_1 = p - t, \; x_2 = q + t, \; f \leq t \leq g\}.$$

Решение такой задачи не имеет существенных отличий от решения предыдущей и находится аналогичным путем.

Размещение на произвольной прямой

Рассмотрим задачу размещения на отрезке произвольной прямой, который для фиксированных чисел $f,g,q,k \in \mathbb{R}$, где $f \leq g$, описывается при помощи множества

$$S = \{(x_1,x_2)^T \; | f \leq x_1 \leq g, \; x_2 = kx_1 + q\}. \tag{3.7}$$

Следующий результат обеспечивает полное решение задачи в явном виде.

Лемма 3. *Введем обозначения*

$$a = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i} r_{2i}^{-1} q, \quad b = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i}^{-1} r_{2i} q^{-1},$$
$$c = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i} r_{2i} q^{-1}, \quad d = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1} q.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) *если $k < -1$ или $k > 1$, то минимум в задаче (3.1) при условии (3.7) равен*

$$\mu = a^{1/2} b^{1/2} \oplus a^{(k+1)/2k} c^{(k-1)/2k} \oplus b^{(k+1)/2k} d^{(k-1)/2k} \oplus c^{1/2} d^{1/2} \oplus$$
$$\oplus a(f^{-(k-1)} \oplus g^{-(k-1)})^{-1} \oplus b(f^{k-1} \oplus g^{k-1})^{-1} \oplus$$
$$\oplus c(f^{k+1} \oplus g^{k+1})^{-1} \oplus d(f^{-(k+1)} \oplus g^{-(k+1)})^{-1}$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$x_1 = (((\mu a^{-1})^{-1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} b)^{-1/(k-1)})^{-1} \oplus$$

$$\oplus((\mu^{-1}c)^{-1/(k+1)} \oplus (\mu d^{-1})^{-1/(k+1)})^{-1} \oplus f)^{1-\alpha}$$
$$(((\mu^{-1}a)^{-1/(k-1)} \oplus (\mu b^{-1})^{1/(k-1)})^{-1} \oplus$$
$$\oplus((\mu c^{-1})^{1/(k+1)} \oplus (\mu^{-1}d)^{-1/(k+1)})^{-1} \oplus g^{-1})^{-\alpha},$$

$$x_2 = qx_1^k;$$

2) *если* $-1 \leq k \leq 1$, *то минимум равен*

$$\mu = a^{1/2}b^{1/2} \oplus a^{(k+1)/2}d^{-(k-1)/2} \oplus b^{(k+1)/2}c^{-(k-1)/2} \oplus c^{1/2}d^{1/2} \oplus$$
$$\oplus ag^{k-1} \oplus bf^{-(k-1)} \oplus cg^{-(k+1)} \oplus df^{k+1}$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$x_1 = ((\mu a^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1}c)^{1/(k+1)} \oplus f)^{1-\alpha}$$
$$((\mu b^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1}d)^{1/(k+1)} \oplus g^{-1})^{-\alpha},$$

$$x_2 = qx_1^k,$$

где α – *любое число, удовлетворяющее условию* $0 \leq \alpha \leq 1$.

Доказательство. Заменим равенство $x_2 = kx_1 + q$ на эквивалентное ему равенство в терминах тропических операций в виде $x_2 = qx_1^k$. В результате подстановки в целевую функцию и использования введенных обозначений a, b, c и d получим

$$\phi(x_1,x_2) = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i(x_1^{-1}r_{1i} \oplus r_{1i}^{-1}x_1)(q^{-1}x_1^{-k}r_{2i} \oplus r_{2i}^{-1}qx_1^k) =$$
$$= ax_1^{k-1} \oplus bx_1^{-(k-1)} \oplus cx_1^{-(k+1)} \oplus dx_1^{k+1}.$$

Записывая целевую функцию вместе с ограничением, приходим к задаче оптимизации относительно x_1 в виде (2.8). Решение полученной задачи с помощью следствия 2 дает оптимальные значения для x_1. Вычисление $x_2 = qx_1^k$ завершает доказательство.

При использовании обычных обозначений найденное решение описывается так:

Следствие 14. *Введем обозначения*

$$a = \max_{1\le i\le m}(w_i - r_{1i} + r_{2i} + q), \qquad b = \max_{1\le i\le m}(w_i + r_{1i} - r_{2i} - q),$$
$$c = \max_{1\le i\le m}(w_i + r_{1i} + r_{2i} - q), \qquad d = \max_{1\le i\le m}(w_i - r_{1i} - r_{2i} + q).$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) *если $k < -1$ или $k > 1$, то минимум в задаче* (3.1) *при условии* (3.7) *равен*

$$\mu = \max\Bigg(\frac{a+b}{2}, \frac{a(k+1)+c(k-1)}{2k}, \frac{b(k+1)+d(k-1)}{2k}, \frac{c+d}{2},$$
$$a + \min((k-1)f,(k-1)g), b - \max((k-1)f,(k-1)g),$$
$$c - \max((k+1)f,(k+1)g), d + \min((k+1)f,(k+1)g)\Bigg)$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$x_1 = (1-\alpha)\max\left(\min\left(\frac{\mu-a}{k-1},\frac{b-\mu}{k-1}\right), \min\left(\frac{c-\mu}{k+1},\frac{\mu-d}{k+1}\right), f\right)$$
$$- \alpha\max\left(\min\left(\frac{a-\mu}{k-1},\frac{\mu-b}{k-1}\right), \min\left(\frac{\mu-c}{k+1},\frac{d-\mu}{k+1}\right), -g\right),$$

$$x_2 = kx_1 + q;$$

2) *если $-1 \le k \le 1$, то минимум равен*

$$\mu = \max\Bigg(\frac{a+b}{2}, \frac{a(k+1)-d(k-1)}{2}, \frac{b(k+1)-c(k-1)}{2}, \frac{c+d}{2},$$
$$a + (k-1)g, b - (k-1)f, c - (k+1)g, d + (k+1)f\Bigg)$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$x_1 = (1-\alpha)\max\left(\frac{\mu-a}{k-1},\frac{c-\mu}{k+1}, f\right) - \alpha\max\left(\frac{\mu-b}{k-1},\frac{d-\mu}{k+1}, -g\right),$$

$$x_2 = kx_1 + q,$$

где α – любое число, удовлетворяющее условию $0 \le \alpha \le 1$.

Рассмотрим числовой пример. Пусть задано множество точек

$$\boldsymbol{r}_1 = (1,\, 7)^T, \quad \boldsymbol{r}_2 = (3,\, 3)^T, \quad \boldsymbol{r}_3 = (4,\, 6)^T, \quad \boldsymbol{r}_4 = (5,\, 3)^T,$$

$$\boldsymbol{r}_5 = (7,\, 2)^T, \quad \boldsymbol{r}_6 = (9,\, 1)^T, \quad \boldsymbol{r}_7 = (9,\, 9)^T.$$

Сначала рассмотрим решение задачи размещения (3.1), в которой допустимое множество представляет собой отрезок, заданный в виде

$$S_1 = \{(x_1,x_2)^T \mid \quad 5 \le x_1 \le 8,\, x_2 = -2x_1 + 19\}.$$

Решение такой задачи приведено на рисунке 3.5, где выделенный жирным отрезок прямой представляет множество решений задачи без ограничений, отрезок обычной толщины – допустимое множество размещения, а точка на пересечении – решение задачи с ограничениями.

Перейдем к рассмотрению случая, в котором допустимая область размещения задана следующим образом:

$$S_2 = \{(x_1,x_2)^T \mid \quad 4 \le x_1 \le 7,\, x_2 = 2x_1 - 6\}.$$

В этом случае, как показано на рисунке 3.6, допустимая область размещения не пересекается с множеством решений задачи без ограничений. Решение исходной задачи изображено точкой, лежащей на отрезке S_2.

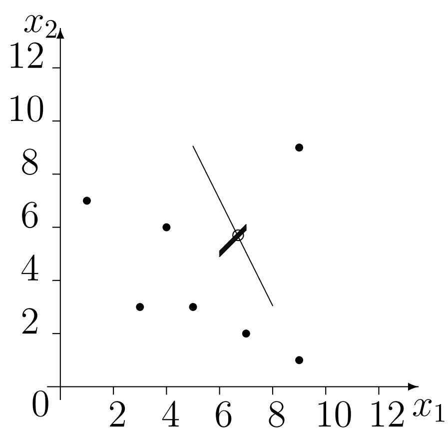

Рисунок 3.5 - Размещение на S_1

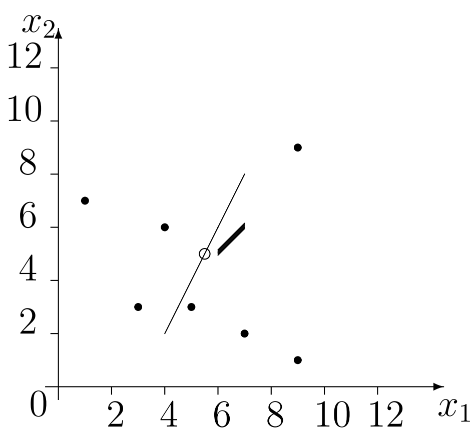

Рисунок 3.6 - Размещение на S_2

3.6.2 Размещение в прямоугольнике

Предположим также, что заданы числа $f,g,p,q \in \mathbb{R}$ такие, что $f \leq g$ и $p \leq q$. Определим допустимую область размещения в виде прямоугольника

$$S = \{(x_1,x_2)^T \mid \quad f \leq x_1 \leq g,\, p \leq x_2 \leq q\}. \tag{3.8}$$

Рассматриваемая минимаксная задача размещения точечного объекта с ограничениями (3.1) в виде прямоугольника S.

С учетом ограничений (3.8) задача (3.1) принимает форму задачи (2.18), где $t = x_1$ и $s = x_2$. Применение теоремы 5 дает следующий результат.

Теорема 9. *Введем обозначения*

$$u = a^{1/2}c^{1/2} \oplus aq^{-1} \oplus cp, \qquad v = b^{1/2}d^{1/2} \oplus bq^{-1} \oplus dp,$$

$$a = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i} r_{2i}, \quad b = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i}^{-1} r_{2i},$$
$$c = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i} r_{2i}^{-1}, \quad d = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1}.$$

Тогда минимум в задаче (3.1) *равен*

$$\mu = u^{1/2}v^{1/2} \oplus ug^{-1} \oplus vf \oplus a^{1/2}d^{1/2} \oplus b^{1/2}c^{1/2},$$

и справедливы следующие утверждения:

1) *если* $\mu = u^{1/2}v^{1/2}$ *при* $u = a^{1/2}c^{1/2}$ *и* $v = bq^{-1}$ *или* $u = aq^{-1}$, *то*

$$x_1 = (a^{1/4}c^{1/4} \oplus a^{1/2}q^{-1/2})(b^{1/2}q^{-1/2} \oplus v^{1/2})^{-1}, \qquad x_2 = q;$$

2) *если* $\mu = u^{1/2}v^{1/2}$ *при* $u = a^{1/2}c^{1/2}$ *и* $v = dp$ *или* $u = cp$, *то*

$$x_1 = (a^{1/4}c^{1/4} \oplus c^{1/2}p^{1/2})(d^{1/2}p^{1/2} \oplus v^{1/2})^{-1}, \qquad x_2 = p;$$

3) *если* $\mu = ug^{-1}$, *то*

$$x_1 = g, \quad x_2 = (a^{-1/2}c^{1/2} \oplus q^{-1})^{-1} \oplus p;$$

4) *если* $\mu = vf$, *то*

$$x_1 = f, \quad x_2 = (b^{-1/2}d^{1/2} \oplus q^{-1})^{-1} \oplus p;$$

5) *если* $\mu = a^{1/2}d^{1/2}$, *то*

$$x_1 = (a^{-1/2}d^{-1/2}u \oplus f)^{1-\alpha}(a^{-1/2}d^{-1/2}v \oplus g^{-1})^{-\alpha}, \qquad x_2 = a^{1/2}d^{-1/2}x_1^{-1};$$

6) *если* $\mu = b^{1/2}c^{1/2}$, *то*

$$x_1 = (b^{-1/2}c^{-1/2}u \oplus f)^{1-\alpha}(b^{-1/2}c^{-1/2}v \oplus g^{-1})^{-\alpha}, \qquad x_2 = b^{1/2}c^{-1/2}x_1,$$

где α *– вещественное число, удовлетворяющее условию* $0 \leq \alpha \leq 1$.

При использовании обычных обозначений найденное решение описывается так:

Следствие 15. *Введем обозначения*

$$a = \max_{1 \leq i \leq m}(w_i + r_{1i} + r_{2i}), \qquad b = \max_{1 \leq i \leq m}(w_i - r_{1i} + r_{2i}),$$
$$c = \max_{1 \leq i \leq m}(w_i + r_{1i} - r_{2i}), \qquad d = \max_{1 \leq i \leq m}(w_i - r_{1i} - r_{2i}),$$

а также

$$u = \max((a+c)/2, a-q, c+p), \qquad v = \max((b+d)/2, b-q, d+p).$$

Минимум в задаче (3.1) *равен*

$$\mu = \max((u+v)/2, u-g, v+f, (a+d)/2, (b+c)/2),$$

и справедливы следующие утверждения:

1) *если* $\mu = (u+v)/2$ *при* $u = (a+c)/2$ *и* $v = b-q$ *или* $u = a-q$, *то*

$$x_1 = \max((a+c)/4,(a-q)/2) - \max((b-q)/2,v/2), \qquad x_2 = q;$$

2) *если* $\mu = (u+v)/2$ *при* $u = (a+c)/2$ *и* $v = d+p$ *или* $u = c+p$, *то*

$$x_1 = \max((a+c)/4,(c+p)/2) - \max((d+p)/2,v/2), \qquad x_2 = p;$$

3) *если* $\mu = u - g$, *то*

$$x_1 = g, \quad x_2 = \max(-\max((-a+c)/2, -q), p);$$

4) *если* $\mu = v + f$, *то*

$$x_1 = f, \quad x_2 = \max(-\max((-b+d)/2, -q), p);$$

5) *если* $\mu = (a+d)/2$, *то*

$$x_1 = (1-\alpha)\max((-a-d)/2 + u, f) - \alpha\max((-a-d)/2 + v, -g),$$
$$x_2 = (a-d)/2 - x_1;$$

6) *если* $\mu = (b+c)/2$, *то*

$$x_1 = (1-\alpha)\max((-b-c)/2 + u, f) - \alpha\max((-b-c)/2 + v, -g),$$
$$x_2 = (b-c)/2 + x_1,$$

где α *– вещественное число, удовлетворяющее условию* $0 \leq \alpha \leq 1$.

Замечание. *Заметим, что в случае, если требуется решить задачу размещения в полосе, а не в прямоугольнике, то достаточно убрать из условия* (3.8) *одно из ограничений и воспользоваться одним из двух следствий 9 или 10.*

Приведем примеры применения полученных результатов. Пусть имеется $m = 11$ исходных точек на плоскости, имеющих координаты

$$\boldsymbol{r}_1 = (3,7)^T, \quad \boldsymbol{r}_2 = (4,4)^T, \quad \boldsymbol{r}_3 = (5,3)^T, \quad \boldsymbol{r}_4 = (5,9)^T,$$

$$\boldsymbol{r}_5 = (6,6)^T, \quad \boldsymbol{r}_6 = (7,3)^T, \quad \boldsymbol{r}_7 = (7,8)^T, \quad \boldsymbol{r}_8 = (8,4)^T,$$
$$\boldsymbol{r}_9 = (9,2)^T, \quad \boldsymbol{r}_{10} = (10,7)^T, \quad \boldsymbol{r}_{11} = (11,4)^T.$$

Для простоты будем считать, что $w_i = 0$ для всех i. Зададим четыре различных области размещения

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x_1,x_2)^T \mid \quad 4 \le x_1 \le 10,\ 3 \le x_2 \le 9\}, \\ S_2 &= \{(x_1,x_2)^T \mid \quad 2 \le x_1 \le 12,\ 1 \le x_2 \le 5{,}5\}, \\ S_3 &= \{(x_1,x_2)^T \mid \quad 2 \le x_1 \le 5,\ 1 \le x_2 \le 11\}, \\ S_4 &= \{(x_1,x_2)^T \mid \quad 2 \le x_1 \le 12,\ 8 \le x_2 \le 11\}. \end{aligned}$$

В результате применения расчетных формул из следствия 15 для задач с областями размещения S_1, S_2, S_3, S_4 получены решения, в которых оптимальное размещение описывается следующими парами координат:

$$\begin{array}{llll} x_1 = \alpha + 6{,}5, & x_1 = 0{,}5\alpha + 6{,}5, & x_1 = 5, & x_1 = 7{,}5, \\ x_2 = \alpha + 5, & x_2 = 0{,}5\alpha + 7, & x_2 = 5, & x_2 = 8. \end{array}$$

Для записи первых двух решений используется числовой параметр $0 \le \alpha \le 1$.

На рисунках 3.7-3.10 представлены результаты применения теорем из предыдущего раздела. Кружками выделено исходное множество объектов, пунктирным прямоугольником – область размещения, отрезком жирной линии или жирной точкой – искомое множество размещения.

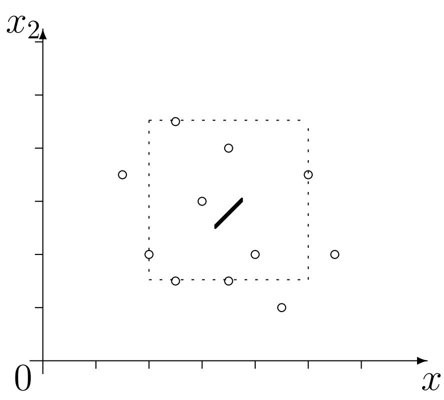

Рисунок 3.7 - Размещение на S_1

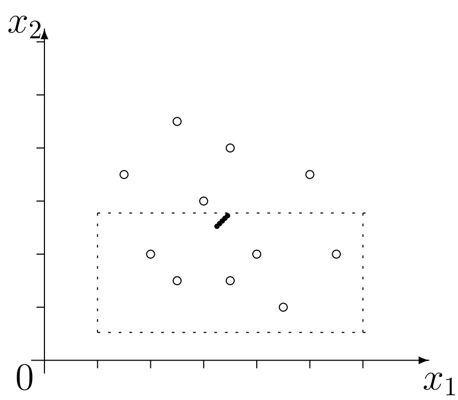

Рисунок 3.8 - Размещение на S_2

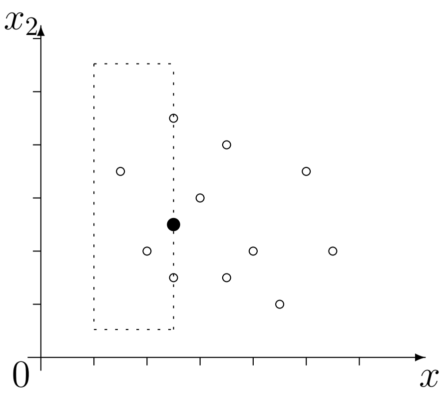

Рисунок 3.9 - Размещение на S_3

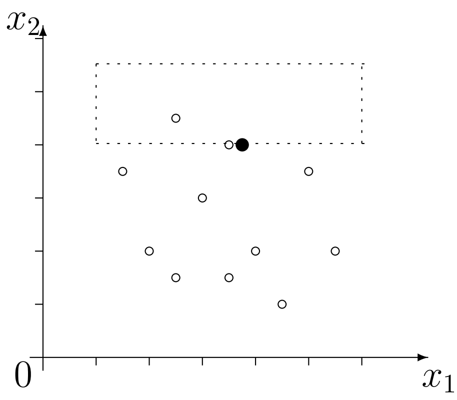

Рисунок 3.10 - Размещение на S_4

3.7 Решение задачи размещения в трехмерном пространстве

Рассмотрим минимаксную задачу размещения точечного объекта в трехмерном пространстве с прямоугольной метрикой, которая заключается в поиске на основе уже имеющегося набора объектов новой точки из $\mathbb{R}^3$, расстояние от которой до самого дальнего объекта из набора с учетом некоторого дополнительного слагаемого было бы минимальным.

Расстояние в прямоугольной метрике между двумя точками $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3)^T$ и $\boldsymbol{y} = (y_1,y_2,y_3)^T$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ может быть вычисленно по формуле

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|. \tag{3.9}$$

Пусть задан набор точек $\boldsymbol{r}_i = (r_{1i},r_{2i},r_{3i})^T \in \mathbb{R}^3$ и чисел $l_i \in \mathbb{R}$, для всех $i = 1,\ldots,m$. Числа l_i могут отражать дополнительные затраты, связанные с перемещением между объектами. Введем функцию $\phi(\boldsymbol{x})$, которая определяет максимальное расстояние от точки $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3)^T$ до набора точек $\boldsymbol{r}_i$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{x}) &= \max_{1\le i\le m}(\rho(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{x}) + l_i) = \\ &= \max_{1\le i\le m}(|r_{1i} - x_1| + |r_{2i} - x_2| + |r_{3i} - x_3| + l_i) = \phi(x_1,x_2,x_3).\end{aligned} \tag{3.10}$$

Рассматриваемая минимаксная задача размещения точечного объекта формулируется так:
$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3} \ \phi(\boldsymbol{x}). \tag{3.11}$$

Рассмотрим задачу размещения (3.11) и представим ее в терминах тропической математики. Расстояние между двумя векторами в прямоугольной метрике (3.9) с использованием операций идемпотентного полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$ записывается так:

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (x_1^{-1}y_1 \oplus y_1^{-1}x_1)(x_2^{-1}y_2 \oplus y_2^{-1}x_2)(x_3^{-1}y_3 \oplus y_3^{-1}x_3).$$

Для заданного набора точек $\boldsymbol{r}_i = (r_{1i},r_{2i},r_{3i})^T \in \mathbb{R}^3$ и чисел $l_i \in \mathbb{R}$, где $i = 1,\ldots,m$, целевая функция (3.10) принимает вид

$$\phi(x_1,x_2,x_3) = \bigoplus_{i=1}^{m} l_i(x_1^{-1}r_{1i} \oplus r_{1i}^{-1}x_1)(x_2^{-1}r_{2i} \oplus r_{2i}^{-1}x_2)(x_3^{-1}r_{3i} \oplus r_{3i}^{-1}x_3).$$

Чтобы упростить выражение, введем дополнительные обозначения

$$\begin{aligned}
a &= \bigoplus_{i=1}^{m} l_i r_{1i} r_{2i} r_{3i}, & b &= \bigoplus_{i=1}^{m} l_i r_{1i} r_{2i} r_{3i}^{-1},\\
c &= \bigoplus_{i=1}^{m} l_i r_{1i} r_{2i}^{-1} r_{3i}, & d &= \bigoplus_{i=1}^{m} l_i r_{1i} r_{2i}^{-1} r_{3i}^{-1},\\
e &= \bigoplus_{i=1}^{m} l_i r_{1i}^{-1} r_{2i} r_{3i}, & f &= \bigoplus_{i=1}^{m} l_i r_{1i}^{-1} r_{2i} r_{3i}^{-1},\\
g &= \bigoplus_{i=1}^{m} l_i r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1} r_{3i}, & h &= \bigoplus_{i=1}^{m} l_i r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1} r_{3i}^{-1}.
\end{aligned}$$

Раскрыв скобки и перегруппировав слагаемые, запишем целевую функцию:

$$\begin{multline}
\phi(x_1,x_2,x_3) = ax_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1} \oplus bx_1^{-1}x_2^{-1}x_3 \oplus cx_1^{-1}x_2x_3^{-1} \oplus dx_1^{-1}x_2x_3 \oplus \\
\oplus ex_1x_2^{-1}x_3^{-1} \oplus fx_1x_2^{-1}x_3 \oplus gx_1x_2x_3^{-1} \oplus hx_1x_2x_3.
\end{multline}$$

Задача (3.11) принимает форму задачи (2.31), где $u = x_1$, $v = x_2$ и $w = x_2$. Применение теоремы 7 дает следующий результат.

Теорема 10. *Введем обозначения*

$$
\begin{aligned}
&a_1 = a^{1/2}d^{1/2} \oplus b^{1/2}c^{1/2}, \qquad b_1 = a^{1/2}f^{1/2} \oplus b^{1/2}e^{1/2},\\
&c_1 = e^{1/2}h^{1/2} \oplus f^{1/2}g^{1/2}, \qquad d_1 = c^{1/2}h^{1/2} \oplus d^{1/2}g^{1/2},\\
&e_1 = a^{1/2}b^{1/2}, \qquad f_1 = c^{1/2}d^{1/2}, \qquad g_1 = e^{1/2}f^{1/2},\\
&h_1 = g^{1/2}h^{1/2}, \qquad k_1 = a^{1/2}h^{1/2} \oplus b^{1/2}g^{1/2} \oplus c^{1/2}f^{1/2} \oplus d^{1/2}e^{1/2},\\
&a_2 = b_1^{1/2}f_1^{1/2} \oplus d_1^{1/2}e_1^{1/2}, \qquad b_2 = b_1^{1/2}h_1^{1/2} \oplus d_1^{1/2}g_1^{1/2},\\
&c_2 = e_1^{1/2}f_1^{1/2} \oplus a_1, \qquad d_2 = g_1^{1/2}h_1^{1/2} \oplus c_1,\\
&e_2 = b_1^{1/2}d_1^{1/2} \oplus f_1^{1/2}g_1^{1/2} \oplus e_1^{1/2}h_1^{1/2} \oplus k_1.
\end{aligned}
$$

Тогда минимум в задаче (3.11) *равен*

$$
\mu = a_2^{1/2}b_2^{1/2} \oplus a_2^{2/3}d_2^{1/3} \oplus b_2^{2/3}c_2^{1/3} \oplus c_2^{1/2}d_2^{1/2} \oplus e_2,
$$

и справедливы следующие утверждения:

1) *если* $\mu = a_1^{1/2}b_1^{1/2}$, *то*

$$
\begin{aligned}
&x_1 = a_2b_2^{-1},\\
&x_2 = \begin{cases} b_1^{3/4}f_1^{-1/4}b_2^{-1/2}, & \text{если } a_2 = b_1^{1/2}f_1^{1/2},\\ d_1^{-3/4}e_1^{1/4}b_2^{1/2}, & \text{если } a_2 = d_1^{1/2}e_1^{1/2}, \end{cases}\\
&x_3 = (\mu^{-1}ax_1^{-1}x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}cx_1^{-1}x_2 \oplus \mu^{-1}ex_1x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}gx_1x_2)^{1-\alpha}\otimes\\
&\qquad \otimes (\mu^{-1}bx_1^{-1}x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}dx_1^{-1}x_2 \oplus \mu^{-1}fx_1x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}hx_1x_2)^{-\alpha};
\end{aligned}
$$

2) *если* $\mu = a_2^{2/3}d_2^{1/3}$, *то*

$$
\begin{aligned}
&x_1 = a_2^{2/3}d_2^{-2/3},\\
&x_2 = \begin{cases} b_1^{2/3}f_1^{-1/3}d_2^{-1/3}, & \text{если } a_2 = b_1^{1/2}f_1^{1/2},\\ d_1^{-2/3}e_1^{1/3}d_2^{1/3}, & \text{если } a_2 = d_1^{1/2}e_1^{1/2}, \end{cases}\\
&x_3 = (\mu^{-1}ax_1^{-1}x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}cx_1^{-1}x_2 \oplus \mu^{-1}ex_1x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}gx_1x_2)^{1-\alpha}\otimes\\
&\qquad \otimes (\mu^{-1}bx_1^{-1}x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}dx_1^{-1}x_2 \oplus \mu^{-1}fx_1x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}hx_1x_2)^{-\alpha}
\end{aligned}
$$

3) *если* $\mu = b_2^{2/3}c_2^{1/3}$, *то*

$$x_1 = b_2^{-2/3}c_2^{2/3},$$
$$x_2 = \begin{cases} b_1^{2/3}h_1^{-1/3}c_2^{-1/3}, & \text{если } b_2 = b_1^{1/2}h_1^{1/2}, \\ d_1^{-2/3}g_1^{1/3}c_2^{1/3}, & \text{если } b_2 = d_1^{1/2}g_1^{1/2}, \end{cases}$$
$$x_3 = (\mu^{-1}ax_1^{-1}x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}cx_1^{-1}x_2 \oplus \mu^{-1}ex_1x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}gx_1x_2)^{1-\alpha}\otimes$$
$$\otimes\, (\mu^{-1}bx_1^{-1}x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}dx_1^{-1}x_2 \oplus \mu^{-1}fx_1x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}hx_1x_2)^{-\alpha};$$

4) *если* $\mu = c_2^{1/2}d_2^{1/2}$, *то*

$$x_1 = c_2^{1/2}d_2^{-1/2},$$
$$x_2 = \begin{cases} e_1^{1/2}f_1^{-1/2}, & \text{если } c_2 = e_1^{1/2}f_1^{1/2}, \\ g_1^{1/2}h_1^{-1/2}, & \text{если } d_2 = g_1^{1/2}h_1^{1/2}, \\ (a_1^{-1/2}c_1^{-1/2}b_1 \oplus a_1^{-1}e_1 \oplus c_1^{-1}g_1)^{1-\alpha}\otimes & \\ \otimes(a_1^{-1/2}c_1^{-1/2}d_1 \oplus a_1^{-1}f_1 \oplus c_1^{-1}h_1)^{-\alpha}, & \text{если } c_2 = a_1, d_2 = c_1, \end{cases}$$
$$x_3 = (\mu^{-1}ax_1^{-1}x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}cx_1^{-1}x_2 \oplus \mu^{-1}ex_1x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}gx_1x_2)^{1-\beta}\otimes$$
$$\otimes\, (\mu^{-1}bx_1^{-1}x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}dx_1^{-1}x_2 \oplus \mu^{-1}fx_1x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}hx_1x_2)^{-\beta};$$

5) *если* $\mu = e_2$, *то*

$$x_1 = (a_2^2e_2^{-2} \oplus c_2e_2^{-1})^{1-\alpha}(b_2^2e_2^{-2} \oplus d_2e_2^{-1})^{-\alpha},$$
$$x_2 = \begin{cases} b_1^{1/2}d_1^{-1/2}, & \text{если } e_2 = b_1^{1/2}d_1^{1/2}, \\ f_1^{-1/2}g_1^{1/2}x_1, & \text{если } e_2 = f_1^{1/2}g_1^{1/2}, \\ e_1^{1/2}h_1^{-1/2}x_1^{-1}, & \text{если } e_2 = e_1^{1/2}h_1^{1/2}, \end{cases}$$
$$x_3 = (\mu^{-1}ax_1^{-1}x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}cx_1^{-1}x_2 \oplus \mu^{-1}ex_1x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}gx_1x_2)^{1-\beta}\otimes$$
$$\otimes\, (\mu^{-1}bx_1^{-1}x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}dx_1^{-1}x_2 \oplus \mu^{-1}fx_1x_2^{-1} \oplus \mu^{-1}hx_1x_2)^{-\beta};$$

6) *если* $\mu = e_2 = k_1$, *то*

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (a_2^2 k_1^{-2} \oplus c_2 k_1^{-1})^{1-\alpha} (b_2^2 k_1^{-2} \oplus d_2 k_1^{-1})^{-\alpha},\\
x_2 &= (b_1 k_1^{-1} \oplus k_1^{-1} e_1 x_1^{-1} \oplus k_1^{-1} g_1 x_1)^{1-\beta} (k_1^{-1} d_1 \oplus k_1^{-1} f_1 x_1^{-1} \oplus k_1^{-1} h_1 x_1)^{-\beta},\\
x_3 &= \begin{cases}
a^{1/2} h^{-1/2} x_1^{-1} x_2^{-1}, & \text{если } k_1 = a^{1/2} h^{1/2},\\
c^{1/2} f^{-1/2} x_1^{-1} x_2, & \text{если } k_1 = c^{1/2} f^{1/2},\\
d^{-1/2} e^{1/2} x_1 x_2^{-1}, & \text{если } k_1 = d^{1/2} e^{1/2},\\
b^{-1/2} g^{1/2} x_1 x_2, & \text{если } k_1 = b^{1/2} g^{1/2},
\end{cases}
\end{aligned}
$$

где α, β *– вещественные числа, удовлетворяющие условиям* $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq 1$.

Сформулируем результат в в терминах обычной математики в виде следствия.

Следствие 16. *Введем обозначения*

$$
\begin{aligned}
&a_1 = \max(a+d, b+c)/2, \qquad b_1 = \max(a+f, b+e)/2,\\
&c_1 = \max(e+h, f+g)/2, \qquad d_1 = \max(c+h, d+g)/2,\\
&e_1 = (a+b)/2, \qquad f_1 = (c+d)/2, \qquad g_1 = (e+f)/2,\\
&h_1 = (g+h)/2, \qquad k_1 = \max(a+h, b+g, c+f, d+e)/2,\\
&a_2 = \max(b_1+f_1, d_1+e_1)/2, \qquad b_2 = \max(b_1+h_1, d_1+g_1)/2,\\
&c_2 = \max((e_1+f_1)/2, a_1), \qquad d_2 = \max((g_1+h_1)/2, c_1),\\
&e_2 = \max(b_1+d_1, f_1+g_1, e_1+h_1, 2k_1)/2.
\end{aligned}
$$

Тогда минимум в задаче (3.11) *равен*

$$
\mu = \max((a_2+b_2)/2, (2a_2+d_2)/3, (2b_2+c_2)/3, (c_2+d_2)/2, e_2),
$$

и справедливы следующие утверждения:

1) *если* $\mu = (a_2 + b_2)/2$, *то*

$$x_1 = a_2 - b_2,$$

$$x_2 = \begin{cases} (3b_1 - f_1)/4 - b_2/2, & \text{если } a_2 = (b_1 + f_1)/2, \\ (-3d_1 + e_1)/4 + b_2/2, & \text{если } a_2 = (d_1 + e_1)/2, \end{cases}$$

$$x_3 = (1-\alpha)\max(-\mu + a - x_1 - x_2, -\mu + c - x_1 + x_2,$$
$$-\mu + e + x_1 - x_2, -\mu + g + x_1 + x_2) - \alpha\max(-\mu + b - x_1 - x_2,$$
$$-\mu + d - x_1 + x_2, -\mu + f + x_1 - x_2, -\mu + h + x_1 + x_2);$$

2) *если* $\mu = (2a_2 + d_2)/3$, *то*

$$x_1 = (2a_2 - 2d_2)/3,$$

$$x_2 = \begin{cases} (2b_1 - f_1 - d_2)/3, & \text{если } a_2 = (b_1 + f_1)/2, \\ (-2d_1 + e_1 + d_2)/3, & \text{если } a_2 = (d_1 + e_1)/2, \end{cases}$$

$$x_3 = (1-\alpha)\max(-\mu + a - x_1 - x_2, -\mu + c - x_1 + x_2,$$
$$-\mu + e + x_1 - x_2, -\mu + g + x_1 + x_2) - \alpha\max(-\mu + b - x_1 - x_2,$$
$$-\mu + d - x_1 + x_2, -\mu + f + x_1 - x_2, -\mu + h + x_1 + x_2);$$

3) *если* $\mu = (2b_2 + c_2)/3$, *то*

$$x_1 = (-2b_2 + c_2)/3,$$

$$x_2 = \begin{cases} (2b_1 - h_1 - c_2)/3, & \text{если } b_2 = b_1^{1/2}h_1^{1/2}, \\ (-2d_1 + g_1 + c_2)/3, & \text{если } b_2 = (d_1 + g_1)/2, \end{cases}$$

$$x_3 = (1-\alpha)\max(-\mu + a - x_1 - x_2, -\mu + c - x_1 + x_2,$$
$$-\mu + e + x_1 - x_2, -\mu + g + x_1 + x_2) - \alpha\max(-\mu + b - x_1 - x_2,$$
$$-\mu + d - x_1 + x_2, -\mu + f + x_1 - x_2, -\mu + h + x_1 + x_2);$$

4) *если* $\mu = (c_2 + d_2)/2$, *то*

$$x_1 = (c_2 - d_2)/2,$$

$$x_2 = \begin{cases} (e_1 - f_1)/2, & \text{если } c_2 = (e_1 + f_1)/2, \\ (g_1 - h_1)/2, & \text{если } d_2 = (g_1 + h_1)/2, \\ (1-\alpha)\max((-a_1 - c_1)/2 + b_1, \\ -a_1 + e_1, -c_1 + g_1) - \\ -\alpha \max((-a_1 - c_1)/2 + d_1, \\ -a_1 + f_1, -c_1 + h_1), & \text{если } c_2 = a_1, d_2 = c_1, \end{cases}$$

$$x_3 = (1-\beta)\max(-\mu + a - x_1 - x_2, -\mu + c - x_1 + x_2,$$
$$-\mu + e + x_1 - x_2, -\mu + g + x_1 + x_2) - \beta \max(-\mu + b - x_1 - x_2,$$
$$-\mu + d - x_1 + x_2, -\mu + f + x_1 - x_2, -\mu + h + x_1 + x_2);$$

5) *если* $\mu = e_2$, *то*

$$x_1 = (1-\alpha)\max(2a_2 - 2e_2, c_2 - e_2) - \alpha \max(2b_2 - 2e_2, d_2 - e_2),$$

$$x_2 = \begin{cases} (b_1 - d_1)/2, & \text{если } e_2 = (b_1 + d_1)/2, \\ (-f_1 + g_1)/2 + x_1, & \text{если } e_2 = (f_1 + g_1)/2, \\ (e_1 - h_1)/2 - x_1, & \text{если } e_2 = (e_1 + h_1)/2, \end{cases}$$

$$x_3 = (1-\beta)\max(-\mu + a - x_1 - x_2, -\mu + c - x_1 + x_2,$$
$$-\mu + e + x_1 - x_2, -\mu + g + x_1 + x_2) - \beta \max(-\mu + b - x_1 - x_2,$$
$$-\mu + d - x_1 + x_2, -\mu + f + x_1 - x_2, -\mu + h + x_1 + x_2);$$

6) *если* $\mu = e_2 = k_1$, *то*

$$x_1 = (1-\alpha)\max(2a_2 - 2k_1, c_2 - k_1) - \alpha\max(2b_2 - 2k_1, d_2 - k_1),$$
$$x_2 = (1-\beta)\max(b_1 - k_1, -k_1 + e_1 - x_1, -k_1 + g_1 + x_1) -$$
$$-\beta\max(-k_1 + d_1, -k_1 + f_1 - x_1, -k_1 + h_1 + x_1),$$
$$x_3 = \begin{cases} (a-h)/2 - x_1 - x_2, & \text{если } k_1 = (a+h)/2, \\ (c-f)/2 - x_1 + x_2, & \text{если } k_1 = (c+f)/2, \\ (-d+e)/2 + x_1 - x_2, & \text{если } k_1 = (d+e)/2, \\ (-b+g)/2 + x_1 + x_2, & \text{если } k_1 = (b+g)/2, \end{cases}$$

где α, β *– вещественные числа, удовлетворяющие условиям* $0 \le \alpha \le 1$, $0 \le \beta \le 1$.

Таким образом, приложения, разработанные в главе могут быть применены например

– для решения задач оптимального размещения центрального сервера управления в сети локальных коммуникаций. Полное решение задачи без ограничений на допустимую область размещения приведено в виде следствия 11, с разного рода ограничениями (произвольный отрезок прямой, прямоугольник) – в виде следствий 14, 15.

– для решения задач оптимального размещения центра управления системой видеонаблюдения. Результаты решения приведены в следствии 16.

Важно отметить, что для решения описанных выше задач получены полные аналитические решения в явном виде. Их использование при решении минимаксных задач размещения позволяет понизить алгоритмическую сложность вычислений, в сравнении с известными итерационными подходами. Так, предложенный в работе [66] алгоритм нахождения оптимальной области размещения точечного объекта на плоскости с прямоугольной метрикой на основе геометрического подхода, имеет алгоритмическую сложность $O(n^2)$. Нетрудно понять, что развитые в диссертационной работе методы позволяют понизить сложность вычислений для нахождения оптимальной области размещения до $O(n)$, где n - количество исходных объектов.

Заключение

По **итогам выполненного диссертационного исследования** можно сделать главный вывод, что его цель, состоявшая в разработке новых математических методов решения минимаксных задач размещения точечных объектов на плоскости с прямоугольной метрикой на основе применения методов идемпотентной алгебры и программно-алгоритмического обеспечения для их реализации при проектировании комплексов аппаратных средств автоматизации информационных процессов, – достигнута. Все поставленные научные задачи решены в полном объеме.

Основные результаты работы заключаются в следующем:

– разработаны методы решения задач оптимизации функций на идемпотентных полуполях с несколькими переменными на основе решения расширенной задачи в векторной форме с использованием экстремальных свойств идемпотентного спектрального радиуса матрицы;

– разработаны методы решения задач оптимизации функций на идемпотентных полуполях с несколькими переменными с помощью сведения задачи оптимизации к системе параметризованных неравенств и последующего нахождения всех ее решений;

– исследованы минимаксные задачи размещения с прямоугольной метрикой на плоскости и в трехмерном пространстве с ограничениями и без ограничений, включая представление этих задач в виде задач оптимизации в терминах тропической алгебры, построены прямые решения таких задач в явном виде и проведена оценка вычислительной сложности соответствующих алгоритмов;

– предложены рекомендации по применению разработанных методов для решения задач оптимального размещения центрального сервера управления в сети локальных коммуникаций и оптимального размещения центра управления системой видеонаблюдения;

– на основе полученных результатов разработаны программные средства для решения задач размещения и их практического применения для решения прикладных задач.

Рекомендации:

– разработанные методы рекомендуются к применению в области оптимизации информационных систем, связанных с проектированием процессов создания, накопления и обработки информации, исследованием принципов создания и функционирования аппаратных средств автоматизации, моделированием информационных потребностей коллективных и индивидуальных пользователей и способов их удовлетворения, разработкой и анализом моделей информационных процессов и структур и др.;

– также, на основе разработанных программных средств, реализующих новые методы решения задач оптимизации, могут быть разработаны программные изделия для использования при проектировании создания и развития комплексов средств автоматизации и информационно-коммуникационных систем.

Перспективы дальнейшей разработки темы:

– в диссертационной работе (п.2.2.5) предложен подход к решению оптимизационной задачи размещения в 3-х мерном пространстве в общем виде без ограничений на допустимую область размещения 1-центра. Перспективным направлением исследований является детальное изучение методов ее решения применительно к различным типовым ограничениям, также рассмотренным в диссертации, но применительно к двухмерной постановке задачи;

– разработка методов решения оптимизационной задачи размещения со сложными системами ограничений нелинейного характера;

– постановка исследовательской задачи динамической оптимизации размещения 1-центра в условиях изменения системы ограничений и локализации исходного набора обслуживаемых объектов, а также поиск итерационных и аналитических процедур ее решения;

– формализация типовых задач проектирования и развития комплексов средств автоматизации и информационно-коммуникационных систем в целях применения для их совершенствования разработанных математических методов;

– разработка методов решения минимаксных задач размещения k-центра (размещение нескольких объектов).

Литература

1. *Krivulin N. K.* Using tropical optimization to solve constrained minimax single-facility location problems with rectilinear distance / N. K. Krivulin // *Computational Management Science.* — 2017. — Vol. 14, N. 4. — P. 493–518.

2. *Cieszynski J.* Closed circuit television / J. Cieszynski. — UK: Elsevier Science, 2006. — 275 p.

3. *Дамьяновски В.* CCTV. Библия видеонаблюдения. Цифровые и сетевые технологии / В. Дамьяновски. — М.: ООО «Ай-Эс-Эс Пресс», 2006. — 478 с.

4. *Миннивалиев Ш. Р.* Использование 3D моделирования для рационального размещения камер видеонаблюдения в торговых залах / Ш. Р. Миннивалиев, Д. Р. Шагаипов // *Интеграция современных научных исследований в развитие общества. 28-29 декабря 2016 г.* — Кемерово, 2016. — С. 167–169.

5. *Березин А. С.* Технология и конструирование интегральных микросхем / А. С. Березин, О. Р. Мочалкина. — М.: Радио и связь, 1983. - 232 с.

6. *Шелохвостов В. П.* Проектирование интегральных микросхем / В. П. Шелохвостов, В. Н. Чернышов. — Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2008. – 208 с.

7. *Посыпкин М. А.* Сравнительный анализ эффективности различных вариантов метода динамического программирования для решения оптимизационных задач на этапе размещения элементов микросхем / М. А. Посыпкин, Т. Т. С. Си, // *Проблемы разработки перспективных микро-и наноэлектронных систем (МЭС).* — 2014. — № 2. — С. 97–100.

8. *Пирогова Е. В.* Проектирование и технология печатных плат / Е. В. Пирогова. — М.: Форум, 2005. - 559 с.

9. *Медведев А. М.* Печатные платы / А. М. Медведев // *Конструкции и материалы. М.: Техносфера.* — 2005. — С. 22–25.

10. *Комков А.* Кристалл-корпус-печатная плата. Проектирование соединений / А. Комков,Г. Хренов // *Электроника: наука, технология, бизнес.* — 2005. — № 7. — С. 84–88.

11. *Воробьев Н. Н.* Экстремальная алгебра положительных матриц / Н. Н. Воробьев // *Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik.* — 1967. — Т. 3, № 1. — С. 39–72.

12. *Воробьев Н. Н.* Экстремальная алгебра неотрицательных матриц / Н. Н. Воробьев // *Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik.* — 1970. — Т. 6, № 4-5. — С. 303–312.

13. *Воробьев Н. Н.* Экстремальная алгебра матриц / Н. Н. Воробьев // *Доклады АН СССР.* — 1963. — Т. 152, № 1. — С. 24–27.

14. *Маслов В. П.* Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении / В. П. Маслов, В. Н. Колокольцов. — М.: Физматлит, 1994. — 144 с.

15. *Maslov V. P.* On a new superposition principle for optimization problem / V. P. Maslov // *Séminaire Équations aux Dérivées Partielles (Polytechnique).* — 1985. — P. 1–14.

16. *Романовский И. В.* Оптимизация стационарного управления дискретным детерминированным процессом / И. В. Романовский // *Кибернетика.* — 1967. — № 2. — С. 66–78.

17. *Романовский И. В.* Асимптотическое поведение дискретного детерминированного процесса с непрерывным множеством состояний / И. В. Романовский // *Оптимальное планирование.* — 1967. — № 8. — С. 171–193.

18. *Романовский И. В.* Алгоритмы решения экстремальных задач / И. В. Романовский. — М: Наука, 1977. — 352 с.

19. *Корбут А. А.* Экстремальные пространства / А. А. Корбут // *Доклады Академии наук.* — 1965. — Т. 164, № 6. — С. 1229–1231.

20. *Cuninghame-Green R. A.* Minimax algebra and applications / R. A. Cuninghame-Green // *Fuzzy Sets and Systems.* — 1991. — Vol. 41. — P. 251–267.

21. *Zimmermann U.* Linear and combinatorial optimization in ordered algebraic structures / U. Zimmermann. — Elsevier, 2011. — 390 p.

22. *Литвинов Г. Л.* Деквантование Маслова, идемпотентная и тропическая математика: краткое введение / Г. Л. Литвинов // *Записки научных семинаров ПОМИ.* — 2005. — Т. 326. — С. 145–182.

23. *Litvinov G. L.* Idempotent and tropical mathematics; complexity of algorithms and interval analysis / G. L. Litvinov // *Computers and Mathematics with Applications.* — 2013. — Vol. 65, N. 10. — P. 1483–1496.

24. *Mikhalkin G.* Enumerative tropical algebraic geometry in R2 / G. Mikhalkin // *Journal of the American Mathematical Society.* — 2005. — Vol. 18, N. 2. — P. 313–377.

25. *Mikhalkin G.* Real algebraic curves, the moment map and amoebas / G. Mikhalkin // *Annals of Mathematics.* — 2000. — Vol. 151, N. 1. — P. 309–326.

26. *Guterman A. E.* Tropical patterns of matrices and the Gondran-Minoux rank function / A. E. Guterman, Ya. N. Shitov // *Linear Algebra and its Applications.* — 2012. — Vol. 437. — P. 1793–1811.

27. *Akian M.* Linear independence over tropical semirings and beyond / M. Akian, S. Gaubert, A. Guterman // *Contemporary Mathematics, AMS.* — 2009. — Vol. 495. — P. 1–38.

28. *Golan J. S.* Semirings and affine equations over them: theory and applications / J. S. Golan. — Springer Science and Business Media, 2003. — 250 p.

29. *Butkovič P.* Max-linear systems: theory and algorithms / P. Butkovič. — Springer Science and Business Media, 2010. – 272 p.

30. *Gondran M.* Graphs, dioids and semirings: new models and algorithms / M. Gondran, M. Minoux. — Computer Science Interfaces. Springer, New York, 2008. — 388 p.

31. *Grigoriev D.* Complexity of tropical Schur polynomials / D. Grigoriev, G. Koshevoy // *Journal of Symbolic Computation.* — 2016. — Vol. 74, N. 1. — P. 46–54.

32. *Grigoriev D.* On a tropical dual Nullstellensatz / D. Grigoriev // *Advances in Applied Mathematics.* — 2012. — Vol. 48, N. 2. — P. 457–464.

33. *Gunawardena J.* From max-plus algebra to nonexpansive mappings: a nonlinear theory for discrete event systems / J. Gunawardena // *Theoretical Computer Science.* — 2003. — Vol. 293, N. 1. — P. 141–167.

34. *Itenberg I.* Tropical algebraic geometry / I. Itenberg,G. Mikhalkin, E. Shustin. — Basel: Birkhauser, 2009. — 104 p.

35. *Cohen G.* Max-plus algebra and system theory: where we are and where to go now / G. Cohen, S. Gaubert, J. P. Quadrat // *Annual Reviews in Control.* — 1999. — Vol. 23, N. 1. — P. 207–219.

36. *Lawson J. D.* Idempotent analysis and continuous semilattices / J. D. Lawson // *Theoretical Computer Science.* — 2004. — Vol. 316, N. 1-3. — P. 75–87.

37. *McEneaney W. M.* Max-plus methods for nonlinear control and estimation / W. M. McEneaney. — Springer Science and Business Media, 2006. — 241 p.

38. *Шитов Я. Н.* Линейная алгебра над полукольцами, автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук: 01.01.06 / Шитов Ярослав Николаевич. — М., 2015. - 31 с.

39. *Shitov Ya. N.* Tropical lower bounds for extended formulations / Ya. N. Shitov // *Mathematical Programming.* — 2015. — Vol. 153, N. 1. — P. 67–74.

40. Synchronization and linearity: an algebra for discrete event systems / F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, J. P. Quadrat. — Chichester: John Wiley and Sons Ltd, 1992. — 514 p.

41. *Olsder G. J.* Eigenvalues of dynamic max-min systems / G. J. Olsder // *Discrete Event Dynamic Systems.* — 1991. — Vol. 1, N. 2. — P. 177–207.

42. *Heidergott B. F.* Max-plus linear stochastic systems and perturbation analysis / B. F. Heidergott. — Springer Science and Business Media, 2006. - 320 c.

43. *Heidergott B.* Max-plus at work: Modeling and analysis of synchronized systems / B. Heidergott, G. J. Olsder, J. van der Woude. — Princeton: Princeton University Press, 2006. – 226 p.

44. *Matveenko V. D.* Optimal paths in oriented graphs and eigenvectors in max-x systems / V. D. Matveenko // *Discrete Mathematics and Applications.* — 2009. — Vol. 19, N. 4. — P. 389–409.

45. *Матвеенко В. Д.* Оптимальные траектории схемы динамического программирования и экстремальные степени неотрицательных частиц / В. Д. Матвеенко // *Дискретная математика.* — 1990. — Т. 2, № 1. — С. 59–71.

46. *Матвеенко В. Д.* Структура оптимальных траекторий дискретной детерминированной схемы с дисконтированием / В. Д. Матвеенко // *Дискретная математика.* — 1998. — Т. 10, № 3. — С. 100–114.

47. *Кривулин Н. К.* Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем / Н. К. Кривулин. — СПб.: Издательство Санкт-Петербургского государственного университета, 2009. — 255 с.

48. *Krivulin N. K.* A max-algebra approach to modeling and simulation of tandem queueing systems / N. K. Krivulin // *Mathematical and Computer Modelling.* — 1995. — Vol. 22, N. 3. — P. 25–37.

49. *Krivulin N. K.* A multidimensional tropical optimization problem with a nonlinear objective function and linear constraints / N. K. Krivulin // *Optimization.* — 2015. — Vol. 64, N. 5. — P. 1107–1129.

50. *Blyumin S. L.* One-sided complements and solutions of the equation aXb=c in semirings / S. L. Blyumin, J. S. Golan // *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences.* — 2002. — Vol. 29, N. 8. — P. 453–458.

51. *Николаев Д. А.* Моделирование и управление мультиагентными системами методами идемпотентной алгебры, автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Николаев Дмитрий Александрович. — Воронеж, 2013. - 16 с.

52. *Nikolayev D. A.* Nonlinear dynamical systems over idempotent semirings for modelling of single agent motion in uncertain environment / D. A. Nikolayev // *G.L. Litvinov, V.P. Maslov, A.G. Kushner, S.N. Sergeev (Eds.) Tropical and Idempotent Mathematics.* — Moscow: 2012. — P. 185–192.

53. *Nikolayev D. A.* Idempotent algebra models of single-agent and multi-agent dynamics / D. A. Nikolayev // *Tropical and Idempotent Mathematics and Applications.* — 2014. — Vol. 616. — P. 221.

54. A new algorithm for the undesirable 1-center problem on networks / M. Colebrook, J. Gutiérrez, S. Alonso, J. Sicilia // *Journal of the Operational Research Society.* — 2002. — Vol. 53, N. 12. — P. 1357–1366.

55. *Megiddo N.* The weighted Euclidean 1-center problem / N. Megiddo // *Mathematics of Operations Research.* — 1983. — Vol. 8, N. 4. — P. 498–504.

56. *Foul A.* A 1-center problem on the plane with uniformly distributed demand points / A. Foul // *Operations Research Letters.* — 2006. — Vol. 34, N. 3. — P. 264–268.

57. *Hudec O.* A service points location problem with min-max distance optimality criterion / O. Hudec, K. Zimmermann // *Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica.* — 1993. — Vol. 34, N. 1. — P. 105–112.

58. *Elzinga D. J.* The minimum covering sphere problem / D. J. Elzinga, D. W. Hearn // *Management Science.* — 1972. — Vol. 19, N. 1. — P. 96–104.

59. *Brazil M.* A geometric characterisation of the quadratic min-power centre / M. Brazil, C. J. Ras, D. A. Thomas // *European Journal of Operational Research.* — 2014. — Vol. 233, N. 1. — P. 34–42.

60. *Hansen P.* Constrained location and the Weber-Rawls problem / P. Hansen, D. Peeters, J. F. Thisse // *North-Holland Mathematics Studies.* — 1981. — Vol. 59. — P. 147–166.

61. *Hansen P.* Outcomes of voting and planning: Condorcet, Weber and Rawls locations / P. Hansen, J. F. Thisse // *Journal of Public Economics.* — 1981. — Vol. 16, N. 1. — P. 1–15.

62. *Elzinga J.* Geometrical solutions for some minimax location problems / J. Elzinga, D. W. Hearn // *Transportation Science.* — 1972. — Vol. 6, N. 4. — P. 379–394.

63. *Francis R. L.* A geometrical solution procedure for a rectilinear distance minimax location problem / R. L. Francis // *AIIE Transactions.* — 1972. — Vol. 4, N. 4. — P. 328–332.

64. *Chalmet L. G.* Finding efficient solutions for rectilinear distance location problems efficiently / L. G. Chalmet, R. L. Francis, A. Kolen // *European Journal of Operational Research.* — 1981. — Vol. 6, N. 2. — P. 117–124.

65. *Nobakhtian S.* A fast algorithm for the rectilinear distance location problem / S. Nobakhtian, A. R. Dehkordi // *Mathematical Methods of Operations Research.* — 2018. — Vol. 87, N. 1. — P. 1–18.

66. *Забудский Г. Г.* Построение моделей и решение задач размещения на плоскости с запрещенными зонами / Г. Г. Забудский // *Автоматика и телемеханика.* — 2006. — № 12. — С. 136–141.

67. *Банди Б.* Основы линейного программирования / Б. Банди. — М.: Радио и связь, 1989. - 176 с.

68. *Nelder J. A.* A simplex method for function minimization / J. A. Nelder, R. Mead // *The Computer Journal.* — 1965. — Vol. 7, N. 4. — P. 308–313.

69. *Dantzig G. B.* The generalized simplex method for minimizing a linear form under linear inequality restraints / G. B. Dantzig, A. Orden, P. Wolfe // *Pacific Journal of Mathematics.* — 1955. — Vol. 5, N. 2. — P. 183–195.

70. *Cunningham W. H.* Theoretical properties of the network simplex method / W. H. Cunningham // *Mathematics of Operations Research.* — 1979. — Vol. 4, N. 2. — P. 196–208.

71. *Krivulin N. K.* A new algebraic solution to multidimensional minimax location problems with Chebyshev distance / N. K. Krivulin // *WSEAS Transactions on Mathematics.* — 2012. — Vol. 11, N. 7. — P. 605–614.

72. *Zimmermann K.* Disjunctive optimization, max-separable problems and extremal algebras / K. Zimmermann // *Theoretical Computer Science.* — 2003. — Vol. 293, N. 1. — P. 45–54.

73. *Tharwat A.* One class of separable optimization problems: solution method, application / A. Tharwat, K. Zimmermann // *Optimization.* — 2010. — Vol. 59, N. 5. — P. 619–625.

74. *Кривулин Н. К.* Экстремальное свойство собственного значения неразложимых матриц в идемпотентной алгебре и решение задачи размещения Ролса / Н. К. Кривулин // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия.* — 2011. — № 4. — С. 42–51.

75. *Кривулин Н. К.* Об алгебраическом решении задачи Ролса о размещении на плоскости с прямоугольной метрикой / Н. К. Кривулин, П. В. Плотников // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия.* — 2015. — Т. 2, № 2. — С. 194–201.

76. *Кривулин Н. К.* Использование тропической оптимизации для решения минимаксных задач размещения с прямоугольной метрикой на прямой / Н. К. Кривулин, П. В. Плотников // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия.* — 2016. — Т. 3, № 4. — С. 602–614.

77. *Krivulin N. K.* On an algebraic solution of the Rawls location problem in the plane with rectilinear metric / N. K. Krivulin, P. V. Plotnikov // *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics.* — 2015. — Vol. 48, N. 2. — P. 75–81.

78. *Krivulin N. K.* Using tropical optimization to solve minimax location problems with a rectilinear metric on the line / N. K. Krivulin, P. V. Plotnikov // *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics.* — 2016. — Vol. 49, N. 4. — P. 340–349.

79. *Плотников П. В.* Теоретические подходы к моделированию экономических явлений и процессов / П. В. Плотников // *Актуальные вопросы развития современного общества. Сборник материалов 4-й Международной научно-практической конференции. 18 апреля 2014 г. /Отв. ред. Ю. В. Вертакова.* — Курск, 2014. — С. 297–301.

80. *Плотников П. В.* Вопросы моделирования распределенных экономических систем / П. В. Плотников // *Тренды развития современного общества: управленческие, правовые, экономические и социальные аспекты. Сборник материалов 4-й Международной научно-практической конференции. 17-19 сентября 2014 г. /Отв. ред. А. А. Горохов.* — Курск, 2014. — С. 199–202.

81. *Кривулин Н. К.* О решении задачи размещения Ролса на плоскости с ограничениями / Н. К. Кривулин, П. В. Плотников // *Междисциплинарные исследования в области математического моделирования и информатики. Материалы 7-й научно-практической internet-конференции. 30-31 марта 2016 г. /Отв. ред. Ю. С. Нагорнов.* — Тольятти, 2016. — С. 18–22.

82. *Кривулин Н. К.* Исследование задачи размещения Ролса с прямоугольной метрикой на отрезке прямой / Н. К. Кривулин, П. В. Плотников // *Материалы 7-й всероссийской научной конференции по проблемам информатики СПИСОК-2017.* — СПб., 2017. — С. 522–528.

83. *Плотников П. В.* Прямое решение минимаксной задачи размещения в прямоугольной области на плоскости с прямоугольной метрикой / П. В. Плотников, Н. К. Кривулин // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления.* — 2018. — Т. 14, № 2.

84. *Golan J. S.* Semirings and their Applications / J. S. Golan. — Springer Science and Business Media, 2013. — 396 p.

85. *Macaulay F. S.* The algebraic theory of modular systems / F. S. Macaulay. — Cambridge University Press, 1994. — 140 p.

86. *Noether E.* Abstrakter Aufbau der idealtheorie in algebraischen Zahl-und Funktionenkörpern / E. Noether // *Mathematische Annalen.* — 1927. — Vol. 96, N. 1. — P. 26–61.

87. *Vandiver H. S.* Note on a simple type of algebra in which the cancellation law of addition does not hold / H. S. Vandiver // *Bulletin of the American Mathematical Society.* — 1934. — Vol. 40, N. 12. — P. 914–920.

88. *Kleene S. C.* Representation of events in nerve nets and finite automata / S. C. Kleene. — Rand project air force, Santa Monica, CA, 1951. — 102 p.

89. *De Schutter B.* On the ultimate behavior of the sequence of consecutive powers of a matrix in the max-plus algebra / B. De Schutter // *Linear Algebra and its Applications.* — 2000. — Vol. 307, N. 3. — P. 103–117.

90. *Cuninghame-Green R. A.* Minimax algebra / R. A. Cuninghame-Green. — Berlin: Springer-Verlag, 1979. — 258 p.

91. *Gaubert S.* Methods and applications of (max,+) linear algebra / S. Gaubert, M. Plus // *Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science. – Berlin.* — 1997. — P. 261–282.

92. *Litvinov G. L.* Maslov dequantization, idempotent and tropical mathematics: A brief introduction / G. L. Litvinov // *Journal of Mathematical Sciences.* — 2007. — Vol. 140, N. 3. — P. 426–444.

93. *Литвинов Г. Л.* Линейные функционалы на идемпотентных пространствах. Алгебраический подход / Г. Л. Литвинов, В. П. Маслов, Г. Б. Шпиз // *Доклады РАН.* — 1998. — Т. 363, № 3. — С. 298–300.

94. *Литвинов Г. Л.* Идемпотентная математика и интервальный анализ / Г. Л. Литвинов, В. П. Маслов, А. Н. Соболевский // *Вычислительные технологии.* — 2001. — Т. 6, № 6. — С. 47–70.

95. *Krivulin N. K.* Max-plus algebra models of queueing networks / N. K. Krivulin // *International Workshop on Discrete Event Systems WODES'96, University of Edinburgh, UK, Aug. 19-21, 1996.* — London:IEE, 1996. — Vol. 22, N. 3. — P. 76–81.

96. *Кривулин Н. К.* Применение методов тропической математики для оценки альтернатив на основе парных сравнений / Н. К. Кривулин, В. А. Агеев, И. В. Гладких // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления.* — 2017. — № 1. — С. 27–41.

97. *Krivulin N. K.* Tropical optimization problems with application to project scheduling with minimum makespan / N. K. Krivulin // *Annals of Operations Research.* — 2017. — Vol. 256, N. 1. — P. 75–92.

98. *Krivulin N. K.* Tropical optimization problems in time-constrained project scheduling / N. K. Krivulin // *Optimization.* — 2017. — Vol. 66, N. 2. — P. 205–224.

99. *Krivulin N. K.* Direct solution to constrained tropical optimization problems with application to project scheduling / N. K. Krivulin // *Computational Management Science.* — 2017. — Vol. 14, N. 1. — P. 91–113.

100. *Кривулин Н. К.* Решение задач математического программирования с использованием методов тропической оптимизации / Н. К. Кривулин, И. В. Романовский // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия.* — 2017. — Т. 4, № 3. — С. 448–458.

101. *Cuninghame-Green R. A.* Describing industrial processes with interference and approximating their steady-state behaviour / R. A. Cuninghame-Green // *Journal of the Operational Research Society.* — 1962. — Vol. 13, N. 1. — P. 95–100.

102. *Krivulin N. K.* A constrained tropical optimization problem: Complete solution and application example / N. K. Krivulin // *G. L. Litvinov, S. N. Sergeev (Eds.). Tropical and Idempotent Mathematics and Applications.* — Moscow: 2014. — P. 163–177.

103. *Krivulin N. K.* Extremal properties of tropical eigenvalues and solutions to tropical optimization problems / N. K. Krivulin // *Linear Algebra and its Applications.* — 2015. — Vol. 468. — P. 211–232.

104. *Weber A.* Theory of the Location of Industries / A. Weber. — University of Chicago Press, Chicago, 1929.

105. *Hakimi S. L.* Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph / S. L. Hakimi // *Operations research.* — 1964. — Vol. 12, N. 3. — P. 450–459.

106. *Eiselt H. A.* Pioneering developments in location analysis / H. A. Eiselt, V. Marianov // *Foundations of Location Analysis.* — 2011. — P. 3–22.

107. *Francis R. L.* Facility layout and location: an analytical approach / R. L. Francis, L. F. McGinnis, J. A. White. — Pearson College, 1992. — 592 p.

108. *Mirchandani P. B.* Discrete location theory / P. B. Mirchandani, R. L. Francis. — Chichester : Wiley-Interscience, 1991. — 555 p.

109. *Daskin M. S.* Network and discrete location: models, algorithms, and applications / M. S. Daskin. — Wiley-Interscience, 2011. — 520 p.

110. *Drezner Z.* Facility location: a survey of applications and methods / Z. Drezner. — New York: Springer, 1995. — 571 p.

111. *Nickel S.* Location theory: a unified approach / S. Nickel, J. Puerto. — Berlin,Heidelberg: Springer, 2005. — 437 p.

112. *Dearing P. M.* A network flow solution to a multifacility minimax location problem involving rectilinear distances / P. M. Dearing, R. L. Francis // *Transportation Science.* — 1974. — Vol. 8, N. 2. — P. 126–141.

113. *Brimberg J.* A note on convergence in the single facility minisum location problem / J. Brimberg, R. Chen // *Computers and Mathematics with Applications.* — 1998. — Vol. 35, N. 9. — P. 25–31.

114. *Ogryczak W.* Inequality measures and equitable approaches to location problems / W. Ogryczak // *Annals of Operations Research.* — 2007. — Vol. 167, N. 1. — P. 61–86.

115. *Francis R. L.* Letter to the Editor—Some Aspects of a Minimax Location Problem / R. L. Francis // *Operations Research.* — 1967. — Vol. 15, N. 6. — P. 1163–1169.

116. *Kolokol'tsov V. N.* Idempotent structures in optimization / V. N. Kolokol'tsov // *Journal of Mathematical Sciences.* — 2001. — Vol. 104, N. 1. — P. 847–880.

Приложение А

Программная реализация вычисления оптимальной области размещения точечного объекта

В приложении предложена программная реализация рассмотренных в главе 3 задач с использованием языка программирования R в среде Rgui 3.4.3 (стандартный графический интерфейс). Выбор языка R, среди других программных средств по обработке данных, обусловлен его кроссплатформенностью, доступностью (нулевая стоимость) и достаточно высокой скоростью обработки больших объемов данных.

A.1 Программная реализация решения минимаксной задачи размещения без ограничений на область размещения на языке R

Ниже представлена программная реализация решения минимаксной задачи размещения точечного объекта на плоскости с прямоугольной метрикой без ограничений на допустимую область размещения с использованием результатов, полученных в следствии 11. В результате работы программы получено графическое изображение с оптимальной областью размещения.

```
# Считывание массива исходных данных(координат точек) из файла
df <- read.table("C:\\data.txt", header = FALSE, sep = "", dec = ".")
```

```
#Введение обозначений для константных величин
a<-max(df[,1]-df[,2])
b<-max(-df[,1]+df[,2])
c<-max(df[,1]+df[,2])
d<-max(-df[,1]-df[,2])
mu<-max((a+b)/2,(c+d)/2)

#Вычисление вектора решения
f <- function(x) c((2*x-1)*mu+(1-x)*(a+c)/2-x*(b+d)/2,
(1-x)*(c-a)/2-x*(d-b)/2)

#Построение графика с набором исходных координат и решением
i<-min(df[,1],df[,2])-1
j<-max(df[,1],df[,2])+1
plot(i:j, i:j, type = "n")
segments(f(0)[1], f(0)[2], f(1)[1], f(1)[2], lwd=5, col= 'red')
points(df[,1],df[,2])
```

Определим сложность предложенного алгоритма. Для этого вычислим количество операций, которые должен выполнить процессор для получения результата. Пусть количество заданных точек n. Для начала, необходимо выполнить $4n$ арифметические операции для вычисления величины параметров и 55 операции для получения значения целевой функции и оптимальных координат области размещения. Таким образом потребуется $4n + 55$ операций. Сложность алгоритма можно считать $O(n)$.

A.2 Программная реализация решения минимаксной задачи размещения с ограничениями в виде отрезка прямой на языке R

Ниже представлена программная реализация решения минимаксной задачи размещения точечного объекта на плоскости с прямоугольной метрикой с ограничениями на допустимую область размещения в виде отрезка прямой линии с использованием результатов, полученных в следствии 14. В результате работы программы получено графическое изображение с оптимальной областью размещения.

```
# Считывание массива исходных данных(координат точек) из файла
df <- read.table("C:\\data.txt", header = FALSE, sep = "", dec = ".")
#Введение обозначений для константных величин
k<-const #коэффициент наклона прямой
q<-const #сдвиг прямой вдлоль вертикальной оси
f<-const #левая граница ограничений
g<-const #правая граница ограничений
a<-max(df[,1]-df[,2]+df[,3])+q
b<-max(-df[,1]+df[,2]+df[,3])-q
c<-max(df[,1]+df[,2]+df[,3])-q
d<-max(-df[,1]-df[,2]+df[,3])+q

#Вычисление решения
if (abs(k)>1)
{
mu<-max( (a+b)/2,(a*(k+1)+c*(k-1))/(2*k),
(b*(k+1)+d*(k-1))/(2*k), (c+d)/2,
a+min(f*(k-1),g*(k-1)) ,
b-max(f*(k-1),g*(k-1)), c-max(f*(k+1),g*(k+1)),
d+min(f*(k+1),g*(k+1)) )

f <- function(x) (1-x)*max(-max(-(mu-a)/(k-1),
```

```
-(-mu+b)/(k-1)),-max(-(mu-d)/(k+1), -(-mu+c)/(k+1)),f)-
x*max(-max(-(-mu+a)/(k-1), -(mu-b)/(k-1)),-max(-(-mu+d)/(k+1),
 -(mu-c)/(k+1)),-g)

points(f(0),k*f(0)+q, col="red", lwd=5)
abline(q, k)
}

#Вычисление решения
if (abs(k)<=1)
{
mu<-max( (a+b)/2,(a*(k+1)-d*(k-1))/(2*k), (b*(k+1)-c*(k-1))/(2*k),
(c+d)/2, a+g*(k-1) , b-f*(k-1), c-g*(k+1), d+f*(k+1) )

f <- function(x) (1-x)*max( (mu-a)/(k-1), (-mu+c)/(k+1),f)-
x*max( (mu-b)/(k-1),(-mu+d)/(k+1),-g)

points(f(0),k*f(0)+q, col="red", lwd=5)
abline(q, k)
}
```

Определим сложность предложенного алгоритма. Для этого вычислим количество операций, которые должен выполнить процессор для получения результата. Пусть количество заданных точек n. Для начала, необходимо выполнить $4(3n+1)$ арифметические операции для вычисления величины параметров и не более 48 операции для получения значения целевой функции, а также не более 42 операций на вычисление координат оптимального положения объекта. Таким образом потребуется $12n+94$ операций. Сложность алгоритма, при достаточно больших n можно считать $O(n)$.

A.3 Программная реализация решения минимаксной задачи размещения с ограничениями в виде прямоугольника на языке R

Ниже представлена программная реализация решения минимаксной задачи размещения точечного объекта на плоскости с прямоугольной метрикой с ограничениями на допустимую область размещения в виде прямоугольника с использованием результатов, полученных в следствии 15. В результате работы программы получено графическое изображение с оптимальной областью размещения.

```
# Считывание массива исходных данных(координат точек) из файла
df <- read.table("C:\\data.txt", header = FALSE, sep = "", dec = ".")

#Введение обозначений для константных величин
a<-max(df[,1]+df[,2]+df[,3])
b<-max(-df[,1]+df[,2]+df[,3])
c<-max(df[,1]-df[,2]+df[,3])
d<-max(-df[,1]-df[,2]+df[,3])
f<-const #левая граница ограничений для первой координаты
g<-const #правая граница ограничений для первой координаты
p<-const #левая граница ограничений для второй координаты
q<-const #правая граница ограничений для второй координаты
u<-max((a+c)/2,a-qq,c+pp)
v<-max((b+d)/2,b-qq,d+pp)
z<-max((a+d)/2,(b+c)/2)
#вычисление значения минимума целевой функции
mu<-max((u+v)/2,u-gg, v+ff, z)

#Вычисление решения
t <- function(x) (1-x)*max(-mu+u,f)-x*max(-mu+v,-g)
s <- function(y) (1-y)*max(-mu+a-t(y),-mu+b+t(y),p)
-y*max(-mu+d+t(y),-mu+c-t(y),-q)
```

```
sol <- function(x) c(t(x),s(x))

#Построение графика с набором исходных координат и решением
i<-min(df[,1],df[,2])-1
j<-max(df[,1],df[,2])+1
plot(i:j, i:j, type = "n",, main = "Оптимальная
зона для расположения", xlab = "x", ylab = "y")
segments(sol(0)[1], sol(0)[2], sol(1)[1], sol(1)[2],
lwd=5, col= 'red')
points(df[,1],df[,2])
```

Определим сложность предложенного алгоритма. Для этого вычислим количество операций, которые должен выполнить процессор для получения результата. Пусть количество заданных точек n. Для начала, необходимо выполнить $12n$ арифметические операции для вычисления величины параметров и 128 операции для получения значения целевой функции. Таким образом потребуется $12n + 128$ операций. Сложность алгоритма, при достаточно больших n можно считать $O(n)$.