

«УТВЕРЖДАЮ»

Ректор Федерального государственного  
бюджетного образовательного  
учреждения высшего образования  
"Владимирский государственный  
университет имени Александра  
Григорьевича и Николая Григорьевича  
Столетовых"

Анзор Михайлович Саралидзе

« 24 » *Май* 2018 г.

### О Т З Ы В

ведущей организации на диссертационную работу  
Банкевича Сергея Викторовича

“О монотонности интегральных функционалов при перестановках”,  
представленной на соискание учёной степени кандидата  
физико-математических наук по специальности  
01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические  
системы и оптимальное управление

Эффективность использования перестановок обусловлена их экстремальными свойствами. Среди них важнейшими являются свойства минимальности различных вариационных характеристик. К этим характеристикам относятся функционалы от производных или градиентов. Исследование минимальности таких функционалов (длин кривых, площадей поверхностей) для симметричных перестановок были начаты Я. Штейнером и Г. Шварцем в 19 веке. Именно в этих работах впервые изучались симметризации множеств и симметричные перестановки функций. Эти исследования были продолжены в монографии Г. Пойа и Г. Сегё. Систематическое исследование перестановок функций было начато в работах Г. Харди и Дж. Литтлвуда.

Центральное место в диссертации занимает вопрос о неравенстве вида

$$J(\bar{u}) \leq J(u), \quad (1)$$

где

$$J(u) = \int_{\Omega} F(x', u(x), \|Du\|) dx.$$

Здесь  $\bar{u}$  – монотонная перестановка функции  $u$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) = (x', x_n)$ ,

$$D = (a_1(x', u(x))D_1u, \dots, (a_{n-1}(x', u(x))D_{n-1}u, a(x, u(x))D_nu), \quad (2)$$

$\|\cdot\|$  – норма в  $\mathbb{R}^n$ , симметричная по последней координате,  $\Omega = \omega \times (-1, 1)$ , где  $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$  – ограниченная липшицева область,  $F$  – непрерывная функция на  $\bar{\omega} \times [0, \infty) \times [0, \infty)$ , которая выпукла по третьему аргументу, строго возрастает по нему и  $F(\cdot, \cdot, 0) = 0$ .

В начале первой главы найдены необходимые условия на весовую функцию  $a$  из (2) для выполнения неравенства (1) в случае кусочно линейных функций  $u$ . Отдельно

рассмотрен случай закрепленных на левом конце функций  $u$  таких, что  $u(\cdot, -1) = 0$ . После этого устанавливается, что найденные необходимые условия на  $a$  являются и достаточными для справедливости (1) на множестве неотрицательных кусочно линейных функций. Полученные результаты конкретизируются на случай интегрантов  $F(x', z, p)$ , имеющих степенной рост по  $z$  и  $p$ . Здесь в зависимости от показателей степеней роста по  $z$  и  $p$  доказывается неравенство (1) в классе неотрицательных липшицевых функций и неотрицательных функций из соболевского пространства.

Вторая глава посвящена доказательству неравенства (1) без ограничений роста по производной для одномерного случая функционала  $J$ :

$$J(u) = \int_{-1}^1 F(u(x), a(x, u(x))|u'(x)|) dx.$$

Этот вопрос тесно связан с эффектом М.А. Лаврентьева. В результате устанавливается необходимое и достаточное условие на вес  $a$ , обеспечивающее выполнение (1) в одномерном случае.

Параллельно в одномерном случае изучен и вопрос о справедливости неравенства

$$J(u^*) \leq J(u), \quad (3)$$

где  $u^*$  – симметричная перестановка функции  $u$ , для неотрицательных функций из соболевского пространства  $W_1^1(-1, 1)$  без ограничений на рост интегранта по производной. В доказательстве значительную роль играет цитируемая в диссертации работа [16]. Соискатель заполняет имеющийся в [16] пробел, который связан с обоснованием предельного перехода в неравенстве (3), выполненном для липшицевых функций, к произвольной допустимой функции.

В третьей главе исследуется вопрос о неравенстве типа Пойа-Сегё для функционалов вида

$$\mathcal{J}(u) = \int_{-1}^1 |u'(x)|^{p(x)} dx, \quad \mathcal{I}(u) = \int_{-1}^1 (1 + |u'(x)|)^{p(x)} dx,$$

а именно, о неравенствах вида  $\mathcal{J}(u^*) \leq \mathcal{J}(u)$  и  $\mathcal{I}(u^*) \leq \mathcal{I}(u)$ . Здесь основной интерес представляет функционал  $\mathcal{I}(u)$ . Найдены необходимые и достаточные условия на показатель  $p$  для справедливости неравенства  $\mathcal{I}(u^*) \leq \mathcal{I}(u)$  в случае произвольной функции  $u \in W_1^1(-1, 1)$ , равной нулю на границе интервала  $(-1, 1)$ .

Имеются следующие замечания.

1. В формуле (3) на странице 6 не указано, о какой норме для  $\mathcal{D}u$  идет речь. Об этом автор пишет позже, что затрудняет чтение.
2. При использовании соболевских пространств в области  $\Omega$  автор приводит неудачное обозначение  $W_q^1(\bar{\Omega})$ . Неудачным является и обозначение  $W_1^1([-1, 1])$ .

Несмотря на это, диссертационная работа оставляет благоприятное впечатление. Тема диссертации актуальна, автором проделана большая аналитическая работа и получены новые интересные результаты.

Автореферат правильно отражает результаты диссертации. Основные результаты своевременно опубликованы в четырех статьях, включенных в перечень рецензируемых научных изданий ВАК и приравненных к ним.

Результаты диссертации могут быть востребованы в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Московском, Владимирском и Санкт-Петербургском государственных университетах, Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН.

Диссертационная работа Сергея Викторовича Банкевича "О монотонности интегральных функционалов при перестановках" соответствует требованиям ВАК «О присуждении ученых степеней», а её автор заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Отзыв подготовлен доктором физико-математических наук, профессором кафедры математического образования и информационных технологий ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых» Алхутовым Юрием Александровичем.

Отзыв заслушан и одобрен на заседании кафедры математического образования и информационных технологий ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых» 22 мая 2018 года, протокол № 10.

Заведующий кафедрой  
математического образования и информационных технологий,  
кандидат физико-математических наук  
по специальности 01.01.06  
(математическая логика, алгебра  
и теория чисел), доцент  
E-mail: say\_go@mail.ru

Юлия Юрьевна Евсева

Профессор кафедры  
математического образования и информационных технологий,  
доктор физико-математических наук  
по специальности 01.01.02  
(дифференциальные уравнения,  
динамические системы и  
оптимальное управление),  
профессор  
E-mail: yurij-alkhutov@yandex.ru

Юрий Александрович Алхутов

**Сведения о ведущей организации:**

*Полное наименование:* Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

*Сокращенное наименование:* ВлГУ

*Почтовый адрес:* 600000, г. Владимир, ул. Горького, 87

*Факс:* (4922) 53-25-75, 33-13-91

*E-mail:* oid@vlsu.ru, *адрес официального сайта:* <http://www.vlsu.ru>

