

ОТЗЫВ

официального оппонента

о диссертации Банкевича Сергея Викторовича

«О монотонности интегральных функционалов при перестановках»
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.02 «Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление»

Диссертация С. В. Банкевича посвящена изучению обобщенных неравенств Пойа-Сегё. Эти неравенства для интегральных функционалов появились при решении экстремальных задач о геометрических и физических характеристиках областей при фиксированных параметрах таких как периметр, площадь, частота натянутой мембраны и т.д. При этом в неравенствах участвует симметричная перестановка функций. Классические результаты содержатся в монографии Пойа Г., Сегё Г., Изопериметрические неравенства в математической физике. М., ГИФМЛ, 1962. Дальнейшее развитие связано с обобщением вида интегральных функционалов, заменой симметричной перестановки на другие формы перестановок и исследованием вопроса о свойствах экстремальных функций, при которых неравенство становится равенством. Этим вопросам посвящены работы В. Kawohl, J. E. Brothers and W. P. Ziemer, A. Cianchi, G. Alberti and F. Serra Cassano и других математиков.

Таким образом, тема диссертации С. В. Банкевича актуальна и в теоретическом плане и с точки зрения дальнейших приложений.

Диссертация С. В. Банкевича состоит из введения, четырех глав, разбитых на 20 параграфов, заключения и списка литературы из 61 наименования. Общий объем работы составляет 73 стр.

Введение содержит подробный обзор известных результатов и методов теории, связанных с темой работы. В нем дан обстоятельный и полезный анализ достижений теории и важных проблем ее развития, обоснована актуальность поставленных в диссертации задач. Сформулированы основные результаты диссертации.

В Главе 0 даны необходимые определения.

В Главе 1 рассматривается функционал

$$J(u) := \int_{\Omega} F(x', u(x), \|Du\|) dx$$

с выпуклой функцией F и некоторой нормой $\|\mathcal{D}u\|$ в \mathbb{R}^n весового градиента u . Для неотрицательных функций рассматривается неравенство

$$J(\bar{u}) \leq J(u) \quad (1)$$

с монотонной перестановкой \bar{u} функции u . Сначала устанавливается ряд необходимых условий выполнения неравенства (1), а затем даются достаточные условия его выполнения для неотрицательных функций из класса Липшица и пространств Соболева при дополнительном ограничении роста функции F . Результаты этой и последующей главы существенно дополняют, а в определенном отношении исправляют работу F. Brock, *Weighted Dirichlet-type inequalities for Steiner symmetrization. Calc. Var. and PDEs*, 8:1 (1999), 15-25.

Глава 2 посвящена снятию условия ограниченного роста, наложенного в предыдущей главе, в одномерном случае пространства Соболева $W_1^1[-1, 1]$. Рассматривается функционал

$$J(u) := \int_{-1}^1 F(u(x), a(x, u(x))) |u'(x)| dx.$$

В случае кусочной монотонности функции $a(\cdot, u)$ доказано отсутствие "эффекта Лаврентьева", т.е. для данного функционала нижние грани по классам Липшица и Соболева совпадают. На этой основе получены достаточные условия выполнения неравенства Пойа-Сегё. Кроме этого, в главе 2 неравенство (1) доказано в самом общем виде, а также исследована задача для подпространства $W_1^1[-1, 1]$ функций таких, что $u(-1) = 0$.

Глава 3 посвящена обобщению неравенств Пойа-Сегё для функционалов с переменным показателем суммирования вида

$$\mathcal{J}(u) := \int_{-1}^1 |u'(x)|^{p(x)} dx$$

и

$$\mathcal{I}(u) := \int_{-1}^1 (1 + |u'(x)|^2)^{\frac{p(x)}{2}} dx.$$

Показано, что если неравенство $\mathcal{J}(u^*) \leq \mathcal{J}(u)$ выполняется для любой кусочно линейной функции $u \geq 0$, то параметр $p(x)$ постоянен, а для выполнения аналогичного неравенства $\mathcal{I}(u^*) \leq \mathcal{I}(u)$ автор находит необходимые и достаточные условия.

Оценивая диссертацию С. В. Банкевича в целом, отметим, что она представляет собой законченное научное исследование, выполненное на высоком уровне. Решения

всех поставленных задач снабжены полными, математически корректными обоснованиями. Незначительные неточности и опечатки в тексте легко устраняются и не затрудняют его понимание.

Постановки задач новые, интересные и соответствуют тем, которые возникают в различных вопросах вариационного исчисления. Считаю, что решенные в диссертации С. В. Банкевича задачи найдут полезные применения в этой теории.

Диссертация написана ясным языком, все ее положения четко изложены, все новые результаты подробно обоснованы. Они представляют собой новые достоверные факты. Общие положения подкреплены интересными примерами их применения. Автореферат правильно отражает основные результаты диссертации. Они своевременно опубликованы в четырех работах автора в изданиях, рекомендованных ВАК, и в пяти материалах конференций. Две работы выполнены автором лично. По теме диссертации С. В. Банкевич неоднократно выступал на международных научных конференциях и ведущих семинарах соответствующего профиля.

На основании изложенного считаю, что диссертация «О монотонности интегральных функционалов при перестановках» удовлетворяет всем требованиям п. 9 Положения ВАК РФ к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление», а ее автор, Банкевич Сергей Викторович, заслуживает присуждения ему искомой степени.

21 мая 2018 г.

Официальный оппонент

доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН,
главный научный сотрудник Управления научной и инновационной политики
Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего
образования «Российский университет дружбы народов»

117198, Центральный Федеральный округ, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д.6

Телефон: +7(495) 954 12 71

e-mail: nich@rad.pfu.edu.ru



Подпись гл. н. с. Степанова В. Д. заверяю

Степанов Владимир Дмитриевич

Первый проректор РУДН, проф. Кирабаев Н. С.