На правах рукописи

Банкевич Сергей Викторович

О монотонности интегральных функционалов при перестановках

Специальность 01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2018

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Назаров Александр Ильич**

Официальные оппоненты: **Степанов Владимир Дмитриевич,**
член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор,
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов», главный научный сотрудник

Сурначёв Михаил Дмитриевич,
доктор физико-математических наук,
Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук»,
старший научный сотрудник

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Защита состоится 14 июня 2018 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.49 при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Россия, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., дом 28, ауд. 405..

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9, а также на сайте https://disser.spbu.ru/files/disser2/disser/2b2QTcvhkz.pdf.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 198504, Россия, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., дом 28, ауд. 405., ученому секретарю диссертационного совета Д 212.232.49.

Автореферат разослан «___» ___________ 2018 года.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.232.49, доктор физико-математических наук, доцент Чурин Ю. В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Перестановки играют значимую роль в вариационном исчислении. Впервые симметричная перестановка (симметризация) была введена Штейнером в 1836 году. Штейнер работал над доказательством изопериметрического неравенства (задачей Дидоны) о максимальной площади плоской фигуры с фиксированным периметром. Штейнер используя симметризацию доказал в [1], что если максимум существует, он достигается на круге. Только в 1879 году Вейерштрасс доказал существование максимума методами вариационного исчисления.

Примерно во время появления доказательства в своей книге [2] лорд Рэлей сформулировал гипотезу о том, что среди всех плоских мембран заданной площади, закреплённых по краю, наименьшей основной частотой обладает круг (а точнее, предположил, что выполняется некоторая оценка первого собственного числа через меру области). Математически эта задача сводится к нахождению минимума первого собственного числа задачи Дирихле для оператора Лапласа, которая имеет вариационную природу. Гипотеза Рэлея была доказана независимо Фабером ([3]) и Краном ([4]) с использованием симметризации и получила в дальнейшем название неравенства Крана-Фабера. Отметим, что другая гипотеза Рэлея о наименьшей основной частоте закреплённой пластины была доказана лишь в 1995 году Надирашвили [5] с использованием варианта симметризации, предложенного ранее Пойа и Сегё.

Впоследствии изучение свойств перестановок получило дальнейшее развитие в работах Пойа и Сегё, подытоженное в классическом труде [6]. «Изопериметрические неравенства в математической физике». В книге при помощи симметризации доказано множество соотношений между различными геометрическими и физическими характеристиками областей, такими как уже упомянутые периметр, площадь, основная частота мембраны, основная частота закреплённой пластины, а также моментом инерции, жёсткостью кручения, ёмкостью и другими. Эти соотношения позволяют не только сформулировать утверждения относительно наиболее выгодных форм области с точки зрения разнообразных величин, но и оценить сложные для вычисления величины через те, которые получить просто.

В частности, в книге [6] доказано так называемое неравенство Пойа-Сегё, состоящее в следующем. Пусть функция $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ (здесь и далее $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$) гладкая и финитная, тогда выполнено неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^*(x)|^p dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p dx, \tag{1}$$

где u^* — симметричная перестановка функции u. И даже более общее утверждение: для $u \geqslant 0$ и для любой выпуклой $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $F \geqslant 0$

выполнено
$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} F(|\nabla u^*(x)|)dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} F(|\nabla u(x)|)dx. \tag{2}$$

Также, поскольку это неравенство может применяться для нахождения функций, доставляющих минимум функционала, особый интерес представляет вопрос, когда (2) превращается в равенство. Только в 1988 году Бразерс и Зимер ([7]) установили условия, при которых из равенства в (2) следует совпадение u и u^* с точностью до параллельного переноса.

В течение 80-х годов вышло несколько публикаций об обобщении неравенства Пойа-Сегё на функционалы вида
$$\int F(u)G(\|\nabla u\|)dx.$$
Далее, в работе [8] неравенство Пойа-Сегё распространено при некоторых (необходимых, судя по всему) ограничениях на функционалы вида
$$\int F(x', u)G(\|\nabla u\|)dx,$$
где норма $\|\cdot\|$ — некоторая взвешенная норма с весами, зависящими от x'. Доказательство дано для гладких функций u. Также, аналогичные неравенства были получены для монотонной перестановки.

Отметим ещё связанное с перестановками понятие поляризации, которое использьзуется для доказательства многих утверждений изопериметрического характера (см., например, [9; 10]).

Степень разработанности темы исследования. Существенно сложнее оказалось распространить неравенство на более общую зависимость от функции и от переменной, по которой происходит перестановка. Значительную роль в решении этого вопроса сыграла работа [11]. В ней для липшицевых функций при некоторых условиях на весовую функцию был получен аналог неравенства (2).
$$\int\limits_{\Omega} F(x', u^*(x), \|\mathcal{D}u^*\|)dx \leqslant \int\limits_{\Omega} F(x', u(x), \|\mathcal{D}u\|)dx, \tag{3}$$
где $x = (x_1, \ldots, x_n) = (x', x_n)$,
$$\mathcal{D}u = (a_1(x', u(x))D_1 u,\ \ldots,\ a_{n-1}(x', u(x))D_{n-1}u,\ a(x, u(x))D_n u).$$
Однако в переносе этого неравенства на общий случай содержится пробел. В [11] доказано, что если последовательность функций сходится в $W_1^1(\mathbb{R}^n)$, то подпоследовательность из симметризаций этих функций сходится там же слабо. Ввиду этого факта доказательство можно вести по следующей схеме.

– Неравенство доказывается для кусочно линейных функций u.
– Доказывается, что функционал слабо полунепрерывен снизу.

– Находится последовательность кусочно линейных функций u_n, приближающих предельную функцию u в смысле пространств Соболева ($u_n \to u$ в $W_1^1(\mathbb{R}^n)$) и в смысле функционала ($I(u_n) \to I(u)$). После чего можно написать

$$I(u^*) \leqslant \underline{\lim}\, I(u_n^*) \leqslant \lim I(u_n) = I(u).$$

Автор работы [11] постулировал существование u_n по существу без доказательства. Между тем, приближение функции в смысле функционала регулярными (в частности липшицевыми) функциями нельзя назвать простым вопросом. Известно множество примеров, когда даже инфимум функционала по естественной области определения функционала отличается от инфимума по множеству регулярных функций, в том числе и в одномерном случае. Для таких функционалов говорят о возникновении эффекта Лаврентьева.

В 1927 г. М. А. Лаврентьев обнаружил ([12]), что для интегрального функционала с выпуклым по производной и коэрцитивным интегрантом инфимум по абсолютно непрерывным функциям может быть строго меньше инфимума по липшицевым функциям. В [13] дан более простой пример, для которого возникает эффект Лаврентьева в одномерном случае.

В работе [14] получено знаменитое логарифмическое условие отсутствия эффекта Лаврентьева в многомерном случае, а также приведены простые примеры на плоскости, для которых эффект Лаврентьева имеет место.

В статье [15] показано, что для функционалов вида

$$\int_{-1}^{1} F(u(x), u'(x))dx$$

можно найти последовательность регулярных функций u_n, приближающих u и в $W_1^1[-1,1]$, и в смысле функционала. В частности, для таких функционалов эффект Лаврентьева отсутствует.

В статье [16] пробел в работе [11] частично закрыт для функционалов схожей структуры при помощи тонких результатов геометрической теории функций, полученных в работе [17], и приближения лагранжиана снизу.

Отметим ещё работу [18], в которой рассматривается неравенство Пойа-Сегё с весом для монотонных перестановок в двумерном случае при условии, что функция u закреплена на левом краю прямоугольника. Неравенство доказано при условии степенного роста интегранта по производной и убывания веса по y. Заметим, что условие на вес довольно ограничительны.

Цели и задачи. Целью диссертации является обобщение неравенства Пойа-Сегё как на более общие функционалы и формы зависимости от свободной переменной, функции и её производной, так и на случай монотонной перестановки, которая также представляет серьёзный интерес.

Основной задачей является ввести зависимость от переменной, по которой происходит перестановка.

Научная новизна. Выносимые на защиту положения являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Результаты представляют интерес для специалистов по вариационному исчислению и уравнениям в частных производных.

Методология и методы исследования. При доказательстве основных результатов диссертации были использованы классические методы вариационного исчисления, математического и функционального анализа, а также обобщение метода аппроксимации в смысле функционала, разработанного в [15]. В главе 2 использован разработанный автором оригинальный метод аппроксимации непрерывной функции многих переменных функциями с конечным числом монотонных участков при некоторых ограничениях.

Положения, выносимые на защиту.

– Получены необходимые условия на вес для выполнения неравенства Пойа-Сегё с весом для монотонной перестановки.
– Доказано неравенство Пойа-Сегё с весом для монотонной перестановки в случае ограниченного (степенного) роста интегранта .
– Доказано неравенство Пойа-Сегё с весом в одномерном случае без ограничений, лишь при необходимых условиях.
– Доказана необходимость условий, налагаемых в работе [11] на вес для выполнения неравенства Пойа-Сегё с весом для симметризации.
– В одномерном случае закрыт пробел в работе [11]: доказано неравенство Пойа-Сегё с весом для симметризации без дополнительных ограничений.
– Представлены необходимые и достаточные условия выполнения неравенства Пойа-Сегё с весом для монотонной перестановки на функциях, закреплённых на левом конце. Неравенство доказано в многомерном случае для интегрантов ограниченного роста по производной и в одномерном случае без дополнительных ограничений.
– Представлены необходимые и достаточные условия выполнения неравенства Пойа-Сегё с переменным показателем суммирования в одномерном случае. Показано, что прямое многомерное обобщение отсутствует.

Степень достоверности и апробация. Все результаты диссертации снабжены подробными доказательствами и опубликованы в ведущих научных изданиях. Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

– Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2006).

– Международная конференция «Теория приближений» (Санкт-Петербург, 2010).
– Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2010).
– Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвящённая 110-летию И. Г. Петровского (Москва, 2011).
– Международная школа “Variational Analysis and Applications” (Эриче, Италия, 2012).
– Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2016).
– Семинар им. В.И. Смирнова по математической физике в Санкт-Петербургском отделении математического института им. В.А.Стеклова РАН (Санкт-Петербург, рук: Н. Н. Уральцева, А. И. Назаров, Т. А. Суслина).
– Городской семинар по конструктивной теории функций (Санкт-Петербург, рук.: М. А. Скопина)
– Семинар по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики (Семинар Никольского) (Москва, рук.: О. В. Бесов).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [24—27], [28—32]. Работы [24; 27] опубликованы в журналах из перечня ВАК. Работы [25; 26] опубликованы в изданиях, удовлетворяющем достаточному условию включения в перечень ВАК — журнал «Calculus of Variations and Partial Differential Equations» и переводная версия журнала «Записки научных семинаров Ленинградского отделения математического института им. В.А. Стеклова АН СССР» («Journal of Mathematical Sciences») входят в систему цитирования Scopus.

Работы [24; 25] написаны в неразделимом соавторстве, за исключением оригинального метода аппроксимации, предложенного автором.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, содержащих 20 параграфов, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 73 страницы, включая 6 рисунков и 2 таблицы. Список литературы содержит 61 наименование.

Содержание работы

Во введении описаны актуальность темы исследования и степень ее разработанности, поставлены цели и задачи, аргументирована научная новизна, достоверность, теоретическая и практическая значимость результатов, перечислены использованные методы, выносимые на защиту положения, публикации и доклады по теме диссертации, кратко изложена структура работы.

В главе 0 диссертации введены обозначения, используемые в работе, а также приведены используемые известные факты со ссылками на источники.

Напомним определения перестановок. Пусть $\Omega = \omega \times (-1,1)$, где ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-1}$ с липшицевой границей. Обозначим $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = (x', y)$.

Для измеримой неотрицательной функции u, заданной на $\overline{\Omega}$ выполнена теорема о послойном представлении (см. [19, теорема 1.13]), состоящая в следующем. Пусть $\mathcal{A}_t(x') := \{y \in [-1,1] : \ u(x', y) > t\}$. Тогда имеет место равенство

$$u(x', y) = \int_0^\infty \mathcal{X}\{\mathcal{A}_t(x')\}(y)dt,$$

где $\mathcal{X}\{A\}$ — характеристическая функция множества A.

Определим симметричную перестановку измеримого множества $E \subset [-1,1]$ и симметричную перестановку (симметризацию по Штейнеру) неотрицательной функции $u \in W_1^1(\overline{\Omega})$.

$$E^* := [-\frac{\operatorname{meas} E}{2}, \frac{\operatorname{meas} E}{2}]; \qquad u^*(x', y) = \int\limits_0^\infty \mathcal{X}\{(\mathcal{A}_t(x'))^*\}(y)dt.$$

В тех же условиях определим монотонную перестановку множества E и функции $u \in W_1^1(\overline{\Omega})$.

$$\overline{E} := [1 - \operatorname{meas} E, 1]; \qquad \overline{u}(x', y) = \int\limits_0^\infty \mathcal{X}\{\overline{\mathcal{A}_t(x')}\}(y)dt.$$

В главе 1 диссертации изучается неравенство, аналогичное неравенству (3), с монотонной перестановкой вместо симметризации.

Определим множество $\mathfrak{F}$ непрерывных функций $F : \overline{\omega} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, выпуклых и строго возрастающих по третьему аргументу, удовлетворяющих $F(\cdot, \cdot, 0) \equiv 0$.

Рассмотрим функционал

$$J(u) = \int\limits_\Omega F(x', u(x), \|\mathcal{D}u\|)dx,$$

где $F \in \mathfrak{F}$, $\|\cdot\|$ — некоторая норма в $\mathbb{R}^n$, симметричная по последней координате,

$$\mathcal{D}u = (a_1(x', u(x))D_1 u, \ \ldots, \ a_{n-1}(x', u(x))D_{n-1}u, \ a(x, u(x))D_n u)$$

— градиент u с весом (обратите внимание, что только вес при $D_n u$ зависит от y), $a(\cdot,\cdot) : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и $a_i(\cdot,\cdot) : \overline{\omega} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — непрерывные функции. Здесь и далее индекс i пробегает от 1 до $n-1$.

Рассмотрим неравенство

$$J(\overline{u}) \leqslant J(u) \tag{4}$$

В § 1.1 вводятся необходимые обозначения.

В § 1.2 устанавливаются условия, необходимые для выполнения неравенства (4).

Теорема 1. **i)** *Если неравенство* (4) *выполняется для некоторой* $F \in \mathfrak{F}$ *и произвольной кусочно линейной* u, *то вес* a *чётен по* y, *то есть* $a(x', y, v) \equiv a(x', -y, v)$.

ii) *Если неравенство* (4) *выполняется для произвольной* $F \in \mathfrak{F}$ *и произвольной кусочно линейной* u, *то вес* a *удовлетворяет неравенству*

$$a(x', s, v) + a(x', t, v) \geqslant a(x', 1-t+s, v), \qquad x' \in \overline{\omega},\ -1 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1,\ v \in \mathbb{R}_+. \tag{5}$$

Также получены необходимые условия в случае закреплённых на левом конце функций.

Теорема 2. *Если неравенство* (4) *выполняется для произвольной* $F \in \mathfrak{F}$ *и произвольной кусочно линейной* u, *закреплённой на левом конце:* $u(\cdot, -1) \equiv 0$, *то вес* a *удовлетворяет неравенству* (5).

В § 1.3 доказывается неравенство (4) для кусочно линейных u.

Лемма 1. *Пусть функция* $a(x', \cdot, u)$ *чётна и удовлетворяет условию* (5). *Тогда, если* u *— неотрицательная кусочно линейная функция, то* $J(u) \geqslant J(\overline{u})$.

Лемма 2. *Пусть функция* $a(x', \cdot, u)$ *удовлетворяет условию* (5). *Тогда, если* u *— неотрицательная кусочно линейная функция, удовлетворяющая* $u(\cdot, -1) \equiv 0$, *то* $J(u) \geqslant J(\overline{u})$.

В § 1.4 устанавливается слабая полунепрерывность функционала J и доказывается теорема, которая в дальнейшем является основой для предельных переходов.

Теорема 3. *Пусть* $B \subset A \subset W_1^1(\overline{\Omega})$. *Предположим, что для каждого* $u \in A$ *найдётся последовательность* $u_k \in B$ *такая, что* $u_k \to u$ *в* $W_1^1(\overline{\Omega})$ *и* $J(u_k) \to J(u)$. *Тогда*

i) *Если для любой функции* $v \in B$ *выполнено* $J(v^*) \leqslant J(v)$, *то для любой функции* $u \in A$ *будет выполнено* $J(u^*) \leqslant J(u)$.

ii) *Если для любой функции* $v \in B$ *выполнено* $J(\overline{v}) \leqslant J(v)$, *то для любой функции* $u \in A$ *будет выполнено* $J(\overline{u}) \leqslant J(u)$.

В § 1.5 неравенство (4) доказывается для интегрантов с ограниченным ростом по производной.

Теорема 4. *Пусть функция* $a(x', \cdot, u)$ *чётна и удовлетворяет условию* (5). *Тогда*

i) *Неравенство (4) верно для произвольной неотрицательной* $u \in Lip(\overline{\Omega})$.

ii) *Предположим, что для любых $x' \in \overline{\omega}, z \in \mathbb{R}_+, p \in \mathbb{R}$ функция F удовлетворяет неравенству*

$$F(x', z, p) \leqslant C(1 + |z|^{q^*} + |p|^q),$$

где $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$, если $q < n$, либо q^* любое в противном случае. Если $q \leqslant n$, то дополнительно предположим, что веса a и a_i ограничены. Тогда неравенство (4) верно для произвольной неотрицательной $u \in W^1_q(\overline{\Omega})$.

Теорема 5. *Пусть функция $a(x', \cdot, u)$ удовлетворяет условию* (5). *Тогда*

i) *Неравенство (4) верно для произвольной неотрицательной $u \in Lip(\overline{\Omega})$, удовлетворяющей $u(\cdot, -1) \equiv 0$.*

ii) *Предположим, что для любых $x' \in \overline{\omega}, z \in \mathbb{R}_+, p \in \mathbb{R}$ функция F удовлетворяет неравенству*

$$F(x', z, p) \leqslant C(1 + |z|^{q^*} + |p|^q),$$

где $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$, если $q < n$, либо q^* любое в противном случае. Если $q \leqslant n$, то дополнительно предположим, что веса a и a_i ограничены. Тогда неравенство (4) верно для произвольной неотрицательной $u \in W^1_q(\overline{\Omega})$, удовлетворяющей $u(\cdot, -1) \equiv 0$.

Глава 2 диссертации посвящена снятию условия ограниченного роста с интегранта. Это удаётся сделать только в одномерном случае, поэтому далее $u \in W^1_1[-1, 1]$ и

$$J(u) = \int_{-1}^{1} F(u(x), a(x, u(x))|u'(x)|)\, dx.$$

В § 2.1 формулируется одномерный вариант задачи.

В § 2.2 удаётся распространить результат статьи [15] на случай функционала J и доказать отсутствие эффекта Лаврентьева в случае кусочной монотонности веса.

Лемма 3. *Пусть a — непрерывная функция, $a(\cdot, u)$ возрастает на $[-1, 0]$ и убывает на $[0, 1]$ для всех $u \geqslant 0$. Тогда для любой функции $u \in W^1_1[-1, 1]$, $u \geqslant 0$, найдётся последовательность $\{u_k\} \subset Lip[-1, 1]$, удовлетворяющая*

$$u_k \to u \text{ в } W^1_1[-1, 1] \quad \text{и} \quad J(u_k) \to J(u). \tag{6}$$

Теорема 6. *Пусть функция a непрерывна, чётна, убывает на $[0, 1]$ и удовлетворяет неравенству* (5). *Тогда для любой $u \in W^1_1[-1, 1]$ выполнено $J(u^*) \leqslant J(u)$.*

В § 2.3 доказано несколько важных свойств весовых функций, удовлетворяющих необходимым условиям. В частности установлена структура множества нулей весовых функций.

В § 2.4 с веса снимается требование монотонности и, тем самым, неравенство (4) доказано в наиболее общем виде.

Теорема 7. *Пусть $F \in \mathfrak{F}$, функция $u \in W_1^1[-1,1]$ неотрицательна, и весовая функция $a : [-1,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ непрерывна и допустима для u. Тогда справедливо неравенство* (4).

В § 2.5 завершается доказательство для функций, закреплённых на левом конце.

Теорема 8. *Пусть $F \in \mathfrak{F}$, функция $u \in W_1^1[-1,1]$ неотрицательна, $u(-1) = 0$, весовая функция $a : [-1,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ непрерывна и удовлетворяет неравенству* (5). *Тогда справедливо неравенство* (4).

В § 2.6 доказано, что условия, накладываемые на вес в работе [11], являются необходимыми в случае симметричной перестановки.

Теорема 9. *Если неравенство* (3) *выполняется для произвольной $F \in \mathfrak{F}$ и произвольной кусочно линейной u, то вес a — чётная и выпуклая по первому аргументу функция.*

И наконец, в § 2.7 закрывается пробел в работе [11] в одномерном случае.

Теорема 10. *Пусть $F \in \mathfrak{F}$, функция $u \in W_1^1[-1,1]$ неотрицательна, и непрерывная весовая функция $a : [-1,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ чётна и выпукла по первому аргументу. Тогда справедливо неравенство* (3).

В главе 3 диссертации рассмотрено обобщение неравенства Пойа-Сегё на случай переменного показателя суммирования. А именно, рассматриваются два функционала:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}(u) &= \int_{-1}^{1} |u'(x)|^{p(x)} dx \\
\mathcal{I}(u) &= \int_{-1}^{1} (1 + |u'(x)|^2)^{\frac{p(x)}{2}} dx.
\end{aligned}
$$

Подобные функционалы возникают при моделировании электрореологических жидкостей (см., напр., [20; 21]). В частности, в настоящее время активно изучаются эллиптические уравнения с $p(x)$-лапласианом в качестве главного члена. Литература в этой области обширна, см. напр. [22; 23] и ссылки оттуда.

В § 3.1 ставится задача и вводятся обозначения.

В § 3.2 получены условия, необходимые для выполнения неравенств $\mathcal{J}(u^*) \leqslant \mathcal{J}(u)$ и $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$.

Теорема 11. *Пусть $\mathcal{J}(u^*) \leqslant \mathcal{J}(u)$ выполнено для любой кусочно линейной функции $u \geqslant 0$. Тогда $p(x) \equiv const$.*

То есть изучение аналога неравенства Пойа-Сегё для функционала $\mathcal{I}$ теряет смысл.

Теорема 12. *Если неравенство $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$ выполняется для всех кусочно линейных $u \geqslant 0$, то p чётна и выпукла. Более того, выпукла следующая функция:*

$$K(s, x) = s(1 + s^{-2})^{\frac{p(x)}{2}}, \qquad s > 0,\ x \in [-1, 1].$$

В § 3.3 показано, что условия, необходимые для выполнения неравенства $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$, являются и достаточными.

Лемма 4. *Пусть p чётна, а K выпукла по совокупности переменных. Тогда для любой кусочно линейной функции $u \in \overset{o}{W}{}_1^1 [-1, 1]$ выполнено $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$.*

Теорема 13. *Пусть p чётна, а K выпукла по совокупности переменных. Тогда для любой функции $u \in \overset{o}{W}{}_1^1 [-1, 1]$ выполнено $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$.*

Условие выпуклости функции K есть на самом деле неявное условие на функцию p. В § 3.4 приведены некоторые явные достаточные условия выполнения неравенства $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$.

Выпуклость функции K равносильна неотрицательности гессиана K (если есть выпуклость по какому-нибудь направлению: K всегда выпукла по s), которая в свою очередь сводится к условию

$$qq'' \geqslant q'^2 B(w, q),$$

где $w = \frac{1}{s^2}$, $q(x) = p(x) - 1$,

$$B(w, q) = \frac{q(4w - (w+3)\ln(w+1)) - \frac{w-1}{w}\ln(w+1) + 4\frac{w}{\ln(w+1)} - 4}{2(qw+1)} \cdot \frac{q}{q+1}.$$

Теорема 14. *Пусть $p(x) \geqslant 1$ — чётная непрерывная функция на $[-1, 1]$.*

i) *Если функция $(p(x) - 1)^{0.37}$ выпукла, то неравенство $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$ выполнено для любой неотрицательной $u \in \overset{o}{W}{}_1^1 [-1, 1]$.*

ii) *Если $p(x) \leqslant 2.36$ для всех $x \in [-1, 1]$ и функция $\sqrt{p(x) - 1}$ выпукла, то неравенство $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$ выполнено для произвольной неотрицательной $u \in \overset{o}{W}{}_1^1 [-1, 1]$.*

В § 3.5 описаны численно-аналитические методы для получения оценок, на которых основаны выводы теоремы 14. Пусть $\mathcal{B}(q) \equiv \sup\limits_{w>0} B(w, q)$. Тогда

$$\sup_{q\geqslant 0}\mathcal{B}(q) = \limsup_{q\to+\infty}\mathcal{B}(q) \leqslant 0.63; \tag{7}$$

$$\sup_{0\leqslant q\leqslant 1.36}\mathcal{B}(q) \leqslant 0.5. \tag{8}$$

Наконец, в § 3.6 показано, что прямое распространение неравенства $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$ на многомерный случай несодержательно.

Теорема 15. *Если* $\int\limits_\Omega (1+|\nabla u^*(x)|^2)^{\frac{p(x)}{2}}\,dx \leqslant \int\limits_\Omega (1+|\nabla u(x)|^2)^{\frac{p(x)}{2}}\,dx$ *для любой неотрицательной функции* $u \in \overset{o}{W}{}_1^1(\overline{\Omega})$, *то* $p(x',y)$ *не зависит от* y.

В заключении перечисляются основные результаты работы.

Работа поддержана грантом РФФИ 18-01-00472.

Список литературы

1. *Steiner J.* Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze // J. Reine Angew. Math. — 1838. — Т. 18. — С. 281—296.
2. *Стретт (лорд Рэлей) Д. В.* Теория звука. — М. : ГИТТЛ, 1995.
3. *Faber G.* Beweis, dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt // Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. München, Math.-Phys. Kl. — 1923. — С. 169—172.
4. *Krahn E.* Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises // Math. Ann. — 1925. — Т. 94. — С. 97—100.
5. *Nadirashvili N.* Rayleigh's conjecture on the principal frequency of the clamped plate // Arch. Rational Mech. Anal. — 1995. — Т. 129. — С. 1—10.
6. *Полиа Г.*, *Сегё Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. — М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1962.
7. *Brothers J. E.*, *Ziemer W. P.* Minimal rearrangements of Sobolev functions // J. Reine Angew. Math. — 1988. — Т. 384. — С. 153—179.
8. *Kawohl B.* On the isoperimetric nature of a rearrangement inequality and its consequences for some variational problems // Arch. Rat. Mech. Anal. — 1986. — Т. 94, вып. 3. — С. 227—243.
9. *Дубинин В. Н.* Преобразование функций и принцип Дирихле // Матем. заметки. — 1985. — Т. 38, вып. 1. — С. 49—55.
10. *Solynin A. Y.*, *Zalgaller V. A.* An isoperimetric inequality for logarithmic capacity of polygons // Ann. Math. — 2004. — Т. 159, вып. 1. — С. 277—303.

11. *Brock F.* Weighted Dirichlet-type inequalities for Steiner symmetrization // Calc. Var. and PDEs. — 1999. — Т. 8, № 1. — С. 15—25.

12. *Lavrentieff M.* Sur quelques problèmes du calcul des variations // Ann. Mat. Pura Appl. — 1927. — Т. 4, вып. 1. — С. 7—28.

13. *Mania B.* Sopra un esempio di Lavrentieff // Boll. Un. Mat. Ital. — 1934. — Т. 13. — С. 147—153.

14. *Zhikov V. V.* On Lavrentiev's Phenomenon // Russian J. Math. Phys. — 1995. — Т. 3, № 2. — С. 249—269.

15. *Alberti G.*, *Serra Cassano F.* Non-occurrence of gap for one-dimensional autonomous functionals // Proceedings of "Calc. Var., Homogen. and Cont. Mech." / под ред. G. Bouchitté, G. Buttazzo, P. Suquet. — Singapore, 1994. — С. 1—17.

16. *Esposito L.*, *Trombetti C.* Steiner symmetrization: a weighted version of Pólya-Szegö principle // NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. — 2007. — Т. 14, вып. 1/2. — С. 219—231.

17. *Cianchi A.*, *Fusco N.* Steiner symmetric extremals in Pólya-Szegö type inequalities // Adv. Math. — 2006. — Т. 203, вып. 2. — С. 673—728.

18. *Landes R.* Some remarks on rearrangements and functionals with non-constant density // Math. Nachr. — 2007. — Т. 280, № 5/6. — С. 560—570.

19. *Либ Э.*, *Лосс М.* Анализ. — Новосибирск : Научная книга, 1998.

20. *Rajagopal K. R.*, *Ružička M.* On the modeling of electrorheological materials // Mech. Research Comm. — 1996. — Вып. 23. — С. 401—407.

21. *Ružička M.* Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory. Т. 1748. — Berlin : Springer, 2000. — (Lecture Notes in Mathematics).

22. Lebesgue and Sobolev spaces with Variable Exponents. Т. 2017 / L. Diening [и др.]. — Berlin : Springer, 2011. — (Lecture Notes in Mathematics).

23. *Жиков В. В.* О вариационных задачах и нелинейных эллиптических уравнениях с нестандартными условиями роста. — Новосибирск : Т. Рожковская, 2017.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в рецензируемых изданиях

24. *Банкевич С. В.*, *Назаров А. И.* Об обобщении неравенства Пойа-Сеге для одномерных функционалов // Доклады Академии Наук. — 2011. — Т. 438, № 1. — С. 11—13.
25. *Bankevich S. V.*, *Nazarov A. I.* On monotonicity of some functionals under rearrangements // Calc. Var. and PDEs. — 2015. — Т. 53, № 3/4. — С. 627—647.
26. *Банкевич С. В.* О монотонности некоторых функционалов при монотонной перестановке по одной переменной // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2016. — Т. 444. — С. 5—14.
27. *Банкевич С. В.* О неравенстве Пойи–Сегё для функционалов с переменным показателем суммирования // Функц. анализ и его прил. — 2018. — Т. 52, вып. 1. — С. 56—60.

Прочие публикации

28. *Банкевич С. В.*, *Назаров А. И.* О поведении некоторых функционалов при монотонных перестановках // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. — Владимир, 2006. — С. 26.
29. *Банкевич С. В.* О свойствах монотонной перестановки // Международная конференция «Теория приближений». Тезисы докладов. — СПб, 2010. — С. 3.
30. *Банкевич С. В.* Об эффекте Лаврентьева для одномерных функционалов // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. — Владимир, 2010. — С. 28.
31. *Bankevich S. V.* On monotonicity of some functionals under rearrangements // Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвящённая 110-летию И. Г. Петровского. Сборник тезисов. — М., 2011. — С. 14.
32. *Bankevich S. V.* The Pólya-Szegő type inequality with variable exponent // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. — 2016. — С. 242.

Банкевич Сергей Викторович

О монотонности интегральных функционалов
при перестановках

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография ______________________________________