САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Калагов Георгий Алибекович

НЕПЕРТУРБАТИВНОЕ РЕНОРМГРУППОВОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СКЕЙЛИНГОВОГО ПОВЕДЕНИЯ

Специальность 01.04.02 —
«теоретическая физика»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2018

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Налимов Михаил Юрьевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН
Деркачев Сергей Эдуардович

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Объединённого института ядерных исследований
Гладышев Алексей Валерьевич

Ведущая организация: Петербургский институт ядерной физики им. Б. П. Константинова Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»

Защита состоится «14» июня 2018 г. в 15 часов 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.232.24, созданного на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199004, Санкт-Петербург, Средний пр., В.О., д. 41/43, ауд. 304.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького СПбГУ и на сайте https://disser.spbu.ru/

Автореферат разослан «____» ____________ 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д. ф.-м. н. Аксёнова Елена Валентиновна

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования.

Наиболее универсально и естественно скейлинговые явления в системах различной физической природы описываются теоретико-полевыми методами. Самым распространённым и даже каноническим инструментом реализации этих подходов является теория возмущений. Несмотря на её мощь, вопрос об аналитических свойствах пертурбативных разложений остаётся за скобками конструктивного анализа: метод не контролирует вклады старших порядков. Поэтому единственным основанием использования теории возмущений является априорное предположение о несущественности высших поправок. Однако оказывается, что практически все ряды носят асимптотический характер и имеют нулевой радиус сходимости, кроме того, формально малый параметр разложения в реальных физических системах вовсе не мал. Для извлечения числовых результатов в подобных ситуациях применяют процедуру пересуммирования по Борелю-Лерою доступных членов разложения. Информация, необходимая для проведения пересуммирования, содержится не только в начальных порядках разложения, но и в асимптотике высоких порядков, далее АВП. Поэтому методы исследования АВП, основанные на инстантонном анализе, являются ключевым инструментом для восстановления функции по соответствующему асимптотическому разложению. Подчеркнём, что инстантонный анализ играет роль непертурбативного дополнения к теории возмущений и придаёт ей полноту: результатом теперь является не формальное разложение величины, а её числовое значение, допускающее сравнение с результатами других подходов.

Альтернативным методом исследования скейлингового поведения, не связанным с существованием в модели малых параметров, является метод непертурбативной ренормгруппы. Этот подход в форме метода эффективного усреднённого действия (effective average action, далее EAA) лишён недостатков теории возмущений и может быть использован не только при малых значениях параметров разложения, но и в пределе сильной связи, поэтому сейчас пользуется популярностью и применяется при исследовании фазовых переходов и скейлинговых явлений в задачах квантовой теории поля и статистической физики [1].

В рамках инстантонного анализа в данной диссертации рассматриваются скалярная модель ϕ^3 [2] и $SU(N)$-симметричная модель типа ϕ^4 с комплексным антисимметричным матричным полем [3]; в рамках непертурбативной ренормализационной группы (РГ) динамическая модель A [4] с турбулентным полем скорости Крейчнана [5].

Модель ϕ^3 с мнимым зарядом связана с описанием критического поведения вблизи края Янга-Ли, а также с набирающими популярность кубическими PT-симметричными полевыми моделями.

Эффективная $SU(N)$-симметричная модель с комплексным антисимметричным матричным полем ранга $N = 2s + 1$ описывает поведение системы фермионов с высшим спином $s > 1/2$ в окрестности точки перехода в сверхтекучее/сверхпроводящее состояние. Вопросы куперовского спаривания и магнетизм активно исследуются в таких системах [6].

Модель A принадлежит изинговскому классу универсальности, который включает непосредственно изинговский магнетик, бинарные смеси и критическую точку жидкость-пар [4]. Критическая система чрезвычайно чувствительна к возмущениям ввиду сингулярного поведения сжимаемости, объёмной вязкости, восприимчивости и т.д. Учёт сторонних факторов: турбулентного течения, стратификации, примесей и т.д. – может изменить «чистое» автомодельное поведение либо вовсе породить иные скейлинговые режимы с новыми критическими показателями. Среди этих факторов особую роль занимает развитая турбулентность, характеризующаяся, как и термодинамические критические явления, сильными нелинейными флуктуациями и степенными асимптотиками корреляционных функций в инфракрасном (ИК) пределе. Поэтому анализ влияния развитой турбулентности на динамическое критическое поведение является сегодня предметом многочисленных исследований.

Степень разработанности темы исследования. Нахождение АВП в полевых моделях было предложено Л. Липатовым в работе [7]. Идея липатовского подхода заключается в экстраполяции метода перевала на функциональный интеграл. Метод был развит для исследования разнообразных равновесных теоретико-полевых моделей и моделей динамического критического поведения.

Метод непертурбативной РГ в форме ЕАА первоначально был применён к моделям теории поля и равновесной статистической физики [1], однако позже он показал свою эффективность и при исследовании неравновесных систем: модели A и C критической динамики, стохастическое уравнение Навье-Стокса, модель Крейчнана пассивного переноса примеси, модель перколяции, модель Кардара-Паризи-Занга.

Целью данной работы является исследование критического поведения и фазовых переходов в перечисленных выше моделях в рамках непертурбативного формализма: инстантонного анализа и метода эффективного усреднённого действия.

Достижение поставленных целей связано с решением следующих задач:

1. Для модели ϕ^3 в размерной регуляризации $d = 6 - \varepsilon$ в схеме минимальных вычитаний (MS) с помощью инстантонного анализа найти АВП разложений по заряду частично ренормированных функций Грина. Из требования их УФ конечности получить АВП вычетов в простом полюсе по ε констант ренормировки. Используя последние, найти АВП β-функции и аномальных размерностей. Далее найти АВП ε-разложения индекса Фишера и провести процедуру его пересуммирования по методу Бореля-Лероя на основе известных на сегодня четырёхпетлевых расчётов.

2. Для эффективной $SU(N)$-симметричной двухзарядной матричной модели типа Ландау-Гинзбурга в размерной регуляризации $d = 4 - \varepsilon$ в схеме MS с помощью инстантонного анализа найти АВП разложений β-функций. Провести борелевское суммирование уравнений Гелл-Манна-Лоу на основе известных на сегодня пятипетлевых ренормгрупповых расчётов и исследовать фазовый портрет на предмет наличия ИК-устойчивых фиксированных точек. Включить в полевое действие старшие вершины и провести мультипликативную ренормировку в одной петле, рассматривая новые члены в качестве составных операторов. Оценить температуру фазового перехода.

3. Рассматривая модель A с турбулентным перемешиванием Крейчнана в формализме эффективного усреднённого действия, решить непертурбативное ренормгрупповое уравнение. Исследовать поведение решений

в ИК области. Найти устойчивые скейлинговые режимы и вычислить соответствующие критические показатели.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Вычислена АВП индекса Фишера в модели ϕ^3. Сравнение асимптотических выражений коэффициентов разложения с их точными величинами обнаруживает факт отклонения последних от своей асимптотики, что объясняет заметное расхождение значений индекса Фишера, полученного в рамках различных реализаций проведённого борелевского суммирования.

2. В двухзарядной $SU(N)$-симметричной матричной модели найдена АВП β-функций. Показано, что аналитические свойства петлевых разложений уравнений Гелл-Манна-Лоу зависят от матричной структуры инстантона и от положения зарядов модели на фазовой плоскости. Показано, что в случае $N \geq 4$ в трёхмерной модели отсутствуют ИК-притягивающие фиксированные точки. Ренормгрупповые траектории, стартуя с различных начальных значений, выходят из области устойчивости системы, что трактуется как указание на существование в системе фазового перехода первого рода. Ренормгрупповой анализ составных операторов, проведённый в однопетлевом приближении, показывает, что температура обнаруженного фазового перехода в сверхтекучее/сверхпроводящее состояние превышает значение, получаемое в приближении теории среднего поля Ландау (которая к тому же предсказывает непрерывный фазовый переход при любых значениях N). Произведена оценка температуры фазового перехода. Двумерная система оказывается менее «универсальной», здесь также отсутствуют ИК-устойчивые фиксированные точки РГ потока, но лишь траектории с близкими к нулю стартовыми значениями могут покинуть области устойчивости.

3. С помощью непертурбативной ренормгруппы подтверждены качественные выводы однопетлевых расчётов, что модель критической динамики A с учётом развитых турбулентных флуктуаций, моделируемых ансамблем Крейчнана, может демонстрировать четыре скейлинговых режима, в зависимости от соотношений параметра ζ и размерности d: тривиальная гауссова точка, чистая модель A, турбулентный перенос пассивного скаляра и нетривиальный режим, где критические и турбулентные флуктуации одинаково существенны. Оценены значения критических показателей, ко-

торые, однако, оказываются неуниверсальными, а зависят от параметра, задающего сжимаемость системы.

Научная новизна. В диссертации впервые решены следующие задачи:

1. Найдена АВП квантово-полевых разложений в скалярной модели ϕ^3 и использована в процессе борелевского суммирования;

2. Исследованы АВП в матричной полевой модели. Разработана и применена техника борелевского суммирования для моделей с несколькими константами связи. Установлено влияние числа спиновых компонент N на макроскопическое поведение фермионной системы;

3. Скейлинговое поведение динамической модели с турбулентным переносом исследовано в рамках метода усреднённого эффективного действия.

Научная и практическая значимость. Полученные в диссертации результаты должны стимулировать развитие непертурбативных методов применительно к анализу скейлингового поведения нелинейных коррелированных систем, где стандартные теоретико-возмущенческие подходы либо дают неполное описание, либо их применение затруднительно. Качественные и количественные результаты могут быть использованы при построении теоретической базы экспериментальных исследований коллективов вырожденных ферми-частиц с высоким спином и различных ко́мплексных систем вблизи их критичности.

Апробация работы. Полученные результаты обсуждались и докладывались на следующих научных конференциях и школах: Международная студенческая конференция "Science and Progress" (Санкт-Петербург, Россия, 2014 г.); 47, 48, 49-я Школа ПИЯФ по Физике Конденсированного Состояния (Санкт-Петербург, Россия, 2013, 2014, 2015 г.); «XIX International Scientific Conference of Young Scientists and Specialists» (Дубна, Россия, 2015 г.); «Small Triangle Meeting» (Медзилаборце, Словакия, 2017 г.); «The 10th CHAOS 2017 International Conference» (Барселона, Испания, 2017 г.); «Mathematical Modeling and Computational Physics» (Дубна, Россия, 2017 г.).

Личный вклад. Вошедшие в диссертацию результаты были получены автором лично либо при его непосредственном участии.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в журналах, включённых в перечень ВАК и индексируемых базами данных «Scopus», «РИНЦ» и «Web of Sciense», в виде четырёх печатных работ [1–4].

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и двух приложений. Полный объём диссертации составляет 95 страниц с 8 рисунками и 5 таблицами. Список литературы содержит 65 наименований.

Краткое содержание работы

Во **Введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, ставятся цель и задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена исследованию аналитических свойств квантово-полевых разложений в скалярной модели ϕ^3 [2] в размерности $d = 6 - \varepsilon$. Ренормированное действие модели задаётся функционалом

$$S_R(\phi, g) = \frac{1}{2} Z_\phi^2 (\nabla\phi)^2 + Z_\phi^3 Z_g \mu^{\varepsilon/2} \frac{g}{3!} \phi^3. \tag{1}$$

Здесь и ниже, там, где это не вызовет недоразумений, знак интегрирования по всему пространству опускается; μ – ренормировочная масса; g – безразмерная константа связи. Константы ренормировки в схеме MS имеют вид

$$Z_i = 1 + \frac{\{Z_i\}}{\varepsilon} + \text{старшие полюса по } \varepsilon, \quad i = \{\phi, g\} \tag{2}$$

и зависят явно только от заряда g и параметра ε.

Метод Л. Липатова [7] основан на идее, что N-ый коэффициент разложения наблюдаемой в ряд по g может быть вычислен путём подстановки представления Коши

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_\gamma \frac{\mathrm{d}g}{g^{N+1}} e^{-S_R(\phi,g)}, \tag{3}$$

где γ – замкнутый контур в комплексной плоскости g вокруг нуля, под знак соответствующего функционального интегрирования $\mathcal{D}\phi$. Так, k-хвостая функция Грина определяется функциональным усреднением

$$G_k(x_1, \ldots, x_k; g) = \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \ldots \phi(x_k) e^{-S_R(\phi)} \Big/ \int \mathcal{D}\phi e^{-(\nabla\phi)^2/2}. \tag{4}$$

Тогда N-ый коэффициент $G_k^{(N)} = G_k^{(N)}(x_1, \ldots, x_k)$ разложения функции (4) по константе связи g вычисляется по формуле

$$G_k^{(N)} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \ldots \phi(x_k) \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{d}g}{g^{N+1}} e^{-S_R(\phi, g)}. \tag{5}$$

В высоких порядках $N \to \infty$ коэффициенты $G_k^{(N)}$ могут быть оценены с помощью метода перевала в представлении (5). Перевальные конфигурации ищутся одновременно по полю ϕ и заряду g. Перевальными конфигурациями при $d = 6$ является 7-параметрическое семейство инстантонов ($\phi = N^{1/2}\bar{\phi}$, $g = \bar{g}/(N^{1/2}\mu^{\varepsilon/2})$)

$$\bar{\phi}_c(x) = \frac{48}{\bar{g}_c} \frac{y^2}{(y^2 + |x - x_0|^2)^2}, \quad \bar{g}_c = \pm \mathrm{i}\, 48 \sqrt{\frac{2\pi^3}{15}}, \tag{6}$$

содержащих зависимость от произвольных параметров $x_0 \in \mathbb{R}^d$ и $y \in \mathbb{R}^1$, которые отражают инвариантность теории относительно трансляций и растяжений, соответственно, что порождает наличие нулевых мод. Для корректного интегрирования по нулевым модам применяется метод Фаддеева-Попова. Поправки по ε к решениям (6) несущественны в главном порядке по $1/N$. Однопетлевые контрчлены в (1) сокращают УФ расходимости диаграмм, возникающих при вычислении гессиана действия на инстантонных решениях.

В схеме MS РГ функции – коэффициенты уравнения РГ [8] – связаны с вычетами в простом полюсе по ε констант ренормировки (2) соотношениями

$$\gamma_i = -\frac{g}{2} \partial_g \{Z_i\}, \quad \beta = -g \left(\frac{\varepsilon}{2} + \gamma_g \right). \tag{7}$$

Функции γ_i – аномальные размерности параметра i, β – бета-функция заряда. Из соотношений (7) получим коэффициенты разложения РГ функций по g

$$\gamma_i^{(N)} = -\frac{N}{2} \{Z_i^{(N)}\}, \quad \beta^{(N)} = -\frac{N}{2} \{Z_g^{(N-1)}\}. \tag{8}$$

АВП коэффициентов $Z_i^{(N)}$ находится из условия УФ конечности ренормированных функций Грина G_{2R} и G_{3R}. Критический индекс Фишера η выражается через аномальную размерность поля $\eta = 2\,\gamma_\phi|_{g=g_*}$, где g_* – ИК-устойчивая фиксированная точка.

Конечным результатом реализации инстантонного анализа в данной главе является АВП ε-разложения индекса Фишера

$$\eta^{(N)} = -0.000586(-5/18)^N N^{9/2} N! \left(1 + \mathcal{O}\left(N^{-1}\right)\right). \tag{9}$$

Проведено сравнение точно вычисленных коэффициентов разложения ин-

Таблица 1 — Точно вычисленные коэффициенты ε-разложения индекса η [2] и соответствующие им асимптотические оценки (9).

N		1	2	3	4
$\eta^{(N)}$	точные	-0.111	-0.059	0.044	-0.079
	асимпт.	0.0004	-0.005	0.026	-0.105

декса η с их асимптотическими оценками, см. таблицу 1. Также в данной главе представлены результаты пересуммирования четырёхпетлевого разложения индекса Фишера с помощью различных модификаций метода Бореля-Лероя.

Во **второй главе** инстантонный анализ применяется к ИК-эффективной модели матричного антисимметричного комплексного поля χ ранга N. Ренормированное действие в размерности $d = 4 - \varepsilon$ имеет вид

$$S_R = Z_\chi^2 \,\mathrm{tr}\,\chi^\dagger(-\nabla^2 + \tau Z_\tau)\chi + Z_1\, Z_\chi^4\, \mu^\varepsilon \frac{g_1}{4} \left(\mathrm{tr}\,\chi\chi^\dagger\right)^2 + Z_2\, Z_\chi^4\, \mu^\varepsilon \frac{g_2}{4}\,\mathrm{tr}\,\chi\chi^\dagger\chi\chi^\dagger. \tag{10}$$

В работе [3] показано, что в данной модели при $N \geq 4$ ИК-устойчивые фиксированные точки отсутствуют, по крайней мере в однопетлевом приближении, а траектории инвариантных зарядов, стартуя с различных начальных значений, пересекают границу области устойчивости системы $\bar{g}_2 + N\bar{g}_1 > 0$ при $\xi \equiv \ln(\tau/\mu^2) \to -\infty$. Там же было указано, что пертурбативные РГ уравнения (Гелл-Манна-Лоу) можно построить в виде ε-разложений, переопределив переменные $\bar{g}_i \to \varepsilon\bar{g}_i$, $\xi \to \xi/\varepsilon$

$$\partial_\xi \bar{g}_i = -\bar{g}_i + \sum_{K=0}^{M} \varepsilon^K B_i^{(K)}, \quad \bar{g}_i|_{\xi=0} = g_i, \tag{11}$$

где M = число учтённых петель $-$ 1, коэффициенты $B_i^{(K)} = B_i^{(K)}(\bar{g}_1,\bar{g}_2)$. Непосредственный численный анализ уравнений (11) невозможен ввиду расходимости ε-разложения, поэтому для исследования физически интересных случаев $\varepsilon = 1, 2$ ряды (11) должны быть пересуммированы по методу Бореля-Лероя, который требует знания АВП коэффициентов $B_i^{(K)}$. Последняя формируется на инстантонных решениях, имеющих вид

$$\chi_c = \mathrm{diag}(s_1\sigma, \ldots, s_{N/2}\sigma), \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_j(x) = \frac{C_j e^{i\alpha_j} y^{-1}}{|x-x_0|^2 + y^2}, \tag{12}$$

где $C_j, \alpha_j \in \mathbb{R}$. Существует $m = 0, \ldots, N/2-1$ тривиальных решений $C_i = 0$, а также $n = N/2, \ldots, 1$ ненулевых $C_i^2 = 12/n$, причём $n + m = N/2$. Фазы α_i не фиксируются и являются произвольными параметрами, отражающими инвариантность действия относительно глобальных калибровочных преобразований. Как и ранее, корректный учёт эквивалентных инстантонов, различающихся лишь значениями x_0, y, α_i, выполняется с помощью метода Фаддеева-Попова. Общее число нулевых мод: $N^2 - 2N + n + 5$.

Теперь в полной аналогии с вычислениями предыдущей главы можно оценить асимптотику вычета АВП бета-функций $\beta_i^{(K)}$

$$\beta_i^{(K)} = \mathrm{const}_i K! K^{b_n} (-a)^K \left(1 + O\left(K^{-1}\right)\right), \tag{13}$$

здесь const_i – несущественная для пересуммирования амплитуда, $b_n = (N^2 - 2N + n + 11)/2$ и $a = \max_n |a(n)|$, $a(n) = 3(2ng_1 + g_2)/(4n)$. Величина $a(n)$ меняется вместе с зарядами g_1, g_2, поэтому наибольшее из чисел $a(n)$ даёт лидирующий вклад в АВП, а все прочие вносят лишь экспоненциально малые поправки. Итак, в исследуемой полевой модели (10) ε-разложения (11) носят асимптотический характер $B_i^{(K)} \sim \beta_i^{(K)}$, причём их свойства определяются как матричной структурой инстантона, так и положением зарядов на фазовой плоскости.

Пересуммирование по Борелю-Лерою пятипетлевых РГ уравнений (11) с учётом АВП (13) показывает, что в случае $N \geq 4$ в трёхмерной модели отсутствуют ИК-притягивающие фиксированные точки, а ренормгрупповые траектории покидают область устойчивости системы. Для стабилизации в действие были включены старшие члены $\mathrm{tr}(\chi^\dagger\chi)^3$, $[\mathrm{tr}(\chi^\dagger\chi)]^3$,

$\mathrm{tr}(\chi^\dagger\chi)^2\,\mathrm{tr}(\chi^\dagger\chi)$ в качестве составных операторов, учитываемых в однопетлевом приближении. Температура обнаруженного фазового перехода первого рода соответствует температуре, при которой нетривиальное решение уравнения состояния становится глобальным минимумом свободной энергии системы.

Третья глава посвящена исследованию влияния турбулентного перемешивания на динамическое критическое поведение скалярного параметра порядка, описываемого моделью A. В рамках данной модели динамика скаляра $\phi = \phi(x,t)$, переносимого случайным полем скорости $\upsilon_j = \upsilon_j(x,t)$, определяется стохастическим уравнением ланжевеновского типа

$$\lambda\,\nabla_t\phi(x,t) = -\frac{\delta H_0[\phi]}{\delta\phi(x,t)} + \eta(x,t), \tag{14}$$

где $\nabla_t = \partial_t + \upsilon_j\partial_j$ – материальная производная, $\lambda > 0$ – обратный кинематический коэффициент. Случайный гауссовый шум $\eta(x,t)$ с нулевым математическим ожиданием определяется заданием коррелятора $\langle\eta(x,t)\eta(x',t')\rangle = 2\lambda\,\delta(x-x')\delta(t-t')$. Функционал $H_0[\phi]$ имеет вид

$$H_0[\phi] = \int \mathrm{d}^d x \left\{\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{\tau_0}{2}\phi^2 + \frac{g_0}{4!}\phi^4\right\}. \tag{15}$$

«Затравочная масса» $\tau_0 \sim T - T_c$ – отклонение температуры от её среднеполевого критического значения T_c, константа связи $g_0 > 0$.

В настоящей работе мы используем ансамбль Крейчнана [5], в котором $\langle\upsilon_i(x,t)\rangle = 0$, а коррелятор $\langle\upsilon_j(x,t)\upsilon_i(x',t')\rangle = D_{ji}$ берётся в виде

$$D_{ji} = D_0\,\delta(t-t')\int\frac{\mathrm{d}^d p}{(2\pi)^d}\frac{P^{\perp}_{ji} + \alpha P^{\parallel}_{ji}}{p^{d+\zeta}}\exp[ip(x-x')]. \tag{16}$$

Тензоры $P^{\parallel}_{ji} = p_j p_i/p^2$, $P^{\perp}_{ji} = \delta_{ji} - P^{\parallel}_{ji}$ – продольный и поперечный проекторы, соответственно; префакторы $D_0 > 0$ и $\alpha > 0$. Специальный случай $\alpha = 0$ отвечает несжимаемому потоку жидкости. Выписанная корреляционная функция (16) воспроизводит колмогоровский закон 5/3 для развитых турбулентных пульсаций, если $\zeta = \zeta_K = 4/3$.

В соответствии в общим MSR-формализмом [8], стохастическая задача (14) эквивалентна квантовополевой модели с полями $\Psi = \{\phi, \phi', \upsilon_j\}$

$$S[\Psi] = \int \mathrm{d}^d x \mathrm{d}t \left\{ \lambda\, \phi' \nabla_t \phi + \phi' \, \frac{\delta H_0[\phi]}{\delta \phi} - \lambda\, \phi' \phi' + \frac{1}{2} \upsilon_i D^{-1}_{ij} \upsilon_j \right\}. \tag{17}$$

Данное утверждение означает, что статистическое усреднение случайной величины в первоначальной постановке (14) может быть представлено в виде функционального усреднения с весом $\exp(-S[\Psi])$.

Реализация непертурбативного ренормгруппового анализа полевой модели основана на решении точного РГ уравнения Веттериха [1]

$$\partial_s \Gamma_k[\Phi] = \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}\omega \mathrm{d}^d p}{(2\pi)^{d+1}} \partial_s R_k(p) \left(\Gamma^{(2)}_k(p, \omega) + R_k(p) \right)^{-1}, \tag{18}$$

где функционал $\Gamma_k = \Gamma_k[\Phi]$ – эффективное усреднённое действие, интерполирующее между исходным «микроскопическим» действием S на УФ масштабах $\Gamma_{k=\Lambda}[\Phi] = S[\Psi = \Phi]$ и свободной энергией системы Γ в ИК области $\Gamma_{k=0}[\Phi] = \Gamma[\Phi]$; масштабная переменная $s = \ln(k/\Lambda)$; функция $R_k(p)$ – ИК регуляризатор. Для скоростных мод он имеет вид $R^v_k(p) = (k^{d+\zeta} - p^{d+\zeta})\, \Theta(1 - p^2/k^2)\mathrm{I}$, где I – единичная матрица по индексам поля скорости, а для критических мод – $R^{\varphi}_k(p) = (k^2 - p^2)\, \Theta(1 - p^2/k^2)$. Θ – функция Хевисайда.

Наш дальнейший анализ основан на использовании следующего анзаца для решения уравнения (18)

$$\Gamma_k[\Phi] = \int \mathrm{d}^d x \mathrm{d}t \left\{ X_k\, \varphi' \left\{ \nabla_t + A_k\, (\partial_i v_i) \right\} \varphi + \varphi' \frac{\delta H_k[\varphi]}{\delta \varphi} - Y_k\, \varphi' \varphi' + \frac{1}{2} v_i D^{-1}_{ij} v_j \right\}, \tag{19}$$

где

$$H_k = \int \left\{ \frac{1}{2} Z_k\, (\nabla \varphi)^2 + \frac{\lambda_k}{2} (\rho - \rho_k)^2 \right\} \mathrm{d}^d x, \tag{20}$$

здесь $\rho = \varphi^2/2$; ренормализационные функции X_k, Y_k, Z_k, A_k зависят только от масштаба k – LPA'-приближение [1]. Подстановка функционала (19) в уравнение (18) приводит к РГ уравнениям на k-зависимые параметры анзаца. Заметим, что получаемые уравнения по сути своей непертурбативны, поскольку мы не предполагаем малость констант взаимодействия и не строим по ним разложения.

Получаемые уравнения зависит от трёх параметров α, d, ζ, поэтому мы будем рассматривать картину скейлинговых режимов модели в плоскости (d, ζ) при некоторых значениях «сжимаемости» α. В рассматриваемой модели обнаружено четыре ИК-устойчивых скейлинговых режима:

I. Гауссова фиксированная точка. Флуктуации параметра порядка и поля скорости здесь несущественны. Динамический критический индекс $z = 2$.

II. Фиксированная точка, соответствующая чистой A модели. Здесь ведущую роль играют критические флуктуации, в то время как турбулентные пульсации с заданным коррелятором (16) при $\zeta < 0$ оказываются несущественными. Численные оценки дают значение критического индекса $z \approx 2.046$ при $d = 3$ и $z \approx 2.151$ при $d = 2$.

III. Фиксированная точка, соответствующая модели Крейчнана турбулентного переноса пассивной примеси. В данном случае критические индексы вычисляются точно: $\nu^{-1} = 2 - \zeta, \eta = \zeta, z = 2 - \zeta$ – и для физического случая ($\zeta = \zeta_K$) воспроизводят закон Ричардсона. Данный режим оказывается устойчивым при значениях $\alpha < \alpha_c \approx 2.26$.

IV. Новая фиксированная точка. В данном случае существенны как критические, так и турбулентные флуктуации. Скейлинговый режим становится ИК-устойчивым при $\alpha > \alpha_c \approx 2.26$. Динамический критический индекс здесь находится точно $z = 2 - \zeta$. Прочие показатели ν^{-1} и η являются неуниверсальными и зависящими от α. Экстраполяция индексов при $\alpha \to \infty$ даёт $\eta \approx 1.47$ и $\nu^{-1} \approx 2.75$.

В области слабой связи полученные непертурбативные РГ уравнения воспроизводят результаты однопетлевых вычислений [9].

В **Заключении** приведены основные результаты работы.

Цитируемая литература

1. Berges J., Tetradis N., Wetterich C., *Phys. Rep.* **363** 223 (2002).
2. Gracey J. A., *Phys. Rev. D* **92**:2 025012 (2015).
3. Комарова М. В., Налимов М. Ю., Хонконен Ю., *ТМФ* **176**:1 89 (2013).
4. Hohenberg P. C., Halperin B. I., *Rev. Mod. Phys.* **49** 435 (1977).

5. Falkovich G., Gawedzki K., Vergassola M., *Rev. Mod. Phys.* **73** 913 (2001).
6. Cazalilla M. A., *Rep. Prog. Phys.* **77**:12 124401 (2014).
7. Липатов Л. Н., *ЖЭТФ* **72** 411 (1977).
8. Васильев А. Н., *Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике.* – СПб.: ПИЯФ (1998) 774 с.
9. Antonov N. V., Kapustin A. S., *J. Phys. A* **43** 405001 (2010).

Список публикаций по теме диссертации из перечня ВАК

1. Kalagov G. A., Nalimov M. Yu., *Nucl. Phys. B* **884** 672 (2014).
2. Калагов Г. А., Компаниец М. В., Налимов М. Ю., *ТМФ* **181**:2 374 (2014).
3. Kalagov G. A., Kompaniets M. V., Nalimov M. Yu., *Nucl. Phys. B* **905** 16 (2016).
4. Hnatič M., Kalagov G., Nalimov M., *Nucl. Phys. B* **926** 1 (2018).