

Санкт–Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Костенко Мария Михайловна

**Ренормгруппа и аномальный скейлинг в
моделях турбулентного переноса сжимаемой
жидкостью**

01.04.02 – Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Санкт–Петербург – 2018

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «Санкт–Петербургский государственный университет»

Научный руководитель: Антонов Николай Викторович, д. ф.-м. н., старший научный сотрудник, профессор Санкт-Петербургского государственного университета

Официальные оппоненты: Малышев Кирилл Леонидович, д. ф.-м. н., старший научный сотрудник Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова РАН

Чхетиани Отто Гурамович, д. ф.-м. н., старший научный сотрудник, заместитель директора по науке Института физики атмосферы РАН им. А. М. Обухова

Ведущая организация: Объединенный Институт Ядерных Исследований

Защита состоится «_____» _____ 2018 г. в _____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.24 при Санкт–Петербургском государственном университете по адресу: 199004, Санкт–Петербург, Средний пр., В.О., д. 41/43, ауд. 304

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького СПбГУ и на сайте <https://dissser.spbu.ru>

Автореферат разослан «_____» _____ 2018 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по адресу 198504, Санкт–Петербург, Ульяновская ул., д.1, корпус И, каб. 421.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н.

Аксёнова Елена Валентиновна

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Явление перемежаемости и аномального скейлинга в развитой гидродинамической турбулентности, вызывавшее перемежающийся интерес с начала 60-х годов, недавно вновь привлекло большое внимание как математиков, так и физиков, в связи с появлением интересных аналитических результатов для некоторых модельных систем [7]. Несмотря на относительный успех, задача остаётся, по существу, не решённой: для нахождения аномальных показателей поля скорости не было построено вычислительной схемы, основанной на базовой динамической модели и надёжной теории возмущений (как например ε разложение для критических показателей).

Как эксперименты, так и численное моделирование показывают, что отклонения от классической теории Колмогорова-Обухова более ярко выражены для пассивного переноса скалярных полей [7, 8] (например, поля температуры или плотности примеси), чем для самого поля скорости. Магнитогидродинамическая (далее МГД) турбулентность также является на сегодняшний день актуальной проблемой. МГД турбулентность в т.н. альфвеновском режиме демонстрирует поведение, похожее на обычную развитую турбулентность жидкости: энергия распределяется от инфракрасного (далее ИК) масштаба в направлении малых масштабов, где преобладает эффект диссипации и самоподобное (скейлинговое) поведение энергетических спектров в промежуточном (инерционном) интервале. Моделирование такого процесса является очень сложной задачей.

Степень разработанности темы исследования. Самый значительный прогресс в изучении аномального скейлинга был достигнут для модели Крейчнана, где поле скоростей переноса является гауссовым, не коррелированным по времени, а парная корреляционная функция имеет вид $\sim \delta(t - t')/k^{d+\xi}$, где d – это размерность пространства, k – волновое число, а ξ – произвольный показатель. В этой работе существование аномального скейлинга было основано на микроскопической модели; соответствующие аномальные показатели были вычислены в контролируемом приближении и, наконец, в форме систематической теории возмущений по формально малому параметру ξ . Возможно напрямую обобщить ансамбль Казанцева-Крейчнана на случай с конечным временем корреляции для пассивного скалярного и пассивного векторного полей. Однако, такой “синтетический” ансамбль с исчезающим временем корреляции страдает от отсутствия галилеевой симметрии. Поэтому интересно изучать задачи турбулентности для вязкой сжимаемой жидкости, статистика которой описывается уравнением Навье-Сток-

са со случайной силой, и работать в галилеево ковариантном формализме.

Целью работы является изучение физического явления – развитой турбулентности и турбулентного переноса скалярных и векторных полей в сжимаемой жидкости. Для этого рассмотрен ряд моделей: перенос пассивного скалярного поля потоком сжимаемой турбулентной жидкости в размерности пространства $d = 3$; перенос пассивного скалярного поля тем же потоком в окрестности исключительной размерности $d = 4$; перенос магнитогидродинамического поля турбулентным потоком без учёта обратного влияния на жидкость. Эти модели ренормированы; найдены неподвижные точки, определяющие асимптотическое поведение систем; при наличии скейлинга вычислены критические размерности; установлено наличие аномального скейлинга в перечисленных моделях.

Научная новизна. Все научные результаты получены впервые, что подтверждается их публикациями в ведущих международных журналах. Основные результаты данной работы заключаются в следующем:

(1) Во всех изучаемых моделях было установлено наличие аномального скейлинга, найдены критические показатели в главном, однопетлевом приближении.

(2) Установлено, что аномальный скейлинг проявляется сильнее с ростом сжимаемости. Также установлено наличие иерархии анизотропных вкладов.

(3) Для модели переноса скалярного поля вблизи особой размерности $d = 4$ найдены два возможных типа скейлингового поведения. Изучена возможность кроссовера между трехмерной и четырехмерной моделями.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты данной работы должны стимулировать экспериментальные исследования по измерению аномальных показателей в турбулентности. Результаты, полученные в третьей главе, могут быть использованы при описании различных процессов в солнечной короне. С теоретической точки зрения ренормгрупповой подход к турбулентности можно применить к различным более сложным моделям турбулентного переноса (например, переноса поля при наличии обратного влияния на жидкость). Также решение подобных задач приближает нас к пониманию явления турбулентности как таковой и, в частности, к решению проблемы аномального скейлинга для самой развитой турбулентности.

Методология и методы исследования. Стохастические задачи переформулируются на функционально-полевой язык. Далее с помощью последовательного применения хорошо разработанного метода ренормгруппы (РГ) и Операторного Разложения (ОР) устанавливается наличие неподвижных точек, а также вычисляются аномальные показатели.

Достоверность результатов обеспечивается тем, что в работе при-

меняется мощный и гибкий аппарат квантовополевой ренормализационной группы, а полученные результаты сравниваются с уже известными для более простых случаев.

Основные положения, выносимые на защиту:

(1) Для двух моделей турбулентного переноса пассивного скалярного поля (плотность и трейсер) ансамблем скорости Навье-Стокса для вязкой сжимаемой жидкости установлена их мультипликативная ренормируемость, наличие аномального скейлинга в инерционном интервале, вычислены аномальные показатели в главном, однопетлевом приближении. Аномальный скейлинг становится более заметным при увеличении степени сжимаемости; анизотропные вклады формируют иерархию по степени анизотропии. Иерархия становится более выраженной с ростом степени сжимаемости.

(2) Для модели переноса пассивного МГД поля тем же ансамблем установлена мультипликативная ренормируемость, вычислены координаты ИК притягивающей неподвижной точки, получены выражения для аномальных размерностей в главном, однопетлевом приближении. Аномальный скейлинг становится более заметным при увеличении степени сжимаемости; анизотропные вклады формируют иерархию по степени анизотропии. Иерархия становится более выраженной с ростом степени сжимаемости.

(3) Изучена специальная модель переноса пассивного поля тем же ансамблем скорости вблизи особой размерности $d = 4$ с дополнительной ультрафиолетовой расходимостью. Она мультипликативно ренормируема, имеет две неподвижные точки, то есть может демонстрировать два типа скейлингового поведения. Между режимами $d = 3$ и $d = 4$ определена линия кроссовера.

Апробация результатов и публикации. Полученные результаты докладывались и обсуждались на международных конференциях и школах. Далее следует список основных докладов:

1. Международная школа “Advanced Methods of Modern Theoretical Physics: Integrable and Stochastic Systems”, устный доклад “Renormalization Group approach to turbulence” 16 августа - 21 августа, 2015, Дубна, Россия
<http://www.dubnaschool.cz/2015/>
2. International conference “Models in Quantum Field Theory”, устный доклад “Anomalous scaling of passive scalar fields advected by the NavierStokes velocity ensemble” 21 сентября - 25 сентября, 2015, Петергоф, Россия
http://hep.phys.spbu.ru/conf/mqft2015/common_e.htm
3. 50-я международная зимняя школа Санкт-Петербургского Института Ядерной Физики, устный доклад “Anomalous scaling in magnetohydrodynamics” 27 февраля – 4 марта, 2016, Роцино, Россия

<http://hepd.pnpi.spb.ru/WinterSchool/archive/2016/index.shtml>

4. 19-й международный семинар “Quarks 2016”, устный доклад “Renormalization Group approach to turbulence” 29 мая – 4 июня, 2016, Пушкин, Россия

<http://quarks.inr.ac.ru/2016/>

5. 51-я международная зимняя школа Санкт-Петербургского Института Ядерной Физики, постерный доклад “Statistical restoration of broken symmetries in fully developed turbulence” 27 февраля – 4 марта, 2017, Рощино, Россия

<http://hepd.pnpi.spb.ru/WinterSchool/archive/2017/index.shtml>

6. 10th CHAOS 2017 International Conference, устный доклад “Turbulent advection of passive scalar field near two dimensions” 30 мая – 2 июня, 2017, Барселона, Испания

<http://www.cmsim.org/chaos2017.html>

Публикации. По теме диссертации опубликовано 6 научных работ в изданиях, рекомендованных ВАК РФ и входящих в базы данных РИНЦ, Web of Science и Scopus [1–6].

Личный вклад автора. Все основные результаты, изложенные в диссертации, получены соискателем лично либо при её прямом неотделимом участии в соавторстве.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из Введения, четырёх глав, Заключение и списка литературы из 102 наименований. Работа изложена на 159 страницах и содержит 20 рисунков и 2 таблицы.

Содержание работы

Во **Введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, описаны методология и методы исследования, степень разработанности темы исследования, а также показана практическая значимость полученных результатов и представлены выносимые на защиту научные положения.

Первая глава посвящена исследованию стохастического уравнения Навье-Стокса для вязкой сжимаемой жидкости [10]. В ней подробно рассказывается о построении теоретико-полевой формулировки для исходной стохастической задачи, исследуется ее ренормируемость, показана последовательность поиска критических размерностей полей и параметров.

Уравнение Навье-Стокса (далее НС) для вязкой сжимаемой жидкости имеет вид:

$$\rho \nabla_t v_i = \nu_0 [\delta_{ik} \partial^2 - \partial_i \partial_k] v_k + \mu_0 \partial_i \partial_k v_k - \partial_i p + \eta_i, \quad (1)$$

где

$$\nabla_t = \partial_t + v_k \partial_k \quad (2)$$

это лагранжева (галилеево-ковариантная) производная, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, и $\partial^2 = \partial_i \partial_i$ – оператор Лапласа.

В этих уравнениях v_i – скорость, ρ – массовая плотность, p – давление и η_i – плотность внешней силы (на единицу объёма). Все эти величины зависят от $x = \{t, \mathbf{x}\}$, причём $\mathbf{x} = \{x_i\}$, $i = 1 \dots d$, где d – произвольная (для общности) размерность пространства. Постоянные ν_0 и μ_0 являются двумя независимыми молекулярными коэффициентами вязкости; в “вязких” членах в (1) мы явно разделили поперечную и продольную части. Суммирование по повторяющимся значкам подразумевается сейчас и будет подразумеваться в дальнейшем.

К уравнениям (1) и уравнению неразрывности необходимо добавить уравнение состояния, $p = p(\rho)$. В самой простой форме, в линейном приближении оно выглядит как соотношение

$$(p - \bar{p}) = c_0^2 (\rho - \bar{\rho}) \quad (3)$$

между разностями давления и плотности с их средними значениями. Постоянная величина c_0 имеет смысл (адиабатической) скорости звука.

В стохастической формулировке задачи внешнюю силу следует понимать как случайное внешнее поле, моделирующее поступление в систему энергии, полученной при перемешивании на больших масштабах. Принято считать, что детали её статистики не важны, так что распределение будем считать гауссовым с нулевым средним, не коррелированным по времени (для обеспечения галилеевой симметрии), и включающим в себя некоторый типичный ИК масштаб L (интегральный масштаб). С другой стороны, для использования стандартной техники РГ важно, чтобы её корреляционная функция при больших значениях аргумента убывала степенным образом. Более детальные рассуждения можно найти в [9]. В настоящей работе корреляционная функция выбрана следующим образом [10]:

$$\langle f_i(x) f_j(x') \rangle = \delta(t - t') \int_{k>m} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} D_{ij}^f(\mathbf{k}) \exp\{i\mathbf{k}\mathbf{x}\}, \quad (4)$$

где

$$D_{ij}^f(\mathbf{k}) = g_0 \nu_0^3 k^{4-d-y} \left[P_{ij}^\perp(\mathbf{k}) + \alpha P_{ij}^\parallel(\mathbf{k}) \right]. \quad (5)$$

Здесь $P_{ij}^\perp(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ и $P_{ij}^\parallel(\mathbf{k}) = k_i k_j / k^2$ – поперечный и продольный проекторы, $k = |\mathbf{k}|$ – волновое число, g_0 и α положительные параметры; множитель ν_0^3 выделен для удобства. Параметр $m = L^{-1}$ обеспечивает ИК регуляризацию; её точная форма несущественна и для простоты вычислений будем использовать резкую "отсечку". Величина $0 < y \leq 4$ играет роль, подобную $\varepsilon = 4 - d$ в РГ теории критического поведения

Согласно общей теореме [11], стохастическая задача (1), (4), (5), эквивалентна теоретико-полевой модели с удвоенным набором полей $\Phi = \{v'_i, \phi', v_i, \phi\}$ и функционалом действия

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\Phi) = & \frac{1}{2} v'_i D_{ik}^f v'_k + v'_i \{ -\nabla_t v_i + \nu_0 [\delta_{ik} \partial^2 - \partial_i \partial_k] v_k + u_0 \nu_0 \partial_i \partial_k v_k - \partial_i \phi \} + \\ & + \phi' [-\nabla_t \phi + v_0 \nu_0 \partial^2 \phi - c_0^2 (\partial_i v_i)], \end{aligned} \quad (6)$$

где D^f – корреляционная функция (4), (5). По повторяющимся значкам подразумевается суммирование, а по переменной $x = \{t, \mathbf{x}\}$ – интегрирование, например,

$$v'_i \nabla_t v_i = \int dt \int d\mathbf{x} v'_i(x) [\partial_t + v_k(x) \partial_k] v_i(x). \quad (7)$$

В выражении (6) мы перешли к новому безразмерному параметру $u_0 = \mu_0 / \nu_0 > 0$ и ввели новый член $\phi' v_0 \nu_0 \partial^2 \phi$ с другим положительным безразмерным коэффициентом v_0 . Этот член не запрещен соображениями симметрии и размерности, поэтому он обязательно появится в процедуре ренормировки.

Такая модель оказывается мультипликативно ренормируемой. Проводится ренормировка этой модели, определяются координаты ИК притягивающей неподвижной точки, которая определяет асимптотическое поведение структурных функций. Координаты неподвижной точки следующие:

$$\hat{g}_* = \frac{4dy}{3(d-1)}, \quad u_* = v_* = 1, \quad (8)$$

с возможными поправками высших порядков по y .

Найдены критические размерности некоторых полей и параметров:

$$\Delta_v = 1 - y/3, \quad \Delta_{v'} = d - \Delta_v, \quad \Delta_\omega = 2 - y/3, \quad \Delta_m = 1 \quad (9)$$

(результаты точные), а также

$$\Delta_\phi = d - \Delta_{\phi'} = 2 - 5y/6 + O(y^2), \quad \Delta_c = 1 - 5y/12 + O(y^2). \quad (10)$$

Вторая глава посвящена переносу пассивного скалярного поля ансамблем скорости Навье-Стокса для вязкой сжимаемой жидкости. К модели применяются методы ренормгруппы и операторного разложения.

Существует две основные задачи конвекции-диффузии для сжимаемого поля. Пассивный перенос поля плотности $\theta(x) \equiv \theta(t, \mathbf{x})$ (например, плотности примеси) описывается уравнением:

$$\partial_t \theta + \partial_i (v_i \theta) = \kappa_0 \partial^2 \theta + f, \quad (11)$$

а перенос “трейсера” (температуры, удельной энтропии или концентрации частиц примеси) описывается уравнением:

$$\partial_t \theta + (v_i \partial_i) \theta = \kappa_0 \partial^2 \theta + f. \quad (12)$$

Здесь $\partial_t \equiv \partial/\partial t$, $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$, κ_0 – молекулярные коэффициенты диффузии, $\partial^2 = \partial_i \partial_i$ – оператор Лапласа, $\mathbf{v}(x)$ – поле скорости $f \equiv f(x)$ – гауссовый шум с нулевым средним и заданным коррелятором,

$$\langle f(x) f(x') \rangle = \delta(t - t') C(\mathbf{r}/L), \quad \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}', \quad (13)$$

$C(\mathbf{r}/L)$ – некоторая функция, конечная при $(\mathbf{r}/L) \rightarrow 0$ и быстро убывающая при $(\mathbf{r}/L) \rightarrow \infty$. В дальнейшем мы не будем различать интегральный масштаб L , относящийся к шуму, и его аналог $L = m^{-1}$ в корреляционной функции перемешивающей силы (5).

Стохастические задачи (11), (13) эквивалентны полевой модели для удвоенного набора полей $\Phi \equiv \{\theta', \theta, v', v, \phi', \phi\}$ с функционалом действия

$$\mathcal{S}_\Phi(\Phi) = \mathcal{S}_\theta(\theta', \theta, v) + \mathcal{S}(v', v, \phi', \phi), \quad (14)$$

где

$$\mathcal{S}_\theta(\theta', \theta, v) = \frac{1}{2} \theta' D_f \theta' + \theta' \{ -\partial_t \theta - \partial_i (v_i \theta) + \kappa_0 \partial^2 \theta \} - \quad (15)$$

так называемое действие де Доминисиса-Янссена для стохастической задачи (11), (13) при фиксированном \mathbf{v} , а второй член задаётся с помощью (6) и “отвечает” за статистику скорости; D_f – корреляционная функция (13), и, как обычно, подразумеваются соответствующие интегрирования и суммирования по векторным индексам. В дальнейшем для удобства сделана замена $\kappa_0 = \nu_0 w_0$.

Задача (12) соответствует действию (14), где слагаемое \mathcal{S}_θ задаётся так:

$$\mathcal{S}_\theta(\theta', \theta, v) = \frac{1}{2} \theta' D_f \theta' + \theta' \{ -\partial_t \theta - (v_i \partial_i) \theta + \kappa_0 \partial^2 \theta \}. \quad (16)$$

Неподвижная точка с координатами (8) и $w_* = 1$ является ИК притягивающей в пространстве констант связи g, u, v, w и управляет ИК асимптотическим поведением моделей (15), (16).

Получены критические размерности полей θ , θ' :

$$\Delta_\theta = -1 + y/6, \quad \Delta_{\theta'} = d + 1 - y/6. \quad (17)$$

Эти выражения являются точными из-за отсутствия ренормировки полей θ и θ' .

Ключевую роль в дальнейших рассуждениях будут играть составные поля (“составные операторы” в квантово-полевой терминологии). Локальным составным оператором является моном или полином, состоящий из полей $\Phi(x)$ и их производных конечного порядка в одной точке пространства-времени $x = \{t, \mathbf{x}\}$. В функциях Грина с такими объектами появляются новые УФ расходимости из-за совпадения аргументов полей. Расходимости устраняются с помощью дополнительной процедуры ренормировки. Как правило, операторы при ренормировке смешиваются: ренормированные операторы задаются некоторой конечной линейной комбинацией изначальных мономов.

Начнём с самого простого случая: операторов $F(x) = \theta^n(x)$ в модели плотности. Поскольку стохастическое уравнение (11) линейно по θ , число полей θ в любой 1-неприводимой функции не может превышать количество полей в самом операторе. Показано, что операторы мультипликативно ренормируемы: $F(x) = Z_n F^R(x)$ с некоторыми константами ренормировки. Получены выражения для критических размерностей операторов θ^n :

$$\Delta[\theta^n] = n\Delta_\theta + \gamma_n^*. \quad (18)$$

Учитывая координаты неподвижной точки (8) и $w_* = 1$, получим

$$\Delta[\theta^n] = -n + \frac{ny}{6} - \frac{n(n-1)\alpha dy}{6(d-1)}, \quad (19)$$

с поправками высших порядков по y .

Операторы θ^n в модели трейсера УФ конечны, $Z_n = 1$, и их скейлинговые размерности задаются выражением

$$\Delta[\theta^n] = n\Delta_\theta = -n + ny/6, \quad (20)$$

это выражение точное, поправки высшего порядка по y не появятся.

В модели трейсера особое значение имеют тензорные операторы, построенные исключительно из градиентов пассивного скалярного поля. Такие операторы имеют наименьшую каноническую размерность, они содержат минимальное число производных (по одной на каждое поле). Таким образом, они выглядят так:

$$F_{i_1 \dots i_l}^{(n,l)} = \partial_{i_1} \theta \dots \partial_{i_l} \theta (\partial_i \theta \partial_i \theta)^s + \dots \quad (21)$$

Здесь l – число свободных векторных значков (ранг тензора), $n = l + 2s$ – полное число полей θ , входящих в оператор. Многоточие подразумевает подходящие вычитания, в которых есть дельта-символы Кронекера, которые делают выражение бесследовым с учётом всех свёрток по повторяющимся индексам. Например, $\theta_i\theta_j - \delta_{ij}(\theta_k\theta_k/d)$ и так далее. Для такого оператора критическая размерность имеет следующий вид:

$$\Delta_{(n,l)} = \frac{ny}{6} + \frac{dy}{3(d-1)} \{Q_1 + \alpha Q_2\}, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} Q_1 &= -n(n+d)(d-1) + (d+1)l(l+d-2), \\ Q_2 &= -n(3n+d-4) + l(l+d-2). \end{aligned} \quad (23)$$

Рассмотрим одновременной парный коррелятор двух УФ конечных величин $F_{1,2}(x)$ с определёнными критическими размерностями, например, обычных полей или локальных составных операторов. Для его вычисления в диссертационной работе используется метод Операторного Разложения. Для корреляционной функции двух операторов типа $\theta^n(x)$ для модели плотности в инерционном интервале получаем следующий результат:

$$\langle \theta^p(t, \mathbf{x}_1) \theta^k(t, \mathbf{x}_2) \rangle \simeq \mu^{-(p+k)} (\mu r)^{-\Delta_p - \Delta_k} (mr)^{\Delta_{p+k}}. \quad (24)$$

Для модели трейсера изучено поведение одновременных структурных функций:

$$S_n(r) = \langle [\theta(t, \mathbf{x}) - \theta(t, \mathbf{x}')]^{2n} \rangle = (\nu\mu^2)^{-n} \eta(\mu r, mr, c/(\mu\nu)), \quad r = |\mathbf{x}' - \mathbf{x}|; \quad (25)$$

ответ для них в главном порядке в пределах инерционного интервала:

$$S_n(r) \sim (\nu\mu^2)^{-n} (\mu r)^{-2n\Delta_\theta} (mr)^{\Delta_{(2n,0)}}. \quad (26)$$

В конце второй главы изучается вопрос о влиянии анизотропии. Установлена иерархия анизотропных вкладов, которая становится более выраженной с увеличением степени сжимаемости. Главный член разложения задаётся изотропным вкладом, что даёт количественное подтверждение гипотезе о локально изотропной турбулентности [7, 8].

Третья глава посвящена ренормгрупповому анализу модели переноса пассивного магнитного поля, поиску неподвижных точек, аномальных размерностей.

В этой главе пассивное векторное (магнитное) поле переносится потоком сжимаемой жидкости. Перенос жидкости задаётся уравнениями (1), (4).

Далее следует описание переноса магнитного поля. В присутствии постоянно-го фонового поля $B_i^0 = B^0 n_i$ с некоторым постоянным единичным вектором $\mathbf{n} = \{n_i\}$, динамическое уравнение для флуктуирующей части $\theta_i = \theta_i(t, \mathbf{x})$ полного магнитного поля $B_i = B^0(n_i + \theta_i)$ имеет вид:

$$\partial_t \theta_i + \partial_k (v_k \theta_i - \theta_k v_i) = \kappa_0 \partial^2 \theta_i + n_k \partial_k v_i, \quad (27)$$

где $\kappa_0 = c_l^2 / 4\pi\sigma$ – магнитный коэффициент диффузии. Уравнение (27) получено из уравнений Максвелла, в которых отброшен ток смещения. Простейшая форма закона Ома для движущейся среды: $\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + c_l^{-1}[\mathbf{v}, \mathbf{B}])$, где σ – проводимость, c_l – скорость света.

Полномасштабная стохастическая задача описывается функционалом действия

$$\mathcal{S}(\Phi) = \mathcal{S}_v(\mathbf{v}', \phi', \mathbf{v}, \phi) + \mathcal{S}_\theta(\boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}), \quad (28)$$

где $\mathcal{S}_v(\mathbf{v}', \phi', \mathbf{v}, \phi)$ можно найти в (6),

$$\mathcal{S}_\theta = \theta'_i \{ -\partial_t \theta_i - \partial_k (v_k \theta_i - \theta_k v_i) + \kappa_0 \partial^2 \theta_i + n_k \partial_k v_i \}. \quad (29)$$

Мультипликативная ренормируемость теоретико-полевой модели (28) позволяет нам получить стандартным путём РГ уравнения для ренормированных функций Грина

$$G(e, \mu, \dots) = \langle \Phi \dots \Phi \rangle_R.$$

Здесь $e = \{g, \nu, u, v, w, c, m, \alpha\}$ это полный набор ренормированных параметров, μ – характерный масштаб импульсов, а под многоточием мы понимаем другие аргументы (времена/частоты и координаты/импульсы). Для удобства мы ввели здесь три безразмерных отношения: $u_0 = \mu_0/\nu_0$ и $v_0 = \chi_0/\nu_0$, связанные с коэффициентами вязкости и диффузии модели; $w_0 = \kappa_0/\nu_0$ относится к магнитному коэффициенту диффузии; u, v, w – их ренормированные аналоги. Найдены координаты ИК притягивающей неподвижной точки для этой модели: (8) и $w_* = 1$. Найдены критические размерности полей θ и θ' :

$$\Delta_\theta = -1 + y/6, \quad \Delta_{\theta'} = d + 1 - y/6. \quad (30)$$

Эти выражения точные, потому как поля θ и θ' не ренормируются.

Был проанализирован составной оператор:

$$F_{nl} \equiv \theta_{i_1}(x) \cdots \theta_{i_l}(x) (\theta_i(x)\theta_i(x))^s + \dots, \quad (31)$$

где $l \leq n$ число свободных тензорных значков, и $n = l + 2s$ – число полей θ входящих в оператор; тензорные значки и аргумент x величины F_{nl} опущены. Критическая размерность такого оператора имеет вид:

$$\Delta_{nl} = n\Delta_\theta + \gamma_{nl}^* = \frac{ny}{6} + \frac{y(Q_1 + \alpha Q_2)}{6(d-1)(d+2)} \quad (32)$$

с Δ_θ из (30), Q_1 и Q_2 из (23).

С помощью Операторного Разложения найдены выражения для структурных функций вида:

$$\begin{aligned} \langle F_{nl}(t, \mathbf{x}) F_{qj}(t, \mathbf{x}') \rangle &= \mu^{d_F} \nu^{d_F^{\omega}} \eta_{nl,qj}(\mu r, mr, c/\mu\nu) \\ &\simeq \mu^{d_F} \nu^{d_F^{\omega}} (\mu r)^{-\Delta_{nl}-\Delta_{qj}} \zeta_{nl,qj}(mr, c(r)), \end{aligned} \quad (33)$$

где $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{x}' - \mathbf{x}|$; также предположим, что $n, q \geq 1$.

Ответ в главном порядке следующий (в пределах инерционного интервала):

$$\langle F_{nl} F_{qj} \rangle \simeq (\mu r)^{-\Delta_{nl}-\Delta_{qj}} (mr)^{\Delta_{n+q,0}}. \quad (34)$$

В конце третьей главы также изучается вопрос о влиянии анизотропии. Установлена иерархия анизотропных вкладов, которая становится более выраженной с увеличением степени сжимаемости.

Четвертая глава посвящена исследованию динамики жидкости в окрестности особенной размерности $d = 4$. Глава разделена на несколько частей: в первой проводится исследование для самого поля скорости, в остальных – для переноса пассивных полей (плотности, трейсера и магнитного поля).

Рассматривается уравнение Навье-Стокса (1), корреляционная функция случайной силы, входящей в уравнение определяется аналогично (4), (5) с единственной заменой $g_0 \rightarrow g_{10}$. Амплитуда g_{10} – это константа связи (формальный параметр разложения в теории возмущений); соотношение $g_{10} \sim \Lambda^y$ задает типичный УФ масштаб, обратный длине диссипации.

Стохастическая задача эквивалентна теоретико-полевой с функционалом действия:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\Phi) &= \frac{v'_i D_{ik} v'_k}{2} + v'_i \left\{ -\partial_t v_i - v_j \partial_j v_i + \nu_0 [\delta_{ik} \partial^2 - \partial_i \partial_k] v_k + u_0 \nu_0 \partial_i \partial_k v_k - \partial_i \phi \right\} \\ &+ \phi' [-\partial_t \phi + v_j \partial_j \phi + \nu_0 \nu_0 \partial^2 \phi - c_0^2 (\partial_i v_i)], \end{aligned} \quad (35)$$

где D_{ik} это корреляционная функция (5). Здесь подразумеваются интегрирования по переменным \mathbf{x} и t , а также суммирование по повторяющимся индексам.

В стандартном подходе размерность пространства d играет пассивную роль, параметр разложения это y ; детальное обсуждение можно найти в монографиях [9, 12]. Наш поход близок к РГ анализу несжимаемого уравнения Навье-Стокса вблизи размерности $d = 2$: в этом случае появляется дополнительная расходимость в функции Грина $v'v'$, которую можно устранить подходящим локальным контрчленом $v'_i \partial^2 v'_i$. Также необходимо построить схему разложения по двум параметрам y и $\epsilon = d - 2$. В первой главе была рассмотрена такая же модель. При фиксированной размерности она содержит все

необходимые слагаемые для ренормализации. Однако из размерного анализа (см. далее) следует, что при $d = 4$ появляется дополнительная расходимость в функции Грина $v'v'$. Так что чтобы сохранить ренормируемость модели при $d = 4$, функцию $D_{ij}(\mathbf{k})$ в (5) нужно заменить на

$$D_{ij}(\mathbf{k}) = g_{10}\nu_0^3 k^{4-d-y} \left\{ P_{ij}(\mathbf{k}) + \alpha Q_{ij}(\mathbf{k}) \right\} + g_{20}\nu_0^3 \delta_{ij}. \quad (36)$$

Здесь g_{20} это вторая константа связи, новое локальное слагаемое в правой части поглощает расходящиеся вклады от $v'v'$.

Такая модель оказывается мультипликативно ренормируемой. Она имеет три неподвижные точки: тривиальная точка FPI с координатами

$$g_1^* = 0, \quad g_2^* = 0, \quad (37)$$

в то время как u^* и v^* не определены; локальная точка FPII с координатами:

$$g_1^* = 0, \quad g_2^* = \frac{8\epsilon}{3}, \quad u^* = v^* = 1, \quad (38)$$

(ИК притягивающая для $\epsilon > 0$, $y < 3\epsilon/2$) и нелокальная точка FPIII:

$$g_1^* = \frac{16y(2y - 3\epsilon)}{9[y(2 + \alpha) - 3\epsilon]}, \quad g_2^* = \frac{16\alpha y^2}{9[y(2 + \alpha) - 3\epsilon]}, \quad u^* = v^* = 1, \quad (39)$$

(устойчива при $y > 0$ и $y > 3\epsilon/2$).

Общая картина устойчивости трёх неподвижных точек на плоскости $y - \epsilon$ представлена на рисунке 1. Прямые $y < 0$, $\epsilon = 0$; $y = 0$, $\epsilon < 0$; и $y = 3\epsilon/2$, $\epsilon > 0$ имеют смысл границ областей. Кроссовер между двумя неподвижными точками возможен вдоль линии $y = 3\epsilon/2$, что согласуется с [13].

Для неподвижной точки FPIII критические размерности совпадают со случаем $d = 3$, а именно:

$$\begin{aligned} \Delta_v &= 1 - y/3, & \Delta_{v'} &= d - \Delta_v, & \Delta_\omega &= 2 - y/3, & \Delta_m &= 1; \\ \Delta_\phi &= d - \Delta_{\phi'} = 2 - 5y/6, & \Delta_c &= 1 - 5y/12. \end{aligned} \quad (40)$$

Для локальной точки FPII получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Delta_v &= 1 - \epsilon/2, & \Delta_{v'} &= d - \Delta_v, & \Delta_\omega &= 2 - \epsilon/2, & \Delta_m &= 1; \\ \Delta_\phi &= d - \Delta_{\phi'} = 2 - 5\epsilon/4, & \Delta_c &= 1 - 5\epsilon/8. \end{aligned} \quad (41)$$

В зависимости от значений y и ϵ корреляционные функции проявляют разное скейлинговое поведение в ИК области (либо режим локальный, либо

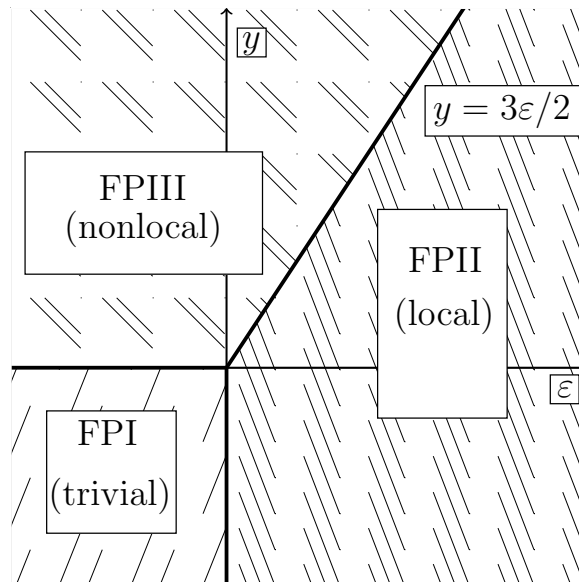


Рис. 1. Области ИК стабильности неподвижных точек в модели (35)

нелокальный). Значения для аномальных и критических размерностей тоже будут разные. Однако, для физических значений $d = 3$, $y = 4$ ИК устойчивой является только нелокальная точка FPIII, что подтверждает возможность РГ анализа непосредственно при $d = 3$.

Далее в работе описан перенос пассивных скалярных и векторного полей, вычислены критические размерности обычных полей, составных полей, применен аппарат Операторного Разложения и получены ответы для корреляционных функций в главном однопетлевом приближении.

В **Заключении** диссертации представлены основные результаты и выводы, а также благодарности и список использованной литературы.

Список публикаций по теме диссертации

1. N. V. Antonov and M. M. Kostenko, Phys. Rev. E **90**, 063016 (2014).
2. N. V. Antonov and M. M. Kostenko, Phys. Rev. E **92**, 053013 (2015)
3. N. V. Antonov, N.M. Gulitskiy, M. M. Kostenko, and T. Lūcivjanský Web of Conferences **125**, 05006 (2016)
4. N. V. Antonov, N. M. Gulitskiy, M. M. Kostenko, and T. Lūcivjanský Web of Conferences **137**, 10003 (2017)
5. N. V. Antonov, N.M. Gulitskiy, M. M. Kostenko, and T. Lūcivjanský Physical Review E **95**, 033120 (2017)

6. N. V. Antonov, N.M. Gulitskiy, M. M. Kostenko, and T. Lŭcivjanskŭ EPJ Web of Conferences **164**, 07044 (2017)

Цитируемая литература

7. U. Frisch, *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
8. А.С. Монин, А.М. Яглом, *Статистическая гидромеханика*, том 2, второе издание, СПб, Гидрометеиздат, 1996, 744 стр.
9. L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, and A. N. Vasiliev, *The Field Theoretic Renormalization Group in Fully Developed Turbulence* (Gordon & Breach, London, 1999).
10. N. V. Antonov, M. Yu. Nalimov, and A. A. Udalov, *Theor. Math. Phys.* **110**, 305 (1997).
11. J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Oxford, Clarendon, 1989).
12. A. N. Vasil'ev, *The Field Theoretic Renormalization Group in Critical Behavior Theory and Stochastic Dynamics* (Boca Raton, Chapman Hall/CRC, 2004)
13. N. V. Antonov, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 161101 (2004)