

УТВЕРЖДАЮ:

Проректор МГУ имени М.В.Ломоносова,
начальник управления научной политики
и организации научных исследований,
доктор физико-математических наук, профессор

А.А. Федягин

« 22 » мая 2018 г.



ведущей организации на диссертацию

Растегаева Никиты Владимировича

«СПЕКТРАЛЬНЫЕ АСИМПТОТИКИ В ЗАДАЧАХ С САМОПОДОБНЫМ
ВЕСОМ»,

представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических
наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические
системы и оптимальное управление.

Анализ спектральных свойств краевых задач с сингулярным весом является классической задачей в спектральной теории операторов.

Основа теории для этого класса задач была заложена в серии работ М. Г. Крейна
начала 50-ых годов прошлого столетия при изучении уравнения струны. В частности,
в случае, когда распределение масс струны единичной длины задаётся неубывающей
функцией P , то задача о колебаниях струны с закреплёнными концами имеет вид

$$\begin{aligned} -y'' &= \lambda P'y, \\ y(0) &= y(1) = 0. \end{aligned}$$

Асимптотика собственных значений в этой ситуации удовлетворяет условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sqrt{P'} dt,$$

из которого следует, что если у неубывающей функции P её абсолютно непрерывная
компонента равна нулю ($P_{ac} = 0$), то собственные значения растут быстрее чем n^2 .
Считающая функция $N(\lambda) = \#\{n : \lambda_n < \lambda\}$ собственных значений, соответственно
имеет асимптотику $N(\lambda) = o(\lambda)$. Веса с таким свойством ($P_{ac} = 0$) относятся к классу
сингулярных.

Дальнейшие продвижения по уточнению асимптотики функции $N(\lambda)$ связаны с
классом самоподобных весов. Задачами с сингулярными самоподобными весами за-
нимались многие математики: И.Хонг, Т.Уно, Т.Фуджита, У.Фрайберг, Дж.Кигами,
М.Лапидус, М.Соломянк, Е.Вербицкий, А.А. Владимиров, А.И. Назаров, И.А.Шейпак
и др. При этом в качестве веса изучались как самоподобные меры, так и веса, явля-
ющиеся обобщёнными производными самоподобных функций из $L_2[0; 1]$.

Оказалось, что на характер асимптотики влияют достаточно тонкие свойства са-
моподобных весов. В 1995 М.Соломянк и Е.Вербицкий для класса весов-самоподобных
мер получили асимптотику

$$N(\lambda) = \lambda^D(s(\ln \lambda) + o(1)),$$

где помимо степенного множителя появилась функция периодическая функция s . Параметры в асимптотике $D \in (0; \frac{1}{2})$ и s (в частности её период T) определяются параметрами самоподобия функции P (или веса P'). Известно, что в случае неарифметического самоподобия веса функция s вырождается в константу.

Один из важнейших вопросов в этой тематике является определение таких параметров самоподобия веса, при которых функция s не является постоянной. Этому вопросу посвящена большая часть рецензируемой диссертации. Кроме того, в работе изучаются спектральные асимптотики тензорных произведений компактных операторов с почти регулярной асимптотикой. Полученные результаты применяются к задаче малых уклонений случайных гауссовских полей, в частности, малых уклонений броуновского листа в единичном кубе с нормой $L_2(\mu)$, где мера μ есть тензорное произведение самоподобных мер обобщённого канторовского типа.

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы. Список литературы включает 68 названий, а также 7 публикаций автора по теме диссертации, включая 3 статьи из журналов, рекомендуемых списком ВАК, а также тезисы докладов на международных конференциях.

В введении подробно разъясняется выбор темы исследования, обосновывается актуальность затрагиваемых в диссертации задач и излагается история вопроса. Так упоминается результат А.А.Владимира и И.А. Шейпака (2013) о том, что для весов, являющихся обобщёнными производными ровных канторовских лестниц, функция s не является постоянной и имеет на периоде представление $s(t) = \sigma(t)e^{-Dt}$, где σ есть чисто сингулярная неубывающая функция.

Также во введении ясно обозначены цели и задачи исследования и формулируются результаты диссертации, которые доказываются в главах 1–3, приводится аргументация новизны результатов.

В главе 0 приведены определения основных объектов исследования, а также некоторые вспомогательные утверждения.

В главе 1 результат А.А.Владимира и И.А. Шейпака обобщается на случай весов — самоподобных мер, обладающих резонансом $1 : 1 : \dots : 1$ (в этом случае все величины $\ln(\rho_i(b_i - a_i))$ $i = 1, 2, \dots, m$) равны между собой) и ненулевыми промежуточными интервалами (т.е. интервалами, не содержащими носитель меры). При этом получено свойство квазипериодичности собственных значений для задачи Робена. Показано, что функция s имеет такое же представление: $s(t) = \sigma(t)e^{-Dt}$, где σ есть чисто сингулярная неубывающая функция.

В главе 2 результат А.А.Владимира и И.А. Шейпака обобщается на случай произвольной арифметически самоподобной меры с ненулевыми промежуточными интервалами.

В главе 3 получены главные члены спектральной асимптотики спектра тензорного произведения для всех возможных комбинаций параметров маргинальных асимптотик. В ряде некоторых случаев удается показать непостоянство периодической компоненты (теоремы А, З и 6).

Упомянутые результаты являются основными в диссертации. Кроме того, в работе немало других результатов, которые не только являются вспомогательными для доказательства основных утверждений, но зачастую представляют самостоятельный интерес.

Работа является цельным научным исследованием, в котором решены новые актуальные задачи. Кроме того, полученные результаты открывают возможность даль-

нейшего прогресса в изучении спектральных свойств дифференциальных операторов с сингулярными коэффициентами. Все результаты являются новыми, получены автором самостоятельно и полностью опубликованы. Доказательства являются полными и достаточно подробными, ясно изложены. Автореферат соответствует содержанию диссертации. Работа оформлена аккуратно.

Немногочисленные опечатки и некоторые стилистические шероховатости не портят общего впечатления от диссертации и не умаляют достоинств рецензируемой работы.

Диссертация носит теоретический характер. Её результаты будут полезными для специалистов, работающих в спектральной теории операторов и в теории малых уклонений гауссовских процессов, в частности, Московского, Санкт-Петербургского, Новосибирского университетов.

В целом можно заключить, что представленная диссертация Растегаева Никиты Владимировича «Спектральные асимптотики в задачах с самоподобным весом» соответствует требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям по действующему «Положению о порядке присуждения учёных степеней», а её автор заслуживает присвоения её учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Отзыв заслушан и утверждён на заседании кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ 21 мая 2018 года, выписка №2 из протокола заседания кафедры от 21 мая 2018 г.

Отзыв составил доктор физико-математических наук,
профессор кафедры теории функций и
функционального анализа
механико-математического факультета
МГУ имени М.В. Ломоносова



А.А. Шкаликов

Заведующий кафедрой теории функций и
функционального анализа
механико-математического факультета
МГУ имени М.В. Ломоносова,
академик РАН, профессор



Б.С. Кашин

И.о. декана механико-математического
факультета МГУ имени М.В. Ломоносова,
д.ф.-м.н., профессор



В.Н. Чубариков

