

О Т З Ы В

официального оппонента Борзова Вадима Васильевича
на диссертационную работу Растегаева Никиты Владимировича
“Спектральные асимптотики в задачах с самоподобным весом”,
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

Диссертация Растегаева Н.В. посвящена анализу асимптотики дискретного спектра задачи Штурма-Лиувилля на промежутке $[0,1]$ в пространстве с “арифметически самоподобным” весом. Интенсивное развитие теории фракталов и теории малых уклонений гауссовских случайных процессов в последние десятилетия стимулировало появление аналога хорошо известной асимптотической формулы Г.Вейля (1912 г.) для функции $N(\lambda)$ распределения числа собственных значений оператора Штурма-Лиувилля в случае сингулярных самоподобных мер. Главный член полученной (Kigami J., Lapidus M., 1993; Solomyak M., Verbitsky E., 1995) асимптотической формулы является произведением степенной функции от λ с показателем D ($0 < D < 1/2$) на некоторую ограниченную, положительную, периодическую функцию s от логарифма (λ) . Причем функция s превращается в константу, когда сингулярная мера является производной от “неарифметически самоподобной” обобщенной канторовой лестницы. Поэтому в следующих работах рассматривался только случай “арифметически самоподобной” обобщенной канторовой лестницы. Большое число опубликованных в последнее десятилетие работ Владимирова А.А., Шейпака И.А., Назарова А.И. и других авторов связано с дальнейшими исследованиями полученной асимптотической формулы и ее применением в теории малых уклонений гауссовских случайных процессов. Отметим недавнюю (2013 г.) работу Владимирова А.А. и Шейпака И.А., где для так называемых “ровных канторовых лестниц” была доказана факторизация функции $s(t)$ (на промежутке $[0, T]$ длины периода) на произведение $\exp(-Dt)$ и некоторой сингулярной неубывающей функции $f(t)$. Вышесказанное показывает, что тема диссертационной работы Растегаева Н.В. является актуальной.

В диссертации предложен новый подход к построению асимптотической формулы спектра, основанный на полученных автором новых интересных свойствах дискретного спектра задачи Штурма–Лиувилля. Речь идет о связи между спектрами задач на отрезке и его подотрезках, а также о введенном в работе понятии спектральной квазипериодичности, которое обобщает известное ранее свойство спектральной периодичности. Это позволило автору значительно расширить класс арифметически самоподобных канторовых лестниц, для которых справедлива факторизация Владимирова–Шейпака и, следовательно, для рассмотренных в работе классов арифметически самоподобных канторовых лестниц $s(t)$ не равна постоянной. Тем самым для этих классов подтверждена гипотеза Назарова А.И. (2004). Кроме того, в диссертационной работе введено обобщение свертки Меллина

на случай функций с периодической компонентой. Исследование асимптотических свойств почти меллиновской свертки позволяет автору получить главный член асимптотики тензорного произведения вполне непрерывных операторов с “почти регулярной” спектральной асимптотикой. Полученные результаты находят применение при исследовании малых отклонений гауссовских случайных процессов.

Все научные положения диссертации строго математически доказаны и поэтому являются достоверными научными фактами.

Научная новизна работы состоит в разработке нового подхода к анализу асимптотики спектра для различных классов сингулярных мер, являющихся обобщенными производными от арифметически самоподобных канторовых лестниц. Введенная в работе почти меллиновская свертка открывает широкие возможности для изучения спектральной асимптотики тензорного произведения компактных операторов с “почти регулярной” спектральной асимптотикой для всевозможных комбинаций параметров асимптотик сомножителей.

Наиболее существенными результатами автора являются следующие:

Во-первых, для “арифметически самоподобных канторовых лестниц” в случае “резонанса” $1:1: \dots :1$ (т.е. когда все параметры самоподобия равны 1) доказана справедливость факторизации Владимирова–Шейпака (теорема 3). Доказательство опирается на свойство спектральной периодичности для краевой задачи Неймана (теорема 1) и введенное в работе свойство спектральной квазипериодичности для краевой задачи Робена (теорема 2).

Во-вторых, факторизация Владимирова–Шейпака доказана для случая общего “резонанса” при дополнительном условии “ненулевых промежуточных интервалов” (теорема 6) с использованием дополнительных свойств спектра рассматриваемой задачи (теоремы 4 и 5). Этим результатам посвящены первая и вторая главы диссертации.

В третьих, получен главный член спектральной асимптотики тензорного произведения компактных операторов с “почти регулярной асимптотикой” для всевозможных комбинаций параметров асимптотик сомножителей (теоремы 7 - 11). При этом автор использует свойства введенного в работе обобщения свертки Меллина на случай функций с периодической компонентой. Эти результаты представлены в третьей главе диссертации.

Научные результаты Растегаева Н.В. дают основу для дальнейшего развития и применения предложенного подхода получения главного члена асимптотической формулы спектра задачи Штурма–Лиувилля с сингулярной самоподобной мерой на более широкий класс канторовых лестниц, а также на случай уравнений произвольного четного порядка. В этом состоит основная научная значимость данной диссертационной работы в области асимптотических методов спектральной теории дифференциальных уравнений. Практическая значимость работы заключается в том, что представленный

метод и полученные в работе конкретные результаты могут быть использованы в рамках интенсивно развивающейся теории малых уклонений гауссовских случайных процессов (см. п. 3 третьей главы диссертации), а также в задачах, касающихся асимптотик квантования случайных величин и векторов, и в некоторых задачах статистической физики. Например, при исследовании высокотемпературной асимптотики статистической суммы в формализме вторичного квантования Фока оператора Штурма–Лиувилля в фазовом пространстве с сингулярной самоподобной мерой.

Диссертация Растегаева Н.В. представляет целостное, логически завершенное исследование. Работа написана понятно, хорошим языком. Диссертация хорошо оформлена. Список цитируемой литературы содержит 75 работ, из которых примерно 40 зарубежных источников. Структура работы логична и соответствует поставленным задачам исследования.

Из частных замечаний можно указать четыре. Во-первых, на стр. 10, 10-я строчка сверху имеется опечатка: задача (1) это задача Дирихле, а не задача Неймана. По-видимому, должно быть (1.1). Во-вторых, на стр. 12 номер формулы 3 следует заключить в скобки, т.е. должно быть (3). В третьих, на стр. 25 в правой части формулы (0.11), судя по всему, функцию ψ следует заменить на функцию φ . В противном случае (т.е., если это не опечатка) нужно что-то сказать про функцию ψ . Наконец, на стр. 28, 14-я строчка сверху (в формулировке теоремы 1), скорее всего, опечатка. А именно, (1.3) следует заменить на (1.1).

Замечания общего характера

Не всегда автор выражает свои мысли достаточно ясно. Приведем три примера.

1. В пункте введения, озаглавленном **Цели и задачи** (конец стр.6 – начало стр 7), содержание не соответствует заголовку. Остается неясным, каковы цели диссертационной работы и какие задачи в работе рассмотрены.
2. В замечании 2 стр.19, 11-я строчка снизу – не совсем понятно выражение “ меру можно растянуть ”. Кроме того, не ясно, о каком спектре идет речь.
3. В замечании 4 на стр. 22, 3-я строчка снизу – рассматриваемое равенство понятно только, если μ (с индексом n) больше или равно λ (с индексом n). Скорее всего это так, но тогда нужно явно об этом сказать. Если же это не так, то тогда требуется пояснить, почему равенство выполняется.

Результаты автора нашли отражение в достаточном количестве (всего 7 работ) опубликованных работ, три из них опубликованы в журналах из перечня ВАК. Основные положения диссертации докладывались на шести международных конференциях.

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Сделанные выше замечания носят, очевидно, стилистический характер и никак не влияют на положительную оценку диссертации в целом. Представленная работа соответствует критериям, установленным Положением «О порядке присуждения ученых степеней», и её автор Растегаев Никита Владимирович достоин присвоения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Борзов Вадим Васильевич
доктор физико-математических наук
специальность 01.04.02 – теоретическая физика
профессор кафедры высшей математики ФГОУ ВО
Санкт-Петербургский государственный университет
телекоммуникаций им. проф. М.А.Бонч-Бруевича,
д. 22 -1, пр. Большевиков, Санкт-Петербург, 193232
Рабочий телефон: (812) 305-12-62
E-mail: borzov.vadim@yandex.ru

15 мая 2018г.



/ Борзов В.В. /

*Получено Д.О. Борзове
Начальник отдела кадров - зам.
начальника административно-
кадрового управления*
датировано.

[Signature]
/В.В. Новиков

