

**Отзыв научного руководителя
о диссертации Н.В. Растегаева “Спектральные
асимптотики в задачах с самоподобным весом”**

Исследованию спектров краевых задач с сингулярным весом посвящена обширная литература как отечественных, так и зарубежных авторов. Поскольку в общем случае трудно надеяться на получение продвинутых результатов, основные усилия здесь сосредоточены на задачах, в которых весовая функция обладает дополнительной структурой – *самоподобием*. Эти задачи тесно связаны с операторами на фрактальных структурах – чрезвычайно популярной тематикой в последние десятилетия. Кроме самостоятельного интереса, у этих задач имеются приложения в теории гауссовских случайных процессов. Поэтому тема диссертации является актуальной.

Для задачи Штурма–Лиувилля с самоподобным весом прорывный результат был получен в работах Kigami–Lapidus и Соломяка–Вербицкого в 1990х годах. Было показано, что главный член асимптотики собственных чисел имеет классический (степенной) вид в случае *неарифметического самоподобия* весовой меры. В случае же *неарифметически самоподобного* веса главный член асимптотики содержит периодический по $\ln(k)$ множитель. Далее было показано (А.И. Назаров), что этот множитель – непрерывная функция, и высказана гипотеза, что он не может вырождаться в константу ни для какой арифметически самоподобной сингулярной меры. Эта гипотеза была подтверждена для “ровной” (канторовской) меры в работах Владимира–Шейпака, в которых было открыто свойство *спектральной периодичности* для задач Неймана и Робэна. Более того, с помощью полученного ими аппроксимационного критерия сингулярности меры авторам удалось установить тонкую структуру изучаемой периодической функции.

В диссертации Н.В. Растегаева гипотеза о непостоянстве периодической компоненты в асимптотике спектра подтверждена и результат Владимира–Шейпака о структуре этой компоненты установлен для произвольных арифметически самоподобных мер с непустыми промежуточными интервалами. Это дает основания надеяться на закрытие проблемы в обозримом будущем.

Отмечу, что для самоподобия с резонансом $1 : 1 : \dots : 1$ докторантом установлена *спектральная квазипериодичность* для задачи Робэна

(это обобщение свойства спектральной периодичности введено в диссертации). В случае общего резонанса ни одно из этих свойств места не имеет, и задача решается с помощью весьма тонкого анализа связи между спектрами задач на отрезке и на подотрезках.

Кроме того, в диссертации изучена спектральная асимптотика тензорного произведения операторов с почти регулярными маргинальными асимптотиками (примерами таких операторов как раз являются операторы краевых задач с самоподобными весами). Эта задача решена при всех возможных комбинациях параметров, с наложением лишь в некоторых случаях небольших технических ограничений, для чего потребовалась довольно изощренная аналитическая техника.

Н.В. Растегаев проявил в работе самостоятельность, настойчивость и изобретательность и сумел получить интересные результаты, свидетельствующие о квалификации автора.

Научный руководитель,
д.ф.-м.н., профессор

А. И. Назаров

Подпись НАЗАРОВА Александра Ильича заверяю:

