

О Т З Ы В

официального оппонента на диссертацию Холодовой Светланы Евгеньевны “Математическое моделирование и анализ течений и волн во вращающихся и электропроводных жидких средах”, представленную на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

Диссертационная работа С. Е. Холодовой посвящена **актуальной и важной в практическом отношении проблеме** – моделированию волновых движений в сжимаемых и несжимаемых однородных и неоднородных идеальных средах с учётом магнитных полей, силы Кориолиса, электропроводности. Волновые движения широко распространены в природных и технических системах и с большой степенью точности описываются в рамках моделей механики сплошных сред. Сюда относятся океанические и морские волны, формирующие берега, оказывающие силовые воздействия на различного типа гидротехнические сооружения и влияющие на функционирование морского транспорта. Как правило, в точной постановке соответствующие математические модели включают в себя системы нелинейных уравнений в частных производных с нелинейными же граничными условиями. Кроме того, граница области определения решения неизвестна и должна находиться вместе с полем скоростей, давлений, температур и т. д. Всё это усугубляет математические трудности исследования таких задач. Достаточно вспомнить знаменитую задачу Коши – Пуассона о волнах на воде в рамках модели идеальной жидкости, корректность которой была доказана лишь в 70-90-х годах 20-го века. Поэтому большое внимание в теории поверхностных и внутренних волн уделялось приближённым моделям мелкой воды, пространственным крупномасштабным движениям, линейным задачам и т. д. Среди таких моделей особое место занимают интегрируемые модели (возможно при дополнительных предположениях), когда решения находятся в аналитической форме. В диссертационной работе с этой точки зрения и решается ряд задач геофизической гидродинамики: пространственные волновые движения в слое вращающейся жидкости; распространение волн в сжимаемых средах с учётом вращения и электропроводности. Большое внимание уделяется квазигеострофическим движениям, возникающим под действием вращения Земли. Построенные в диссертации решения позволяют: оценить волновые процессы во всём пространственно-временном масштабе; дать количественную характеристику свойств волнового движения; выступать в роли эталонов, позволяющих глубже понять физическую модель явления; проводить сравнение и оценку эффективности различных асимптотических и численных методов.

Диссертация состоит из введения, девяти глав, заключения и списка литературы из 286 наименований. Объём работы – 451 с.

Научная новизна работы обусловлена исследованием волновых процессов во вращающихся жидких средах, причём для некоторых из них учтено влияние сжимаемости, электропроводности, магнитных полей и топологии рельефа. В диссертации получены новые важные результаты, вносящие вклад в теорию линейных и нелинейных волновых движений, редукцию соответствующих начально-краевых задач, построение аналитических решений, анализ взаимодействия различных механизмов неустойчивости.

В первых 6-ти главах диссертации моделируются волновые процессы без учёта электропроводности и магнитных полей. Здесь в качестве **новых** отметим результаты:

1. Для процесса распространения трёхмерных длинных волн малой амплитуды во вращающемся прямолинейном канале и цилиндрическом кольцевом бассейне найдена топография дна, при которой соответствующие математические модели точно интегрируются.

2. При изучении воздействий длинных нелинейных волн на сооружения с вертикальной стенкой получены (для переменной топографии дна) точные представления всех гидродинамических величин. Также найдено точное решение краевой задачи и в сферической геометрии.

3. Впервые проведена редукция трёхмерной системы уравнений динамики сжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости к скалярному уравнению, что позволило установить разрешимость всех возникающих начально-краевых задач теории волн в этом случае.

Решена задача об излучении волн во вращающуюся сжимаемую жидкость плоской горизонтальной и вертикальной стенками, совершающими гармонические по времени колебания.

В главах 7-9 диссертации подробно изучены механизмы влияния на волновые движения эффектов электропроводности и магнитного поля.

4. Краевые задачи, описывающие волны во вращающемся слое несжимаемой электропроводной жидкости, в случае плоской и сферической геометрии сведены к решению одного нелинейного уравнения. В частных случаях построены его точные решения. Решение соответствующей линейной задачи представлено в виде гармонической волны. Получены дисперсионные соотношения, дающие связь между частотой, волновым вектором, параметром Кориолиса и невозмущённым полем магнитной индукции.

5. В нелинейной постановке задача о квазигеострофических движениях во вращающемся слое электропроводной жидкости переменной глубины сведена к решению системы трёх нелинейных уравнений для гидромагнитного давления и для двух функций, описывающих магнитное поле. Найдено аналитическое решение, которое позволяет выявить общие закономерности процесса и определить влияние рельефа верхней границы области и динамики нижней границы на магнитогидродинамические характеристики волнового процесса.

6. Аналитически реализована модель волновых трёхмерных крупномасштабных движений невязкой, несжимаемой стратифицированной идеально проводящей вращающейся жидкости для особого случая геометрии рассматриваемого объёма, учитывающего особенность экваториальной зоны сферического слоя. Построены точные решения представленного редуцированного уравнения, описывающие распространение волн малой амплитуды. Проведённый анализ позволяет сделать вывод о существовании нетривиальных волновых возмущений рассматриваемой среды в зоне экватора, а именно волн, распространяющихся к востоку и к западу, причём зональная скорость в волне не удовлетворяет геострофическому соотношению, как это обычно бывает в неэлектропроводной жидкости. Вклад в отклонение от геострофичности скорости вносит наличие магнитного поля, а именно его меридиональная компонента.

7. Построена математическая модель динамики пространственных крупномасштабных движений во вращающемся слое идеальной электропроводной несжимаемой однородной жидкости переменной глубины с учётом диссипативных эффектов и однородной и неоднородной жидкости для больших значений магнитного числа Рейнольдса. Проведена редукция соответствующих линейных систем уравнений в частных производных к одному скалярному уравнению. Сформулировано и доказано утверждение об аналитическом представлении решения задачи о малых возмущениях с учётом и без учёта эффектов диффузии магнитного поля, что позволило построить в явном виде решения, описывающие волны малой амплитуды в бесконечно протяженном по горизонтали прямолинейном слое, в канале и цилиндрическом кольцевом слое переменной глубины. Анализ полученного решения позволил установить факт существования установившегося режима колебаний при больших значениях времени, что служит подтверждением важной роли стратификации плотности жидкого слоя, определяющей в целом ряде случаев его основную динамику как важный фактор эволюции исследуемого динамического процесса. Найдены аналитические решения систем нелинейных уравнений в частных производных, моделирующих геострофическое и квазигеострофическое движения в плоском и сферическом слое. Анализ структуры магнитогидродинамических величин, возникающих в сферическом жидком слое в результате термодинамических изменений у внешней границы, позволяет сделать вывод о существовании сильных изменений в тонком жидком слое, примыкающем к границе области.

8. Доказана возможность существования индуцированного поля на достаточно длительном временном промежутке, а также его существование при отключении фонового внешнего поля. В нелинейной постановке рассмотрена задача о квазигеострофических движениях. Доказано существование неустойчивых динамических режимов, обусловленных совместным действием магнитных сил, гравитационной силы, силы Кориолиса и граничными эффектами. В то же время, управляя значением фонового магнитного поля, можно наблюдать установившийся во времени процесс, то есть, индуцированное магнитное поле может существовать сколь угодно длительное время.

Высокая степень обоснованности и достоверности результатов диссертационной работы обусловлена выбором широко известных моделей гидродинамики вращающихся жидкостей, магнитной гидродинамики и теории волн, используемых методов математической физики (редукции, возмущений, малого параметра, аппарата функций Грина) и сопоставлением некоторых положений и следствий с известными в научной литературе результатами.

Научное значение работы заключается в выявлении фундаментальных закономерностей развития линейных и нелинейных волн при одновременном учёте сжимаемости, вращения, электропроводности и магнитных полей. Впервые проведена редукция математических моделей (при некоторых условиях) к одному (или нескольким) уравнению, структура решений которого более обозрима и допускает явные представления. Найдены условия существования устойчивых и неустойчивых режимов в магнитогидродинамических системах. Проведено детальное исследование влияния диссипативных эффектов в линейных и нелинейных задачах волновых движений электропроводных жидких сред.

Практическое значение диссертационной работы состоит в том, что её результаты могут быть использованы: для расчёта силового воздействия волн на гидротехнические сооружения; для оценки параметров источника волновых возмущений по электромагнитному полю; в навигации подводных аппаратов и других задачах технической геофизики. Кроме того, результаты диссертации могут быть полезны при изучении процессов самовозбуждения магнитогидродинамического динамо в больших массах жидкого металла, в напорных камерах реакторов на быстрых нейтронах, домнах и др.

Оценка диссертации. Материал диссертации изложен достаточно подробно.

Во введении приведён обширный обзор некоторых публикаций, относящихся к теме работы. По содержанию диссертации следует сделать следующие замечания:

1. Впервые уравнения малых колебаний однородной вращающейся жидкости получил не С. Л. Соболев, а А. Пуанкаре, который их вывел и посвятил их качественному исследованию четыре мемуара – 1885, 1901, 1902, 1910 (см., например, Ламб Г. Гидродинамика. Гл. XII Вращающиеся массы жидкостей, 1947). Поэтому уже давно принято называть такие уравнения уравнениями Пуанкаре – Соболева, см. Демиденко Г. В., Успенский С. В., 1998.

2. Удивляет отсутствие в обзоре ссылок на работы по задаче Коши – Пуассона о неустановившихся волнах на воде в точной постановке. Ссылки на работы [81], [83] недостаточны и не поясняют математическую природу таких задач.

Задача Коши – Пуассона о волнах на воде однозначно разрешима в классах аналитических по пространственным переменным функций (Налимов В. И., 1969; Овсянников Л. В., 1972, 1973; Макаренко Н. И., 1980). Здесь основным является аппарат шкал банаховых пространств аналитических функций (Овсянников Л. В., 1971).

Что касается решений задачи Коши – Пуассона в классах функций конечной гладкости, то такая задача корректно поставлена, когда градиент давления по нормали на свободной границе направлен строго внутрь жидкости. Физически это означает, что суммарное ускорение сил инерции и тяжести, приложенных к частице на свободной поверхности, направлено вне жидкости. При обратном знаке нормальной производной задача о волнах на воде является некорректной (Плотников П. И., 1980). В гидродинамике этот факт носит название тейлоровской неустойчивости (Taylor G., 1950).

Для плоских потенциальных волн на бесконечной глубокой воде однозначная разрешимость задачи Коши – Пуассона была доказана Налимовым В. И., 1972, 1974. Для жидкости конечной глубины подобный результат был получен Yosihara H., 1982. В случае трёхмерных волн на воде, однозначная разрешимость задачи Коши – Пуассона была установлена Бименовым М. А., 1994. Здесь уже был применён математический аппарат, основанный на теории Нэша – Мозера. Во всех этих работах строгая отрицательность производной по нормали от давления играла решающую роль. При этом же условии доказана корректность плоских вихревых волн на воде (Налимов В. И., 1996). Заметим, что для капиллярных волн знак нормальной производной от давления роли не играет (Yosihara H., 1983).

Для модели вязкой жидкости (уравнения Навье – Стокса) задача Коши – Пуассона исследована в работах Beale J. T., 1981, 1984, Beale J. T., Nishida T., 1986.

3. К сожалению, в работе имеются неточности. На с. 47 утверждается, что общее решение системы дифференциальных уравнений гидродинамики содержит произвольные постоянные. Однако во многих местах диссертации при анализе совместности систем часто задача сводится к равенству нулю якобиана двух функций, и автор делает правильный вывод, что одна из функций является произвольной функцией от другой, а не постоянной. На с. 62 функция \tilde{H} зависит от y , на с. 64 она уже постоянная, а на с. 65 снова зависит от y . Заметим, что \tilde{H} не должна зависеть от волновых чисел возмущений, и из (2.23) следует, что она есть экспонента. Уравнение (2.25) также не должно выполняться по тем же причинам. Уравнения (2.53), (2.61) не квадратные, а трансцендентные. На с. 126 выписан зачем-то определитель 4-го порядка, но нет никаких выводов. На с. 129-131 приведены формулы для метода Галёркина и снова нет количественных выводов. Уравнение (5.15) не может выполняться, так как $\rho_0(z)$ – заданная плотность невозмущённого течения и не должна зависеть от волновых чисел.

4. На с. 178 приведено решение уравнения с разделяющимися переменными, хотя уравнение для B_z и v_x есть просто производная произведения. Несколько раз есть ссылка на работу [34] по поводу структуры векторов из $\mathbf{H}_2(\Omega)$ (с. 158, 230, 266).

5. В работе по механике жидкости нет количественных результатов, что, на наш взгляд, несколько её обедняет.

Сделанные замечания не влияют на общую положительную оценку результатов диссертации.

Заключение по диссертации. Анализ диссертационной работы, проведённый выше, позволяет утверждать, что С. Е. Холодова выполнила цельное и актуальное исследование в области ряда задач геофизической гидродинамики, именно математического моделирования пространственных волновых движений с учётом сжимаемости, магнитных полей, силы Кориолиса, электропроводности. Оппонируемая диссертация представляет собой (с учётом замечаний) законченную научно-квалификационную работу, выполненную на достаточно высоком научном уровне. В ней получены новые и интересные результаты, касающиеся поведения волновых гидродинамических и магнитных полей во вращающихся системах жидких сред. Большинство из найденных аналитических решений являются оригинальными и могут войти в «золотой фонд» математической гидродинамики. Совокупность этих результатов можно квалифицировать как новое научное достижение, состоящее в объяснении влияния неоднородностей, сил Кориолиса, магнитных полей и электропроводности на волновые движения. Стоит специально отметить, что решения получены для уравнений, не разрешённых относительно временной переменной, что характерно именно для вращающихся жидких систем.

Квалификационная сторона диссертации не вызывает сомнений: при постановке задач и выборе методов их решения С. Е. Холодова проявила себя специалистом, свободно владеющим разнообразными аналитическими методами в области МЖГ, адекватно интерпретирующим полученные результаты для МГД течений со сложными свойствами. Результаты исследований опубликованы в одной совместной монографии и 21 работе в изданиях из перечня ВАК России. Автореферат диссертации полно и правильно отражает её содержание.

Учитывая вышеизложенное, считаю, что диссертационная работа Холодовой Светланы Евгеньевны “Математическое моделирование и анализ течений и волн во вращающихся и электропроводных жидких средах” имеет важное теоретическое и прикладное значение и удовлетворяет всем требованиям Положения о присуждении учёных степеней, а её автор заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы.

Официальный оппонент
заведующий отделом
дифференциальных уравнений
механики ИВМ СО РАН,
д.ф.-м.н., профессор

В. К. Андреев

01 июня 2018 г.

Адрес: 660036, Красноярск, Академгородок, 50/44, ИВМ СО РАН

Тел.: (391)290-75-94

E-mail: andr@icm.krasn.ru

Подпись В. К. Андреева удостоверяю.

учёный секретарь ИВМ СО РАН

к.ф.-м.н.



А. В. Вяткин