

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу

Сеника Никиты Николаевича

“Усреднение периодических и локально периодических эллиптических операторов”,

представленную на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук по специальности

01.01.03 – “Математическая физика”

Диссертационная работа Н.Н. Сеника посвящена изучению вопросов усреднения дифференциальных операторов с быстро осциллирующими коэффициентами. В многомерном пространстве \mathbb{R}^d рассматриваются матричные операторы второго порядка с коэффициентами вида $A(x, x/\varepsilon)$, где ε – малый положительный параметр. Функция $A(x, y)$ периодична по переменной y относительно некоторой решётки периодичности. По переменной x предполагается определённая гладкость типа условия Липшица или Гёльдера. На старшую часть оператора накладывается требование коэрцитивности, которое в конечном счёте обеспечивает его сильную эллиптичность и m -секториальность. Основная цель работы – выписать усреднённый (эффективный) оператор, доказать сходимость резольвенты исходного оператора к резольвенте усреднённого в подходящей операторной норме и установить оценку скорости сходимости. При этом очень часто непосредственно разность резольвент не имеет предела в выбранной норме. Поэтому, помимо эффективного оператора, в подавляющем числе оценок присутствуют те или иные дополнительные операторы – корректоры. Наличие последних позволяет добиться нужной малости и получить оценку скорости сходимости. Многие из оценок оказываются точными по порядку и не могут быть улучшены, что придает законченность этим результатам. Для констант в оценках указывается, от каких характеристик оператора они зависят, а от каких – не зависят (хотя, в принципе, константы можно выписать явно). Отдельно выделяются случаи, когда аппроксимацию можно упростить без ухудшения оценок скорости сходимости. В этих случаях оценивается разность исходной и усреднённой резольвент и, возможно, редуцированного корректора.

Интерес к изучению равномерной резольвентной сходимости был инициирован М.Ш. Бирманом, Т.А. Суслиной и В.В. Жиковым, С.Е. Пастуховой. Сейчас данное направление в теории усреднения активно развивается и остаётся очень актуальным. Помимо чисто теоретического значения, подобные результаты важны и для приложений. Например, они могут быть полезными для построения композитных материалов с заданными свойствами.

Диссертационная работа состоит из двух частей. Остановимся подробнее на основных результатах каждой части.

В первой части работы быстрые и медленные переменные в коэффициентах оператора разделены в следующем смысле: коэффициенты имеют вид $A(x_2, x_1/\varepsilon)$, где x_1, x_2 – многомерные переменные, такие что (x_1, x_2) – переменная в исходном пространстве \mathbb{R}^d . Коэффициенты принадлежат специальным функциональным пространствам. Говоря нестрого, по медленной переменной x_2 предполагается выполнение условия Липшица, по быстрой переменной x_1/ε – принадлежность к классу мультипликаторов между подходящими Соболевскими пространствами (например, для старшего

коэффициента этот класс сводится к L_∞ , но коэффициенты в младших членах могут быть неограниченными функциями или распределениями). Для рассматриваемых операторов выписаны усреднённые и приводятся корректоры двух типов. Установлены оценки скорости сходимости разности резольвент и их производных по медленным переменным x_2 ; оценки выписаны в норме операторов, действующих в пространстве L_2 . Чтобы получить аналогичные оценки для производных по переменным x_1 , приходится привлекать один из корректоров. Второй корректор используется для улучшения аппроксимации резольвенты по операторной норме в L_2 и увеличения соответствующей скорости сходимости.

Во второй главе рассматривается более общий случай операторов, у которых медленные и быстрые переменные не разделены, то есть коэффициенты имеют вид $A(x, x/\varepsilon)$. По медленным переменным предполагается выполнение либо условия Липшица, либо условия Гёльдера. Вновь выписываются оценки скорости сходимости и точности аппроксимации в смысле нормы операторов в пространстве L_2 . Данные оценки получены для разности резольвент, а также для разности их производных, при этом изучаются как обычные производные, так и дробные. В результате устанавливается серия различных оценок, которые показывают, как величина погрешности зависит от выбранной гладкости коэффициентов и от порядка производной. В некоторые оценки входят специальные корректоры, роль которых – обеспечить или еще улучшить сходимость.

Главными достижениями работы по сравнению с результатами других авторов можно назвать следующее.

1. Изучаются сильно эллиптические несамосопряженные операторы общего вида, старшая часть которых имеет дивергентную форму, при этом на ее структуру не накладывается дополнительных ограничений. В периодическом случае допускаются младшие члены с коэффициентами из очень общих классов мультипликаторов.
2. Строится корректор, с помощью которого удаётся улучшить скорость сходимости разности резольвент по норме операторов, действующих в пространстве L_2 . Такой корректор сложно устроен, и его нахождение требует значительных усилий. Ранее это делалось только в самосопряженном случае, причем когда коэффициенты зависят лишь от быстрых переменных. Для более общих операторов аппроксимация с указанным корректором является новой, даже если коэффициенты – гладкие.
3. Ослабляется требование на гладкость коэффициентов по медленной переменной. Ухудшение гладкости коэффициентов приводит к дополнительным сложностям при доказательстве оценок скорости сходимости. Эти трудности преодолеваются за счёт различных технических приемов, а также за счёт выбора подходящих корректоров. Правильно подобрать такой корректор – отдельная задача в каждом отдельном случае.

К работе имеется несколько замечаний.

1. Основное замечание относится к списку литературы. По тематике диссертации имеется достаточно много недавних работ В.В. Жикова и С.Е. Пастуховой. Из

