

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу

Сеника Никиты Николаевича

“Усреднение периодических и локально периодических эллиптических операторов”,

представленную на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук по специальности

01.01.03 – “Математическая физика”

Диссертационная работа Н.Н. Сеника посвящена изучению вопросов усреднения дифференциальных операторов с быстро осциллирующими коэффициентами. В многомерном пространстве \mathbb{R}^d рассматриваются матричные операторы второго порядка с коэффициентами вида $A(x, x/\varepsilon)$, где ε – малый положительный параметр. Функция $A(x, y)$ периодична по переменной y относительно некоторой решётки периодичности. По переменной x предполагается определённая гладкость типа условия Липшица или Гёльдера. На старшую часть оператора накладывается требование коэрцитивности, которое в конечном счёте обеспечивает его сильную эллиптичность и m -секториальность. Основная цель работы – выписать усреднённый (эффективный) оператор, доказать сходимость резольвенты исходного оператора к резольвенте усреднённого в подходящей операторной норме и установить оценку скорости сходимости. При этом очень часто непосредственно разность резольвент не имеет предела в выбранной норме. Поэтому, помимо эффективного оператора, в подавляющем числе оценок присутствуют те или иные дополнительные операторы – корректоры. Наличие последних позволяет добиться нужной малости и получить оценку скорости сходимости. Многие из оценок оказываются точными по порядку и не могут быть улучшены, что придает законченность этим результатам. Для констант в оценках указывается, от каких характеристик оператора они зависят, а от каких – не зависят (хотя, в принципе, константы можно выписать явно). Отдельно выделяются случаи, когда аппроксимацию можно упростить без ухудшения оценок скорости сходимости. В этих случаях оценивается разность исходной и усреднённой резольвент и, возможно, редуцированного корректора.

Интерес к изучению равномерной резольвентной сходимости был инициирован М.Ш. Бирманом, Т.А. Суслиной и В.В. Жиковым, С.Е. Пастуховой. Сейчас данное направление в теории усреднения активно развивается и остаётся очень актуальным. Помимо чисто теоретического значения, подобные результаты важны и для приложений. Например, они могут быть полезными для построения композитных материалов с заданными свойствами.

Диссертационная работа состоит из двух частей. Остановимся подробнее на основных результатах каждой части.

В первой части работы быстрые и медленные переменные в коэффициентах оператора разделены в следующем смысле: коэффициенты имеют вид $A(x_2, x_1/\varepsilon)$, где x_1, x_2 – многомерные переменные, такие что (x_1, x_2) – переменная в исходном пространстве \mathbb{R}^d . Коэффициенты принадлежат специальным функциональным пространствам. Говоря нестрого, по медленной переменной x_2 предполагается выполнение условия Липшица, по быстрой переменной x_1/ε – принадлежность к классу мультипликаторов между подходящими Соболевскими пространствами (например, для старшего

коэффициента этот класс сводится к L_∞ , но коэффициенты в младших членах могут быть неограниченными функциями или распределениями). Для рассматриваемых операторов выписаны усреднённые и приводятся корректоры двух типов. Установлены оценки скорости сходимости разности резольвент и их производных по медленным переменным x_2 ; оценки выписаны в норме операторов, действующих в пространстве L_2 . Чтобы получить аналогичные оценки для производных по переменным x_1 , приходится привлекать один из корректоров. Второй корректор используется для улучшения аппроксимации резольвенты по операторной норме в L_2 и увеличения соответствующей скорости сходимости.

Во второй главе рассматривается более общий случай операторов, у которых медленные и быстрые переменные не разделены, то есть коэффициенты имеют вид $A(x, x/\varepsilon)$. По медленным переменным предполагается выполнение либо условия Липшица, либо условия Гёльдера. Вновь выписываются оценки скорости сходимости и точности аппроксимации в смысле нормы операторов в пространстве L_2 . Данные оценки получены для разности резольвент, а также для разности их производных, при этом изучаются как обычные производные, так и дробные. В результате устанавливается серия различных оценок, которые показывают, как величина погрешности зависит от выбранной гладкости коэффициентов и от порядка производной. В некоторые оценки входят специальные корректоры, роль которых – обеспечить или еще улучшить сходимость.

Главными достижениями работы по сравнению с результатами других авторов можно назвать следующее.

1. Изучаются сильно эллиптические несамосопряженные операторы общего вида, старшая часть которых имеет дивергентную форму, при этом на ее структуру не накладывается дополнительных ограничений. В периодическом случае допускаются младшие члены с коэффициентами из очень общих классов мультипликаторов.
2. Строится корректор, с помощью которого удаётся улучшить скорость сходимости разности резольвент по норме операторов, действующих в пространстве L_2 . Такой корректор сложно устроен, и его нахождение требует значительных усилий. Ранее это делалось только в самосопряженном случае, причем когда коэффициенты зависят лишь от быстрых переменных. Для более общих операторов аппроксимация с указанным корректором является новой, даже если коэффициенты – гладкие.
3. Ослабляется требование на гладкость коэффициентов по медленной переменной. Ухудшение гладкости коэффициентов приводит к дополнительным сложностям при доказательстве оценок скорости сходимости. Эти трудности преодолеваются за счёт различных технических приемов, а также за счёт выбора подходящих корректоров. Правильно подобрать такой корректор – отдельная задача в каждом отдельном случае.

К работе имеется несколько замечаний.

1. Основное замечание относится к списку литературы. По тематике диссертации имеется достаточно много недавних работ В.В. Жикова и С.Е. Пастуховой. Из

большого списка цитируются лишь три работы. Следовало бы упомянуть большее число работ данных авторов.

2. Стр. 25, строка 1 сверху. Фраза “Первый шаг типичен для проблем подобного рода ...” несколько некорректна. В задачах усреднения комбинация масштабного преобразования и преобразования Гельфанда используется редко ввиду ограниченности применения.
3. Стр. 30, строка 2 сверху. Выбирается некоторое фиксированное $\varepsilon \in \mathcal{E}$, которое обозначается символом ε_0 . При этом символ ε_0 уже использовался при задании интервала \mathcal{E} .
4. Стр. 33, вторая строка после неравенства (1.1.22) – не закончена последняя фраза.

Отмеченные недостатки не носят принципиального характера и не влияют на общую безусловно положительную оценку работы.

Представленная диссертация является самостоятельным законченным фундаментальным исследованием. Поставленные задачи полностью решены, доказательства утверждений проведены на строгом математическом уровне. Все основные результаты диссертации являются новыми и интересными. Они были опубликованы в четырёх печатных работах в ведущих российских и зарубежных научных журналах. Результаты работы также докладывались на ряде признанных международных конференций. Автореферат соответствует содержанию диссертации.

На основании вышеизложенного считаю, что диссертация Н.Н. Сеника полностью соответствует всем требованиям “Положения о присуждении учёных степеней”, утвержденного Постановлением № 842 Правительства РФ от 24 сентября 2013 г., предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени кандидата наук, а её автор заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 – “Математическая физика”.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,
шифр специальности – 01.01.02 “Дифференциальные уравнения”,
ведущий научный сотрудник
отдела дифференциальных уравнений
Института математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра РАН
Борисов Денис Иванович

Служебный адрес:

450008, Россия, г. Уфа,
ул. Чернышевского, д. 112
Тел.: (347)2725936
E-mail: BorisovDI@yandex.ru

“26” февраля 2018 г.



Полное наименование: Федеральное бюджетное учреждение науки Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН
Ученый секретарь ИМБЦ УНЦ РАН
И.С. Кузнецов