**Отзыв научного руководителя
о диссертации Никиты Николаевича Сеника
"Усреднение периодических и локально периодических
эллиптических операторов",
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.03 — математическая физика**

Никита Николаевич Сеник окончил с отличием магистратуру физического факультета СПбГУ по кафедре высшей математики и математической физики в 2013 году; его диссертация была отмечена премией имени Владимира Дейча как лучшая магистерская работа. В 2013-2016 гг. Никита Сеник обучался в аспирантуре СПбГУ на той же кафедре. В 2016 году успешно окончил аспирантуру. Я руководила работой Никиты Сеника в бакалавриате, магистратуре и аспирантуре. В настоящее время им закончена подготовка кандидатской диссертации, работа прошла необходимую апробацию и готова к защите.

Тематика исследований Никиты Сеника относится к теории усреднения (гомогенизации) дифференциальных операторов. Теория усреднения изучает свойства решений дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами. Задачи гомогенизации, в которых коэффициенты периодичны по всем направлениям, относительно хорошо изучены. А задачи, в которых коэффициенты периодичны лишь по некоторым направлениям либо локально периодичны (на быстрые периодические осцилляции накладываются медленные изменения), исследованы недостаточно полно. Этот случай важен для приложений, но технически он оказывается существенно более сложным. Целью диссертационного исследования Никиты Сеника было получение операторных оценок погрешности для широкого класса задач гомогенизации описанного типа.

Диссертация содержит три главы. В главе 1 изучается задача усреднения для матричного сильно эллиптического оператора $\mathcal{A}^\varepsilon$ второго порядка в $\mathbb{R}^d$, зависящего от малого параметра $\varepsilon > 0$:

$$\mathcal{A}^\varepsilon = D^* A(x_1/\varepsilon, x_2)D + a_1^*(x_1/\varepsilon, x_2)D + D^* a_2(x_1/\varepsilon, x_2) + q(x_1/\varepsilon, x_2).$$

Старшая часть оператора задана в дивергентной форме, в оператор включаются младшие члены. Оператор может быть несамосопряженным, коэффициенты при младших членах принадлежат достаточно широким мультипликаторным классам. Коэрцитивность постулируется. Запишем $\mathbb{R}^d$ в виде $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$, $d = d_1 + d_2$. Предполагается, что коэффициенты зависят от x_1/ε и x_2, где $x_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$, при этом по первой переменной они периодичны относительно некоторой d_1-мерной решетки. Приходится накладывать некоторые условия регулярности коэффициентов относительно x_2, а именно, условие липшицевости. (Впрочем, это предположение является обычным для подобных задач. В главе 3 в несколько иной постановке диссертант показывает, что можно ослабить липшицевость до гельдеровости, но за счет ухудшения порядка погрешности в оценках.) Никакой гладкости по первой (осциллирующей) переменной не требуется, что существенно для приложений.

В главе 1 получены результаты о поведении оператора $\mathcal{A}^\varepsilon$ при малом ε. Установлено, что резольвента оператора $\mathcal{A}^\varepsilon$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ к резольвенте эффективного оператора $\mathcal{A}^0$, коэффициенты которого зависят лишь от переменной x_2. Доказаны точные по порядку оценки погрешности:

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \mu I)^{-1}\|_{L_2 \to L_2} \leqslant C\varepsilon, \tag{1}$$

$$\|D_2(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu I)^{-1} - D_2(\mathcal{A}^0 - \mu I)^{-1}\|_{L_2 \to L_2} \leqslant C\varepsilon. \tag{2}$$

Для производной по периодической переменной получена аппроксимация при учете корректора:

$$\|D_1((\mathcal{A}^\varepsilon - \mu I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \mu I)^{-1} - \varepsilon\mathcal{K}_\mu(\varepsilon))\|_{L_2 \to L_2} \leqslant C\varepsilon. \tag{3}$$

Корректор $\mathcal{K}_\mu(\varepsilon)$ отличается от стандартного корректора теории усреднения лишь тем, что он содержит вспомогательный сглаживающий оператор. Получена также более точная аппроксимация резольвенты по операторной норме в L_2:

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \mu I)^{-1} - \varepsilon\mathcal{C}_\mu(\varepsilon)\|_{L_2 \to L_2} \leqslant C\varepsilon^2. \tag{4}$$

Здесь корректор $\mathcal{C}_\mu(\varepsilon)$ имеет более сложную структуру, чем стандартный корректор, применяемый в теории усреднения.

Результаты существенно усиливают известные ранее факты для данной задачи. Оценка (1) прежде была установлена (работа Т. А. Суслиной 2004 года) для скалярного самосопряженного оператора без младших членов в случае, когда матрица коэффициентов — блочно-диагональная. В работе самого диссертанта 2013 года для такого же оператора с включением младших членов были получены оценки (1) и (3). В упомянутых работах применялся спектральный метод. Оказалось, что он плохо приспосабливается к задачам, в которых коэффициенты периодичны лишь по некоторым переменным. Диссертант отказался от использования спектрального метода и изобрел собственный подход, который позволил не только перенести оценки (1) и (3) на значительно более широкий класс операторов, но и установить оценки (2) и (4), являющиеся новыми даже для самосопряженного случая.

Предложенный Никитой Сеником подход, применяемый в главе 1, существенно отличается от методов предшествующих работ по данной тематике. Метод опирается на масштабное преобразование, теорию Флоке и последующий тщательный анализ операторов, зависящих от квазиимпульса (но без использования аналитической теории возмущений, как было в прежних работах). Ключевым является вывод операторного тождества, связывающего резольвенты исходного и эффективного операторов и корректоры. Этот подход позволяет изучать несамосопряженные операторы и получать достаточно тонкие результаты. В частности, оценка (4) ранее была известна только в случае периодичности по всем направлениям и устанавливалась исключительно спектральным методом.

В главах 2 и 3 диссертации изучается задача усреднения для матричного сильно эллиптического оператора $\mathcal{A}^\varepsilon$ второго порядка в $\mathbb{R}^d$ вида

$$\mathcal{A}^\varepsilon = D^* A(x, x/\varepsilon) D.$$

Коэрцитивность постулируется. Матрица коэффициентов A локально периодична — зависит от быстрой и медленной переменных, причем по быстрой переменной она предполагается периодической. По медленной переменной предполагается некоторая регулярность коэффициентов: в главе 2 изучается случай, когда A липшицева, а в главе 3 — случай, когда A гельдерова.

Установлено, что резольвента оператора $\mathcal{A}^\varepsilon$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ к резольвенте эффективного оператора $\mathcal{A}^0$, коэффициенты которого зависят лишь от медленной переменной. Эта сходимость имеет место, даже если коэффициенты только непрерывны по медленной переменной. В случае, когда A гельдерова по первой переменной с показателем $s \in (0,1]$, доказана оценка погрешности:

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \mu I)^{-1}\|_{L_2 \to L_2} \leqslant C\varepsilon^s. \tag{5}$$

Кроме того, получена аппроксимация резольвенты по операторной норме из L_2 в пространство Соболева H^s при учете корректора:

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \mu I)^{-1} - \varepsilon \mathcal{K}_\mu(\varepsilon)\|_{L_2 \to H^s} \leqslant C\varepsilon^s. \tag{6}$$

Наконец, установлена более точная аппроксимация резольвенты по операторной норме в L_2:

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \mu I)^{-1} - \varepsilon \mathcal{C}_\mu^{(s)}(\varepsilon)\|_{L_2 \to L_2} \leqslant C\varepsilon^{2s/(2-s)}. \tag{7}$$

Корректор $\mathcal{C}_\mu^{(s)}(\varepsilon)$ имеет еще более сложную структуру, чем в условиях главы 1; его вид меняется при переходе через показатель $s = 1/2$. Оценки погрешностей оптимальны при условии липшицевости матрицы коэффициентов по медленной переменной: в этом случае оценки (5), (6) имеют порядок $O(\varepsilon)$, а оценка (7) — порядок $O(\varepsilon^2)$.

Результаты глав 2 и 3 дают значительные продвижения в данной задаче по сравнению с известными ранее фактами. Операторные оценки погрешности в случае локально периодических коэффициентов изучались в работах Д. И. Борисова (2008) и С. Е. Пастуховой и Р. Н. Тихомирова (2007). В этих работах при более ограничительных предположениях о коэффициентах оператора были установлены оценки (5) и (6), но лишь в случае $s = 1$.

Наиболее тонкий результат диссертанта, потребовавший большой технической изобретательности, — нахождение корректора $\mathcal{C}_\mu^{(s)}(\varepsilon)$ и доказательство оценки (7). Этот результат для локально периодических задач является совершенно новым.

Также полностью новыми являются все три оценки (5)–(7) в случае $s < 1$ (т. е. в случае гельдеровских коэффициентов).

Метод глав 2 и 3 отличается от метода главы 1, поскольку в локально периодическом случае уже невозможно применять теорию Флоке. Однако в основе рассмотрений снова лежит операторное тождество, связывающее резольвенты исходного и эффективного операторов и корректоры. Подход, предложенный диссертантом, можно назвать операторным вариантом метода первого приближения; он перекликается с работами Ж. Гризо и с работами В. В. Жикова и С. Е. Пастуховой. (Само первое приближение к решению хорошо известно в традиционной теории усреднения.)

Результаты диссертации опубликованы в статьях диссертанта (без соавторов) в ведущих российских и западных математических журналах: “Алгебра и анализ”, “Функциональный анализ и его приложения”, “SIAM Journal on Mathematical Analysis”; всего автором опубликовано 5 статей (WS, Scopus) и один препринт. Никита Сеник выступал с докладами по теме диссертации на математических семинарах Санкт-Петербурга и на 12 международных конференциях в России, Германии и Финляндии. Его успехи отмечены престижными премиями для молодых ученых: он выиграл конкурс “Молодая математика России”, был удостоен стипендии имени В. А. Рохлина Санкт-Петербургского математического общества и стипендии Правительства РФ для аспирантов. Н. Н. Сеник является участником научных проектов, поддержанных РФФИ и РНФ.

Считаю, что в диссертации Никиты Николаевича Сеника получены важные новые результаты по теории усреднения. Диссертация выполнена на высоком научном уровне и безусловно удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям по специальности 01.01.03 — математическая физика. В процессе работы Никита Сеник проявил незаурядные самостоятельность, упорство, инициативу и техническую изобретательность. Руководителем была поставлена только задача, решенная в главе 1. Вопросы, изученные в главах 2 и 3, были поставлены, а затем успешно решены самим диссертантом. Никита Николаевич Сеник сформировался как сильный и глубокий исследователь с большим потенциалом.

22.11.2017

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры высшей математики
и математической физики СПбГУ — Т. А. Суслина

ПОДПИСЬ РУКИ
ЗАВЕРЯЮ. ВЕДУЩИЙ СПЕЦИАЛИСТ
ОТДЕЛА КАДРОВ
Н. В. САФРОНОВА

12.12.17