На правах рукописи

КАЛИНИНА Елизавета Александровна

Применение алгебраических методов для анализа сложных систем

05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации (по прикладной математике и процессам управления)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюдетном образовательном учреждении высшего образования “Санкт-Петербургский государственный универститет”.

Научный консультант: Утешев Алексей Юрьевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, ФГБОУ ВО “Санкт-Петербургский государственный университет”

Официальные оппоненты: Новиков Михаил Алексеевич, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, ФГБУН “Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова” СО РАН, г. Иркутск

Блинков Юрий Анатольевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического и компьютерного моделирования, Механико-математический факультет ФГБОУ ВО “Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского”

Шичкина Юлия Александровна, доктор технических наук, профессор, ФГАОУ ВО “Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет “ЛЭТИ” им. В.И. Ульянова (Ленина)”

Ведущая организация: Международная межправительственная организация Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна

Защита состоится «____» ____________ 2017 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д.212.232.50 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д. 35, ауд. 327.

Отзывы на автореферат в 2-х экземплярах просим направлять по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д. 35, ученому секретарю диссертационного совета Д.212.232.50 Г.И. Курбатовой.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. М. Горького Сакт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, г. Санкт-Петербург, В.О., Университетская наб., 7/9. Диссертация и автореферат размещены на сайте www.spbu.ru.

Автореферат разослан «____» ____________ 2017 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
д.ф.-м.н., профессор Г.И. Курбатова

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. В последние десятилетия в науке наблюдается интенсивное развитие теории сложных систем. Понятие сложной системы используется в информатике, биологии, экономике, физике, химии и многих других областях (см. книгу H. Sayama, статьи Y. Bar-Yam, G. Chapouthier, J. M. Zayed и др.) В настоящее время более 50 институтов и исследовательских центров по всему миру занимаются изучением сложных систем.

Основным методом исследования сложных систем является математическое моделирование, при котором процессы функционирования сложной системы формализуются, а затем строится ее математическое описание. Характеристиками такой системы являются ее структура и поведение. Для описания структуры сложной системы и связей между ее элементами применяются графы, а сами эти элементы во многих случаях представляют собой динамические системы.

Принципиально важно изучить реакции таких систем на изменения параметров, от которых она зависит. С помощью линейного анализа устойчивости выясняется, при каких значениях параметров однородное состояние равновесия системы теряет устойчивость и в системе возникают неоднородности. В диссертационной работе рассматриваются алгебраические методы, позволяющие в некоторых случаях провести данный анализ.

При линейном анализе устойчивости появляется необходимость исследования спектра результирующей матрицы коэффициентов. При этом возникает проблема локализации нулей полинома от одной переменной или полиномиальной системы уравнений относительно нескольких переменных.

Для проверки того, что все собственные числа результирующей матрицы лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости, к ее характеристическому полиному может быть применен критерий Рауса — Гурвица. Однако в практических задачах довольно часто требуется проверка выполнения более сильного условия: необходимо, чтобы все корни характеристического полинома находились внутри определенной алгебраической области D комплексной плоскости. Возникает более общая задача D-устойчивости.

Решением задачи о числе корней полинома в некоторой области комплексной плоскости, известной с первой половины XIX века, занимались такие математики, как Ш. Эрмит, И. Шур, А. Кон, B. N. Datta, J. Ackermann и R. Muench, Р. Е. Калман. Так, для того, чтобы установить, находятся ли все корни полинома внутри единичного круга комплексной плоскости, используется критерий Шура — Кона (B. N. Datta обобщил критерии Рауса — Гурвица и Шура — Кона, используя матрицу безутианты). В случае областей, границами которых являются уникурсальные (вещественно параметризуемые) кривые, можно использовать метод Эрмита (1854). Р. Е. Калман разработал еще один критерий, позволяющий определить, все ли нули полинома лежат в некоторой алгебраической области комплексной плоскости. Известен также метод D-разбиения, т. е. разбиения на области в пространстве параметров. Однако его применение затруднительно при большом количестве параметров. В пространстве коэффициентов полинома границы областей, соответствующих полиномам с одинаковым числом вещественных корней, задаются дискриминантной поверхностью. При этом каждая точка дискриминантной поверхности соответствует полиному с кратными корнями.

В общем случае проблема сводится к исследованию поведения нулей некоторой системы алгебраических уравнений в зависимости от параметров. Численные методы в данном случае малоэффективны, поскольку их применение возможно только при конкретных значениях параметров (см., например, работы Д. Уилкинсона). Возникает необходимость разработки надежных аналитических символьных алгоритмов. Такие алгоритмы существуют для одномерного случая, и они широко реализованы в современных системах аналитических вычислений (Maple, Mathematica, MatLab и др.), позволяющих манипулировать аналитическими выражениями и производить вычисления с вещественными числами с мантиссой практически неограниченной длины. Большинство алгоритмов для алгебраических систем общего вида в случае бóльших размерностей используют алгоритм Б. Бухбергера построения базисов Грёбнера, однако его применение часто является весьма затратным. Так, объем памяти, требуемый для его работы, в общем случае экспоненциально зависит от числа переменных. Кроме того, для систем общего вида не получено оценок времени работы алгоритма. Применение методов теории исключения позволяет разработать конструктивные реализуемые на ЭВМ алгоритмы локализации нулей системы алгебраических уравнений.

Поскольку построение канонического представления характеристического полинома матрицы большого порядка само по себе достаточно сложно, то возникает необходимость исследования поведения собственных чисел матрицы без нахождения ее характеристического полинома. Тем самым задача о локализации собственных значений матрицы является обобщением задачи локализации корней полинома. В последнее время довольно большое внимание привлекают задачи, связанные с существованием кратных собственных чисел матрицы, например, при определении структуры жордановой нормальной формы матрицы в зависимости от параметров. Такие задачи встречаются в физике (в том числе в квантовой механике и ядерной физике), оптике, электротехнике. Рассматриваются как малые возмущения матриц (см. работы J. V. Burke, A. S. Lewis и M. Overton, M. Karow, D. Kressner, M. J. Peláez, и J. Moro, J. Sun), так и значения параметра, которые не являются малыми (работы E. Jarlebring, S. Kvaal, W. Michiels, А. А. Майлыбаева, A. Muhič и B. Plestenjak).

Процессы, встречающиеся в различных приложениях (в химической кинетике, химической технологии, биологии), марковские процессы описываются дифференциальными уравнениями на графах. Тем самым при анализе сложных систем используются свойства графов (см. работы А. И. Вольперта, J. Maidens, D. Siegel и D. MacLean, С. Л. Подвального и В. В. Провоторова, книгу Д. Д. Шильяка и др.). Графы применяются в теории многоагентных систем (МАС), изучение которых связано с решением практических задач в сфере сетевых и мобильных технологий, в логистике, в графике, геоинформационных системах (см. работы N. Monshizadeh, Shuo Zhang, и M. Kanat Camlibel, K.-K. Oh, K. L. Moore и H.-S.K. Ahn, J. Wang, Z. Liu и X. Hu) и при исследовании систем с переключениями (M. Delgado и H. Sira-Ramírez, M. Poyraz, Y. Demir, A. Gulten и M. Koksal, W. Borutzky, G. Dauphin-Tanguy, и J.U. Thoma). К исследованию графов применимы алгебраические методы. Так, известны теоремы, связывающие спектральные свойства матрицы смежности с другими свойствами графа (см. книгу N. Biggs), неравенство Чигера, позволяющее оценить наименьший разрез графа посредством второго собственного значения матрицы Кирхгофа, теоремы, связывающие диаметр графа и собственные числа, полученные с помощью линейной алгебры. Стоит отметить, что задача об изоморфизме графов может быть также сформулирована как линейно-алгебраическая задача. Во многих случаях решение задач теории графов упрощается, если известно, что граф является реберным (например, задача поиска максимального независимого множества). Поэтому разработка эффективных алгоритмов распознавания реберного графа и построения его корневого графа остается актуальной, несмотря на существование нескольких таких алгоритмов (Ph. G. H. Lehot, N. D. Roussopoulos, D. G. Degiorgi и K. Simon, D. Liu, S. Trajanovski и P. Van Mieghem).

При моделировании и симуляции биологических систем анализ может проводиться с помощью численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Во многих случаях для решения систем ОДУ, описывающих работу ионных каналов клеточных мембран, используется явный метод Эйлера (см. работы C. P. Fall и J. Rinzel, T. Korhonen и P. Tavi, J. Sneyd и J.-F. Dufour, K.H.W.J. Ten Tusscher и др.). В режиме реального времени при одновременном проведении экспериментов каждый шаг вычислений должен быть выполнен за ограниченное время. При очень большом числе уравнений в каждый момент времени необходимо сделать огромное количество вычислений. Поэтому необходимы численные методы, позволяющие найти решение задачи Коши с минимальной возможной погрешностью (с учетом ошибок округления, возникающих при выполнении арифметических операций в реальной арифметике с плавающей точкой, которая используется при вычислении на компьютере), для чего уместным оказывается применение алгебраического подхода.

Цель диссертационной работы заключается в разработке конструктивных алгебраических методов и алгоритмов, применимых для анализа сложных систем и в применении этих алгоритмов к конкретным задачам, требующим исследования динамики и устойчивости таких систем.

Основные положения, выносимые на защиту: 1. Разработанный для исследования линейной устойчивости сложных систем конструктивный алгоритм проверки устойчивости и D-устойчивости семейства вещественных полиномов с коэффициентами, полиномиально зависящими от параметров.

2. Разработанный для анализа мультикомпонентных систем алгоритм нахождения общих собственных чисел набора матриц, составляющих систему.

3. Применимый для исследования динамики зависящих от параметра сложных систем, изучаемых в физике, оптике, электротехнике, алгоритм определения структуры жордановой нормальной формы матрицы с комплексными элементами.

4. Матричный алгоритм распознавания реберного графа, позволяющий упростить описание структуры и исследование свойств систем с переключениями и многоагентных систем.

5. Применимый для имитационного моделирования биологических систем, в том числе и в режиме реального времени, эффективный алгоритм численного интегрирования систем ОДУ, позволяющий получить максимально точное решение задачи Коши в арифметике с плавающей точкой.

Научная новизна. Выносимые на защиту результаты являются новыми и получены лично автором.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, изложенные в диссертации, позволяют упростить анализ устойчивости и D-устойчивости сложных систем, а также получить максимально точные решения этих систем в арифметике с плавающей точкой в режиме реального времени.

Предложенные алгоритмы являются достоверными и эффективными, что позволяет использовать их в механике, теории управления, биофизике и химической кинетике. Простота и вычислительная эффективность позволяют в ряде случаев применять их для моделирования процессов в сложных системах в реальном времени.

Практическая ценность результатов диссертации состоит в том, что при моделировании и анализе сложных систем они позволяют:

1) повысить достоверность и точность выполняемых расчетов,

2) сократить время вычислений,

3) проанализировать свойства системы в зависимости от параметров.

Методы исследования. В диссертационной работе используются методы системного анализа, классической высшей алгебры (теория исключения, теория ганкелевых квадратичных форм), теории дифференцируемых отображений и алгебраической теории графов, оценка погрешностей в арифметике с плавающей точкой.

Результаты исследований прошли апробацию на следующих конференциях: International Student's Conference in Mathematics (г. Прага, Чехословакия, 1989), XXXIV научная конференция "Процессы управления и устойчивость" (г. Санкт-Петербург, 2003), I международная конференция "Stability and Control Processes", посвященная 75-летию со дня рождения В.И. Зубова, SCP 2005 (г. Санкт-Петербург, 2005), XXXVII научная конференция "Процессы управления и устойчивость" (г. Санкт-Петербург, 2006), XXXVIII научная конференция "Процессы управления и устойчивость" (г. Санкт-Петербург, 2007), 10-я международная конференция "Computer Science and Information Technologies", CSIT 2013 (г. Ереван, Армения, 2013), 13-я международная конференция "International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics", ICNAAM 2015 (г. Родос, Греция, 2015), III международная конференция "Stability and Control Processes", посвященная 85-летию со дня рождения В.И. Зубова, SCP 2015 (г. Санкт-Петербург, 2015), 18-я международная конференция "The 18th International Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing", CASC 2016 (г. Бухарест, Румыния, 2016), а также на семинарах факультета прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета.

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 20 печатных работ, в том числе 12 статей в журналах, рекомендованных ВАК РФ.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и библиографического списка, включающего 182 наименования. Общий объем работы составляет 257 страниц.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения. Также дан обзор классических и современных результатов, посвященных исследованию поведения решений и численному интегрированию систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Первая глава диссертационной работы посвящена сложным динамическим системам, которые обычно моделируются нелинейными дифференциальными уравнениями (динамика роста населения, изменения цен, распространение эпидемий, поведение различных электромеханических систем, химические реакции в клетках и т.д.). Во многих практических приложениях требуется исследовать некоторые качественные свойства решений таких систем в целом. Наиболее важным вопросом при этом является вопрос об устойчивости положения равновесия, который во многих случаях сводится к исследованию спектра некоторой матрицы, т.е. нулей ее характеристического полинома.

С помощью теории исключения задача решения системы алгебраических уравнений от нескольких переменных может быть сведена к одномерному случаю. Практически это можно сделать с использованием современных пакетов символьных вычислений, либо с помощью базисов Грёбнера, либо с помощью аппарата многомерных результантов. Тем самым задача анализа свойств множества решений такой системы сводится к аналогичной задаче для одного алгебраического уравнения относительно одной переменной. В частности, таким образом может быть решена задача определения количества вещественных решений, а также задача их локализации (в том числе в конкретной алгебраической области вещественной или комплексной плоскости). В развитие метода Ш. Эрмита может быть реализована процедура построения многомерного аналога системы полиномов Штурма. В диссертации данная идеология применется к задачам устойчивости и D-устойчивости семейства вещественных полиномов.

В работе рассмотрен вещественный полином $f(z, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)$ с коэффициентами, полиномиально зависящими от параметров $\nu_1, \ldots, \nu_k$, областью изменений которых является многомерный вещественный параллелепипед

$$\mathfrak{B} = \{(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k) | \underline{\nu}_1 \le \nu_1 \le \overline{\nu}_1, \underline{\nu}_2 \le \nu_2 \le \overline{\nu}_2, \ldots, \underline{\nu}_k \le \nu_k \le \overline{\nu}_k\}.$$

Для полиномов семейства

$$p = \{ f(z, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k) | \, (\nu_1, \ldots, \nu_k) \in \mathfrak{B}\} \tag{1}$$

решена задача D-устойчивости, т. е. найдены необходимые и достаточные условия того, что нули всех полиномов данного семейства принадлежат данной алгебраической области D комплексной плоскости.

В практических задачах область D обычно симметрична относительно вещественной оси. Поэтому рассмотрены области, заданные неравенством $g(x,y) > 0$, где $g(x,y) \equiv G(x,y^2)$ для некоторого полинома $G(x,Y)$ с вещественными коэффициентами.

Сведения из классической высшей алгебры и теории дифференцируемых отображений, необходимые для решения данной задачи, приведены в параграфе 1.1.

В параграфе 1.2 дан обзор ранее полученных результатов, имеющих отношение к рассматриваемой задаче.

В параграфе 1.3 рассмотрена более общая задача о вещественных корнях семейства полиномов. А именно, для полинома

$$p = f(z, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k), \quad (\nu_1, \ldots, \nu_k) \in \mathfrak{B} \tag{2}$$

найдены условия на его коэффициенты, необходимые и достаточные для того, чтобы он не имел вещественных корней.

Для случая $a_0(\nu_1, \ldots, \nu_k) \neq 0$, где $a_0(\nu_1, \ldots, \nu_k)$ — старший коэффициент полинома $f(z, \nu_1, \ldots, \nu_k)$ как полинома относительно переменной z с коэффициентами, зависящими от $\nu_1, \ldots, \nu_k$, доказана следующая теорема.

Теорема 34. *Пусть $a_0(\nu_1, \ldots, \nu_k) \neq 0$ для всех $(\nu_1, \ldots, \nu_k) \in \mathfrak{B}$. Ни один полином семейства (2) не имеет вещественных корней тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(i) Граничные семейства полиномов для семейства (2), соответствующие граням параллелепипеда $\mathfrak{B}$, т. е.

$$\left\{ f(z, \nu_1, \ldots, \nu_k) \,|\, (\nu_1, \ldots, \nu_k) \in \mathfrak{B},\ \nu_j = \underline{\nu}_j \right\} \text{ и}$$

$$\left\{ f(z, \nu_1, \ldots, \nu_k) \,|\, (\nu_1, \ldots, \nu_k) \in \mathfrak{B},\ \nu_j = \overline{\nu}_j \right\}$$

для всех $j = 1, 2, \ldots, k$ не имеют вещественных корней.

(ii) Система уравнений

$$\frac{\partial f(z, \nu_1, \ldots, \nu_k)}{\partial \nu_1} = 0, \ldots, \frac{\partial f(z, \nu_1, \ldots, \nu_k)}{\partial \nu_k} = 0. \tag{3}$$

не имеет решений, удовлетворяющих условиям $z \in \mathbb{R}$ *и* $(\nu_1, \ldots, \nu_k) \in \mathfrak{B}$.

Случай, когда $a_0(\nu_1, \ldots, \nu_k)$ обращается в нуль при некоторых значениях параметров $(\nu_1, \ldots, \nu_k)$, лежащих внутри параллелепипеда $\mathfrak{B}$, сведен к рассмотрению системы уравнений (3), дополненной еще несколькими алгебраическими уравнениями — условиями на коэффициенты полиномов семейства.

В работе также показано, как с помощью методов теории исключения и ганкелевых квадратичных форм проверить выполнение условий теоремы.

Доказана также теорема, дающая необходимые и достаточные условия того, что ни один из полиномов семейства

$$P = \{F(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k) | (\nu_1, \ldots, \nu_k) \in \mathfrak{B}\} \tag{4}$$

не имеет вещественных корней (через $A_0(\nu_2, \ldots, \nu_k)$ обозначен старший коэффициент полинома $F(\nu_1, \ldots, \nu_k)$ как полинома относительно ν_1 с коэффициентами, зависящими от $\nu_2, \ldots, \nu_k$):

Теорема 35. *Пусть* $A_0(\nu_2, \ldots, \nu_k) \neq 0$ *при*

$$\underline{\nu}_2 \leq \nu_2 \leq \overline{\nu}_2, \ldots, \underline{\nu}_k \leq \nu_k \leq \overline{\nu}_k.$$

Ни один полином вещественного семейства (4) *не обращается в нуль при* $(\nu_1, \ldots, \nu_k) \in \mathfrak{B}$ *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(i) Граничные семейства полиномов семейства (4), *соответствующие граням параллелепипеда* $\mathfrak{B}$, *т. е.*

$$\left\{ F(\nu_1, \ldots, \nu_k) | \, (\nu_1, \ldots, \nu_k) \in \mathfrak{B}, \nu_j = \underline{\nu}_j \right\} \text{ and}$$

$$\{ F(\nu_1, \ldots, \nu_k) | \, (\nu_1, \ldots, \nu_k) \in \mathfrak{B}, \nu_j = \overline{\nu}_j \}$$

не имеют корней при $(\nu_1, \ldots, \nu_k) \in \mathfrak{B}$.

(ii) Система уравнений

$$F(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k) = 0, \frac{\partial F(\nu_1, \ldots, \nu_k)}{\partial \nu_2} = 0, \ldots, \frac{\partial F(\nu_1, \ldots, \nu_k)}{\partial \nu_k} = 0$$

не имеет вещественных решений при $(\nu_1, \ldots, \nu_k) \in \mathfrak{B}$.

Параграф 1.4 посвящен решению задачи об устойчивости семейства полиномов (2). Доказана следующая теорема.

Теорема 36. *Все полиномы семейства (2) устойчивы тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(i) Граничные подсемейства семейства полиномов (2), *соответствующие граням параллелепипеда* $\mathfrak{B}$, *т. е.*

$$\left\{ F(\nu_1, \ldots, \nu_k) | \, (\nu_1, \ldots, \nu_k) \in \mathfrak{B}, \nu_j = \underline{\nu}_j \right\} \text{ и}$$

$$\{ F(\nu_1, \ldots, \nu_k) | \, (\nu_1, \ldots, \nu_k) \in \mathfrak{B}, \nu_j = \overline{\nu}_j \}$$

устойчивы.

(ii) Система уравнений

$$H_n(\nu_1, \ldots, \nu_k) = 0, \frac{\partial H_n(\nu_1, \ldots, \nu_k)}{\partial \nu_2} = 0, \ldots, \frac{\partial H_n(\nu_1, \ldots, \nu_k)}{\partial \nu_k} = 0$$

не имеет вещественных решений при $(\nu_1, \ldots, \nu_k) \in \mathfrak{B}$.

В этом же параграфе приведены численные примеры, иллюстрирующие применение данной теоремы.

В параграфе 1.5 рассмотрена задача о D-устойчивости семейства полиномов (2). Для решения данной задачи используется система уравнений

$$\Phi_1(x, Y, \nu_1, \ldots, \nu_k) = 0, \Phi_2(x, Y, \nu_1, \ldots, \nu_k) = 0, \qquad (Y = y^2), \tag{5}$$

где полиномы Φ_1 и Φ_2 определяются из представления

$$f(x + iy, \nu_1, \ldots, \nu_k) = \Phi_1(x, y^2, \nu_1, \ldots, \nu_k) + iy\Phi_2(x, y^2, \nu_1, \ldots, \nu_k).$$

Решениями данной системы уравнений являются вещественные и мнимые части комплексных корней $z = x + iy$ полиномов семейства (2).

С помощью теории исключения находятся $\mathcal{M}(x, Y, \nu_2, \ldots, \nu_k)$ — элиминанта данной системы уравнений по исключению переменной ν_1, и уравнение, выражающее ν_1 через остальные переменные $\Psi(x, Y, \nu_1, \ldots, \nu_k) = 0$. В работе доказана теорема:

Теорема 37. *Корни всех полиномов семейства* (2) *лежат в области* $G(x, Y) < 0$ *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(i) Все граничные семейства полиномов для семейства (2), *соответствующие граням параллелепипеда* $\mathfrak{B}$, *D-устойчивы.*

(ii) Система уравнений

$$G(z, 0) = 0, f(z, \nu_1, \ldots, \nu_k) = 0, \frac{\partial f}{\partial \nu_2} = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial \nu_k} = 0 \tag{6}$$

не имеет решений таких, что $z \in \mathbb{R}$, $(\nu_1, \ldots, \nu_k) \in \mathfrak{B}$.

(iii) Система уравнений

$$\begin{gathered} G(x, Y) = 0, \Psi(x, Y, \nu_1, \ldots, \nu_k) = 0, \mathcal{M}(x, Y, \nu_2, \ldots, \nu_k) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \nu_2}(x, Y, \nu_2, \ldots, \nu_k) = 0, \ldots, \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \nu_k}(x, Y, \nu_2, \ldots, \nu_k) = 0 \end{gathered} \tag{7}$$

не имеет решений таких, что $\{x, Y\} \subset \mathbb{R}, Y > 0$, $(\nu_1, \ldots, \nu_k) \in \mathfrak{B}$.

Теорема 37 позволяет получить верное решение задач в тех случаях, когда ранее применявшиеся методы дают ошибочный результат. Следующий пример иллюстрирует данный тезис.

Пример. J. Ackermann и R. Muench[1] рассмотрели управление движением автобуса Daimler-Benz 0305. Задача сводится к исследованию корней полинома

$$f(z, t, v) = q_8 z^8 + q_7 z^7 + q_6 z^6 + q_5 z^5 + q_4 z^4 + q_3 z^3 + q_2 z^2 + q_1 z + q_0, \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} q_0 &= 453 \cdot 10^6 v^2, q_1 = 528 \cdot 10^6 v^2 + 3640 \cdot 10^6 v, \\ q_2 &= 5.72 \cdot 10^6 tv + 113 \cdot 10^6 v^2 + 4250 \cdot 10^6 v, \\ q_3 &= 6.93 \cdot 10^6 tv + 911 \cdot 10^6 v + 4220 \cdot 10^6, \\ q_4 &= 1.45 \cdot 10^6 tv + 16.8 \cdot 10^6 t + 338 \cdot 10^6, \end{aligned}$$

[1] Ackermann, J., Muench, R., Robustness analysis in a plant parameter plane // IFAC 10^{th} Triennial World Congress, Munich, FRG. — 1987. — P. 205–209.

$$\begin{aligned}
q_5 &= 15.6 \cdot 10^3 t^2 + 840tv + 1.35 \cdot 10^6 t + 13.5 \cdot 10^6,\\
q_6 &= 1.25 \cdot 10^3 t^2 + 16.8tv + 53.9 \cdot 10^3 t + 270 \cdot 10^3,\\
q_7 &= 0t^2 + 1080t, q_8 = t^2
\end{aligned}$$

при ограничениях $1.3 \leq v \leq 36$, $12.935 \leq t \leq 1152$. Утверждалось, что все корни полинома (8) лежат слева от левой ветви гиперболы

$$\frac{x^2}{0.15^2} - \frac{Y}{0.75^2} = 1$$

на комплексной плоскости, т. е. что все корни удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{0.15^2} - \dfrac{Y}{0.75^2} - 1 > 0,\\ x < 0. \end{cases}$$

Однако с помощью метода, приведенного в диссертации, доказано, что данное утверждение неверно. Найдены корни полинома, не удовлетворяющие поставленным условиям.

Применяя теорему 37, при значениях параметров

$$t = 102.583443, v = 13.788301$$

получен полином семейства (8) с корнем $z = -3.08696 + 15.41657i$, который лежит на левой ветви гиперболы, поскольку

$$\frac{3.08696^2}{0.15^2} - \frac{15.41657^2}{0.75^2} - 1 = -0.0001413776 \approx 0.$$

Для $t = 550.8358931, v = 13.63890513$ получаем полином семейства (8), который имеет корень $z = -0.5588095759 + 2.691505815i$, также лежащий на левой ветви гиперболы.

Более того, для $t = 102.583443, v = 13.799909$ получаем полином семейства (8), который имеет корень $z = -3.080564179 + 15.42012870i$, расположенный справа от левой ветви гиперболы, поскольку

$$\frac{3.080564179^2}{0.15^2} - \frac{15.42012870^2}{0.75^2} - 1 = -1.9484045 < 0.$$

Замечание. Все расчеты были произведены в символьном виде, полученный результат был округлен до числа с десятью значащими цифрами.

Вторая глава диссертационной работы посвящена исследованию поведения сложных систем, зависящих от параметра. Как известно, во многих случаях (особенно тогда, когда элементы матрицы зависят от параметров), построение характеристического полинома является довольно сложной и вычислительно затратной задачей. Поэтому требуются эффективные алгоритмы, позволяющие исследовать спектр матрицы, не вычисляя коэффициентов ее характеристического полинома.

В параграфе 2.1 приведены необходимые результаты, касающиеся общих собственных чисел матриц (необходимое и достаточное условие существования хотя бы одного общего собственного числа) и кратных собственных чисел матрицы (необходимое и достаточное условие наличия кратного собственного числа), а также оценка изменения кратных собственных чисел матрицы, основанная на числе обусловленности Гельдера.

Как известно, числом обусловленности Гёльдера для собственного числа λ матрицы A называется упорядоченная пара чисел

$$\mathrm{cond}(\lambda) = (n_{\max}, \alpha),$$

где $n_{\max}$ — порядок наибольшей клетки Жордана, соответствующей собственному числу λ, а

$$\alpha = \max_{||B|| \le 1} \mathrm{spr}(\mathcal{Y} B \mathcal{X}).$$

Здесь spr обозначает спектральный радиус, а столбцы матрицы $\mathcal{X}$ (и строки матрицы $\mathcal{Y}$) являются линейно независимыми правыми (левыми) собственными векторами, соответствующими собственному числу λ, каждый из которых принадлежит цепочке Жордана максимальной длины, отвечающей данному собственному числу.

Для собственных чисел λ' возмущенной матрицы $A + \varepsilon B$, стремящихся к

λ при $\varepsilon \to +0$, выполняется неравенство

$$|\lambda' - \lambda| < c\alpha^{1/n_{\max}}\varepsilon^{1/n_{\max}} \tag{9}$$

для любых положительных $c > 1$ и достаточно малых положительных ε.

В параграфе 2.2 решена задача о нахождении всех общих собственных чисел двух квадратных матриц $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ и $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^{m}$ с комплексными элементами, что требуется при исследовании мультикомпонентных систем. Предложен алгоритм, позволяющий построить полином, корнями которого являются общие собственные числа матриц.

Для матрицы $\mathcal{C}_{AB} = A \otimes B - B \otimes A$ (через $\otimes$ обозначено кронекеровское произведение матриц) строится матрица $\mathfrak{C}_{mn\times l} = (\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_l)$, по столбцам которой стоят линейно независимые собственные векторы матрицы $\mathcal{C}_{AB}$, соответствующие собственному числу 0. Доказана теорема:

Теорема 44. *Общие собственные числа матриц A и B являются корнями полинома*

$$\det \mathfrak{X}(\lambda) = \det(\bar{\mathfrak{C}}^T(A \otimes E_{m\times m})\mathfrak{C} - \lambda\bar{\mathfrak{C}}^T\mathfrak{C}) = 0. \tag{10}$$

В параграфе 2.3 решена задача нахождения максимального порядка клетки Жордана квадратной матрицы и всех собственных чисел этой матрицы, которым соответствуют клетки Жордана максимального порядка. Данные результаты необходимы для получения оценки изменения кратных собственных чисел матрицы $A + \varepsilon B$ при малых значениях ε.

По заданной квадратной матрице $A_{n\times n}$ с комплексными элементами строится матрица порядка n^2

$$\mathcal{C}_A = A \otimes E - E \otimes A,$$

где E — единичная матрица того же порядка, что и матрица A.

Порядок максимальной клетки Жордана матрицы A равен $n_{\max} = (s + 1)/2$, где s — порядок максимальной клетки Жордана $\mathcal{C}_A$, соответствующей собственному числу 0 матрицы. Доказана следующая теорема.

Теорема 50. *Собственные числа матрицы A, которым отвечают клетки Жордана максимального порядка n_{max}, являются корнями уравнения*

$$\det(\bar{\mathfrak{C}}^T(A \otimes E)\mathfrak{C} - \lambda\bar{\mathfrak{C}}^T\mathfrak{C}) = 0. \qquad (11)$$

Параграф 2.4 посвящен задаче нахождения кратных собственных чисел матрицы, элементы которой полиномиально зависят от параметра. Предложенный алгоритм решения данной задачи основан на следующей теореме, доказанной в диссертации:

Теорема 52. *Матрица $D = A + \lambda B$ имеет кратные собственные числа тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} S_2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ S_4 & S_2 & 4 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ S_{k^2-k} & S_{k^2-k-2} & S_{k^2-k-4} & \dots & S_2 \end{vmatrix}_{(k^2-k)/2\times(k^2-k)/2} = 0. \qquad (12)$$

Здесь через S_p обозначен след p-й степени матрицы $\mathcal{C}_D$ ($\mathcal{C}_D = D\otimes E - E\otimes D$).

Этот алгоритм позволяет построить полином, корнями которого являются все значения параметра λ, при которых матрица D имеет кратные собственные числа.

Алгоритм допускает обобщение на случай матрицы $D(\lambda)$, элементы которой являются полиномами от λ степени выше первой, т. е. матричного полинома

$$D(\lambda) = A_0\lambda^m + A_1\lambda^{m-1} + \ldots + A_m,$$

где A_j $j = 0, 1, \ldots, m$ — квадратная матрица k-го порядка с комплексными элементами.

В третьей главе диссертационной работы рассмотрены задачи теории графов, решение которых позволяет упростить структурный анализ сложных систем. Графы используются в теории многоагентных систем (МАС), при исследовании систем с переключениями, а также при анализе любых процессов, которые моделируются дифференциальными уравнениями на графах (например, процессы, которые изучают химическая кинетика, химическая технология, биология и др.). Во многих случаях для исследования свойств графов применимы алгебраические методы.

Параграф 3.1 посвящен изучению особенностей линейных пространств над полем Галуа характеристики 2. Вводятся понятия 1-зависимости системы $(0,1)$-векторов и минимальной 1-зависимой системы, необходимые для исследования свойств графов:

Определение. Система ненулевых $(0,1)$-столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_m$, для которой выполняется условие $\sum\limits_{i=1}^{m} A_i = 0$ называется 1-*зависимой* (все коэффициенты линейной зависимости равны 1).

Если 1-зависимая система $(0,1)$-столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_m$ не содержит 1-зависимой подсистемы, отличной от самой системы, то она называется *минимальной 1-зависимой системой* (0,1)-столбцов.

Доказана теорема:

Теорема 55. *1-зависимая система различных $(0,1)$-столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_m$ $m > 2$ либо является минимальной 1-зависимой системой, либо разбивается на непересекающиеся минимальные 1-зависимые подсистемы.*

Предложен конструктивный метод разложения 1-зависимой системы векторов на минимальные 1-зависимые подсистемы.

Также рассмотрена однородная система линейных уравнений $AX = 0$. В случае, когда столбцы матрицы A 1-зависимы, данная система уравнений имеет решение $X = I$, где I — столбец из единиц. В этом случае столбцы матрицы A разбиваются на минимальные 1-зависимые подсистемы столбцов: $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Тогда существует такая матрица перестановки P, что $AP = (A_1, A_2, \ldots, A_k) = \tilde{A}$. Поскольку $AX = (AP)(P^T X) = \tilde{A}Y$, то вместо системы уравнений $AX = 0$ можно рассматривать эквивалентную ей систему $\tilde{A}Y = 0$. Причем система уравнений $\tilde{A}Y = 0$ также допускает решение $Y = I$, так как $P^T I = I$. Решение $Y = I$ может быть представлено в виде $I^T =$

$(I_1^T, I_2^T, \ldots, I_k^T)$, где $A_j I_j = 0$ ($j = 1, 2, \ldots, k$; I_j — столбец соответствующей размерности, состоящий из единиц). Если ввести столбцы $Y_1 = (I_1^T, 0_2^T, \ldots, 0_k^T)^T$, $Y_2 = (0_1^T, I_2^T, \ldots, 0_k^T)^T, \ldots, Y_k = (0_1^T, \ldots, 0_{k-1}^T, I_k^T)^T$, то столбцы $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ будут решениями системы уравнений $\tilde{A}Y = 0$, так как $\tilde{A}Y_j = A_j Y_j = 0$.

В работе доказана следующая теорема:

Теорема 57. *Пусть столбцы*

$$\begin{aligned} Y_1 &= (I_1^T, 0_2^T, \ldots, 0_k^T)^T, Y_1 = (0_1^T, I_2^T, \ldots, 0_k^T)^T, \ldots, \\ Y_k &= (0_1^T, \ldots, 0_{k-1}^T, I_k^T)^T \end{aligned} \tag{13}$$

являются решениями системы уравнений $\tilde{A}Y = 0$. Они образуют фундаментальную систему решений системы $\tilde{A}Y = 0$ тогда и только тогда, когда определяемое этими решениями разбиение столбцов матрицы $\tilde{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_k)$ на 1-зависимые подсистемы $A_1, A_2, \ldots, A_k$ единственно и сами подсистемы минимальные.

Далее приведены новые доказательства теоремы о циклах и разрезах и конструктивное доказательство теоремы о минимальной факторизации симметричной $(0, 1)$-матрицы.

В работе использовано следующее определение:

Определение. Симметричная $(0, 1)$-матрица A порядка n *факторизуема*, если существует матрица B такая, что $A = BB^T$. Если при этом матрица B имеет наименьшее возможное число столбцов, то такая факторизация называется *минимальной.*

Подчеркнем, что рассмотрено специальное разложение матрицы, отличное от наиболее часто используемых, таких как LU-разложение, разложение Холецкого, QR-разложение и др.

Каждой элементарной операции метода Гаусса над полем $GF(2)$ сопоставлена парная элементарная операция. Если элементарная операция выполняется над i-й и j-й строками, то аналогичная операция должна быть выполнена над i-м и j-м столбцами. Это значит, что каждый шаг вычислений состоит из пары элементарных операций.

Определение. Такие пары операций называются *двойными элементарными операциями.*

Последовательность элементарных операций над строками матрицы может быть рассмотрена как умножение данной матрицы слева на некоторую невырожденную матрицу P. Тогда последовательность соответствующих элементарных операций над столбцами — это умножение данной матрицы справа на матрицу P^T.

Для любой элементарной операции над полем $GF(2)$ существует обратная элементарная операция, причем элементарные матрицы для прямой и обратной операций совпадают.

Определение. Две квадратные $(0,1)$-матрицы n-го порядка A и C будем называть *конгруэнтными над полем* $GF(2)$ если существует невырожденная $(0,1)$-матрица P такая, что $C = P^T AP$.

В работе доказана теорема:

Теорема 61. *Любая симметричная* $(0,1)$*-матрица* A *конгруэнтна блочно-диагональной матрице вида*

$$A_e = diag(L_1, L_2, \dots, L_q, l_1, l_2, \dots, l_p, 0, 0, \dots, 0)$$

где l_j $(j = 1, 2, \dots, p)$ *единичный блок размерности* 1×1*,* L_k $(k = 1, 2, \dots, q)$ *— матрица* 2×2 *вида* $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$*, и* $p + 2q = \operatorname{rank} A$*.*

Матрица A_e может быть факторизована следующим образом.

Если на главной диагонали матрицы A_e находятся только q блоков вида $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, тогда

$$A_e = QQ^T,$$

где

$$Q = \begin{bmatrix} I & H & H & \dots & H & H & J \\ \mathbb{O} & I & H & \dots & H & H & J \\ \dots & & & & & & \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & I & H & J \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & L & J \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

и число столбцов в Q равно $2q+1$. Если $r = \operatorname{rank} A < n$, к матрице Q добавляются $n-r$ нулевых строк.

Если на главной диагонали матрицы A_e стоят q блоков вида $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ и p единиц, тогда

$$A_e = QQ^T,$$

где

$$Q = \begin{bmatrix} I & H & H & \dots & H & H & J & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbb{O} & I & H & \dots & H & H & J & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & & & & & & & & & & \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & I & H & J & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & L & J & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots & \mathcal{O} & \mathcal{O} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots & \mathcal{O} & \mathcal{O} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & & & & \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots & \mathcal{O} & \mathcal{O} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} 2q-2 \text{ rows} \\ \left.\vphantom{a}\right\} 2 \text{ rows} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} p \text{ rows} \end{array}.$$

Здесь $\mathcal{O} = (0,0)$ и $\mathbf{0} = (0,0)^T$. Если $r < n$, к матрице Q добавляются всего $n-r$ нулевых строк.

Тем самым получаем следующее равенство:

$$A = CA_eC^T = CQQ^TC^T.$$

Это означает, что матрица A представима в виде $A = BB^T$, где $B = CQ$. В диссертационной работе доказано, что полученная факторизация $A = BB^T$ является минимальной.

В параграфе 3.4 показано, как связаны задачи распознавания реберного графа и факторизации матрицы, а также приведен новый матричный алгоритм распознавания реберного графа, построенный с помощью линейно-алгебраического подхода.

Как известно, *реберным графом* обыкновенного графа H называется граф $G = L(H)$ такой, что каждая вершина $L(H)$ соответствует ребру H, и две вершины $L(H)$ смежны тогда и только тогда, когда соответствующие ребра H имеют общую вершину. Граф H называется *корневым графом* графа G.

В предложенном алгоритме использованы только стандартные матричные операции над полем по модулю 2. Алгоритм основан на следующей теореме, доказанной в диссертации:

Теорема 67. *Граф G является реберным графом некоторого графа H тогда и только тогда, когда существует $(0,1)$-матрица B такая, что $D = B^TB$, содержащая в каждом своем столбце ровно две единицы. Более того, данная матрица B является матрицей инцидентности графа H.*

Связь задачи распознавания реберного графа с задачей о факторизации симметричной матрицы дается следующим следствием, доказанным в работе:

Следствие. Пусть граф G с матрицей смежности D является реберным графом некоторого графа H с матрицей инцидентности B, $D = B^TB$. Тогда существует разбиение строк матрицы B^T на группы так, что соответствующие подграфы графа $G = L(H)$ с матрицей D являются кликами, удовлетворяющими условию теоремы 67.

Приведены примеры, показывающие работу алгоритма.

В четвертой главе диссертационной работы предложен эффективный численный алгоритм, позволяющий в арифметике с плавающей точкой построить решение задачи Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений, имеющее наименьшую полную погрешность (сумму погрешности метода и ошибок округления). Данный метод может применяться при имитационном моделировании сложных систем, в частности, для анализа биологических систем.

Для численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений существуют и более эффективные методы, чем метод Эйлера. Однако явный метод Эйлера часто используется в задачах моделирования и симуляции биологических систем. Так, обычно с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений описывается работа ионных каналов клеточных мембран. Преимущества явного метода Эйлера интегрирования систем дифференциальных уравнений хорошо известны: это его простая реализация и скорость. В некоторых случаях, например, при расчете в режиме реального времени (особенно для систем с большим количеством уравнений) эти особенности метода интегрирования очень важны. Кроме того, часто вычисления производятся в стандартной процессорной арифметике с плавающей точкой. Поэтому вопрос точности метода Эйлера при таких вычислениях довольно важен.

Рассмотрена задача Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X), \quad X(t_0) = X_0, \tag{14}$$

где $F = [f_j(t, X)]_{j=1}^m$ вещественный вектор $m \times 1$, элементы которого — данные функции,

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix}, \ X_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_m^0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, то выбор нормы произведен из соображений удобства. Использованы соответствующие векторная и матричная нормы:

$$X_{m\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}: \ ||X|| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_m|,$$

$$||B|| = \max_{1\le j\le m} ||B_j||,$$

где $B = (B_1, B_2, \ldots, B_m)$ — квадратная матрица $m\times m$ со столбцами $B_1, B_2, \ldots, B_m$.

Считается выполненным следующее предположение.

Предположение. Пусть правая часть первого уравнения системы (14) имеет непрерывные частные производные второго порядка по всем переменным.

В параграфе 4.1 приведены предварительные сведения о погрешностях, возникающих при вычислениях в арифметике с плавающей точкой, необходимые в дальнейшем.

В параграфе 4.2 введено понятие локально оптимального шага метода Эйлера.

Определение. Назовем один шаг метода Эйлера *локально оптимальным шагом*, если для него погрешность метода совпадает с погрешностью округления.

Доказана теорема:

Теорема 69. *Полная погрешность минимальна, когда она совпадает с ошибками округления.*

Тем самым, для получения наиболее точного решения каждый шаг метода Эйлера должен быть локально оптимальным. Для нахождения его можно воспользоваться следующей теоремой, доказанной в диссертации:

Теорема 70. *Локально оптимальный шаг метода Эйлера h_{opt} может быть найден из следующего уравнения*

$$h_{opt} = \sqrt{\frac{2(\eta + \varepsilon m)}{\left|\left|\left(\frac{\ddot{x}_j(t_0+h_{opt})}{x_j(t_0+h_{opt})}\right)_{j=1}^{m}\right|\right|}}. \tag{15}$$

Здесь через η обозначена норма погрешности, которая возникает при вычислении $F(t, X)$; ε — величина, связанная с максимальным значением относительной погрешности при вычислениях с плавающей точкой. Для обычной точности — *float* — (4 байта) $\varepsilon \approx 1.19 \cdot 10^{-7}$, для двойной точности — *double* — (8 байтов) $\varepsilon \approx 2.22 \cdot 10^{-16}$, для *long double* (10 или 12 байт в зависимости от системы) $\varepsilon \approx 1.08 \cdot 10^{-19}$. Значения ε могут быть взяты в стандартном включенном файле *float.h* для **C**-компилятора для архитектуры x86.

Следствие. Если начальные данные задачи Коши имеют погрешность, то справедлива следующая формула:

$$h_{opt} = \sqrt{\frac{2(\varepsilon_0 + \varepsilon m + \eta)}{\left|\left|\left(\frac{\ddot{x}_j(t_0+h_{opt})}{x_j(t_0+h_{opt})}\right)_{j=1}^{m}\right|\right|}},$$

где ε_0 обозначает относительную погрешность начальных данных.

Предложенный алгоритм интегрирования системы ОДУ основан на данной теореме и позволяет найти локально оптимальный шаг метода Эйлера итерационно.

Сначала находится приближенное значение $X(t_0 + h_1)$ для достаточно малого шага h_1. Затем определяются новый шаг и новое приближенное значение решения с помощью следующих формул:

$$h_{k+1} = \sqrt{\frac{2(\varepsilon m + \eta)}{\left|\left|\left(\frac{\ddot{x}_j(t_0+h_k)}{\tilde{x}_j(t_0+h_k)}\right)_{j=1}^{m}\right|\right|}}, \tilde{X}_k = X_0 + h_k F(t_0, X_0), \tag{16}$$

где $k = 1$.

Данные формулы применимы в том случае, когда все компоненты вектора $\tilde{X}_k$ ненулевые. Если же хотя бы одна компонента данного вектора равна нулю, относительная погрешность не определена. В этом случае можно использовать абсолютную погрешность. Тогда первая формула равенств (16) принимает вид

$$h_{k+1} = \sqrt{\frac{2(\eta + \varepsilon m)||X(t_0 + h_k)||}{||\ddot{X}(t_0 + h_k)||}}. \tag{17}$$

Чтобы сократить время вычислений, производные, стоящие в правых частях системы, могут быть заменены конечными разностями.

Ясно, что существует очевидная нижняя граница для шага интегрирования. Наименьший шаг интегрирования не может быть меньше ε. Причина этого в том, что $\varepsilon F(t, X(t))$ дает абсолютную погрешность вычисления $F(t, X)$.

В диссертационной работе доказано, что можно взять начальный шаг $h_1 = \varepsilon$ (или другому минимально возможному значению), при этом по формулам (16) за конечное число шагов будет получен оптимальный шаг интегрирования.

В параграфе 4.4 приведены численные примеры, показывающие работу алгоритма. Для этих примеров также проведен сравнительный анализ эффективности данного алгоритма с известными методами (классическим методом Розенброка, методом Рунге — Кутта, методом Эйлера с постоянным шагом интегрирования). Приведенные примеры (в том числе и жесткие системы ОДУ, и система ОДУ с разрывными правыми частями) показывают, что точность интегрирования и скорость работы метода, предложенного в диссертационной работе, выше, чем у остальных методов.

В Заключении перечислены основные результаты, полученные в диссертации.

Основные результаты работы

1. Предложен новый алгоритм для исследования линейной устойчивости сложных систем. Алгоритм позволяет получить необходимые и достаточные условия устойчивости семейства вещественных полиномов с коэффициентами, полиномиально зависящими от параметров (алгебраические относительно параметров).

2. Для анализа динамики и устойчивости сложных систем разработан алгоритм получения необходимых и достаточных условий D-устойчивости семейства вещественных полиномов с коэффициентами, полиномиально зависящими

от параметров (алгебраических относительно параметров).

3. Для анализа мультикомпонентных систем предложен алгоритм построения полинома, корнями которого являются общие собственные числа набора матриц.

4. Для исследования динамики зависящих от параметра сложных физических, оптических, электротехнических систем предложены алгоритмы определения структуры нормальной формы Жордана матрицы с комплексными элементами.

5. Предложен новый матричный алгоритм распознавания реберного графа и построения его корневого графа, применимый для упрощения описания и структуры и исследования свойств МАС и систем с переключениями.

6. Для имитационного моделирования биологических систем в режиме реального времени разработан новый эффективный алгоритм численного интегрирования систем ОДУ, позволяющий получить максимально точное решение задачи Коши в арифметике с плавающей точкой.

Публикации автора по теме диссертации

1. Калинина Е. А., Самарина О. Н. Минимизация полной погрешности метода Эйлера для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Вестник СПбГУ. Серия 10: прикладная математика, информатика, процессы управления. — 2009. — Т.4. — С. 95–103.

2. Калинина Е. А., Самарина О. Н. Вычислительная погрешность метода Эйлера при вычислениях в арифметике с плавающей точкой // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2011. — Т. 14, № 3. — С. 37–49.

3. Калинина Е. А. Общие собственные числа двух матриц // Дальневост. матем. журн. — 2013. — Т. 13, № 1. С. 52–60.

4. Калинина Е. А. О числе обусловленности Гёльдера // Вестник СПбГУ. Серия 10: прикладная математика, информатика, процессы управления. — 2013.

— Т.2. — С. 46–54.

5. Калинина Е. А., Хитров Г. М. Особенности векторного пространства упорядоченных (0, 1)-наборов из n элементов над полем по модулю 2 // Вестник СПбГУ. Серия 10: прикладная математика, информатика, процессы управления. — 2014. — Т.1. — С. 62–71.

6. Калинина Е. А. Кратные собственные числа матрицы с элементами, полиномиально зависящими от параметра // Вестник СПбГУ. Серия 10: прикладная математика, информатика, процессы управления. — 2016. — Т.2. — С. 26–33.

7. Kalinina E. A., Uteshev A. Yu. Determination of the Number of Roots of a Polynomial Lying in a Given Algebraic Domain // Linear algebra and its applications. — 1993. — № 185. — P. 61–81.

8. Kalinina E. Stability and D-stability of the family of real polynomials // Linear Algebra and Its Applications. — 2013. — № 438. — P. 2635–2650.

9. Kalinina E. The most precise computations using Euler's method in standard floating-point arithmetic applied to modelling of biological systems // Computer Methods and Programs in Biomedicine. — 2013. — Vol. 111, № 2. — P. 471–479.

10. Kalinina E., Pogozhev S., Khitrov G. Linear algebra methods in graph theory // "Stability and Control Processes"in Memory of V.I. Zubov (SCP), 2015 International Conference. — P. 570–572.

11. Kalinina E., Pogozhev S., Khitrov G. Edge covers and independence: algebraic approach // Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2015 (ICNAAM-2015). AIP Publishing, 2016. AIP Conf. Proc. 1738.

12. Kalinina E. On multiple eigenvalues of a matrix dependent on a parameter // Proc. of the 18th In-tern. Workshop, CASC 2016. LNCS 9890, pp. 305–314.

13. Горушкина Е. А. (Калинина Е.А.) О знакоопределенности однородного полинома при ограничениях в виде однородных полиномиальных уравнений и неравенств. — Депон. в ВИНИТИ 3786-B90 Деп. 27.03.90, "Вестник ЛГУ, сер.

мат.”, 27 с.

14. Горушкина Е. А. (Калинина Е.А.) Определение числа корней полинома, лежащих внутри алгебраической области комплексной плоскости. — Депон. в ВИНИТИ 2962-В91 Деп. 11.07.91, “Вестник ЛГУ, сер. мат.”, 24 с.

15. Калинина Е. А., Утешев А. Ю. Критерий устойчивости полинома, представленного таблицей значений. — Труды XXXIV науч. Конф. “Процессы управления и устойчивость”. СПб., 2003, С. 44–47.

16. Калинина Е. А. О вещественных корнях семейства полиномов. — SCP 2005, сб. трудов конференции. СПб., 2005. С. 390–401.

17. Калинина Е. А., Самарина О. Н. Минимизация полной погрешности метода Эйлера для уравнения $\dot{x} = ax$ при расчетах с точностью реальной процессорной арифметики. — Труды 37-й науч. Конф. “Процессы управления и устойчивость”. СПб., 2006, С. 43–46.

18. Калинина Е. А., Самарина О. Н. Минимизация полной погрешности двухэтапного метода Рунге — Кутты для уравнения $\dot{x} = ax$ при расчетах с точностью реальной процессорной арифметики. — Труды 38-й науч. Конф. “Процессы управления и устойчивость”. СПб., 2007, С. 33–37.

19. Kalinina E. A. On Computation of Hölder Condition Numbers. — Proc. of the conference Computer Science and Information Technologies (CSIT 2013), September 23–27, 2013, Yerevan, Armenia, pp. 23–26.

20. Калинина Е. А., Погожев С. В., Хитров Г. М. Методы линейной алгебры в теории графов. — SCP 2015, сб. трудов конференции. СПб.: Издательский дом Федоровой Г.В., 2015. С. 527–528.