

ФАНО РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОВЕДЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
(ИПМаш РАН)



В.О., Большой проспект, д.61, Санкт-Петербург, 199178
Тел.: (812)-321-4778; факс: (812)-321-4771; www.ipme.ru

ОГРН 1037800003560, ИНН/КПП 7801037069/780101001

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертацию Николая Владимировича Кузнецова
«Аналитико-численные методы исследования скрытых колебаний»,
представленную на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук по специальности 05.13.18 – математическое
моделирование, численные методы и комплексы программ.

Диссертационная работа Н.В. Кузнецова посвящена аналитико-численному анализу и классификации аттракторов динамических систем в евклидовом пространстве. Важной мотивировкой для этой работы послужило открытие, сделанное автором при исследовании динамической системы, описывающей электронную цепь Чуа. А именно были обнаружены хаотические аттракторы нового типа, названные скрытыми аттракторами. В 80ых годах прошлого века Леон Чуа предложил простую модель для нелинейной электронной цепи, в которой хаотическое поведение обусловлено наличием одного элемента с кусочно-линейной характеристикой. Теперь известны сотни цепей Чуа с различными характеристиками, которые отличаются формой аттракторов. Их можно визуализировать траекторией из окрестности неустойчивого нулевого состояния равновесия. Эти и другие классические хаотические аттракторы (они возникают в моделях Лоренца, Росслера и других, описывающих различные физические явления) визуализируются траекториями из сколь угодно малой окрестности неустойчивого состояния равновесия. В настоящей работе они называются самовозбуждающимися.

Как оказалось, существуют также аттракторы другого типа, названные скрытыми, поскольку для них область притяжения не пересекается со сколь угодно малой окрестностью неустойчивого состояния равновесия. В силу этого для их визуализации невозможно использовать тот же способ, что используется для самовозбуждающихся аттракторов. Более того, требуются специальные методы для отыскания начальных данных в их области притяжения. Для построения скрытых аттракторов двумерных полиномиальных систем в диссертации развивается аналитический метод Баутина – метод вложенных предельных циклов. А для визуализации скрытых аттракторов многомерных систем применяется метод гомотопии, заключающийся в следующем. В системе выбирается параметр и некоторый интервал его изменения (или же они в нее искусственно добавляются) так, чтобы у системы с начальным значением параметра существовал самовозбуждающийся аттрактор, а конечному значению параметра соответствовала исследуемая система. При этом изменение аттрактора

при малых изменениях параметра отслеживается численно, при этом последняя вычисленная точка траектории служит начальной точкой для визуализации аттрактора на следующем шаге. В диссертации разработана программная реализация этой процедуры, а для первого шага такого сценария предложены аналитические методы в случае, когда система имеет скалярную нелинейность.

Эти методы позволили диссертанту обнаружить скрытые хаотические аттракторы в математических моделях различных физических процессов, среди них отметим модель Рабиновича взаимодействия волн в плазме, модель Глуховского–Должанского конвекции жидкости в эллипсоидальной полости и модель Рабиновича–Фабриканта. Кроме того, построены скрытые аттракторы различных инженерных систем, причем для некоторых из них установлено, что естественные начальные данные приводят к локализации скрытого аттрактора.

Предложенная в диссертации *классификация самовозбуждающиеся vs скрытые аттракторы* привлекла внимание специалистов. В 2015 году этому вопросу был посвящен тематический выпуск журнала the European Physical Journal, Special Topics “Multistability: Uncovering Hidden Attractors”. Работы по скрытым аттракторам Чуа вошли в списки самых цитируемых статей за пять лет в журналах Physics Letters A и Physica D: Nonlinear Phenomena. Обзорная статья, в которую вошли основные результаты диссертации, посвященные этой тематике, была опубликована в журнале Physics Reports в 2016 году.

Хорошо известно, что множества с дробной размерностью Хаусдорфа называются фракталами. Чтобы оценить сверху размерность Хаусдорфа для аттрактора динамической системы часто используют локальную ляпуновскую размерность. При ее введении основные трудности связаны с рассмотрением стремящихся к бесконечности отрезков времени а также с необходимостью находить супремум по аттрактору. В рамках статистической физики эти затруднения разрешаются с использованием предположения об эргодичности системы, которое зачастую сложно проверять для конкретных систем. Поэтому в данной работе предложен строгий подход к определению ляпуновской размерности аттракторов динамических систем, основанный на теореме Дуади–Оэстерле о хаусдорфовой размерности компактных инвариантных множеств гладких отображений. В его рамках строго обосновано применение формулы Каплана–Йорка для конечно-временных ляпуновских показателей. Последняя использована в вычислительных экспериментах по отысканию ляпуновской размерности; их результаты, основанные на реализации соответствующих алгоритмов приводятся. Так как ляпуновская размерность вводится через инвариантную относительно диффеоморфизмов хаусдорфову, то естественно потребовать, чтобы это свойство имело место и для ляпуновской размерности. Поэтому инвариантность ляпуновской размерности относительно диффеоморфизмов строго установлена для аттракторов и ляпуновских экспонент ограниченных траекторий. Кроме того, инвариантность относительно диффеоморфизмов и использование специальных гладких замен координат позволяют автору обосновать метод Леонова аналитической оценки ляпуновской размерности. Наконец, в диссертации обоснован аналог метода Леонова для динамических систем с дискретным временем. Этот же подход позволил доказать гипотезу Идена о достижении максимума ляпуновской размерности на

одном из состояний равновесия системы, что, в свою очередь, дало возможность получить точные формулы, выражающие эту размерность для глобальных аттракторов ряда известных динамических систем, содержащих все состояния равновесия. Приведены результаты сравнения полученных аналитических результатов с численными экспериментами. Основные результаты этих исследований опубликованы автором в обзорной статье в журнале *Physics Letters A*.

Последняя часть диссертации посвящена построению математических моделей систем фазовой автоподстройки, анализу их устойчивости и возможности возникновения колебаний в этих системах. Метод усреднения, который применяется в работе для построения моделей высокочастотных систем фазовой автоподстройки, позволяет свести анализ высокочастотных сигналов к анализу низкочастотной разности фаз сигналов. Его применение дает возможность вычислить характеристику нелинейного элемента, так называемого фазового детектора, который используется для выделения корректирующего сигнала, пропорционального разности фаз сигналов. В результате получена аналитическая формула для характеристики фазового детектора, выраженная через коэффициенты Фурье форм входного сигнала и сигнала подстраиваемого осциллятора. Установлено, что для ряда схем поведение построенных моделей может качественно отличаться от используемых инженерами упрощенных моделей. Модели, построенные в работе для описания изменений расфазировки и состояния фильтров, математически строго определяют инженерные понятия полос удержания и захвата, а также полосы захвата без проскальзывания. Приведены примеры, когда классические инженерные описания этих понятий, имеющиеся в литературе, приводят к результатам, неприменимым на практике, и требуют уточнения. В частности, для предложенной Ф. Гарднером в 1966 году и получившей широкое распространение в инженерной литературе концепции полосы захвата без проскальзывания, им же была позже продемонстрирована невозможность ее однозначного вычисления. Поэтому в 1979 году была поставлена задача уточнения определения. Основные результаты по этой тематике опубликованы в обзорной статье в журнале *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Regular Papers* и стали основой для патентов и свидетельств на программное обеспечение ЭВМ.

В результате рассмотрения диссертационной работы можно сделать следующие замечания:

1. Для ряда рассматриваемых систем отсутствуют строгие доказательства наличия аттракторов (например, через существование поглощающего множества). Поэтому результаты численной визуализации аттракторов (таковая всегда проводится на конечном временном интервале) в действительности могут соответствовать не аттракторам, а каким-либо сложным переходным процессам (например, *transient chaos*).

2. Ляпуновская размерность позволяет получить только верхнюю оценку для хаусдорфовой размерности аттрактора и, вообще говоря, не является характеристикой его топологии (в частности, ляпуновская размерность седловой точки больше единицы). Поэтому важно иметь и оценки хаусдорфовой размерности снизу, о получении которых в диссертации ничего не сказано.

3. В работе также не указано, эквивалентна ли используемая в ней ляпуновская размерность той, которая фигурирует в работах Фояша, Идена и Темама, или же они различны. Кроме того, предложенное автором определение применимо не ко всем рассматриваемым в работе аттракторам – так правая часть в математической модели системы Чуа является только кусочно-гладкой функцией, в то время как используемое определение и теорема Дуади–Оэстерле требуют гладкости.

4. Приведенные в работе примеры вычисления полосы захвата без проскальзывания на основании предложенного автором определения относятся только к системам второго порядка, а примеры вычисления для многомерных систем (с фильтрами более высокого порядка) отсутствуют.

Считаю, что приведенные выше замечания не умаляют достоинств диссертации, и она вносит существенный вклад как в развитие теории динамических систем так и в ее важные практические приложения. Работа полностью соответствует специальности 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Автореферат и публикации правильно отражают содержание диссертации, а также выносимые на защиту положения. Основные результаты опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК РФ (они индексируются Scopus/Web of Science).

Диссертационная работа «Аналитико-численные методы исследования скрытых колебаний» удовлетворяет всем требованиям действующего Положения «О присуждении учёных степеней», предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук, а её автор Николай Владимирович Кузнецов заслуживает присуждения искомой степени по специальности 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Официальный оппонент
Николай Германович Кузнецов,
доктор физико-математических наук,
главный научный сотрудник
Лаборатории математического
моделирования волновых процессов
nikolay.g.kuznetsov@gmail.com

