

«УТВЕРЖДАЮ»

Директор ИИА РАН



Д.В. Иванов

2024 г.

### ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института прикладной астрономии Российской академии наук на диссертационную работу Титова Владимира Борисовича на тему «Общая задача трех тел в пространстве форм», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.3.1. Физика космоса, астрономия

Диссертация Владимира Борисовича Титова посвящена задаче, которая будоражит умы ученых вот уже на протяжении нескольких сотен лет. Привлекательность этой задачи заключается в простоте ее формулировки: три тела (материальные точки) движутся под воздействием взаимных гравитационных сил и чрезвычайно сложной проблеме получения ее решения. Эта задача, несмотря на величайшие достижения великих ученых, таких как Эйлер, Лагранж и других, так и не получила окончательного решения. В начале двадцатого века Карл Сундман нашел общее аналитическое решение задачи трех тел в виде всюду сходящихся рядов. Однако этот теоретический результат не позволяет исследовать свойства решения, поскольку эти ряды чрезвычайно медленно сходятся.

36-06-47 от 15.01.2025

Поэтому эта задача остается актуальной и по сегодняшний день, а получение новых результатов в этой задаче имеет большую научную ценность для решения задач небесной механики и астродинамики.

### **Структура и содержание работы**

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и двух приложений.

**В первой главе** вводится понятие пространство форм. Получены и приведены формулы трансформации координат Якоби к координатам пространства форм. Этот переход позволяет уменьшить число параметров при анализе решения плоской задачи трех тел до трех величин. Эти три величины описывают трехмерное пространство конгруэнтных треугольников, а фазовое пространство этих величин называется пространством форм. Для наглядности величины представляются сферическими координатами, в которых величина радиус-вектора считается размером треугольника, в вершинах которого находятся материальные точки, а угловые переменные определяют форму треугольника. Сведение пространства к трехмерному позволило визуализировать пространство решений, что значительно облегчило его анализ. Показано, что имея решение задачи в пространстве форм с помощью квадратуры можно найти угол наклона треугольника к фиксированной оси, а, значит, восстановить положение треугольника, в вершинах которого находятся материальные точки.

**Во второй главе** осуществляется поиск периодических решений вариационным методом. Для этой цели производится минимизация функционала действия методом линейного программирования. Решения ищутся в виде тригонометрических рядов Фурье с помощью программы, написанной на языке математического программирования AMPL.

Изучение периодических орбит в пространстве форм позволило сделать вывод, что, по крайней мере, некоторые из них на сфере форм имеют простой вид. Так, в пространстве форм некоторые периодические

траектории плоской задачи трех тел являются окружностями, в центре которых лежат точки двойных соударений  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ , либо эйлеровы точки  $E_1$ ,  $E_2$  и  $E_3$  отвечающие конфигурациям, когда тела движутся, находясь на одной прямой. Построена также в пространстве форм траектория наиболее известной периодической траектории – восьмерки, когда тела двигаются по одной траектории, напоминая восьмерку. В этом случае траектория при отображении ее на сферу форм дважды обходит эту сферу форм по экватору, отклоняясь от экватора в ту или иную сторону.

**В третьей главе** строятся поверхности нулевой скорости плоской задачи трех тел. Параметры пространства форм позволили существенным образом облегчить анализ формы и особенностей этой поверхности. Показано, что у поверхностей нулевой скорости плоской задачи трех тел есть много общего с поверхностями нулевой скорости круговой ограниченной задачи трех тел. В частности, особенности этих поверхностей можно исследовать, меняя только один параметр. Для круговой ограниченной задачи таким параметром является значение постоянной Якоби, а для общей задачи – это постоянная площадей. Показано, что как и в круговой ограниченной задаче в общей задаче трех тел существует пять различных типов поверхности нулевой скорости с различной топологией.

**В четвертой главе** рассмотрены вырожденные орбиты, т.е. орбиты на которых тела испытывают двойные или тройные соударения. Поскольку в случае соударений правые части дифференциальных уравнений движения имеют особенности – они обращаются в бесконечность, то при их анализе необходимо проводить регуляризацию. Для этой цели в данной работе используется преобразование Леметра, позволяющее провести глобальную регуляризацию. Приводятся формулы этого преобразования, а также анализируется регуляризованное пространство форм.

**В пятой главе** рассмотрены вырожденные прямолинейные и равнобедренные траектории. Получены уравнения движения для этих вырожденных случаев, свободные от особенностей. Уравнения

проинтегрированы, проведен анализ свойств полученных численных решений и сделан вывод о хаотичности движения рассмотренных случаев.

**В заключении** приводятся основные результаты диссертации.

**В приложении А** приведены тексты программ на языке AMPL, используемых при вычислении коэффициентов тригонометрических разложений периодических решений.

**В приложении В** приведены найденные периодические орбиты в виде рядов Фурье во вращающейся системе координат.

### **Обоснованность и достоверность полученных научных результатов, выводов и заключений**

Достоверность полученных результатов обеспечивается применением апробированных математических методов. Аналитические решения проверяются численным интегрированием. Результаты проведенных исследований представлены и обсуждены на 12 научных конференциях. Они опубликованы в 15 статьях, 8 из которых опубликованы в изданиях, индексируемых базами Scopus и Web of Science и 3 статьи опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. Все результаты, выносимые на защиту, обоснованы и достоверны. Особенно необходимо выделить следующие результаты:

1. Впервые построены поверхности нулевых скоростей и области возможного движения задачи трех тел в пространстве форм.
2. Для плоской задачи трех тел получены формулы перехода к параметрам пространства форм. В этом пространстве исследованы геометрические свойства орбит, их особые точки, получены уравнения движения и первые интегралы.
3. Численно исследованы вырожденные траектории в регуляризованном пространстве форм и выявлены важные их свойства.

4. Найдены новые периодические орбиты и построены их проекции на сферу форм.

### **Общая оценка работы**

Диссертационная работа Владимира Борисовича Титова представляет собой единое завершенное научное исследование, выполненное на высоком научном уровне. Текст работы четко изложен и имеет ясную структуру. Материал, представленный в диссертации, в полной мере описывает методы и подходы автора при анализе результатов исследований общей задачи трех тел, которая впервые так подробно и последовательно рассмотрена в пространстве форм. Изложение сопровождается большим хорошо оформленным иллюстративным материалом, что облегчает понимание представленных результатов. Замечаний по существу к диссертации Владимира Борисовича Титова нет. Число опечаток и неточностей мало и в основном они сосредоточены на двух страницах заключения.

### **Заключение**

Диссертация Титова Владимира Борисовича на тему «Общая задача трех тел в пространстве форм» представляет собой завершенную научно-исследовательскую работу на актуальную тему и удовлетворяет всем требованиям ВАК. Результаты, полученные в диссертационной работе, вносят существенный вклад в решение общей задачи трех тел и могут быть использованы в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, ИНАСАН, ГАИШ МГУ, ИКИ РАН, ИПА РАН и в других отечественных и зарубежных организациях, где проводятся исследования по небесной механике.

Диссертация удовлетворяет требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней», утвержденных Постановлением правительства РФ от 24.09.2013 № 842, а ее автор Титов Владимир

Борисович заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.3.1. Физика космоса, астрономия.

Отзыв подготовлен профессором, доктором физико-математических наук, заведующим Лабораторией малых тел Солнечной системы (МТСС) ИПА РАН Ю.Д. Медведевым.

Отзыв обсужден и утвержден на заседании Ученого совета ИПА РАН, протокол № 10 от 28 ноября 2024 г.

Ученый секретарь ИПА РАН  
доктор технических наук

Л.В. Федотов

Заведующий лабораторией МТСС ИПА РАН,  
доктор физико-математических наук

Ю.Д. Медведев