

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Ву Ийлунь

**Оптимальное управление сложными
системами в задачах эколого-экономического
менеджмента**

Научная специальность 2.3.1.

Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Перевод с английского языка

Научный руководитель:
Кандидат физико-математических наук,
Доцент Тур Анна Викторовна

Санкт-Петербург

2025

Оглавление

Введение	4
Глава 1 Оптимальное кооперативное управление в проблеме управления загрязнением со сменами режимов и случайной продолжительностью	22
1.1 Оптимальное управление для модели управления загрязнением	24
1.1.1 Оптимальное управление	26
1.2 Оптимальное управление для игровой модели управления загрязнением	33
1.3 Кооперативная игра с общим оборудованием игроков	37
1.3.1 Второй интервал - $(\theta, \infty]$	41
1.3.2 Первый интервал - $[0, \theta]$	46
1.3.3 Численное решение общей сопряженной переменной	48
1.4 Кооперативная игра с разным оборудованием для каждого игрока	49
1.4.1 Последний интервал - $(\theta_n, \infty]$	53
1.4.2 Интервалы - $[0, \theta_1] \cup (\theta_1, \theta_2] \cup \dots \cup (\theta_{n-1}, \theta_n]$	54
1.5 Численное оптимальное решение	55
1.5.1 Решение для обычного оборудования	55
1.5.2 Решение для различного оборудования	56
1.6 Заключение к Главе 1	58
Глава 2 Кооперативный принцип оптимальности в проблеме управления загрязнением со сменами режимов и случайной продолжительностью	59
2.1 Постановка задачи	60
2.2 Некооперативный сценарий	60
2.2.1 Последний интервал - $(\theta_n, \infty]$	61

2.2.2	Предыдущие интервалы - $[0, \theta_1] \cup (\theta_1, \theta_2] \cup \dots \cup (\theta_{n-1}, \theta_n]$	64
2.3	Динамика переменной состояния.....	66
2.4	Кооперативное решение.....	68
2.4.1	Выигрыш в кооперативном сценарии.....	69
2.4.2	Выигрыш в некооперативном сценарии.....	73
2.4.3	Вектор Шепли.....	76
2.5	Численное моделирование.....	77
2.6	Заключение к Главе 2.....	78
Глава 3 Устойчивая кооперация в гибридной игре		
управления загрязнением с разнородными игроками.....		80
3.1	Постановка задачи.....	81
3.2	Стратегии игроков при различных коалиционных структурах ..	83
3.2.1	Кооперативный сценарий: $\pi_1 = \{1, 2, 3\}$	83
3.2.2	Некооперативный сценарий: $\pi_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$	84
3.2.3	Частично-кооперативный сценарий.....	86
3.3	Динамика состояния при различных структурах коалиций.....	88
3.4	Устойчивость кооперации.....	90
3.4.1	Кооперативно-устойчивый принцип оптимальности.....	90
3.4.2	Динамическая устойчивость кооперативно-устойчивого принципа оптимальности.....	97
3.5	Числовая иллюстрация.....	101
3.6	Заключение к Главе 3.....	102
Заключение.....		104
Список литературы.....		108

Введение

Актуальность темы диссертационного исследования

С быстрым развитием космических технологий и широким применением компьютерных технологий, исследования структуры динамических систем становятся все более сложными, и характеристики сложных систем не могут быть просто описаны традиционными непрерывными или дискретными динамическими системами.

В последние два десятилетия исследования в области сложных систем стали горячей темой в математике, физике, биологии, химии, инженерии управления, экономике и других областях. Их соответствующие результаты широко применяются в эволюционной биологии, химических производственных процессах, экономическом управлении, контроле за движением, робототехнике и других областях.

Сложная система относится к тем системам, которые трудно моделировать напрямую из-за сложных взаимодействий, таких как зависимость, конкуренция и корреляция между элементами системы и окружающей средой. Кроме того, сложные системы также обладают характеристиками, такими как эмерджентность, нестабильность, нелинейность, неопределенность, непредсказуемость и другими. Поскольку такие системы встречаются в различных областях [15, 110, 50, 39], общие черты между ними стали темой самостоятельных исследований, например, полезно представить такую систему как сеть, где узлы представляют компоненты, а связи — их взаимодействия.

Рост сложности современных производственных и промышленных процессов приводит к тому, что многие системы не могут быть описаны простыми разностными или дифференциальными уравнениями. В связи с этим, как важная ветвь сложных систем, возникла концепция "гибридной системы". Уитсенхаузен (Witsenhausen) впервые предложил концепцию гибрид-

ной системы в середине 1960-х годов [97]. Гибридная система определяется как класс унифицированных динамических систем (например, дискретных динамических подсистем, непрерывных динамических подсистем, систем с прыжками/переключениями и т. д.), состоящих из множества динамических подсистем. Динамические подсистемы в гибридной системе могут взаимодействовать друг с другом и иметь единое отношение. Из-за сложной структуры, гибридная система обладает большой неопределенностью и сильной временной изменчивостью, что делает анализ гибридных систем более сложным и трудным.

Среди множества методов управления, поведение "переключения" уже давно применяется в теории управления. Например, в начале 1950-х годов, с целью экономии ценного топлива, в аэрокосмической области были предложены задачи оптимального времени управления и оптимального управления топливом. Переменная структура управления и режим скольжения, которые основываются на методе фазовой плоскости релейной системы, используют переключение как базовую идею. Позднее появились идеи многоконтроллерного управления, такие как многорежимное управление, робастное управление, контролируемое управление, интеллектуальное управление, иерархическое низкоуровневое управление, нечеткое управление и т. д., все они используют идею "переключения".

Как особый вид гибридных систем, системы с переключениями могут точно описывать сложность реальной инженерной системы. Поэтому исследования систем с переключениями получили широкое применение в практическом проектировании систем. Благодаря своей относительно упрощенной структуре, они могут предоставить ориентиры и идеи для изучения общих гибридных систем. После десятилетий разработки и улучшений, управление с переключениями стало относительно зрелой ветвью теории управления. Переключаемые системы состоят из нескольких подсистем, то есть логической динамики и непрерывной динамики, связанных с помощью переключений. Система с переключениями является гибридной системой в рамках теории управления. Этот особый тип гибридных систем обладает существенной исследовательской ценностью как важная модель в сложных системах [93, 54]. Поэтому исследования переключаемых систем широко применяются в различных областях, таких как аэрокосмическая отрасль [103], управле-

ние интеллектуальными роботами [18, 94], проектирование автомобильных трансмиссий [49, 16], сетевые системы [53, 43, 99], коммуникационные системы [106] и т. д.

Модели, основанные на теории игр, также могут рассматриваться как сложные системы. Каждый игрок составляет элемент системы, а сложность возникает из-за того, что игроки выбирают свое поведение в зависимости от различных ситуаций. Однако, в отличие от специалистов по теории управления, специалисты по теории игр, похоже, еще не полностью осознают важность гибридных систем.

На основе вышесказанного была предложена новая область гибридных дифференциальных игр в теории игр [34], в которой применяется структура гибридных систем для дифференциальных игр.

Данная диссертация направлена на устранение этого пробела в задаче многопользовательского управления загрязнением.

Изменение климата, главным образом вызванное выбросами парниковых газов (ПГ), представляет собой многогранную и все более сложную угрозу для экосистем и общества, подобную динамичной игре с высокими ставками, где действия одного игрока имеют далеко идущие последствия для других. Обратные связи и нелинейности, присущие климатическим системам, аналогичны проблемам в теории управления, где малые изменения могут привести к непропорциональным и часто непредсказуемым результатам. Природные катастрофы, такие как засухи, наводнения, лесные пожары и таяние ледников, служат постоянным напоминанием об огромных и растущих вызовах, с которыми мы сталкиваемся при управлении этой глобальной системой.

В контексте международной климатической политики страны участвуют в стратегическом взаимодействии, которое напоминает многопользовательскую игру. Стратегии сокращения выбросов каждой страны зависят от решений других, и результаты формируются с учетом сотрудничества, конкуренции и возможных дилемм, таких как "трагедия общин". Европейский Союз (ЕС), например, активно использует свою систему торговли выбросами (ETS), инициированную в 2005 году, как средство сокращения выбросов и достижения климатической нейтральности к 2050 году. Точно так же США, Канада, Австралия, Южная Корея и Япония включили цель "нуле-

вых выбросов" к 2050 году в свои стратегические планы, создавая условия для конкурентных и кооперативных взаимодействий в борьбе с изменением климата.

По мере того как проблемы глобальных ресурсов становятся более сложными и взаимосвязанными, модели теории игр становятся ценным инструментом для изучения стратегического поведения в задачах управления загрязнением.

Актуальность данной диссертации обусловлена важностью природы и экосистем для человечества и его будущего. Необходимость получения оптимальных стратегий для разработки, охраны и восстановления природных ресурсов привела к широкому внедрению методов управления для решения проблемы эффективного управления загрязнением окружающей среды. Однако существующие методы применялись лишь для относительно простых моделей, с минимальным вниманием к сложности процессов, происходящих в реальных экосистемах. В экологии существует множество примеров смены режимов, таких как переключения между несколькими подсистемами в динамике загрязнения, нелинейная динамика и случайности продолжительности производства, которые могут привести к резким изменениям режимов в реальных экосистемах.

Хотя динамическая стабильность таких систем была хорошо изучена в теории управления, исследований, направленных на определение оптимальной стратегии для системы управления, учитывающей потенциально катастрофические изменения, было недостаточно. Следует также отметить, что смены режимов могут быть вызваны различными факторами, включая эндогенные и экзогенные, детерминированные или случайные. Поэтому в этом контексте необходимо предоставить систематическое математическое описание гибридных дифференциальных игр и анализ поведения игроков в различных ситуациях.

Степень разработанности проблемы в литературе

За последние два десятилетия исследования в области оптимального управления гибридными системами претерпели значительное развитие и получили широкое применение в теории управления [72, 82, 11, 36]. Практические экологические, экономические и инженерные задачи часто сопровождаются явлениями переключения [77, 4, 69]. Все системы, включающие логическое

принятие решений и непрерывные (плавные) динамики, такие как робототехнические системы [40], химические процессы управления [51] и другие, могут быть преобразованы в гибридные системы с несколькими режимами динамики.

Задача оптимального управления для переключаемых систем в первую очередь включает проблему внешнего переключения (EFS) и внутреннего переключения (IFS). EFS относится к переключению, вызванному внешними событиями, такими как изменения окружающей среды или внешние воздействия. IFS относится к переключению, вызванному внутренними событиями, когда выполняются определенные условия, такие как состояние, управляющее воздействие или время. Эти два типа задач могут быть решены с использованием принципа максимума и методов динамического программирования. Суссман [89] изучал принцип максимума для задач оптимального управления гибридными системами. Хотя он предоставил теоретическую основу, он не рассматривал вопросы практического решения задачи оптимального управления. Рейдингер [71] и другие, основываясь на принципе максимума, исследовали оптимальное управление для переключаемых линейных систем с квадратичными целевыми функциями. Они вывели уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана (HJB) и определили граничные условия, когда правило переключения зависит от состояния или времени.

Шейкхи [81, 80] применял сочетание динамического программирования и принципа максимума для изучения задач оптимального управления гибридными системами. Сю [105] и другие предложили двухэтапный метод для случая, когда порядок переключений фиксирован, но моменты переключений переменны, и изучили задачу оптимального управления для переключаемых систем, основываясь на этом подходе. Этот двухэтапный метод стал основой для дальнейших исследований задач оптимального управления для переключаемых систем. Эгерстед [27] использовал алгоритм градиентного спуска для изучения задачи оптимального управления для переключаемых систем с частично изменяющимся порядком переключений. Бенгеа [9] для переключаемой системы, состоящей из двух подсистем, исследовал задачу оптимального управления, где как порядок переключений, так и моменты переключений могут изменяться. Расширив переключаемую систему, он предложил модель, называемую встроенные системы, и вывел достаточные

и необходимые условия существования оптимального решения. Он также исследовал связь между оптимальным решением для модели встроенных систем и оригинальной переключаемой системы.

Ин [107] исследовали задачу оптимального управления для гибридных систем с фиксированным временем и неопределенным состоянием. Они предложили метод динамического программирования на основе достижимых сетей для оптимизации гибридных систем. Этот метод может предоставить глобальное оптимальное решение и эффективно снизить вычислительную сложность системы. Бенгеа [9] вывел достаточные и необходимые условия для оптимального решения двух переключаемых систем. Он сначала доказал, что такие системы встроены в более широкий класс систем, а затем исследовал связь между этими системами и более широкими системами. Применяя принцип максимума, он вывел условия оптимальности для охватываемой системы, что в свою очередь привело к достаточным условиям для оптимальных решений в двух переключаемых системах. Ронг Цзе и др. [75] исследовали задачу оптимального управления для линейных переключаемых систем с известными начальными и конечными состояниями. Они предложили метод оптимизации с использованием градиентного спуска и обсудили такие вопросы, как выбор направления наибольшего спуска и оптимального размера шага. В [73, 74] исследуется проектирование регулятора LQ для линейных переключаемых систем в непрерывное время. Также обсуждается оптимальность закона переключения, и доказано, что в некоторых типовых случаях условия переключения оптимальны, что приводит к подоптимальным решениям, используя функцию Ляпунова для управления и динамическое обратное управление.

Среди множества математических моделей, описывающих сложный характер процессов, возникающих в экологических системах, модели управления выбросами играют важную роль [21, 31, 57, 13, 17, 52, 38, 98, 60]. В современных условиях, учитывая необходимость снижения негативного воздействия на окружающую среду, промышленным предприятиям (заводам) необходимо регулировать свои производственные стратегии, включая скорость выбросов загрязняющих веществ, для сохранения природных ресурсов и достижения оптимальной прибыли. Актуальность данной темы исследования заключается в сосредоточении внимания на обеспечении компро-

мисса между прибыльностью предприятий и снижением загрязнения окружающей среды в рамках гибридных динамических систем с (потенциально) бесконечными переключениями режимов [14, 8].

В исследованиях [36, 10] гибридный предельный цикл (ГПЦ) был явно идентифицирован как решение задачи гибридного оптимального управления. В [76] исследовались циклические линейно-гибридные системы, и было доказано существование ГПЦ, хотя оптимальность не была рассмотрена. Публикации [85, 44, 5, 6] представляют исследования, направленные на определение оптимальных производственных стратегий и механизмов экологического регулирования для снижения вредных выбросов.

Гибридная динамическая система всегда была предметом исследований в области экологии, экономики и инженерии. Переключающие системы в виде временных и состоящих переключений становятся все более распространенными. Последние достижения в этих областях представлены в работах [41, 109, 59, 36, 104]. Оптимальное решение в виде гибридного предельного цикла (ГПЦ) как наилучшего возможного кандидата было впервые представлено в задаче оптимизации для бесконечного горизонта.

Кроме того, в отличие от классических проблем управления загрязнением с детерминированным конечным временем [88, 42] или бесконечным горизонтом [45, 104], случайность продолжительности игры не может быть проигнорирована, поскольку игра может завершиться неожиданно. Причины могут быть разнообразными, включая поломку оборудования, экономические неудачи или природные катастрофы [33]. В работах [12, 83] хорошо изучены дифференциальные игры управления загрязнением со случайной продолжительностью. Однако влияние сезонных колебаний на систему не было учтено.

Однако большинство результатов в структуре, основанной на управлении, фокусировались исключительно на оптимальном управлении с одним лицом принимающим решения. В свою очередь, классическая задача гибридного оптимального управления может быть расширена до рамок теории игр. В [32] подробно рассматриваются гибридные дифференциальные игры с случайной продолжительностью и сменой режимов [34] в рамках гибридного оптимального управления. Совмещение моделей дифференциальных игр с методами гибридного оптимального управления имеет теоретиче-

ское и практическое значение [100]. Это связано с разнообразием и сложностью экологических, экономических и инженерных приложений, включающих многочисленные механизмы переключения и динамику.

В [100], где была смоделирована группа гибридных дифференциальных игр с переключениями режимов, зависящими от времени, и случайной продолжительностью, впервые исследовалось кооперативное поведение. Однако в [100] не обсуждается справедливое распределение общего вознаграждения между игроками. В этой диссертации мы также рассматриваем некооперативный случай и используем этот результат для построения значения Шепли для получения такого распределения, что имеет практическое значение для реальных приложений. Кроме того, анализируется динамика состояния, и кооперативные и некооперативные выплаты рассчитываются аналитически.

В данной диссертации рассматриваются два типа переключений. Первый представляет собой периодические переключения режимов, встроенные в динамику состояния, управляемые временем и вызванные внешними сезонными колебаниями [36, 100]. Другой тип основывается на случайной продолжительности и преобразуется в специфическое гетерогенное дисконтирование в функционале выплат [56, 55, 35]. В работах [25, 24, 19] анализируются различные функции дисконтирования в стохастических и детерминированных случаях. Гетерогенность игроков игры проявляется в различных аспектах, таких как различное производственное оборудование, временные задержки, предпочтения игроков и другие факторы. В данном исследовании функция дисконтирования моделируется с использованием составной функции распределения, которая учитывает гетерогенность производственного оборудования игроков (т.е. гетерогенная функция дисконтирования).

Цели работы

Целью диссертации является развитие области гибридных дифференциальных игр, которая расширяет классическую теорию оптимального управления. В отличие от классических задач оптимального управления, характеризующихся одним принимающим решение агентом, эта диссертация решает задачу оптимального управления загрязненностями в сценарии с n игроками, разделяющими общую территорию. Основной целью этой работы является поиск решений для класса таких задач.

Исследование сосредоточено на гибридных дифференциальных играх, которые включают периодические переключения режимов и случайную продолжительность. Оно изучает, как определить оптимальное решение, балансируя между экономическими прибылями и сокращением выброса загрязняющих веществ, для игроков как в кооперативных, так и в некооперативных условиях. Также рассматривается проблема построения кооперативного решения в таких играх.

Другой целью диссертации является получение оптимальных решений для гибридных дифференциальных игр управления загрязнением с игроками различных типов. Рассматривается вопрос построения кооперативного решения, устойчивого к одноэлементным отклонениям при наличии дальновидных и близоруких игроков, а также разработки процедуры распределения дележей, обеспечивающей динамическую устойчивость этого решения.

Основные задачи

Для выполнения исследовательского плана решаются следующие основные задачи:

1. Разработка модели кооперативной дифференциальной игры с n игроками случайной продолжительности с учетом зависящих от времени переключений для моделирования задачи управления загрязнением. Введение определения природо-устойчивого решения в данном классе задач. Получение оптимальных природо-устойчивых решений в рассматриваемой игровой модели в кооперативных и некооперативных сценариях. Анализ поведения состояния при природо-устойчивых решениях.

2. Расширение предыдущей гибридной игры управления загрязнением на случай гетерогенных предпочтений игроков при различных коалиционных структурах. Получение оптимальных стратегий и анализ соответствующего поведения состояния при всех возможных коалиционных структурах. Разработка динамически устойчивой процедуры распределения дележа (IDP) для обеспечения устойчивости кооперации.

Научная новизна

Строится модель управления выбросами загрязняющих веществ с учетом случайной продолжительности, принимающая во внимание сезонные периодические переключения параметра, отвечающего за регенеративную способность окружающей среды. Особенность этой модели заключается также

в том, что случайная продолжительность игры обусловлена временем безотказной работы оборудования игроков, а распределение случайной величины выбирается с учетом гарантийного срока работы оборудования. В случае неоднородных игроков такая постановка задачи приводит к необходимости поиска оптимальных управлений с учетом двух типов переключений: периодических переключений динамики и переключений в функциях выигрышей игроков. Эта постановка задачи является достаточно сложной и новой. Сочетание стохастических элементов и переключений режимов добавляет уровень реализма, который часто упускается в традиционных моделях. Для этой модели мы получаем единственное оптимальное решение в форме гибридного предельного цикла как для кооперативной, так и для некооперативной версии игры. Получены аналитические выражения для оптимальных траекторий переменной состояния и сопряженной переменной, а также проведен качественный анализ полученных решений. Анализ сходимости и уникальности решений в этой гибридной постановке является значительным вкладом в теорию динамических игр, особенно в контексте экологической экономики. Также были определены условия обеспечения природо-устойчивых оптимальных управлений.

В гибридной дифференциальной игре управления загрязнением с двумя дальновидными игроками и одним близоруким игроком стратегии в условиях кооперативных, некооперативных и частично кооперативных сценариев получены с использованием принципа максимума Понтрягина. Доказана сходимость переменной состояния при различных сценариях. На основе коалиционных структур введен новый кооперативный принцип оптимальности. Также построена процедура распределения дележа, обеспечивающая динамическую устойчивость этого принципа оптимальности.

Методы исследования

Эта диссертация использует методы:

1. Теория систем: гибридные системы, переключающие системы;
2. Нелинейная динамика: неавтономные переключения, устойчивость, гибридный предельный цикл;
3. Теория оптимального управления: принцип максимума Понтрягина;

4. Топология: теорема о неподвижной точке Брауэра;
5. Некооперативная теория игр: равновесие по Нэшу;
6. Кооперативная теория игр: характеристическая функция; кооперативное решение, вектор Шепли, процедура распределения дележа, динамическая устойчивость;
7. Теория вероятностей: распределение случайных величин, математическое ожидание;
8. Теория надежности: случайная продолжительность;
9. Проектирование механизмов кооперативного соглашения.

Теоретическая и практическая значимость

Теоретическая и практическая значимость данной диссертации может быть изложена следующим образом.

Теоретическая значимость:

1. Развитие теории гибридных дифференциальных игр: данная диссертация расширяет традиционную структуру дифференциальных игр, включая гибридные системы и сдвиги режимов, предлагая новый подход к моделированию многопользовательских динамических систем. Введя неавтономные переключения и концепцию решения с использованием гибридных предельных циклов, эта работа углубляет понимание сложных динамических взаимодействий в присутствии как непрерывных, так и дискретных изменений состояний, что часто встречается в реальных системах, таких как управление загрязненными и управление ресурсами.

2. Интеграция нескольких теоретических областей: исследование объединяет несколько областей, таких как нелинейная динамика, теория игр и теория управления, чтобы предложить новую концепцию решения. Этот междисциплинарный подход не только обогащает понимание оптимального управления в многопользовательских системах, но и способствует развитию новых моделей и методов в кооперативной и некооперативной теории игр, где взаимодействие нескольких принимающих решения критично.

3. Интеграция коалиционных структур и экологического моделирования: исследование соединяет динамическую теорию игр, нелинейную динамику

и экологический контроль, включая сезонные сдвиги режимов и гетерогенные предпочтения игроков. Уникальное решение получено при различных коалиционных структурах, и доказана сходимость переменных состояния для всех допустимых коалиционных структур. коалиционных структур

4. Разработка устойчивой кооперативной структуры: эта диссертация также вводит новый кооперативный принцип оптимальности, устойчивый к одноэлементным отклонениям, и условия, обеспечивающие его динамическую устойчивость. Это достижение предоставляет строгую основу для анализа и обеспечения динамической стабильности в кооперативных соглашениях, внося значительный вклад в литературу по формированию коалиций и долгосрочному сотрудничеству в динамических системах.

Практическая значимость:

1. Политическое и экологическое влияние: с практической точки зрения, концепция гибридной дифференциальной игры предоставляет ценные идеи для контроля загрязнений и экологической политики. Моделируя взаимодействие нескольких игроков (например, стран или отраслей), диссертация предлагает комплексный инструмент для разработки оптимальных стратегий контроля загрязнений, которые учитывают и экономические стимулы и экологическую устойчивость. Акцент на экономической прибыльности и экологической устойчивости предоставляет сбалансированный подход для политиков и лидеров отраслей, стремящихся сократить загрязнение при сохранении экономического роста. Кооперативное решение, основанное на векторе Шепли, гарантирует, что все стороны смогут справедливо распределить затраты и выгоды от сотрудничества, способствуя международным или межрегиональным экологическим соглашениям.

2. Реальные многопользовательские системы: результаты этого исследования имеют высокую применимость к реальным системам, где несколько агентов должны сотрудничать и конкурировать в условиях неопределенности. Это включает приложения в области управления ресурсами, смягчения последствий изменения климата и устойчивого развития. Этот подход особенно полезен в отраслях, где принимаются совместные решения в сложных, развивающихся системах с переключениями режимов, таких как энергетические рынки, транспорт и сельское хозяйство.

3. Улучшенный механизм проектирования: практическое проектирование

кооперативных соглашений через механизм проектирования предоставляет основу для создания политик, способствующих сотрудничеству между заинтересованными сторонами в многопользовательских системах. Эти соглашения особенно актуальны в международных климатических соглашениях или корпоративных сотрудничествах, направленных на сокращение экологического ущерба. Диссертация вносит вклад, предлагая структуру, которая может помочь в проектировании контрактов, совместимых с мотивациями, согласующих индивидуальные интересы с коллективными целями.

4. Управление рисками: включив случайные длительности и теорию надежности, диссертация предлагает структуру для понимания и управления рисками, связанными с долгосрочными проектами или инвестициями, особенно в условиях неопределенности или колебаний. Это имеет решающее значение для проектирования систем, которые остаются устойчивыми при изменяющихся внешних условиях, таких как экономические колебания, экологические катастрофы или технологические инновации.

Краткое описание работы

Введение вводит мотивацию исследования, объясняя актуальность гибридных дифференциальных игр в управлении загрязнении, особенно в контексте промышленных предприятий и природо-устойчивости. Изложены основные цели, исследовательские вопросы и методология, что задает основу для последующих глав.

Первая глава сосредоточена на оптимальном управлении загрязнением озера, вызванным выбросами промышленных предприятий. Введена математическая модель линейной переключающейся системы для описания процесса загрязнения озера, с учетом сезонных колебаний коэффициента самоочищения озера. Рассматриваются оптимальные управления для случая с периодическими переключениями. Введена концепция природо-устойчивого решения, обсуждаются преимущества этого подхода по сравнению с краткосрочным решением в долгосрочной перспективе. Более того, эта глава моделирует дифференциальную игру управления загрязнением для n игроков с переключениями в условиях неопределенности относительно продолжительности игры. Рассматриваются два сценария: один, в котором продолжительность игры задается случайной величиной, подчиняющейся смещенному экспоненциальному распределению, обусловленному гомогенностью

игроков, и другой, в котором продолжительность игры следует составному смещенному экспоненциальному распределению, обусловленному неогомогенностью игроков. Цель этой главы — получить упомянутую природоустойчивую стратегию для игроков, используя принцип максимума Понтрягина для вывода единственного решения управления в виде гибридного предельного цикла. Глава демонстрирует результаты и обсуждает долгосрочные преимущества устойчивых стратегий в кооперативных условиях.

Глава 2 расширяет анализ на игру управления загрязнением с переключениями для n игроков с неопределенностью продолжительности игры в некооперативном сценарии. В главе вводится функционал выигрыша, дисконтированный гетерогенными функциями, что преобразует задачу стохастической оптимизации в задачу оптимизации с бесконечным горизонтом. Используя принцип максимума Понтрягина, в этой главе идентифицируются устойчивые равновесия как в кооперативном, так и в некооперативном контексте. Показана сходимость переменной состояния и идентифицирована уникальная траектория состояния в виде гибридного предельного цикла. Кооперативные и некооперативные выигрыши получены аналитически с использованием уникальной динамики состояния в виде гибридных предельных циклов. Применяется концепция вектора Шепли для предложения кооперативного решения, а результаты проверяются с помощью численных примеров.

Глава 3 рассматривает гибридную дифференциальную игру по контролю загрязнения с гетерогенными предпочтениями игроков. Стратегии в условиях кооперативных, некооперативных и частично кооперативных сценариев получены с использованием принципа максимума Понтрягина. Для всех допустимых коалиционных структур доказана сходимость переменной состояния. Предложен новый кооперативно-устойчивый принцип оптимальности в соответствии с возможными коалиционными структурами. Разработана сезонная процедура распределения дележа (IDP) для поддержания динамической устойчивости сотрудничества на протяжении времени.

Заключение подводит итоги, подчеркивая теоретическое значение и практические последствия предложенных решений для реальных сценариев управления загрязнением. Обсуждаются потенциальные направления для будущих исследований, особенно в области уточнения моделей для более слож-

ных и динамичных условий, а также расширения на структуру коалиции.

Положения, выносимые на защиту

1. Смоделирован класс гибридных дифференциальных игр с режимными переключениями, управляемыми временем, и случайной продолжительностью. Рассматриваются два сценария: однородный случай и неоднородный случай, основанные на характеристиках игроков и случайности продолжительности игры.

2. В описанном классе гибридных дифференциальных игр найдены единственные природо-устойчивые стратегии для однородного и неоднородного случаев. Получены условия существования таких стратегий.

3. В описанном классе гибридных дифференциальных игр рассмотрен некооперативный вариант, найдена ситуация равновесия по Нэшу. Получены условия при которых равновесные стратегии являются природо-устойчивыми.

4. Получены уникальные периодические динамики состояния, представленные гибридным предельным циклом, и доказана сходимость к ним соответствующих переменных состояния в различных сценариях.

5. Кооперативные и некооперативные выигрыши рассчитываются аналитически с использованием единственной траектории состояния в форме гибридного предельного цикла в кооперативных и некооперативных сценариях соответственно.

6. С использованием рассчитанных кооперативных и некооперативных выигрышей вектор Шепли построен как кооперативное решение. Это дает распределение общего выигрыша между игроками.

7. Смоделирована структура гибридной дифференциальной игры управления загрязнением с дальновидными и близорукими гетерогенными игроками при сезонных сменах режимов. Предложен инновационный кооперативный принцип оптимальности, основанный на коалиционных структурах. Разработана процедура распределения дележа (IDP), динамически корректирующая распределение выигрышей с учетом смен режимов.

Основные научные результаты

1. Построен и исследован новый класс гибридных дифференциальных игр с режимными переключениями, управляемыми временем, и случайной продолжительностью. Рассмотрены как однородные, так и неоднородные сце-

нарии, отражающие различия в характеристиках игроков и в вероятностной природе временного горизонта, см. статьи [100, 101] в библиографии (личный вклад не менее 80%).

2. В рамках данного класса игр получены уникальные природо-устойчивые стратегии для обоих сценариев. Установлены достаточные условия существования таких стратегий, обеспечивающих долгосрочную устойчивость системы, см. статьи [100, 101] в библиографии (личный вклад не менее 70%).

3. В некооперативной постановке задачи найдено равновесие по Нэшу, а также получены условия, при которых равновесные стратегии являются природо-устойчивыми, см. статьи [100, 101] в библиографии (личный вклад не менее 70%).

4. Доказано существование уникальной периодической гибридной динамики в виде гибридного предельного цикла. Установлена сходимость траекторий состояния к данному циклу в различных режимных сценариях, см. статьи [100, 101] в библиографии (личный вклад не менее 90%).

5. Предложена аналитическая процедура вычисления выигрышей в кооперативных и некооперативных сценариях с использованием единственной гибридной траектории, что обеспечивает сопоставимость и строгость решений, см. статьи [100, 101] в библиографии (личный вклад не менее 90%).

6. Построено кооперативное решение в виде вектора Шепли на основе рассчитанных выигрышей. Получено справедливое распределение общего выигрыша между игроками, учитывающее вклад каждого участника, см. статьи [100, 101] в библиографии (личный вклад не менее 90%).

7. Разработана модель управления загрязнением в условиях сезонных режимных переключений с гетерогенными игроками (дальновидными и близорукими). Введён новый кооперативный принцип оптимальности, основанный на коалиционных структурах, и предложена динамически адаптивная процедура распределения (IDP), корректирующая доли выигрыша с учётом смен режимов и особенностей участников, см. статьи [102] в библиографии (личный вклад не менее 70%).

Апробация результатов

Основные результаты, полученные в диссертации, были опубликованы в трех статьях в международно признанных журналах и представлены на международных конференциях "Game Theory and Management" (Saint Peters

burg, 2024); Международной конференции "Control Processes and Stability" (Saint Petersburg, 2022); а также на семинарах кафедры математической теории игр и статистических решений Санкт-Петербургского государственного университета.

Публикации

На основе результатов диссертации были опубликованы следующие работы:

1. Wu, Y., Tur, A., & Wang, H. (2023). Sustainable Optimal Control for Switched Pollution-Control Problem with Random Duration. *Entropy*, 25(10), 1426. (личный вклад не менее 80%).
2. Wu, Y., Tur, A., & Ye, P. (2024). Sustainable solution for hybrid differential game with regime shifts and random duration. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 55, 101553. (личный вклад не менее 80%).
3. "Wu, Y., Tur, A., & Ye, P. Sustainable cooperation on the hybrid pollution-control game with heterogeneous players"(<https://doi.org/10.48550/arXiv.2504.12059>) находится на рецензировании, см. статью [102] в библиографии. (Личный вклад не менее 70%).

Благодарности

Время стремительно уносится, как челнок, и годы пролетают в мгновение ока. Марсель Пруст говорил: «Настоящее открытие состоит не в поиске новых земель, а в умении видеть новыми глазами».

Я выражаю искреннюю благодарность всем, кто поддерживал и направлял меня в ходе моего исследования, подготовки этой диссертации и обучения в России. Труды предшественников в области теории управления и теории игр также стали для меня ориентиром на этом пути.

Прежде всего, мне трудно подобрать слова, чтобы выразить мою глубочайшую признательность моему научному руководителю, Анне Викторовне, за ее исключительное руководство, терпение, вдохновение и поддержку. Ее глубокие замечания, ценные советы и постоянная помощь сыграли неоценимую роль в формировании этой работы и развитии моего исследовательского опыта. Я бесконечно благодарен за ее терпение и за создание среды, способствующей моему профессиональному росту. Отдельная благодарность профессору Парилиной Е.М., которая оказала мне большую помощь в выборе научного руководителя.

Я также благодарю членов диссертационного совета за их время, экспертизу и конструктивную оценку моей работы. Их вдумчивые комментарии значительно повысили качество исследования.

Хочу выразить признательность Санкт-Петербургскому государственному университету, в частности факультету ПМ-ПУ, за предоставленные ресурсы и возможности, которые сделали это исследование возможным. Поддерживающая академическая среда и доступ к различным инструментам исследований стали ключевыми факторами в завершении этой работы.

Также я благодарю Совет по стипендиям Китая (CSC), грант № 202209010144, и Программу стипендий Правительства России за финансовую поддержку, которая позволила мне осуществить это исследование.

Наконец, моя самая глубокая благодарность — моей семье. Моим родителям: ваша безусловная и бескорыстная любовь, вера в меня и жертвенность стали для меня неиссякаемым источником сил на этом пути. Вы всегда были моей опорой, поддерживая меня в трудностях и радуясь моим успехам.

Я посвящаю эту диссертацию моей семье и близким людям, чья любовь и поддержка сделали это достижение возможным.

Глава 1

Оптимальные кооперативное управление в проблеме управления загрязнением со сменами режимов и случайной продолжительностью

В данной главе, сначала представляем задачу оптимального управления загрязнением для одного игрока, затем, рассматривается дифференциальная игра n лиц управления вредными выбросами в окружающую среду со случайной продолжительностью и сезонными переключениями режимов. Целью является исследование устойчивых и адаптивных стратегий для игроков [100, 101].

Смена режима в динамических системах означает ситуацию, при которой поведение системы резко изменяется из-за небольшого изменения ключевого параметра, вызванного достижением порогового условия. Система переходит из одного режима или состояния в другое, что часто приводит к изменению типа её поведения (например, от стабильного к хаотическому). Это обычно моделируется с использованием теории бифуркаций, где система претерпевает качественное изменение динамики при пересечении управляющим параметром критического порога.

Рассмотрим общую динамическую систему, заданную уравнением:

$$\dot{x} = f(x, \lambda),$$

где:

- $x \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы,

- $\lambda \in \mathbb{R}^m$ — набор параметров, влияющих на динамику системы,
- $f(x, \lambda)$ — гладкое (часто нелинейное) векторное поле, определяющее эволюцию системы.

Смена режима происходит, когда эволюция системы изменяется качественно при пересечении параметром λ критического порога. Это явление известно как *бифуркация*, при которой равновесные точки системы или устойчивость решений могут изменяться резко, приводя к новому динамическому режиму.

В этой главе рассматривается модель с периодически изменяющимся параметром, отражающим способность озера к самоочищению. Анализируется поведение оптимального решения с учетом этих переключений. Кроме того, длительность игры подчиняется смещенному экспоненциальному распределению, где параметр смещения определяет минимально возможную продолжительность, гарантируя, что игра не закончится в течение определенного временного интервала. Это отражает неопределенность в длительности игры, при которой её завершение происходит случайным образом через некоторое время. Для устранения зависимости от конкретного времени завершения игры мы преобразуем задачу оптимизации с конечным горизонтом в задачу оптимизации с бесконечным горизонтом. Это позволяет сосредоточиться на долгосрочной динамике и устойчивости стратегий игроков, упрощая изучение стационарного поведения, адаптирующегося к изменяющимся длительностям игры. С учётом случайности продолжительности игры рассматриваются два различных сценария. В первом случае случайная продолжительность игры обусловлена выходом из строя некоторого общего оборудования игроков. Во втором – игроки используют разное оборудование, и продолжительность игры определяется как момент первого выхода из строя оборудования какого-либо игрока, т.е. $T_f = \min\{T_{f_1}, \dots, T_{f_n}\}$.

Для достижения цели устойчивого развития вводится понятие природо-устойчивой стратегии. Используя принцип максимума Понтрягина, получено единственное решение. Эта природо-устойчивая стратегия определяет уникальное управляющее решение в форме гибридного предельного цикла, в котором динамика системы чередуется между различными режимами. В результате переменная состояния (представляющая уровень загряз-

нения) сходится к устойчивой периодической траектории. Общая выигрышная функция всех игроков стабильно увеличивается, отражая совокупные преимущества кооперации и устойчивых стратегий. Этот постепенный рост выигрыша предполагает баланс между конкурентными интересами игроков и их коллективными экологическими целями, обеспечивая долгосрочную прибыльность и защиту окружающей среды.

Следовательно, мы заключаем, что природо-устойчивая стратегия в игре n -игроков по контролю загрязнения со случайной продолжительностью и периодической сменой стратегий является единственным подходом, который обеспечивает как долгосрочный рост прибыли, так и эффективную защиту окружающей среды. Эта стратегия использует сотрудничество и адаптивные реакции на изменяющиеся условия, что приводит к стабильному и взаимовыгодному результату для всех игроков.

1.1 Оптимальное управление для модели управления загрязнением

Рассмотрим модель управления выбросами загрязняющих веществ [26]. Для простоты зададим только один источник загрязнения (завод), в процессе работы которого происходит сброс загрязняющих веществ в близлежащие озера. Динамика потока загрязнения определяется линейным дифференциальным уравнением:

$$\dot{z} = \xi v - \delta z, \quad z(0) = z_0, \quad (1.1)$$

где z – уровень загрязнения в стационарном природном водоеме (например, озере), v – скорость выброса потока загрязнения, ξ – доля выбрасываемого загрязняющего вещества, которое накапливается в водоеме, $\delta > 0$ – скорость самоочищения водоема. Таким образом, уравнение (1.1) показывает, что уровень загрязнения в озере увеличивается из-за выброса загрязняющих веществ и в то же время уменьшается за счет способности озера к самоочищению.

Предположим, что производство линейно связано с выбросами. Тогда функция прибыли представляет собой функцию, которая зависит от скорости выброса $P(v) = av(b - v/2)$. Данная функция прибыли является во-

гнутой относительно скорости выброса загрязнения v , обладает свойством убывающей предельной отдачи для всех $v(t) \in [0, b]$, и прибыль максимальна, когда скорость выброса достигает своего максимума ($v(t) = b$), где b – максимальная допустимая скорость выброса. В то время как выражение $v(b - v/2)$ описывает скорость производства, коэффициент $a \geq 0$ используется для преобразования потока производства в поток прибыли.

Выражение издержек описывается формулой $qz(t)$, где q – положительная константа, соответствует штрафам, которые должен нести агент, например: эконалог, очистка озера, установка фильтра и так далее, и обычно устанавливается правительством для регулирования политики защиты окружающей среды. Как указано выше, мы предполагаем, что в модели присутствует только один источник загрязнения.

Функционал выигрыша определяется как дисконтированная чистая прибыль $L(v, z) = P(v) - qz$, полученная агентом в задаче с бесконечным горизонтом времени:

$$\bar{J}(z_0, v) := \max_{v(\cdot)} \int_0^\infty e^{-rt} \left[av(t) \left(b - \frac{1}{2}v(t) \right) - qz(t) \right] dt, \quad (1.2)$$

где $r > 0$ – ставка дисконтирования, и e^{-rt} –предотвращение расхождения целевого функционала с течением времени и устранение явной зависимости от времени. А управление удовлетворяет условию $v(t) \in [0, b]$ для всех $t \geq 0$. Кроме того, мы имеем, что для всех $z_0 \geq 0$ состояние $z(t)$ неотрицательно.

Для упрощения расчетов, задача (1.1) нормализуется введением новых переменных состояния и управления:

$$u(t) = \frac{1}{b}v(t), \quad x(t) = \frac{q}{ab^2}z(t).$$

Заметим, что нормированное управление принимает значения в интервале $[0, 1]$. И управление $u(t)$, состояние $x(t)$ теперь безразмерны.

После нормализации задачу оптимального управления можно записать следующим образом:

$$J(x_0, u) := \max_{u(\cdot)} \int_0^\infty e^{-rt} \left[u(t) \left(1 - \frac{1}{2}u(t) \right) - x(t) \right] dt, \quad (1.3)$$

$$\dot{x} = \beta u - \delta x, \quad x(0) = x_0,$$

где $\beta = \frac{\xi q}{ab} > 0$ – отношение штрафной составляющей ξq к производственной составляющей ab . Говоря иначе, если ξ больше, экологический налог будет строже, следовательно — небольшое количество выбрасываемого загрязняющего вещества вносит больший вклад в штраф, чем в прибыль. Заметим, что состояние $x(t)$ неотрицательно, а управление $u(t) \in [0, 1]$ для всех $t > 0$.

В экологических системах скорость регенерации δ является не постоянной, а изменяется периодически (например, летом и зимой), и компания (завод) стремится найти наилучший баланс между максимизацией прибыли и уплатой штрафов (эконалогов) за ухудшение состояния окружающей среды.

Основываясь на этом контексте, ключевым предположением, которое сделали в этих работах [36, 37], является то, что скорость самоочистки δ меняется периодически со временем. Весь интервал времени $H = [0, \infty)$ делится на бесконечное число равных интервалов длины T , которые делятся на $[kT, (k + \alpha)T)$ и $[(k + \alpha)T, (k + 1)T]$, где $\alpha \in (0, 1)$ и $k \in N_0$.

Это предположение математически выражается следующим образом:

$$\delta(t) := \begin{cases} \delta_1 > 0, & t \in [kT, (k + \alpha)T), \\ \delta_2 > 0, & t \in [(k + \alpha)T, (k + 1)T]. \end{cases} \quad (1.4)$$

В первом временном подынтервале система находится в первом режиме, $\delta(t) = \delta_1 > 0$, а во втором временном подынтервале система находится во втором режиме, $\delta(t) = \delta_2 > 0$. Более того $\delta_1 \neq \delta_2$, иначе проблема будет тривиальна. Наша цель – применить это предположение к модели с n участниками и случайной продолжительностью, а также понять поведение оптимального решения в условиях кусочно-постоянной (1.4).

Заметим, что рассматриваемая задача представляет собой гибридную задачу управления с переключениями, управляемым временем (в отличие от переключения, управляемого состоянием).

1.1.1 Оптимальное управление

Согласно основным предположениям (см. [47], [95]), которые мы сделали выше, регенеративная способность природы (скорость самоочищения озера) претерпевает сезонные колебания (см. [76]). Чтобы отразить это периоди-

ческое многосезонное изменение способности к самоочищению, рассмотрим теперь стандартную модель управления загрязнением, которую мы дополняем периодическим переключением.

В итоге мы хотим найти решение, учитывающее как экономические интересы, так и защиту окружающей среды.

Для решения проблемы используется принцип максимального значения Понтрягина (ПМП) (1.3). Коэффициент δ принимает постоянное значение в каждом подынтервале. Запишем функцию Гамильтона:

$$H(x, \lambda, t) = u(t) \left(1 - \frac{1}{2}u(t) \right) - x(t) + \lambda(t)(\beta u(t) - \delta(t)x(t)), \quad (1.5)$$

здесь $\lambda(t)$ – текущее значение сопряженной переменной. С учетом (1.5) запишем уравнения канонической системы:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \beta u - \delta(t)x, \\ \dot{\lambda} &= r\lambda - \frac{\partial H}{\partial x} = (r + \delta(t))\lambda + 1. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Заметим, что динамика $\lambda(t)$ отделена от динамики состояния $x(t)$. Это свойство выполняется для любой задачи линейного управления. Поэтому эволюцию текущего значения сопряженной переменной можно рассматривать отдельно от динамики состояния.

Из производной гамильтониана первого порядка,

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 1 - u + \beta\lambda(t) = 0,$$

оптимальное управление находится как:

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & \lambda(t) < -\frac{1}{\beta}, \\ \beta\lambda(t) + 1, & \lambda(t) \in \left[-\frac{1}{\beta}, 0\right], \\ 1, & \lambda(t) > 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Условия второго порядка гамильтониана действительны, потому что

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -1 < 0.$$

Это означает, что для управления u гамильтониан является выпуклым, следовательно, существует единственное оптимальное решение представленное формулой (1.7).

Сезонное переключение: природо-устойчивое управление

При рассмотрении задач оптимального управления в экономических приложениях принято постулировать, что оптимальное управление не принадлежит границе допустимого множества, кроме изолированных моментов времени. Ниже приводится экономическая интерпретация этого требования в контексте рассматриваемой проблемы и условий его выполнения.

Имеем следующую динамику переключения для $\lambda(t)$

$$\dot{\lambda}(t) = \begin{cases} (\delta_1 + r)\lambda(t) + 1 = \rho_1\lambda(t) + 1, & t \in [kT, (k + \alpha)T), \\ (\delta_2 + r)\lambda(t) + 1 = \rho_2\lambda(t) + 1, & t \in [(k + \alpha)T, (k + 1)T]. \end{cases} \quad (1.8)$$

где $\rho_i = \delta_i + r$, $i = 1, 2$.

Поскольку проблема рассмотрена на бесконечном горизонте, то число переключений стремится к бесконечности, условие трансверсальности можно сформулировать как

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-rt} \lambda(t) = 0.$$

Откуда следует, что $\lambda(t)$ либо должно быть ограничено, либо может расти или убывать со скоростью, меньшей r .

Заметим, что каждая подсистема в (1.8) имеет единственное устойчивое равновесие для каждого режима при $\lambda_i^* = -\frac{1}{\rho_i}$, $i = 1, 2$.

Заметим, что поведение сопряженной переменной зависит от соотношения величин ρ_1 и ρ_2 . Так, если $\rho_1 < \rho_2$, траектория сопряженной переменной монотонно возрастает на первом подынтервале и монотонно убывает на втором подынтервале. И если $\rho_1 > \rho_2$, наоборот.

Определение природо-устойчивого оптимального управления было введено в [36].

Определение 1.1. [36] *Оптимальное управление $u^*(t)$ называется природо-устойчивым (environmentally sustainable), если оно не принимает граничных значений, за исключением отдельных моментов времени, то есть $\lambda(t) \in [-\frac{1}{\beta}, 0], \forall t > 0$.*

Проанализируем введенное определение. Согласно (1.7) оптимальное управление $u^*(t)$ принимает граничное значение, если либо $\lambda(t) > 0$, либо $\lambda(t) <$

$-\frac{1}{\beta}$. Два граничных значения можно интерпретировать следующим образом:

- $u(t) = 0$: когда убытки компании из-за эконалога превышают прибыль от производства, компания должна остановить производство, чтобы естественным образом снизить уровень загрязнения, уменьшить эконалог и обеспечить нормальное производство.
- $u(t) = 1$: когда уровень загрязнения достаточно низок, компания, принимающая оптимизирующие решения, может производить с максимальной скоростью, не неся при этом высокого экологического налога.

Для природо-устойчивой стратегии эти две ситуации могут произойти только в отдельные периоды времени. И каждая из этих двух ситуаций не может длиться долго, потому что они неприемлемы с точки зрения прибыли компании или защиты окружающей среды.

Параметр β определяет нижнюю границу сопряженной переменной и является составным параметром, включающим слагаемые от прибыли и от ущерба окружающей среде: $\beta = \frac{\xi q}{ab}$. Чем выше β , тем строже экологическое регулирование и тем строже ограничение на сопряженную переменную и, следовательно, управление.

Следовательно, пока управление (скорость производства) не остается на границе, определяемой β , ущерб окружающей среде не превышает прибыли, что позволяет агенту продолжать дальнейшую деятельность. Таким образом, понятие природо-устойчивой стратегии направлено на поиск компромисса, который сочетает в себе как прибыль, так и заботу об окружающей среде.

Гибридный предельный цикл — Это замкнутая траектория, которая объединяет элементы как непрерывной, так и дискретной динамики в фазовом пространстве динамической системы, которая, означает, что траектории в его окрестностях сходятся к нему (в случае притягивающего гибридного предельного цикла) или расходятся от него (в случае отталкивающего гибридного предельного цикла). Это означает, что система может переходить между различными режимами, где некоторые компоненты эволюционируют по времени непрерывно, а другие — дискретно. Таким образом, система может выполнять серию циклов, где каждый цикл включает в себя несколько дискретных переходов между режимами, но цикл остаётся периодичным.

Гибридный предельный цикл может возникать в системах с переключениями или в системах, где параметры изменяются в дискретные моменты времени.

Обобщим основные результаты по предельному циклу гибрида в задаче (1.3), полученные в [36, 37]. Без потери общности было принято, что $T = 1$, $t_s = \alpha T \in (0, 1)$.

Результат Леммы 1.1. и 1.2. был получен в [36].

Лемма 1.1. [36] *Если начальное значение $\lambda(0)$ равно равновесному значению λ_{eq} , т.е.*

$$\lambda(0) = \lambda_{eq} = -\frac{1}{\rho_2} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \cdot \frac{e^{\rho_1 t_s} - 1}{e^{\rho_1 t_s} - e^{\rho_2(t_s-1)}}, \quad (1.9)$$

то решение $\lambda(t)$ уравнения (1.8) является единственным гибридным предельным циклом, удовлетворяющим условию

$$\lambda(t) \in \left[\min \left(-\frac{1}{\rho_1}, -\frac{1}{\rho_2} \right), \max \left(-\frac{1}{\rho_1}, -\frac{1}{\rho_2} \right) \right]. \quad (1.10)$$

Лемма 1.2. [36] *Для любого $\lambda(0) \neq \lambda_{eq}$, решение $\lambda(t)$ имеет следующее предельное поведение:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \begin{cases} +\infty, & \text{if } \lambda(0) > \lambda_{eq}, \\ -\infty, & \text{if } \lambda(0) < \lambda_{eq}. \end{cases} \quad (1.11)$$

Приведенная выше лемма иллюстрирует, что если начальное значение сопряженной переменной равно равновесному значению λ_{eq} ($\lambda(0) = \lambda_{eq}$), то полученное решение является периодическим и принимает значения из интервала (см. Рис. 1.1.):

$$\left[\min \left(-\frac{1}{\delta_1 + r}, -\frac{1}{\delta_2 + r} \right), \max \left(-\frac{1}{\delta_1 + r}, -\frac{1}{\delta_2 + r} \right) \right].$$

На Рис.1.1. Значения параметров выбираются $\rho_1 = 1.5, \rho_2 = 1, T = 1, \alpha = 1/2$. Синяя линия обозначает стабильное периодическое решение сопряженной переменной с начальным условием λ_{eq} , которое периодически равноамплитудно меняется на интервале $[\lambda_2^*, \lambda_1^*]$. $\lambda_i^* = -\frac{1}{\rho_i}$, $i = 1, 2$ - равновесные положения для каждого режима, которые зависят от изменения параметра δ во времени. Равновесные положения показаны голубыми линиями.

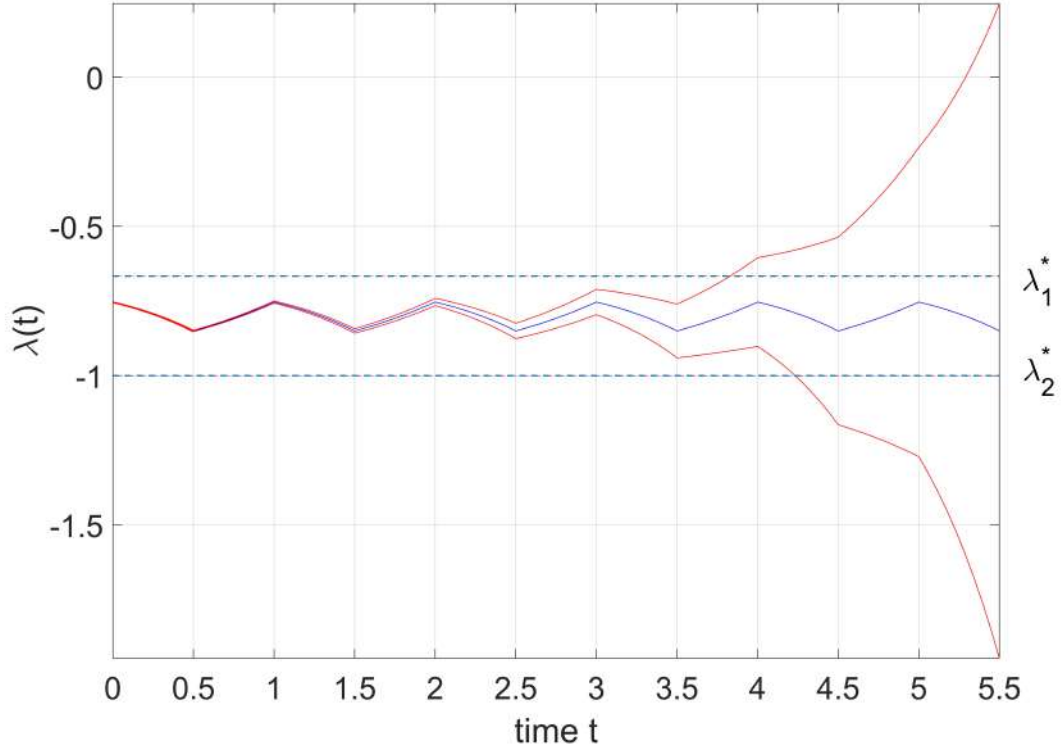


Рис. 1.1: Динамика сопряженных переменных с разными начальными значениями.

Красные линии обозначают нестабильные решения, их начальные значения немного отклоняются от равновесного значения. Применение небольшого смещения к начальному значению может привести к расхождению решения с течением времени, либо уходит в $+\infty$, либо в $-\infty$.

Следствие 1.1. [37] *Оптимальное решение $u^*(t)$ с бесконечным числом переключений является природо-устойчивым, если*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_2} + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 \rho_2} \cdot \frac{e^{\rho_1 t_s} - 1}{e^{\rho_1 t_s} - e^{\rho_2(t_s-1)}} &\leq \frac{1}{\beta}, \quad \text{при } \rho_1 < \rho_2, \\ \frac{1}{\rho_1} + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 \rho_2} \cdot \frac{e^{\rho_1 t_s} (e^{\rho_2(t_s-1)} - 1)}{e^{\rho_1 t_s} - e^{\rho_2(t_s-1)}} &\leq \frac{1}{\beta}, \quad \text{при } \rho_1 > \rho_2. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Теперь проиллюстрируем природо-устойчивое решение, введенное в этой работе, взяв значения параметра воздействия β такими, чтобы связанное с ним управление принадлежало интервалу $(0, 1)$ (т.е. было природо-устойчивым)

На Рис.1.2, который представляет природо-устойчивое решение ($\beta = 0.8 \leq \min(\rho_1, \rho_2) = 1$), видно, что управление и мгновенная прибыль всегда положительны, поэтому производство продолжается, накопленная прибыль увеличивается. Уровень загрязнения после первоначального повышения сходится к устойчивому циклу.

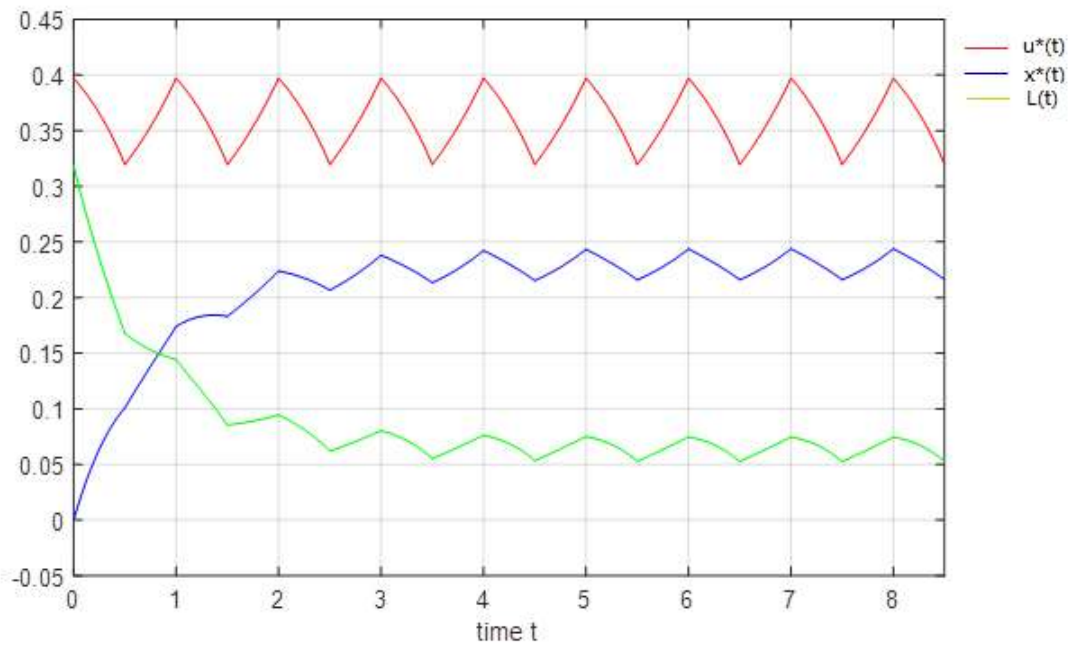


Рис. 1.2: Environmentally sustainable solution for $\beta = 0.8, \rho_1 = 1.5, \rho_2 = 1$.

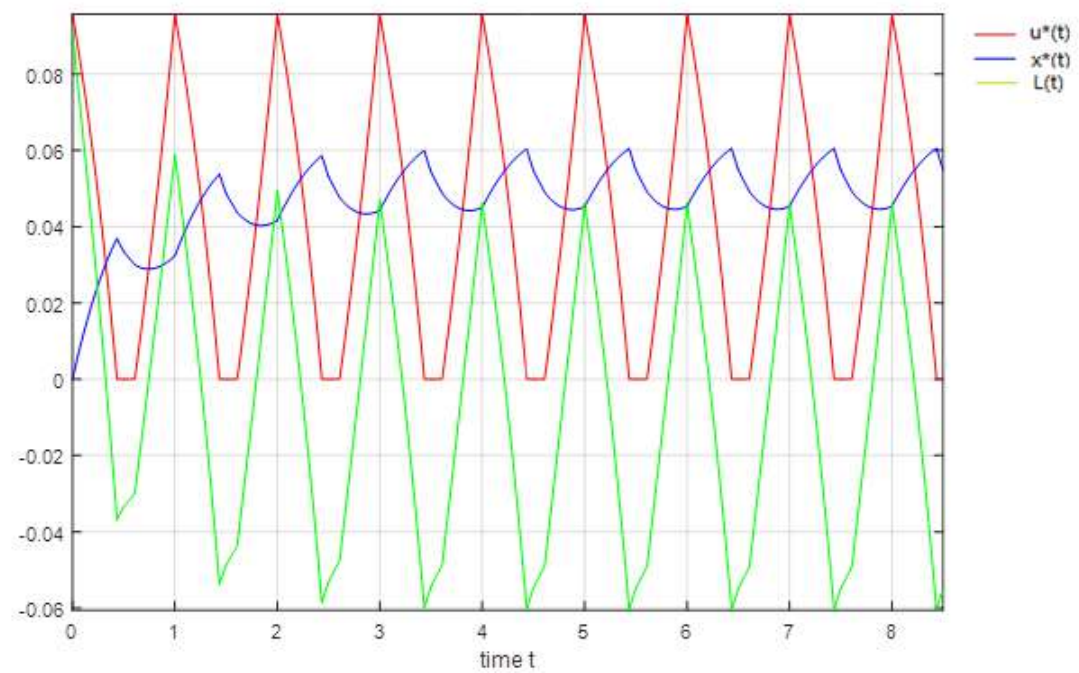


Рис. 1.3: Nonenvironmentally sustainable solution for $\beta = 1.2, \rho_1 = 1.5, \rho_2 = 1$.

На Рис.1.3. показано не природо-устойчивое решение ($\beta = 1.2 > \min(\rho_1, \rho_2) = 1$), заметим, в этом случае присутствуют периоды остановки производства ($u(t) = 0$). В результате возникают периоды отрицательной мгновенной прибыли. Это показывает превосходство природо-устойчивого решения, поскольку оно может принести больше преимуществ. Однако отметим, что окружающая среда стабилизируется при более низком уровне загрязнения, чем для случая $\beta = 0.8$, из-за того, что имеет более строгое экологическое регулирование.

1.2 Оптимальное управление для игровой модели управления загрязнением

Для облегчения восприятия все обозначения, использованные в этой главе, приведены в следующей таблице:

Таблица 1.1: Глоссарий обозначений

Symbols	Descriptions
T_f	продолжительность игры
T_{fi}	время отказа оборудования i -го игрока
T	период времени
τ	коэффициент переключения
z	уровень загрязнения в фиксированном природном резервуаре (озере)
v_i	скорость выбросов i -го игрока
b_i	максимально допустимая скорость выбросов i -го игрока
ξ_i	доля выброшенных загрязнений, накопленных в резервуаре от каждого игрока (например, фабрики)
$\delta(t)$	коэффициент самоочистки резервуара в момент времени t
$C_i(z)$	издержки i -го игрока
$R_i(v_i)$	функционал дохода i -го игрока
$L(v_i, z)$	мгновенный выигрыш i -го игрока
a_i	положительная константа, используемая для преобразования потока выбросов i -го игрока в поток прибыли
q_i	положительная константа, соответствующая налогу, который должен оплачивать i -й игрок
$J_i(z_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$	интегральный выигрыш i -го игрока
$J_{co}(z_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$	совместный выигрыш
θ	параметр сдвига экспоненциального распределения
λ	параметр распределения
θ_i	параметр сдвига i -го игрока
λ_i	параметр распределения i -го игрока

В этой главе рассматривается теоретико-игровая модель оптимального управления загрязнением озера, основанная на работах [33, 12, 83]. Для решения этой проблемы мы адаптируем Определение 1.1 и получим предельный гибридный цикл, как в Лемме 1.1. В игре участвуют n игроков (фабрик), которые разделяют общую водную зону (например, озеро). Каждый игрок i управляет своей политикой выбросов в озеро. Выбросы фабрик создают внешние эффекты в виде загрязнения, которое влияет на экологическое состояние озера. Динамика запаса загрязнений описывается линейным дифференциальным уравнением с начальным условием:

$$\dot{z} = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i - \delta(t)z, \quad z(0) = z_0, \quad (1.13)$$

где z — уровень загрязнения в фиксированном природном резервуаре (например, озере). Каждая фабрика i определяет свою скорость выбросов $v_i(t) \in [0, b_i]$, $i = \overline{1, n}$, как управляемую переменную во времени t . Здесь b_i — максимально допустимая скорость выбросов каждого игрока. $\xi_i \in (0, 1)$ — доля выброшенных загрязнений, которая накапливается в резервуаре от каждого игрока (например, фабрики). $\delta(t)$ — коэффициент самоочистки озера в момент времени t .

Кроме того, $z_0 \geq 0$, и состояние $z(t)$ остается неотрицательным для всех $t \geq 0$.

Общепризнанно, что скорость самоочищения озера изменяется в течение года. Это явление возникает вследствие влияния различных факторов, включая колебания температуры и освещенности, которые проявляются в определённые периоды времени (например, в течение одного года). Учитывая влияние внешних сезонных изменений на озеро, разумно предположить, что скорость самоочищения озера не является фиксированной константой; напротив, она изменяется как функция времени.

Таким образом, мы предполагаем, что скорость самоочищения озера $\delta(t)$ может быть представлен периодической кусочно-постоянной функцией (1.4):

$$\delta(t) := \begin{cases} \delta_1 > 0, & t \in [kT, (k + \tau)T), \\ \delta_2 > 0, & t \in [(k + \tau)T, (k + 1)T]. \end{cases}$$

Все временное множество $D = [0, T_f]$ разделено на равные периоды длиной T , и каждый из этих периодов разбивается на две части: $[kT, (k + \tau)T)$ и $[(k + \tau)T, (k + 1)T]$, где $\tau \in (0, 1)$ — коэффициент переключения, а $k \in \mathbb{N}_0$. Когда система находится в первой подчасти периода, $\delta(t) = \delta_1$, тогда как во второй подчасти $\delta(t) = \delta_2$, причём $\delta_1 \neq \delta_2$.

Отметим, что принято считать, что объём производства линейно связан с выбросами. Таким образом, функцию дохода можно выразить через выбросы [12]. Функция дохода каждого игрока $R_i(v_i)$ является строго вогнутой. Предельный доход уменьшается с увеличением скорости выбросов каждого игрока $v_i(t) \in [0, b_i]$. Более того, нулевые выбросы (производство) являются невыгодными. Каждый игрок несёт затраты на компенсацию ущерба $C_i(z)$, связанные с сокращением выбросов в момент времени t , причём функция затрат считается возрастающей и выпуклой. Таким образом, как указано в

[21], стандартным подходом является использование квадратичной функции дохода $R_i(v_i) = a_i v_i(b_i - v_i/2)$ и линейной функции затрат $C_i(z) = q_i z$ для представления мгновенной полезности игрока i : $L_i(v_i, z) = R_i(v_i) - C_i(z)$.

В качестве выигрыша в играх со случайной продолжительностью обычно принимается математическое ожидание [7]:

$$J_i(z_0, v_1, v_2, \dots, v_n) = E \left[\int_0^{T_f} [a_i v_i(b_i - v_i/2) - q_i z] dt \right], \quad (1.14)$$

где $a_i > 0$ — положительная константа, используемая для преобразования потока выбросов в поток прибыли. Коэффициент $q_i > 0$ — положительная константа, соответствующая налогу, который игрок должен уплатить (например, экологический налог).

Учитывая случайность продолжительности игры, в нашей модели мы предполагаем, что конечное время игры T_f является случайной величиной. Случайность T_f отражает неопределённость продолжительности игры, которая может зависеть от таких факторов, как внешние экологические условия, регуляторные решения или другие стохастические процессы. Будем предполагать, что распределение случайной величины T_f известно. Функцию распределения будем обозначать через $F(t)$, а плотность распределения через $f(t) = F'(t)$. Таким образом, T_f предполагается иметь известную функцию распределения (CDF): $F(t)$, такую как распределение Вейбулла в общем случае, в зависимости от конкретного приложения. Плотность вероятности (PDF) этой случайной величины определяется следующим образом: $f(t) = F'(t)$.

В работах [48, 84] было показано, как в задачах со случайной продолжительностью могут быть преобразованы выигрыши игроков. Обозначим $L_i(v_i(t), z(t))$ как $L_i(t)$ для упрощения выражения переменных.

Введём следующую функцию:

$$P_i(t, s) = \begin{cases} L_i(t)f(s), & t \leq s, \\ 0, & t \geq s. \end{cases} \quad (1.15)$$

Ожидаемая интегральная полезность игрока i может быть выражена сле-

дующим образом:

$$\begin{aligned}
J_i(z_0, v_1, v_2, \dots, v_n) &= E \left(\int_0^{T_f} [a_i v_i (b_i - v_i/2) - q_i z] dt \right) \\
&= \int_0^\infty \int_0^s [a_i v_i (b_i - v_i/2) - q_i z] dt dF(s) \\
&= \int_0^\infty \int_0^s L_i(t) dt f(s) ds \\
&= \int_0^\infty \int_0^s P_i(t, s) dt ds \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty P_i(t, s) dt ds \tag{1.16} \\
&= \int_0^\infty \int_t^\infty P_i(t, s) ds dt \\
&= \int_0^\infty \int_t^\infty f(s) ds L_i(t) dt \\
&= \int_0^\infty (1 - F(t)) L_i(t) dt, \\
&= \int_0^\infty (1 - F(t)) [a_i v_i (b_i - v_i/2) - q_i z] dt.
\end{aligned}$$

Предполагаем, что $P_i(t, s) \geq 0$ является неотрицательной измеримой функцией. Таким образом, применяя теорему Тонелли (Tonelli's theorem), порядок интегралов в выражении $\int_0^\infty \int_0^s L_i(t) dt f(s) ds$ в приведённом выше уравнении может быть изменён.

1.3 Кооперативная игра с общим оборудованием игроков

Предположим, что игроки используют общее оборудование (например, фильтры) и длительность игры становится случайной величиной в зависимости от времени отказа совместно используемого оборудования.

Предполагаем, что в начале игры все игроки используют новое оборудование для контроля загрязнения, которое имеет гарантийный срок. Гарантийный срок относится к определённому промежутку времени после продажи товара или услуги, в течение которого производитель или поставщик обещает предоставить бесплатный ремонт или замену. В течение этого периода, если продукт сталкивается с какими-либо проблемами с качеством или

поломками, потребитель может воспользоваться услугами бесплатного ремонта или замены. Таким образом, до истечения гарантийного срока отсутствует риск поломки оборудования, в то время как после окончания гарантийного срока оборудование подвержено риску возможных повреждений. Таким образом, скорость отказа оборудования становится стохастическим процессом, обычно моделируемым функцией надёжности или функцией интенсивности поломки, которая обозначает вероятность поломки с течением времени. Игра завершается, когда оборудование выходит из строя.

Таким образом, мы рассматриваем кооперативную игру управления загрязнением, где случайность продолжительности игры и учёт гарантийного срока представлены смещённым экспоненциальным распределением. Игроки могут применять стратегии управления, такие как профилактическое обслуживание или действия по ремонту, чтобы отсрочить поломку оборудования или снизить вероятность отказа после истечения гарантийного срока. Эффективность этих стратегий может зависеть от управляющих воздействий и динамического состояния системы.

Для математического определения случайной величины T_f в данной работе используется смещённое экспоненциальное распределение, которое описывает вероятность завершения игры до времени t . Функция распределения (cumulative distribution function, CDF) для этой величины задаётся следующим выражением:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{\lambda(\theta-t)}, & t > \theta, \\ 0, & t \in [0, \theta], \end{cases} \quad (1.17)$$

где $\theta > 0$ — параметр сдвига экспоненциального распределения от начала игры $t_0 = 0$, который представляет гарантийный срок оборудования. Это гарантирует, что оборудование выходит из строя только после окончания гарантийного срока. До истечения гарантийного срока риск поломки отсутствует, а после этого периода θ скорость поломки остается постоянной во времени. $\lambda > 0$ — константа, определяющая параметр распределения, и $E(T_f) = \theta + \frac{1}{\lambda}$. Эта постоянная интенсивность поломки подразумевает, что риск выхода оборудования из строя остается одинаковым после окончания гарантийного срока, что влияет на стратегии и решения игроков в процессе

игры. Более того, функция распределения $F(t)$ удовлетворяет нормализующему условию $\int_0^\infty dF(t) = 1$.

Для иллюстрации, пусть $\lambda = 0.5$. Графика 1.4 демонстрирует функцию распределения при различных значениях $\theta = 1, 3, 5$.

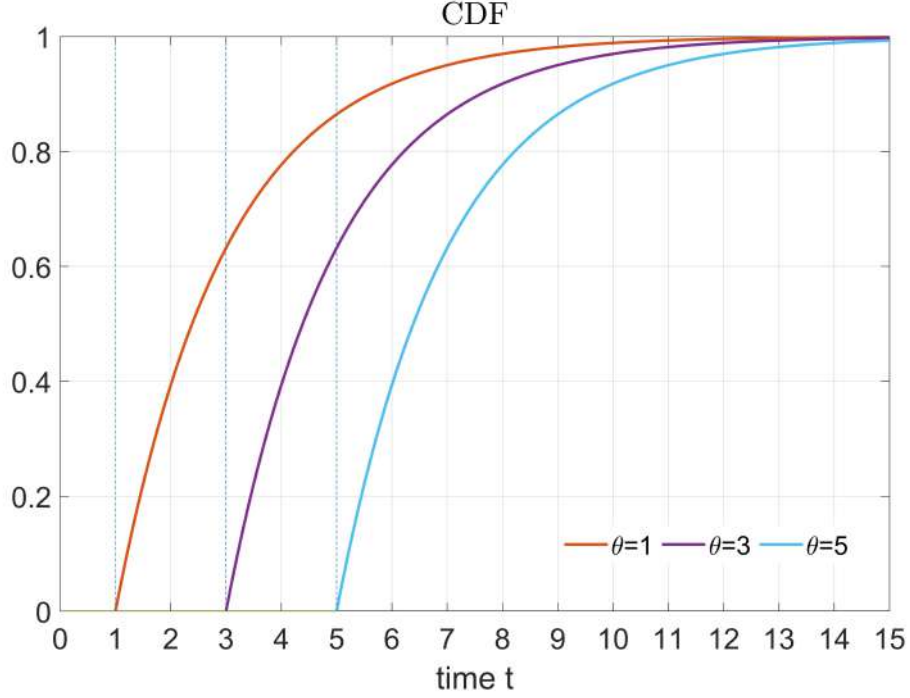


Рис. 1.4: Функция распределения продолжительности игры.

Плотность вероятности (probability density function, PDF) для этого распределения задаётся следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda(\theta-t)}, & t > \theta, \\ 0, & t \in [0, \theta]. \end{cases} \quad (1.18)$$

Графика 1.5 демонстрирует плотность вероятности смещённого экспоненциального распределения при различных значениях $\theta = 1, 3, 5$.

Подставляя (1.17) в (1.16), в соответствии с принципом оптимальности Беллмана, разделим весь временной горизонт $[0, +\infty]$ на $[0, \theta] \cup (\theta, \infty]$. Тогда функционал выигрыша (1.16) можно переписать в виде суммы:

$$\begin{aligned} J_i(z_0, v_1, v_2, \dots, v_n) = & \int_0^\theta [a_i v_i (b_i - v_i/2) - q_i z] dt \\ & + \int_\theta^\infty e^{\lambda(\theta-t)} [a_i v_i (b_i - v_i/2) - q_i z] dt. \end{aligned} \quad (1.19)$$

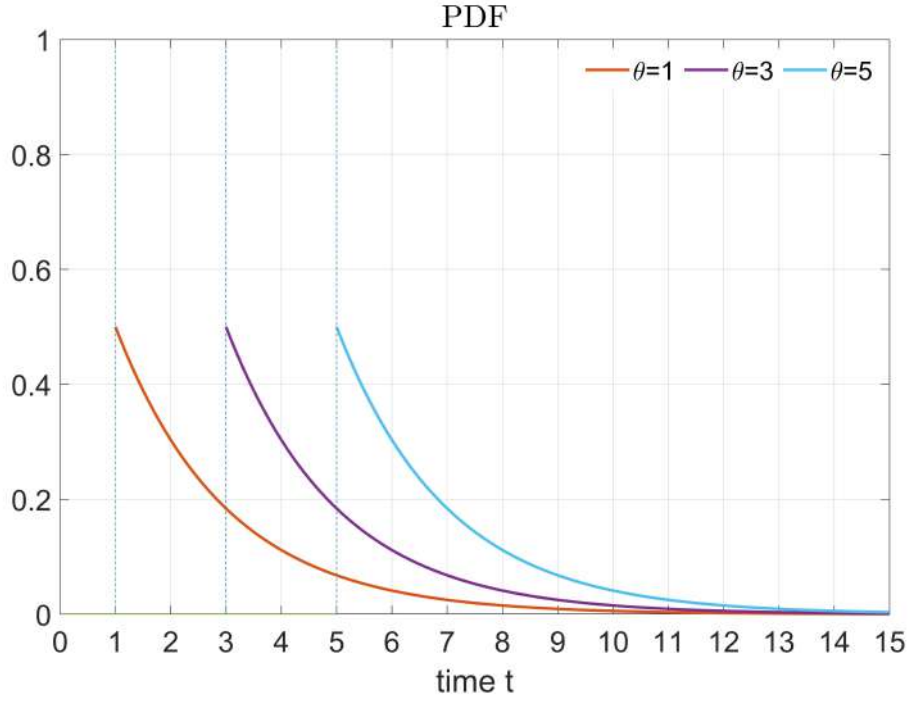


Рис. 1.5: Плотность вероятности продолжительности игры.

В кооперативном сценарии все игроки (фабрики) действуют совместно, чтобы максимизировать их общий выигрыш:

$$\begin{aligned}
 J_{co}(z_0, v_1, v_2, \dots, v_n) &= \sum_{i=1}^n J_i(z_0, v_1, v_2, \dots, v_n) \\
 &= J_{co1}(z_0, v_1, v_2, \dots, v_n) + J_{co2}(z_\theta, v_1, v_2, \dots, v_n) \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_0^\theta [a_i v_i (b_i - v_i/2) - q_i z] dt + \\
 &\quad \sum_{i=1}^n \int_\theta^\infty e^{\lambda(\theta-t)} [a_i v_i (b_i - v_i/2) - q_i z] dt.
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Здесь и далее решение будем искать в классе программных стратегий. Используя принцип максимума Понтрягина, кооперативное решение получается как результат совместной задачи оптимизации. Рассмотрим эту задачу оптимизации отдельно: сначала для второго интервала $(\theta, \infty]$, а затем для первого интервала $[0, \theta]$.

1.3.1 Второй интервал - $(\theta, \infty]$

Функционал выигрыша для второго интервала $(\theta, \infty]$ имеет вид:

$$J_{co2}(z_0, v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^n \int_{\theta}^{\infty} e^{\lambda(\theta-t)} [a_i v_i (b_i - v_i/2) - q_i z] dt. \quad (1.21)$$

Гамильтониан определяется следующим образом:

$$H_{co2}(t) = e^{\lambda(\theta-t)} \sum_{i=1}^n [a_i v_i (b_i - v_i/2) - q_i z] + \psi_2 \left(\sum_{i=1}^n \xi_i v_i - \delta(t) z \right). \quad (1.22)$$

Тогда каноническая система уравнений записывается как:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \sum_{i=1}^n \xi_i v_i - \delta(t) z, \\ \dot{\psi}_2 &= e^{\lambda(\theta-t)} \sum_{i=1}^n q_i + \delta(t) \psi_2. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Обозначив $\tilde{\psi}_2 = e^{-\lambda(\theta-t)} \psi_2$, получаем:

$$\dot{\tilde{\psi}}_2 = \sum_{i=1}^n q_i + (\delta(t) + \lambda) \tilde{\psi}_2. \quad (1.24)$$

Из первой производной Гамильтониана получаем оптимальное управление:

$$v_i^* = \begin{cases} b_i, & \tilde{\psi}_2 > 0, \\ b_i + \frac{\xi_i}{a_i} \tilde{\psi}_2, & \tilde{\psi}_2 \in \left[-\frac{a_i b_i}{\xi_i}, 0\right], \\ 0, & \tilde{\psi}_2 < -\frac{a_i b_i}{\xi_i}. \end{cases} \quad (1.25)$$

Для функции выигрыша (1.21), определенной на бесконечном горизонте $(\theta, \infty]$ с бесконечными переключениями, игроки должны учитывать устойчивое развитие. Таким образом, целью данной работы является нахождение устойчивого режима принятия решений, чтобы игроки могли найти оптимальный компромисс между прибылью и штрафами (например, экологическим налогом).

Введем определение природо-устойчивого оптимального управления аналогичное Определению 1.1.

Определение 1.2. *Оптимальное управление v_i^* игрока i является природо-устойчивым, если оно не принимает граничных значений, за исключением отдельных моментов времени, то есть $\tilde{\psi}_2 \in \left[-\frac{a_i b_i}{\xi_i}, 0\right]$, для всех $t > 0$.*

Данное определение основано на долгосрочных экономических интересах всех игроков. Когда $v_i^* > b_i$, это означает, что управление (темпы выбросов) игрока i остается на максимальном уровне. Очевидно, что это невыгодно, так как игрок i несет высокие экологические налоги. Другая ситуация, $v_i^* < 0$, означает, что доход игрока i не может превышать издержки; игрок должен прекратить производство после определенного интервала времени, чтобы позволить уровню загрязнения снизиться до более низкого уровня. Таким образом, обе эти ситуации неприемлемы для устойчивого производства [30].

Следующая теорема и ее доказательство близки к Лемме 1.1. Основное отличие состоит в том, что мы устанавливаем условие для сопряженной переменной не в начальный момент времени, а в момент θ . Кроме того, это значение зависит от интервала, к которому относится θ .

Теорема 1.1. *Решение задачи (1.23), удовлетворяющее $z(0) = z_0$ и $\psi_2(\theta) = \psi_{hlc}$, в котором*

$$\psi_{hlc} = \begin{cases} L(1 - e^{l_2 T(\tau-1)})e^{l_1 m} - \frac{q}{l_1}, & m \in [0, \tau T], \\ L(1 - e^{l_1 \tau T})e^{l_2(m-T)} - \frac{q}{l_2}, & m \in [\tau T, T]. \end{cases} \quad (1.26)$$

является единственным оптимальным решением задачи (1.1)-(1.20). Здесь $q = \sum_{i=1}^n q_i$, $l_1 = \delta_1 + \lambda$, $l_2 = \delta_2 + \lambda$, $m = \theta - \lfloor \frac{\theta}{T} \rfloor T$, $L = \frac{q(l_1 - l_2)}{l_1 l_2 (e^{l_2 T(\tau-1)} - e^{l_1 \tau T})}$.

Доказательство. Для получения периодического решения начнем с уравнения

$$\tilde{\psi}_2(\theta) = \tilde{\psi}_2(\theta + T). \quad (1.27)$$

Пусть $k_1 = \lfloor \frac{\theta}{T} \rfloor$, тогда $\theta \in [k_1 T, (k_1 + 1)T]$. На интервале $[k_1 T, (k_1 + 1)T]$ решение уравнения (1.24) имеет вид

$$\tilde{\psi}_2(t) = \begin{cases} c_1 e^{l_1 t} - \frac{q}{l_1}, & t \in [k_1 T, k_1 T + \tau T], \\ c_2 e^{l_2 t} - \frac{q}{l_2}, & t \in [k_1 T + \tau T, (k_1 + 1)T]. \end{cases}$$

Если $\theta \in [k_1 T, k_1 T + \tau T]$, или, что то же самое, $m \in [0, \tau T]$, то $\tilde{\psi}_2(\theta) = c_1 e^{l_1 \theta} - \frac{q}{l_1}$. Решая (1.27), получаем

$$\tilde{\psi}_2(\theta) = L(1 - e^{l_2 T(\tau-1)})e^{l_1 m} - \frac{q}{l_1}.$$

Если $\theta \in [k_1T + \tau T, (k_1 + 1)T]$, или, что то же самое, $m \in [\tau T, T]$, то $\tilde{\psi}_2(\theta) = c_2 e^{l_1 \theta} - \frac{q}{l_2}$. Решая (1.27), получаем

$$\tilde{\psi}_2(\theta) = L(1 - e^{l_1 \tau T}) e^{l_2(m-T)} - \frac{q}{l_2}.$$

Тогда решение уравнения (1.23), удовлетворяющее условию $\psi_2(\theta) = \tilde{\psi}_2(\theta) = \psi_{hlc}$, задается формулой

$$\tilde{\psi}_2^*(t) = \begin{cases} \left(\psi_{hlc} + \frac{q}{l_1} \right) e^{l_1(t-\theta)} - \frac{q}{l_1}, & t \in [\theta, (k_1 + \tau)T], \\ \left(\psi_{hlc} + \frac{q}{l_1} \right) e^{l_1(t-kT-\theta)} - \frac{q}{l_1}, & t \in [(k_1 + k)T, (k_1 + k + \tau)T], \quad k \in \mathbb{N}_+, \\ \left(\left(\psi_{hlc} + \frac{q}{l_1} \right) e^{l_1((k_1+\tau)T-\theta)} - \frac{q}{l_1} + \frac{q}{l_2} \right) e^{l_2(t-(k_1+\tau)T-kT)} - \frac{q}{l_2}, \\ t \in [(k_1 + \tau + k)T, (k_1 + 1 + k)T], \quad k \in \mathbb{N}_0, \end{cases} \quad (1.28)$$

если $\theta \in [k_1T, k_1T + \tau T]$, и

$$\tilde{\psi}_2^*(t) = \begin{cases} \left(\psi_{hlc} + \frac{q}{l_2} \right) e^{l_2(t-\theta)} - \frac{q}{l_2}, & t \in [\theta, (k_1 + 1)T], \\ \left(\psi_{hlc} + \frac{q}{l_2} \right) e^{l_2(t-kT-\theta)} - \frac{q}{l_2}, & t \in [(k_1 + k + \tau)T, (k_1 + k + 1)T], \quad k \in \mathbb{N}_+, \\ \left(\left(\psi_{hlc} + \frac{q}{l_2} \right) e^{l_2((k_1+1)T-\theta)} - \frac{q}{l_2} + \frac{q}{l_1} \right) e^{l_1(t-(k_1+1)T-kT)} - \frac{q}{l_1}, \\ t \in [(k_1 + k)T, (k_1 + \tau + k)T], \quad k \in \mathbb{N}_0, \end{cases} \quad (1.29)$$

если $\theta \in [k_1T + \tau T, (k_1 + 1)T]$. Заметим, что $\tilde{\psi}_2^*(t) = \tilde{\psi}_2^*(t + kT)$ и $\tilde{\psi}_2^*(t) \in [\min(-\frac{q}{l_1}, -\frac{q}{l_2}), \max(-\frac{q}{l_1}, -\frac{q}{l_2})]$, следовательно, это решение является периодическим и ограниченным.

Ограниченность $\tilde{\psi}_2^*(t)$ и состояния $z(t)$ гарантирует выполнение условия трансверсальности

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf e^{\lambda(\theta-t)} \tilde{\psi}_2^*(t)(z(t) - z^*(t)) \geq 0, \quad (1.30)$$

для любого допустимого решения $z(t)$.

Таким образом, учитывая вогнутость гамильтониана, можно заключить, что v^* является оптимальным управлением, где

$$v_i^* = \begin{cases} b_i, & \tilde{\psi}_2^*(t) > 0, \\ b_i + \frac{\xi_i}{a_i} \tilde{\psi}_2^*(t), & \tilde{\psi}_2^*(t) \in [-\frac{a_i b_i}{\xi_i}, 0], \\ 0, & \tilde{\psi}_2^*(t) < -\frac{a_i b_i}{\xi_i}. \end{cases} \quad (1.31)$$

Единственность полученного оптимального решения следует из вогнутости гамильтониана. Заметим, что гамильтониан является вогнутой функцией по отношению к состоянию z и строго вогнутой по отношению к управлению v_i , откуда следует уникальность полученного оптимального решения.

Это завершает доказательство теоремы. □

Лемма 1.3. Если $\tilde{\psi}_2(\theta) \neq \psi_{hlc}$, то $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\tilde{\psi}_2(t)\| = \infty$.

Доказательство. Когда $\tilde{\psi}_2(\theta)$ отклоняется от равновесного начального значения ψ_{hlc} , пусть $\tilde{\psi}_2(\theta) = \psi_{hlc} + c$. Тогда, начиная с момента θ , разность за каждый период можно выразить как:

$$\tilde{\psi}_2(\theta + kT) - \tilde{\psi}_2(\theta + (k-1)T) = ce^{kT(l_2(1-\tau)+l_1\tau)}.$$

Для $k \in \mathbb{N}_+$ и $kT(l_2(1-\tau) + l_1\tau) > 0$ значение разности $ce^{kT(l_2(1-\tau)+l_1\tau)}$ изменяется монотонно. Таким образом, значение $\tilde{\psi}_2$ расходится со временем. Это означает, что при $t \rightarrow +\infty$, если $c > 0$, $\tilde{\psi}_2(t)$ стремится к $+\infty$, а если $c < 0$, $\tilde{\psi}_2(t)$ стремится к $-\infty$. Следовательно, только если $\tilde{\psi}_2(\theta) = \psi_{hlc}$, $\tilde{\psi}_2$ является единственным оптимальным решением в форме периодического гибридного предельного цикла.

Это завершает доказательство леммы. □

Лемма 1.4. Оптимальное управление v_i^* игрока i является природо-устойчивым, если выполняются следующие неравенства:

$$\begin{cases} (\psi_{hlc} + \frac{q}{l_1})e^{l_1((k_1+\tau)T-\theta)} - \frac{q}{l_1} \geq -\frac{a_i b_i}{\xi_i}, & \theta \in [k_1 T, (k_1 + \tau)T], \\ ((\psi_{hlc} + \frac{q}{l_2})e^{l_2((k_1+1)T-\theta)} - \frac{q}{l_2} + \frac{q}{l_1})e^{l_1(1-\tau)T} - \frac{q}{l_1} \geq -\frac{a_i b_i}{\xi_i}, & \theta \in [(k_1 + \tau)T, (k_1 + 1)T], \end{cases} \quad (1.32)$$

если $\delta_1 > \delta_2$, $k_1 = \lfloor \frac{\theta}{T} \rfloor$, и

$$\begin{cases} ((\psi_{hlc} + \frac{q}{l_1})e^{l_1((k_1+\tau)T-\theta)} - \frac{q}{l_1} + \frac{q}{l_2})e^{l_2(1-\tau)T} - \frac{q}{l_2} \geq -\frac{a_i b_i}{\xi_i}, & \theta \in [k_1 T, (k_1 + \tau)T], \\ (\psi_{hlc} + \frac{q}{l_2})e^{l_2((k_1+1)T-\theta)} - \frac{q}{l_2} \geq -\frac{a_i b_i}{\xi_i}, & \theta \in [(k_1 + \tau)T, (k_1 + 1)T], \end{cases} \quad (1.33)$$

если $\delta_1 < \delta_2$.

Доказательство. Для $\delta_1 > \delta_2$ сопряженная переменная $\tilde{\psi}_2^*(t)$ убывает в первом подынтервале и возрастает во втором подынтервале. Кроме того, согласно Теореме 1.1, мы знаем, что $\tilde{\psi}_2^*(t) \in [\min(-\frac{q}{l_1}, -\frac{q}{l_2}), \max(-\frac{q}{l_1}, -\frac{q}{l_2})]$. Таким образом, имеем $\tilde{\psi}_2^*(t) < \max(-\frac{q}{l_1}, -\frac{q}{l_2}) < 0$.

Следовательно, для того чтобы оптимальное управление v_i^* было природоустойчивым, необходимо выполнить условие $\min_{t \geq 0} \tilde{\psi}_2^*(t) \geq -\frac{a_i b_i}{\xi_i}$. Таким образом, получаем

$$\begin{cases} \min_{t \geq 0} \tilde{\psi}_2^*(t) = \tilde{\psi}_2^*((k_1 + \tau)T) \geq -\frac{a_i b_i}{\xi_i}, & \theta \in [k_1 T, (k_1 + \tau)T], \\ \min_{t \geq 0} \tilde{\psi}_2^*(t) = \tilde{\psi}_2^*((k_1 + \tau + 1)T) \geq -\frac{a_i b_i}{\xi_i}, & \theta \in [(k_1 + \tau)T, (k_1 + 1)T]. \end{cases} \quad (1.34)$$

Аналогично, для $\delta_1 < \delta_2$ сопряженная переменная $\tilde{\psi}_2^*(t)$ возрастает в первом подынтервале и убывает во втором подынтервале. Следовательно, условие для $\delta_1 < \delta_2$ можно получить следующим образом:

$$\begin{cases} \min_{t \geq 0} \tilde{\psi}_2^*(t) = \tilde{\psi}_2^*((k_1 + 1)T) \geq -\frac{a_i b_i}{\xi_i}, & \theta \in [k_1 T, (k_1 + \tau)T], \\ \min_{t \geq 0} \tilde{\psi}_2^*(t) = \tilde{\psi}_2^*((k_1 + 1)T) \geq -\frac{a_i b_i}{\xi_i}, & \theta \in [(k_1 + \tau)T, (k_1 + 1)T]. \end{cases} \quad (1.35)$$

После того как минимальные значения в различных случаях будут вычислены, можно получить результат леммы.

Это завершает доказательство леммы. □

Рисунок 1.6 иллюстрирует динамику $\tilde{\psi}_2$ с различными начальными значениями в двух ситуациях: когда значение параметра сдвига распределения θ находится до времени переключения в одном периоде, и когда θ находится после времени переключения в одном периоде. Без потери общности, период T и коэффициент переключения τ могут быть заданы произвольно, так как эти два параметра не влияют на общий результат. Обозначаем $T = 1; \tau = 0.5$. Значение параметра λ зададим следующим $\lambda = 0.5$. Остальные параметры заданы как $\delta_1 = 1.47; \delta_2 = 0.47; q = 6$.

Синяя линия, в котором начальное значение $\tilde{\psi}_2(\theta)$ равно значению равновесия ψ_{hlc} , обозначает решение равновесия сопряженной переменной, которая периодически изменяется с одинаковой амплитудой в интервале $[\psi_{22}^*, \psi_{21}^*]$,

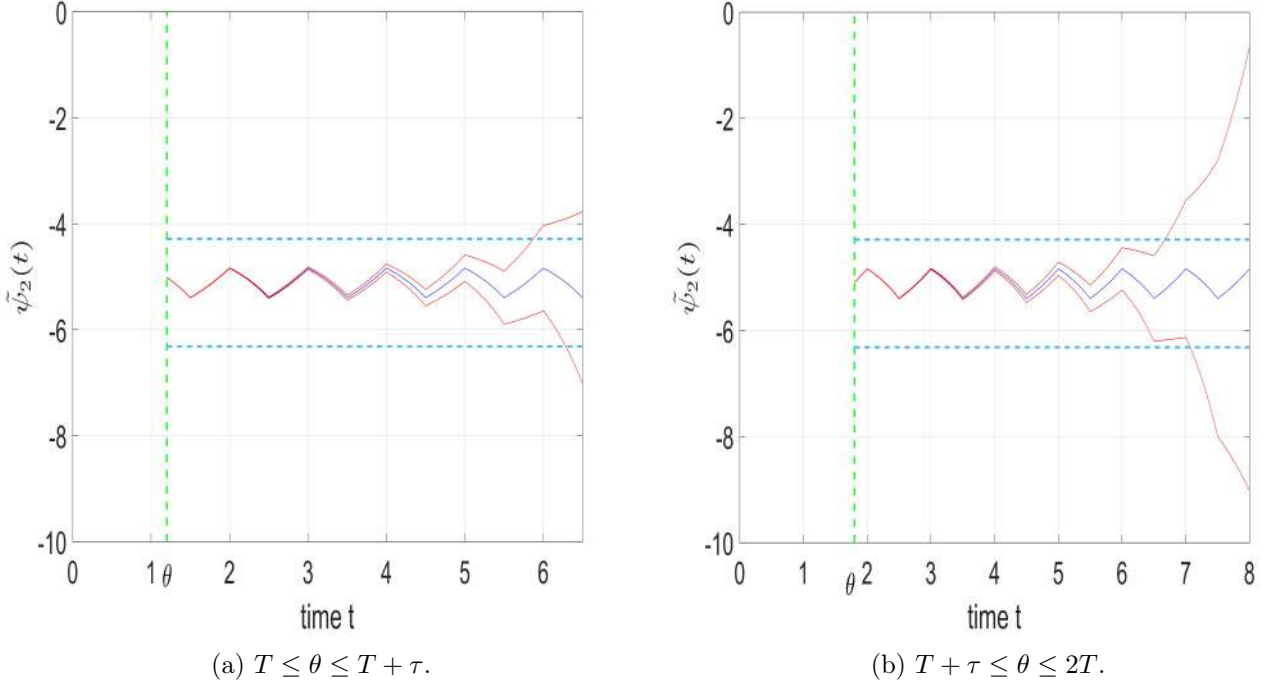


Рис. 1.6: Динамика $\tilde{\psi}_2$ при различных начальных значениях

где $\psi_{2i}^* = -\frac{q}{p_i}$, $i = 1, 2$ — это равновесные позиции для каждого режима, которые зависят от изменения δ . Равновесные позиции представлены небесно-голубыми пунктирными линиями. Красные линии обозначают неравновесные решения, начальные значения которых слегка отклоняются от значения равновесия. Таким образом, применение небольшого отклонения от начального значения может привести к расходимости решения со временем, что приведет либо к $+\infty$, либо к $-\infty$. Они затем уходят от двух равновесных точек $[\psi_{22}^*, \psi_{21}^*]$.

Таким образом, единственным образом определяется решение равновесия, которое формирует гибридный предельный цикл, когда время стремится к бесконечному горизонту с бесконечными переключениями.

1.3.2 Первый интервал - $[0, \theta]$

Функционал выигрыша для первого интервала $[0, \theta]$ обозначается как

$$J_{co1}(z_0, v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^n \int_0^\theta [a_i v_i (b_i - v_i/2) - q_i z] dt. \quad (1.36)$$

Гамильтониан выражается как

$$H_{col}(t) = \sum_{i=1}^n [a_i v_i (b_i - v_i/2) - q_i z] + \psi_1 \left(\sum_{i=1}^n \xi_i v_i - \delta(t) z \right). \quad (1.37)$$

Тогда получаем каноническую систему:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \sum_{i=1}^n \xi_i v_i - \delta(t) z, \\ \dot{\psi}_1 &= \sum_{i=1}^n q_i + \delta(t) \psi_1, \quad \psi_1(\theta) = \tilde{\psi}_2(\theta) = \tilde{\psi}_{hlc}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Кроме того, условие непрерывности $\psi_1(\theta) = \tilde{\psi}_2(\theta) = \psi_{hlc}$ основывается на непрерывности оптимального управления, которое напрямую зависит от сопряженной переменной, и вытекает из того факта, что моменты переключений зависят от времени, т.е. переключения являются автономными или управляемыми временем [34, 36].

Согласно первому порядку производной Гамильтониана, оптимальное управление получается как

$$v_i^* = \begin{cases} b_i, & \psi_1 > 0, \\ b_i + \frac{\xi_i}{a_i} \psi_1, & \psi_1 \in [-\frac{a_i b_i}{\xi_i}, 0], \\ 0, & \psi_1 < -\frac{a_i b_i}{\xi_i}. \end{cases} \quad (1.39)$$

Так как конечное значение $\psi_1(t)$ определено, рассмотрим обратную динамику времени для $\psi_1(t)$, которая описывается следующей системой:

$$\dot{\psi}_1(t) := \begin{cases} -\sum_{i=1}^n q_1 - \delta(t) \psi_1, & t \in [hT, (h + \tau)T), \\ -\sum_{i=1}^n q_2 - \delta(t) \psi_1, & t \in [(h + \tau)T, (h + 1)T], \end{cases} \quad (1.40)$$

где $h \in \mathbb{N}_0$, с $\psi_1(\theta) = \psi_{hlc}$. Каждая подсистема уравнения (1.40) имеет единственную стабильную точку равновесия при $\psi_{1i}^* = -\frac{q_i}{\delta_i}$, $i = 1, 2$.

Следует отметить, что точки равновесия сопряженной переменной в первом интервале меньше, чем во втором интервале. Таким образом, общий тренд сопряженной переменной $\psi_1(t)$ в первом интервале $[0, \theta]$ возрастает в обратном времени.

Соответственно, с точки зрения прямого времени, оптимальное управление в первом интервале $[0, \theta]$ сначала будет оставаться на максимально допустимом значении, а затем уменьшаться до гибридного предельного цикла.

1.3.3 Численное решение общей сопряженной переменной

Так как начальное значение сопряженной переменной ψ_{hc} во втором интервале уникально определено, при этом оно является конечным значением в первом интервале, мы теперь можем решить задачу для совместной сопряженной переменной, обозначаемой как $\psi_{co}(t)$, на всем временном горизонте $[0, +\infty]$. Параметры настройки были аналогичны тем, что использовались в предыдущем подразделе.

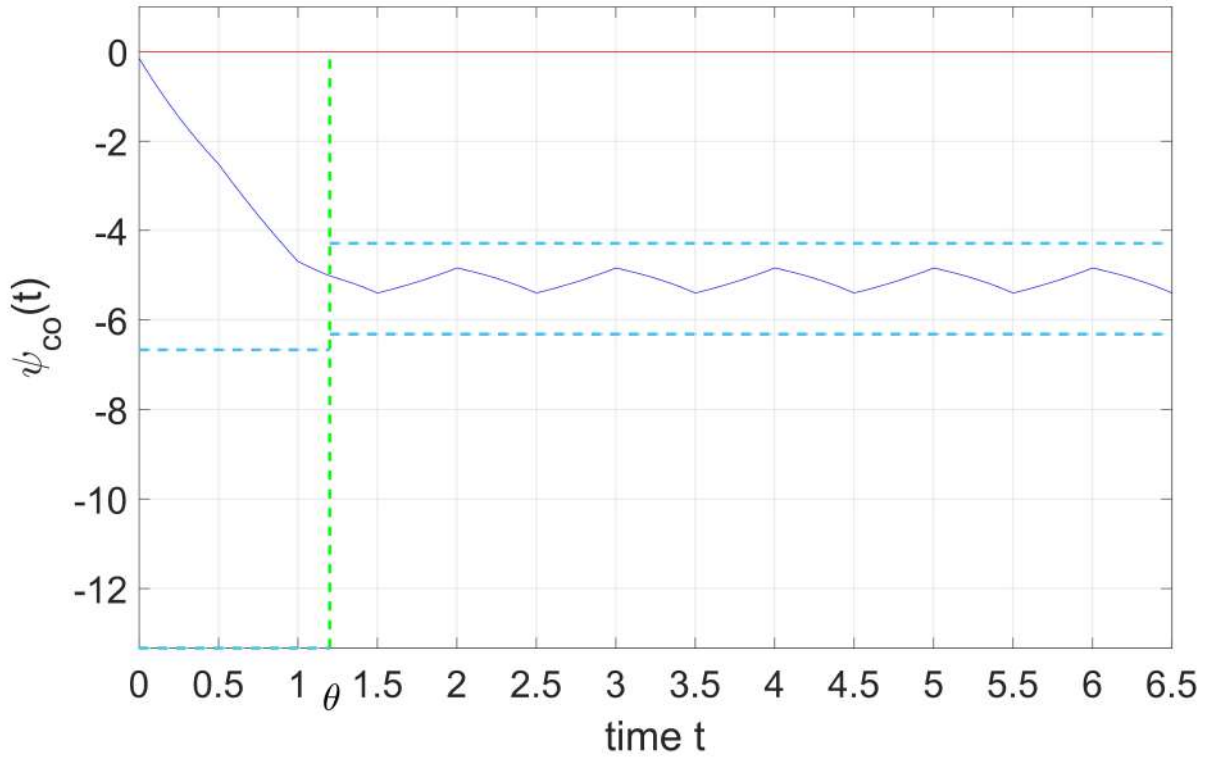


Рис. 1.7: Динамика ψ_{co} при $kT \leq \theta \leq (k + \tau)T$.

Рисунок 1.7 иллюстрирует ситуацию, когда параметр сдвига распределения θ расположен до момента переключения во втором интервале: $T \leq \theta \leq T + \tau$, где

$$\psi_{co}(t) := \begin{cases} \psi_1(t), & t \in [0, \theta], \\ \tilde{\psi}_2(t), & t \in [\theta, \infty], \end{cases} \quad (1.41)$$

$$\psi_1(\theta) = \psi_{hc} = \tilde{\psi}_2(\theta).$$

Рисунок 1.8 иллюстрирует ситуацию, когда параметр сдвига распределения θ расположен после момента переключения во втором интервале: $T + \tau \leq \theta \leq 2T$.

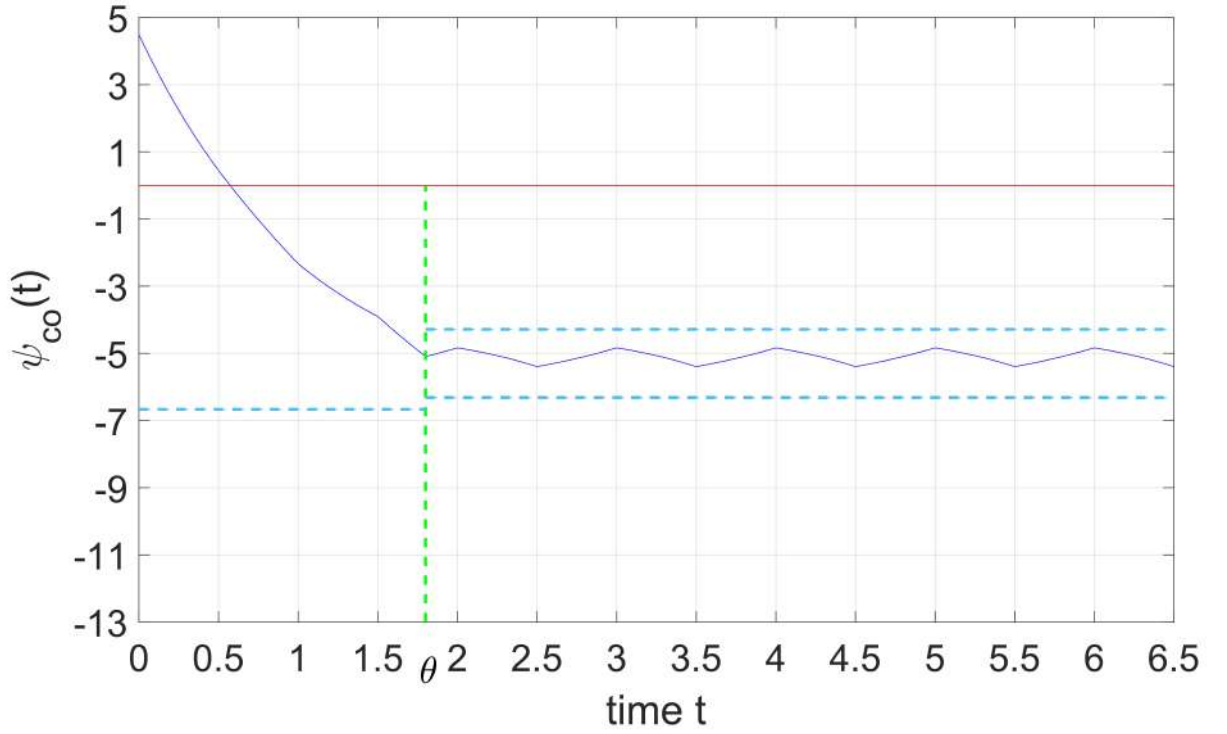


Рис. 1.8: Динамика ψ_{co} , если $kT + \tau \leq \theta \leq (k+1)T$.

Синие линии представляют собой динамику совместной сопряженной переменной $\psi_{co}(t)$, небесно-голубые пунктирные линии показывают точки равновесия для двух интервалов, а зеленые линии обозначают параметр сдвига распределения θ . Из рисунков 1.7 и 1.8 можно сделать вывод, что независимо от того, находится ли момент сдвига θ до или после времени переключения в одном интервале, общий тренд $\psi_{co}(t)$ не меняется.

Следовательно, оптимальное управление для игрока i на всем временном интервале $[0, \infty]$ определяется как:

$$v_i^* = \begin{cases} b_i, & \psi_{co} > 0, \\ b_i + \frac{\xi_i}{a_i} \psi_{co}, & \psi_{co} \in \left[-\frac{a_i b_i}{\xi_i}, 0\right], \\ 0, & \psi_{co} < -\frac{a_i b_i}{\xi_i}. \end{cases} \quad (1.42)$$

1.4 Кооперативная игра с разным оборудованием для каждого игрока

Предположим теперь, что оборудование для управления загрязнением, используемое каждым игроком, отличается и имеет различный срок гарантии.

Продолжительность гарантийного срока может варьироваться в зависимости от таких факторов, как тип продукции, бренд, условия контракта и т. д., и обычно измеряется в месяцах или годах. Следовательно, оборудование i -го игрока сталкивается с резким отказом в момент T_{fi} как случайной величины с известной функцией распределения вероятностей $F_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, и оборудование может выйти из строя из-за истечения его срока службы или других природных катастроф и т. д. Это отражает тот факт, что игроки с различными возможностями оборудования могут испытывать различные темпы износа, технологические ограничения или эксплуатационные ограничения, которые влияют на общую продолжительность игры.

Игра длится до тех пор, пока оборудование одного из игроков не выйдет из строя. Следовательно, в этом исследовании также рассматривается кооперативная игра из n игроков по контролю загрязнения с различными смещёнными экспоненциальными распределениями. Мы также предполагаем, что $\{T_{fi}\}_1^n$ являются независимыми случайными величинами. Таким образом, продолжительность игры определяется как $T_f = \min\{T_{f1}, \dots, T_{fn}\}$.

В этом случае оборудование всех игроков неоднородно, и $\{T_{fi}\}_1^n$ подчиняются различным смещённым экспоненциальным распределениям, а также имеют разные параметры распределения $\{\lambda_i\}_1^n$. Без ограничения общности, мы предполагаем, что: $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_n$, где θ_n — это смещённый параметр игрока i , и он представляет собой наибольший смещённый параметр среди всех игроков. Тогда мы получаем функцию распределения $F(t) = P\{T_f < t\} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_i(t))$, см. [33], где $F_i(t)$ определяется как:

$$F_i(t) = \begin{cases} 1 - e^{\lambda_i(\theta_i - t)}, & t > \theta_i, \\ 0, & t \in [0, \theta_i]. \end{cases} \quad (1.43)$$

Функция плотности вероятности (PDF) имеет вид

$$f_i(t) = \begin{cases} \lambda_i e^{\lambda_i(\theta_i - t)}, & t > \theta_i, \\ 0, & t \in [0, \theta_i]. \end{cases} \quad (1.44)$$

Продолжительность игры является случайной величиной с составной функцией распределения [7]. Таким образом, кумулятивная функция распределения $F(t)$ с различными смещёнными экспоненциальными распределениями

имеет вид:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \theta_1], \\ 1 - e^{\lambda_1(\theta_1-t)}, & t \in [\theta_1, \theta_2], \\ \dots & \\ 1 - e^{\sum_{i=1}^j [\lambda_i(\theta_i-t)]}, & t \in [\theta_j, \theta_{j+1}], \\ \dots & \\ 1 - e^{\sum_{i=1}^n [\lambda_i(\theta_i-t)]}, & t > \theta_n. \end{cases} \quad (1.45)$$

Для иллюстрации рассмотрим параметры $\lambda_1 = 0.3$, $\lambda_2 = 0.5$, $\theta_1 = 2$, $\theta_2 = 4$. На рис. 1.9 представлена функция распределения смещенного экспоненциального распределения при различных значениях $\theta = 1, 2, 4$.

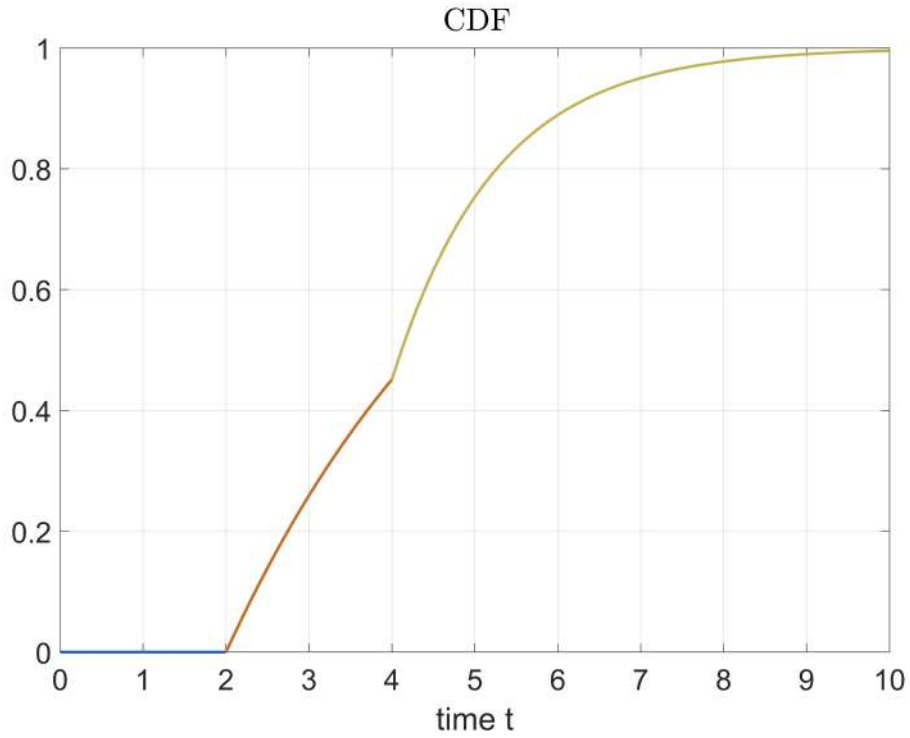


Рис. 1.9: Функция распределения продолжительности игры

Функция плотности вероятности (PDF) для неё представлена как

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \theta_1], \\ \lambda_1 e^{\lambda_1(\theta_1-t)}, & t \in [\theta_1, \theta_2], \\ \dots & \\ \sum_{i=1}^j \lambda_i e^{\sum_{i=1}^j [\lambda_i(\theta_i-t)]}, & t \in [\theta_j, \theta_{j+1}], \\ \dots & \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{\sum_{i=1}^n [\lambda_i(\theta_i-t)]}, & t > \theta_n. \end{cases} \quad (1.46)$$

На рис. 1.10 показана плотность распределения в данном сценарии при различных $\theta = 1, 2, 4$.

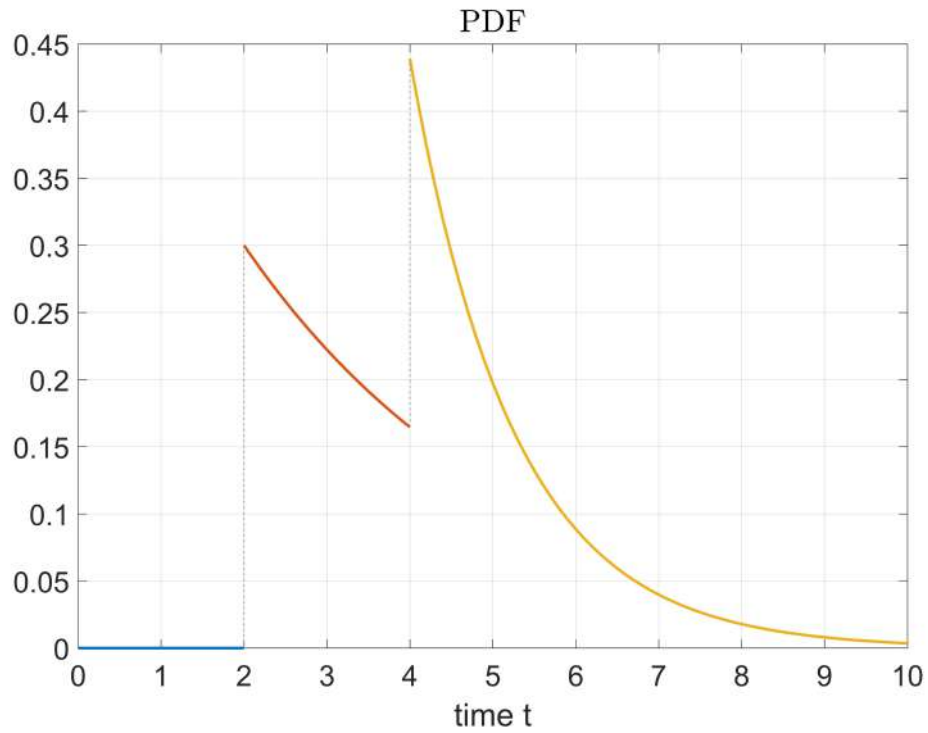


Рис. 1.10: Плотность распределения продолжительности игры

Обозначим $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, тогда функционал совместного выигрыша (1.16) в этом случае может быть переписан как сумма:

$$\begin{aligned}
J_{co}(z_0, v) &= J_1(z_0, v) + J_2(z_0, v) + \dots + J_n(z_0, v) \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\int_0^{\theta_1} [a_i v_i (b_i - v_i/2) - q_i z] dt + \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{\lambda_1(\theta_1-t)} [a_i v_i (b_i - v_i/2) - q_i z] dt \right. \\
&\quad \left. + \dots + \int_{\theta_n}^{\infty} e^{\sum_{i=1}^n [\lambda_i(\theta_i-t)]} [a_i v_i (b_i - v_i/2) - q_i z] dt \right].
\end{aligned} \tag{1.47}$$

1.4.1 Последний интервал - $(\theta_n, \infty]$

Функционал выигрыша в последнем интервале $(\theta_n, \infty]$ имеет вид:

$$J_{con}(z_0, v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^n \int_{\theta_n}^{\infty} e^{\sum_{i=1}^n [\lambda_i(\theta_i-t)]} [a_i v_i (b_i - v_i/2) - q_i z] dt. \tag{1.48}$$

Гамильтониан записывается как:

$$H_{con}(t) = e^{\sum_{i=1}^n [\lambda_i(\theta_i-t)]} \sum_{i=1}^n [a_i v_i (b_i - v_i/2) - q_i z] + \psi_n \left(\sum_{i=1}^n \xi_i v_i - \delta(t) z \right). \tag{1.49}$$

Тогда мы получаем каноническую систему:

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= \sum_{i=1}^n \xi_i v_i - \delta(t) z, \\
\dot{\psi}_n &= e^{\sum_{i=1}^n [\lambda_i(\theta_i-t)]} \sum_{i=1}^n q_i + \delta(t) \psi_n.
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Пусть $\tilde{\psi}_n = e^{-\sum_{i=1}^n [\lambda_i(\theta_i-t)]} \psi_n$; тогда получаем $\dot{\tilde{\psi}}_n = \sum_{i=1}^n q_i + (\delta(t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i) \tilde{\psi}_n$.

Так как дифференциальное уравнение для $\tilde{\psi}_n(t)$ имеет аналогичную структуру с задачей с одинаковыми сдвигами для $\tilde{\psi}_2(t)$ во втором разделе, мы по-прежнему можем уникально определить начальное значение равновесия $\tilde{\psi}_n(\theta_n) = \psi_N^{hlc}$, которое образует уникальное решение в виде гибридного предельного цикла.

$$\psi_N^{hlc} = \begin{cases} \bar{L}(1 - e^{p_2 T(\tau-1)}) e^{p_1 m_n} - \frac{q}{p_1}, & m_n \in [0, \tau T], \\ \bar{L}(1 - e^{p_1 \tau T}) e^{p_2(m_n - T)} - \frac{q}{p_2}, & m_n \in [\tau T, T], \end{cases} \tag{1.51}$$

где $q = \sum_{i=1}^n q_i$, $\lambda_N = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, $p_1 = \delta_1 + \lambda_N$, $p_2 = \delta_2 + \lambda_N$, $m_n = \theta_n - \lfloor \frac{\theta}{T} \rfloor T$, $\bar{L} = \frac{q(p_1 - p_2)}{p_1 p_2 (e^{p_2 T(\tau-1)} - e^{p_1 \tau T})}$.

1.4.2 Интервалы - $[0, \theta_1] \cup (\theta_1, \theta_2] \cup \dots \cup (\theta_{n-1}, \theta_n]$.

Равновесное значение сопряженной переменной в момент θ_n определяется однозначно. Таким образом, динамика $\psi_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$ также однозначно определяется в обратное время.

Функционал выигрыша игрока i в $(j+1)$ -м интервале, $j = \overline{1, n-1}$, задается следующим образом:

$$J_{coj}(z_0, v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^n \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} e^{\sum_{i=1}^j [\lambda_i(\theta_i - t)]} [a_i v_i (b_i - v_i/2) - q_i z] dt. \quad (1.52)$$

Гамильтониан имеет вид

$$H_{coj}(t) = e^{\sum_{i=1}^j [\lambda_i(\theta_i - t)]} \sum_{i=1}^n [a_i v_i (b_i - v_i/2) - q_i z] + \psi_j \left(\sum_{i=1}^n \xi_i v_i - \delta(t) z \right). \quad (1.53)$$

Дифференциальное уравнение для $\psi_j(t)$ задается как

$$\dot{\psi}_j = e^{\sum_{i=1}^j [\lambda_i(\theta_i - t)]} \sum_{i=1}^n q_i + \delta(t) \psi_n. \quad (1.54)$$

Пусть $\tilde{\psi}_j = e^{-\sum_{i=1}^j [\lambda_i(\theta_i - t)]} \psi_j$, тогда получаем

$$\dot{\tilde{\psi}}_j = \sum_{i=1}^n q_i + (\delta(t) + \sum_{i=1}^j \lambda_i) \tilde{\psi}_j, \quad \tilde{\psi}_j(\theta_{j+1}) = \tilde{\psi}_{j+1}(\theta_{j+1}).$$

Кроме того, для первого интервала $[0, \theta_1]$, как и раньше, имеем $\dot{\psi}_1(t) = \sum_{i=1}^n q_i + \delta(t) \psi_1(t)$, $\psi_1(\theta_1) = \tilde{\psi}_2(\theta_1)$.

Таким образом, общая кооперативная сопряженная переменная с различными смещенными распределениями имеет следующий вид

$$\tilde{\psi}^{co}(t) = \begin{cases} \psi_0(t), & t \in [0, \theta_1], \\ \tilde{\psi}_1(t), & t \in [\theta_1, \theta_2], \\ \dots \\ \tilde{\psi}_j(t), & t \in [\theta_j, \theta_{j+1}], \\ \dots \\ \tilde{\psi}_n(t), & t > \theta_n. \end{cases} \quad (1.55)$$

Следовательно, если v_i^{co} природо-устойчиво на протяжении всего времени, то кооперативная стратегия игрока i определяется следующим кусочной функцией:

$$v_i^{co} = \begin{cases} b_i + \frac{\xi_i}{a_i} \psi_0(t), & t \in [0, \theta_1], \\ b_i + \frac{\xi_i}{a_i} \tilde{\psi}_1(t), & t \in [\theta_1, \theta_2], \\ \dots \\ b_i + \frac{\xi_i}{a_i} \tilde{\psi}_j(t), & t \in [\theta_j, \theta_{j+1}], \\ \dots \\ b_i + \frac{\xi_i}{a_i} \tilde{\psi}_n(t), & t > \theta_n. \end{cases} \quad (1.56)$$

1.5 Численное оптимальное решение

Для математической обозримости мы рассмотрели пример модели кооперативной игры с двумя игроками.

Так как общая кооперативная сопряженная переменная однозначно определяется в обоих случаях, оптимальные решения для игроков показаны в следующих симуляциях.

Для выполнения условия природо-устойчивого управления были установлены следующие значения параметров:

$\delta_1 = 1.47$; $\delta_2 = 0.47$; $T = 1$; $\tau = 0.5$; $\lambda = 0.5$; $q = 6$; $\xi_1 = 0.8$; $\xi_2 = 0.7$; $a_1 = 1$; $a_2 = 1.2$; $b_1 = b_2 = 10$; $z_0 = 0$; $\theta = 1.2$; $\theta_1 = 1.2$; $\theta_2 = 2.2$; $\lambda_1 = 0.3$; $\lambda_2 = 0.5$.

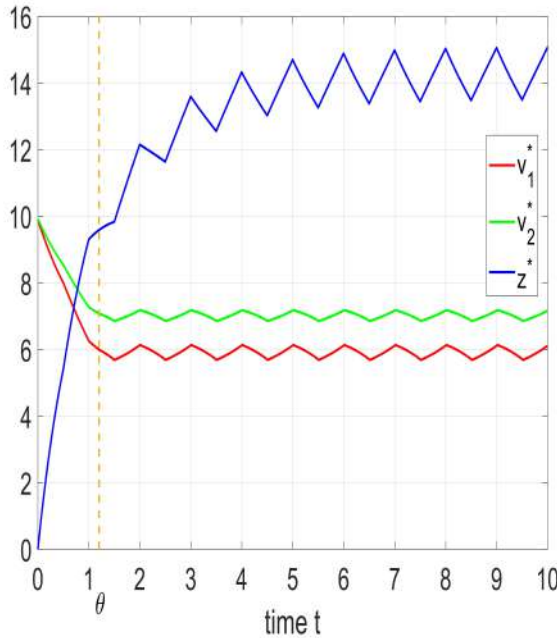
1.5.1 Решение для обычного оборудования

В случае обычного оборудования оптимальные управления, траектория состояния и соответствующий кооперативный выигрыш показаны на рисунке 1.11.

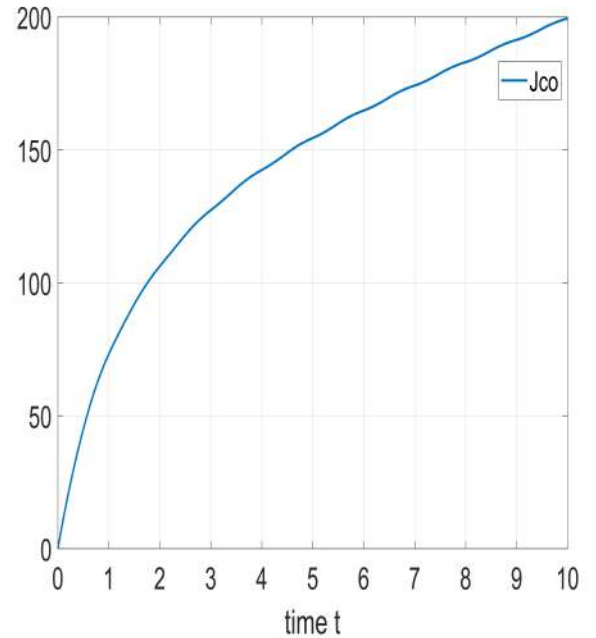
Решение показывает, что оптимальное управление каждого игрока после момента сдвига распределения $\theta = 1.2$ изменяется периодически. Далее запас загрязнения сходится к уникальному гибричному предельному циклу и стабилизируется. Кооперативный выигрыш возрастает.

В некоторых случаях, до момента времени θ , может существовать период

радикальных выбросов. Это может быть интерпретировано как более интенсивное использование оборудования игроками в период гарантии.



(а) Оптимальные выбросы и запасы загрязнений.



(б) Кооперативный выигрыш.

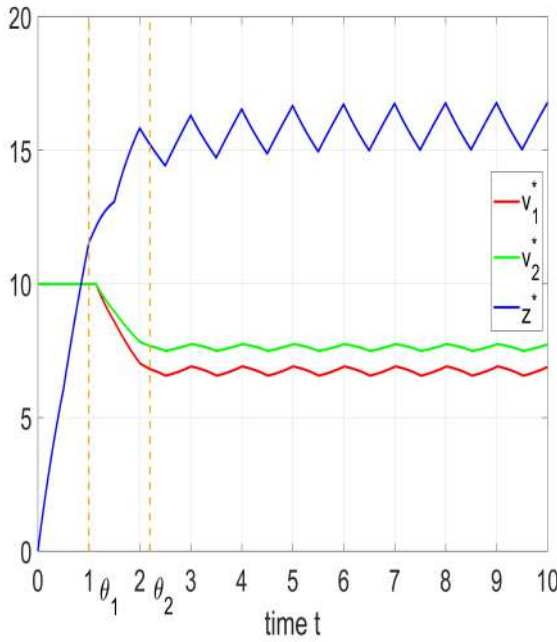
Рис. 1.11: Оптимальное решение и кооперативный выигрыш при смещенном экспоненциальном распределении.

1.5.2 Решение для различного оборудования

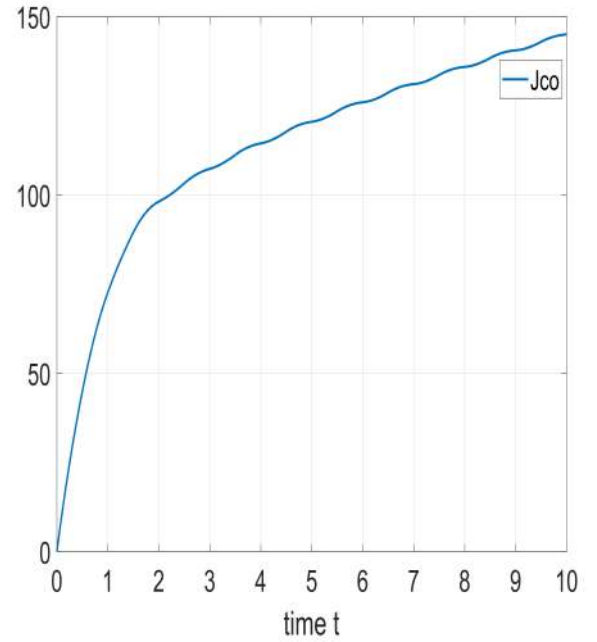
Оптимальные управления, траектория состояния и соответствующий кооперативный выигрыш в этом случае показаны на рисунке 1.12.

На рисунке 1.12 показано, что после истечения гарантийного срока каждого оборудования (θ_i) стратегия управления игрока i становится более консервативной, вероятно, из-за увеличения затрат на обслуживание или снижения эффективности оборудования.

После максимального гарантийного срока θ_2 стратегия управления каждого игрока переходит к периодическому решению в форме гибридного предельного цикла. Уровень загрязнения также сходится к уникальному гибридному предельному циклу и стабилизируется, при этом кооперативный выигрыш продолжает расти. Этот результат указывает на то, что предложенная в этой главе стратегия управления может сохранять прибыльность, даже если оборудование игроков является неоднородным, а коэффициент



(a) Оптимальные выбросы и запасы загрязнений.



(b) Кооперативный выигрыш.

Рис. 1.12: Оптимальное решение и кооперативный выигрыш с различными смещенными экспоненциальными распределениями.

самоочищения колеблется в зависимости от сезона ($\delta(t)$).

Для динамической переключающейся системы уровней загрязнения озера, рассмотренной в данной работе, на основе полученных результатов и с учетом случайной продолжительности процесса мы предложили, что в рамках кооперативной игры игроки могут принять стратегию производства, переходящую от агрессивной к консервативной (постепенно снижая выбросы) до достижения максимального гарантийного срока θ_2 . Эта стратегия достигает своего равновесного значения в θ_2 . Кроме того, после θ_2 игроки принимают стратегию производства, следующую шаблону ГПЦ (гибридного предельного цикла). Это включает в себя постепенное увеличение и последовательное уменьшение производства в периоды относительно высокого и низкого коэффициента самоочистки озера соответственно. Таким образом, данный подход обеспечивает достижение оптимально управляемого результата с точки зрения устойчивого развития.

Таким образом, с учетом реальных проблем, полученные результаты демонстрируют уникальность, теоретическую применимость и практическую значимость.

1.6 Заключение к Главе 1

В данной главе рассмотрена кооперативная дифференциальная игра для типичной задачи гибридного оптимального управления загрязнением, где динамика системы определяется двумя типами временных переключений: (1) сезонными колебаниями, представляющими коэффициент самоочистки озера, и (2) сдвигами в параметрах экспоненциальных распределений, возникающими из-за случайной продолжительности игры.

Мы преобразовали задачу со случайной продолжительностью в задачу гибридного оптимального управления, которая сочетает бесконечный горизонт с несколькими конечными горизонтами, что позволяет учитывать как долгосрочную оптимизацию, так и моделирование конкретных продолжительностей игры.

Сначала мы рассматриваем сценарий с однородными оборудованностями для игроков. Затем мы анализируем более сложный случай, когда оборудованностями являются неоднородными, что вызвано совместным распределением вероятностей из-за различий в оборудовании игроков, влияющих на динамику продолжительности игры. Эти два сценария анализируются подробно с акцентом на влияние случайной продолжительности игры на оптимальные стратегии управления. Результаты представлены как аналитически, так и с использованием явных решений там, где это возможно, а теоретические выводы подтверждены численными симуляциями.

Для каждого сценария определяется уникальное решение, устойчивое с экологической точки зрения, представленное гибридным предельным циклом. Это решение обеспечивает баланс между устойчивой доходностью производства и эффективной защитой окружающей среды, стабилизируя как экономические, так и экологические результаты с течением времени.

На следующем этапе исследования мы планируем сосредоточить внимание на изучении задачи оптимального управления для каждого игрока в некооперативной игре, включающей бесконечное количество временных переключений и случайную продолжительность игры. Затем мы сравним результаты некооперативной игры с результатами кооперативной игры, чтобы вывести обоснованное правило распределения общего выигрыша.

Глава 2

Кооперативный принцип оптимальности в проблеме управления загрязнением со сменами режимов и случайной продолжительностью

В данной главе, как и в предыдущей, рассматривается гибридная проблема управления выбросами загрязняющих веществ n игроками со случайной продолжительностью [100, 101]. Функционал выигрыша со случайной продолжительностью преобразуется в функционал выигрыша на бесконечном горизонте.

В предыдущей главе мы вычислили оптимальные стратегии для игроков для кооперативного сценария. Однако мы не рассматривали вопрос о том, как справедливо распределить общую сумму выплат между игроками. Эта глава посвящена построению такого распределения. Используемый метод также подразумевает построение некооперативного решения. Применяя принцип максимума Понтрягина и анализируя структуру сопряженной переменной, однозначно определяются устойчивые равновесия в кооперативных и некооперативных играх. Доказана сходимости соответствующей переменной состояния в кооперативных и некооперативных играх. Более того, определяется уникальная траектория состояния, представленная гибридным предельным циклом. Выигрыши игроков в кооперативных и некооперативных сценариях аналитически выводятся с использованием этого гибридного предельного цикла. В качестве кооперативного принципа оптимальности рассматривается вектор Шепли. Все результаты получены ана-

литически и подтверждены численным примером.

2.1 Постановка задачи

Мы рассматриваем задачу гибридного оптимального управления загрязнением на основе моделей теории игр [12, 67, 33, 100]. Как и в предыдущей главе, в этой игре участвуют n игроков (например, компании или страны), каждая из которых управляет стратегией выбросов в окружающую среду. Функции динамики и выигрыши игроков имеют ту же форму, что и в разделе 1.4.

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \sum_{i=1}^n \xi_i v_i(t) - \delta(t)z(t), \quad z(0) = z_0, \\ J_i(z_0, v_1, v_2, \dots, v_n) &= \int_0^\infty (1 - F(t))[a_i v_i(b_i - v_i/2) - q_i z] dt, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $z(t)$ — уровень загрязнения в момент времени t , а для $i = \overline{1, n}$, $v_i \in [0, b_i]$ обозначает скорость выбросов, b_i представляет максимальную скорость выбросов игрока i , а $\xi_i \in (0, 1)$ характеризует эффективность фильтрации загрязняющих веществ фильтром игрока i . Кроме того, уровень загрязнения является неотрицательной величиной. Скорость самоочищения $\delta(t) > 0$, заданная кусочно-постоянной функцией (как в предыдущей главе), периодически изменяется во времени. Составная функция распределения $F(t)$ для случайной продолжительности совпадает с функцией из 1.4.

2.2 Некооперативный сценарий

Сначала мы решаем задачу в некооперативном сценарии, где игроки не сотрудничают в отношении своих стратегий выбросов загрязнений, а вместо этого стремятся максимизировать свой индивидуальный выигрыш.

Обозначим $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Это приводит нас к поиску равновесия по Нэшу, где мы сталкиваемся со следующей задачей оптимального управле-

ния для игрока i :

$$J_i(z_0, v) = \int_0^{\theta_1} [a_i v_i (b_i - v_i/2) - q_i z] dt + \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{\lambda_1(\theta_1-t)} [a_i v_i (b_i - v_i/2) - q_i z] dt \\ + \dots + \int_{\theta_n}^{\infty} e^{\sum_{i=1}^n [\lambda_i(\theta_i-t)]} [a_i v_i (b_i - v_i/2) - q_i z] dt \rightarrow \max_{v_i}. \quad (2.2)$$

В этой многопериодной задаче оптимизации, с учетом динамики (2.1), мы сначала решаем подзадачу в последнем интервале $(\theta_n, \infty]$, а затем используем начальное значение последнего интервала для решения предыдущих интервалов $[0, \theta_1] \cup (\theta_1, \theta_2] \cup \dots \cup (\theta_{n-1}, \theta_n]$.

2.2.1 Последний интервал - $(\theta_n, \infty]$

Ожидаемый выигрыш игрока i в последнем интервале $(\theta_n, \infty]$ может быть получена следующим образом:

$$J_i^n(z(\theta_n), v_1, v_2, \dots, v_n) = \int_{\theta_n}^{\infty} e^{\sum_{i=1}^n [\lambda_i(\theta_i-t)]} [a_i v_i (b_i - v_i/2) - q_i z] dt. \quad (2.3)$$

Используя принцип максимума Понтрягина, гамильтониан выражается следующим образом:

$$H_i^n(t) = e^{\sum_{i=1}^n [\lambda_i(\theta_i-t)]} [a_i v_i (b_i - v_i/2) - q_i z] + \psi_i^n \left(\sum_{i=1}^n \xi_i v_i - \delta(t) z \right). \quad (2.4)$$

Таким образом, получается следующая каноническая система:

$$\dot{z} = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i - \delta(t) z, \\ \dot{\psi}_i^n = e^{\sum_{i=1}^n [\lambda_i(\theta_i-t)]} q_i + \delta(t) \psi_i^n. \quad (2.5)$$

Пусть $\tilde{\psi}_i^n = e^{-\sum_{i=1}^n [\lambda_i(\theta_i-t)]} \psi_i^n$, тогда

$$\dot{\tilde{\psi}}_i^n = q_i + (\delta(t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i) \tilde{\psi}_i^n. \quad (2.6)$$

Условие оптимальности первого порядка для гамильтониана приводит к

следующему равновесию по Нэшу для игрока i :

$$v_i^{NE} = \begin{cases} b_i, & \tilde{\psi}_i^n(t) > 0, \\ b_i + \frac{\xi_i}{a_i} \tilde{\psi}_i^n(t), & \tilde{\psi}_i^n(t) \in [-\frac{a_i b_i}{\xi_i}, 0], \\ 0, & \tilde{\psi}_i^n(t) < -\frac{a_i b_i}{\xi_i}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Вводим определение природо-устойчивой стратегии для некооперативного случая, аналогично Определению 1.2 для кооперативного случая.

Определение 2.1. *Управление v_i^{NE} игрока i является природо-устойчивым на интервале $(\theta_n, \infty]$, если оно не принимает граничных значений, за исключением отдельных моментов времени, то есть $\tilde{\psi}_i^n(t) \in [-\frac{a_i b_i}{\xi_i}, 0]$ для всех $t > 0$.*

Это определение, следуя серии исследований по устойчивому оптимальному управлению загрязнениями [37, 100], учитывает долгосрочные экономические выгоды и устойчивое развитие. В этом контексте стратегия каждого игрока гарантированно будет природо-устойчивой [30]. Эта стратегия включает устранение максимальных периодов производства ($v_i^{NE} = b_i$) и пауз производства ($v_i^{NE} = 0$), так как эти сценарии невозможны для устойчивого развития.

Следующая теорема и ее доказательство аналогичны результату, представленному на Теореме 1.1, однако условие для сопряженной переменной получено в некооперативном сценарии.

Теорема 2.1. *Решение для (3.7), удовлетворяющее $z(0) = z_0$ и $\tilde{\psi}_i^n(\theta_n) = \psi_i^{hlc}$, в котором*

$$\psi_i^{hlc} = \begin{cases} \bar{L}_i(1 - e^{p_2 T(\tau-1)})e^{p_1 m} - \frac{q_i}{p_1}, & m \in [0, \tau T], \\ \bar{L}_i(1 - e^{p_1 \tau T})e^{p_2(m-T)} - \frac{q_i}{p_2}, & m \in [\tau T, T], \end{cases} \quad (2.8)$$

где $\lambda_N = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, $p_1 = \delta_1 + \lambda_N$, $p_2 = \delta_2 + \lambda_N$, $m = \theta_n - \lfloor \frac{\theta_n}{T} \rfloor T$, $\bar{L}_i = \frac{q_i(p_1 - p_2)}{p_1 p_2 (e^{p_2 T(\tau-1)} - e^{p_1 \tau T})}$, является уникальным периодическим решением для (2.3).

Доказательство. Уникальное периодическое решение получается путем решения следующего уравнения:

$$\tilde{\psi}_i^n(\theta_n) = \tilde{\psi}_i^n(\theta_n + T). \quad (2.9)$$

Пусть $k_1 = \lfloor \frac{\theta_n}{T} \rfloor$, тогда $\theta_n \in [k_1 T, (k_1 + 1)T]$. В интервале $[k_1 T, (k_1 + 1)T]$ решение для (2.6) имеет следующий вид,

$$\tilde{\psi}_i^n(t) = \begin{cases} c_1 e^{p_1 t} - \frac{q_i}{p_1}, & t \in [k_1 T, k_1 T + \tau T], \\ c_2 e^{p_2 t} - \frac{q_i}{p_2}, & t \in [k_1 T + \tau T, (k_1 + 1)T]. \end{cases}$$

Если $\theta_n \in [k_1 T, k_1 T + \tau T]$, то есть, $m \in [0, \tau T]$, тогда $\tilde{\psi}_i^n(\theta_n) = c_1 e^{p_1 \theta_n} - \frac{q_i}{p_1}$. Решив (2.9), получаем

$$\tilde{\psi}_i^n(\theta_n) = \bar{L}_i (1 - e^{p_2 T(\tau-1)}) e^{p_1 m} - \frac{q_i}{p_1}.$$

Если $\theta_n \in [k_1 T + \tau T, (k_1 + 1)T]$, то есть, $m \in [\tau T, T]$, тогда $\tilde{\psi}_i^n(\theta_n) = c_2 e^{p_2 \theta_n} - \frac{q_i}{p_2}$. Решив (2.9), получаем

$$\tilde{\psi}_i^n(\theta_n) = \bar{L}_i (1 - e^{p_1 \tau T}) e^{p_2(m-T)} - \frac{q_i}{p_2}.$$

Таким образом, решение для (2.6), удовлетворяющее $\psi_i^n(\theta_n) = \tilde{\psi}_i^n(\theta_n) = \psi_i^{hlc}$, представлено следующим образом:

$$\tilde{\psi}_i^n(t) = \begin{cases} \left(\psi_i^{hlc} + \frac{q_i}{p_1} \right) e^{p_1(t-\theta_n)} - \frac{q_i}{p_1}, & t \in [\theta_n, (k_1 + \tau)T], \\ \left(\psi_i^{hlc} + \frac{q_i}{p_1} \right) e^{p_1(t-kT-\theta_n)} - \frac{q_i}{p_1}, & t \in [(k_1 + k)T, (k_1 + k + \tau)T], \quad k \in \mathbb{N}_+, \\ \left(\left(\psi_i^{hlc} + \frac{q_i}{p_1} \right) e^{p_1((k_1+\tau)T-\theta_n)} - \frac{q_i}{p_1} + \frac{q_i}{p_2} \right) e^{p_2(t-(k_1+\tau)T-kT)} - \frac{q_i}{p_2}, \\ t \in [(k_1 + \tau + k)T, (k_1 + 1 + k)T], \quad k \in \mathbb{N}_0, \end{cases} \quad (2.10)$$

Если $\theta_n \in [k_1 T, k_1 T + \tau T]$, и

$$\tilde{\psi}_i^n(t) = \begin{cases} \left(\psi_i^{hlc} + \frac{q_i}{p_2} \right) e^{p_2(t-\theta_n)} - \frac{q_i}{p_2}, & t \in [\theta_n, (k_1 + 1)T], \\ \left(\psi_i^{hlc} + \frac{q_i}{p_2} \right) e^{p_2(t-kT-\theta_n)} - \frac{q_i}{p_2}, & t \in [(k_1 + k + \tau)T, (k_1 + k + 1)T], \quad k \in \mathbb{N}_+, \\ \left(\left(\psi_i^{hlc} + \frac{q_i}{p_2} \right) e^{p_2((k_1+1)T-\theta_n)} - \frac{q_i}{p_2} + \frac{q_i}{p_1} \right) e^{p_1(t-(k_1+1)T-kT)} - \frac{q_i}{p_1}, \\ t \in [(k_1 + k)T, (k_1 + \tau + k)T], \quad k \in \mathbb{N}_0, \end{cases} \quad (2.11)$$

Если $\theta_n \in [k_1 T + \tau T, (k_1 + 1)T]$.

Заметим, что $\tilde{\psi}_i^n(t) = \tilde{\psi}_i^n(t+kT)$ и $\tilde{\psi}_i^n(t) \in [\min(-\frac{q_i}{p_1}, -\frac{q_i}{p_2}), \max(-\frac{q_i}{p_1}, -\frac{q_i}{p_2})]$; следовательно, $\tilde{\psi}_i^n(t)$ удовлетворяет периодичности и ограниченности.

Обозначим траекторию равновесия по Нэшу как $z^{NE}(t)$. Условие трансверсальности выполняется согласно ограниченности $\tilde{\psi}^n_i(t)$ и состояния $z(t)$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf e^{\sum_{i=1}^n [\lambda_i(\theta_i - t)]} \tilde{\psi}^n_i(t)(z(t) - z^{NE}(t)) \geq 0 \quad (2.12)$$

для любого допустимого решения $z(t)$.

Наблюдая, что гамильтониан является вогнутым относительно $z(t)$ и строго вогнутым относительно v_i , можно заключить, что v_i^{NE} является единственным равновесием по Нэшу в рассматриваемом классе стратегий для игрока i .

Это завершает доказательство. □

Лемма 2.1. Если $\tilde{\psi}^n_i(\theta_n) \neq \psi_i^{hlc}$, то $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{\psi}^n_i(t)| = \infty$.

Доказательство. Когда $\tilde{\psi}^n_i(\theta_n)$ отклоняется от начального значения равновесия ψ_i^{hlc} , пусть $\tilde{\psi}^n_i(\theta_n) = \psi_i^{hlc} + c$. Тогда, начиная с θ_n , отклонение между соседними периодами рассчитывается следующим образом:

$$\tilde{\psi}^n_i(\theta_n + kT) - \tilde{\psi}^n_i(\theta_n + (k-1)T) = ce^{kT(p_2(1-\tau)+p_1\tau)}.$$

Для $k \in \mathbb{N}_+$ и $kT(p_2(1-\tau)+p_1\tau) > 0$, разность $ce^{kT(p_2(1-\tau)+p_1\tau)}$ изменяется монотонно с увеличением k . Отметим, что значение $\tilde{\psi}^n_i(t)$ расходится с течением времени. Таким образом, когда $t \rightarrow +\infty$, если $c > 0$, $\tilde{\psi}^n_i(t)$ стремится к $+\infty$, и если $c < 0$, $\tilde{\psi}^n_i(t)$ стремится к $-\infty$. □

В соответствии с выполнением условия $\tilde{\psi}^n_i(t) \in [\min(-\frac{q_i}{p_1}, -\frac{q_i}{p_2}), \max(-\frac{q_i}{p_1}, -\frac{q_i}{p_2})]$, природо-устойчивость v_i^{NE} в интервале $(\theta_n, \infty]$ гарантируется, если $\min(p_1, p_2) \geq \frac{\xi_i q_i}{a_i b_i}$. Кроме того, в данной главе предполагается, что это условие параметра выполняется для всех $i = \overline{1, n}$.

2.2.2 Предыдущие интервалы - $[0, \theta_1] \cup (\theta_1, \theta_2] \cup \dots \cup (\theta_{n-1}, \theta_n]$.

Поскольку $\tilde{\psi}^n_i(\theta_n) = \psi_i^{hlc}$ определяется уникально, сопряженная переменная игрока i в предыдущих интервалах также может быть определена единственным образом.

Функционал выигрыша для игрока i в $(j+1)$ -м интервале, $j = \overline{1, n-1}$, имеет вид:

$$J_i^j(z(\theta_j), v_1, v_2, \dots, v_n) = \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} e^{\sum_{i=1}^j [\lambda_i(\theta_i-t)]} [a_i v_i (b_i - v_i/2) - q_i z] dt. \quad (2.13)$$

Гамильтониан выводится следующим образом:

$$H_i^j(t) = e^{\sum_{i=1}^j [\lambda_i(\theta_i-t)]} [a_i v_i (b_i - v_i/2) - q_i z] + \psi_i^j \left(\sum_{i=1}^n \xi_i v_i - \delta(t) z \right). \quad (2.14)$$

Кроме того, $\psi_i^j(t)$ регулируется следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{\psi}_i^j = e^{\sum_{i=1}^j [\lambda_i(\theta_i-t)]} q_i + \delta(t) \psi_i^j. \quad (2.15)$$

Пусть $\tilde{\psi}_i^j = e^{-\sum_{i=1}^j [\lambda_i(\theta_i-t)]} \psi_i^j$, тогда вышеуказанное уравнение можно переписать следующим образом:

$$\dot{\tilde{\psi}}_i^j = q_i + (\delta(t) + \sum_{i=1}^j \lambda_i) \tilde{\psi}_i^j, \quad \tilde{\psi}_i^j(\theta_{j+1}) = \tilde{\psi}_i^{j+1}(\theta_{j+1}).$$

Для $t \in [0, \theta_1]$ имеем $\dot{\psi}_i^0(t) = q_i + \delta(t) \psi_i^0(t)$, $\psi_i^0(\theta_1) = \tilde{\psi}_i^1(\theta_1)$.

В соответствии с условием непрерывности для оптимального управления в гибридных дифференциальных играх с временными переключениями [34], условие непрерывности сопряженной переменной $\tilde{\psi}_i^j(\theta_{j+1}) = \tilde{\psi}_i^{j+1}(\theta_{j+1})$ должно быть выполнено. Эта связь поддерживается временной зависимостью моментов переключений (то есть переключения являются неавтономными (управляемыми) или временно управляемыми).

Общая некооперативная сопряженная переменная следующая:

$$\tilde{\psi}_i^{NE}(t) = \begin{cases} \psi_i^0(t), & t \in [0, \theta_1], \\ \tilde{\psi}_i^1(t), & t \in [\theta_1, \theta_2], \\ \dots \\ \tilde{\psi}_i^j(t), & t \in [\theta_j, \theta_{j+1}], \\ \dots \\ \tilde{\psi}_i^n(t), & t > \theta_n. \end{cases} \quad (2.16)$$

Следовательно, если v_i^{NE} является экологически устойчивым в каждом интервале, стратегия равновесия по Нэшу для игрока i определяется следующим образом:

$$v_i^{NE} = \begin{cases} b_i + \frac{\xi_i}{a_i} \psi_i^0(t), & t \in [0, \theta_1], \\ b_i + \frac{\xi_i}{a_i} \tilde{\psi}_i^1(t), & t \in [\theta_1, \theta_2], \\ \dots & \\ b_i + \frac{\xi_i}{a_i} \tilde{\psi}_i^j(t), & t \in [\theta_j, \theta_{j+1}], \\ \dots & \\ b_i + \frac{\xi_i}{a_i} \tilde{\psi}_i^n(t), & t > \theta_n. \end{cases} \quad (2.17)$$

2.3 Динамика переменной состояния

Исходя из природо-устойчивых управлений, полученных в некооперативных и кооперативных сценариях, далее исследуется динамика переменной состояния. Идея доказательства следующей теоремы основывается на [37].

Теорема 2.2. *В кооперативном сценарии, для любого $z(0) = z_0$, переменная состояния $z^{co}(t)$, управляемая $\{v_i^{co}\}_1^n$, асимптотически сходится к уникально определенному гибридному предельному циклу $\bar{z}(t)$, когда $t \rightarrow \infty$.*

Доказательство. Заметим, что как только равновесное значение переменной сопряженной переменной в момент θ_n в обоих сценариях может быть уникально определено, траектории сопряженной переменной и оптимального управления также могут быть уникально определены в предыдущих интервалах: $[0, \theta_1] \cup (\theta_1, \theta_2] \cup \dots \cup (\theta_{n-1}, \theta_n]$.

Таким образом, необходимо учитывать только динамику оптимального состояния в последнем интервале $t \in (\theta_n, \infty]$, где $z^{co}(\theta_n) = z_{\theta_n}$, которое напрямую зависит от z_0 .

Дифференциальное уравнение для оптимального состояния в кооперативном сценарии выглядит следующим образом:

$$\dot{z}^{co}(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i^{co} - \delta(t) z^{co}, \quad z^{co}(\theta_n) = z_{\theta_n}, \quad (2.18)$$

где кооперативная стратегия v_i^{co} уникально определяется в предыдущем разделе.

Общее решение вышеуказанной задачи начального значения (2.18) получается следующим образом:

$$\phi(t, z_{\theta_n}) = z_{\theta_n} e^{-\int_{\theta_n}^t \delta(s) ds} + e^{-\int_{\theta_n}^t \delta(s) ds} \int_{\theta_n}^t \sum_{i=1}^n \xi_i v_i^{co}(\tau) e^{\int_{\theta_n}^{\tau} \delta(s) ds} d\tau. \quad (2.19)$$

Сначала подтверждается существование $\bar{z}(t)$, которое является периодическим решением для следующего уравнения:

$$\dot{z}(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i^{co} - \delta(t)z. \quad (2.20)$$

Далее, $\bar{z}_{hlc}$ является начальными условиями для такого решения, если оно существует (т.е. $\bar{z}(\theta_n) = \bar{z}_{hlc}$).

Поскольку $z(t)$ ограничено, следует отметить, что $\phi(\theta_n + T, \bar{z}_{hlc})$ является отображением из компактного множества X в X . Используя теорему о неподвижной точке Брауэра, существует точка $\bar{z}_{hlc}$, такая что $\phi(\theta_n + T, \bar{z}_{hlc}) = \bar{z}_{hlc}$. Учитывая периодичность v_i^{co} и $\delta(t)$, получаем $\phi(\theta_n, \bar{z}_{hlc}) = \phi(\theta_n + kT, \bar{z}_{hlc})$, $k \in \mathbb{N}_0$. Таким образом, решение $\bar{z}(t)$ уравнения (2.20) с начальными условиями $\bar{z}(\theta_n) = \bar{z}_{hlc}$ является периодическим.

Далее, данное исследование доказывает уникальность такого решения. Если существует другое начальное значение z'_{hlc} , такое что $\phi(\theta_n + T, z'_{hlc}) = z'_{hlc}$, то

$$0 \leq |z'_{hlc} - \bar{z}_{hlc}| = |\phi(\theta_n + T, z'_{hlc}) - \phi(\theta_n + T, \bar{z}_{hlc})| = |z'_{hlc} - \bar{z}_{hlc}| e^{-\int_{\theta_n}^{\theta_n+T} \delta(s) ds} \leq |z'_{hlc} - \bar{z}_{hlc}| e^{-\delta_{min}T}.$$

Здесь, $\delta_{min} = \min(\delta_1, \delta_2)$. Таким образом, $0 \leq |z'_{hlc} - \bar{z}_{hlc}|(1 - e^{-\delta_{min}T}) \leq 0$.

Следовательно, $z'_{hlc} = \bar{z}_{hlc}$.

Сходимость:

Поскольку $v_i^{co}(\tau)$ не зависит от начального значения z_{θ_n} , для любых различных начальных значений z_{θ_n} , мы получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\phi(t, z_{\theta_n}) - \phi(t, \bar{z}_{hlc})| = \lim_{t \rightarrow \infty} |z_{\theta_n} - \bar{z}_{hlc}| e^{-\int_{\theta_n}^t \delta(s) ds} = 0.$$

Таким образом, доказательство завершено. $\square$

В некооперативном сценарии, $v_i^{NE}(\tau)$ также не зависит от начального значения z_{θ_n} . Следовательно, сходимость и уникальность его гибридного предельного цикла $\bar{z}^{NE}(t)$ могут быть доказаны тем же способом.

Теорема 2.3. В некооперативном сценарии, для любого $z(0) = z_0$, переменная состояния $z^{NE}(t)$, управляемая $\{v_i^{NE}\}_1^n$, асимптотически сходится к уникально определенному гибридному предельному циклу $\bar{z}^{NE}(t)$, когда $t \rightarrow \infty$.

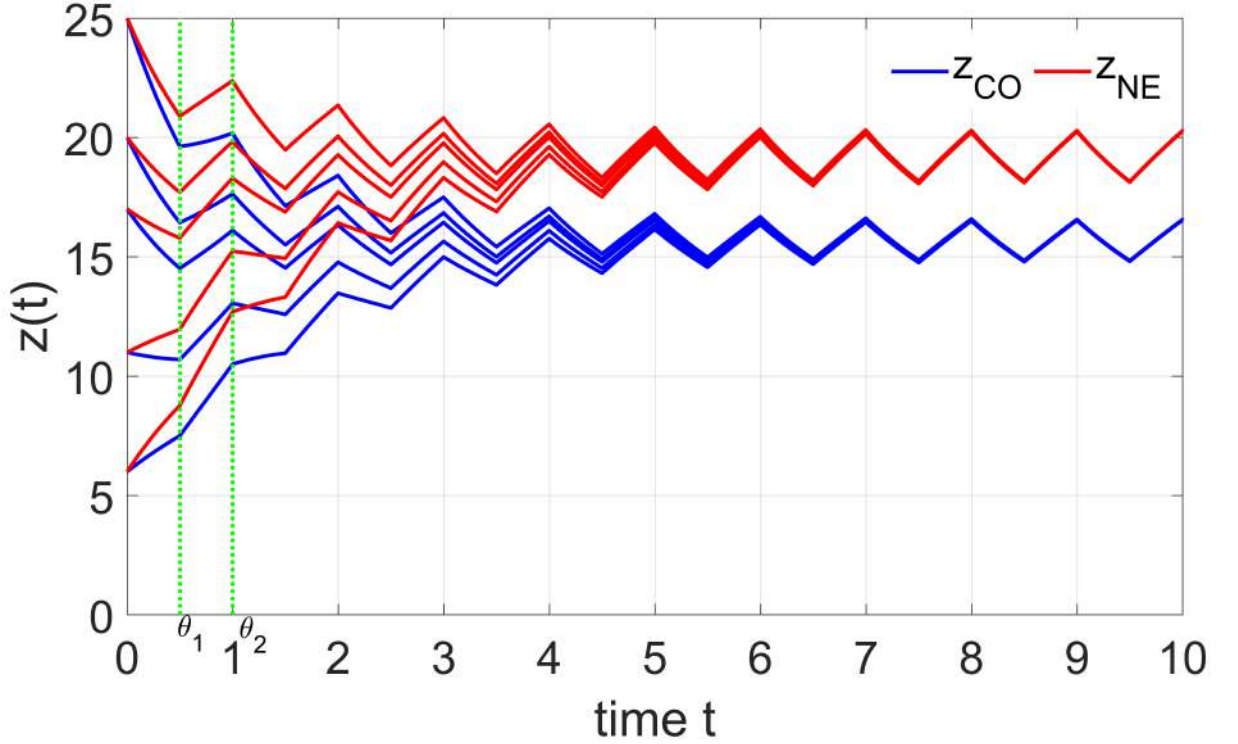


Рис. 2.1: Динамика $z^{co}(t)$ и $z^{NE}(t)$ с различными начальными значениями.

Динамика траекторий состояния в некооперативных и кооперативных случаях с различными начальными значениями изображена на рисунке 2.1, который иллюстрирует теоремы 2.2, 2.3.

2.4 Кооперативное решение

Вектор Шепли применяется как однозначное решение для распределения совместного кооперативного выигрыша всех игроков. Этот подход приводит к соглашению, в рамках которого игроки гарантированно получают более высокие выплаты, чем они получили бы, играя в одиночку. Таким образом, игроки предпочитают сотрудничать в рамках большой коалиции.

Для математической наглядности мы используем дифференциальную игру с двумя игроками в качестве примера. Решение этой дифференциальной

игры может быть расширено на любое конечное число игроков, но вычислительная сложность увеличивается с ростом числа игроков.

Когда сдвинутые параметры $\{\theta_i\}_1^2$ принимают различные значения, конечно-временной выигрыш на интервале $[0, \theta_2]$ вычисляется и комбинируется с выигрышем на последнем бесконечном временном горизонте $(\theta_2, +\infty]$, чтобы получить выигрыш на всем временном интервале. Таким образом, без потери общности, положим $\theta_1 = \tau T, \theta_2 = T$ для демонстрации аналитического кооперативного решения.

2.4.1 Выигрыш в кооперативном сценарии

В кооперативном сценарии все игроки подчиняются соглашению о том, что в начале игры они сотрудничают, чтобы максимизировать общую совместную прибыль. Мы находим совместное решение для всех игроков. Это решение предоставляет эталон для сравнения с результатами, полученными без сотрудничества. Оптимальные управления в кооперативном сценарии приведены в главе 1.4.

Сначала мы вычисляем выигрыш игрока i на интервале $(\theta_2, \infty]$. Как начальное равновесное значение, $\tilde{\psi}^2(\theta_2) = \psi_N^{hlc}$ может быть однозначно определено из (1.51). Мы имеем

$$\tilde{\psi}^{co}(t) = \begin{cases} c_{11}e^{\delta_1 t} - \frac{q}{\delta_1}, & t \in [0, \tau T], \\ c_{12}e^{r_2 t} - \frac{q}{r_2}, & t \in [\tau T, T], \\ c_1 e^{p_1(t-(k+1)T)} - \frac{q}{p_1}, & t \in [(k+1)T, (k+1+\tau)T], \\ c_2 e^{p_2(t-(k+1)T)} - \frac{q}{p_2}, & t \in [(k+1+\tau)T, (k+2)T], \end{cases} \quad (2.21)$$

где $r_2 = \delta_2 + \lambda_1$, $c_1 = \psi_N^{hlc} + \frac{q}{p_1}$, $c_2 = e^{-p_2 T}(\psi_N^{hlc} + \frac{q}{p_2})$, $c_{12} = e^{-r_2 T}(\psi_N^{hlc} + \frac{q}{r_2})$, $c_{11} = e^{-\delta_1 \tau T}(c_{12}e^{r_2 \tau T} - \frac{q}{r_2} + \frac{q}{\delta_1})$.

Подставляя (2.21) в (2.18), можно вывести оптимальное состояние $z^{co}(t)$ следующим образом:

$$z^{co}(t) = \begin{cases} g_{11} + d_{11}e^{\delta_1 t} + e^{-\delta_1 t}c_{z_{11}}, & t \in [0, \tau T], \\ g_{12} + d_{12}e^{r_2 t} + e^{-\delta_2 t}c_{z_{12}}, & t \in [\tau T, T], \\ g_1 + d_1e^{p_1(t-(k+1)T)} + e^{-\delta_1(t-(k+1)T)}c_{z_1}, & t \in [(k+1)T, (k+1+\tau)T], \\ g_2 + d_2e^{p_2(t-(k+1)T)} + e^{-\delta_2(t-(k+1)T)}c_{z_2}, & t \in [(k+1+\tau)T, (k+2)T], \end{cases} \quad (2.22)$$

где

$$g_{11} = \sum_{i=1}^2 \frac{\xi_i}{\delta_1} (b_i - \frac{\xi_i q}{a_i \delta_1}), g_{12} = \sum_{i=1}^2 \frac{\xi_i}{\delta_2} (b_i - \frac{\xi_i q}{a_i r_2}),$$

$$d_{11} = \sum_{i=1}^2 \frac{\xi_i^2}{a_i} \frac{c_{11}}{2\delta_1}, d_{12} = \sum_{i=1}^2 \frac{\xi_i^2}{a_i} \frac{c_{12}}{r_2 + \delta_2},$$

$$g_1 = \sum_{i=1}^2 \frac{\xi_i}{\delta_1} (b_i - \frac{\xi_i q}{a_i p_1}), g_2 = \sum_{i=1}^2 \frac{\xi_i}{\delta_2} (b_i - \frac{\xi_i q}{a_i p_2}),$$

$$d_1 = \sum_{i=1}^2 \frac{\xi_i^2}{a_i} \frac{c_1}{p_1 + \delta_1}, d_2 = \sum_{i=1}^2 \frac{\xi_i^2}{a_i} \frac{c_2}{p_2 + \delta_2},$$

$$c_{z_{11}} = z_0 - g_{11} - d_{11}, c_{z_{12}} = e^{\delta_2 \tau T} (g_{11} - g_{12} + d_{11}e^{\delta_1 \tau T} - d_{12}e^{r_2 \tau T} + e^{-\delta_1 \tau T}c_{z_{11}})$$

Рассмотрим однозначно определённый гибридный предельный цикл $\bar{z}(t)$, описанный в Теореме 2.2. Из условия $\bar{z}(\theta_n) = \bar{z}(\theta_n + T)$ получаем:

$$\bar{z}_{hlc} = g_2 + d_2 e^{p_2 T} + \frac{(1 - e^{-\delta_1 \tau T})(g_1 - g_2) + d_1(e^{p_1 \tau T} - e^{-\delta_1 \tau T}) + d_2(e^{p_2 T - \delta_1 \tau T} - e^{p_2 \tau T})}{e^{\delta_2(1-\tau)T} - e^{-\delta_1 \tau T}}.$$

Используя $\bar{z}_{hlc}$ в качестве начального значения, $\bar{z}(t)$ определяется как решение уравнения (2.20). Для упрощения периодическая функция $\bar{z}(t)$, начинающаяся с момента 0, задаётся следующим образом:

$$\bar{z}(t) = \begin{cases} g_1 + d_1 e^{p_1(t-kT)} + e^{-\delta_1(t-kT)}(\bar{z}_{hlc} - g_1 - d_1), & t \in [kT, kT + \tau T], \\ g_2 + d_2 e^{p_2(t-kT)} + e^{\delta_2(T-(t-kT))}(\bar{z}_{hlc} - g_2 - d_2 e^{p_2 T}), & t \in [kT + \tau T, (k+1)T]. \end{cases} \quad (2.23)$$

Дополнительно определяются периодические функции $\bar{v}_i^{co}(t) = v_i^{co}(t + \theta_2)$ для $t \in [0, \infty)$.

Вычисление кооперативного выигрыша $J_{co}(z_0, v_1^{co}, v_2^{co})$ представлено следующим образом.

Для вычисления полного кооперативного выигрыша $J_{co}(z_0, v_1^{co}, v_2^{co})$ сначала рассмотрим:

$$J_{co}^2(\bar{z}_{hlc}, v_1^{co}, v_2^{co}) = \sum_{i=1}^2 \int_{\theta_n}^{\infty} e^{\sum_{i=1}^2 [\lambda_i(\theta_i - t)]} [a_i v_i^{co}(b_i - v_i^{co}/2) - q_i \bar{z}].$$

Легко заметить, что мгновенный выигрыш $\bar{f}_i = a_i v_i^{co}(b_i - \frac{v_i^{co}}{2}) - q_i \bar{z}$ является периодической функцией. Таким образом,

$$J_{co}^2(\bar{z}_{hlc}, v_1^{co}, v_2^{co}) = \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} e^{-\alpha \lambda T}\right) \sum_{i=1}^2 \int_{\theta_2}^{\theta_2+T} e^{\sum_{i=1}^2 \lambda_i(\theta_i - t)} [a_i v_i^{co}(b_i - \frac{v_i^{co}}{2}) - q_i \bar{z}] dt =$$

$$\frac{e^{\lambda T}}{e^{\lambda T} - 1} \sum_{i=1}^2 \int_{\theta_2}^{\theta_2+T} e^{\sum_{i=1}^2 \lambda_i(\theta_i - t)} [a_i v_i^{co}(b_i - \frac{v_i^{co}}{2}) - q_i \bar{z}] dt, \text{ где}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \int_{\theta_2}^{\theta_2+T} e^{\sum_{i=1}^2 \lambda_i(\theta_i - t)} [a_i v_i^{co}(b_i - \frac{v_i^{co}}{2}) - q_i \bar{z}] dt \\ &= e^{\lambda_1(\theta_1 - \theta_2)} \sum_{i=1}^2 \int_0^T e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} [a_i \bar{v}_i^{co}(b_i - \frac{\bar{v}_i^{co}}{2}) - q_i \bar{z}] dt \\ &= e^{\lambda_1(\tau - 1)T} \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{a_i b_i^2}{2} - g_1 q_i - \frac{q^2 \xi_i^2}{2a_i p_1^2} \right) \frac{1 - e^{-\lambda \tau T}}{\lambda} + \left(\frac{c_1 q \xi_i^2}{a_i p_1} - d_1 q_i \right) \frac{-1 + e^{\delta_1 \tau T}}{\delta_1} \right. \\ & \quad - \frac{c_1^2 \xi_i^2}{2a_i} \frac{-1 + e^{(2p_1 - \lambda)\tau T}}{2p_1 - \lambda} + q_i (d_1 + g_1 - \bar{z}_{hlc}) \frac{1 - e^{-p_1 \tau T}}{p_1} \\ & \quad + \left(\frac{a_i b_i^2}{2} - g_2 q_i - \frac{q^2 \xi_i^2}{2a_i p_2^2} \right) \frac{e^{-\lambda \tau T} - e^{-\lambda T}}{\lambda} + \left(\frac{c_2 q \xi_i^2}{a_i p_2} - d_2 q_i \right) \frac{e^{\delta_2 T} - e^{\delta_2 \tau T}}{\delta_2} \\ & \quad \left. - \frac{c_2^2 \xi_i^2}{2a_i} \frac{e^{(2p_2 - \lambda)T} - e^{(2p_2 - \lambda)\tau T}}{2p_2 - \lambda} + q_i e^{\delta_2 T} (d_2 e^{p_2 T} + g_2 - \bar{z}_{hlc}) \frac{e^{-p_2 \tau T} - e^{-p_2}}{p_2} \right], \end{aligned} \quad (2.24)$$

здесь $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

В соответствии с периодичностью оптимального управления $\bar{v}_{co}^i$ и $\bar{z}(t)$, а также с Теоремой 2.2, можно эффективно вычислить $J_{co}^2(z_0, v_1^{co}, v_2^{co})$ с использованием $\bar{z}(t)$.

Затем совместный выигрыш на интервале $[\theta_2, \infty]$ вычисляется следую-

щим образом:

$$\begin{aligned}
& J_{co}^2(z_0, v_1^{co}, v_2^{co}) \\
&= \sum_{i=1}^2 \int_{\theta_2}^{+\infty} e^{\sum_{i=1}^2 \lambda_i(\theta_i - t)} [a_i v_i^{co} (b_i - \frac{v_i^{co}}{2}) - q_i z^{co}] dt \\
&= e^{\lambda_1 \theta_1 + \lambda_2 \theta_2} \sum_{i=1}^2 \int_{\theta_2}^{+\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} [a_i v_i^{co} (b_i - \frac{v_i^{co}}{2}) - q_i (\bar{z} + \phi(t, z^{co}(\theta_2)) - \phi(t, \bar{z}_{hlc}))] dt \\
&= J_{co}^2(\bar{z}_{hlc}, v_1^{co}, v_2^{co}) - e^{\lambda_1 \theta_1 + \lambda_2 \theta_2} \sum_{i=1}^2 q_i \int_{\theta_2}^{+\infty} e^{-\lambda t} [(z^{co}(\theta_2) - \bar{z}_{hlc}) e^{-\int_{\theta_2}^t \delta(s) ds}] dt \\
&= J_{co}^2(\bar{z}_{hlc}, v_1^{co}, v_2^{co}) - e^{\lambda_1 \theta_1 + \lambda_2 \theta_2} \sum_{i=1}^2 q_i (z^{co}(\theta_2) - \bar{z}_{hlc}) \int_{\theta_2}^{+\infty} e^{-\lambda t - \int_{\theta_2}^t \delta(s) ds} dt \\
&= J_{co}^2(\bar{z}_{hlc}, v_1^{co}, v_2^{co}) - \\
&e^{\lambda_1 \theta_1 + \lambda_2 \theta_2} \sum_{i=1}^2 q_i (z^{co}(\theta_2) - \bar{z}_{hlc}) \left(\frac{e^{p_1 \tau + p_2 (1-\tau)T}}{e^{p_1 \tau + p_2 (1-\tau)T} - 1} \right) \int_{\theta_2}^{\theta_2 + T} e^{-\lambda t - \int_{\theta_2}^t \delta(s) ds} dt \\
&= J_{co}^2(\bar{z}_{hlc}, v_1^{co}, v_2^{co}) - e^{\lambda_1 (\tau-1)T} q (z^{co}(\theta_2) - \bar{z}_{hlc}) \left(\frac{e^{p_1 \tau + p_2 (1-\tau)T}}{e^{p_1 \tau + p_2 (1-\tau)T} - 1} \right) \\
&\left(\frac{1 - e^{-p_1 \tau T}}{p_1} - \frac{e^{(p_2 - p_1) \tau T} (e^{-p_2 T} - e^{-p_2 \tau T})}{p_2} \right),
\end{aligned} \tag{2.25}$$

where $z^{co}(\theta_2) = z^{co}(T) = g_{12} + d_{12}e^{p_2 T} + e^{\delta_2(\tau-1)T} [g_{11} - g_{12} + d_{11}e^{\delta_1 \tau T} - d_{12}e^{p_2 \tau T} + e^{-\delta_1 \tau T} (z_0 - g_{11} - d_{11})]$, $q = q_1 + q_2$.

Следовательно, получаем

$$\begin{aligned}
& J_{co}(z_0, v_1^{co}, v_2^{co}) = \\
& \sum_{i=1}^2 \left(\int_0^{\tau T} [a_i v_i^{co} (b_i - \frac{v_i^{co}}{2}) - q_i z^{co}] dt + \int_{\tau T}^T e^{\lambda_1(\tau T - t)} [a_i v_i^{co} (b_i - \frac{v_i^{co}}{2}) - q_i z^{co}] dt \right) \\
& + J_{co}^2(z_0, v_1^{co}, v_2^{co}) \\
& = \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{a_i b_i^2}{2} - g_{11} q_i - \frac{q^2 \xi_i^2}{2a_i \delta_1^2} \right) \tau T + \left(\frac{c_{11} q \xi_i^2}{a_i \delta_1} - d_{11} q_i \right) \frac{-1 + e^{\delta_1 \tau T}}{\delta_1} - \frac{c_{11}^2 \xi_i^2}{2a_i} \frac{-1 + e^{2\delta_1 \tau T}}{2\delta_1} \right. \\
& + c_{z11} q_i \frac{-1 + e^{-\delta_1 \tau T}}{\delta_1} - \left(\frac{a_i b_i^2}{2} - g_{12} q_i - \frac{q^2 \xi_i^2}{2a_i r_2^2} \right) \frac{(-1 + e^{\lambda_1(-T + \tau T)})}{\lambda_1} \\
& - \left(\frac{c_{12} q \xi_i^2}{a_i r_2} - d_{12} q_i \right) \frac{e^{r_2 \tau T} - e^{\delta_2 T + \lambda_1 \tau T}}{\delta_2} + \frac{c_{12}^2 \xi_i^2}{2a_i} \frac{e^{\lambda_1 \tau T} (e^{T(2r_2 - \lambda_1)} - e^{(2r_2 - \lambda_1) \tau T})}{-2r_2 + \lambda_1} \\
& \left. - c_{z12} q_i \frac{e^{-\delta_2 \tau T} - e^{-T r_2 + \lambda_1 \tau T}}{r_2} \right] + \frac{e^{\lambda_2 T + \lambda_1 \tau T}}{e^{\lambda T} - 1} \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{a_i b_i^2}{2} - g_1 q_i - \frac{q^2 \xi_i^2}{2a_i p_1^2} \right) \frac{1 - e^{-\lambda \tau T}}{\lambda} \right. \\
& + \left(\frac{c_1 q \xi_i^2}{a_i p_1} - d_1 q_i \right) \frac{-1 + e^{\delta_1 \tau T}}{\delta_1} - \frac{c_1^2 \xi_i^2}{2a_i} \frac{-1 + e^{(2p_1 - \lambda) \tau T}}{2p_1 - \lambda} + q_i (d_1 + g_1 - \bar{z}_{hlc}) \frac{1 - e^{-p_1 \tau T}}{p_1} \\
& + \left(\frac{a_i b_i^2}{2} - g_2 q_i - \frac{q^2 \xi_i^2}{2a_i p_2^2} \right) \frac{e^{-\lambda \tau T} - e^{-\lambda T}}{\lambda} + \left(\frac{c_2 q \xi_i^2}{a_i p_2} - d_2 q_i \right) \frac{e^{\delta_2 T} - e^{\delta_2 \tau T}}{\delta_2} \\
& - \frac{c_2^2 \xi_i^2}{2a_i} \frac{e^{(2p_2 - \lambda) T} - e^{(2p_2 - \lambda) \tau T}}{2p_2 - \lambda} + q_i e^{\delta_2 T} (d_2 e^{p_2 T} + g_2 - \bar{z}_{hlc}) \frac{e^{-p_2 \tau T} - e^{-p_2}}{p_2} \Big] \\
& - e^{\lambda_1(\tau - 1)T} q(z^{co}(\theta_2) - \bar{z}_{hlc}) \left(\frac{e^{p_1 \tau + p_2(1 - \tau)T}}{e^{p_1 \tau + p_2(1 - \tau)T} - 1} \right) \left(\frac{1 - e^{-p_1 \tau T}}{p_1} \right. \\
& \left. - \frac{e^{(p_2 - p_1) \tau T} (e^{-p_2 T} - e^{-p_2 \tau T})}{p_2} \right).
\end{aligned} \tag{2.26}$$

2.4.2 Выигрыш в некооперативном сценарии

В некооперативном сценарии:

$$\tilde{\psi}_i^{NE}(t) = \begin{cases} c_{11}^{NE} e^{\delta_1 t} - \frac{q_i}{\delta_1}, & t \in [0, \tau T], \\ c_{12}^{NE} e^{r_2 t} - \frac{q_i}{r_2}, & t \in [\tau T, T], \\ c_1^{NE} e^{p_1(t - k + 1)T} - \frac{q_i}{p_1}, & t \in [(k + 1)T, (k + 1 + \tau)T], \\ c_2^{NE} e^{p_2(t - (k + 1)T)} - \frac{q_i}{p_2}, & t \in [(k + 1 + \tau)T, (k + 2)T], \end{cases} \tag{2.27}$$

где $r_2 = \delta_2 + \lambda_1$, $c_1^{NE} = \psi_i^{hlc} + \frac{q_i}{p_1}$, $c_2^{NE} = e^{-p_2 T} (\psi_i^{hlc} + \frac{q_i}{p_2})$, $c_{12}^{NE} = e^{-r_2 T} (\psi_i^{hlc} + \frac{q_i}{r_2})$, $c_{11}^{NE} = e^{-\delta_1 \tau T} (c_{12}^{NE} e^{r_2 \tau T} - \frac{q_i}{r_2} + \frac{q_i}{\delta_1})$.

Подставляя (2.27) в (2.1), переменная состояния в некооперативном сценарии $z^{NE}(t)$ может быть получена следующим образом:

$$z^{NE}(t) = \begin{cases} G_{11} + D_{11}e^{\delta_1 t} + e^{-\delta_1 t}C_{z_{11}}^{NE}, & t \in [0, \tau T], \\ G_{12} + D_{12}e^{r_2 t} + e^{-\delta_2 t}C_{z_{12}}^{NE}, & t \in [\tau T, T], \\ G_1 + D_1e^{p_1(t-k+1)T} + e^{-\delta_1(t-k+1)T}C_{z_1}, & t \in [(k+1)T, (k+1+\tau)T], \\ G_2 + D_2e^{p_2(t-k+1)T} + e^{-\delta_2(t-k+1)T}C_{z_2}, & t \in [(k+1+\tau)T, (k+2)T], \end{cases} \quad (2.28)$$

где

$$\begin{aligned} G_{11} &= \sum_{i=1}^2 \frac{\xi_i}{\delta_1} (b_i - \frac{\xi_i q_i}{a_i \delta_1}), G_{12} = \sum_{i=1}^2 \frac{\xi_i}{\delta_2} (b_i - \frac{\xi_i q_i}{a_i r_2}), \\ D_{11} &= \sum_{i=1}^2 \frac{\xi_i^2}{a_i} \frac{c_{11}^{NE}}{2\delta_1}, D_{12} = \sum_{i=1}^2 \frac{\xi_i^2}{a_i} \frac{c_{12}^{NE}}{r_2 + \delta_2}, \\ G_1 &= \sum_{i=1}^2 \frac{\xi_i}{\delta_1} (b_i - \frac{\xi_i q_i}{a_i p_1}), G_2 = \sum_{i=1}^2 \frac{\xi_i}{\delta_2} (b_i - \frac{\xi_i q_i}{a_i p_2}), \\ D_1 &= \sum_{i=1}^2 \frac{\xi_i^2}{a_i} \frac{c_1^{NE}}{p_1 + \delta_1}, D_2 = \sum_{i=1}^2 \frac{\xi_i^2}{a_i} \frac{c_2^{NE}}{p_2 + \delta_2}, \\ C_{z_{11}}^{NE} &= z_0 - G_{11} - D_{11}, C_{z_{12}}^{NE} = e^{\delta_2 \tau T} (G_{11} - G_{12} + D_{11}e^{\delta_1 \tau T} - D_{12}e^{r_2 \tau T} + e^{-\delta_1 \tau T}C_{z_{11}}). \end{aligned}$$

Некооперативная выплата игрока i рассчитывается аналогично кооперативному сценарию. Таким образом, мы имеем:

$$\begin{aligned}
J_i(z_0, v_1^{NE}, v_2^{NE}) = & \left(\frac{a_i b_i^2}{2} - G_{11} q_i - \frac{q_i^2 \xi_i^2}{2a_i \delta_1^2} \right) \tau T + \left(\frac{c_{11}^{NE} q_i \xi_i^2}{a_i \delta_1} - D_{11} q_i \right) \frac{-1 + e^{\delta_1 \tau T}}{\delta_1} - \frac{c_{11}^{NE} \xi_i^2}{2a_i} \frac{-1 + e^{2\delta_1 \tau T}}{2\delta_1} \\
& + C_{z_{11}}^{NE} q_i \frac{-1 + e^{-\delta_1 \tau T}}{\delta_1} - \left(\frac{a_i b_i^2}{2} - G_{12} q_i - \frac{q_i^2 \xi_i^2}{2a_i r_2^2} \right) \frac{(-1 + e^{\lambda_1(-T+\tau T)})}{\lambda_1} \\
& - \left(\frac{c_{12}^{NE} q_i \xi_i^2}{a_i r_2} - d_{12} q_i \right) \frac{e^{r_2 \tau T} - e^{\delta_2 T + \lambda_1 \tau T}}{\delta_2} + \frac{c_{12}^{NE} \xi_i^2}{2a_i} \frac{e^{\lambda_1 \tau T} (e^{T(2r_2 - \lambda_1)} - e^{(2r_2 - \lambda_1) \tau T})}{-2r_2 + \lambda_1} \\
& - C_{z_{12}}^{NE} q_i \frac{e^{-\delta_2 \tau T} - e^{-Tr_2 + \lambda_1 \tau T}}{r_2} \\
& + \frac{e^{\lambda_1 \tau T + \lambda_2 T}}{e^{\lambda T} - 1} \left[\left(\frac{a_i b_i^2}{2} - G_1 q_i - \frac{q_i^2 \xi_i^2}{2a_i p_1^2} \right) \frac{1 - e^{-\lambda \tau T}}{\lambda} + \left(\frac{c_1^{NE} q_i \xi_i^2}{a_i p_1} - D_1 q_i \right) \frac{-1 + e^{\delta_1 \tau T}}{\delta_1} \right. \\
& - \frac{c_1^{NE} \xi_i^2}{2a_i} \frac{-1 + e^{(2p_1 - \lambda) \tau T}}{2p_1 - \lambda} + q_i (D_1 + G_1 - \bar{z}_{hlc}^{NE}) \frac{1 - e^{-p_1 \tau T}}{p_1} \\
& + \left(\frac{a_i b_i^2}{2} - G_2 q_i - \frac{q_i^2 \xi_i^2}{2a_i p_2^2} \right) \frac{e^{-\lambda \tau T} - e^{-\lambda T}}{\lambda} + \left(\frac{c_2^{NE} q_i \xi_i^2}{a_i p_2} - D_2 q_i \right) \frac{e^{\delta_2 T} - e^{\delta_2 \tau T}}{\delta_2} \\
& - \frac{c_2^{NE} \xi_i^2}{2a_i} \frac{e^{(2p_2 - \lambda) T} - e^{(2p_2 - \lambda) \tau T}}{2p_2 - \lambda} + q_i e^{\delta_2 T} (D_2 e^{p_2 T} + G_2 - \bar{z}_{hlc}^{NE}) \frac{e^{-p_2 \tau T} - e^{-p_2}}{p_2} \left. \right] \\
& - e^{\lambda_1(\tau-1)T} q_i (z^{NE}(\theta_2) - \bar{z}_{hlc}^{NE}) \left(\frac{e^{p_1 \tau + p_2(1-\tau)T}}{e^{p_1 \tau + p_2(1-\tau)T} - 1} \right) \left(\frac{1 - e^{-p_1 \tau T}}{p_1} \right. \\
& \left. - \frac{e^{(p_2 - p_1) \tau T} (e^{-p_2 T} - e^{-p_2 \tau T})}{p_2} \right),
\end{aligned} \tag{2.29}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{z}_{hlc}^{NE} &= \bar{z}^{NE}(T) = G_2 + D_2 e^{p_2 T} \\
&+ \frac{(1 - e^{-\delta_1 \tau T})(G_1 - G_2) + D_1(e^{p_1 \tau T} - e^{-\delta_1 \tau T}) + D_2(e^{p_2 T - \delta_1 \tau T} - e^{p_2 \tau T})}{e^{\delta_2(1-\tau)T} - e^{-\delta_1 \tau T}}, \\
z^{NE}(\theta_2) &= z^{NE}(T) = G_{12} + D_{12} e^{p_2 T} + e^{\delta_2(\tau-1)T} [G_{11} - G_{12} + D_{11} e^{\delta_1 \tau T} - D_{12} e^{p_2 \tau T} \\
&+ e^{-\delta_1 \tau T} (z_0 - G_{11} - D_{11})].
\end{aligned}$$

В настоящее время это исследование привело нас к тому, что сходящиеся значения выигрыш всех игроков на бесконечном горизонте были получены явно как в кооперативном, так и в некооперативном сценариях, представляя, таким образом, всестороннее понимание исходов игры в различных рамках. Более того, на основе этого кооперативное решение (например, вектор Шепли, ядро, нуклеолус и т.д.) может быть рассчитано аналитически.

В следующем подразделе мы рассмотрим кооперативное решение.

2.4.3 Вектор Шепли

Вектор Шепли [79] рассматривается как кооперативное решение, обещающее назначить выигрыши игрокам в момент завершения игры. Для получения вектора Шепли необходимо построить характеристическую функцию.

Удобным для расчёта способом построения характеристической функции является δ -характеристическая функция [66].

Построение δ -характеристической функции включает два этапа: во-первых, определение равновесия по Нэшу для всех игроков, а затем, во-вторых, применение стратегий Нэша для исключённых игроков из $N \setminus S$, в то время как игроки из S максимизируют свой совместный выигрыш:

$$V^\delta(S, z_0) = \begin{cases} 0, & S = \{\emptyset\}, \\ \max_{v_i, i \in S} \sum_{i \in S} J_i(z_0, v_S, v_{N \setminus S}^{NE}), & S \subset N, \\ \max_{v_i, i \in N} \sum_{i=1}^n J_i(z_0, v), & S = N. \end{cases} \quad (2.30)$$

В общем случае равновесие может быть не единственным, что усложняет использование этой характеристической функции. Однако, в рассматриваемом классе игр, предполагается, что при построении характеристической функции используется равновесие по Нэшу, полученное в разделе 2.2, которое определяется единственным образом.

Предположение 2.1. *Игроки могут получить выгоду от кооперации в рамках большой коалиции; в противном случае задача становится тривиальной, поскольку ни одна коалиция не может достичь более высокого выигрыша, чем ее отдельные члены могли бы получить самостоятельно. С этой точки зрения, кооперативная игра $\Gamma(z_0, 0)$ считается **существенной** для поддержания большой коалиции игроками. Если она **существенна**, то $V^\delta(N, z_0) > \sum_{i=1}^n V^\delta(\{i\}, z_0)$.*

Кроме того, отметим, что $V^\delta(\{i\}, z_0) = J_i(z_0, v^{NE})$. Таким образом, если игра не является существенной, т.е. $J_{co}(z_0, v^{co}) = \sum_{i=1}^n J_i(z_0, v^{NE})$, то выигрыши игроков в равновесии по Нэшу могут рассматриваться как подходящее кооперативное решение.

Вектор Шепли для игрока i вычисляется следующим образом:

$$Sh_i(z_0) = \sum_{S: i \in S \subseteq N} \frac{(n - |S|)! (|S| - 1)!}{n!} (V^\delta(S, z_0) - V^\delta(S \setminus \{i\}, z_0)). \quad (2.31)$$

Для случая дифференциальной игры с двумя игроками имеем $N = \{1, 2\}$, $V^\delta(N, z_0) = J_{co}(z_0, v_1^{co}, v_2^{co})$, $V^\delta(\{1\}, z_0) = J_1(z_0, v_1^{NE}, v_2^{NE})$, $V^\delta(\{2\}, z_0) = J_2(z_0, v_1^{NE}, v_2^{NE})$. Также мы следуем общепринятому предположению, что $V^\delta(\emptyset) = 0$.

Таким образом, для $i, j \in \{1, 2\}, i \neq j$, вектор Шепли для игрока i определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} Sh_i(z_0) &= \frac{1}{2}(V^\delta(N, z_0) - V^\delta(\{j\}, z_0)) + \frac{1}{2}V^\delta(\{i\}, z_0) \\ &= \frac{1}{2}(J_{co}(z_0, v_1^{co}, v_2^{co}) - J_j(z_0, v_1^{NE}, v_2^{NE}) + J_i(z_0, v_1^{NE}, v_2^{NE})). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Поскольку компоненты (2.32) уже были получены аналитически, из-за громоздкости формулы мы не представляем кооперативное решение здесь.

2.5 Численное моделирование

В условиях природо-устойчивой стратегии установлены следующие параметры: $\delta_1 = 0.9; \delta_2 = 0.45; T = 1; \tau = 0.5; \lambda_1 = 0.25; \lambda_2 = 0.5; q_1 = 4; q_2 = 2; \xi_1 = 0.7; \xi_2 = 0.8; a_1 = 2; a_2 = 1.5; b_1 = b_2 = 10; z_0 = 0; \theta_1 = 0.5; \theta_2 = 1$.

На основе вышеуказанного анализа, подставляя данный набор параметров в явные формулы выигрыша, полученные в предыдущем разделе, получаем кооперативный выигрыш $J_{co}(z_0, v_1^{co}, v_2^{co}) = 186.954$, некооперативный выигрыш игрока 1: $J_1(z_0, v_1^{NE}, v_2^{NE}) = 128.7055$, некооперативный выигрыш игрока 2: $J_2(z_0, v_1^{NE}, v_2^{NE}) = 49.7962$, и вектор Шепли: $Sh_1 = 132.9316$ и $Sh_2 = 54.0223$.

Для математической иллюстрации на Рисунке 2.2 представлена численная эволюция системы.

На Рис. 2.2 пунктирные линии представляют равновесные стратегии по Нэшу игроков и соответствующие им траектории состояния. Сплошные линии обозначают кооперативные управления и оптимальную траекторию состояния, а зелёные штриховые линии обозначают параметры сдвига.

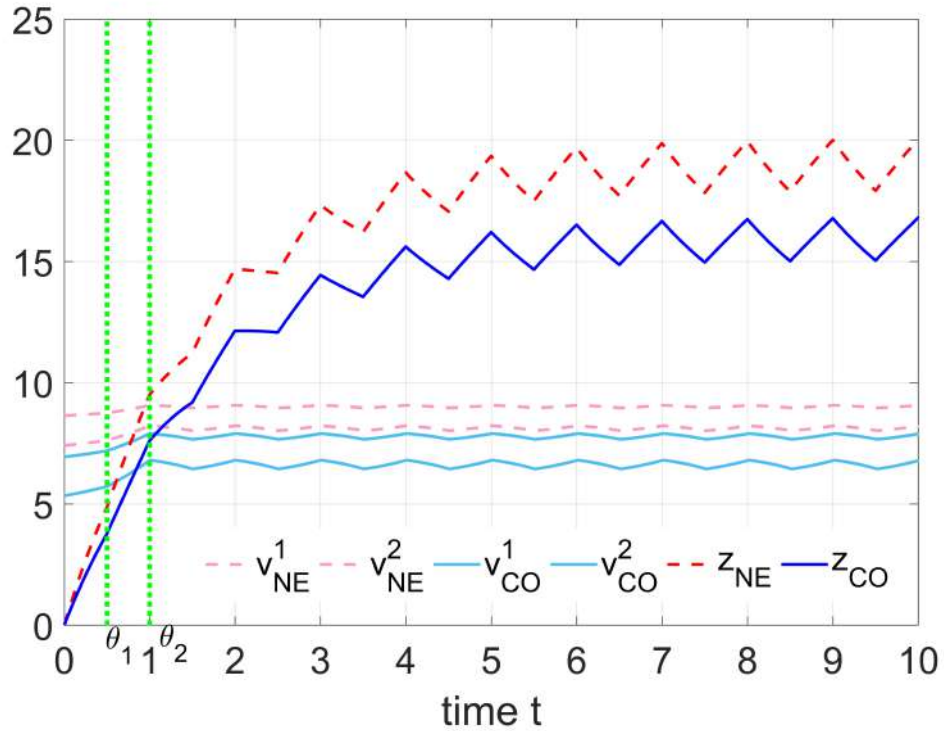


Рис. 2.2: Оптимальные управления и запас загрязнений

Рис. 2.3 интегральные выигрыши на интервале от 0 до t .

На Рис. 2.3 сплошные линии показывают интегральный выигрыш J_{CO} в кооперативном сценарии и J_{NE_i} , $i = 1, 2$ в некооперативном сценарии в интервале от 0 до t , пунктирная оранжевая линия представляет сумму интегральных выигрышей двух игроков в некооперативном сценарии в интервале от 0 до t , а штрихпунктирные линии обозначают значения Шепли, рассчитанные на основе интегральных выигрышей на интервале от 0 до ∞ .

Можно заметить, что в кооперативном сценарии уровень загрязнений ниже, чем в некооперативном сценарии, а кооперативный выигрыш игроков превышает сумму их некооперативных выигрышей. Более того, вектор Шепли, назначенное каждому игроку, превышает их сходящиеся некооперативные выигрыши.

2.6 Заключение к Главе 2

В данной работе исследована гибридная дифференциальная игра с n игроками, режимными переключениями и случайной продолжительностью. Были получены уникальные устойчивые оптимальные управления и соот-

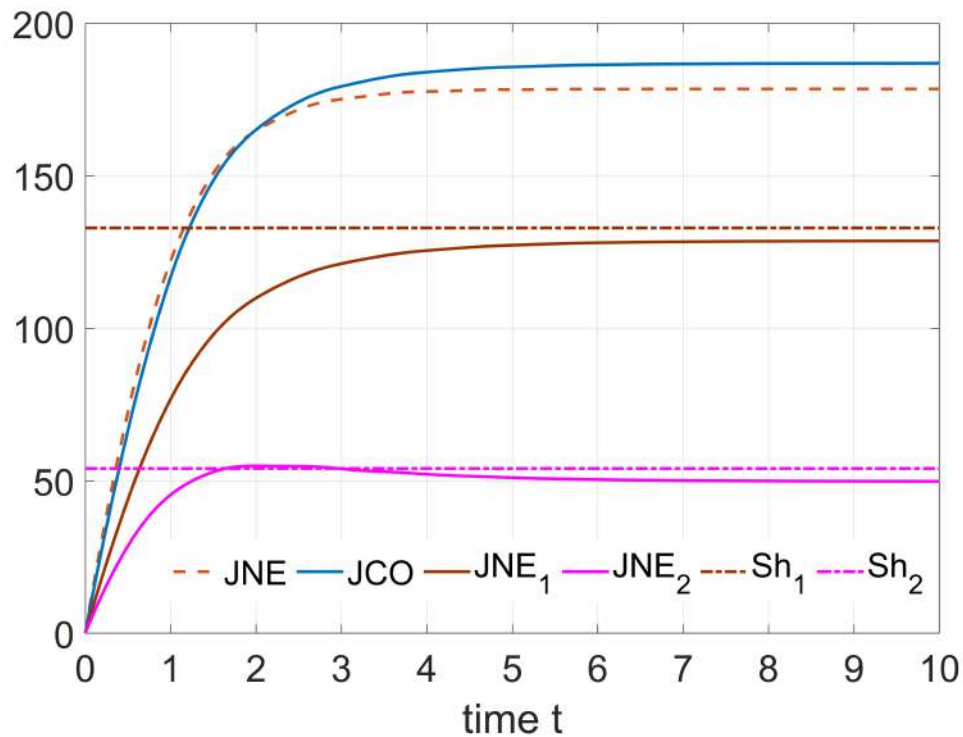


Рис. 2.3: Кооперативные и некооперативные выигрыши.

ветствующие траектории состояния в кооперативных и некооперативных сценариях, доказано, что траектории состояния с различными начальными значениями сходятся к уникально определённом гибридном предельном циклу. С использованием этого предельного цикла кооперативные и некооперативные выигрыши были рассчитаны аналитически.

В рамках кооперативных игр общий выигрыш распределяется между игроками согласно вектору Шепли. Этот метод распределения гарантирует, что в начале игры может быть сформирована большая коалиция. Полученные аналитические результаты были подробно продемонстрированы численно. Результаты показывают, что при переходе игроков в кооперативный режим уровень загрязнения уменьшается, а выигрыш, назначаемый каждому игроку, увеличивается по сравнению с некооперативным сценарием.

В дальнейшем исследовании основное внимание может быть уделено проблеме временной согласованности кооперативного решения в данной гибридной дифференциальной игре.

Глава 3

Устойчивая кооперация в гибридной игре управления загрязнением с разнородными игроками

Предыдущие главы исследовали динамические игровые модели для гибридных систем управления загрязнением, включающие механизмы переключения режимов. Однако структуры коалиции игроков и их возможные гетерогенные предпочтения не учитывались.

Хотя глобальное сотрудничество и координация могут принести пользу всем участникам, каждая страна стремится безвозмездно воспользоваться усилиями других, что представляет собой серьёзное препятствие для эффективного международного взаимодействия [3]. Однако международные экологические соглашения (МЭС) пытаются решать трансграничные экологические проблемы, поддерживая стабильность кооперации [3]. Таким образом, изучение экзогенных факторов, возникающих из-за различных коалиционных структур, направлено на обсуждение необходимости сотрудничества между государствами (или игроками) в задачах контроля загрязнения. С одной стороны, это даёт альтернативную парадигму для моделирования МЭС в соответствии с [29]. С другой — позволяет исследовать и разрешать возможные конфликты интересов между участниками [87]. В работах [86, 28] изучаются условия стабильности полной коалиции при участии двух развитых стран и одной развивающейся, однако вопрос временной несогласованности (time-inconsistency) не рассматривался. Для математической управляемости, в отличие от ряда глав в литературе (см., например, [28] или [86]), где функция затрат квадратична относительно уровня загрязнения, в

данной главе используется классическая модель с линейной зависимостью функции затрат от уровня загрязнения. Такой подход не только упрощает анализ открытых стратегий и динамики состояний, но и облегчает вывод процедуры распределения дележа (imputation distribution procedure, IDP).

В этой главе рассматривается дифференциальная игра трёх игроков, сталкивающихся с экзогенными эффектами (например, климатическими изменениями) и эндогенными эффектами (гетерогенными предпочтениями). Работа направлена на решение следующих исследовательских вопросов:

1. Какие процессы принятия решений будут использоваться гетерогенными игроками при всех возможных коалиционных структурах в условиях климатических изменений?
2. Значимость формирования полной коалиции, т.е., могут ли игроки достичь большего в полной коалиции?
3. Можно ли достичь динамической устойчивости (time-consistency) кооперации?

3.1 Постановка задачи

Рассматривается гибридная дифференциальная игра с участием трех соседствующих игроков, в которой каждый игрок (например, страна или завод) осуществляет производственную деятельность и одновременно управляет политикой выбросов загрязняющих веществ в общую среду конкретного региона. Учитывая текучесть и накопительный характер региональных экологических проблем, на общую для игроков территорию влияют как отрицательные внешние эффекты от собственных выбросов каждого игрока, так и выбросы соседних игроков. Запас загрязнения накапливается со временем по мере продолжения выбросов. Запас загрязнения в момент времени t обозначается как $x(t)$. Предполагается, что запас загрязнения неотрицателен при всех $t > 0$. Таким образом, динамика запаса загрязнения с режимными переключениями [100] может быть описана следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{z}(t) = \sum_{i=1}^3 \xi_i v_i(t) - \delta(t)z(t), \quad z(0) = z_0, \quad (3.1)$$

где $z_0 > 0$ — начальный запас загрязнения, $v_i \in [0, b_i]$ — уровень выбросов игрока i , b_i — максимальный уровень выбросов игрока i , $\xi_i > 0$ — маргинальное влияние на накопление загрязнений, $\delta(t) > 0$ — способность среды к разложению загрязняющих веществ или коэффициент самоочищения, задаваемый периодической кусочно-постоянной функцией:

$$\delta(t) := \begin{cases} \delta_1 > 0, & t \in [kT, (k + \tau)T), \\ \delta_2 > 0, & t \in [(k + \tau)T, (k + 1)T]. \end{cases} \quad (3.2)$$

С учетом сезонных колебаний, в данной модели учитывается периодическая характеристика переключения коэффициента самоочищения среды. Каждый период T делится на две части. При $k \in \mathbb{N}_0$ и $\tau \in (0, 1)$, в первой части, то есть при $t \in [kT, (k + \tau)T)$, коэффициент самоочищения среды равен δ_1 ; во второй части, то есть при $t \in [(k + \tau)T, (k + 1)T]$, коэффициент самоочищения среды равен δ_2 .

В данной работе рассматривается гибридная дифференциальная игра по управлению загрязнением с участием одного близорукого и двух дальновидных игроков [28]. В частности, предполагается, что дальновидные игроки уязвимы к загрязнению, тогда как близорукий игрок — неуязвим. Данная постановка может быть использована при анализе проблем регионального регулирования загрязнений между развитыми и развивающимися странами [86].

Таким образом, учитывая важность, которую дальновидные игроки придают уровню загрязнения, функционал выигрыша дальновидного игрока $i = 1, 2$, подлежащий максимизации, задается следующим выражением:

$$K_i(z_0, v) = \int_0^\infty e^{-\rho t} [a_i v_i (b_i - v_i/2) - q_i z] dt, \quad (3.3)$$

где $a_i > 0$ отражает коэффициент преобразования производственного потока в поток прибыли, $q_i > 0$ — налог, который обязан уплатить игрок i . Предполагается, что близорукий игрок индифферентен к запасу загрязнения окружающей среды, и его функционал выигрыша, подлежащий максимизации, имеет следующий вид:

$$K_3(z_0, v) = \int_0^\infty e^{-\rho t} [a_3 v_3 (b_3 - v_3/2)] dt. \quad (3.4)$$

3.2 Стратегии игроков при различных коалиционных структурах

В данном разделе рассматриваются все возможные коалиционные структуры в этой игре с тремя игроками. Политики выбросов всех игроков могут быть получены в рамках кооперативных, некооперативных и частично кооперативных сценариев. Соответствующие возможные структуры коалиций задаются следующим образом: 1. Кооперативный сценарий: $\pi_1 = \{1, 2, 3\}$; 2. Некооперативный сценарий: $\pi_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$; 3. Частично кооперативные сценарии: $\pi_3 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\pi_{41} = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$, $\pi_{42} = \{\{2, 3\}, \{1\}\}$. Устойчивость кооперации и условия ее достижения являются основными предметами исследования в данной работе.

3.2.1 Кооперативный сценарий: $\pi_1 = \{1, 2, 3\}$

В данном случае игроки сотрудничают с целью максимизации совместного выигрыша:

$$K^{\pi_1} = K_1 + K_2 + K_3 = \sum_{i=1}^3 \int_0^\infty e^{-\rho t} [\sum_{i=1}^3 (a_i v_i (b_i - v_i/2)) - qz] dt, \quad (3.5)$$

где $s = q_1 + q_2$.

Применяя принцип максимума Понтрягина, получаем гамильтониан в текущих значениях:

$$H(z, v, \lambda) = \sum_{i=1}^3 (a_i v_i (b_i - v_i/2)) - qz + \lambda (\sum_{i=1}^3 \xi_i v_i - \delta(t)z). \quad (3.6)$$

Таким образом, каноническая система имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \sum_{i=1}^3 \xi_i v_i - \delta(t)z, \\ \dot{\lambda} &= \rho\lambda - \frac{\partial H}{\partial z} = s + (\rho + \delta(t))\lambda. \end{aligned} \quad (3.7)$$

На основании условия оптимальности первого порядка из (3.6), оптимальное управление игрока i имеет следующий вид:

$$v_i^{co} = \begin{cases} b_i, & \lambda(t) > 0, \\ b_i + \frac{\xi_i}{a_i} \lambda(t), & \lambda(t) \in [-\frac{a_i b_i}{\xi_i}, 0], \\ 0, & \lambda(t) < -\frac{a_i b_i}{\xi_i}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Определение 3.1. Управление $v_i^{co}(t)$ игрока i является **природо-устойчивым**, если оно не принимает граничные значения, за исключением отдельных моментов времени, то есть $\lambda(t) \in [-\frac{a_i b_i}{\xi_i}, 0]$ при всех $t > 0$.

В данной постановке, при условии $\lambda(0) = \lambda(T)$, может быть определено единственное оптимальное решение, которое формирует гибридный предельный цикл с периодом T , см. [36].

Кроме того, $\lambda(t)$ расходится, если $\lambda(0) \neq \lambda(T)$, см. [100]. Тогда, начиная с некоторого момента t' , игрок либо прекращает производство ($v_i^{co}(t) = 0$), либо производит с максимальной интенсивностью ($v_i^{co}(t) = b_i$) для $t \geq t'$. Такие случаи не согласуются с концепцией устойчивого развития. Исходя из этого, мы рассматриваем только ситуацию, при которой v_i^{co} является природо-устойчивой стратегией.

Обозначим $L(t)$ следующим образом:

$$L(t) = \begin{cases} m_1 e^{s_1(t-kT)} - \frac{1}{s_1}, & t \in [kT, (k+\tau)T], \\ m_2 e^{s_2(t-kT)} - \frac{1}{s_2}, & t \in [(k+\tau)T, (k+1)T], \end{cases} \quad (3.9)$$

where $s_1 = \delta_1 + \rho$, $s_2 = \delta_2 + \rho$, $m_1 = \frac{(s_2 - s_1)(1 - e^{s_2 T(\tau-1)})}{s_1 s_2 (e^{s_1 \tau T} - e^{s_2 T(\tau-1)})}$, $m_2 = e^{-s_2 T} (m_1 - \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2})$.

Таким образом, из условия $\lambda(0) = \lambda(T)$ получено циклическое решение для сопряженной переменной: $\lambda(t) = q \cdot L(t)$.

Следовательно, равновесное начальное значение $\lambda(0) = \lambda_{hlc}$ может быть единственным образом определено следующим образом:

$$\lambda_{hlc} = q(m_1 - \frac{1}{s_1}). \quad (3.10)$$

3.2.2 Некоперативный сценарий: $\pi_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

В отсутствие соглашения о коалиции или при невозможности достичь соглашения между игроками, каждый участник принимает решения независимо,

максимизируя собственный функционал выигрыша K_i , выбирая траекторию выбросов в равновесии по Нэшу с учетом ограничений, обусловленных динамикой загрязнения.

Игрок 3, обладая близорукой перспективой, склонен сосредотачиваться на краткосрочных выгодах и игнорировать долгосрочные последствия наносимого окружающей среде ущерба. Стратегия выбросов игрока 3 выводится напрямую:

$$v_3^{NE} = b_3. \quad (3.11)$$

Следует отметить, что при отсутствии учета загрязнения окружающей среды игрок 3 устанавливает уровень выбросов/производства на максимальном уровне. Это объясняется стремлением максимизировать собственную выгоду без учета негативных внешних эффектов.

Для дальновидных игроков $j = 1, 2$ равновесие по Нэшу определяется с использованием принципа максимума Понтрягина.

Исходя из собственного интегрального выигрыша (3.3), гамильтониан текущей стоимости игрока j имеет следующий вид:

$$H_j(z, v, \lambda) = a_i v_i (b_i - v_i/2) - q_j z + \lambda_j \left(\sum_{i=1}^3 \xi_i v_i - \delta(t) z \right). \quad (3.12)$$

Отсюда получаем каноническую систему:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \sum_{i=1}^3 \xi_i v_i - \delta(t) z, \\ \dot{\lambda}_j &= \rho \lambda_j - \frac{\partial H_j}{\partial z} = q_j + (\rho + \delta(t)) \lambda_j. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Для нахождения природо-устойчивого решения полагаем $\lambda_j(0) = \lambda_j(T)$, тогда существует единственное решение $\lambda_j(t) = q_j \cdot L(t)$ в форме гибридного предельного цикла, и начальное равновесное значение определяется как $\lambda_j(0) = \lambda_{jhlc} = q_j(m_1 - \frac{1}{s_1})$.

Следовательно, равновесие по Нэшу игрока j выражается в следующем виде:

$$v_j^{NE} = \begin{cases} b_j, & \lambda_j(t) > 0, \\ b_j + \frac{\xi_j}{a_j} \lambda_j(t), & \lambda_j(t) \in [-\frac{a_j b_j}{\xi_j}, 0], \\ 0, & \lambda_j(t) < -\frac{a_j b_j}{\xi_j}. \end{cases} \quad (3.14)$$

3.2.3 Частично-кооперативный сценарий

Два дальновидных игрока сотрудничают: $\pi_3 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$

Когда близорукий игрок действует индивидуально, а два дальновидных игрока объединяются в коалицию. Для игрока 3 имеем:

$$v_3^{\pi_3} = b_3. \quad (3.15)$$

В коалиции $\{1, 2\}$ игроки максимизируют совместный функционал выигрыша:

$$K_{\{1,2\}} = K_1 + K_2 = \sum_{i=1}^2 \int_0^\infty e^{-\rho t} \left[\sum_{i=1}^2 (a_i v_i (b_i - v_i/2)) - qz \right] dt, \quad (3.16)$$

где $q = q_1 + q_2$.

Используя принцип максимума Понтрягина, гамильтониан текущей стоимости для игрока $j = 1, 2$ задается следующим образом:

$$H_{\{1,2\}}(z, u, \lambda) = \sum_{i=1}^2 (a_i v_i (b_i - v_i/2)) - qz + \lambda_{\{1,2\}} \left(\sum_{i=1}^3 \xi_i v_i - \delta(t)z \right). \quad (3.17)$$

Очевидно, что $\lambda_{\{1,2\}} = \lambda$.

Таким образом, оптимальное управление игрока j имеет вид:

$$v_j^{\pi_3} = \begin{cases} b_j, & \lambda(t) > 0, \\ b_j + \frac{\xi_j}{a_j} \lambda(t), & \lambda(t) \in [-\frac{a_j b_j}{\xi_j}, 0], \\ 0, & \lambda(t) < -\frac{a_j b_j}{\xi_j}. \end{cases} \quad (3.18)$$

Дальновидный игрок 1 сотрудничает с близоруким игроком: $\pi_{41} = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$

В этом сценарии коалиция $\{1, 3\}$ максимизирует совместный функционал выигрыша:

$$K_{\{1,3\}} = K_1 + K_3 = \int_0^\infty e^{-\rho t} [a_1 v_1 (b_1 - v_1/2) + a_3 v_3 (b_3 - v_3/2) - q_1 z] dt. \quad (3.19)$$

Гамильтониан текущей стоимости для игроков $j = 1, 3$ имеет следующий вид:

$$H_{\{1,3\}}(z, u, \lambda) = a_1 v_1 (b_1 - v_1/2) + a_3 v_3 (b_3 - v_3/2) - q_1 z + \lambda_{\{1,3\}} \left(\sum_{i=1}^3 \xi_i v_i - \delta(t)z \right). \quad (3.20)$$

Динамика сопряженной переменной определяется следующим образом:

$$\dot{\lambda}_{\{1,3\}} = \rho \lambda_{\{1,3\}} - \frac{\partial H_{\{1,3\}}}{\partial z} = q_1 + (\rho + \delta(t)) \lambda_{\{1,3\}}. \quad (3.21)$$

Таким образом, оптимальное управление игрока $j = 1, 3$ имеет вид:

$$v_j^{\pi_{41}} = \begin{cases} b_j, & \lambda_1(t) > 0, \\ b_j + \frac{\xi_j}{a_j} \lambda_1(t), & \lambda_1(t) \in [-\frac{a_j b_j}{\xi_j}, 0], \\ 0, & \lambda_1(t) < -\frac{a_j b_j}{\xi_j}. \end{cases} \quad (3.22)$$

Игрок 2 действует индивидуально в данной структуре коалиции. Следовательно, его стратегия управления совпадает с равновесием по Нэшу в некооперативном сценарии π_2 :

$$v_2^{\pi_{41}} = \begin{cases} b_2, & \lambda_2(t) > 0, \\ b_2 + \frac{\xi_2}{a_2} \lambda_2(t), & \lambda_2(t) \in [-\frac{a_2 b_2}{\xi_2}, 0], \\ 0, & \lambda_2(t) < -\frac{a_2 b_2}{\xi_2}. \end{cases} \quad (3.23)$$

Дальновидный игрок 2 сотрудничает с близоруким игроком: $\pi_{42} = \{\{2, 3\}, \{1\}\}$

Поскольку структура коалиции π_{42} аналогична структуре коалиции π_{41} , мы опускаем процесс вычислений и представляем результат напрямую.

Оптимальное управление для игрока $j = 2, 3$ имеет вид:

$$v_j^{\pi_{42}} = \begin{cases} b_j, & \lambda_2(t) > 0, \\ b_j + \frac{\xi_j}{a_j} \lambda_2(t), & \lambda_2(t) \in [-\frac{a_j b_j}{\xi_j}, 0], \\ 0, & \lambda_2(t) < -\frac{a_j b_j}{\xi_j}. \end{cases} \quad (3.24)$$

Стратегия игрока 1 эквивалентна его равновесию по Нэшу в некооперативном сценарии π_2 :

$$v_1^{\pi_{42}} = \begin{cases} b_1, & \lambda_1(t) > 0, \\ b_1 + \frac{\xi_1}{a_1} \lambda_1(t), & \lambda_1(t) \in [-\frac{a_1 b_1}{\xi_1}, 0], \\ 0, & \lambda_1(t) < -\frac{a_1 b_1}{\xi_1}. \end{cases} \quad (3.25)$$

Подводя итог, в соответствии с особенностями стратегий игроков при различных структурах коалиций, формулируется следующее замечание:

Замечание 3.1. Когда близорукий игрок сотрудничает с одним или несколькими дальновидными игроками и следует за ними в составе коалиции, его стратегия преобразуется в форму гибридного предельного цикла, вместо использования максимальной скорости производства, что является следствием взаимодействия игроков с разными временными горизонтами.

Замечание 3.2. При фиксированном начальном запасе z_0 кооперативная коалиция, обозначаемая как π_1 , обеспечивает наименьший уровень загрязнения по сравнению с другими допустимыми структурами коалиций.

Исходя из приведенного анализа, чтобы поддерживать уровень загрязнения окружающей среды на минимальном уровне и обеспечить игрокам наилучшую интегральную выгоду, игроки должны сотрудничать в рамках большой коалиции π_1 . Это может быть связано с тем, что скорость выбросов игроков, а также уровень загрязнения, зависящий от их стратегий выбросов в π_1 , ниже, чем при других структурах коалиций.

3.3 Динамика состояния при различных структурах коалиций

В предыдущем разделе были определены стратегии игроков при структурах коалиций $\pi = \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_{41}, \pi_{42}$. Теперь рассмотрим динамики состояния при указанных сценариях. Доказательство следующей теоремы опирается на работу [37].

Теорема 3.1. Для коалиционной структуры $\pi = \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_{41}, \pi_{42}$ и произвольного начального состояния $z^\pi(0) = z_0^\pi \geq 0$, переменная состояния $z^\pi(t)$, управляемая $\{v_i^\pi\}_1^3$, экспоненциально стремится к единственному гибриднему предельному циклу $\bar{z}^\pi(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство. Динамика состояния $z^\pi(t) \in z$ задается следующим образом:

$$\dot{z}^\pi(t) = \sum_{i=1}^3 \xi_i v_i^\pi(t) - \delta(t) z^\pi(t), \quad z^\pi(0) = z_0^\pi, \quad (3.26)$$

где v_i^π однозначно определены в предыдущем разделе.

Общее решение уравнения (3.26) имеет следующий вид:

$$\phi(t, z_0^\pi) = z_0^\pi e^{-\int_0^t \delta(s) ds} + e^{-\int_0^t \delta(s) ds} \int_0^t \sum_{i=1}^3 \xi_i v_i^\pi(\tau) e^{\int_0^\tau \delta(s) ds} d\tau. \quad (3.27)$$

Поскольку $\phi(T, z_0^\pi)$ отображает компактное выпуклое множество z в себя, по теореме Брауэра о неподвижной точке существует точка $\bar{z}_{hlc}^\pi$, такая что $\phi(T, \bar{z}_{hlc}^\pi) = \bar{z}_{hlc}^\pi$. Кроме того, экологически устойчивые v_i^π и скорость самоочищения $\delta(t)$ являются периодическими функциями. Таким образом, из общего решения (3.27) следует, что $\phi(t, \bar{z}_{hlc}^\pi) = \phi(t + kT, \bar{z}_{hlc}^\pi)$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Следовательно, существует периодическое решение $\bar{z}^\pi(t)$ уравнения (3.26) с периодом T и начальным условием $\bar{z}^\pi(0) = \bar{z}_{hlc}^\pi$. Более того, анализируя устойчивое состояние $\bar{z}^{*\pi}(t) = \frac{\sum_{i=1}^3 \xi_i v_i^\pi(t)}{\delta(t)}$, и учитывая, что $v_i^\pi(t)$ представляет собой гибридный предельный цикл, в каждом подпериоде функция $\bar{z}^{*\pi}(t)$ монотонно изменяется. Следовательно, периодическое состояние $\bar{z}^\pi(t)$, стремясь к $\bar{z}^{*\pi}(t)$, также монотонно изменяется в каждом подпериоде, что означает, что $\bar{z}^\pi(t)$ является не только периодическим решением, но и единственным гибридным предельным циклом, начинающимся с $\bar{z}_{hlc}^\pi$.

Единственность:

Докажем теперь единственность данного решения.

Отметим, что при различных структурах коалиций стратегии дальновидных игроков реализуются в виде гибридных предельных циклов, а стратегия близорукого игрока принимает форму либо гибридного цикла, либо постоянной функции. Таким образом, все стратегии являются периодическими, что означает, что второй интегральный член в правой части (3.27) не зависит от начального состояния. Следовательно, для любого другого начального значения $z_{hlc}^{\pi'}$, удовлетворяющего $\phi(T, z_{hlc}^{\pi'}) = z_{hlc}^{\pi'}$, имеем:

$$0 \leq |z_{hlc}^{\pi'} - \bar{z}_{hlc}^\pi| = |\phi(T, z_{hlc}^{\pi'}) - \phi(T, \bar{z}_{hlc}^\pi)| = |z_{hlc}^{\pi'} - \bar{z}_{hlc}^\pi| e^{-\int_0^T \delta(s) ds} \leq |z_{hlc}^{\pi'} - \bar{z}_{hlc}^\pi| e^{-\delta_{min} T}.$$

Здесь $\delta_{min} = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда получаем:

$$0 \leq |z_{hlc}^{\pi'} - \bar{z}_{hlc}^\pi| (1 - e^{-\delta_{min} T}) \leq 0.$$

Отсюда следует, что $z_{hlc}^{\pi'} = \bar{z}_{hlc}^\pi$.

Сходимость:

Очевидно, что поскольку $v_i^\pi(\tau) > 0$ и $\delta(\tau) > 0$, и они не зависят от

начального значения $z^\pi(0)$, то для произвольных начальных условий $z^\pi(0)$ выполняется следующая экспоненциальная сходимость:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\phi(t, z^\pi(0)) - \phi(t, \bar{z}_{hlc}^\pi)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |z^\pi(0) - \bar{z}_{hlc}^\pi| e^{-\int_0^t \delta(s) ds} = 0.$$

Это завершает доказательство. $\square$

Как следует из теоремы 3.1, для любой возможной структуры коалиции динамика состояния стремится к единственному гибриднему предельному циклу $\bar{z}^\pi(t)$. Кроме того, кооперативная структура π_1 приводит к наименьшему уровню предельного загрязнения, поскольку стратегии игроков при этом более консервативны.

3.4 Устойчивость кооперации

3.4.1 Кооперативно-устойчивый принцип оптимальности

Кооперативное поведение является оптимальным с точки зрения максимизации суммарной полезности. Однако отклонение от кооперативного поведения может быть выгодным для одного или группы участников. Это поднимает вопрос об устойчивости кооперативного соглашения. В контексте стационарных задач устойчивость кооперативных разбиений рассматривается, например, в работах [78, 91, 86]. Согласно идее, предложенной в этих работах, кооперативный сценарий считается устойчивым по отношению к индивидуальным отклонениям (коалиционная структура устойчива по Нэшу), если ни один из игроков не выигрывает от выхода из максимальной коалиции и становления синглтоном.

Таким образом, в рассматриваемой игре с тремя игроками отклонение игрока 3 от максимальной коалиции приводит к переходу от структуры коалиции π_1 к структуре π_3 , а отклонения игроков 1 или 2 — к структурам π_{42} и π_{41} соответственно. Если это оказывается выгодным для отклоняющегося игрока, то структура коалиции π_1 не будет устойчивой. Основываясь на этой идее, мы предлагаем принцип кооперативной оптимальности для рассматриваемой задачи, который включает в себя распределения выигрышей, удовлетворяющие вышеуказанному свойству устойчивости к индивидуальным отклонениям. Поскольку речь идет о динамической модели, мы также исследуем непустоту данного принципа оптимальности в каждой подыгре

вдоль кооперативной траектории. Также исследуется динамическая устойчивость (time-consistency) [68, 66, 108] предложенного принципа оптимальности.

С целью удержания игроков в большой коалиции на протяжении всей игры применяется метод проектирования механизма распределения дележа. Условие устойчивости большой коалиции, состоящей из двух развитых стран и одной развивающейся, исследуется в [86], однако вопрос динамической устойчивости не рассматривался.

Обозначим через $K_i^\pi(z^{\pi_1}(\epsilon), v)$ функционал выигрыша игрока i при структуре коалиции π в подыгре, начинающемся с момента ϵ с начальным состоянием $z^{\pi_1}(\epsilon)$

$$K_i^\pi(z^{\pi_1}(\epsilon), v) = \int_\epsilon^\infty e^{-\rho(t-\epsilon)} \left[\sum_{i=1}^3 (a_i v_i (b_i - v_i/2)) - q_i z \right] dt, \quad (3.28)$$

где $q_1, q_2 > 0$, а $q_3 = 0$.

Обозначим через $v(S, z^{\pi_1}(t), t)$ характеристическую функцию коалиции $S \subseteq N$ в подыгре $\Gamma(z^{\pi_1}(t), t)$, начинающемся с момента $t \in [0, \infty]$ с начальным состоянием $z^{\pi_1}(t)$, которая отображает коалицию S в числовое значение и может интерпретироваться как мера силы (выигрыша, влияния) коалиции. Мы рассматриваем классическую характеристическую функцию [92].

Обозначим через $R(z^{\pi_1}(t), t)$ множество дележа в игре с 3 игроками в подыгре $\Gamma(z^{\pi_1}(t), t)$, начинающемся с $t \in [0, \infty]$ с начальными условиями $z^{\pi_1}(t)$:

$$R(z^{\pi_1}(t), t) = \left\{ \eta(z^{\pi_1}(t), t) = (\eta_1(z^{\pi_1}(t), t), \eta_2(z^{\pi_1}(t), t), \eta_3(z^{\pi_1}(t), t)) : \right. \\ \left. \sum_{i=1}^3 \eta_i(z^{\pi_1}(t), t) = v(N, z^{\pi_1}(t), t), \eta_i(z^{\pi_1}(t), t) \geq v(\{i\}, z^{\pi_1}(t), t), i \in N \right\}. \quad (3.29)$$

Дележ — это вектор, удовлетворяющий первому условию групповой рациональности и второму условию индивидуальной рациональности, приведенным выше. Концепция групповой рациональности означает, что коллективные выгоды от кооперации в максимальной коалиции полностью распределяются между игроками. Индивидуальная рациональность означает, что выплаты, при которых игрок получает меньше, чем он мог бы полу-

чить, действуя в одиночку (в смысле значения своей характеристической функции $v(\{i\}, z^{\pi_1}(t), t)$), являются неприемлемыми.

Определение 3.2. В подыгре $\Gamma(z^{\pi_1}(t), t)$ с тремя игроками с гетерогенными характеристиками **кооперативно-устойчивый принцип оптимальности** $Z(z^{\pi_1}(t), t)$ представляет собой множество векторов, таких что

$$Z(z^{\pi_1}(t), t) = \left\{ \zeta(z^{\pi_1}(t), t) = (\zeta_1(z^{\pi_1}(t), t), \zeta_2(z^{\pi_1}(t), t), \zeta_3(z^{\pi_1}(t), t)) : \right. \\ \sum_{i=1}^3 \zeta_i(z^{\pi_1}(t), t) = v(N, z^{\pi_1}(t), t), \quad \zeta_1(z^{\pi_1}(t), t) \geq K_1^{\pi_{42}}(z^{\pi_1}(t), v^{\pi_{42}}(t)), \\ \left. \zeta_2(z^{\pi_1}(t), t) \geq K_2^{\pi_{41}}(z^{\pi_1}(t), v^{\pi_{41}}(t)), \quad \zeta_3(z^{\pi_1}(t), t) \geq K_3^{\pi_3}(z^{\pi_1}(t), v^{\pi_3}(t)) \right\}. \quad (3.30)$$

где $\zeta_i(z^{\pi_1}(t), t)$, для $i = 1, 2, 3$, — выплата игроку i от максимальной коалиции в подыгре $\Gamma(z^{\pi_1}(t), t)$, и $v(N, z^{\pi_1}(t), t) = \sum_{i=1}^3 K_i^{\pi_1}(z^{\pi_1}(t), v^{\pi_1}(t))$.

Лемма 3.1. Кооперативно-устойчивый принцип оптимальности $Z(z^{\pi_1}(t), t)$ является подмножеством множества дележей $R(z^{\pi_1}(t), t)$ в любой подыгре $\Gamma(z^{\pi_1}(t), t)$, начинающейся в момент времени $t \in [0, \infty]$, вдоль кооперативной траектории $z^{\pi_1}(t)$, то есть $Z(z^{\pi_1}(t), t) \subset R(z^{\pi_1}(t), t)$.

Доказательство. Определение характеристической функции в [92] имеет вид:

$$v(S, z(t), t) = \begin{cases} 0, & S = \{\emptyset\}, \\ \max_{i \in S} \min_{\substack{v_i, \\ j \in N \setminus S}} \sum_{i \in S} K_i(z(t), v), & S \subset N, \\ \max_v \sum_{i=1}^n K_i(z(t), v), & S = N. \end{cases} \quad (3.31)$$

Тогда $v(\{i\}, z^{\pi_1}(t), t) = \max_{v_i} \min_{\substack{v_j, \\ j \in N \setminus i}} K_i(z^{\pi_1}(t), v(t))$, где игрок i максимизирует свой выигрыш, а остальные минимизируют его.

Заметим, что $v(\{1\}, z^{\pi_1}(t), t) = K_1(z^{\pi_1}(t), v_1^{NE}(t), b_2, b_3)$, $v(\{2\}, z^{\pi_1}(t), t) = K_2(z^{\pi_1}(t), b_1, v_2^{NE}(t), b_3)$, $v(\{3\}, z^{\pi_1}(t), t) = K_3(z^{\pi_1}(t), b_1, b_2, b_3)$.

Для дальновидных игроков $i = 1, 2$ игрок i использует стратегию равновесия по Нэшу v_i^{NE} , в то время как другие увеличивают уровень производства до максимального значения, чтобы как можно больше увеличить

запасы загрязнения. Это приводит к росту налога $(q_i z)$, который должен платить игрок i . Близорукий игрок, чья полезность зависит только от его собственной стратегии, использует стратегию Нэша ($v_3^{NE} = b_3$).

Мы видим, что стратегии игрока-синглтона в частично кооперативной ситуации и в описанном случае совпадают, однако запасы загрязнения в последнем случае больше. Следовательно, $K_1^{\pi_{42}}(z^{\pi_1}(t), v^{\pi_{42}}(t)) > v(\{1\}, z^{\pi_1}(t), t)$, $K_2^{\pi_{41}}(z^{\pi_1}(t), v^{\pi_{41}}(t)) > v(\{2\}, z^{\pi_1}(t), t)$, $K_3^{\pi_3}(z^{\pi_1}(t), v^{\pi_3}(t)) = v(\{3\}, z^{\pi_1}(t), t)$.

Следовательно, мы заключаем, что $Z(z^{\pi_1}(t), t)$ является подмножеством $R(z^{\pi_1}(t), t)$. $\square$

Причина, лежащая в основе кооперативно-устойчивого принципа оптимальности, является очевидной. Для подыгры, начинающейся в момент времени $t \in [0, \infty]$, вдоль траектории $z^{\pi_1}(t)$, необходимо всегда гарантировать, что распределенная выплата игроку i в максимальной коалиции превышает ту, которую он получил бы в случае выхода из этой коалиции, играя в одиночку.

Для $j = 1, 2$ вводим обозначения $f_j(t) = z^{\pi_{4j}}(t) - z^{\pi_1}(t)$, $\bar{f}_j(t) = \bar{z}^{\pi_{4j}}(t) - \bar{z}^{\pi_1}(t)$, $M(t) = q_1 f_2(t) + q_2 f_1(t)$ и $\bar{M}(t) = q_1 \bar{f}_2(t) + q_2 \bar{f}_1(t)$. Для $\bar{M}(t)$ можно получить следующее выражение:

$$\bar{M}(t) = \begin{cases} A_1 + B_1 e^{-\delta_1(t-kT)} + C_1 e^{s_1(t-kT)}, & t \in [kT, (k+\tau)T), \\ A_2 + B_2 e^{-\delta_2(t-kT)} + C_2 e^{s_2(t-kT)}, & t \in [(k+\tau)T, (k+1)T], \end{cases} \quad (3.32)$$

где

$$\{k_i\}_1^3 = \left\{ \frac{\xi_i^2}{2a_i} \right\}_1^3, \quad o_m = -2[(k_1 + k_2)q_1 q_2 + (k_1 + k_3)q_1^2 + (k_1 + k_3)q_2^2],$$

$$a_{m1} = o_m m_1, \quad a_{m2} = o_m m_2, \quad b_{m1} = \frac{o_m}{s_1}, \quad b_{m2} = \frac{o_m}{s_2}, \quad \bar{M}_0 = \bar{M}(0),$$

$$A_1 = -\frac{b_1}{\delta_1}, \quad B_1 = \frac{\delta_1(b_{m1} - a_{m1} + s_1 \bar{M}_0) + b_{m1} s_1 + \bar{M}_0 \delta_1^2}{\delta_1(s_1 + \delta_1)}, \quad C_1 = \frac{a_{m1}}{s_1 + \delta_1},$$

$$A_2 = -\frac{b_2}{\delta_2}, \quad B_2 = e^{\delta_2 T} \frac{\delta_2(b_{m2} - a_{m2} e^{s_2 T} + s_2 \bar{M}_0) + b_{m2} s_2 + \bar{M}_0 \delta_2^2}{\delta_2(s_2 + \delta_2)}, \quad C_2 = \frac{a_{m2}}{s_2 + \delta_2}.$$

Далее мы формулируем следующее утверждение, обеспечивающее выполнение ранее заданного условия из Определения 3.2 для всех $\epsilon \in [0, \infty]$.

Утверждение 3.1. Кооперативно-устойчивый принцип оптимальности не является пустым вдоль кооперативной траектории, то есть $Z(z^{\pi_1}(\epsilon), \epsilon) \neq \emptyset$, $\forall \epsilon \in [0, \infty]$, тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:

$$Y \leq \begin{cases} \frac{I_{\tau T} + E}{G_0}, & s_1 > s_2, \\ \frac{I_0 + E}{G_0}, & s_1 < s_2, \end{cases} \quad (3.33)$$

где

$$\begin{aligned} Y &= k_3 q^2 + k_1(q^2 - q_1^2) + k_2(q^2 - q_2^2), \\ I_{\tau T} &= \frac{(A_1 + B_1 e^{-\delta_1 \tau T} + C_1 e^{s_1 \tau T}) e^{(2s_1 \tau + s_2(1-\tau))T} [1 - e^{-s_1 \tau T}]}{e^{(s_1 \tau + s_2(1-\tau))T} - 1} \left[\frac{1}{s_1} - \frac{e^{(s_2-s_1)\tau T} (e^{-s_2 T} - e^{-s_2 \tau T})}{s_2} \right] - \frac{e^{s_1 \tau T} - 1}{s_1}, \\ I_0 &= \frac{\overline{M}_0 e^{(s_1 \tau + s_2(1-\tau))T}}{e^{(s_1 \tau + s_2(1-\tau))T} - 1} \left[\frac{1 - e^{-s_1 \tau T}}{s_1} - \frac{e^{(s_2-s_1)\tau T} (e^{-s_2 T} - e^{-s_2 \tau T})}{s_2} \right], \\ E &= \frac{e^{\rho T}}{e^{\rho T} - 1} \left[\frac{C_1(-1 + e^{\delta_1 \tau T})}{\delta_1} - \frac{C_2(e^{\delta_2 T} + e^{\delta_2 \tau T})}{\delta_2} + \frac{A_1(1 - e^{-\rho \tau T}) + A_2(e^{-\rho \tau T} - e^{-\rho T})}{\rho} + \frac{B_1(1 - e^{-s_1 \tau T})}{s_1} + \frac{B_2(e^{-s_2 \tau T} - e^{-s_2 T})}{s_2} \right], \\ G_0 &= \frac{e^{\rho T}}{e^{\rho T} - 1} \left[\frac{-2m_1(-1 + e^{\delta_1 \tau T})}{s_1 \delta_1} + \frac{m_1^2(-1 + e^{(2s_1-\rho)\tau T})}{2s_1 - \rho} + \frac{2m_2(e^{\delta_2 \tau T} - e^{\delta_2 T})}{s_2 \delta_2} + \frac{m_2^2(e^{(2s_2-\rho)T} - e^{(2s_2-\rho)\tau T})}{2s_2 - \rho} + \frac{e^{-\rho \tau T}(s_1^2 - s_2^2) + s_2^2 - s_1^2 e^{-\rho T}}{s_1^2 s_2^2 \rho} \right]. \end{aligned}$$

Доказательство. Согласно определению 3.2, принцип оптимальности гарантирует, что множество $Z(z^{\pi_1}(\epsilon), \epsilon)$ не пусто вдоль кооперативной траектории, если для всех $\epsilon \in [0, \infty]$ выполняется неравенство:

$$K^{\pi_1}(z^{\pi_1}(\epsilon), v^{\pi_1}) - K_1^{\pi_{42}}(z^{\pi_1}(\epsilon), v^{\pi_{42}}) - K_2^{\pi_{41}}(z^{\pi_1}(\epsilon), v^{\pi_{41}}) - K_3^{\pi_3}(z^{\pi_1}(\epsilon), v^{\pi_3}) \geq 0. \quad (3.34)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} &K^{\pi_1}(z^{\pi_1}(\epsilon), v^{\pi_1}) - K_1^{\pi_{42}}(z^{\pi_1}(\epsilon), v^{\pi_{42}}) - K_2^{\pi_{41}}(z^{\pi_1}(\epsilon), v^{\pi_{41}}) - K_3^{\pi_3}(z^{\pi_1}(\epsilon), v^{\pi_3}) \\ &= \int_{\epsilon}^{\infty} e^{-\rho(t-\epsilon)} L^2(t) [k_1(q_1^2 - q^2) + k_2(q_2^2 - q^2) - k_3 q^2] dt + \int_{\epsilon}^{\infty} e^{-\rho(t-\epsilon)} M(t) dt. \end{aligned}$$

Обозначим $G(\epsilon) = \int_{\epsilon}^{\infty} e^{-\rho t} L^2(t) dt$, $Y = k_3 q^2 + k_1(q^2 - q_1^2) + k_2(q^2 - q_2^2)$, тогда неравенство (3.34) может быть переписано в следующем виде:

$$Y \leq \min_{\epsilon} \left[\frac{\int_{\epsilon}^{\infty} e^{-\rho t} M(t) dt}{G(\epsilon)} \right]. \quad (3.35)$$

Напомним, что $L(t)$ — единственный определенный гибридный предельный цикл. При $s_1 > s_2$ имеем $m_1 < 0$ и $m_2 > 0$, что указывает на убывание $L(t)$ в первой подпериоде и его возрастание во второй. И наоборот при $s_1 < s_2$.

Поскольку $L^2(t)$ и $\bar{M}(t)$ — периодические функции, имеем $G(\epsilon) = e^{-\rho\epsilon}G(0)$ и $\int_{\epsilon}^{\infty} e^{-\rho t} \bar{M}(t) dt = e^{-\rho\epsilon} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \bar{M}(t) dt$.

Для $\pi = \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_{41}, \pi_{42}$ в подыгре $\Gamma(z^{\pi_1}(\epsilon), \epsilon)$, $t \geq \epsilon$ вдоль кооперативной траектории $z^{\pi_1}(\epsilon)$ имеем

$$z^{\pi}(t) = \phi(t, z^{\pi_1}(\epsilon)) = e^{-\int_{\epsilon}^t \delta(s) ds} \left[z^{\pi_1}(\epsilon) + \int_{\epsilon}^t \sum_{i=1}^3 \xi_i v_i^{\pi}(\tau) e^{\int_{\epsilon}^{\tau} \delta(s) ds} d\tau \right]. \quad (3.36)$$

Пусть $z^{\pi_{4j}}(\epsilon) = z^{\pi_1}(\epsilon)$, $j = 1, 2$, тогда

$$\begin{aligned} f_j(t) &= z^{\pi_{4j}}(t) - z^{\pi_1}(t) = z^{\pi_{4j}}(t) - \bar{z}^{\pi_{4j}}(t) - (z^{\pi_1}(t) - \bar{z}^{\pi_1}(t)) + \bar{z}^{\pi_{4j}}(t) - \bar{z}^{\pi_1}(t) \\ &= e^{-\int_{\epsilon}^t \delta(s) ds} (\bar{z}^{\pi_1}(\epsilon) - \bar{z}^{\pi_{4j}}(\epsilon)) + \bar{z}^{\pi_{4j}}(t) - \bar{z}^{\pi_1}(t) \\ &= -\bar{f}_j(\epsilon) e^{-\int_{\epsilon}^t \delta(s) ds} + \bar{f}_j(t) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Следовательно, в подыгре $\Gamma(z^{\pi_1}(\epsilon), \epsilon)$, $t \geq \epsilon$, используя найденные общие решения z^{π} из (3.36) и (3.37), упрощаем

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\epsilon}^{\infty} e^{-\rho t} M(t) dt}{G(\epsilon)} &= \frac{-\bar{M}(\epsilon) \int_{\epsilon}^{\infty} e^{-\rho t - \int_{\epsilon}^t \delta(s) ds} dt + \int_{\epsilon}^{\infty} e^{-\rho t} \bar{M}(t) dt}{G(\epsilon)} \\ &= \frac{-\bar{M}(\epsilon) \int_{\epsilon}^{\infty} e^{-\rho t - \int_{\epsilon}^t \delta(s) ds} dt + e^{-\rho\epsilon} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \bar{M}(t) dt}{e^{-\rho\epsilon} G(0)} \\ &= \frac{-\bar{M}(\epsilon) \int_{\epsilon}^{\infty} e^{-\rho(t-\epsilon) - \int_{\epsilon}^t \delta(s) ds} dt + \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \bar{M}(t) dt}{G(0)}. \end{aligned}$$

Обозначим $h(\epsilon) = \int_{\epsilon}^{\infty} e^{-\rho(t-\epsilon) - \int_{\epsilon}^t \delta(s) ds} dt$. Тогда

$$\arg \min_{\epsilon} \left[\frac{-\bar{M}(\epsilon) h(\epsilon) + \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \bar{M}(t) dt}{G(0)} \right] = \arg \max_{\epsilon} [\bar{M}(\epsilon) h(\epsilon)].$$

Для $o_m = -2[(k_1 + k_2)q_1q_2 + (k_1 + k_3)q_1^2 + (k_1 + k_3)q_2^2]$, динамика $\bar{M}(\epsilon)$ описывается уравнением

$$\begin{aligned} \dot{\bar{M}}(\epsilon) &= q_1 \dot{f}_2(t) + q_2 \dot{f}_1(t) \\ &= o_m L(\epsilon) - \delta(\epsilon) \bar{M}(\epsilon). \end{aligned}$$

Стационарное состояние функции $\overline{M}(\epsilon)$ вычисляется следующим образом:

$$\overline{M}^*(\epsilon) = \begin{cases} \frac{o_m L(\epsilon)}{\delta_1}, & \epsilon \in [kT, (k + \tau)T], \\ \frac{o_m L(\epsilon)}{\delta_2}, & \epsilon \in [(k + \tau)T, (k + 1)T]. \end{cases}$$

Для $s_1 > s_2$ ($s_1 < s_2$) функция $L(\epsilon)$ на каждом периоде (T) сначала убывает (возрастает), а затем возрастает (убывает). Кроме того, при $\epsilon \in [0, \infty]$ функция $\overline{M}(\epsilon)$ представляет собой гибридный предельный цикл, зависящий от периода T . Следовательно, при $s_1 > s_2$ ($s_1 < s_2$) функция $\overline{M}(\epsilon)$ на каждом периоде (T) сначала возрастает (убывает), а затем убывает (возрастает).

Далее рассмотрим функцию $h(\epsilon) = \int_{\epsilon}^{\infty} e^{-\rho(t-\epsilon) - \int_{\epsilon}^t \delta(s) ds} dt$. Обозначим $k_{\epsilon} = \lfloor \frac{\epsilon}{T} \rfloor T$, $o = \frac{1 - e^{-s_1 \tau T}}{s_1} - \frac{e^{(P_2 - P_1) \tau T} (e^{-s_2 T} - e^{-s_2 \tau T})}{s_2}$. Явное выражение для $h(\epsilon)$ имеет следующий вид:

$$h(\epsilon) = \begin{cases} h_1(\epsilon), & \text{если } 0 \leq \epsilon - k_{\epsilon} \leq \tau T, \\ h_2(\epsilon), & \text{если } \tau T \leq \epsilon - k_{\epsilon} \leq T, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} h_1(\epsilon) &= \frac{e^{(s_1 \tau + s_2 (1 - \tau))T + s_1 (\epsilon - k_{\epsilon})}}{e^{(s_1 \tau + s_2 (1 - \tau))T} - 1} o - \frac{e^{s_1 (\epsilon - k_{\epsilon})} - 1}{s_1}, \\ h_2(\epsilon) &= \frac{e^{(s_1 \tau + s_2 (1 - \tau))T + s_1 \tau T + (\epsilon - k_{\epsilon} - \tau T) s_2}}{e^{(s_1 \tau + s_2 (1 - \tau))T} - 1} o - \\ &\quad - \frac{e^{s_1 \tau T + (\epsilon - k_{\epsilon} - \tau T) s_2} - e^{(\epsilon - k_{\epsilon} - \tau T) s_2}}{s_1} + \frac{1 - e^{(\epsilon - k_{\epsilon} - \tau T) s_2}}{s_2}. \end{aligned}$$

Первая производная $h(\epsilon)$ равна

$$\frac{dh(\epsilon)}{d\epsilon} = \begin{cases} e^{s_1 (\epsilon - k_{\epsilon})} \left[\frac{(s_2 - s_1)(1 - e^{s_2 (1 - \tau)T})}{s_2 (e^{(s_1 \tau + s_2 (1 - \tau))T} - 1)} \right], & \text{если } 0 \leq \epsilon - k_{\epsilon} \leq \tau T, \\ e^{s_2 (\epsilon - k_{\epsilon} - \tau T)} \left[\frac{(s_2 - s_1)(e^{s_1 \tau T} - 1)}{s_1 (e^{(s_1 \tau + s_2 (1 - \tau))T} - 1)} \right], & \text{если } \tau T \leq \epsilon - k_{\epsilon} \leq T. \end{cases}$$

Легко убедиться, что при $s_1 > s_2$ ($s_1 < s_2$), в первом подпериоде каждого периода T выполняется $\frac{dh(\epsilon)}{d\epsilon} > 0$ ($\frac{dh(\epsilon)}{d\epsilon} < 0$), тогда как во втором подпериоде — $\frac{dh(\epsilon)}{d\epsilon} < 0$ ($\frac{dh(\epsilon)}{d\epsilon} > 0$). Так как $h(\epsilon) = h(\epsilon + kT)$ и $h(\epsilon) > 0$ имеет ту же тенденцию, что и $\overline{M}(\epsilon) > 0$, делаем вывод, что функция $\overline{M}(\epsilon)h(\epsilon)$ представляет собой гибридный предельный цикл. Следовательно,

$$\arg \max_{\epsilon} [\overline{M}(\epsilon)h(\epsilon)] = \begin{cases} \tau T + kT, & \text{если } s_1 > s_2, \\ kT, & \text{если } s_1 < s_2. \end{cases} \quad (3.38)$$

Положим $k = 0$ и подставим (3.38) в (3.35). Для упрощения обозначений введем следующие выражения:

$$\begin{aligned} I_{\tau T} &= -\overline{M}(\tau T) \int_{\tau T}^{\infty} e^{-\rho(t-\tau T) - \int_{\tau T}^t \delta(s)ds} dt, & I_0 &= -\overline{M}(0) \int_0^{\infty} e^{-\rho t - \int_0^t \delta(s)ds} dt, \\ E &= \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \overline{M}(t) dt, & G_0 &= \int_0^{\infty} e^{-\rho t} L^2(t) dt. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Вычислив указанные выражения в явном виде, получаем утверждение. $\square$

Следовательно, тогда и только тогда, когда существует набор параметров, удовлетворяющий условиям Утверждения 3.1, обеспечивается непустота кооперативно-устойчивого принципа оптимальности $Z(z^{\pi_1}(\epsilon), \epsilon)$. Путем разумного распределения выигрыша большой коалиции возможно обеспечить устойчивость кооперации, поскольку отклонение от нее приведет к потерям для игрока.

3.4.2 Динамическая устойчивость кооперативно-устойчивого принципа оптимальности

Поскольку принцип оптимальности $Z(z^{\pi_1}(\epsilon), \epsilon)$ не является пустым ни в один момент времени при выполнении вышеуказанных условий, мы можем далее рассмотреть важное свойство кооперативного решения — динамическую устойчивость. В рамках этого свойства участники соглашения, следуя кооперативной траектории, придерживаются одного и того же принципа оптимальности на протяжении всего времени. В результате у них отсутствует немедленный стимул отказаться от ранее принятого решения о сотрудничестве.

Понятие динамической устойчивости кооперативного решения было впервые введено Л.А. Петросяном в 1977 году [63]. В работе [64] был предложен метод построения динамически устойчивых кооперативных решений с использованием специальной схемы распределения выигрыша, называемой

процедурой распределения дележа (IDP). В работе [66] исследовалась задача построения динамически устойчивой IDP для кооперативной игры по снижению загрязнения с дисконтированными выплатами. В данной работе мы подробно рассматриваем это понятие для рассматриваемого класса игр.

Определение 3.3. Вектор-функция $w(t) = (w_1(t), \dots, w_n(t))$, $t \in [t_0, T]$ называется процедурой распределения дележа (IDP) для дележа $\eta(z_0, 0) \in R(z_0, 0)$, если

$$\eta_i(z_0, 0) = \int_0^\infty e^{-\rho s} w_i(s) ds, \quad i \in N.$$

Величину $w_i(t)$ можно интерпретировать как мгновенную выплату, выделяемую игроку i в момент времени t .

Определение 3.4. Принцип оптимальности $P(z_0, 0) \subset R(z_0, 0)$ называется динамически устойчивым, если

1. $P(z^{\pi_1}(t), t) \neq \emptyset$, $\forall t \in [0, \infty]$
2. Для любого $\zeta \in P(z_0, 0)$ существует процедура распределения дележа $w(s) = (w_1(s), \dots, w_n(s))$, $s \in [0, \infty]$, такая что $\zeta_i = \int_0^\infty e^{-\rho s} w_i(s) ds$, $i \in N$ и

$$P(z_0, 0) \subset \int_0^t e^{-\rho s} w(s) ds \oplus e^{-\rho t} P(z^{\pi_1}(t), t), \forall t \in [0, \infty].$$

Символ $\oplus$ обозначает $a \oplus B = \{a + b : b \in B\}$, для $a \in R^n$ и $B \subset R^n$.

Для принципа оптимальности $Z(z_0, 0)$ условие 1 в Определении 3.4 выполняется, когда неравенство (3.33) выполняется. Условие 2 можно интерпретировать следующим образом. Для каждого дележа из принципа оптимальности существует такая IDP, что в любой момент времени этот дележ может быть представлена как сумма накопленной выплаты до времени t (значение, задаваемое первым правым членом) и дележа из того же принципа оптимальности в подыгре, начинающейся в этот момент времени (второй правый член). В работе [66] была предложена IDP, которая обеспечивает выполнение этого условия, и выведена формула для получения такой процедуры. Согласно этой формуле, динамически устойчивая IDP для дележа $\zeta(z_0) \in Z(z_0, 0)$ имеет следующий вид:

$$w_i(\epsilon) = \rho \zeta_i(z^{\pi_1}(\epsilon)) - \frac{d\zeta_i(z^{\pi_1}(\epsilon))}{d\epsilon}. \quad (3.40)$$

Для проверки этого достаточно проверить выполнение условий (3.41–3.42).

$$\zeta_i(z^{\pi_1}(0)) = \int_0^\infty e^{-\rho s} w_i(s) ds, \quad (3.41)$$

$$\int_0^\epsilon e^{-\rho s} w_i(s) ds + e^{-\rho \epsilon} \zeta_i(z^{\pi_1}(\epsilon)) = \zeta_i(z^{\pi_1}(0)), \quad \forall \epsilon \in [0, \infty]. \quad (3.42)$$

Чтобы получить более удобную для вычислений форму динамически устойчивой IDP, мы представляем выплату игроку i , $i = 1, 2, 3$, в подыгре $\Gamma(z^{\pi_1}(\epsilon), \epsilon)$ следующим образом

$$\begin{aligned} \zeta_1(z^{\pi_1}(\epsilon)) &= K_1^{\pi_{42}}(z^{\pi_1}(\epsilon), v^{\pi_{42}}) + \alpha_1 SC(\epsilon), \\ \zeta_2(z^{\pi_1}(\epsilon)) &= K_2^{\pi_{41}}(z^{\pi_1}(\epsilon), v^{\pi_{41}}) + \alpha_2 SC(\epsilon), \\ \zeta_3(z^{\pi_1}(\epsilon)) &= K_3^{\pi_3}(z^{\pi_1}(\epsilon), v^{\pi_3}) + \alpha_3 SC(\epsilon), \end{aligned} \quad (3.43)$$

где $SC(\epsilon)$ — это избыток сотрудничества $SC(\epsilon) = K^{\pi_1}(z^{\pi_1}(\epsilon), v^{\pi_1}) - K_1^{\pi_{42}}(z^{\pi_1}(\epsilon), v^{\pi_{42}}) - K_2^{\pi_{41}}(z^{\pi_1}(\epsilon), v^{\pi_{41}}) - K_3^{\pi_3}(z^{\pi_1}(\epsilon), v^{\pi_3}) > 0$, и $\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1$, $\alpha_i \in [0, 1]$. Используя форму дележа (3.43) и формулу (3.40), мы получаем выражение для динамически устойчивой IDP в рассматриваемой игре:

$$\begin{aligned} w_i(\epsilon) &= a_i v_i^{NE}(\epsilon) \left(b_i - \frac{v_i^{NE}(\epsilon)}{2} \right) - q_i z^{\pi_1}(\epsilon) + \\ &\quad \alpha_i \sum_{i=1}^3 a_i \left[v_i^{co}(\epsilon) \left(b_i - \frac{v_i^{co}(\epsilon)}{2} \right) - v_i^{NE}(\epsilon) \left(b_i - \frac{v_i^{NE}(\epsilon)}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Таким образом, осуществляя выплаты в ходе игры согласно полученной IDP, игроки обеспечивают динамическую устойчивость изначально выбранного дележа. Можно заметить, что игроки используют один и тот же дележ, то есть один и тот же вектор α в (3.43), на протяжении всей игры. Однако принцип оптимальности может включать множество дележей, и естественно подумать о возможном переходе от дележа, выбранного в начале игры, к другому дележу из того же принципа оптимальности в любой промежуточный момент времени. Если принцип оптимальности сильно динамически устойчив, то сумма накопленных выплат до момента переключения и новый дележ в подыгре принадлежит начальному принципу оптимальности. Это свойство кооперативного решения было введено Л. Петросяном [65].

Определение 3.5. Принцип оптимальности $P(z_0, 0) \subset L(z_0, 0)$ называется сильно динамически устойчивым, если

1. $P(z^{\pi_1}(t), t) \neq \emptyset, \forall t \in [0, \infty]$
2. Для любого $\zeta \in P(z_0, 0)$ существует такая IDP $w(s) = (w_1(s), \dots, w_n(s))$, $s \in [0, \infty]$, что $\zeta_i = \int_0^\infty e^{-\rho s} w_i(s) ds, i \in N$ и

$$P(z_0, 0) \supset \int_0^t e^{-\rho s} w(s) ds \oplus e^{-\rho t} P(z^{\pi_1}(t), t), \forall t \in [0, \infty].$$

Отметим, что использование IDP (3.40) не гарантирует сильную динамическую устойчивость принципа оптимальности $Z(z^{\pi_1}(t), t)$. Чтобы продемонстрировать это, рассмотрим дележ $\zeta'(z^{\pi_1}(\epsilon)) \in Z(z^{\pi_1}(\epsilon), \epsilon)$:

$$\begin{aligned} \zeta'_1(z^{\pi_1}(\epsilon)) &= K_1^{\pi_{42}}(z^{\pi_1}(\epsilon), v^{\pi_{42}}) + \alpha'_1 SC(\epsilon), \\ \zeta'_2(z^{\pi_1}(\epsilon)) &= K_2^{\pi_{41}}(z^{\pi_1}(\epsilon), v^{\pi_{41}}) + \alpha'_2 SC(\epsilon), \\ \zeta'_3(z^{\pi_1}(\epsilon)) &= K_3^{\pi_3}(z^{\pi_1}(\epsilon), v^{\pi_3}) + \alpha'_3 SC(\epsilon). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Предположим, что до момента ϵ кооперативная выплата распределяется согласно IDP (3.40). Игрок 1 до этого момента будет иметь

$$\int_0^\epsilon e^{-\rho s} w_1(s) ds = K_1^{\pi_{42}}(z_0, 0) - e^{-\rho \epsilon} K_1^{\pi_{42}}(z^{\pi_1}(\epsilon), \epsilon) + \alpha_1(SC(0) - e^{-\rho \epsilon} SC(\epsilon)).$$

Затем, если произойдет переключение в момент ϵ от дележа ζ к ζ' , результирующая выплата игрока 1 примет следующий вид

$$\begin{aligned} \int_0^\epsilon e^{-\rho s} w_1(s) ds + e^{-\rho \epsilon} \zeta'_1(z^{\pi_1}(\epsilon)) = \\ K_1^{\pi_{42}}(z_0, 0) + \alpha_1(SC(0) - e^{-\rho \epsilon} SC(\epsilon)) + \alpha'_1 SC(\epsilon). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Поскольку $Y > 0$ и $M(0) = 0$, подынтегральная функция $e^{-\rho t}[-L^2(t)Y + M(t)]$ при интегрировании $SC(0)$ в момент $t = 0$ отрицательна. То есть существует период времени от 0 до t' , в течение которого эта подынтегральная функция отрицательна. Следовательно, $SC(0) - e^{-\rho t'} SC(t') < 0$ и мы не можем гарантировать, что $\alpha_1(SC(0) - e^{-\rho \epsilon} SC(\epsilon)) + \alpha'_1 SC(\epsilon) \geq 0$ для любых α , α' и ϵ . Таким образом, комбинированный дележ (3.46) во всей игре может не принадлежать $Z(z^{\pi_1}(0), 0)$. Следовательно, мы приходим к выводу, что кооперативно-устойчивый принцип оптимальности $Z(z^{\pi_1}(t), t)$ не является сильно динамически устойчивым.

3.5 Числовая иллюстрация

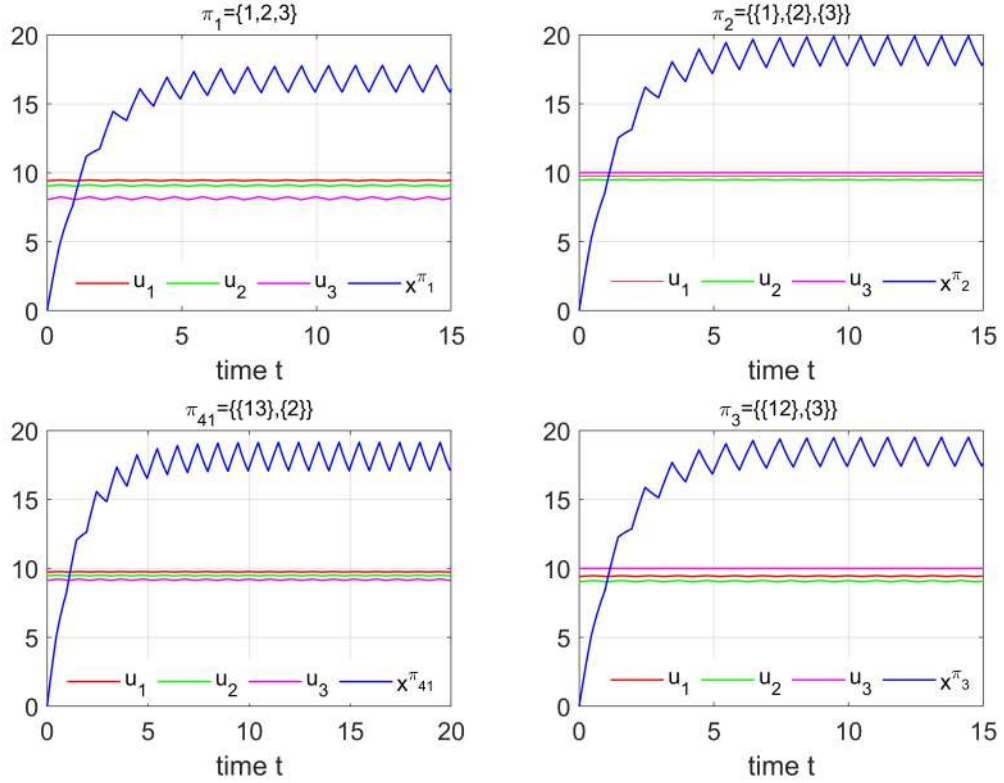


Рис. 3.1: Стратегии и соответствующие состояния при различных структурах коалиции.

В соответствии с предложением 3.1, рассматриваемая в дальнейшем параметрическая настройка такова: $\delta_1 = 0.45$; $\delta_2 = 0.9$; $T = 1$; $\tau = 0.5$; $\rho = 0.3$; $q_1 = 4$; $q_2 = 5$; $\xi_1 = 0.3$; $\xi_2 = 0.4$; $\xi_3 = 0.6$; $a_1 = 5$; $a_2 = 4$; $a_3 = 3$; $b_1 = b_2 = b_3 = 10$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/3$; $z_0 = 0$. Стратегии игроков и соответствующие состояния при различных структурах коалиции показаны на рисунке 3.1.

Отметим, что в коалиции с сотрудничеством уровень загрязнения поддерживается на минимальном уровне. Интересно заметить, что в других случаях стратегии выбросов игроков более агрессивны. Особенно для игрока 3, чья скорость выбросов достигает наибольшего допустимого значения в коалициях π_2 и π_3 . Из-за более разумных и умеренных стратегий выбросов игроков при долгосрочном рассмотрении кооперативная коалиция доминирует над другими структурами коалиций как в экономическом, так и в экологическом аспектах. Поскольку структура коалиции π_{42} аналогична π_{41} , нет необходимости иллюстрировать эту ситуацию.

На рисунке 3.2 показаны выплаты каждому игроку в подыгре, начинающейся с $\epsilon \in [0, \infty]$, т.е. от верхнего значения $\epsilon = 0$ до начальной точки $\epsilon = \infty$. Предложенный кооперативно-устойчивый принцип оптимальности (красная область) принадлежит множеству дележей (светло-желтая область). Синяя сплошная линия, принадлежащая кооперативно-устойчивому принципу оптимальности, представляет выплаты игрокам, определяемые по формуле (3.43), для подыгры $\Gamma(z^{\pi_1}(\epsilon), \epsilon)$.

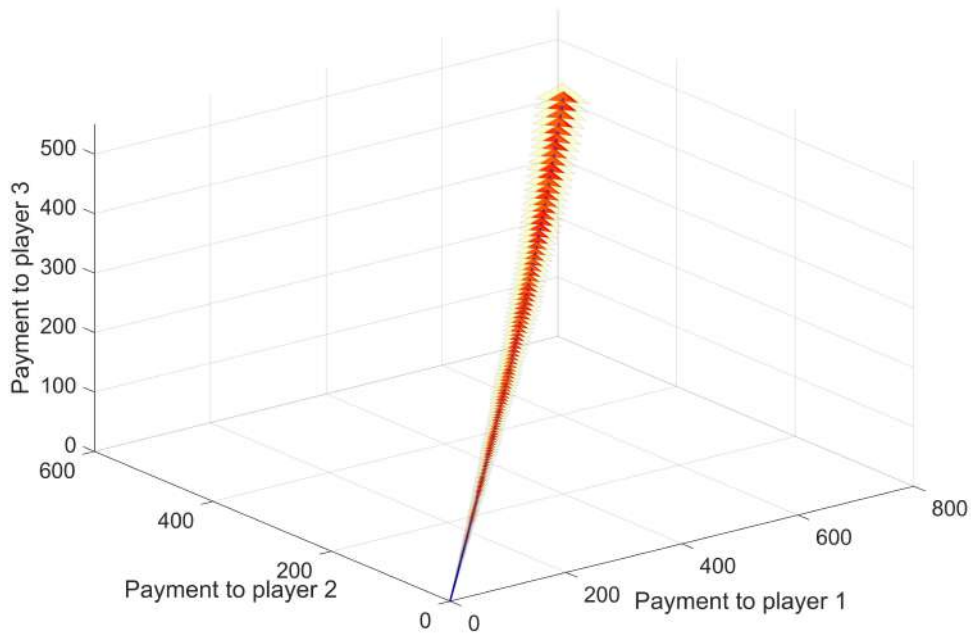


Рис. 3.2: Выплата каждому игроку.

3.6 Заключение к Главе 3

В этой главе мы проанализировали дифференциальную игру трех лиц для типичной задачи гибридного оптимального контроля загрязнения с двумя типами игроков: дальнотзорными и близорукими. Регулярные сдвиги режимов моделируются с помощью кусочно-постоянного параметра в динамике системы. Учитывая все возможные механизмы формирования коалиций, в каждой допустимой структуре коалиции стратегии игроков получаются однозначно, и переменная состояния сходится к уникальному гибриднему предельному циклу.

Предложен инновационный кооперативно-устойчивый принцип оптималь-

ности. Получена процедура распределения дележа, обеспечивающая динамическую устойчивость этого принципа оптимальности.

Заключение

Данное исследование представляет собой всестороннее изучение гибридных дифференциальных игр, применяемых к управлению загрязнением, интегрируя теорию оптимального управления, теорию игр и динамические системы. Основной целью работы является разработка устойчивой стратегии управления загрязнением в условиях неопределенности, переключающихся поведений и динамических изменений состояния. Используя многогранный подход, который сочетает математическое моделирование, анализ с использованием теории игр и теорию управления, исследование предлагает ценные идеи о балансе между промышленной прибыльностью и экологической устойчивостью. Вклад этой работы охватывает несколько областей, от оптимального управления в управлении загрязнением до моделирования переключаемых дифференциальных игр и анализа кооперативных и некооперативных решений в динамической многопользовательской среде.

На основе математической модели оптимального управления загрязнением озера, вызванного выбросами промышленных предприятий, с сезонными колебаниями коэффициента самоочищения озера, в диссертации исследуется дифференциальная игра с переключениями для n игроков. Развивая эту основу, диссертация дальше исследует дифференциальную игру с переключением для n игроков, в которой продолжительность игры является случайной. Рассматриваются два различных сценария в данной модели: один, где продолжительность игры следует смещенному экспоненциальному распределению, и другой, где время отказов оборудования игроков варьируются. В обоих случаях исследование использует принцип максимума Понтрягина для вывода уникального управляющего решения, представленного гибридным пределом цикла. Сходимость переменных состояния при этом решении демонстрирует устойчивость стратегии, показывая, что она не только способствует росту прибыли, но и обеспечивает защиту окружающей среды.

Это исследование примечательно тем, что учитывает случайность продолжительности игры, что отражает реальные сценарии, где время событий, таких как поломка оборудования или изменения в регулировании, часто непредсказуемо. Понятие природо-устойчивой стратегии исследуется более подробно, показывая, как сотрудничество между игроками приводит к глобально оптимальной стратегии, которая сбалансирована экологические проблемы с экономическими стимулами. Результаты подчеркивают важность принятия обоснованных решений в условиях неопределенности, где сотрудничество может привести к наиболее благоприятным результатам для всех участвующих сторон. Более того, анализ иллюстрирует, как стратегии могут адаптироваться к неожиданным изменениям, что делает их более устойчивыми к внешним шокам и более устойчивыми в долгосрочной перспективе.

Дальше расширяя этот анализ, диссертация исследует как кооперативные, так и некооперативные сценарии в гибридной игре управления загрязнением с переключающимся поведением и случайными продолжительностями для n игроков. Применяя принцип максимума Понтрягина и анализируя сопряженные переменные, исследование выявляет устойчивые равновесия в обоих типах игр. Анализ демонстрирует, что кооперативное решение, полученное с использованием значения Шепли, приводит к уникальному глобально оптимальному результату, при котором игроки сотрудничают для максимизации как прибыли, так и экологической устойчивости. В отличие от этого, некооперативное поведение, хотя и может максимизировать индивидуальные выигрыши в краткосрочной перспективе, часто приводит к неэффективным долгосрочным результатам, включая экологическое разрушение. Исследование подчеркивает важность учета как кооперативных, так и некооперативных динамик при разработке политик управления загрязнением. Также показано, что гибридный предел цикл играет центральную роль в сходимости переменных состояния и в вычислении выплат, что делает его важным элементом для понимания долгосрочной динамики игр управления загрязнением. Эти идеи являются полезными как для политиков, так и для промышленности, предлагая рекомендации по структуре стимулов, которые способствуют сотрудничеству и сокращению экологического следа промышленной деятельности. Результаты подчеркивают, что сотрудниче-

ство, даже в конкурентной среде, может привести к более устойчивым и эффективным стратегиям управления загрязнением.

В последней главе анализируется дифференциальная игра трех лиц для гибридной проблемы контроля загрязнения с участием двух дальновидных игроков и одного близорукого игрока. Сезонные смены режимов моделируются с помощью кусочно-постоянного параметра, и единственные стратегии выводятся для всех возможных коалиционных структур, что приводит к сходимости переменной состояния к уникальному гибричному предельному циклу. Вводится инновационный кооперативно-устойчивый принцип оптимальности, для которого получена процедура распределения дележа (IDP), гарантирующая динамическую устойчивость этого решения.

Результаты этой работы имеют значительные практические последствия для реального управления загрязнением. Предоставив прочную математическую основу для моделирования и решения гибридных дифференциальных игр в динамических многопользовательских системах, это исследование предлагает ценные идеи для политиков, руководителей промышленных предприятий и экологических регуляторов. Природо-устойчивые стратегии, полученные в данной работе, могут быть применены к различным сценариям управления загрязнением, от управления промышленными выбросами до охраны ресурсов. Включение неопределенности и динамических переключающихся поведений делает модель более реалистичной, поскольку она учитывает непредсказуемую природу экологических процессов и промышленных операций. В будущем исследование может развиваться, уточняя модели для учета дополнительных сложностей, таких как многоэтапные игры или более детализированные экологические динамики, а также расширяя анализ на другие реальные системы, где преобладают неопределенность и переключающиеся явления. Более того, применение этой основы к другим типам экологических проблем, таким как управление водными ресурсами, вырубка лесов или смягчение изменений климата, представляет собой увлекательную область для дальнейшего исследования, с потенциальной возможностью широких социальных выгод. Эти вклады предоставляют основу для продвижения устойчивых практик развития в различных секторах.

Более того, сравнительный анализ кооперативных и некооперативных стратегий дает ценные идеи о том, как различные динамики игр приводят к

различным долгосрочным результатам, тем самым обогащая теоретическое понимание экологической теории игр. Исследование также открывает путь для дальнейшего исследования более сложных моделей, таких как те, которые включают несколько этапов или более гетерогенные типы игроков, что способствует более глубокому пониманию стратегического принятия решений в экологических контекстах.

В заключение, эта работа продвигает область гибридных дифференциальных игр, предлагая новую основу для анализа управления загрязнением в динамических многопользовательских системах. Разрабатывая стратегии оптимального управления, исследование подчеркивает важность балансировки промышленной прибыли с экологической устойчивостью. Работа демонстрирует, что кооперативные стратегии приводят к лучшим долгосрочным результатам как для промышленности, так и для окружающей среды, в то время как гибридные пределы циклов обеспечивают мощный инструмент для моделирования сходимости переменных состояния в сложных, неопределенных средах. Результаты этой работы способствуют разработке устойчивых экологических политик, которые учитывают как экономические стимулы, так и экологические ограничения, предлагая путь для достижения устойчивого развития в управлении загрязнением. Интеграция теории игр и теории управления, в сочетании с реальными приложениями, делает это исследование важным вкладом как в научную сферу, так и в сферу политики, предоставляя основу для решения некоторых из самых острых экологических проблем нашего времени. В конечном итоге эта работа способствует более глубокому пониманию того, как выравнивать экономические цели с сохранением экологии в контексте сложных, неопределенных систем, открывая путь для более эффективных решений экологических проблем.

Литература

- [1] Aleksandrov, A. Y., Andriyanova, N. R. Fixed-time stability of switched systems with application to a problem of formation control // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2021. Vol. 40. P. 101008.
- [2] Ali, U., Egerstedt, M. Optimal control of switched dynamical systems under dwell time constraints-Theory and Computation // IEEE Transactions on Automatic Control. 2024.
- [3] Altamirano-Cabrera, J. C., Wangler, L., Weikard, H. P. & Kroll, S. Political Economy of International Environmental Agreements // Encyclopedia of Energy, Natural Resource, and Environmental Economics. Vol. 3 Environment. 2013. P. 300–305.
- [4] Ang, A. & Bekaert, G. Regime switches in interest rates // Journal of Business & Economic Statistics. 2002. Vol. 20. N. 2. P. 163–182.
- [5] Arguedas, C., Cabo, F. & Martín-Herrán, G. Optimal Pollution Standards and Non-compliance in a Dynamic Framework // Environmental and Resource Economics. 2017. Vol. 68. N. 3. P. 537–567.
- [6] Arguedas, C., Cabo, F. & Martín-Herrán, G. Enforcing regulatory standards in stock pollution problems // Journal of Environmental Economics and Management. 2020. Vol. 100. P. 102297.
- [7] Balas, T. & Tur, A. The Hamilton–Jacobi–Bellman Equation for Differential Games with Composite Distribution of Random Time Horizon // Mathematics. 2023. Vol. 11. N. 2. P. 462.
- [8] Barseghyan, V. R. On the Condition of Complete Controllability of Stage-by-Stage Changing Linear Dynamic Systems with Varying Dimension of

- the Control Vector // Proceedings of the 15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems. 2020. P. 1–4.
- [9] Benghea, S. C., and DeCarlo, R. A. Optimal control of switching systems // Automatica. 2005. Vol. 41. N. 1. P. 11–27.
- [10] Bondarev A., Gromov D., On the Structure and Regularity of Optimal Solutions in a Differential Game with Regime Switching and Spillovers // In: Haunschmied J.L., Kovacevic R.M., Semmler W., Veliov V.M. (eds.) Dynamic Economic Problems with Regime Switches. Dynamic Modeling and Econometrics in Economics and Finance. Vol. 25. Springer, Cham. 2021. p. 187–207.
- [11] N. Bonneuil, R. Boucekkine, Optimal transition to renewable energy with threshold of irreversible pollution // Eur. J. Oper. Res. 2016. Vol. 248. N.1. P. 257–262.
- [12] Breton, M., Zaccour, G. & Zahaf, M. A differential game of joint implementation of environmental projects // Automatica. 2005. Vol. 41. N. 10. P. 1737–1749.
- [13] Bull, K. R. The critical loads/levels approach to gaseous pollutant emission control // Environmental Pollution. 1991. Vol. 69. N. 2–3. P. 105–123.
- [14] Caines, P. E., Egerstedt, M., Malhame, R. & Schoellig, A. A Hybrid Bellman Equation for Bimodal Systems // In: Bemporad A., Bicchi A., Buttazzo G. (eds.) Hybrid Systems: Computation and Control. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 4416. Springer, Berlin, Heidelberg. 2007. P. 656–659.
- [15] Cassandras, C. G., Pepyne, D. L. & Wardi, Y. Optimal control of a class of hybrid systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2001. Vol. 46. P. 398–415.
- [16] Chen, Z., Xia, B., You, C., et al. A novel energy management method for series plug-in hybrid electric vehicles // Applied Energy. 2015. Vol. 145. P. 172–179.

- [17] Chervinski A., Ecological Evaluation of Economic Evaluation of Environmental Quality // *Procedia Economics and Finance*. 2014, Vol. 8, P. 150–156.
- [18] Cho, S. J., Lee, J. S., Kim, J., et al. Adaptive time-delay control with a supervising switching technique for robot manipulators // *Transactions of the Institute of Measurement and Control*. 2017. Vol. 39. P. 1374–1382.
- [19] De Frutos, C., Marín-Solano, J. & Navas, J. Competition between different groundwater uses under water scarcity // *Water Resources Economics*. 2021. Vol. 33. P. 100173.
- [20] De Zeeuw, A., Zemel, A. A consumption–investment problem with heterogeneous discounting // *Mathematical Social Sciences*. 2012. Vol. 66. N. 3. P. 221–232.
- [21] De Zeeuw, A., Zemel, A. Regime shifts and uncertainty in pollution control // *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2012. Vol. 36. P. 939–950.
- [22] De Zeeuw, A. Dynamic games of international pollution control: A selective review // *Handbook of dynamic game theory*. 2018. P. 703–728.
- [23] De Zeeuw, A. A Review of Tipping Points and Precaution using HJB equations // *Dynamic Games and Applications*. 2024. Vol. 14. N. 1. P. 253–270.
- [24] A. De-Paz, J. Marín-Solano, J. Navas, O. Roch, Consumption, investment and life insurance strategies with heterogeneous discounting // *Insur. Math. Econ.* 2014. Vol. 54. P. 66–75.
- [25] De-Paz, A., Marín-Solano, J. & Navas, J. A consumption–investment problem with heterogeneous discounting // *Mathematical Social Sciences*. 2013. Vol. 66(3). P. 221–232.
- [26] Dockner, E., Jørgensen, S., Van Long, N. , et al. *Differential Games in Economics and Management Science*. 2000. Cambridge University Press, Cambridge, U.K.

- [27] Egerstedt, M., Wardi, Y., & Axelsson, H. Transition time optimization for switched mode dynamical systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2006. Vol. 51. N. 1. P. 110–115.
- [28] Fanokoa, P. S., Telahigue, I. & Zaccour, G. Buying cooperation in an asymmetric environmental differential game // Journal of Economic Dynamics and Control. 2008. Vol. 35. N. 6. P. 935–946.
- [29] Finus, M. Game theoretic research on the design of international environmental agreements: insights, critical remarks, and future challenges // International Review of Environmental and Resource Economics. 2008. Vol. 2. N. 1. P. 29–67.
- [30] Goodland, R. The concept of environmental sustainability // Annual Review of Ecology and Systematics. 1995. Vol. 26. N. 1. P. 1–24.
- [31] Griggs, D., Stafford-Smith, M., Gaffney, O., et al. Sustainable development goals for people and planet // Nature. 2013. Vol. 495. N. 7441. P. 305–307.
- [32] Gromov, D., Gromova, E. Differential games with random duration: a hybrid systems formulation // Contributions to Game Theory and Management. 2014. Vol. 7. P. 1–12.
- [33] Gromova, E. V., Tur, A. V. & Balandina, L. I. A game-theoretic model of pollution control with asymmetric time horizons // Contributions to Game Theory and Management. 2016. Vol. 9. P. 170–179.
- [34] Gromov, D. & Gromova, E. On a class of hybrid differential games // Dynamics of Games and Applications. 2017. Vol. 7. N. 2. P. 266–288.
- [35] Gromova, E., Zaremba, A. & Su, S. Time-Consistency of an Imputation in a Cooperative Hybrid Differential Game // Mathematics. 2021. Vol. 9. N. 15. P. 1830.
- [36] Gromov, D., Bondarev, A. & Gromova, E. On periodic solution to control problem with time-driven switching // Optimization Letters. 2022. Vol. 16. N. 7. P. 2019–2031.

- [37] Gromov, D., Shigoka, T. & Bondarev, A. Optimality and sustainability of hybrid limit cycles in the pollution control problem with regime shifts // Environment, Development and Sustainability. 2023. P. 1–18.
- [38] Hakanson, L. An ecological risk index for aquatic pollution control. A sedimentological approach // Water Research. 1980. Vol. 14. N. 8. P. 975–1001.
- [39] Henzinger, T. A. , Sastry, S. , Hybrid Systems: Computation and Control // Lecture Notes in Computer Science. 1998. Vol. 1386.
- [40] Hiskens, I. A. Stability of hybrid system limit cycles: Application to the compass gait biped robot // Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control. 2001. Vol. 1. P. 774–779.
- [41] Hoekstra J. , Van den Bergh, J. C. , Harvesting and conservation in a predator–prey system // Journal of Economic Dynamics and Control. 2005. Vol. 29. P. 1097–1120.
- [42] Huang, X., He, P. & Hua, Z. A cooperative differential game of transboundary industrial pollution between two regions // Journal of Cleaner Production. 2015. Vol. 120. P. 43–52.
- [43] Jiao, T., Park, J. H., Zong, G. D., et al. Stochastic stability analysis of switched genetic regulatory networks without stable subsystems // Applied Mathematics and Computation. 2019. Vol. 359. P. 261–277.
- [44] Jouvét P.-A., Michel P. & Rotillon G. Optimal growth with pollution: how to use pollution permits? // Journal of Economic Dynamics and Control. 2005. Vol. 29. N. 9. P. 1597–1609.
- [45] Jørgensen, S., Martín-Herrán, G. & Zaccour, G. Dynamic games in the economics and management of pollution // Environmental Modeling and Assessment. 2010. Vol. 15. P. 433–467.
- [46] Jørgensen, S., Gromova, E. Sustaining cooperation in a differential game of advertising goodwill accumulation // European Journal of Operational Research. 2016. Vol. 254. N. 1. P. 294–303.

- [47] Klamerus-Iwan, A. et al. Seasonal variability of leaf water capacity and wettability under the influence of pollution in different city zones // Atmospheric Pollution Research. 2018. Vol. 9. N. 3. P. 455–463.
- [48] Kostyunin, S., Shevkoplyas, E. On simplification of integral payoff in differential games with random duration // Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta. Prikladnaya Matematika. 2011. Vol. 4. P. 47–56.
- [49] Kouroussis, G., Dehombreux, P. & Verlinden, O. Vehicle and powertrain dynamics analysis with an automatic gearbox // Mechanism and Machine Theory. 2015. Vol. 83. P. 109–124.
- [50] Lee, J., Bohacek, S. & Hespanha, J. P. Modeling communication networks with hybrid systems // IEEE/ACM Transactions on Networking. 2006. Vol. 3. P. 630–643.
- [51] Lennartson, B., Tittus, M., Egardt, B., et al. Hybrid systems in process control // IEEE Control Systems Magazine. 1996. Vol. 16. P. 44–56.
- [52] Lu, X., Zhang, S., Xing, J., et al. Progress of Air Pollution Control in China and Its Challenges and Opportunities in the Ecological Civilization Era // Engineering. 2020. Vol. 6(12). P. 1423–1431.
- [53] Ma, D., Zhao, J. Stabilization of networked switched linear systems: An asynchronous switching delay system approach // Systems & Control Letters. 2015. Vol. 77. P. 46–54.
- [54] Makarenkov, O. A linear state feedback switching rule for global stabilization of switched nonlinear systems about a nonequilibrium point // European Journal of Control. 2019. Vol. 49. P. 62–67.
- [55] Marín-Solano, J., Shevkoplyas, E. Non-constant discounting and differential games with random time horizon // Automatica. 2011. Vol. 47. N. 12. P. 2626–2638.
- [56] Marín-Solano, J., Patxot, C. Heterogeneous discounting in economic problems // Optimal Control Applications and Methods. 2012. Vol. 33. N. 1. P. 32–50.

- [57] Masui, T. Policy evaluations under environmental constraints using a computable general equilibrium model // *European Journal of Operational Research*. 2005. Vol. 166(3). P. 843–855.
- [58] Medeiros, J. F., Ribeiro, J. L. D. & Cortimiglia, M. N. Success factors for environmentally sustainable product innovation: a systematic literature review // *Journal of Cleaner Production*. 2014. Vol. 65. P. 76–86.
- [59] Moberg, E. A., Pinsky, M. L. & Fenichel, E. P. Capital investment for optimal exploitation of renewable resource stocks in the age of global change // *Ecological Economics*. 2019. Vol. 165. P. 106335.
- [60] Ni, Z., Wu, X., Li, L., et al. Pollution control and in situ bioremediation for lake aquaculture using an ecological dam // *Journal of Cleaner Production*. 2018. Vol. 172. P. 2256–2265.
- [61] Nkuiya, B., Costello, C. Pollution control under a possible future shift in environmental preferences // *Journal of Economic Behavior & Organization*. 2016. Vol. 132(B). P. 193–205.
- [62] Parilina, E., Yao, F. & Zaccour, G. Pricing and investment in manufacturing and logistics when environmental reputation matters // *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*. 2024. Vol. 184. P. 103468.
- [63] Petrosyan, L. Time-consistency of solutions in multi-player differential games // *Astronomy*. 1977. Vol. 4. P. 46–52.
- [64] Petrosyan, L.A., Danilov, N.N. Stability of solutions in non-zero sum differential games with transferable payoffs // *Astronomy*. 1979. Vol. 1. P. 52–59.
- [65] Petrosyan, L.A. Strong Time-Consistent Differential Optimality Principles // *Vestn. Leningrad. Univ.* 1993. Vol. 4. P. 35–40.
- [66] Petrosyan, L., Zaccour, G. Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction // *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2003. Vol. 27. N. 3. P. 381–398.

- [67] Petrosyan, L., Zaccour, G. Cooperative differential games with transferable payoffs // In: Basar T. & Zaccour G. (eds.) Handbook of Dynamic Game Theory. 2018. P. 595–632.
- [68] Petrosyan L., Yeung D., Pankratova Y. Dynamic cooperative games on networks // International Conference on Mathematical Optimization Theory and Operations Research. 2021. P. 403–416.
- [69] Rasmussen, L. V. From food to pest: conversion factors determine switches between ecosystem services and disservices // *Ambio*. 2017. Vol. 46. P. 173–183.
- [70] Reddy, P. V., Schumacher, J. M. & Engwerda, J. Analysis of Optimal Control Problems for Hybrid Systems with One State Variable // *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2020. Vol. 58, N. 6. P. 3262–3292.
- [71] Riedinger, P., Kratz, F., Lung, C., Zanne, C. Linear quadratic optimization for hybrid systems // *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*. 1999. P. 3059–3064.
- [72] Riedinger, P., Kratz, F. An optimal control approach for hybrid systems // *European Journal of Control*. 2003. Vol. 9(5). P. 449–458.
- [73] Riedinger, P. A Switched LQ Regulator Design in Continuous Time // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2014. Vol. 59. N. 5. P. 1322–1328.
- [74] Riedinger, P., Vivalda, J. C. Dynamic output feedback for switched linear systems based on an LQG design // *Automatica*. 2015. Vol. 54. P. 235–245.
- [75] Rong H., Mu Z, & Liu K. Study on Optimal Control for a Class of Linear Switched Systems // *Proceedings of the 22nd China Control Conference*. 2003. P. 459–462.
- [76] Savkin A. V., Matveev A. S., Qualitative analysis of differential automata: Existence and stability of limit cycles // *Information, Decision and Control. Data and Information Fusion Symposium, Signal Processing and Communications Symposium and Decision and Control Symposium. Proceedings (Cat. No. 99EX251)*. 1999. P. 265–270.

- [77] Scheffer, M., Carpenter, S., Foley, J. A., et al. Catastrophic shifts in ecosystems // *Nature*. 2001. Vol. 413. P. 591–596.
- [78] Sedakov A., Parilina E., Volobuev Yu., Klimuk, D. Existence of Stable Coalition Structures in Three-person Games // *Contributions to Game Theory and Management*. 2013. Vol. 6. P. 407–422.
- [79] Shapley, L. S. A value for n -person games. 1953. P. 307–317.
- [80] Shaikh, M. S., Caines, P. E. On the Optimal Control of Hybrid Systems: Optimization of Trajectories, Switching Times, and Location Schedules // *Hybrid Systems: Computation and Control, Proceedings of the 6th International HSCC Workshop*. 2003. P. 466–481.
- [81] Shaikh, M. S. Optimal Control of Hybrid Systems: Theory and Algorithms. // PhD thesis, McGill University, Montréal, Canada. 2004.
- [82] Shaikh, M. S., Caines, P. E. On the hybrid optimal control problem: theory and algorithms // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2007. Vol. 52. N. 9. P. 1587–1603.
- [83] Shevkoplyas, E. V. , Kostyunin S. Y. Modeling of environmental projects under condition of a random time horizon // *Contributions to game theory and management*. 2011. Vol. 4, P. 447–459.
- [84] Shevkoplyas, E. V. The Hamilton-Jacobi-Bellman equation for a class of differential games with random duration // *Automation and Remote Control*. 2014. Vol. 75. P. 959–970.
- [85] Shortle, J. S., Horan, R. D. The Economics of Nonpoint Pollution Control // *Journal of Economic Surveys*. 2001. Vol. 15(3). P. 255–289.
- [86] Su, S., Parilina, E. M. Can partial cooperation between developed and developing countries be stable? // *Operations Research Letters*. 2023. Vol. 51. N. 3. P. 370–377.
- [87] Su, S., Parilina, E. M. Designing stable coalition structures for international environmental agreements // *Journal of Dynamics and Games*. 2024. Vol. 11. N. 2. P. 197–217.

- [88] Su, S., Tur, A. Estimation of Initial Stock in Pollution Control Problem // Mathematics. 2022. Vol. 10. P. 3457.
- [89] Sussmann, H. J. A maximum principle for hybrid optimal control problems // Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control. 1999. P. 425–430.
- [90] Sun, Z. Stabilization and optimization of switched linear systems // Automatica. 2006. Vol. 42. P. 783–788.
- [91] Sun F., Parilina, E.M. & Gao, H. Individual stability of coalition structures in three-person games // Autom. Remote Control. 2021. Vol. 82. N. 6. P. 1083–1094.
- [92] Von Neumann, J. , Morgenstern, O. Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press 1947.
- [93] Wang, Y. E., Karimi, H. R. & Wu, D. Conditions for the stability of switched systems containing unstable subsystems // IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs. 2019. Vol. 66. P. 617–621.
- [94] Wang, X., Zhao, J. Autonomous switched control of load shifting robot manipulators // IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2017. Vol. 64. P. 7161–7170.
- [95] Wang, H., Liu, Y., Wang, C., et al. Seasonal variations in leaf capturing of particulate matter, surface wettability and micromorphology in urban tree species // Frontiers of Environmental Science & Engineering. 2013. Vol. 7. P. 579–588.
- [96] Wang, Y., Fu, J., & Fu, Y. Adaptive optimal control of switched linear systems with input constraints // International Journal of Control. 2024. P. 1–9.
- [97] Witsenhausen H.S. A class of hybrid-state continuous-time dynamic systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1966. Vol. 11, N.6. P. 665–683.
- [98] Wu M., Tang X., Li Q., et al., Review of Ecological Engineering Solutions for Rural Non-Point Source Water Pollution Control in Hubei Province // China. Water, Air, & Soil Pollution. 2013, Vol. 224, N. 5, P. 1–18.

- [99] Wu, Y., Wu, Y. & Zhao, Y. Mode-dependent controller design for networked control systems with average dwell time switching // Transactions of the Institute of Measurement and Control. 2017. Vol. 39. P. 1577–1589.
- [100] Wu, Y., Tur, A. & Wang, H. Sustainable Optimal Control for Switched Pollution-Control Problem with Random Duration // Entropy. 2023. Vol. 25. N. 10. P. 1426.
- [101] Wu, Y., Tur, A. & Ye, P. Sustainable solution for hybrid differential game with regime shifts and random duration // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2024. Vol. 55. P. 101553.
- [102] Wu, Y., Tur, A. & Ye, P. Sustainable cooperation on the hybrid pollution-control game with heterogeneous players // arXiv preprint arXiv:2504.12059. 2024. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2504.12059>
- [103] Xiao, Y., Ye, D. & Sun, Z. Finite time fault-tolerant attitude control for rigid flexible coupling satellites based on Legendre neural network // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part G-Journal of Aerospace Engineering. 2017. Vol. 232. P. 2845–2857.
- [104] Xin, B., Peng, W. & Sun, M. Optimal coordination strategy for international production planning and pollution abating under cap-and-trade regulations // International Journal of Environmental Research and Public Health. 2019. Vol. 16. P. 3490.
- [105] Xu, X., Antsaklis, P. J. Optimal control of switched systems based on parameterization of the switching instants // IEEE Transactions on Automatic Control. 2004. Vol. 49. N. 1. P. 2–16.
- [106] Xu, Z., Zhang, D. & Song, H. Distributed synchronization control of complex networks with communication constraints // ISA Transactions. 2016. Vol. 65. P. 186–198.
- [107] Yin Z., Gao C.& Li P. Optimal control for hybrid systems based on dynamical programming // Control Theory and Technology. 2002. Vol. 19. N. 1. P. 29–33.

- [108] Zaccour, G. Time consistency in cooperative differential games: A tutorial // INFOR: Information Systems and Operational Research. 2008. Vol. 46. N. 1. P. 81–92.
- [109] Zelikin, M. I., Lokutsievskiy, L. V. & Skopincev, S. V. On optimal harvesting of a resource on a circle // Mathematical Notes. 2017. Vol. 102. P. 521–532.
- [110] Zhang, W., Branicky, M. S. & Phillips, S. M. Stability of network control systems // IEEE Control Systems Magazine. 2001. Vol. 21. P. 84–99.
- [111] Zhou, J., Gao, H., Petrosian, O. & Denis, T. Differential game model of resource extraction with continuous and dynamic updating // Journal of Operational Research Society of China. 2024. Vol. 12. P. 51–75.