

САНКТ–ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Фоминых Александр Владимирович

**Построение прямых методов решения
негладких задач оптимального управления
и некоторых типов дифференциальных включений**

Научная специальность:

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Диссертация

на соискание ученой степени доктора физико–математических наук

Санкт–Петербург

2025

Оглавление

Введение	6
Глава 1 Основные понятия и обозначения	57
1.1 Основные определения	57
1.2 Одно обобщение теоремы о точности штрафной функции	60
1.3 Используемые обозначения	62
Глава 2 Полиномы от интегральных функционалов	66
2.1 Постановка задачи	66
2.2 Необходимые условия минимума функционала $P_k(z)$	69
2.3 Метод градиентного спуска	72
2.4 Случай ограничения на правом конце	74
2.5 Необходимые условия минимума функционала $\Phi(z)$	75
2.6 Метод гиподифференциального спуска	77
2.7 Соответствующие приложения метода	80
Глава 3 Программное управление гладкими системами	83
3.1 Постановка задачи	83
3.2 Сведение к вариационной задаче	84
3.3 Необходимые условия минимума	85
3.4 Метод субдифференциального спуска	88
3.5 Метод гиподифференциального спуска	89
3.6 Численные примеры	92
Глава 4 Оптимальное управление гладкими системами с гладким функционалом Лагранжа	95
4.1 Постановка задачи	96
4.2 Сведение к вариационной задаче	97
4.3 Необходимые условия минимума	100

4.4	Метод субдифференциального спуска	106
4.5	Метод гиподифференциального спуска	113
4.6	Численные примеры	123
Глава 5 Программное и оптимальное управление негладкими системами с негладким функционалом Лагранжа		130
5.1	Соответствующие определения	131
5.2	Постановка задачи	132
5.3	Сведение к вариационной задаче	133
5.4	Необходимые условия минимума	135
5.5	Метод квазидифференциального спуска	145
5.6	Численные примеры	153
5.7	Обсуждение	162
Глава 6 Классическая задача вариационного исчисления с субдифференцируемым функционалом Лагранжа		168
6.1	Постановка задачи	168
6.2	Соответствующая вариационная задача	169
6.3	Метод субдифференциального спуска	170
6.4	Численные примеры	173
Глава 7 Оптимальное управление гладкими системами с негладким функционалом Майера		179
7.1	Соответствующие определения	180
7.2	Постановка задачи	180
7.3	Параметризация управления	181
7.4	Необходимые условия минимума	183
7.5	Метод квазидифференциального спуска	189
7.6	Метод кодифференциального спуска	190
7.7	Кусочно-аффинный случай	192
7.8	Случай ограничений на фазовые переменные и управление	196
7.9	Численные примеры	198

Глава 8	Точная штрафная функция для гладких дифференциальных включений с выпуклой компактной правой частью	211
8.1	Постановка задачи	211
8.2	Эквивалентная постановка задачи	212
8.3	Необходимые условия минимума	213
8.4	Точная штрафная функция	216
8.5	Численные примеры	218
Глава 9	Оптимальное управление гладкими дифференциальными включениями с выпуклой компактной правой частью	222
9.1	Постановка задачи	222
9.2	Сведение к задаче безусловной оптимизации	223
9.3	Необходимые условия минимума	225
9.4	Метод наискорейшего спуска	228
9.5	Численные примеры	230
9.6	Примеры наиболее эффективного применения метода	241
Глава 10	Дифференциальные неравенства	256
10.1	Постановка задачи и сведение к вариационной	256
10.2	Метод наискорейшего спуска	258
10.3	Случай ограничений на правом конце	259
10.4	Случай “нормальной” системы	259
10.5	Численные примеры	261
Глава 11	“Квазидифференциальные” включения с выпуклой компактной правой частью	265
11.1	Соответствующие определения	265
11.2	Постановка задачи и сведение к вариационной	267
11.3	Некоторые прикладные задачи порождающие негладкие дифференциальные включения	270
11.4	Условия минимума функционала $I(x, z)$	277
11.5	Метод квазидифференциального спуска	281
11.6	Численные примеры	297

Глава 12 Скользящие режимы	305
12.1 Введение	306
12.2 Постановка задачи	307
12.3 Соответствующая вариационная задача	310
12.4 Случай “гладкого” управления	316
Заключение	322
Список обозначений	328
Литература	330

Введение

Дифференциальное исчисление, основы которого были заложены в трудах Ньютона [358] и Лейбница [308], безусловно, представляет собой мощнейший аппарат, без которого сложно представить себе успешное развитие многих разделов математики.

Однако с течением времени оказалось, что многие задачи, возникающие в приложениях и в самой математике, требуют проведения исследований недифференцируемых функций и создания полноценного инструмента работы с ними. Такая потребность привела к появлению сравнительно новых разделов математики: негладкого анализа и недифференцируемой оптимизации, у истоков которых стояли работы таких учёных, как В. Ф. Демьянов [33, 37, 171, 173], А. М. Рубинов [180, 44, 182], Л. Н. Полякова [40, 84, 85, 183, 391, 393], В. Н. Малозёмов [39], С. С. Кутателадзе [65, 66], Б. Н. Пшеничный [86, 87, 89], А. Д. Иоффе [270, 51], Н. З. Шор [109, 110], Дж. Данскин [29], Ф. Кларк [57, 163], Р. Рокафеллар [91, 273], Ж.-П. Обен [76].

Стремительное развитие этих наук и успешное решение многих важных теоретических и прикладных задач подтвердили эффективность этих разделов и окончательно развеяли некоторые предположения о том, что негладкие задачи являются патологией или экзотикой. Напротив, данные разделы прочно вошли в современную структуру математической науки и представляют собой самостоятельные, мощные и постоянно развивающиеся дисциплины, которые, к слову сказать, оказываются даже более широкими, чем классическое дифференциальное исчисление, поскольку обобщают его понятия и позволяют получать многие его результаты как следствия своей, более общей, теории.

Конечно, многие негладкие задачи можно чисто технически или исходя из каких-то общих соображений, сделать гладкими и тогда уже применять к ним весь богатый арсенал методов дифференциального исчисления. Процесс такого сведения получил название “сглаживание”. Однако это не всегда оказывается эффективно и просто реализуемо. Простой пример функции, сглаживание которой не позволяет исследовать те её свойства, которые связаны с понятием градиента, приведён в [34]. Ещё одним примером невозможности

сглаживания может служить теория точных штрафных функций, которая эффективно применяется при решении задач условной оптимизации. Сама же точная штрафная функция является существенно негладкой.

Теория точных штрафных функций получила широкое распространение при решении задач условной оптимизации [49, 483]. Она позволяет с помощью определённой конструкции сводить исходную задачу при наличии ограничений к задаче безусловной оптимизации. Как показали многочисленные исследования [255, 386, 387, 451], такое сведение часто довольно очевидно даже для сложных задач как конечномерной, так и бесконечномерной оптимизации и для достаточно широкого класса задач при некоторых естественных предположениях удаётся показать, что построенная функция — точная штрафная. И хотя по построению она оказывается негладкой, для её оптимизации можно применять уже многие хорошо разработанные методы недифференцируемой оптимизации. Отметим, что наряду с получением достаточных условий точности штрафной функции [36, 136, 206, 238] продолжают развиваться различные конструкции точных штрафных функций с полезными свойствами (в том числе непрерывно дифференцируемые и так называемые барьерные точные штрафные функции) [264, 385, 462, 209, 254]. Существуют также так называемые точные модифицированные функции Лагранжа, которые являются неким средним между точными линейными штрафными функциями и классическими функциями Лагранжа; они изучались в работах [388, 389, 321]. В работе [83] точная штрафная функция построена в случае, когда как функционал качества, так и ограничение заданы квазидифференцируемыми функциями. Автор статьи [325] исследует оценки на штрафной параметр, а также устанавливает его связь с множителями Лагранжа. Теория точных штрафов применялась к задачам теории управления В. Ф. Демьяновым и В. В. Карелиным [178]. В частности, в работе [53] с помощью теории точных штрафов был получен принцип максимума Л. С. Понтрягина для задачи оптимального управления в достаточно общей постановке.

Одним из основных инструментов исследования в конструктивном негладком анализе является квазидифференциальное исчисление. Определение квазидифференциала было впервые дано Демьяновым, Поляковой и Рубиновым [41, 43]. Богатое и конструктивное исчисление было разработано для этого объекта негладкой оптимизации (см. [180]). Класс квазидифференцируемых функций достаточно широкий (например, в конечномерном пространстве он включает, в частности, все функции, которые могут быть представлены в виде суперпозиции конечного числа максимумов и минимумов непрерывно дифференцируемых функций). С тех пор было опубликовано несколько статей [93, 176, 181] и монографий [183, 37], посвящённых как изучению различных теоретических аспектов

квазидифференциального исчисления, так и его приложениям. Бесконечномерные обобщения квазидифференциального исчисления изучались Демьяновым и Рубиновым [182], Паллашке, Рехтом и Урбанским [377], а также Басаевой, Кусраевым и Кутателадзе [131, 66] и Долгополикком [38], [190]. Обобщённое понятие квазидифференцируемости, называемое ε -квазидифференцируемостью (которая несмотря на схожесть в названии, по структуре отличается от известной ε -субдифференцируемости), было введено и подробно изучено В. В. Гороховиком [25, 26, 243].

Отметим, что помимо классического определения субдифференциала выпуклой функции, существует множество других определений различных субдифференциалов с разнообразными полезными свойствами и их обобщений [42], [78]. Перечислим лишь некоторых из них: субдифференциал Пшеничного [86], субдифференциал Кларка [57], субдифференциал Иоффе [267], субдифференциал Дини [268], субдифференциал Фреше [301], субдифференциал Мишеля-Пено [337], субдифференциал Мордуховича [349], проксимальный субдифференциал [163], и др. Связь между определениями и свойствами различных субдифференциалов изучалась в монографии [384] и в статье [269].

Как уже отмечалось, негладкий анализ с момента его зарождения значительно пополнился различными методами решения задач оптимизации. Многие методы опираются на необходимые условия экстремума, которые, в свою очередь, можно формулировать в терминах таких фундаментальных понятий негладкой оптимизации, как производная по направлению и субдифференциал (квазидифференциал) [37]. Последнее понятие дало название методу субдифференциального (квазидифференциального) спуска. Общая схема метода состоит в поиске направления спуска в данной точке и осуществлению движения с некоторым шагом по этому направлению. В результате получаем последовательность, которая в некоторых случаях сходится к точке экстремума. К сожалению, субдифференциальное (квазидифференциальное) отображение является разрывным в метрике Хаусдорфа [37], что не позволяет в общем случае гарантировать сходимость метода. Поэтому наряду с данным методом разрабатывались его модификации [36, 97], а также методы, основанные на других понятиях негладкого анализа. В частности, весьма эффективным оказался метод кодифференциального спуска, основанный на введённом В. Ф. Демьяновым понятии кодифференциала. Кодифференциальное отображение, в отличие от субдифференциального, является непрерывным в метрике Хаусдорфа для очень широкого класса функций [180], что обеспечивает сходимость метода во многих задачах. Первый численный метод минимизации негладких кодифференцируемых функций, названный методом кодифференциального спуска, был разработан Демьяновым [180]. Модификация этого метода, позволяющая существенно уменьшить его трудоём-

кость и основанная на использовании т. н. усечённого кодифференциала, была предложена Демьяновым, Багировым и Рубиновым [175]. Методы минимизации негладких выпуклых функций и разности выпуклых функций, сочетающие в себе идеи метода кодифференциального спуска и bundle методов, изучались в работах Багирова и др. [125, 126, 446]. Методы доверительных областей для минимизации кодифференцируемых функций были разработаны Андрамоновым [1]. Однако, кодифференциальное исчисление не нашло значительных теоретических приложений и было использовано только для построения и исследования различных численных методов [98, 174, 184]. Бесконечномерные обобщения кодифференциального исчисления изучались Заффарони [482] и Долгополикком [38]. Связь кодифференциала с d. c. (разность выпуклых функций) разложением кусочно афинных функций рассматривалась в [392]. Отметим, что преимущество кодифференциала заключается ещё и в наличии богатого и удобного исчисления. Так, например, эпсилон-субдифференциальное отображение также является непрерывным по Хаусдорфу для широкого класса функций [75], однако применение эпсилон-субдифференциального спуска значительно затруднено, поскольку исчисления эпсилон-субдифференциалов громоздко и очень сложно даже в самых простых задачах [37]. Метод кодифференциального спуска начал применяться В. Ф. Демьяновым и Г. Ш. Тамасяном и к бесконечномерным, а именно к вариационным задачам [46, 433, 96, 184], и показал там свою эффективность. Кроме того, он показал не только практическую пользу, но и свою большую теоретическую роль, поскольку позволил выработать единообразный, оптимизационный подход к широкому классу задач и получить многие фундаментальные результаты вариационного исчисления (хотя и порой в более слабой форме). Задачи оптимального управления относятся к классу наиболее сложных вариационных задач.

Теория оптимального управления возникла и формировалась под существенным влиянием исследований космических летательных аппаратов. Одна из первых задач оптимального управления была поставлена Д. Е. Охоцимским в статье [79]. Существенным толчком, инициировавшим целую серию как теоретических, так и практических исследований, стали принцип максимума, полученный Л. С. Понтрягиным, В. Г. Болтянским, Е. Ф. Мищенко и Р. В. Гамкрелидзе [82] и метод динамического программирования, разработанный Р. Беллманом [10, 11]. К решению задач оптимального управления применяются различные подходы. Существует класс методов, основанных на сведении исходной задачи к краевой задаче [52, 74, 274, 298, 314, 332, 346, 422], которое осуществляется при помощи принципа максимума. Ещё одну группу методов, опирающихся на принцип максимума, составляют различные методы последовательных приближений [8, 9, 32, 35, 45, 56, 61, 62, 63, 74, 292]. В основе другой обширной группы методов лежат итерационные процессы в пространстве управлений,

которые базируются на вариациях минимизируемого функционала [6, 288, 289, 74, 77, 108, 111, 156, 252, 263, 448]. Наконец, целая серия методов базируется на принципе динамического программирования [202, 204, 99, 129] и состоит в основном в переборе в пространстве фазовых координат и анализе вариантов [19, 64, 74]. Многие из перечисленных схем также существенно используют методы математического программирования (например, градиентные методы, метод Ньютона, методы Ритца и Галёркина [13]) и эффективность решения задач управления в значительной степени определяется умением эффективно решать оптимизационные задачи. К. Л. Тео и его ученики успешно развивали и прикладывали метод сочетания “параметризации управления” и вычисления градиента фазовой траектории как функции управления (градиентный метод) к различным классическим (гладким) задачам управления. Метод параметризации управления представлен, например, в работе [320]. (Также см. как развитие дальнейшей теории, так и приложения к реальным задачам в работах [481], [316], [317] и программное обеспечение для решения задач управления MISER [477]). Подход с использованием теории точных штрафных функций к задачам управления был применён к задаче с непрерывными ограничениями в работе [317]. Градиентные методы восходят к работам А. Е. Bryson [149], Н. J. Kelley [289] и др. и были разработаны и использованы в огромном числе публикаций, посвящённых задачам управления. Достаточно универсальным методом решения задач оптимального управления со сложными ограничениями различной природы является прямая дискретизация с дальнейшим использованием различных численных методов условной оптимизации для решения получаемой конечномерной задачи [168, 331, 431, 170, 380, 148, 406]. Конечно, перечисленными методами не исчерпывается необозримое количество схем и подходов, накопившихся с момента возникновения теории управления. Однако, как показывают многочисленные исследования, любой из перечисленных подходов сложно назвать универсальным, охватывающим значительную часть линейных и нелинейных задач. Подтверждением является то, что многие методы индивидуальны, рассчитаны на узкий класс задач, у многих не доказана или даже не исследовалась сходимость [74], что не мешает считать их эффективными и признанными методами решения задач оптимального управления. Естественно, что для линейных задач удалось осуществить значительное продвижение как в теоретической части (так, например, Н. Н. Красовским разработана полная теория линейных задач оптимального управления, основанная на проблеме моментов [59], В. И. Зубовым — на результатах линейной алгебры [50]), так и в решении вычислительных проблем (например, схема Абрамова [74] позволяет обеспечить устойчивость счёта). Задача оптимального управления относится к вариационной задаче в достаточно общей постановке. Поэтому неудивительно, что многие результаты вариационного исчисления

являются следствиями принципа максимума Л. С. Понтрягина [82]. Здесь же стоит отметить, что многие фундаментальные результаты теории динамического программирования Р. Беллмана также вытекают из принципа максимума [82]. См. более подробный обзор ниже в разделе Расширенный обзор по численным методам в задачах управления.

Одной из актуальных задач, исследуемых в данной диссертации, является построение метода решения задачи оптимального управления в форме Лагранжа с интегральным ограничением на управление, правый конец при этом может быть свободным или (частично) закреплённым. Несмотря на то, что обычно рассматривают поточечные ограничения на управление, встречаются задачи, в которых интегральное ограничение на управление [3] или возмущение [92] содержательно и имеет прикладное значение. Отметим, что при фиксированной начальной точке к данной задаче может быть сведена и более общая задача оптимального управления в форме Больца [74]. Общая схема, используемая в диссертации, может быть описана следующим образом. При помощи аппарата точных штрафных функций исходная оптимизационная задача при наличии ограничений сводится к задаче безусловной минимизации некоторого функционала. Доказывается его субдифференцируемость. Далее в терминах субдифференциала формулируются необходимые условия минимума построенного функционала. Здесь стоит упомянуть, что известный “интегральный” “линеаризованный” принцип максимума получается из этого условия как следствие, что свидетельствует в пользу достаточной общности применяемого подхода. Отметим, что в случае, если исходная система обыкновенных дифференциальных уравнений линейна относительно фазовых координат и управлений, а минимизируемый функционал является выпуклым, то рассматриваемый функционал оказывается выпуклым, а тогда необходимые условия его минимума являются и достаточными. Для поиска стационарных точек построенной точной штрафной функции применяется метод субдифференциального спуска. В ходе реализации метода на этапе поиска направления наискорейшего (субдифференциального) спуска возникает проблема нахождения неизвестной вектор-функции, фигурирующей в полученных условиях оптимальности (и являющейся сопряженной в терминах классической теории оптимального управления). Для преодоления этой трудности ставится вспомогательная оптимизационная задача нахождения данной вектор-функции, для решения которой также применяется метод субдифференциального спуска. Данная идея (насколько известно автору) реализована в литературе впервые и позволяет решить задачу нахождения упомянутой вектор-функции и в конечном итоге построить направление наискорейшего спуска в исходной задаче. Дополнительно указан класс задач, в которых целевой функционал является недифференцируемым, однако в этом случае разработанный метод остаётся применимым; рассмотрен численный пример.

В данной работе также отдельно исследуется задача программного управления, задача которого состоит в переводе системы из точки в точку (функционал качества при этом отсутствует). На управление также накладывается интегральное ограничение. В силу более простой постановки задачи по сравнению с задачей оптимального управления, описанной в предыдущем абзаце, удаётся упростить и применяемый алгоритм решения задачи (при этом шаги реализации данного алгоритма в целом схожи с описанными выше). В некоторых частных случаях задач оптимального управления показано, как исходную задачу можно свести к минимизации квадратичного трёхчлена от интегральных функционалов. Данное замечание послужило мотивацией рассмотрения полиномов произвольной конечной степени от различных интегральных функционалов. Реализованы методы их минимизации (схожие по алгоритму действий с описанными выше) для задачи как со свободным, так и закреплённым правым концом. Показаны некоторые приложения данных конструкций к прикладным задачам аэродинамики.

Несмотря на богатый арсенал методов, накопленный за более чем 60-летнюю историю развития теории оптимального управления, большинство из них имеют дело с классическими системами, правые части которых являются непрерывно дифференцируемыми функциями своих аргументов. Существуют подходы, которые не накладывают условия гладкости на систему. Однако они обычно используют прямую дискретизацию или какой-то процесс “сглаживания”; оба эти подхода приводят к потере части информации о “поведении” системы, а также к конечномерным задачам огромных размерностей. Следовательно, негладкие задачи управления весьма актуальны. Представленная работа направлена на решение задачи перевода негладкой (а лишь квазидифференцируемой) системы из одной точки в другую. Актуальность рассмотрения таких систем обусловлена их способностью во многих случаях точнее и более полно описывать “поведение” объекта.

Сделаем краткий обзор некоторых работ по негладким задачам управления. Классическим необходимым условиям оптимальности посвящены такие работы, как [459], [460], [211], [350], [270], [420], [27], эти условия получены в форме принципа максимума для негладким задач управления в различных постановках (в том числе в случае наличия фазовых ограничений). В работе [80] принцип максимума в классической форме получен с применением вариационного принципа Экланда. В статье [275] получены условия минимума в форме Каруша-Куна-Такера для негладких задач математического программирования в общей постановке с приложениями к негладким задачам оптимального управления. В статье [368] на основе “invexity” принципа максимума получены достаточные условия для негладких задач управления. Впервые квазидифференциал (в конечномерном случае) был использован

для исследования задач негладкого управления в работе [179]. Перечисленные работы носят преимущественно теоретический характер; и полученные там достаточно сложные условия минимума трудно применить к конкретным задачам управления системами с негладкими правыми частями.

Отметим некоторые работы, посвященные непосредственно построению численных методов решения задачи, аналогичной рассматриваемой в диссертации. Во-первых рассмотрим гладкие системы с недифференцируемыми функционалом качества или ограничениями. В работе [372] рассматривается задача оптимального управления, предполагающая, грубо говоря, субдифференцируемость целевого функционала и непрерывную дифференцируемость правых частей системы. Подход данной работы основан на минимизации дискретизированного расширенного функционала с помощью так называемых bundle-методов. В работах [241], [242] рассматривается минимаксная задача управления; с помощью специально построенной гладкой штрафной функции она сводится к классической непрерывно дифференцируемой задаче. В [341] задача минимизации максимума конечного числа функционалов сводится к введению дополнительных переменных и соответствующих ограничений-неравенств для работы с минимизацией функционала, далее применяется алгоритм, подобный описанному для статьи [342] ниже. В работе [352] построена субдифференцируемая штрафная функция, учитывающая ограничения на управление; после этого также используется процесс сглаживания субдифференциала. В работах [329], [330] построенная точная штрафная функция (с учетом фазовых ограничений) также является субдифференцируемой; рассмотрен алгоритм минимизации производной этой функции по направлению. В статье [441] рассмотрен частный случай негладких вариационных задач с ограничениями равенствами и неравенствами на подынтегральные переменные. В статье [475] также изучались задачи оптимального управления с негладкими функциональными ограничениями. В обеих этих работах использовался некоторый приём сглаживания для построения численного метода решения этих задач. В работах [433], [46] методы субдифференциального и гиподифференциального спуска применялись к некоторым классам гладких вариационных задач с негладкими штрафными слагаемыми, учитывающими ограничение на правый конец. После “перехода” к непрерывно дифференцируемым задачам для их решения можно использовать широко развитый арсенал решения классических задач управления. Во-вторых, рассмотрим задачи управления с негладкими как системой, так и с функционалом качества. В работах [363], [364] рассматриваются задачи, в которых допускается негладкость правых частей системы, описывающей управляемый объект. Здесь с помощью базисных функций (рядов Фурье) также осуществляется сглаживание правых частей системы, после чего для решения задачи применяется

псевдоспектральный метод Чебышева. В статье [405] предложен прямой метод оптимизации траекторий негладких задач оптимального управления, основанный на псевдоспектральном методе Лежандра. Интересный и так же, как и в настоящей диссертации, непрерывный метод основанный на $d. c.$ разложении функций рассмотрен в недавней работе [191].

Негладкие системы способны более точно и полно описывать поведение реальных физических систем, чем в дифференцируемом случае. С одной стороны, это суждение выглядит разумным, учитывая, что квазидифференциал обобщает понятие производной. Но с другой стороны, такое физическое применение еще требует тщательного исследования и подтверждения на реальных моделях. Дадим ссылку на книгу [323], в которой рассматривались численные модели реальных задач, описываемых системами негладких уравнений в частных производных и решаемых методом прямой дискретизации (и рассмотрения на конечных сетках в случаях малой размерности). Обратим также внимание на книгу [183], где объекты механики моделируются негладкими системами.

В настоящей диссертации предложен метод построения программного управления в системах с квазидифференцируемой правой частью. Цель управления — привести систему из исходной точки в желаемое конечное состояние. Допустимыми являются управления, лежащие в некотором параллелепипеде в каждый момент времени. Исходная задача сводится к вариационной: безусловной минимизации некоторого штрафного функционала на пространстве траекторий, их производных и управлений. Доказывается квазидифференцируемость этого функционала; показано, что квазидифференциал функционала определяется соответствующими слагаемыми его подынтегрального выражения. Также получены условия минимума этого функционала в терминах квазидифференциала. Отметим, что существующие известные в литературе условия оптимальности содержат неизвестную вектор-функцию, что делает задачу проверки того, удовлетворяет ли конкретная траектория этим условиям, очень сложной на практике. В отличие от существующих известных условий оптимальности, полученные в диссертации условия являются поточечными, что позволяет эффективно осуществлять проверку в дискретные моменты времени. Далее мы применяем метод квазидифференциального спуска к рассматриваемой вариационной задаче. На этом этапе мы реализуем (равномерную) дискретизацию. Обратим внимание, что в отличие от подавляющего большинства существующих методов, где исходная задача дискретизируется напрямую, здесь дискретизация реализуется после того, как квазидифференциал уже получен. Доказывается, что для построения наискорейшего (квазидифференциального) направления спуска нужно найти отклонение Хаусдорфа одного выпуклого компакта (минус супердифференциал) от другого выпуклого компакта (субдифференциала) в каждый момент времени

произведённой дискретизации и затем реализовать соответствующую интерполяцию. Кроме того, направления квазидифференциального спуска вычисляются независимо (друг от друга) в каждый момент дискретизации. Несколько примеров приведены для иллюстрации предложенного алгоритма. Также мы подробно обсуждаем преимущества и недостатки метода. Заметим, что разработанная методика может быть абсолютно аналогично применена и к более сложной задаче оптимального управления в смысле Лагранжа (когда дополнительно требуется минимизировать интеграл с квазидифференцируемым подынтегральным выражением).

Отметим, что развиваемый в диссертации подход решения негладких вариационных задач и негладких задач оптимального управления относится к так называемым прямым методам вариационного исчисления. Этот метод также является “непрерывным” в отличие от большинства методов в литературе, поскольку он не основан на прямой дискретизации исходной задачи, что интересно с теоретической точки зрения. Хотя подобные методы уже применялись к некоторым задачам вариационного исчисления и оптимального управления, применить этот метод к негладким задачам управления до настоящего времени не удалось. Основная трудность заключалась в слишком сложной форме квазидифференциалов и условия оптимальности, полученных для этих задач. Новая техническая идея настоящей диссертации состоит в том, чтобы рассматривать фазовую траекторию и ее производную как независимые переменные (и учесть естественную связь между этими переменными с помощью штрафной функции специального вида). Насколько известно автору, эта идея используется в литературе впервые. Это позволило упростить структуру квазидифференциала рассматриваемого функционала и решить задачу нахождения направления наискорейшего спуска минимизируемого функционала. Кроме того, это позволило получить поточечные условия оптимальности с возможностью проверки, удовлетворяют ли им конкретная траектория и управление в дискретные моменты времени (в отличие от существующих условий оптимальности для таких задач, проверить которые в общем случае практически невозможно из-за наличия некоторой неизвестной (“сопряжённой”) вектор-функции).

В диссертации также исследуется классическая вариационная задача с субдифференцируемым подынтегральным выражением минимизируемого функционала. Из за более простой постановки задачи по сравнению с рассмотрением программного (оптимального) управления негладкой системой, описанного выше, удаётся упростить и применяемый алгоритм решения задачи (при этом шаги реализации данного алгоритма в целом схожи с описанными выше). Большинство существующих численных методов решения задач вариационного исчисления разработаны для случая, когда подынтегральная функция непрерывно диффе-

ренцируема по искомым переменным. Одной из целей данной диссертации является решение простейшей вариационной задачи в предположении, что подынтегральная функция минимизируемого функционала негладкая и лишь субдифференцируема по неизвестной функции и её производной.

Для изучения существования решения обобщенной задачи Больца (частным случаем которой является одна из рассматриваемых в данной диссертации задача) в работах [400], [401], [402] строится глубокая теория, которая использует двойственность Фенхеля-Моро и другие интересные факты из выпуклого анализа, а также некоторые нетривиальные результаты функционального анализа. Доказательство для обобщенной задачи Больца в случае запаздывания можно найти в [370]. Некоторые общие результаты о существовании решений также содержатся в статье [271].

Большинство работ, рассматривающих негладкие вариационные задачи, носят теоретический характер и исследуют необходимые и достаточные условия минимума. Например, в статье [273] необходимые условия сформулированы в терминах субградиентов и обобщают известные условия Эйлера и Вейерштрасса классической теории вариационного исчисления. В статье [319] субдифференциал гамильтониана используется для формулировки необходимых условий минимума, а гамильтониан представляет собой функцию, сопряженную с лагранжианом, то есть здесь также используется теория двойственности. Необходимые условия (полученные в аналогичной форме, а также в форме Эрдмана) качественно иными методами исследуются в работе [162]. В статье [484] построены достаточные условия минимума на основе усиленных условий Вейерштрасса. В работе [38] условия минимума для различных негладких вариационных задач получены в терминах кодифференциалов. Результаты о необходимых условиях минимума как для обобщенной задачи Больца, так и для задачи управления дифференциальным включением в достаточно общей и полной форме содержатся в недавней работе [272]; и интересно, как проводится доказательство второй задачи путем сведения ее к первой путем добавления целочисленного члена специальной структуры. В недавней статье [187] были получены условия минимума для вариационных задач с изопериметрическими ограничениями; и эти условия (в некоторых случаях) сильнее тех, которые были известны ранее.

Диссертация также посвящена проблеме оптимального управления объектом, описываемым системой с непрерывно дифференцируемой правой частью и квазидифференцируемым функционалом качества. Рассматривается задача в форме Майера как со свободным, так и с (частично) закреплённым правым концом. Допустимыми управлениями являются кусочно-непрерывные вектор-функции, принадлежащие некоторому параллелепипеду в каждый мо-

мент времени. Проведены стандартная дискретизация исходной системы и параметризация управления, а также представлены теоремы о сходимости полученного решения дискретной системы к искомому решению непрерывной задачи. Далее для полученной дискретной системы необходимые условия минимума записываются в терминах квазидифференциала. Для решения этой задачи применяется метод квазидифференциального спуска. В случае, когда рассматривается линейная система ОДУ и минимизируется кусочно-аффинная функция, дается модифицированный метод кодифференциального спуска, сходящийся к глобальному решению за конечное число шагов. Разработанный алгоритм продемонстрирован на примерах. Отмечена возможность применения разработанного метода к более общей задаче управления при наличии фазовых ограничений. Данный подход в целом укладывается в серию методов “параметризации” управления, отмеченных выше, с естественными поправками на негладкую природу минимизируемого функционала.

В виде дифференциальных включений [124], [390], [124] могут быть записаны неявные дифференциальные уравнения, дифференциальные неравенства, управляемые системы с фазовыми ограничениями, интервальные системы дифференциальных уравнений и др. Прикладная полезность таких объектов не вызывает сомнений [464, 235, 159], поэтому представляет интерес разработка эффективных методов исследования моделей, описываемых дифференциальными включениями. Особенно полезным такой подход оказывается при описании систем с неполной информацией [14], систем с разрывными правыми частями [208], а также интервальных динамических систем. Как правило, получить аналитически решения дифференциального включения возможно только в частных случаях (на этот счёт в диссертации даны примеры использования известного в теории дифференциальных включений условия оптимальности, принципа максимума В. И. Благодатских), но в остальных случаях нужно использовать для этой цели численные методы.

Обширная литература посвящена таким классическим вопросам при исследовании дифференциальных включений как достижимость и “жизнеспособность” [124], [164], [300]. В литературе также реализованы различные подходы аппроксимации множеств достижимости. Какие-то статьи [299], [160], [373] основаны на аппроксимациях, построенных с помощью соответствующих эллипсоидов. Некоторые другие [296] используют оценки через специально построенные опорных функций. Другой подход — приближения первого порядка [119], [371], [347], [378], которые исследуются при различных предположениях о многозначном отображении в правой части дифференциального включения. Аналогичная проблема “ядра жизнеспособности” дифференциального включения в купе с некоторыми конструкциями расширений рассматривалась в [412], в [395] получены более строгие оценки сходимости,

а в [247] предложены некоторые интересные расширения. В статье [328] сначала построен набор достижимых значений, затем реализуется так называемый алгоритм направляющего типа (“поводыря”) для поиска траектории из этого набора, удовлетворяющих краевой задаче. Заметим, что численное построение всего множества достижимости (в отличие от выбора отдельной траектории, как это делается в методе диссертации) является очень дорогостоящей в вычислительном отношении процедурой. Множества достижимости для дифференциальных включений были также исследованы в работах [360], [361], [378], [127], [394].

Необходимые условия минимума для задач с дифференциальными включениями как с выпуклыми, так и с невыпуклыми многозначными отображениями, исследовались в таких статьях, как [157], [350], [379], [485]. Более конструктивные условия минимума для оптимального управления дифференциальным включением (в то числе в случае присутствия фазовых ограничений) были получены в работах [120], [121]. В статьях [413, 132, 141, 312, 438, 458, 199, 417] (и в литературе, указанной в их ссылках) для численного решения дифференциальных включений применяются аналоги известных методов решения ОДУ, такие как прямые и неявные схемы Эйлера и Рунге-Кутты, методы конечных разностей и т. п. Все из перечисленных работ, кроме последней, исследуют лишь задачу со свободным правым концом (задачу Коши для включений).

В диссертации разрабатывается алгоритм решения дифференциальных включений со свободным или с (частично) закреплённым правым концом и с непрерывным многозначным отображением (описывающим правую часть дифференциального включения) с выпуклыми компактными значениями, допускающим опорную функцию, у которой существует и непрерывна частная производная по фазовым координатам. С помощью аппарата опорных функций и штрафных функций исходная задача сводится к безусловной минимизации некоторого функционала. Доказана дифференцируемость по Гато этого функционала. Выписаны условия оптимальности данного функционала. На основании этих условий к исходной задаче применяется метод наискорейшего спуска. Численные примеры иллюстрируют работу построенного алгоритма. Отмечена возможность применения построенного алгоритма к решению более общей задачи поиска решения из исходной постановки, которое оптимально в смысле Лагранжа.

В диссертации также получены некоторые теоретические результаты для задачи оптимального управления (в смысле Лагранжа) дифференциальным включением со свободным правым концом. На многозначное отображение в правой части дифференциального включения накладывается условие непрерывности и выпуклости и компактности его значений. Для такой задачи построена точная штрафная функция. В предположении существования

и непрерывности частной производной опорной функции правой части рассматриваемого дифференциального включения по фазовым переменным доказана дифференцируемость по направлениям построенной штрафной функции. Далее в терминах полученной производной по направлениям формулируются условия оптимальности для исходной задачи. Использование принципа максимума Благодатских иллюстрируется на примерах.

Несмотря на то, что включения, рассматриваемые в диссертации, являются частным случаем более общего класса дифференциальных включений с менее ограничительными требованиями на правую часть, рассматриваемый случай весьма широкий и позволяет исследовать достаточно богатый и разнообразный набор классов задач. Так, например, случай переменной (в данном случае имеется в виду переменная как по времени, так и по фазовым координатам) области управления в управляемой системе приводит к рассматриваемому случаю дифференциального включения, если предположить сохранения указанных ограничений на опорную функцию множества, стоящего в правой части включения. Интересно также качественно выделить и другие классы задач, не являющихся классическими с позиции теории управления, но описываемые на языке упомянутых дифференциальных включений и достаточно эффективно решаемые с помощью разрабатываемого подхода. Это дифференциальные включения, содержащие в правой части прямую сумму, выпуклую оболочку объединения или пересечение выпуклых множеств, а также линейные интервальные системы ОДУ. Заметим, что в отличие от подавляющего большинства методов оптимального управления и решения дифференциальных включений, которые являются дискретными, разрабатываемый в диссертации алгоритм "непрерывен". Этот подход теоретически интересен и оригинален тем, что не основан на какой бы то ни было дискретизации исходной задачи.

Дифференциальные неравенства представляют собой важный отдельный класс дифференциальных включений. Дифференциальные неравенства широко используются при получении различных оценок. Например, теорему Винтнера можно использовать для определения интервалов о существовании решений дифференциальных уравнений [256]; различные теоремы о дифференциальных неравенствах можно найти во многих работах по дифференциальным уравнениям (см., например, [461]). Некоторые особенности решений дифференциальных неравенств изучались в работах [233, 257, 315]. Статья [133] содержит многочисленные применения дифференциальных неравенств. Применение теоремы Чаплыгина к доказательству теоремы о продолжении решения в точку и теореме единственности Перрона [113], а также некоторые вопросы теории устойчивости [116, 457, 167], являются важными примерами таких приложений. Уделено внимание дифференциальным неравенствам с запаздыванием второго порядка (см., например, [281, 297]). Некоторые численные алгоритмы

решения дифференциальных неравенств можно найти в статьях [134, 454, 327]. В работе [454] строится сеточная аппроксимация границы решения дифференциальных неравенств. В статье [134] исследуется оптимальное решение (в смысле интегрального функционала) линейной системы дифференциальных неравенств, а исходная задача рассматривается в виде задачи линейного программирования в частично упорядоченном пространстве.

В данной диссертации также рассматривается задача поиска решения нелинейной непрерывно дифференцируемой системы дифференциальных неравенств. Рассмотрены как неявная, так и “нормальная” формы дифференциальных неравенств. Используем оптимизационный подход: исходная задача сводится к безусловной минимизации функционала на функциональном пространстве. Выписан “градиент” Гато этого функционала. После этого к построенной задаче применяется метод наискорейшего спуска. Применение метода продемонстрировано на численных примерах.

Было замечено [208], [452], что в скользящем режиме могут наблюдаться новые полезные свойства, которые отсутствуют при движении системы в “нормальном” состоянии. Например, именно такие движения являются оптимальными по некоторому критерию теории оптимального управления. Искусственное введение в систему скользящего режима используется также с целью её стабилизации, а также избавления от нежелательных возмущений, действующих на рассматриваемый объект. Скользящие режимы имеют множество применений. Например, в работе [122] скользящий режим используется для отслеживания траектории автономных надводных кораблей. В статье [137] скользящий режим использовался для стабилизации ветряной турбины, в присутствии в модели неопределённости. При этом в большинстве перечисленных работ реализованы поверхности скольжения как первого, так и второго порядка. Было отмечено, что скользящие режимы более высокого порядка сохраняют или обобщают основные свойства стандартных и смягчают опасный “chattering” эффект (частого колебания) поэтому они также широко используются в литературе (см., например, [313], [205]). В некоторых работах ([130], [234]) скользящие режимы применялись к дискретным системам; при этом были разработаны схемы управления, снижающие нежелательные колебания и высокочастотное переключение между различными значениями управляющего сигнала. Отметим также статью [476], в которой построена нетривиальная и эффективная схема управления для класса “недосрабатываемых” систем. Некоторые работы направлены на построение непрерывного управления, например, [434] (применительно к жёстким роботам), а также [421] (для системы наведения ракеты-перехватчика по целям, выполняющим маневры уклонения), которые уменьшают усилия по управлению в переходном состоянии.

Весьма мощным инструментом исследования устойчивости скользящих режимов является теория Ляпунова [71] и Барбашина-Красовского (см., например, [7]), берущая свое начало из классической теории устойчивости.

Целью диссертации также является задача поиска решения дифференциального включения специального вида, описывающего движение системы в скользящем режиме. В диссертации строится управление с обратной связью для того класса систем, который наделяет функцию Ляпунова требуемыми свойствами, обеспечивая тем самым отмеченную выше устойчивость скользящих режимов. Для решения этой задачи воспользуемся ранее разработанным аппаратом дифференциальных включений, описанным в предыдущей задаче. Поскольку благодаря специальной структуре управления правые части дифференциального включения могут быть негладкими функциями фазовых координат, то и в этом случае исследуются дифференциальные свойства построенного функционала. В диссертации также рассматривается несколько иная, в отличие от классической, структура гладкого управления с обратной связью, обладающего некоторыми преимуществами. Отмечается, что разработанная методика применима к более общей задаче определения самой поверхности скольжения (соответствующей структуры самой разрывной поверхности).

В диссертации также исследуется “негладкое” дифференциальное включение специального вида: предполагается, что многозначное отображение в правой части включения непрерывно, имеет компактные выпуклые значения и опорная функция множества в правой части включения содержит сумму максимума и минимума конечного числа непрерывно дифференцируемых (по фазовым координатам) функций. Требуется найти траекторию, которая удовлетворяла бы дифференциальному включению с заданными граничными условиями и одновременно лежала бы на заданной непрерывно дифференцируемой поверхности. Даны практические приложения таких задач. С помощью аппарата опорных функций исходная задача сводится к вариационной. Доказано, что полученный минимизируемый функционал квазидифференцируем. Даны необходимые условия его минимума в терминах квазидифференциала. Для нахождения стационарных точек этого функционала применяется метод квазидифференциального (наискорейшего) спуска. Доказана “слабая” сходимости (модификации) данного метода в частных случаях. Построенный метод иллюстрируется примерами.

Отдельно заметим, что в диссертации вопросы существования решения рассматриваемых вариационных задач, управляемых систем и дифференциальных включений не затрагиваются (кроме тех, существование которых требуется для обеспечения корректности соответствующих выкладок/шагов методов): в задачах заведомо предполагается существование искомых решений. Данное обстоятельство диктуется, в основном, тремя соображениями.

Во-первых, вопросы существования достаточно сложны и требуют отдельного полноценного исследования. С другой стороны, рассматриваемые в диссертации проблемы имеют вполне классический вид, поэтому нетрудно выписать для них известные условия существования. Стандартные требования этих теорем существования обычно требуют условия роста на правую часть системы (записанные [208], [407] в той или иной форме), полунепрерывность сверху [208], [465] множества управления (которая в диссертации обычно заведомо выполнена, когда это множество постоянно/имеет простой вид), выпуклость множества управлений [208], [158]. Последнее требование можно ослабить, рассматривая различные расширения класса решений [463], [22], [144], [334], [139] или непосредственно исследуя множество достижимости (в основном в линейных системах), опираясь на теорему Ляпунова о векторных мерах [253], [367], [143], [356], [357] (в последних работах исследование ведётся для задачи с явно записанным интегральным ограничением на управление, и дано обобщение классического принципа максимума для этого случая). Отметим также следующее обстоятельство, относящееся к упомянутым вопросам существования. Известно, что красивым и важным для приложений является результат о грубо говоря эквивалентности управляемости линейных систем с множеством управлений и выпуклой оболочкой этого множества, который является следствием теоремы Ляпунова о компактности и выпуклости интеграла Ауманна. В статье [374] даются аккуратные формулировки этого факта, и дополнительно приводятся конструктивные условия управляемости в терминах экспоненциала и матрицы управления из системы (см. также теоремы из [143] о так называемой нуль-управляемости линейных систем). Качественно иной подход к вопросу существования решения заключается в записи задачи в виде (не обязательно классической) вариационной, что часто возможно, и применить к полученной задаче теорему Вейерштрасса о достижимости минимума (в бесконечномерном пространстве). На таком пути в статьях [270], [138] предъявляются условия роста на подынтегральную функцию. Существование решения (как в вопросах достижимости, так и в проблеме оптимальности) исходя из других соображений (с помощью критерия Калмана полной управляемости) исследуются в работах [68], [303], [59], [146]. Отметим красивый подход применения аппарата выпуклого анализа к исследованию этих вариационных задач, разработанный в статье [400], [402]. Наконец, на известных результатах существования решения для дифференциальных включений на анализе многозначных отображений не останавливаемся, поскольку рассматриваемые в данной диссертации дифференциальные включения достаточно просты и по структуре в большинстве случаев укладываются в форму записи управляемых систем. Дадим лишь ссылки [369], [294], [124], [425] на некоторые классические теоремы существования решений дифференциальных включений, которые обычно требуют

выпуклозначности и компактности, а также полунепрерывности сверху и ограниченности в каком-либо смысле, либо липшицевости многозначного отображения, стоящего в правой части дифференциального включения.

Во-вторых, указанные классические результаты обычно гарантируют существование решений в более сложном классе абсолютно непрерывных функций-траекторий с измеримыми ограниченными производными-скоростями (или в ещё более сложных классах, если речь идёт об упомянутых “расширениях”), нежели чем тот класс кусочно-непрерывно дифференцируемых функций, чаще всего рассматриваемый в данной диссертации; таким образом указанные теоремы здесь формально неприменимы, однако понятно, что такой выбор функций объясняется возможностью их практического построения (и вместе с тем способностью достаточно хорошо аппроксимировать решение, которое, возможно, формально попадает в более широкий класс).

В-третьих, частично обобщая тезис о “возможности практического построения решений” более широко заметим, что диссертация по духу является прикладным исследованием и направлена на построение практических методов решения конкретных задач, что видно и из предлагаемых новых идей, носящих скорее прикладной инженерный, нежели теоретический математический характер.

Наконец заметим, что вопросы существования решений в вариационных задачах, системах управления и дифференциальных включениях можно разделить на два класса: проблема достижимости, проблема существования решения в заданном классе функций в предположении, что первая проблема (достижимости) разрешена (или предполагается разрешённой) положительно. Краткий обзор литературы по обоим классам проблем представлен выше.

Целью диссертации является построение прямых методов решения негладких задач оптимального управления и некоторых типов дифференциальных включений, описание которых приведено выше. Настоящая работа продолжает исследование прямых “непрерывных” методов [38], [46] (как конечномерных так и бесконечномерных) негладкой оптимизации в вариационных задачах, развиваемых в научной школе В. Ф. Демьянова.

Теоретическая значимость диссертации состоит в том, что в ней, в частности, получены условия минимума в новой, более “удобной” по сравнению с известными ранее, форме, позволяющей более эффективно работать с объектами негладкой оптимизации, встречающимися при изучении исследуемых задач. Более конкретно, (приближённые) условия минимума в поточечной форме получены для : 1) задачи оптимального управления системой ОДУ с негладкой (а лишь квазидифференцируемой) правой частью, 2) задачи оптимального управления дифференциальным включением, опорная функция правой части которого может содержать сумму максимумов и минимумов конечного числа непрерывно дифференцируемых (по фазовым координатам) функций.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что в ней, в частности, построены прямые методы решения негладкой задачи оптимального управления и некоторых типов дифференциальных включений. Более конкретно: 1) построен прямой метод решения задачи оптимального управления системой ОДУ с негладкой (а лишь квазидифференцируемой) правой частью, 2) построен прямой метод решения дифференциальных включений, опорная функция правой части которых может содержать сумму максимумов и минимумов конечного числа непрерывно дифференцируемых (по фазовым координатам) функций. Предложенные методы отработаны на большом количестве разнообразных примеров, многие из которых имеют реальные практические приложения.

Научная новизна Все основные научные результаты диссертации являются новыми.

В частности, за счёт новой технической идеи “разделения” переменных (фазовой траектории и её производной) преодолены принципиальные сложности, возникавшие ранее в научной школе В. Ф. Демьянова при работе с квазидифференциалами в функциональном пространстве, что позволило предложить новый численный метод решения негладких задач оптимального управления, а также получить условия минимума для таких задач в новой форме, более эффективной существующих с практической точки зрения. Отмечены преимущества построенного метода по сравнению с существующими.

Также при работе с дифференциальными включениями использован аппарат опорных функций для сведения исходной задачи к вариационной, что является новым подходом при решении таких задач. Для работы с негладкими дифференциальными включениями используется сочетание данного подхода с подходом, описанным выше (с использованием “разделения” переменных, фазовой траектории и её производной), что позволило получить условия минимума для таких задач в новой удобной форме, и построить новый численный метод их решения. Отмечен ряд практических задач с (негладкими) дифференциальными включениями, когда указанный подход оказывается наиболее эффективным.

Впервые построена точная штрафная функция для дифференциальных включений со свободным правым концом с выпуклой компактной правой частью в случае непрерывности производной опорной функции множества из правой части дифференциального включения по фазовой переменной.

Кроме того, в классической (гладкой) задаче оптимального управления известные ранее условия экстремума соответствующей точной штрафной функции использованы для построения численного метода решения исходной задачи; новый подход заключается в нахождении сопряжённой переменной как решения некоторой вариационной задачи.

В “полуогладкой” задаче оптимального управления впервые применён подход сочетания параметризации управления и метода квазидифференциального или (модифицированного) кодифференциального спуска.

Также продемонстрировано применение нового вариационного подхода для задач со скользящими режимами. Построены некоторые функции управления с обратной связью, обеспечивающие возникновение скользящего режима, в новой (непрерывной) форме.

Методы исследования В диссертации применяются современные методы негладкого анализа, выпуклого анализа, недифференцируемой оптимизации, функционального анализа, численных методов, а также вариационного исчисления, теории управления и дифференциальных включений и теории скользящих режимов.

В частности, используются исчисление квазидифференциалов Демьянова-Рубинова (а также кодифференциалов) как в конечномерном, так и в функциональном пространствах, специальный вид теоремы Лагранжа о среднем значении в негладком случае, метод минимизации кусочно-аффинных функций Долгополика, методы наискорейшего спуска в различных модификациях для разных задач и результаты по их сходимости, специальные свойства функции максимума (и минимума), методы теории точных штрафных функций, градиент Гато, метрика Помпейо-Хаусдорфа, следствия из теоремы Хана-Банаха, теорема Вейерштрасса в функциональном пространстве, лемма Филиппова и общие свойства многозначных отображений, принцип максимума Понтрягина и Благодатских, критерии слабой* компактности, аппарат опорных функций, критерии возникновения скользящих режимов; для решения вспомогательных конечномерных оптимизационных задач используется широкий арсенал известных численных методов оптимизации, а также различные известные численные методы оптимального управления при сравнительном анализе с разрабатываемыми в диссертации.

Достоверность результатов обеспечена строгостью математических доказательств, методологией исследования, адекватностью работы методов при тестировании на примерах.

Апробация работы:

Публикации. Научные результаты, представленные в данной диссертации, опубликованы в 15 статьях [212, 213, 214, 221, 105, 215, 216, 217, 218, 107, 106, 198, 219, 232, 101] и 6 трудах конференций [223, 224, 225, 226, 227, 228]. Статьи автора [212, 213, 214, 102, 103, 220, 104, 221, 105, 215, 216, 217, 218, 231, 107, 106, 198, 219, 232, 222, 101] входят в перечень академических журналов, индексируемых в Web of Science и Scopus, статьи автора [102, 106] входят в перечень академических журналов, рекомендованных Высшей Аттестационной Комиссией Российской Федерации.

Работы [105], [231], [107], [106], [198], [232] написаны в соавторстве. В работе [105] В. В. Карелину принадлежит написание Введения, Л. Н. Поляковой принадлежит численная реализация Примера 1, автору диссертации — все остальные результаты. В работе [231] В. В. Карелину принадлежит написание Введения, Л. Н. Поляковой принадлежит численная реализация Примера 1, автору диссертации — все остальные результаты. В работе [107] В. В. Карелину и Л. Н. Поляковой принадлежит написание Введения, С. К. Мышкову и В. П. Трегубову принадлежит численная реализация Примера 2 в случае $p = 0$, автору диссертации — все остальные результаты. В работе [106] В. В. Карелину и Л. Н. Поляковой принадлежит описание применения подхода статьи к задаче в случае, когда правая часть включения представляет собой объединения двух множеств, автору диссертации — все остальные результаты. В работе [198] автору диссертации принадлежит доказательство точности штрафной функции для задачи управления дифференциальным включением и идея сведения этой задачи к вариационной, М. В. Долгополик — все остальные результаты. В работе [232] В. В. Карелину принадлежит постановка задачи, Л. Н. Поляковой принадлежит численная реализация Примера 1, автору диссертации — все остальные результаты.

Конференции. Результаты исследований докладывались на конференциях:

XLIII–XLVI Faculty of Applied Mathematics and Control Processes SPbU Conference “Stability and Control Processes”, Saint-Petersburg, Russia (2012–2015);

XVI Baikal International School-Seminar “Optimization Methods and their Applications”, Baikal Lake, Russia (2014);

XV Russian Conference “Mathematical programming and applications”, Yekaterinburg, Russia (2015);

Global Optimization Conference (GOC-2017), Texas A&M University, Texas, USA;

III International Conference in memory of V. I. Zubov “Stability and Control Processes” (SCP 2015), Saint-Petersburg, Russia;

XIII International Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitsky Conference), Moscow, Russia (2016);

International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems, Suzdal, Russia (2016);

Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (CNSA-2017), Dedicated to the memory of Prof. V. F. Demyanov, Euler International Mathematical Institute, St. Petersburg, Russia;

IX International Conference Optimization and Applications (OPTIMA-2018), Petrovac, Montenegro;

International Conference on Mathematical Optimization — Silkroad Mathematics Center Series International Conferences, Beijing, China (2019);

IV International Conference in memory of V. I. Zubov “Stability and Control Processes” (SCP 2020), Saint-Petersburg, Russia;

XXI International Conference on Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR 2022), Petrozavodsk, Russia;

ICO-2023: 6th International Conference on Intelligent Computing & Optimization (2023), Hua Hin, Thailand;

XXII International Conference on Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR 2023), Yekaterinburg, Russia

ICO-2023: 7th International Conference on Intelligent Computing & Optimization (2023), Phnom Penh, Cambodia;

Семинары. Результаты исследований докладывались на семинарах:

Семинар “Конструктивный негладкий анализ и недифференцируемая оптимизация” ПМ-ПУ СПбГУ (рук. В. Н. Малозёмов)

Семинар “Прикладные задачи системного анализа” ВМК МГУ (рук. А. Б. Куржанский)

Семинар кафедры Высшей математики МФТИ (рук. Е. С. Половинкин)

Семинар отдела Динамических систем ИММ УРО РАН (рук. А. А. Успенский)

Семинар отдела Прикладных проблем оптимизации ВЦ РАН (рук. А. С. Антипин)

Семинар кафедры Теории управления ПМ-ПУ СПбГУ (рук. А. П. Жабко)

Степень разработанности проблемы в литературе — Расширенный обзор по численным методам в задачах управления.

Метод “возмущённых” функций используется в работе [437] для построения оптимального управления в задаче Больца с ограничениями на фазовые координаты в общем случае порядка выше первого, без ограничения на управление, а также с заданными условиями на правом конце. Алгоритм рассматривается на примере когда имеется один участок времени, где траектория лежит на границе допустимой области, и два участка до и после него, где она лежит в её внутренности, однако можно обобщить метод на произвольное число смены таких участков. Определение количества таких участков и начальный выбор моментов вхождения в допустимую область и схождения с допустимой области фазовой кривой могут быть осуществлены заранее, опираясь на информацию о решении исходной задачи, но без фазовых ограничений: по фазовой траектории-решению такой задачи видно, на каких участках предположительно кривая может лежать на границе области-ограничения, а также можно примерно оценить соответствующие моменты времени. В рассмотренном варианте алгоритма выбираются условия на сопряжённую функцию, начальное и в момент схода траектории с участка-границы ограничения, а также моменты времени начала и конца движения по границе области и конечный момент времени, остальные необходимые для построения траектории параметры задачи, включая управление, определяются из известных необходимых условий оптимальности. Условия оптимальности, которые не выполнены автоматически по построению этих параметров задачи, линеаризуются (это условия в моменты переключения с границы области на её внутренность и окончания процесса), и путём преобразований над варьированными переменными составляются линейные уравнения относительно приращений неизвестных параметров. Задавая не слишком большие поправки на ограничения (чтобы линеаризация “имела место”), можно решить эти уравнения и тем самым построить “улучшенные” проварьированные искомые функции, и затем повторять процесс, пока ограничения-условия оптимальности не будут выполнены с заданной точностью. В работе [468] субоптимальное управление в задаче Майера ищется в виде полинома заданной степени, таким образом найти требуется коэффициенты этого полинома. Система и ограничения линеаризуются, а целевой функционал линеаризуется, и к нему добавляется квадратичный член с весовым коэффициентом (роль его состоит в ограничении величины коэффициентов полинома на следующей итерации). Далее линеаризованный функционал минимизируется при линеаризованных ограничениях по правилу множителя Лагранжа, что позволяет построить “улучшенное” управление. Далее процесс повторяется, пока ограничения не будут выполнены с нужной точностью, а функционал не перестанет значительно уменьшаться.

Работы [286], [287] развивают применение известного алгоритма отсекающей гиперплоскости к решению задач оптимального управления. Рассматривается линейная система с линейными поточечными ограничениями, краевыми условиями и выпуклым функционалом, а также ограничением на управление с выпуклым множеством. Для такой систем проверяются функциональные свойства, такие как равномерная ограниченность, выпуклость и слабая компактность в L^2 множества управлений, вполне непрерывность оператора, содержащего фундаментальную матрицу решений из формулы Коши, полунепрерывность снизу и компактность в L^2 субдифференциала функции-ограничения, содержащей фазовые ограничения, необходимые для доказательства слабой сходимости по управлениям и сильной сходимости по траекториям построенной последовательности. При дополнительном требовании специального свойства равномерной выпуклости целевой функции удаётся доказать сильную сходимость и по управлениям. Предполагается что на каждом шаге алгоритма возможно решить исходную задачу без фазовых ограничений.

Целое направление исследований посвящено случаям так называемых особых управлений. Это случай управления, которое не может быть определено с помощью принципа максимума (иными словами, принципу максимума удовлетворяют любые допустимые управления). Поэтому нужны дополнительные средства исследования таких управлений. В статье [118] разрабатывается метод построения особых управлений, который базируется на условии возникновения таких управлений в терминах гамильтониана и использует идеи квазилинеаризации. Метод строится в предположении, что оптимальное управление начинается с неособого управления, затем переключается на особое управление, и оканчивается финальным особым или неособым управлением. Для решения краевой задачи используется метод линеаризации. В работе [239] для классической вариационной задачи в форме Больца исследуются условия второго порядка. Под особой понимается задача Больца, когда нарушены некоторые условия регулярности в терминах рангов матрицы вторых производных, в этом случае известные необходимые условия второго порядка (например, в форме Клебша) не несут никакой новой информации об оптимальности рассматриваемой траектории. В указанной статье производятся некоторые преобразования исходной задачи так, что новые полученные условия второго порядка в особом задаче содержательны. Рассмотрен пример конкретной задачи, когда полученные условия позволяют выделить подозрительные на оптимальные траектории. В работе [290] для исследования необходимых условий минимума, в случае наличия особых экстремалей, вводится специально построенная вариация управления, напоминающая стандартную игольчатую вариацию с несколькими симметричными всплесками. Далее предполагается что вариация фазовой координаты может быть представима в виде линей-

ной комбинации с неизвестными функциями-коэффициентами этой построенной вариации управления. Коэффициенты определяются из равенства нулю вариации фазовых координат. Далее полученные вариации на фазовые координаты и управления подставляются в разложение минимизируемого функционала в ряд Тейлора до второго порядка, и из известного условия Лежандра выводится требуемое необходимое условие минимума, которое можно назвать обобщённым условием Лежандра-Клебша. В статье [276] тоже вводится специальная импульсная вариация управления, и путём преобразований второй вариации как целевой функции, так и гамильтониана, получается отличное от обобщённого условия Лежандра-Клебша, новое условие минимума, приведены конкретные примеры, в которых последнее оказывается более информативным. Обобщение полученных условий оптимальности сингулярных траекторий на случай вектора управлений проделано в [398]. Обобщение полученных в некоторых ранее перечисленных статьях условий, а также известные условия Якоби и Клебша на случай сингулярных траекторий, а также некоторые условия нормальности даны в работах [248], [249]; основным аппаратом исследования выступают там псевдообратная матрица Мура-Пенроуза и трансформация Клебша. В статье [278] дополнительно на примере показывается, что в общем случае как обобщённое условие Лежандра-Клебша, так и новое условие полученное автором, не являются достаточными для оптимальности данного управления. В статье [279] рассматриваются задачи оптимального управления с особыми решениями, в том смысле что гамильтониан линейно зависит от управлений. Обсуждаются участки, на которых оптимальными являются управления из внутренности допустимого множества. Для нахождения оптимального управления с помощью принципа максимума задача регуляризуется по Тихонову с введением в целевой функционал квадрата управления, домноженного на малый параметр. Доказывается, что при стандартном предположении существования решения задач с малым параметром и в предположении, что при достаточно малых параметрах стартовое управление попадает в допустимую область, значение целевой функции в точке являющейся пределом последовательности оптимальных (для каждого шага итерационного процесса при уменьшении малого параметра) управлений является оптимальным. Автор статьи [302] применяет модифицированный метод простой итерации к решению задачи оптимального управления (в том числе в случае особых управлений) в форме Лагранжа с заданными краевыми условиями. Учёт условия на правом конце осуществляется за счёт стандартной штрафной функции. С помощью принципа максимума исходная задача сводится к решению краевой задачи ОДУ для прямой и сопряжённой переменных. При этом модификация метода простой итерации состоит в предложенной ранее технике усреднения управлений, построенных на последующих итерациях, которая грубо говоря состоит

в уменьшении шага изменения точки, и улучшает свойства сходимости метода. Подробный обзор по необходимым условиям оптимальности и численным методам для задач с особыми управлениями представлен в статье [135].

В статье [342] вместо исходной задачи оптимального управления при наличии фазовых ограничений записывается соответствующий лагранжиан. Его минимизация осуществляется классическим методом квазилинеаризации, при этом краевая двухточечная задача решается методом of “частных решений”. Заметим что в описанном методе помимо фазовых траекторий, сопряжённых переменных и управлений, осуществляется также поиск соответствующих вектор-функций-множителей Лагранжа. В статьях [258], [259], [474] применяется аналогичная техника, однако для нахождения направления спуска вместо градиентов используются сопряжённые градиенты. В статье [344] также используется описанный подход, но фазовые ограничения преобразуются в линейные за счёт введения дополнительных переменных; это позволяет соблюдать выполнение ограничений на каждом шаге алгоритма, таким образом можно производить “корректное” сравнение значений функционала на каждом шаге реализации метода. Работа [343] предлагает “гибридный” подход, который сочетает в себе две техники: трансформацию фазовых ограничений-неравенств в соответствующие равенства с помощью введения дополнительной переменной, составление дополнительных дифференциальных уравнений с этой переменной, а также фиксированное количество участков особых управлений и оптимизацию моментов времени входа в участок и выхода из участка траектории, на которой ограничения выполняются как равенства. В работе [280] предлагается оригинальная техника трансформации фазовых ограничений-неравенств в задачах оптимального управления в форме Больца со свободным правым концом. Суть её состоит в преобразовании неравенства в равенство с помощью введения дополнительной функции. Далее полученное равенство дифференцируется по времени, пока функция управления не возникнет явно, тогда полученное уравнение решается относительно неё, и далее используется управление в виде зависимости от остальных переменных, а введённая функция вычисляется с помощью рассмотрения дополнительных уравнений в ОДУ. Таким образом исходная задача преобразуется в задачу оптимального управления без фазовых ограничений, которую можно решать одним из известных для этого класса проблем методов.

Популярным и достаточно простым способом учёта различных ограничений в задачах управления является использование штрафных функций. В работе [128] предложена стандартная штрафная функция, сводящая исходную задачу Больца при наличии ограничений в виде дифференциальных связей к минимизации штрафного функционала в гильбертовом пространстве при всё увеличивающемся значении штрафного параметра, при этом для ми-

нимизации данного функционала используется стандартная техника градиентного спуска в функциональном пространстве. В статье [366] рассматривается вопрос сходимости (при стремлении к бесконечности штрафного параметра) по функционалу последовательности значений штрафной функции к истинному значению функционала в точке минимума при наличии ограничений по управлению и фазовых ограничений; при этом рассмотрена штрафная функция, записанная в общем виде и лишь отвечающая основным характеристикам штрафных функций. При доказательстве главного результата статьи основным является предположение о существовании предела в L^1 -норме, удовлетворяющего ограничениям на управление, последовательности управлений-решений задач минимизации штрафной функции при увеличении штрафного параметра. В работе [409] рассматриваются ещё более абстрактные по сравнению с предыдущей статьёй штрафные функции с общими свойствами. Опираясь на общую теорему [68] о слабой L^2 -сходимости последовательности управлений и равномерной сходимости последовательности соответствующей траектории в предположении равномерной ограниченности последней доказывается существование решения как исходной задачи при наличии ограничений так и в соответствующих задачах со штрафными функциями. Доказывается результат аппроксимации (слабой сходимости по управлениям и равномерной по траекториям) истинного решения решениями задач со штрафными функциями при гипотезе существования последовательности решений задач минимизации штрафных функций, которая аппроксимирует по введённому в статье определению истинное решение “изнутри”, то есть когда фазовая координата принадлежит внутренности множества допустимых траекторий; для линейной системы в случае её полной управляемости даётся естественное достаточное условие соблюдения такой “внутренней” аппроксимации. При этом доказанные результаты имеют место как для классических “внешних”, так и для “внутренних” [207] штрафных функций; последние имеют следующие преимущества по сравнению с первыми: на каждом шаге ограничения остаются выполненными, можно работать с функционалами, имеющими в качестве своей области определения лишь множества ограничений. Метод “внутренних” штрафов также применялся в функциональном пространстве в статье [305] в функциональном пространстве к задаче оптимального управления в форме Майера с закреплённым правым концом и смешанными ограничениями (на управление и на фазовые координаты), при этом при разработке теории ограничения на правом конце отсутствовали, а учёт их на практике осуществлялся с помощью штрафных коэффициентов. В предположении ограниченности снизу построенной штрафной функции, а также стандартного для теории внутренних штрафов условия расходимости несобственного интеграла с подынтегральным выражением, обратным функции, задающей смешанные ограничения, доказывается сходимость по функционалу к

минимальному значению при стремления штрафного параметра к нулю последовательности значений штрафной функции на доставляющем ей минимум (на каждой итерации при фиксированном значении штрафного параметра) управлении. Дополнительно даны условия выпуклости задачи, влекущие естественные требования линейности системы ОДУ и ограничений на правом конце, выпуклости целевого функционала и вогнутости функции, задающей смешанные ограничения. Авторы статьи [311] доказывают сходимость метода классических штрафных функций при значении штрафного параметра стремящемся к бесконечности. Более конкретно, рассматривается задача Майера со свободным правым концом, а фазовые ограничения “штрафуются” интегральным слагаемым. При стандартных предположениях непрерывности рассматриваемых функционалов и компактности множеств уровня целевой функции и построенной штрафной функции доказывається, что предельная точка последовательности оптимальных (для каждого шага итерационного процесса при увеличении штрафного параметра) управлений является решением исходной задачи, обсуждается некоторое усиление результатов (задача становится выпуклой) при дополнительных предположениях о выпуклости минимизируемого функционала и линейности системы и фазовых ограничений. Автор статьи [165] демонстрирует оригинальное применения формулы Грина для интегралов в частном случае двумерных систем, линейных по вектору управления.

Пожалуй, наиболее универсальным методом решения задач оптимального управления со сложными ограничениями различной природы является прямая дискретизация с дальнейшим использованием различных численных методов условной оптимизации для решения получаемой конечномерной задачи. При таком подходе возникают следующие естественные вопросы: сходимость в каком либо смысле фазовых траекторий и управлений как решений дискретной задачи к соответствующим искомым функциям исходной задачи с ростом ранга разбиения, выбор эффективных методов решения специфичных конечномерных задач, получаемых после дискретизации. Статьи [168], [169] изучают вопрос сходимости решения после дискретизации к решению исходной задачи, на примерах продемонстрировано, что выбор способа дискретизации весьма существенен (например, прямая дискретизация может не приводить к решению, тогда как модифицированная даёт приемлемый результат), даны условия некоторой регулярности или выпуклости исходной системы, когда прямая дискретизация допустима (доказаны сходимость по функционалу и равномерная сходимость по решениям для таких систем), даны также явные конструкции модифицированных разностных схем, “улучшающие” требуемые свойства сходимости; для таких разностных схем при естественных предположениях доказаны сходимость по значению функционала, равномерная сходимость по траектории и слабая сходимость в L^2 по управлению в случае линейности системы по управ-

лениям. Автор статьи [170] рассматривает метод дискретизации исходной задачи с дальнейшим решением полученной дискретной задачи методом штрафных функций; при этом в целях некоторой “регуляризации” данной системы строится так называемое C -расширение дискретной системы, предполагающее рассмотрение слегка расширенных допустимых множеств фазовых траекторий и управлений; такое расширение позволяет при естественных предположениях доказать слабую сходимость в L^2 по управлениям и производным фазовых координат. В статье [19] рассматривается дискретный метод типа локальных вариаций, так называемый метод “бегущей волны”, причём для случая когда размерность управлений не превосходит размерности фазовых координат (известно, что при противоположном неравенстве рассмотрение подобных методов проще, так как не возникает трудностей при построении элементарной операции [74]). Исследуется связь между числом свободных параметров и размерностями переменных задачи. Проводится сравнительный анализ построенного метода с методом локальных вариаций. В работе [74]) даётся серия приёмов эффективного построения элементарной операции (грубо говоря, возможность выразить управления через фазовые координаты) в ряде случаев, необходимой при реализации некоторых перечисленных выше методов; один из таких приёмов состоит в упомянутом для других алгоритмов общем способе рассмотрения соответствующих линейной системы и квадратичного функционала, для которых построить элементарную операцию на небольшом промежутке времени проще, чем для исходной системы. Достаточно полная характеристика вычисления оптимальных управлений с помощью исследования соответствующих оптимальных управлений в дискретных системах дана в работе [355]. В статье [431] проводится прямая дискретизация задачи оптимального управления в форме Больца со смешанными ограничениями и ограничениями-неравенствами на правом конце; после чего к полученной дискретной задаче применяется метод “внутренних” штрафных функций [207]. В статье [148] сначала осуществляется прямая дискретизация, затем обсуждается метод штрафных функций в сочетании с методом сопряжённых градиентов для решения этой задачи. В работе [345] производится прямая дискретизация задачи оптимального управления в форме Лагранжа со свободным правым концом и с поточечными ограничениями на управление, после чего к полученной дискретной задаче применяется известный метод проекции градиента. В работе [380] изначально рассмотрена дискретная задача оптимального управления в форме Майера со свободным правым концом и со смешанными ограничениями-неравенствами. Доказан дискретный принцип максимума для этой задачи (аппаратом являются известные условия Кунна-Таккера конечномерной условной задачи оптимизации), который является необходимым, а в случае выпуклости задачи (что получается в линейных системах с выпуклым функционалом качества и вогну-

той функцией, задающей смешанные ограничения) и достаточным условием оптимальности. В статье [406] производится прямая дискретизация задачи управления в форме Лагранжа с поточечными условиями на управление и фазовые координаты. При этом ограничения-равенства, возникающие после дискретизации системы ОДУ искусственно заменяются на ограничения-неравенства, это осуществляется для регуляризации задачи и выполнения условий типа Слейтера для обоснования сходимости разрабатываемого алгоритма, при этом также при выполнении некоторых условий регулярности в терминах рангов соответствующих матриц доказывается, что точка минимума в задаче с ограничениями-неравенствами является искомой точкой минимума в исходной задаче. Сам алгоритм заключается в линеаризации функции, задающей ограничения-неравенства и построении направления спуска, лежащем в пересечении касательных к ограничениям гиперплоскостей и дальнейшему проектированию этого направления на прямое произведение множеств, задающих упомянутые ограничения на управление и фазовый вектор. При выполнении отмеченных условий регулярности доказывается сходимость построенной последовательности точек к стационарной точке исходной задачи. Отметим, что описанный алгоритм фактически является методом проектирования с восстановлением связей, и построение данной проекции возможно лишь при несложном множестве-ограничении. Теоретическое обоснование данных методов [89] может быть проведено на основе фундаментальной теоремы Люстерника-Соболева об отображении в касательное многообразие [70].

Обширная литература посвящена градиентным методам поиска управления в функциональном пространстве. Как система, так и целевой функционал в виде Лагранжа или Майера, линеаризуются в работе [108] на каждой итерации, и улучшенное управление выбирается исходя из решения полученной линеаризованной задачи, тем самым неявно применяется метод градиентного спуска. В книге [74] даётся естественное замечание о том, что если брать во вспомогательной задаче управление по “правилу вариаций” (то есть в направлении наибоыстрейшего убывания функционала), то это означает выбор управления по принципу максимума для соответствующей линейной задачи, и кроме того даются “рецепты” сохранения принадлежности управления на новой итерации требуемому множеству. В этой связи отметим статью [423], в которой рассматривается оригинальный способ параметризации управления, который позволяет от исходной задачи, в которой управление принадлежит некоторому отрезку, перейти к задаче без ограничений на управление (однако при этом не сохраняется линейность по управлению); далее управление параметризуется с помощью полинома заданных степени с подлежащими определению коэффициентами, и осуществляется поиск градиентов соответствующих функций по вектору этих коэффициентов, необходимых

при реализации известных градиентных методов. В работе [424] также осуществляется параметризация управления: на каждом интервале после дискретизации управление ищется в виде линейной комбинации базисных функций с неизвестными коэффициентами (метод Ритца). Для определения данных коэффициентов используется градиентный метод. Рассматривается задача Лагранжа со свободным правым концом. В предположении ограниченности в L^2 операторов дифференцирования правой части системы и интегранда минимизируемого функционала по вектору фазовых координат и управлений, а также положительной определённости “по управлениям” гамильтониана на оптимальном процессе доказывается сходимость в L^2 -норме последовательности параметризованных управлений и соответствующих им траекторий к оптимальным в исходной задаче при стремлении ранга дискретизации к бесконечности. В статье [365] система также линеаризуется, а целевой функционал Лагранжа раскладывается в ряд с сохранением слагаемых вплоть до второго порядка, далее в полученной линейно-квадратичной задаче управление выписывается по известным формулам [58], после чего процесс повторяется. В статье [289] вычисляется градиент в функциональном пространстве для построения очередной итерации “улучшения” управления. Для поиска производной фазовой переменной по параметру (управлению) используется стандартная техника линеаризации исходной и построенной сопряжённой систем. При этом для “контроля” величины шага спуска строится специальное ограничение-равенство (определяющее величину спуска), которое учитывается с помощью соответствующего множителя Лагранжа. Для учёта ограничения-равенства в исходной задаче (фазовые ограничения и краевые условия) рассматривается два подхода: 1) техника проекции градиента, напоминающая аналогичную из работы [149] или 2) учёт ограничений с помощью штрафной функции. В работе [466] даны некоторые эвристические приёмы соблюдения поточечных ограничений на управление на новой итерации с помощью специально построенных коэффициентов при градиенте управления. Для задачи управления в форме Майера с ограничением на правом конце в статье [471] находится градиент по управлению, выраженный через гамильтониан, после чего применяется функциональный метод сопряжённых направлений. При этом на каждом шаге решается уравнение относительно множителей Лагранжа, отвечающих ограничениям на правом конце, в случае успеха данные ограничения соблюдаются на каждом шаге алгоритма, однако понятно что решить такое уравнение можно только при не сложной структуре данных ограничений. Авторы работы [304] применяют метод сопряжённых градиентов в функциональном пространстве к задаче оптимального управления в форме Лагранжа со свободным правым концом. В предположении ограниченности снизу целевого функционала и ограниченности его второго дифференциала, а также существования предельной точки последовательности

управлений, построенных по правилу метода, доказываемая его сходимость по функционалу к значению функционала в этой предельной точке, а также сходимость градиента к нулю; в случае дополнительного предположения выпуклости функционала естественно доказываемся, что значение функционала в этой предельной точке минимально. Метод сопряжённых градиентов используются и в работе [375], при этом обсуждаются эвристические способы соблюдения поточечных ограничений на управление. В работе [250] рассматривается задача оптимального управления в форме Майера со свободным правым концом, что позволяет также “напрямую” применить метод сопряжённых градиентов (где градиент по управлению вычисляется по известной формуле через гамильтониан), а также доказать его “слабую” сходимость в предположении выпуклости минимизируемого функционала. В статье [17] при естественных предположениях доказываемся слабая сходимость в L^2 по управлениям, при некоторых дополнительных предположениях доказываемся сильная сходимость в L^2 по управлениям для построенного вспомогательного регуляризованного функционала. В статье [263] также реализуется метод сопряжённых градиентов, при этом градиент по управлениям вычисляется по известной формуле через гамильтониан. Отдельное внимание в последней работе уделяется способам решения задач с нефиксированным конечным временем, обсуждаются следующие подходы: решение задач с последовательностью фиксированных финальных моментов времени, заведомо бо’льших чем искомое финальное время, оптимизация финального момента времени как параметра задачи (с поиском градиента минимизируемого функционала по времени), вычисление градиента целевой функции по времени и остановка интегрирования в основной процедуре выбранного численного метода, когда он равен нулю. Автором же статьи предложен ещё один подход, в котором вводится дополнительная фазовая переменная (на которую должны быть наложены ограничения по знаку), связываемая “старое” и “новое” время, причём последнее можно считать изменяющимся на любом желаемом отрезке, а оптимизации подвергается дополнительно параметр, участвующий в построении “нового” времени. В статье [470] произведена классификация и сравнительный анализ результатов работ, использующих методы проекции сопряжённых градиентов. Модификация метода условного градиента представлена в работе [261]; здесь с помощью гамильтониана вычисляется градиент минимизируемого функционала по управлению, при этом проектирование на допустимую область управления происходит по несложным явным формулам в силу простоты задания этой области; ограничение на правом конце штрафуетс терминальным слагаемым. Автор работы [24] в задаче оптимального управления в форме Майера со свободным правым концом оптимизирует кусочно-постоянные значения управления на отрезках разбиения рассматриваемого интервала времени, при этом концы этих отрезков (то есть моменты пе-

реключения управления) также оптимизируются; производные по параметрам управления и точкам переключения вычисляются через гамильтониан по известным формулам. В статье [12] для задачи оптимального управления в форме Майера со свободным правым концом используется метод проекции градиента для учёта фазовых ограничений; при этом градиент минимизируемого функционала вычисляется с помощью системы в вариациях или сопряжённой системы. Теоритическое обоснование сходимости метода сопряжённых направлений в функциональном пространстве со схожими стандартными предположениями, а также свойства релаксационности данного метода имеется, например, в работе [445].

Одним из подходов является сведение (с помощью принципа максимума) задачи оптимального управления к двухточечной краевой задаче. В работе [142] задача оптимального управления сводится к решению краевой задачи для исходной и сопряжённой системы (в предположении что управление можно явно выразить через прямые и сопряжённые переменные); для поиска начальных условий полученной краевой задачи используется BFGS-метод (при этом градиент функционала-ошибки на правом конце вычисляется приближённо по формуле конечных разностей). Авторы статьи [186] также сводят решение исходной задачи к двухточечной краевой задаче для исходной и сопряжённой систем, далее рассматриваемый отрезок времени разбивается на достаточно большое количество равных интервалов, на каждом из которых решения этих систем аппроксимируются кубическими сплайнами при этом параметры сплайнов выбираются из критерия минимизации суммы квадратов разностей наклона искомым полиномов и значений скоростей (вычисляемых из правых частей систем) в серединах полученных интервалов, а также из критерия выполнения условий трансверсальности и заданных условий на правом конце. В работе [149] модифицированный метод проекции градиента применяется к задаче Майера оптимального управления как со свободным так и с фиксированным временем окончания процесса: при заданных значениях поправки на величину минимизируемого функционала, ошибки на правом конце и нормы поправки на управления, ищется изменение управления на новом шаге, при этом перечисленные величины не должны быть слишком велики, чтобы “имели силу” линеаризованные уравнения, из которых и ищется поправка на управление. В статье [151] этот метод модифицируется для учёта ограничений на фазовые координаты, при этом предполагается, что имеется один отрезок времени, в течение которого траектория движется по границе допустимой фазовой области и детально обсуждаются правила выбора начала и конца этого временного отрезка, а приращение управления на границе допустимой фазовой области выражается как решения линеаризованного уравнения, задающего границу этой области. В работе [152] используется метод проекции градиента, при этом для ускоре-

ния сходимости вместо градиентов используются сопряжённые направления. Метод статьи [149] переносится на дискретный случай в работе [331]. В работе [72] тоже используются формулы авторов [149]; “изюминкой” статьи является качественное сравнение различных методов краевых задач и их геометрическая интерпретация. Автор работы [453] модифицирует алгоритм [149], предполагая поточечно ограниченное отрезком управление типа bang-bang (что как известно обосновано для некоторых классов систем) и оптимизируя точки переключения управления. При этом для нахождения градиента функционала по этим точкам переключения требуются обобщенные функции скачка Хевисайда и дельта-функция Дирака. Автор статьи [245] модифицирует указанный метод проекции градиента, решая ту же задачу с частично фиксированным правым концом, используя метод Ньютона для оптимизации выбора приращения управления. Автор работы [246] применяет алгоритм квазилинеаризации для гибридной (состоящей из набора подсистем) системы ОДУ в присутствии фазовых ограничений, при этом оптимизируются также моменты переключения управления (их число фиксируется заранее); при этом улучшение управления на каждом шаге осуществляется при решении уравнений получаемых путём линеаризации соотношений оптимальности и фазовых ограничений. В работе [418] также используется метод квазилинеаризации решения двухточечной краевой задачи в сочетании с трансформацией Риккати для обеспечения устойчивости интегрируемых систем. Кроме того, показано как провести проверку условий Лежандра и Якоби, чтобы гарантировать, что полученная точка является по крайней мере локальным минимумом в задаче оптимального управления в форме Больца со свободным правым концом, рассматриваемой в этой статье. Метод квазилинеаризации разработан в статьях [147, 291, 333, 307, 346, 336] как для задач с фазовыми ограничениями, так и без них (при этом в некоторых статьях даются рецепты поиска моментов вхождения в отрезок и выхода из отрезка, на котором ограничение выполняется как равенство), здесь предполагается что управление можно явно выразить из принципа максимума, сведя решение исходной задачи к двухточечной краевой задаче для исходной и сопряжённой систем, далее двухточечная краевая задача решается одним из известных методов, а тогда определены поправки на прямые и двойственные переменные. Далее в управление вносится поправка (выраженная через данные поправки) так, производная гамильтониана осталась равна нулю с точностью до линейных членов. По сути данный алгоритм является модифицированным методом Ньютона — поиска корней уравнения Эйлера-Лагранжа, представляющего собой необходимые условия минимума в исходной задаче управления в виде Лагранжа с заданными краевыми условиями. Поскольку уравнение Эйлера-Лагранжа является условием первого порядка на гамильтониан, описанный метод можно отнести к классу алгоритмов второго порядка. Он об-

ладает следующими существенными недостатками: предполагается, что гамильтониан является “глобально” выпуклым по управлению, что обеспечивает невырожденность матрицы его вторых производных (по управлениям), необходимую для реализации алгоритма, но часто не выполняется на практике, кроме того, нельзя “напрямую” следить за соблюдением ограничений на управление, то есть для их выполнения нужны дополнительные средства, например, штрафные функции и т. п. В статье [277] с помощью другого аппарата (а именно, динамического программирования) строится аналогичный метод, во многом лишённый упомянутых недостатков; так требуется невырожденность матрицы вторых производных гамильтониана по управлениям не на всей области, а лишь в точке-управлении, подозрительном на точку минимума гамильтониана, а поправка на управление, требуемая для соблюдения соответствующих ограничений, реализуется в ходе исполнения метода за счёт линеаризации последних. Отметим работу [469], в которой также получены формулы “улучшенного” метода предыдущей статьи [277], однако их вывод осуществлён более естественными средствами варьирования управления, а именно поправка на управление строится как сумма поправки “оптимального” управления максимизирующего гамильтониан на текущих траектории и множителях Лагранжа и поправки управления-разности текущего управления и упомянутого “оптимального”, после чего производная гамильтониана (по управлению) линеаризуется в окрестности этого “оптимального” управления (в отличие от [16] метода с упомянутыми недостатками статей выше), где линеаризация осуществляется в окрестности текущего управления), и линеаризованное уравнение решается для выражения новой поправки “оптимального” управления. Статья [283] развивает градиентные методы второго порядка предыдущих, модификация состоит в учёте фазовых координат следующим приёмом: в исходную систему ОДУ вводятся новые переменные, которые удовлетворяют дифференциальным связям особо вида (в правой части находятся функции содержащие чётную степень максимума из нуля и фазового ограничения-неравенства), при этом известно, что если на левом и правом концах эти переменные принимают определённые значения, то фазовые ограничения удовлетворены. В статье [432] модификация метода Ньютона состоит в добавлении специального слагаемого в линеаризованные уравнения. Грубо говоря его роль заключается в указании на направление “обычного” градиентного спуска, когда точка на очередной итерации находится достаточно “далеко” от искомой, что может значительно расширить область сходимости, которая для классического метода Ньютона обычно не столь велика; в то же время когда точка находится уже в окрестности минимума, роль этого слагаемого минимальна, поэтому в предложенном модифицированном методе удаётся сохранить скорость сходимости, присущую методам второго порядка. В работе [456] рассматривается задача Лагранжа с фазовыми ограничениями

и с фиксированным правым концом. С помощью введение искусственной “временной” переменной интервал времени разбивается на конечное число отрезков с фиксированными известными концами, с помощью принципа максимума задача сводится к многоточечной краевой задаче ОДУ, которая решается методом “дополнительных” функций, при этом сопряжённая система на границе допустимой по фазовой переменной области строится по известным правилам для задач управления с фазовыми ограничениями. Для поиска недостающих краевых условий на концах обозначенных интервалов используется информация о заданных условиях на концах, постоянстве и непрерывности гамильтониана, непрерывности и значениях фазовых координат на концах интервалов.

Кратко охарактеризуем способы решения двухточечной краевой задачи: метод “дополнительных” (complementary) функций, с использованием матричного уравнения Риккати, метод “внедрения” (imbedding); в нелинейном случае используется сочетание перечисленных методов с линеаризацией исходной системы или реализации “операторного” варианта метода или Ньютона-Рафсона. Метод частных решений [240] грубо говоря состоит в подборе требуемой линейной комбинации решений с набором линейно независимых начальных условий. В статье [411] обсуждаются преимущества и недостатки обобщённого метода трансформации Риккати по сравнению с imbedding-техникой. Преимущества первого метода, например: первый метод более точный, в то время как уравнения второго метода более подвержены ошибкам вычисления, некоторые нетривиальные подзадачи второго метода решаются автоматически по ходу реализации первого. Преимущества второго метода, например: в отличие от первого, можно применять к нелинейным системам, интуитивные аспекты, которые должны быть осознаны при реализации метода, могут быть полезны для общего понимания задачи. В статье [359] предлагается оригинальный способ решения краевой задачи, когда вариация сопряжённой переменной на правом конце выражается через вариацию фазового вектора; эту связь удаётся установить из системы ОДУ для производных прямой и двойственной переменных по параметру-сопряжённой переменной на левом конце. Линеаризованные уравнения условий трансверсальности и ограничений на правом конце дают возможность вычислить вариацию по фазовым переменным. В [293] модифицированный метод Ньютона-Рафсона применяется к решению двухточечной краевой задачи, возникающей в задаче оптимального управления при использовании принципа максимума. Из общей теории решения операторного уравнения этим методом получается итерационная схема, определяющая очередную точку как решение некоторого дифференциального уравнения, использующая линеаризацию исходного дифференциального уравнения и значение его правой части в предыдущей точке. Опять же из общих соображений данной теории можно гарантировать что метод сходит-

ся с квадратичной скоростью при выборе начального приближения из области сходимости. В [314] тоже используется метод Ньютона-Рафсона, однако он применяется для решения уравнения на правом конце, получающееся из условий трансверсальности и изначальных краевых условий. При этом предполагается, что управление из принципа максимума можно выразить как функцию координат и вектора сопряжённых переменных, и рассматривается соответствующая двухточечная краевая задача. Градиент по начальным значениям сопряжённой переменной вычисляется с помощью теорем зависимости ОДУ от начальных данных. Финальный момент времени считается заданным и оптимизируется в ходе итерационного процесса метода Ньютона-Рафсона. Аналогичные процедуры воплощены и в [306], отличие от предыдущей работы заключается в том что с помощью замены переменной изначально осуществляется переход к фиксированному интервалу времени, а также в модификации “шага” метода Ньютона-Рафсона для улучшения сходимости. Автор [435] даёт обзор основных методов теории управления, сосредотачиваясь на методах решения двухточечной краевой задачи. Внимание уделяется прямым методам (методы оптимизации в функциональном пространстве, напрямую использующие информацию о задаче), таким как градиентный спуск, и непрямым (основанным на условиях минимума) методам, например, квазилинеаризации, методам Ньютона-Рафсона в различных реализациях. Оригинальный способ решения описан в книге [284], где за счёт свойств линейных систем двухточечная краевая задача сводится к решению задачи Коши, при этом используются идеи динамического программирования. В книге [74] также обсуждается сведение двухточечной задачи к задаче Коши методом прогонки, и для устойчивости счёта используется схема Абрамова. На качественном уровне и на конкретных примерах численно с практической точки зрения методы линеаризации и трансформации Риккати сравниваются в работе [436]. Метод дополнительных функций модифицируется в [467] для повышения устойчивости счёта; это реализовано за счёт разбиения участка интегрирования на несколько коротких, на каждом из которых интегрирование может вестись независимо. Отметим также работу [444], в которой предложен оригинальный метод поиска недостающего начального условия, обеспечивающего удовлетворение ограничений двухточечной задачи на правом конце. Метод базируется на построении разложения в ряд Тейлора значения траектории в точке и его выражения через недостающее значение на левом конце, чего удаётся добиться, выражая входящие в ряд производные через значение на левом конце путём последовательного дифференцирования исходной системы ОДУ. Таким образом, поскольку на правом конце значение траектории известно по условию, а оно по построению выражено через значение на левом конце, последнее можно найти.

В работе [200] вскрывается интересная связь между принципом оптимальности Беллмана и принципом максимума для задач оптимального управления, в частности сопряжённые переменные интерпретируются как частные производные функции Беллмана по фазовым переменным; на основании полученных в терминах этой функции условиях минимума строится численный метод решения задачи, базирующийся на выражении приращения управления в терминах функции оптимальности. Правда, в данной работе не обсуждаются условия дифференцируемости функции Беллмана по фазовым переменным, что как известно является “узким местом” данного подхода; поэтому приведём также статью [15], где даётся строгое обоснование применения принципа оптимальности. Также известно что условие дифференцируемости функции Беллмана часто нарушается лишь в отдельные моменты времени, в этом смысле более тонкие рассуждения, связанные с изучением её левой и правой производных, даётся в статье [204] где структура управления считается известной, считается что она является кусочно постоянной, и точки переключения оптимизируются исходя из полученных там условий их оптимальности (в терминах функции Беллмана). В статье [185] также подробно обсуждается связь между принципами оптимальности Беллмана и Понтрягина (в книге [82] также есть раздел, посвящённый этой теме). Наконец, в работе [99] даются аргументы “в защиту” принципа динамического программирования Беллмана в оптимальном управлении в связи с предшествующей его критикой. Основной аргумент состоит в том, что наличие негладких или разрывных решений не является основанием для попытки разработки их поиска для уравнений в частных производных, кроме того, функция оптимальности чаще всего терпит разрыв своей производной лишь на кривых составляющих множества меры ноль, поэтому на практике проблем с работой с функцией Беллмана обычно не возникает.

Большая литература посвящена линейно-квадратичной задаче (ЛКЗ) оптимального управления, включая случай ограничений различной природы. Подобно тому как в конечномерной оптимизации удаётся построить эффективные методы решения линейно-квадратичной задачи, специфика таких задач в теории управления также позволяет разрабатывать под неё отдельные методы. В статье [166] ЛКЗ на конечном промежутке решается в присутствии интегрального ограничения на управление, известная формула для оптимального управления модифицируется исходя из наложенного ограничения. Работа [129] рассматривает решение ЛКЗ с помощью принципа оптимальности Беллмана, с помощью этого метода строится известный итерационный процесс, предполагающий решение матричного уравнения Ляпунова на каждом шаге; обсуждается как применяемую технику адаптировать и под задачу с нелинейной системой. В статье [201] ЛКЗ рассматривается в нестандартной форме: задача формулируется на конечном интервале времени, однако

предполагается, что в конечный момент траектория должна проходить через определённую гиперплоскость, кроме того, квадратичная форма по фазовой переменной не обязана быть положительно определённой; при этих допущениях матричное уравнение Риккати обладает “неприятным” свойством, а именно его решение может быть неограниченным в конечный момент времени, что затрудняет численное интегрирование; для преодоления данной трудности в статье предлагается преобразование уравнений, которое избавляет от интегрирования с неограниченным конечным условием, однако проделанное преобразование может способствовать появлению так называемых фокусов (точек, в которых преобразованное решение неограниченное и которые отсутствуют в исходной задаче), обсуждается “борьба” с данными точками и даётся соответствующий пример. Автор статьи [251] также рассматривает ЛКЗ с закреплённым правым концом с такими условиями, даются другие достаточные условия существования решения в терминах соотношения связывающего фундаментальную матрицу, матрицу управления системы и матрицу, задающую линейное ограничение фазовой координаты на правом конце (при условии её невырожденности) и при дополнительном предположении положительности минимизируемого функционала при нулевых значениях фазовых координат. Работа [237] также имеет дело с ЛКЗ на конечном временном промежутке в предположении, что квадратичная форма с фазовыми переменными не обязана быть положительно определена; известный критерий существования решения в терминах отсутствия сопряжённой точки исследуется в деталях и переписывается на языке характеристических чисел матрицы, зависящей от матриц в условии задачи, в том числе от матрицы квадратичной формы управления, следовательно можно наложить и проверять некоторые условия на эту матрицу, свидетельствующие о наличии или отсутствии решения в исходной задаче, дан соответствующий пример. В работе [335] предложена оригинальная идея разбиения переменных на две группы по особому правилу при решении стандартной ЛКЗ; показано, что такая техника в некоторых случаях повышает характеристики сходимости, а также избавляет от участков особых управлений. В статье [404] изучается ЛКЗ и находятся условия, при которых управление полностью лежит внутри поточечных ограничений. Для такого случая получены явные формулы на управления и множители Лагранжа (сопряжённые функции). Также выписаны явные формулы для проверки условий Лежандра и Якоби и Вейрештрасса как достаточных условий локального минимума. Автор статьи [324] рассматривает ЛКЗ с интегральным ограничением на управление, учёт которого в минимизируемом функционале и в окончательной формуле для оптимального управления учитывается с помощью множителя Лагранжа. В [426] ЛКЗ рассматривается на бесконечном интервале времени для полностью управляемых систем с условием, что как

начальная точка, так и управление в каждый момент времени должны лежать в заданном шаре (каждый в своём), кроме того управление ищется в форме линейной обратной связи. С помощью известного в вариационном исчислении необходимого условия минимума в виде уравнения Эйлера-Пуассона, а также разложения полинома на полином и антиполином Гурвица, задача сводится к нахождению одной компоненты управления и даются оценки на эту компоненту гарантирующие отсечение неограниченных решений (иными словами гарантирующие устойчивость системы). Далее с помощью принципа максимума получается правило выбора значения этой компоненты управления, доставляющей минимум гамильтониану при условии отмеченных ограничений на управление и начальную точку. Учёт обоих полученных оценок позволяет находить указанный параметр управления, что показано на примерах. Интересен подход [381] и дальнейшие обобщения (см., например, [154]), который использует известные результаты решения ЛКЗ для построения субоптимальных управлений в нелинейной задаче (с нелинейной правой частью ОДУ) и с квадратичным функционалом и со свободным правым концом. Сначала ОДУ линеаризуется, а частные производные линеаризованной системы вычисляются на траектории в фиксированный момент времени (в начальный момент времени значение траектории известно). Далее для такой системы оптимальное управление строится по известным формулам с использованием уравнения Риккати, таким образом построенное управление аппроксимирует истинное оптимальное управление нелинейной системы в этот момент времени, далее происходит сдвиг по времени и описанная процедура повторяется, пока не будет полностью пройдено всё время. При этом, значение траектории в следующий момент времени берется равным значению субоптимальной траектории в данный момент, вычисленной на предыдущем шаге. Такая процедура построения субоптимальных управлений требует быстрого интегрирования для разных моментов времени. В [443] исследуется ЛКЗ в присутствии линейных фазовых ограничений. Дается модификация известных для этой задачи условий оптимальности, в которой содержится ответ на открытый тогда вопрос о характере скачков функции множителей Лагранжа, в частности доказывается что она абсолютно непрерывна внутри рассматриваемого интервала. Дается вариант теоремы о неподвижной точке, используемый для построения численного метода решения задачи. Поскольку в присутствии фазовых ограничений соответствующее уравнение Риккати несимметрично, обсуждаются условия существования такого уравнения, в частных случаях существование решения с нужными свойствами гарантируется; ключевым предположением, которое при этом делается, является положительная определённость и симметричность некоторых матриц, входящих в матричное уравнение Риккати.

В работах [478], [479] доказывається принцип максимума в интегральной форме для задачи Лагранжа как со свободным, так и с подвижным правым концом для фиксированного, либо свободного времени окончания процесса; в отличие от поточечного условия максимума гамильтониана в ПМП, здесь на оптимальном процессе максимума достигает интеграл от гамильтониана. Такой результат получен при рассмотрении проварьированных управлений, которые близки к исходным в L^1 -норме. В статье [2] выводятся условия оптимальности для задачи оптимального управления в присутствии фазовых ограничений в стандартной форме принципа максимума с сопряжённой системой, включающей градиент функции, задающей ограничения на фазовый вектор и условиями скачка на сопряжённые переменные. На некоторых примерах демонстрируется, когда данные условия удаётся использовать для получения аналитического (точного) решения задачи. В книге [15] получено наглядное и “элементарное” доказательство для этой задачи с фазовыми ограничениями, с использованием оригинальной техники рассмотрения специально построенных дифференциальных включений, соответствующей исходной задаче. В статье [202] условия минимума получены с использованием принципа Белмана, которому присущи всё те же недостатки обременительного предположения дифференцируемости функции оптимальности. Автор работы [140] исследует вопрос эквивалентности полученных условий экстремума, которые перечислены выше. В работе [439] даётся интересный пример, когда правило множителей Лагранжа оказывается слабее и соответственно менее информативным для практики, нежели более сильное условие Гамкрелидзе на данные множители. В работе [150] условия экстремума в схожей со стандартной форме получены с помощью использования аппарата множителей Лагранжа в функциональном пространстве для задачи с фазовыми ограничениями, имеющими определённый “порядок” (это означает, что явно управление входит первый раз только в производную данного порядка функции задающей ограничение), впрочем приведённое там доказательство нельзя считать вполне строгим. Также рассматриваются примеры, исследуемые аналитически. Автор серии работ (см., например, [449], [450]) также использует вариационный подход для доказательства необходимых условий минимума, включая условия второго порядка, в том числе для задач с фазовыми ограничениями и системами с разрывными правыми частями. В статье [282] показано, что в этих работах недоопределены условия на сопряжённые переменные в точке вхождения траектории на границу фазовых ограничений, и этот недостаток устраняется, усиленное в этом смысле условие оптимальности демонстрируется на примерах. Автор работы [408] ослабил ранговые условия, которые обычно накладывались на определённые матрицы, а также допустил бесконечное число “пограничных” областей. Он использовал

вариационный подход Хестенса, чтобы прийти к некоторым дополнительным условиям, который нужно наложить на сопряжённые переменные. Статья [403] имеет дело с выпуклыми задачами оптимального управления с линейными ограничениями на фазовые координаты, но без стандартных предположений дифференцируемости. Автор [440] использует подход Валентина [455], чтобы модифицировать результаты, полученные в работе [153] с использованием понятия “поглощающих” границ, и связывает эти условия с полученными в статьях [153], [282] и [408]. В работе [419] даётся хороший обзор перечисленных выше и других работ по задачам управления с фазовыми ограничениями, отдельное внимание уделено обсуждению “порядка” этих ограничений под которым подразумевается наименьший порядок производной функции, задающей ограничение-неравенство, в которую управление входит явно. Статья также унифицирует предыдущие подходы для линейной задачи оптимального управления с линейными фазовыми ограничениями высших порядков. В статье [236] рассматриваются так называемые гибридные системы, когда поведение объекта описывается разными дифференциальными уравнениями на разных интервалах времени; с помощью введения времени как искусственной переменной данная задача сводится к классической, и для неё формулируются известные условия оптимальности. В работе [310] достаточное условие оптимальности для задачи управления в форме Лагранжа с заданными краевыми условиями формулируется в виде двух неравенств в терминах гамильтониана. Первое является неравенством типа Эрдмана-Вейерштрасса. Второе строится достаточно специфичным образом, и должно выполняться для вектора сопряжённых переменных, вычисленных на правом конце, а также для всех точек из начального и конечного множества исходного краевого условия. В статье [326] рассматривается задача оптимального управления в форме Больца с ограничением на правом конце и со смешанными поточечными ограничениями на управление и фазовые координаты. При некоторых стандартных для справедливости принципа максимума предположениях и некоторых дополнительных предположениях выпуклости функционала и ограничений доказывается достаточность ПМП. Для линейных систем в задаче Больца со свободным правым концом и с выпуклым минимизируемым функционалом достаточность с помощью общего условия Вейерштрасса рассмотрена и в работе [396]. Также с помощью известных неравенств, связывающего значение выпуклой функции с её градиентом в этой статье получены некоторые нижние оценки на целевой функционал, что может быть полезно при проверке полученной в ходе реализации какого-либо численного метода стационарной точки на “адекватность” истинному решению (дана иллюстрация на примерах).

В работе [20] рассматривается задача оптимального управления системой, в которой фазовая траектория терпит разрыв при переходе через заданную поверхность, заданную

уравнением с непрерывно дифференцируемой функцией; предполагается, что траектория пересекает эту поверхность конечное число раз. Показано, как ряд нестандартных задач управления, например, минимизация интеграла от модуля функции или максимального на всём временном промежутке значения функции, сводятся к стандартной задаче, но с разрывной правой частью. Дается формула приращения некоторого функционала фазовой траектории с учётом специфики задачи, при этом основное отличие от классического результата состоит в том, что сопряжённая функция терпит разрыв, определяемый множителем Лагранжа при поверхности разрыва, который в свою очередь определяется через скачок функции в правой части при прохождении траектории через эту поверхность (предполагается, что траектория пересекает поверхность в отдельные моменты времени, которых имеется конечное число). Даются необходимые условия экстремума для рассматриваемой задачи, также отмечено что в случае линейности системы и линейности функционала по фазовым координатам в случае задачи Майера они оказываются и достаточными. В работе [4] получен более сильный по сравнению с отмеченным результат в случае, когда траектория также может “залегать” на поверхности разрыва (тем самым, по сути, исследуется скользящий режим) на заданном временном отрезке. В предположении усиленных “условий скольжения”, достаточных условиях схода с участка скольжения в конце указанного отрезка, а также стандартных условий невырожденности некоторых матриц-ограничений получены условия оптимальности в форме принципа максимума, также с уравнением скачка для сопряжённой переменной, и кроме того, соотношения, связывающие приращение функционала с конусом возможных направлений параметров задачи (играющих роль управления) и уравнений типа Филиппова на участке скольжения, связывающих производные поверхности разрыва с выпуклой оболочкой скоростей фазовой траектории. При выводе условий оптимальности для задач управления с разрывными системами большую роль играют теоремы о дифференцируемости решений по начальным значениям и по параметрам для таких систем, соответствующие результаты даны в [88].

Автор статьи [262] разрабатывает оригинальную технику оптимизационных imbedding-алгоритмов. (По-видимому, как наиболее подходящий в качестве аналога на русском языке можно указать алгоритм “внедрения”.) Идеология данных методов заключается во введении в рассматриваемую задачу некоторого параметра, при этом предполагается что при небольших его значениях некоторый метод последовательных приближений (например, метод Ньютона-Рафсона) гарантированно приведёт к решению, поскольку “будет запущен” из области сходимости для данной задачи. Затем полученное решение при выбранном значении параметра используется как стартовая точка в новой задаче, в которой данный параметр

немного увеличивается, и так далее. Такая процедура позволяет в некоторых случаях прийти к желаемому результату. В статье *imbedding*-алгоритм применяется к задаче управления, где в качестве упомянутого параметра выступает время, предполагается, что задачу “проще” решать на небольшом промежутке времени, и далее происходит постепенное увеличение параметра (рассматриваемого интервала времени) в соответствии с описанием метода выше. При этом под “решением” в данном случае понимается вектор управлений, порождённых ими фазовых координат, а также множителей Лагранжа, финальное время и т. п. в зависимости от задачи. Для аппроксимации решения на большем интервале времени используется формула Ньютона-Лейбница, в которой производная решения по параметру вычисляется с помощью стандартной линеаризации ОДУ и различных ограничений. Автор статьи [415] использует *sensitivity* анализ (“чувствительности”), который тоже напоминает *imbedding*-технику, для повышения свойств сходимости применяемого метода квазилинеаризации решения двухточечной краевой задачи, возникающей после применения принципа максимума из рассматриваемой задачи управления в форме Лагранжа со свободным правым концом. При значении параметра “чувствительности” $\varepsilon = 0$ как коэффициента при нелинейных компонентах задачи (системы и функции под интегралом целевого функционала) получается линейная двухточечная задача, в которой точное решение получается за один шаг. Далее в предположении что искомое начальное условие в краевой задаче дифференцируемо по введённому параметру, происходит его аппроксимация (*predictor*) с помощью ряда Тейлора данного начального условия по параметру с точностью до линейных членов. Таким образом, разумно предположить, что предсказанное решение уже близко к истинному решению нелинейной системы с увеличенным значением параметра и происходит его подправление (*corrector*) обычным методом квазилинеаризации. Далее процедура повторяется при новых всё увеличивающихся значениях параметра, пока он (как коэффициент при нелинейностях) не станет равным единице. Сочетание линеаризации и *imbedding* методов применяется в статье [416] к задаче управления Больца с закреплённым правым концом в предположении что из ПМП можно явно выразить управление через фазовые координаты и сопряжённые функции. По сути “внедрение” в семейство задач, зависящее от определённого параметра нужно для расширения области сходимости какого-либо метода (в данном случае метода Ньютона), поскольку это семейство строится таким образом, что на первом шаге при нулевом значении параметра очевиден подбор решения задачи. Далее для аппроксимации решения выписывается формула Ньютона-Лейбница и происходит процесс интегрирования дифференциального уравнения с производной искомой траектории по параметру от начального значения параметра до конечного, при котором точка является решением исходной задачи по построению семейства задач.

При этом требуемые для подсчёта частные производные решения по параметру и начальным данным находятся из линеаризованных систем ОДУ по соответствующим известным теоремам зависимости решений от параметров и начальных данных. Данный метод сравнивается с методом Ньютона (называемый в данном случае квазилинеаризацией) решения двухточечной краевой задачи и показано, что методы эквивалентны если взять приращение по параметру сразу на величину, равную разнице между его начальным и конечным значениями. Некоторые теоретическое обоснование методов внедрения с указанием оценок области сходимости подобных таковым для метода Ньютона-Рафсона, имеющихся в книге Акилова и Канторовича, даны в [399]; при этом в качестве параметра семейства задач выступает время.

Автор статьи [354] обобщает концепцию так называемых balance-функций, введённых впервые в [260] для учёта ограничений в задачах оптимального управления в форме Майера с закреплённым правым концом без ограничений на управление. Balance-функции представляют собой нечто среднее между функцией Лагранжа и штрафной функцией, идея состоит в том, что во время итеративной процедуры, когда ограничения значительно нарушены квадратичный член доминирует и штрафная функция быстро сокращает их величину, напротив, когда ограничения почти выполнены доминирует линейный член и функция Лагранжа позволяет эффективнее приближаться к ответу, не заставляя штрафные коэффициенты стремиться к бесконечности. В более ранних работах [260] доказано, что при естественных предположениях точка минимума balance-функции совпадает с точкой минимума исходной (конечномерной) задачи при наличии ограничений. Поскольку на данной итерации при решении задачи минимизации balance-функции относительно искомой переменной при фиксированном значении множителя Лагранжа при функции ограничения явно появляется “новый” коэффициент, то он подсказывает правило выбора множителя на следующей итерации (равного ему). В статье [447] даётся без обоснования, но проиллюстрированная на примерах, модификация предложенных в предыдущих работах вычислительных процедур нахождения множителей Лагранжа, новизна состоит в том, чтобы искать точку и множитель Лагранжа на очередной итерации одновременно, решая соответствующую оптимизационную задачу. В работе [23] обсуждается способ выбора начального приближения множителей Лагранжа в итерационных алгоритмах решения задач оптимального управления. Для этого ставится оптимизационная задача минимизации квадрата нормы невязки условий оптимальности при заданных уравнениях для сопряжённых переменных и условиях трансверсальности, примеры подтверждают повышение вычислительной эффективности работы алгоритмов при таком начальном выборе.

В работе [81] дан конструктивный способ построения минимизирующей последовательности в задаче оптимального управления в форме Лагранжа со свободным правым концом. Основанием для такого построения является то доказанное в статье утверждение, что каждый член последовательности является решением некоторого “возмущённого” принципа максимума. На примерах демонстрируется построение таких последовательностей. В работе [62] построен простой в реализации метод решения задачи Майера со свободным правым концом, основанный непосредственно на ПМП. По заданному приближению управления из исходной системы находится траектория, а из двойственной (с известным в данном случае правым концом) — сопряжённая функция, причём одновременно с интегрированием сопряжённой системы строится новое управление из условия максимизации гамильтониана. Процесс вновь повторяется с полученным таким образом управлением.

Обзор по работам оптимального управления с указанием перечисленных прямых и непрямых методов даётся и в работе [376]. Эта статья интересна тем, что основной упор делается на прикладном аспекте данных задач применительно к аэрокосмической отрасли, включая запуск космических кораблей, управление ракетами и самолётами, перехват ракет, стабилизацию спутников, наблюдение за космическими объектами, вопросы автопилотирования и пр., с обширным перечнем литературы.

В статье [69] строится приближённое множество достижимости для линейной управляемой системы с линейными ограничениями-неравенствами на управление. При этом эта задача сводится к решению некоторой системы неравенств, после чего она заменяется на двойственную систему в силу леммы Минковского-Фаркаша, для которой имеются известные методы её решения. В работе [382] исследуется множество достижимости линейных управляемых систем с интегральным ограничением на управление. Вначале строится последовательность управлений и соответствующая им последовательность точек фазового пространства, сходящаяся к точке ближайшей к заданной точке, в которую требуется перевести систему. Для решений этой задачи строится итеративный процесс, причём на каждой итерации решается вспомогательная задача оптимального управления с функционалом, содержащим опорный вектор (он строится по следующему правилу: пусть уже имеется выпуклая оболочка некоторого набора точек, опорный вектор представляет собой нормаль этого множества, направленную “в сторону” желаемой конечной точки) при этом в силу линейности системы и интегрального ограничения на управление удаётся с помощью ПМП явно выразить соответствующее управление-решение, по этому управлению из системы находится соответствующая новая фазовая точка в конечный момент времени, которая добавляется к указанной выпуклой оболочке. Затем пользуясь похожей техникой с использованием опорных функций

множеств достижимости строятся многогранники-внешние и внутренние оценки множества достижимости, доказывающаяся соответствующая теорема об оценке, и приводится пример реализации алгоритма построения множества достижимости. В статье [90] исследуется управляемость нелинейных систем в случае, когда управление подчинено ограничениям, зависящим от времени и фазовой точки, причём на каждом промежутке времени оно может быть своим. Таким образом, ограничения записаны в достаточно общем виде и в частном случае могут быть даны, например, в виде конечных или интегральных неравенств. Условие управляемости формулируется в терминах пересечения всех этих множеств-ограничений: в линейном случае, если последнее содержит внутренние точки, то система будет управляемой в начало координат; даны соответствующие примеры. В статьях [397], [414] изучаются как полная, так и локальная управляемость линейных и билинейных систем, включая случай ограниченных управлений; в обеих работах условия оптимальности естественным образом формулируются на языке собственных чисел соответствующих систем и рангов матриц управляемости. Работа [480] связывает управляемость нелинейной системы с управляемостью соответствующей линеаризованной системы. Более конкретно: при условии, что множество управлений содержит нулевую точку, начало координат принадлежит множеству достижимости нелинейной системы тогда и только тогда когда оно принадлежит множеству достижимости линеаризованной системы; при этом в линейной системе неоднородность строится как коническая оболочка множества правой части системы, когда управление пробегает своё допустимое множество. При выводе необходимых условий в задачах управления обычно неявно или явно предполагается, что допустимые траектории заканчиваются в момент первого контакта с целевым множеством на правом конце. Для иллюстрации факта, что ограничение может оказаться обременительным, в [309] приведён простой пример, когда меньшее значение функционала достигается не в первый момент контакта траектории и конечного множества.

Благодарности:

Автор выражает глубокую признательность своим учителям В. Ф. Демьянову, В. В. Карелину, С. К. Мышкову и Л. Н. Поляковой, во многом под влиянием которых произошло становление автора как ученого, а также своему руководителю А. Ю. Александрову за внимательное отношение и постоянную поддержку.

Автор выражает глубокую благодарность своим коллегам М. В. Долгополицу и Г. Ш. Тамасяну за многочисленные плодотворные обсуждения, поддержку и отзывчивость.

Автор благодарит Д. Х. Ибрагимову помощь в написании статей на английском языке.

Наконец, автор хочет поблагодарить за поддержку своих друзей Таню Игнатеву и Дмитрия Крутихина.

Основные научные результаты:

- построен прямой метод решения негладкой задачи оптимального управления (с квазидифференцируемой правой частью) в форме Лагранжа с (частично) закреплённым правым концом и поточечным ограничением на управление: исходная задача сведена к вариационной с помощью построенной точной штрафной функции, доказана квазидифференцируемость этой функции, при этом реализована идея “разделения” переменных: фазовых траекторий и их производных, с помощью которой получены условия минимума в новой “поточечной” форме в терминах квазидифференциалов, к построенной функции применён метод квазидифференциального спуска, в ходе которого описан способ нахождения направления наискорейшего спуска, подробно описаны преимущества и недостатки построенного алгоритма по сравнению с существующими, метод отработан на ряде примеров, включая прикладные задачи; данный результат в основном опубликован в [212], стр. 307–325, [216], стр. 675–698, [219], стр. 1639–1648, [227], стр. 34–45;
- построен прямой метод решения негладкой задачи оптимального управления дифференциальным включением (опорная функция множества правой части дифференциального включения может содержать сумму максимума и минимума конечного числа непрерывно дифференцируемых функций) в форме Лагранжа с (частично) закреплённым правым концом и с поточечным ограничением на фазовую траекторию (многозначное отображение в правой части предполагается непрерывным с выпуклыми компактными значениями): исходная задача сведена к вариационной с помощью аппарата опорных функций и построенной штрафной функции, доказана квазидифференцируемость этой функции, при этом реализована идея “разделения” переменных: фазовых траекторий и их производных, с помощью которой получены условия минимума в новой “поточечной” форме в терминах квазидифференциалов, к построенной функции применён метод квазидифференциального спуска, в ходе которого описан способ нахождения направления наискорейшего спуска, реализованный за счёт идеи “разделения” переменных: фазовых траекторий и их производных, доказана “слабая” сходимости построенного (модифицированного) метода в некоторых частных случаях, метод отработан на ряде примеров, включая прикладные задачи; данный результат в основном опубликован в [213], стр. 1–26, [214], стр. 304–332, [215], стр. 1–29, [223], стр. 345–361, [224], стр. 46–56, [225], стр. 390–399;

- построен прямой метод решения классической (гладкой) задачи оптимального управления дифференциальным включением в форме Лагранжа с (частично) закреплённым правым концом (многозначное отображение в правой части предполагается непрерывным с выпуклыми компактными значениями): исходная задача сведена к вариационной с помощью аппарата опорных функций и построенной штрафной функции, доказана дифференцируемость этой функции по Гато при условии непрерывности частной производной опорной функции правой части дифференциального включения по фазовой переменной, к построенной функции применён метод градиентного спуска, указаны классы задач с дифференциальными включениями, когда данный подход особенно эффективен, метод отработан на ряде примеров, включая прикладные задачи; данный результат в основном опубликован в [221], стр. 302–315, [218], стр. 148–165, [101], стр. 645–657, [228], стр. 141–151, [106], стр. 256–267; в работе [106] В. В. Карелину и Л. Н. Поляковой принадлежит описание применения подхода статьи к задаче в случае, когда правая часть включения представляет собой объединения двух множеств, автору диссертации — все остальные результаты;
- построен метод решения “полуогладкой” задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями в форме Маейра с квазидифференцируемым целевым функционалом с (частично) закреплённым правым концом и с поточечным ограничением на управление: параметризация управления применена к исходной системе, после чего к полученной дискретной задаче применяется метод квазидифференциального спуска, в случае линейности системы и кусочно-аффинного целевого функционала применённый метод модифицированного квазидифференциального спуска приводит к глобальному решению задачи за конечное число шагов, метод отработан на ряде примеров, включая прикладные задачи; данный результат в основном опубликован в [217], стр. 2773–2792, [226], стр. 293–301, [105], стр. 121–128, 130–134, [107], стр. 48–53, 55–58; в работе [105] В. В. Карелину принадлежит написание Введения, Л. Н. Поляковой принадлежит численная реализация Примера 1, автору диссертации — все остальные результаты, в работе [107] В. В. Карелину и Л. Н. Поляковой принадлежит написание Введения, С. К. Мышкову и В. П. Трегубову принадлежит численная реализация Примера 2 в случае $p = 0$, автору диссертации — все остальные результаты;

- построен прямой метод решения классической (гладкой) задачи оптимального управления в форме Лагранжа (а также с более общим функционалом, представляющим собой максимум конечного числа функционалов Лагранжа) с (частично) закреплённым правым концом и с интегральным ограничением на управление: исходная задача сведена к вариационной с помощью построенной точной штрафной функции, доказана суб (гипо) дифференцируемость этой функции, к построенной функции применён метод суб (гипо) дифференциального спуска, в ходе которого описан способ нахождения сопряжённой переменной, метод отработан на ряде примеров, включая прикладные задачи; данный результат в основном опубликован в [232], стр. 1825–1836; в работе [232] В. В. Карелину принадлежит постановка задачи, Л. Н. Поляковой принадлежит численная реализация Примера 1, автору диссертации — все остальные результаты;
- построена точная штрафная функция для задачи управления классическим (гладким) дифференциальным включением со свободным правым концом (многозначное отображение в правой части предполагается непрерывным и выпукло-компактнозначным); данный результат в основном опубликован в [198], стр. 12–16; в работе [198] автору диссертации принадлежит доказательство точности штрафной функции для задачи управления дифференциальным включением и идея сведения этой задачи к вариационной, М. В. Долгополик — все остальные результаты.

Положения, выносимые на защиту:

- построение прямого метода решения негладкой задачи оптимального управления (с квазидифференцируемой правой частью) в форме Лагранжа с (частично) закреплённым правым концом и поточечным ограничением на управление;
- построение прямого метода решения негладкой задачи оптимального управления дифференциальным включением (опорная функция множества правой части дифференциального включения может содержать сумму максимума и минимума конечного числа непрерывно дифференцируемых функций) в форме Лагранжа с (частично) закреплённым правым концом и с поточечным ограничением на фазовую траекторию (многозначное отображение в правой части предполагается непрерывным с выпуклыми компактными значениями);

- построение прямого метода решения классической (гладкой) задачи оптимального управления дифференциальным включением в форме Лагранжа с (частично) закреплённым правым концом (многозначное отображение в правой части предполагается непрерывным с выпуклыми компактными значениями);
- построение метода решения “полуогладкой” задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями в форме Маейра с квазидифференцируемым целевым функционалом с (частично) закреплённым правым концом и с поточечным ограничением на управление;
- построение прямого метода решения классической (гладкой) задачи оптимального управления в форме Лагранжа (а также с более общим функционалом, представляющим собой максимум конечного числа функционалов Лагранжа) с (частично) закреплённым правым концом и с интегральным ограничением на управление;
- построение точной штрафной функции для задачи управления классическим (гладким) дифференциальным включением со свободным правым концом (многозначное отображение в правой части предполагается непрерывным и выпукло-компактнозначным).

Глава 1

Основные понятия и обозначения

В этой главе приводятся основные определения, которые часто используются в диссертации. Доказана некоторая модификация известной теоремы о точности штрафной функции в нормированном пространстве, которая используется в некоторых разделах диссертации. Даны основные обозначения, используемые в тексте диссертации.

1.1 Основные определения

Пусть X — вещественное линейное пространство.

Пусть

$$\text{dom } f = \{x \in X \mid f(x) \neq -\infty, f(x) \neq +\infty\}$$

обозначает эффективное множество функции f .

Напомним, что производной функции f в точке $x \in \text{dom } f$ по направлению $g \in X$ называется предел

$$f'(x, g) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{f(x + \alpha g) - f(x)}{\alpha},$$

если данный предел существует. Функция f называется *дифференцируемой по направлениям* в точке x , если $f'(x, g)$ существует для любого $g \in X$.

Везде далее будем писать $\alpha \downarrow 0$ вместо $\alpha \rightarrow +0$.

Функция f называется *дифференцируемой по Гато* в точке x , если она дифференцируема по направлениям в данной точке и отображение $g \rightarrow f'(x, g)$ есть линейный непрерывный функционал, который называется производной Гато функции f в точке x .

Пусть X — нормированное пространство. Множество всех линейных непрерывных функционалов на пространстве X называется пространством, *сопряжённым* к X и обозначается через X^* .

Пусть X, Y — нормированные пространства. Пусть $C \subset X$ — непустое множество. Напомним, что отображение F , сопоставляющее каждой точке $x \in C$ некоторое, подмножество пространства Y называется *многозначным отображением* и обозначается $F: C \rightrightarrows Y$.

Пусть $A, B \subset X$ — непустые замкнутые ограниченные подмножества. Величина

$$\rho_H(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \|x - y\| + \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} \|x - y\|$$

называется *расстоянием (метрикой) Хаусдорфа* между множествами A и B .

Многозначное отображение $F: C \rightrightarrows Y$ с ограниченными значениями (т. е. для любого $x \in C$ множество $F(x)$ ограничено) называется *непрерывным по Хаусдорфу* в точке $x \in C$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $y \in C$, $\|y - x\| < \delta$, будет $\rho_H(F(y), F(x)) < \varepsilon$.

Пусть $\Omega \in X$ — некоторое непустое множество нормированного пространства X . Функция $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется суб (гипо) дифференцируемой на множестве Ω , если для любого $x \in \Omega$ существует выпуклое слабо* компактное множество, субдифференциал $\partial f(x) \in X^*$ (гиподифференциал $df(x) \in \mathbb{R} \times X^*$) такое, что для любого допустимого приращения $\Delta x \in X$ соответствующее приращение функции представимо в виде

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \max_{\varphi \in \partial f(x)} \varphi(\Delta x) + o(x, \Delta x),$$

$$\left(f(x + \Delta x) = f(x) + \max_{[a, \varphi] \in df(x)} (a + \varphi(\Delta x)) + o(x, \Delta x), \max_{[a, \varphi] \in df(x)} a = 0 \right),$$

$$o(x, \alpha \Delta x) / \alpha \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow 0.$$

Отображение $x \rightarrow \partial f(x)$ ($x \rightarrow df(x)$) называется суб (гипо) дифференциальным.

Функция f называется непрерывно гиподифференцируемой в точке $x \in \Omega$, если она гиподифференцируема в некоторой окрестности этой точки и существует (гиподифференциальное) отображение $x \rightarrow df(x)$, которое непрерывно (по Хаусдорфу) в точке x .

Пусть функция f определена в окрестности Ω точки $x \in X$ и гиподифференцируема в этой точке. Для любого $r > 0$ такого что $B(x, r) \subset \Omega$ и для всех $\Delta x \in B(0, r)$ и $\alpha \in [0, 1]$ положим

$$o_f(\alpha, x, \Delta x, r) = \frac{1}{\alpha} \left(f(x + \alpha \Delta x) - f(x) - \max_{[a, \varphi] \in df(x)} (a + \alpha \varphi(\Delta x)) \right).$$

Из определения гиподифференцируемой функции следует, что будет $o_f(\alpha, x, \Delta x, r) \rightarrow 0$ при $\alpha \downarrow 0$.

Пусть функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ гиподифференцируема на множестве Ω , и пусть существует $r > 0$, для которого $B(x, r) \subset \Omega$ для всех $x \in \Omega$. Скажем, что функция f равномерно

гиподифференцируема на множестве Ω , если существует гиподифференциальное отображение $x \rightarrow df(x)$ такое что $o_f(\alpha, x, \Delta x, r) \rightarrow 0$ при $\alpha \downarrow 0$ равномерно для всех $\Delta x \in B(0, r)$ и $x \in \Omega$. В этом случае говорят, что гиподифференциальное отображение df равномерно аппроксимирует функцию f на множестве Ω .

В связи с понятиями дифференцируемости по Гато, а также понятиями суб (гипо) и супер (гипер) дифференцируемости сделаем здесь замечание о корректности использования этих понятий в диссертации. Из данных определений следует, что соответствующие объекты представляют собой линейные непрерывные функционалы, то есть являются элементами сопряжённого пространства к рассматриваемому нормированному. Наиболее типичной для данной диссертации (если рассматривается оптимизационная задача в функциональном пространстве) является ситуация, когда сопряжённым является пространство $X^* = \left(P_l[0, T], \|\cdot\|_{L_l^2[0, T]} \right)^*$, то есть пространство, сопряжённое к пространству X кусочно-непрерывных вектор-функций с L^2 -нормой. Ниже будет отмечено, что данное пространство изометрически изоморфно пространству $L_l^2[0, T]$. Поэтому часто в диссертации для простоты вместо линейных непрерывных функционалов: градиентов, суб (гипо) и супер (гипер) дифференциалов, приводятся их образы (множества функций) при соответствующем изометрическом изоморфизме. При этом определения для данных объектов в тексте берутся в кавычки. Данная “вольность” уже частично вошла в традиции изложения классической теории по оптимизации; не должна она вызывать недоразумений и в данной диссертации. В некоторых случаях в Главах 5, 6 и 11 указанные объекты приведены “полноценно”.

Рассмотрим экстремальную задачу вида

$$f \rightarrow \inf_{x \in \Omega}, \quad (*)$$

где Ω — некоторое непустое подмножество пространства X , а вещественная функция f определена на X . Предположим, что решение этой задачи существует.

Пусть множество Ω задано в виде

$$\Omega = \{x \in X \mid \varphi(x) = 0\},$$

где $\varphi: X \rightarrow [0, +\infty)$ — некоторая неотрицательная функция.

Для любого неотрицательно λ введём функцию

$$F_\lambda(x) = f(x) + \lambda\varphi(x),$$

которая называется *штрафной функцией* для заданных f и φ , а число λ называется *штрафным параметром*.

Штрафная функция называется (глобально) *точной штрафной*, если существует число $\lambda^* \geq 0$ такое, что для любого $\lambda > \lambda^*$ множество точек глобального минимума функции F_λ совпадает с множеством точек глобального минимума в задаче (*). В этом случае λ^* называется *константой точного штрафа*.

Рассмотрим множество всех функций f , заданных и измеримых на отрезке $[a, b]$ и таких, что интеграл Лебега

$$\int_a^b f^2(x) dx < +\infty$$

(такие функции называют *суммируемыми с квадратом*).

Введём полунорму

$$\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Далее на построенном пространстве введём отношение эквивалентности: $f \sim g$, если $f(x) = g(x)$ почти всюду на $[a, b]$. Для соответствующего фактор-пространства построим норму, равную полунорме любого представителя данного класса.

Полученное факторпространство обозначается $L^2[a, b]$.

Напомним, что подмножество A пространства X называется *выпуклым*, если для любых $x, y \in A$ и $\alpha \in [0, 1]$ будет $\alpha x + (1 - \alpha)y \in A$.

Для произвольного множества $A \subset X$ наименьшее (по включению) выпуклое множество, содержащее множество A , называется *выпуклой оболочкой* множества A .

Функция $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ называется *выпуклой*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ и $\alpha \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2).$$

Выпуклая функция $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называется *собственной*, если она не равна тождественно $+\infty$.

Для произвольного множества $F \subset \mathbb{R}^n$ определим *опорную функцию* вектора $\psi \in \mathbb{R}^n$ соотношением

$$c(F, \psi) = \sup_{f \in F} \langle f, \psi \rangle.$$

1.2 Одно обобщение теоремы о точности штрафной функции

Рассмотрим нормированное пространство X . Пусть задан функционал $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Рассмотрим задачу минимизации этого функционала на множестве $\Omega = \{x \in X \mid \bar{\varphi}(x) = 0\}$, где $\bar{\varphi}(x): X \rightarrow [0, \infty)$. Здесь же для некоторого фиксированного $\delta > 0$ введём множество $\Omega_\delta = \{x \in X \mid \bar{\varphi}(x) < \delta\}$.

Построим функцию

$$F_\lambda(x) = f(x) + \lambda\bar{\varphi}(x), \quad (1.1)$$

где $\lambda \geq 0$ — некоторое число.

Зафиксируем некоторую точку $\bar{x} \in \Omega$ и некоторое конечное число $\bar{\lambda}_0 > 0$ и сделаем следующие предположения:

(*) Пусть функционал $f(x)$ достигает глобального минимума на множестве Ω .

(**) Пусть множество $\mathcal{L}_{\bar{\lambda}_0}(\bar{x}) = \{x \in X \mid F_{\bar{\lambda}_0}(x) \leq F_{\bar{\lambda}_0}(\bar{x})\}$ ограничено (существует такое число $M_1 < \infty$, что $\|x\|_X < M_1 \forall x \in \mathcal{L}_{\bar{\lambda}_0}(\bar{x})$). Здесь же заметим, что $F_\lambda(x) \geq F_{\bar{\lambda}_0}(x) \forall \lambda \geq \bar{\lambda}_0$ и $\forall x \in X$, поэтому $\mathcal{L}_\lambda(\bar{x}) \subset \mathcal{L}_{\bar{\lambda}_0}(\bar{x})$ при $\lambda \geq \bar{\lambda}_0$.

Здесь же для некоторого фиксированного $\varepsilon > 0$ введём множество

$$K_\varepsilon = \left\{x \mid \text{dist}(x, \Omega_\delta \setminus \Omega \cap \mathcal{L}_{\bar{\lambda}_0}(\bar{x})) < \varepsilon\right\}.$$

Докажем теорему для построенной штрафной функции (1.1), которая представляет собой модификацию теоремы 3.4.1 из [36].

Теорема 1.2.1. Пусть выполнены вышеуказанные условия (*), (**). Пусть также выполнены следующие условия:

1) $\exists \lambda_0 < \infty: \forall \lambda \geq \lambda_0 \exists x_\lambda \in X:$

$$F_\lambda(x_\lambda) = F_\lambda^* = \min_{x \in X} F_\lambda(x);$$

2) $\exists \delta > 0, \exists a > 0:$

$$\bar{\varphi}^\downarrow(x) \leq -a < 0 \quad \forall x \in \Omega_\delta \setminus \Omega \cap \mathcal{L}_{\bar{\lambda}_0}(\bar{x});$$

3) $\exists \varepsilon > 0, \exists L < \infty:$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L\rho(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in K_\varepsilon.$$

Здесь же заметим, что поскольку, как нетрудно видеть, множество K_ε ограничено для любого конечного ε , то вместо 3) можно предположить липшицевость функционала $f(x)$ на ограниченных (по норме пространства X) множествах.

Тогда существует такое число $\lambda^* < \infty$, что $\forall \lambda > \lambda^*$

$$\bar{\varphi}(x_\lambda) = 0, \quad f(x_\lambda) = f_\Omega^* = \min_{x \in \Omega} f(x).$$

Доказательство. Пусть теорема не верна. Тогда в силу свойства 3.3.9 [36] найдётся последовательность $\{\lambda_s\}_{s=1}^\infty: \lambda_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ и $\bar{\varphi}(x_{\lambda_s}) > 0 \forall s = \overline{1, \infty}$.

По Proposition 3.5 [194] (которое верно в силу 1) и (*)) $\bar{\varphi}(x_\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$, поэтому существует такое число $\bar{\lambda} \geq \lambda_0$, что $\forall \lambda \geq \bar{\lambda}$ будет $x_\lambda \in \Omega_\delta \setminus \Omega$. Далее из (**)) следует, что $\forall \lambda \geq \bar{\lambda}_0$ будет $x_\lambda \in \mathcal{L}_\lambda(\bar{x}) \subset \mathcal{L}_{\bar{\lambda}_0}(\bar{x})$. Итак $\forall \lambda \geq \bar{\lambda} = \max\{\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_0\}$ будет $x_\lambda \in \Omega_\delta \setminus \Omega \cap \mathcal{L}_{\bar{\lambda}_0}(\bar{x})$.

Зафиксируем любое число $\lambda_s > \bar{\lambda}$ из последовательности $\{\lambda_s\}_{s=1}^\infty$. В силу 2) существует такая последовательность $\{y_{\lambda_s k}\}_{k=1}^\infty$, что $y_{\lambda_s k} \in X \ \forall k = \overline{1, \infty}$, и выполняется

$$\bar{\varphi}^\dagger(x_{\lambda_s}) = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\bar{\varphi}(y_{\lambda_s k}) - \bar{\varphi}(x_{\lambda_s})}{\rho(y_{\lambda_s k}, x_{\lambda_s})} \leq -a < 0,$$

где

$$\rho(y_{\lambda_s k}, x_{\lambda_s}) \rightarrow 0, \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (1.2)$$

При достаточно больших номерах k будет

$$\bar{\varphi}(y_{\lambda_s k}) - \bar{\varphi}(x_{\lambda_s}) \leq -\frac{a}{2}\rho(y_{\lambda_s k}, x_{\lambda_s}). \quad (1.3)$$

Зафиксируем некоторое число k_s , удовлетворяющее неравенству (1.3). Заметим, что в силу (1.2) начиная с некоторого достаточно большого номера k_s будет $y_{\lambda_s k_s} \in K_\varepsilon$ (далее считаем, что зафиксированное k_s именно такое). Тогда в силу 3) выполняется

$$F_{\lambda_s(y_{\lambda_s k_s})} - F_{\lambda_s}(x_{\lambda_s}) \leq \rho(y_{\lambda_s k_s}, x_{\lambda_s}) \left(L - \frac{a}{2}\lambda_s \right).$$

При $\lambda_s > \lambda^* = \max\left\{\bar{\lambda}, \frac{2L}{a}\right\}$ будет

$$F_{\lambda_s(y_{\lambda_s k_s})} < F_{\lambda_s}(x_{\lambda_s}),$$

что противоречит 1).

Итак $\bar{\varphi}(x_\lambda) = 0$ при $\lambda > \lambda^*$ (пользуемся свойством 3.3.9 [36]).

Осталось показать, что $f(x_\lambda) = f_\Omega^* = \min_{x \in \Omega} f(x)$ (при $\lambda > \lambda^*$). Предположим противное, тогда существует такое $\bar{x} \in \Omega$, что при некотором $\lambda > \lambda^*$ будет $f(\bar{x}) < f(x_\lambda)$. Окончательно имеем (при $\lambda > \lambda^*$)

$$F_\lambda(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \lambda\bar{\varphi}(\bar{x}) = f(\bar{x}) < f(x_\lambda) = f(x_\lambda) + \lambda\bar{\varphi}(x_\lambda) = F_\lambda(x_\lambda),$$

что противоречит 1).

Теорема доказана. □

1.3 Используемые обозначения

В диссертации мы будем использовать следующие обозначения.

Пусть $C_n^1[0, T]$ обозначает пространство непрерывно дифференцируемых на $[0, T]$ n -мерных вектор-функций; $C_n[0, T]$ обозначает пространство непрерывных на $[0, T]$ n -мерных вектор-функций; $P_n[0, T]$ обозначает пространство кусочно-непрерывных на $[0, T]$ n -мерных вектор-функций. Обозначим $L_n^p[0, T]$, $1 \leq p < \infty$, пространство измеримых на $[0, T]$ n -мерных вектор-функций, которые суммируемы со степенью p , также обозначим $L_n^\infty[0, T]$ пространство измеримых на $[0, T]$ и п. в. ограниченных n -мерных вектор-функций. (Строго говоря, должны быть рассмотрены соответствующие факторпространства (см. определение пространства $L^2[a, b]$ выше).) Если функция $p(t)$ определена на отрезке $[0, T]$ и \bar{T} является некоторым подмножеством этого отрезка, тогда $p(t)|_{\bar{T}}$ обозначает его сужение на это множество.

Обозначим $\text{co}P$ выпуклую оболочку множества $P \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $\text{ext } Q$ обозначает множество крайних точек некоторого выпуклого множества Q . Пусть $\text{int } P$ обозначает множество внутренних точек некоторого множества P . Под суммой $P + Q$ множеств $P, Q \subset \mathbb{R}^n$ понимается их сумма Минковского, тогда как αP при $\alpha \in \mathbb{R}$ означает произведение по Минковскому. Пусть $B(c, r)$ или $B_r(c)$ ($D(c, r)$ или $D_r(c)$) означает замкнутый (открытый) шар некоторого пространства с радиусом $r > 0$ и с центром c принадлежащим этому пространству; при этом, для некоторого множества C (и того же пространства) $B(C, r)$ или $B_r(C)$ ($D(C, r)$ или $D_r(C)$) означает объединение всех замкнутых (открытых) шаров с радиусом $r > 0$ и центрами из множества C . Пусть S_n обозначает единичную сферу в пространстве \mathbb{R}^n с центром в начале координат. Пусть B_n является замкнутым единичным шаром в пространстве \mathbb{R}^n с центром в начале координат.

Обозначим $\langle a, b \rangle$ скалярное произведение векторов $a, b \in \mathbb{R}^d$. Пусть X является нормированным пространством: тогда $\|\cdot\|_X$ означает норму в этом пространстве, $\rho(\cdot, \cdot)$ означает соответствующую метрику в этом пространстве; а X^* обозначает пространство, сопряжённое пространству X . Наконец, для некоторого числа α пусть $o(\alpha)$ означает такую величину, что $o(\alpha)/\alpha \rightarrow 0$ если $\alpha \rightarrow 0$. Для некоторой точки v и некоторого множества W на метрическом пространстве введём обозначение $\text{dist}(v, W) = \inf_{w \in W} \rho(v, w)$. Для функции φ на некотором метрическом пространстве положим $\varphi^\downarrow(x) = \liminf_{y \rightarrow x} \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{\rho(x, y)}$ (где x и y принадлежат этому метрическому пространству).

В диссертации мы обычно предполагаем, что траектория $x(t)$ является кусочно-непрерывно дифференцируемой на отрезке времени $[0, T]$ вектор-функцией. Пусть $t_0 \in [0, T)$ — точка недифференцируемости вектор-функции $x(t)$, тогда для определенности считаем, что $\dot{x}(t_0)$ — производная справа вектор-функции $x(t)$ в точке t_0 ; считаем, что $\dot{x}(T)$ — производная слева вектор-функции $x(t)$ в точке T . С учетом сделанных предположений и обозначений

можно считать, что вектор-функция x принадлежит пространству $C_n[0, T]$, а вектор-функция \dot{x} — пространству $P_n[0, T]$. В диссертации мы часто используем обозначение $z(t) = \dot{x}(t)$ для производной непрерывно дифференцируемой или кусочно- непрерывно дифференцируемой вектор-функции $x(t)$ с заданным начальным условием $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$; тогда по известной формуле имеем $x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau$. При рассмотрении некоторых функционалов от z на протяжении всей диссертации мы иногда все же будем писать $x(t)$ вместо $x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau$ для краткости.

Пусть $\text{sign } \alpha$, $\alpha \neq 0$, обозначает знак числа α ; $\delta_{k,l}$ — символ Кронекера; $\chi_P(x)$ — индикаторная функция множества P из некоторого пространства, векторы \mathbf{e}_i , $i = \overline{1, n}$, образуют стандартный базис в \mathbb{R}^n . 0_n обозначает нулевой элемент функционального пространства некоторых n -мерных вектор-функций, а $\mathbf{0}_n$ — нулевой элемент пространства \mathbb{R}^n . Пусть E_m обозначает единичную матрицу, а \mathbf{O}_m — нулевую матрицу в пространстве $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, пусть также $\text{diag}[P, Q]$ обозначает диагональную матрицу с блоками P и Q (где P и Q — матрицы некоторых размерностей). Обозначим $|a| = \sum_{i=1}^n |a_i|$, где $a \in \mathbb{R}^n$. Мы также будем иногда использовать обозначение $[v_1, \dots, v_n]$ вместо $(v_1, \dots, v_n)'$, где v_1, \dots, v_n — некоторый набор векторов (вектор-функций).

Отметим, что при реализации алгоритма с использованием правил квазидифференциального исчисления мы считаем активными те функции, которые активны только с некоторой погрешностью. Введем понятие активной функции для функции максимума (определение для функции минимума аналогично). Пусть $\xi(x) = \max_{i=\overline{1, M}} \xi_i(x)$, где $\xi_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторые функции, $i = \overline{1, M}$, $M \in \mathbb{R}$. Тогда функцию $\xi_{\bar{i}}(x)$, $\bar{i} \in \{1, \dots, M\}$, назовем активной в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если $\xi_{\bar{i}}(x_0) = \xi(x_0)$. Зафиксируем некоторое малое значение $\bar{\Delta}$. Функцию $\xi_{\bar{i}}(x)$, $\bar{i} \in \{1, \dots, M\}$, считаем активной в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ с погрешностью $\bar{\Delta}$, если $\xi(x_0) - \xi_{\bar{i}}(x_0) \leq \bar{\Delta}$. Во всех численных расчетах диссертации (в которых фигурирует понятие активных функций) задавалось значение параметра $\bar{\Delta} = 10^{-3}$.

Замечание 1.3.1. Сделаем замечание касаясь метода квазидифференциально спуска (МКС), часто используемого для решения различных задач диссертации. В случае выбора шага по правилу метода наискорейшего спуска, гарантировать сходимость МКС нельзя. Даже в конечномерном случае существуют примеры, когда при реализации этого метода возникает эффект “заедания”, что ведет к сходимости к нестационарной точке минимизируемой функции. Однако устройство таких функций в построенных примерах [39] весьма специфично. Эта специфика заключается, в частности, в том, что если вычислять шаг спуска по приведённому правилу не точно, а со сколь угодно малой погрешностью, а также если в некоторой

точке считать активными функции также с некоторой погрешностью (что и происходит на практике), то метод будет сходиться к стационарной точке (см. соответствующие модификации и обоснование сходимости метода для некоторого класса конечномерных задач в [39] и [177] и в Главе 11). На практике МКС положительно зарекомендовал себя (с точки зрения сходимости) и успешно применялся к решению конкретных задач. Описанные обстоятельства позволяют говорить о том, что «как правило» данный метод приводит к стационарной точке минимизируемого функционала. Доказательство «слабой» сходимости МКС и модификации МКС для специального класса функционалов, а именно, содержащих под интегралом минимум или максимум непрерывно дифференцируемых функций, приведено в Главе 11.

Глава 2

Полиномы от интегральных функционалов

В данной главе рассматривается задача минимизации полинома от интегральных функционалов как со свободным, так и с (частично) закреплённым правым концом. Подынтегральные функции функционалов предполагаются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми по фазовым координатам и их производным. Для «полиномиального» функционала доказана дифференцируемость по Гато, найдены необходимые условия минимума, которые используются при описании метода наискорейшего спуска для рассматриваемой задачи, отмечена «слабая» сходимости данного метода к стационарной точке. С помощью теории точных штрафных функций задача при наличии ограничений на правом конце сводится к задаче безусловной минимизации некоторого функционала. Для этого функционала выписан гиподифференциал, и в его терминах формулируются условия минимума. На основании этих условий для решаемой задачи метод гиподифференциального спуска, который сходится к стационарной точке в «слабом» смысле. Приведены численные примеры реализации описанных методов. Отмечен ряд прикладных проблем, которые приводят к задаче минимизации «полиномиального» функционала. См. [103].

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений

$$y(x(t), \dot{x}(t), u(t), t) = 0_n \quad (2.1)$$

с заданным начальным условием

$$x(0) = x_0. \quad (2.2)$$

Здесь $t \in [0, T]$, где $T > 0$ — заданный конечный момент времени, y — вещественная n -мерная вектор-функция, x — n -мерная вектор-функция фазовых координат, u — m -мерная вектор-функция управлений. Здесь для простоты считаем вектор-функцию $x(t)$ непрерывно дифференцируемой на $[0, T]$, а вектор функцию $u(t)$ — непрерывной на $[0, T]$. Предполагаем $y(x, \dot{x}, u, t)$ непрерывно дифференцируемой по x, \dot{x} и u и непрерывной на своей области определения.

Пусть требуется подобрать такое управление $u \in P_m[0, T]$, при котором решение задачи (2.1), (2.2) удовлетворяет такому условию:

$$\int_0^T y_0(x(t), \dot{x}(t), u(t), t) dt = L, \quad (2.3)$$

где s -мерная вещественная вектор-функция y_0 может содержать в себе информацию о положении объекта системы, значении его скорости и ограничениях на управление, L — заданный вектор из \mathbb{R}^s . Считаем, что $y_0(x, \dot{x}, u, t)$ непрерывно дифференцируема по x, \dot{x} и u и непрерывна на своей области определения. Предполагаем, что решение этой задачи существует.

С помощью (2.3) могут быть записаны, например, интегральное ограничение на управление вида

$$\int_0^T \langle u(t), u(t) \rangle dt = 1$$

или ограничение на конечное состояние системы

$$x_0 + \int_0^T \dot{x}(t) dt = x_T.$$

Задачу (2.1)–(2.3) сведём к минимизации следующего функционала на всём пространстве $C_n[0, T] \times P_m[0, T]$:

$$P_2(z, u) = \int_0^T y^2 \left(x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau, z(t), u(t), t \right) dt + \sum_{i=1}^s \left(\int_0^T y_{0i} \left(x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau, z(t), u(t), t \right) dt - L_i \right)^2, \quad (2.4)$$

в котором $z(t) = \dot{x}(t)$, а тогда с учётом (2.2) имеем

$$x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau,$$

а y_{0i} — i -я компонента вектор-функции y_0 .

Функционал (2.4) содержит “линейное” слагаемое (первый интегральный функционал) и сумму квадратов от интегральных функционалов. Таким образом, задача (2.1)–(2.3) свелась к минимизации полинома второй степени от интегральных функционалов. Аналогично можно рассмотреть задачу минимизации полиномов высших степеней.

В данной главе выводятся необходимые условия минимума функционала (далее будем называть его «полиномиальным»)

$$\mathcal{P}_k(\mathcal{I}_1(x), \dots, \mathcal{I}_n(x)) \quad (2.5)$$

с заданным начальным условием

$$x(0) = x_0. \quad (2.6)$$

В выражении (2.5) P_k — полином заданной конечной степени k (его общий вид будет выписан ниже), а $\mathcal{I}_j(x)$, $j = \overline{1, n}$, — интегральный функционал

$$\mathcal{I}_j(x) = \int_0^T f_j(x(t), \dot{x}(t), t) dt,$$

рассматриваемый в классической задаче вариационного исчисления [28]. Здесь $T > 0$ — некоторый конечный фиксированный момент времени, $f_j(x, \dot{x}, t)$, $j = \overline{1, n}$, — заданная вещественная скалярная функция, непрерывно дифференцируемая по x и \dot{x} и непрерывная на своей области определения, $x(t)$ — n -мерная вектор-функция координат, непрерывно дифференцируемая на промежутке $[0, T]$.

Требуется найти такую вектор-функцию $x^* \in C_n^1[0, T]$, удовлетворяющую ограничению (2.6), которая доставляет минимум «полиномиальному» функционалу (2.5). Предполагаем, что такое решение существует.

Положим $z(t) = \dot{x}(t)$. Тогда по предположению $z \in C_n[0, T]$ и с учётом (2.6) имеем

$$x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau. \quad (2.7)$$

Мы будем искать вектор-функцию z^* , соответствующую искомому решению x^* :

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t z^*(\tau) d\tau,$$

то есть минимизировать функционал $P_k(z)$ на пространстве

$$X = \left(C_n[0, T], \|\cdot\|_{L_n^2[0, T]} \right).$$

Далее в этой главе иногда будем писать f_j вместо $f_j(x, z, t)$ (или вместо $f_j(x(t), z(t), t)$ или $f_j(x(\tau), z(\tau), \tau)$, $\tau \in [t, T]$), $j = \overline{1, n}$.

2.2 Необходимые условия минимума функционала $P_k(z)$

Сначала изучим частный случай, когда минимизируемый функционал имеет следующий вид:

$$P_2(z) = \left[\int_0^T f\left(x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau, z(t), t\right) dt \right]^2, \quad (2.8)$$

общий случай будет описан далее. Найдём производную $P'_2(z, v)$ по направлению $v \in C_n[0, T]$ функционала (2.8). Имеем

$$\begin{aligned} P_2(z + \alpha v) &= \left[\int_0^T f\left(x_0 + \int_0^t z(\tau) + \alpha v(\tau)d\tau, z(t) + \alpha v(t), t\right) dt \right]^2 = \\ &= \left[\int_0^T f\left(x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau, z(t), t\right) dt + \alpha \int_0^T \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \int_0^t v(\tau)d\tau \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial z}, v(t) \right\rangle dt + o(\alpha, z, v) \right]^2 = \\ &= P_2(z) + 2\alpha \int_0^T \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \int_0^t v(\tau)d\tau \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial z}, v(t) \right\rangle dt \int_0^T f\left(x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau, z(t), t\right) dt + o(\alpha, z, v) = \\ &= P_2(z) + 2\alpha \int_0^T \left\langle \int_t^T \frac{\partial f}{\partial x} d\tau, v(t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial z}, v(t) \right\rangle dt \int_0^T f\left(x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau, z(t), t\right) dt + o(\alpha, z, v). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Из (2.9) далее получаем

$$\begin{aligned} P'_2(z, v) &= \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{P_2(z + \alpha v) - P_2(z)}{\alpha} = \\ &= 2 \int_0^T \left\langle \int_t^T \frac{\partial f}{\partial x} d\tau, v(t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial z}, v(t) \right\rangle dt \int_0^T f\left(x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau, z(t), t\right) dt. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из (2.10) следует, что функционал $P_2(z)$ дифференцируем по Гато [36] в точке z и его “градиент Гато” выражается по формуле

$$\nabla P_2(z) = 2 \left(\int_t^T \frac{\partial f}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f}{\partial z} \right) \int_0^T f\left(x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau, z(t), t\right) dt. \quad (2.11)$$

Таким образом, для того чтобы вектор-функция z^* была точкой минимума функционала $P_2(z)$, необходимо [36] выполнение соотношений

$$\left(\int_t^T \frac{\partial f(x^*(\tau), z^*(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f(x^*(t), z^*(t), t)}{\partial z} \right) \int_0^T f(x^*(t), z^*(t), t) dt = \mathbf{0}_n \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.12)$$

Теперь получим выражения, аналогичные (2.10) и (2.11), и необходимое условие минимума, подобное (2.12), для «полиномиального» функционала

$$\mathcal{P}_k(\mathcal{I}_1(x), \dots, \mathcal{I}_n(x)).$$

В общем случае «полиномиальный» функционал имеет вид

$$P_k(z) = \sum_{i=1}^{\ell} a_i F_i(z),$$

где

$$F_i(z) = \left(\int_0^T f_1 dt \right)^{m_1^i} \times \dots \times \left(\int_0^T f_n dt \right)^{m_n^i}.$$

Здесь

$$k = \max_{i=\overline{1, \ell}} (m_1^i + \dots + m_n^i), \quad m_j^i \in N \cup \{0\}, \quad i = \overline{1, \ell}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Обозначим

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1^i = \left(\int_0^T f_1 dt \right)^{m_1^i-1} \times \left(\int_0^T f_2 dt \right)^{m_2^i} \times \dots \times \left(\int_0^T f_n dt \right)^{m_n^i}, \text{ если } m_1^i \geq 1, \\ f_1^i = 0, \text{ если } m_1^i = 0, \end{array} \right.$$

...

$$\left\{ \begin{array}{l} f_j^i = \left(\int_0^T f_1 dt \right)^{m_1^i} \times \dots \times \left(\int_0^T f_{j-1} dt \right)^{m_{j-1}^i-1} \times \left(\int_0^T f_j dt \right)^{m_j^i-1} \times \\ \times \left(\int_0^T f_{j+1} dt \right)^{m_{j+1}^i} \times \dots \times \left(\int_0^T f_n dt \right)^{m_n^i}, \text{ если } m_j^i \geq 1, \\ f_j^i = 0, \text{ если } m_j^i = 0, \end{array} \right.$$

...

$$\left\{ \begin{array}{l} f_n^i = \left(\int_0^T f_1 dt \right)^{m_1^i} \times \dots \times \left(\int_0^T f_{n-1} dt \right)^{m_{n-1}^i-1} \times \left(\int_0^T f_n dt \right)^{m_n^i-1}, \text{ если } m_n^i \geq 1, \\ f_n^i = 0, \text{ если } m_n^i = 0. \end{array} \right.$$

Вначале найдём вариацию функционала $F_i(z)$. Проводя вычисления, аналогичные (2.9), (2.10), получаем

$$F_i(z + \alpha v) = \left[\int_0^T f_1 \left(x_0 + \int_0^t z(\tau) + \alpha v(\tau) d\tau, z(t) + \alpha v(t), t \right) dt \right]^{m_1^i} \times \dots \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\int_0^T f_n \left(x_0 + \int_0^t z(\tau) + \alpha v(\tau) d\tau, z(t) + \alpha v(t), t \right) dt \right]^{m_n^i} = \\
& = \left[\left(\int_0^T f_1 dt \right)^{m_1^i} + \alpha m_1^i \int_0^T \left\langle \int_t^T \frac{\partial f_1}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_1}{\partial z}, v(t) \right\rangle dt \left(\int_0^T f_1 dt \right)^{m_1^i - 1} + o(\alpha, z, v) \right] \times \dots \times \\
& \times \left[\left(\int_0^T f_n dt \right)^{m_n^i} + \alpha m_n^i \int_0^T \left\langle \int_t^T \frac{\partial f_n}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_n}{\partial z}, v(t) \right\rangle dt \left(\int_0^T f_n dt \right)^{m_n^i - 1} + o(\alpha, z, v) \right] = \\
& = \left(\int_0^T f_1 dt \right)^{m_1^i} \times \dots \times \left(\int_0^T f_n dt \right)^{m_n^i} + \alpha m_1^i f_1^i \int_0^T \left\langle \int_t^T \frac{\partial f_1}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_1}{\partial z}, v(t) \right\rangle dt + \\
& \quad + \dots + \alpha m_n^i f_n^i \int_0^T \left\langle \int_t^T \frac{\partial f_n}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_n}{\partial z}, v(t) \right\rangle dt + o(\alpha, z, v), \quad (2.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_i'(z, v) &= m_1^i f_1^i \int_0^T \left\langle \int_t^T \frac{\partial f_1}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_1}{\partial z}, v(t) \right\rangle dt + \dots + \\
& \quad + m_n^i f_n^i \int_0^T \left\langle \int_t^T \frac{\partial f_n}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_n}{\partial z}, v(t) \right\rangle dt + o(\alpha, z, v), \quad (2.14)
\end{aligned}$$

и “градиент Гато” для функционала $F_i(z)$ в точке z :

$$\nabla F_i(z) = \sum_{j=1}^n \left(\int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z} \right) m_j^i f_j^i. \quad (2.15)$$

Далее для «полиномиального» функционала $P_k(z)$ с учётом (2.13)–(2.15) имеем

$$P_k(z + \alpha v) = P_k(z) + \alpha \sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^n m_j^i f_j^i \int_0^T \left\langle \int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z}, v(t) \right\rangle dt + o(\alpha, z, v),$$

$$P_k'(z, v) = \sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^n m_j^i f_j^i \int_0^T \left\langle \int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z}, v(t) \right\rangle dt$$

и “градиент Гато”

$$\nabla P_k(z) = \sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^n \left(\int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z} \right) m_j^i f_j^i.$$

Таким образом, для того чтобы вектор-функция z^* была точкой минимума функционала $P_k(z)$, необходимо [36] выполнение соотношений

$$\sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^n \left(\int_t^T \frac{\partial f_j(x^*(\tau), z^*(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j(x^*(t), z^*(t), t)}{\partial z} \right) m_j^i f_j^i(x^*(t), z^*(t), t) = \mathbf{0}_n \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.16)$$

Заметим, что в случае $n = \ell = 1$, $a_1 = 1$, $m_1^1 = 1$ первый сомножитель в (2.16) равен единице, и мы приходим к необходимым условиям минимума

$$\int_t^T \frac{\partial f_1(x^*(\tau), z^*(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_1(x^*(t), z^*(t), t)}{\partial z} = \mathbf{0}_n \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial f_1(x^*(T), z^*(T), T)}{\partial z} = \mathbf{0}_n. \quad (2.18)$$

Дополнительно предполагая существование требуемых производных и дифференцируя (2.17) на интервале $[0, T]$, получаем уравнение Эйлера в дифференциальной форме для классической задачи вариационного исчисления. Выражение (2.18) представляет собой условие трансверсальности на правом конце.

2.3 Метод градиентного спуска

Опишем следующий метод наискорейшего спуска [285] для поиска стационарных точек функционала $P_k(z)$.

Фиксируем произвольное $z_1 \in C_n[0, T]$. Пусть уже построено $z_p \in C_n[0, T]$. Если выполнено необходимое условие минимума (2.16) (на практике это условие проверяется с некоторой заранее выбранной точностью $\bar{\varepsilon}$ в смысле L^2 -нормы), то z_p является стационарной точкой функционала $P_k(z)$, и процесс прекращается. В противном случае положим

$$z_{p+1} = z_p - \gamma_p \nabla P_k(z_p), \quad (2.19)$$

где $\nabla P_k(z_p)$ — это “градиент Гато” функционала $P_k(z)$ в точке z_p , который находится по формуле

$$\nabla P_k(z_p) := \sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^n \left(\int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z} \right) m_j^i f_j^i, \quad (2.20)$$

в которой x_p соответствует z_p по формуле (2.7), а γ_p есть решение задачи одномерной минимизации

$$\min_{\gamma \geq 0} P(z_p - \gamma \nabla P_k(z_p)) = P(z_p - \gamma_p \nabla P_k(z_p)). \quad (2.21)$$

На практике одномерная минимизация осуществляется на фиксированном отрезке $[0, \bar{\gamma}]$. Тогда имеем

$$P_k(z_{p+1}) \leq P_k(z_p).$$

Предположим, что функционал $\nabla P_k(z)$ является равномерно непрерывным и ограниченным в шаре $B_{r'}(0_n)$ (пространства $L_n^2[0, T]$) радиуса $r' > \sup_{z \in \mathcal{L}_P(z_1)} \|z\|_{L_n^2[0, T]}$ (множество Лебега $\mathcal{L}_P(z_1) = \{z \in C_n[0, T] \mid P(z) \leq P(z_1)\}$ считаем ограниченным по норме $L_n^2[0, T]$). Если последовательность $\{z_p\}$, $p = 1, 2, \dots$, бесконечна, то метод наискорейшего спуска сходится [383] в следующем смысле:

$$\|\nabla P_k(z_p)\|_{L_n^2[0, T]} = \sqrt{\int_0^T (\nabla P_k(z_p, t))^2 dt} \rightarrow 0 \text{ при } p \rightarrow \infty.$$

Если последовательность $\{z_p\}$, $p = 1, 2, \dots$, конечна, то последняя её точка является стационарной точкой функционала $P_k(z)$ по построению.

Строго говоря, в книге [285] данный метод описан для другого пространства, но прямая проверка показывает его применимость в случае, рассмотренном в диссертации.

Для иллюстрации работы метода градиентного спуска рассмотрим пример.

Пример 2.3.1. Пусть требуется найти минимум функционала

$$\mathcal{P}_2(x) = \left[\int_0^1 \dot{x}^2(t) + x(t) dt \right]^2$$

с начальным условием

$$x(0) = 1.$$

Положим $z_1(t) = 0$, тогда $x_1(t) = 1$, и $P_2(z_1) = 1$. В данном случае имеем

$$\int_t^1 \frac{\partial f}{\partial x} d\tau = 1 - t, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z.$$

По формуле (2.20) получаем выражение

$$\nabla P_2(z_1, t) = -(1 - t) \int_0^1 1 dt = (t - 1).$$

По формуле (2.19)

$$z_2(t) = -\gamma(1 - t).$$

Тогда

$$x_2(t) = 1 + \int_0^t -\gamma(1 - \tau) d\tau = 1 - \gamma t + \frac{1}{2} \gamma t^2.$$

Решая задачу (2.21), находим

$$\min_{\gamma \geq 0} P_2(z_1 - \gamma \nabla P_2(z_1)) = \min_{\gamma \geq 0} \left[\int_0^T (-\gamma(1 - t))^2 + 1 - \gamma t + \frac{1}{2} \gamma t^2 dt \right]^2,$$

откуда можно получить точное значение $\gamma_1 = \frac{1}{2}$ (т. е. здесь $\bar{\gamma} = \infty$). Имеем

$$\begin{aligned} z_2(t) &= \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}, \\ x_2(t) &= 1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2, \end{aligned}$$

тогда

$$\int_t^1 \frac{\partial f(x_2(\tau), z_2(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f(x_2(t), z_2(t), t)}{\partial z} = 0. \quad (2.22)$$

Из (2.22) следует, что в точке z_2 необходимое условие (2.12) минимума выполнено точно (т. е. здесь $\bar{\varepsilon} = 0$), при этом $P_2(z_2) = \frac{121}{144}$. Вычисления производились символьно в пакете Maple 12, Serial Number 2011-11-11.

2.4 Случай ограничения на правом конце

Вернёмся к исходной постановке задачи. Пусть помимо начального условия (2.6) задано ограничение на правом конце

$$x(T) = x_T. \quad (2.23)$$

Требуется найти такую вектор-функцию x^* , удовлетворяющую ограничениям (2.6), (2.23), которая доставляет минимум «полиномиальному» функционалу (2.5). Предполагаем, что такое решение существует.

Введём функцию

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(z), \quad (2.24)$$

в которой

$$\varphi_i(z) = \left| x_{0i} + \int_0^T z_i(t) dt - x_{Ti} \right|.$$

Здесь x_{0i} — i -ая компонента вектора x_0 , а x_{Ti} — i -ая компонента вектора x_T , $i = \overline{1, n}$. Нетрудно убедиться, что $\varphi(z) = 0$, когда (2.23) выполняется, и $\varphi(z) > 0$, когда (2.23) не имеет места. Также очевидно, что если ограничения на какие-то координаты отсутствуют, нужно положить соответствующие слагаемые равными нулю.

Теперь на пространстве X можно определить функционал

$$\Phi(z) = P_k(z) + \lambda\varphi(z), \quad (2.25)$$

где λ — достаточно большое положительное число. Ниже будет показано, что при некоторых дополнительных предположениях это точная штрафная функция. Тогда задачу минимизации (2.5) при наличии ограничений (2.6), (2.23) можно свести к безусловной минимизации функционала (2.25).

2.5 Необходимые условия минимума функционала $\Phi(z)$

Рассмотрим функционал φ подробнее. Обозначим

$$\bar{\varphi}_i(z) = x_{0i} + \int_0^T z_i(t) dt - x_{Ti}, \quad i = \overline{1, n}.$$

При фиксированном $z \in C_n[0, T]$ введём индексные множества

$$\begin{aligned} I_0(z) &= \{i \in \{1, \dots, n\} \mid \bar{\varphi}_i(z) = 0\}, \\ I_-(z) &= \{i \in \{1, \dots, n\} \mid \bar{\varphi}_i(z) < 0\}, \\ I_+(z) &= \{i \in \{1, \dots, n\} \mid \bar{\varphi}_i(z) > 0\}. \end{aligned}$$

Нам также потребуются множества

$$\begin{aligned} \Omega &= \{z \in C_n[0, T] \mid \varphi(z) = 0\}, \\ \Omega_\delta &= \{z \in C_n[0, T] \mid \varphi(z) < \delta\}, \\ \Omega_\delta \setminus \Omega &= \{z \in C_n[0, T] \mid 0 < \varphi(z) < \delta\}. \end{aligned}$$

Пусть сначала $\varphi(z) = 0$. В этом случае функционал $\varphi(z)$ субдифференцируем, и его “субдифференциал” с учётом (2.24) имеет вид

$$\partial\varphi(z) = \left\{ \sum_{i=1}^n \omega_i e_i \mid \omega_i \in [-1, 1], i = \overline{1, n} \right\}. \quad (2.26)$$

Пусть теперь $\varphi(z) > 0$. В данном случае функционал $\varphi(z)$ также оказывается субдифференцируемым, и его “субдифференциал” с учётом (2.24) выражается по формуле

$$\begin{aligned} \partial\varphi(z) &= \left\{ \sum_{i \in I_0(z)} \omega_i e_i + \sum_{i=1}^n \mu_i e_i \mid \right. \\ &\quad \left. \omega_i \in [-1, 1], i \in I_0(z), \right. \\ &\quad \left. \mu_i = 0, \text{ если } i \in I_0(z), \mu_i = 1, \text{ если } i \in I_+(z), \mu_i = -1, \text{ если } i \in I_-(z) \right\}. \end{aligned}$$

Используя ту же технику, что и в [97], можно показать, что имеет место

Теорема 2.5.1. Пусть найдётся такое положительное число $\lambda_0 < \infty$, что $\forall \lambda > \lambda_0$ существует $z(\lambda) \in C_n[0, T]$, для которого $\Phi_\lambda(z(\lambda)) = \inf_{z \in C_n[0, T]} \Phi_\lambda(z)$. Пусть также функционал $P_k(z)$ является липшицевым на множестве $\Omega_\delta \setminus \Omega$. Тогда функционал (2.25) будет точной штрафной функцией.

Теперь можно сформулировать необходимые условия минимума «полиномиального» функционала. Далее считаем, что в функционале $\Phi(z)$ зафиксировано число $\lambda > \lambda^*$.

Теорема 2.5.2. Пусть выполнены условия Теоремы 2.5.1. Для того чтобы точка x^* удовлетворяла ограничениям (2.6), (2.23) и доставляла минимум функционалу (2.5), необходимо, чтобы для любого t из промежутка $[0, T]$ выполнялось включение

$$\begin{aligned} \mathbf{0}_n \in \sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^n \left(\int_t^T \frac{\partial f_j(x^*(\tau), z^*(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j(x^*(t), z^*(t), t)}{\partial z} \right) m_j^i f_j^i + \\ + \lambda \left\{ \sum_{i=1}^n \omega_i e_i \mid \omega_i \in [-1, 1], i = \overline{1, n} \right\}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Доказательство. По Теореме 2.5.1 функционал (2.25) — точная штрафная функция, поэтому существует такое число λ^* , что $\forall \lambda > \lambda^*$ задача минимизации функционала (2.5) при наличии ограничений (2.6), (2.23) эквивалентна задаче безусловной минимизации (2.25).

Известно [195], что необходимым условием минимума функционала (2.25) в точке x^* в терминах субдифференциала является включение

$$\mathbf{0}_n \in \partial\Phi(x^*), \quad (2.28)$$

где $\mathbf{0}_n$ — нулевой элемент пространства $C_n[0, T]$.

Поскольку в точке $z \in \Omega$ субдифференциал функционала $\varphi(z)$ выражается соотношением (2.26), а функционал $P_k(z)$ дифференцируем по Гато и его “градиент Гато” выписан в (2.16), то условие (2.28) запишется в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{0}_n \in \sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^n \left(\int_t^T \frac{\partial f_j(x^*(\tau), z^*(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j(x^*(t), z^*(t), t)}{\partial z} \right) m_j^i f_j^i + \\ + \lambda \left\{ \sum_{i=1}^n \omega_i e_i \mid \omega_i \in [-1, 1], i = \overline{1, n} \right\}, \end{aligned}$$

и мы приходим к включению (2.27) для любого $t \in [0, T]$.

Теорема доказана. □

Замечание 2.5.1. Строго говоря, условие минимума (2.28) формулируется в работе [195] для функционала, заданного на другом пространстве, однако из доказательства этой статьи видно, что данный результат сохраняет силу для случая пространства, рассматриваемого в диссертации.

2.6 Метод гиподифференциального спуска

Найдём гиподифференциал функционала $\Phi(z)$ в точке z .

Для гиподифференциала функционалов $\varphi_i(z)$, $i = \overline{1, n}$, в точке z имеем [38] следующее выражение:

$$d\varphi_i(z) = \text{co} \left\{ \left[\overline{\varphi}_i(z) - \varphi_i(z), e_i \right], \left[-\overline{\varphi}_i(z) - \varphi_i(z), -e_i \right] \right\}.$$

Тогда искомый “гиподифференциал” находится по формуле

$$d\Phi(z) = \left[0, \sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^n \left(\int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z} \right) m_j^i f_j^i \right] + \lambda \sum_{i=1}^n d\varphi_i(z).$$

Известно [38], что необходимым условием минимума функционала (2.25) в точке z^* в терминах гиподифференциала является включение

$$[0, 0_n] \in d\Phi(z^*), \quad (2.29)$$

где $[0, 0_n]$ — нулевой элемент пространства $\mathbb{R} \times C_n[0, T]$.

Переход от субдифференциала к гиподифференциалу обусловлен тем фактом, что гиподифференциальное отображение, в отличие от субдифференциального, является непрерывным в метрике Хаусдорфа [38], а это позволит гарантировать сходимость в некотором смысле рассматриваемого численного метода.

Найдём минимальный по норме гипогradient $h \in d\Phi(z)$, т. е. решим задачу

$$\|h^*(z)\|_{\mathbb{R} \times L_n^2}^2 = \min_{h \in d\Phi(z)} \|h(z)\|_{\mathbb{R} \times L_n^2}^2 = \min_{\beta_k \in [0, 1], k = \overline{1, n}} \|\overline{h}(\beta_1, \dots, \beta_n)\|_{\mathbb{R} \times L_n^2}^2, \quad (2.30)$$

где

$$\begin{aligned} \overline{h}(\beta_1, \dots, \beta_n) &= \left[0, \sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^n \left(\int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z} \right) m_j^i f_j^i \right] + \lambda \left(\beta_1 \left[\overline{\varphi}_1(z) - \varphi_1(z), e_1 \right] + \right. \\ &+ (1 - \beta_1) \left[-\overline{\varphi}_1(z) - \varphi_1(z), -e_1 \right] + \dots + \beta_n \left[\overline{\varphi}_n(z) - \varphi_n(z), e_n \right] + (1 - \beta_n) \left[-\overline{\varphi}_n(z) - \varphi_n(z), -e_n \right] \left. \right) = \\ &= \left[\lambda(2\beta_1 - 1)\overline{\varphi}_1(z) + \dots + \lambda(2\beta_n - 1)\overline{\varphi}_n(z) - \lambda\varphi(z), \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^n \left(\int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z} \right) m_j^i f_j^i + \lambda(2\beta_1 - 1)e_1 + \dots + \lambda(2\beta_n - 1)e_n \right] = \\ & = \left[\lambda \sum_{i=1}^n (2\beta_i - 1) \bar{\varphi}_i(z) - \lambda \varphi(z), \sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^n \left(\int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z} \right) m_j^i f_j^i + \lambda \sum_{i=1}^n (2\beta_i - 1)e_i \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, задачу (2.30) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \min_{\beta_k \in [0,1], k=1,\bar{n}} \left\{ \left(\lambda \sum_{i=1}^n (2\beta_i - 1) \bar{\varphi}_i(z) - \lambda \varphi(z) \right)^2 + \right. \\ & \left. + \int_0^T \left(\sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^n \left(\int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z} \right) m_j^i f_j^i + \lambda \sum_{i=1}^n (2\beta_i - 1)e_i \right)^2 dt \right\}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Задача (2.31) представляет собой задачу квадратичного программирования при наличии линейных ограничений. Для её решения можно использовать один из известных методов [89], который сходится за конечное число шагов. Обозначим это решение $(\beta_1^*, \dots, \beta_n^*)$.

Вектор-функция

$$G(z) := \sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^n \left(\int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z} \right) m_j^i f_j^i + \lambda \sum_{i=1}^n (2\beta_i^* - 1)e_i \quad (2.32)$$

состоит из последних n компонент наименьшего по норме гипогрadients функционала $\Phi(z)$ в точке z . Если $\|G(z)\|_{L_n^2} > 0$, то $-\frac{G(z)}{\|G(z)\|_{L_n^2}}$ есть (нормированное) направление гиподифференциального спуска [188] функционала $\Phi(z)$ в точке z .

Перейдем к описанию метода гиподифференциального спуска [188] для нахождения стационарных точек функционала $\Phi(z)$. Выберем произвольное $z_1 \in C_n[0, T]$. Пусть уже найдено $z_p \in C_n[0, T]$. Если выполнено необходимое условие минимума (2.29) (на практике с некоторой выбранной точностью $\bar{\varepsilon}$ в смысле $\mathbb{R} \times L^2$ -нормы (см. задачу (2.30))), то точка z_p стационарная для функционала $\Phi(z)$, и процесс прекращается. Если же условие (2.29) не выполнено, то положим

$$z_{p+1} = z_p - \gamma_p G_p,$$

где $G_p = G(z_p)$ определяется формулой (2.32), x_p соответствует z_p по формуле (2.7), а γ_p является решением задачи одномерной минимизации

$$\min_{\gamma \geq 0} \Phi(z_p - \gamma G_p) = \Phi(z_p - \gamma_p G_p).$$

На практике одномерная минимизация осуществляется на выбранном отрезке $[0, \bar{\gamma}]$. Тогда

$$\Phi(z_{p+1}) \leq \Phi(z_p).$$

Предположим, что последовательность $\{d\Phi(z_p)\}_{p=1}^{\infty}$ ограничена (по $\mathbb{R} \times L^2$ -норме), а гиподифференциал $d\Phi$ равномерно аппроксимирует функционал Φ на множестве Лебега $\mathcal{L}_{\Phi}(z_1) = \{z \in C_n[0, T] \mid \Phi(z) \leq \Phi(z_1)\}$. Если последовательность $\{z_p\}$, $p = 1, 2, \dots$, бесконечна, то при сделанных предположениях метод гиподифференциального спуска сходится [188] в следующем смысле:

$$\|h^*(z_p)\|_{\mathbb{R} \times L_n^2[0, T]} = \sqrt{(h_1^*(z_p))^2 + \int_0^T G^2(z_p, t) dt} \rightarrow 0 \text{ при } p \rightarrow \infty, \quad (2.33)$$

где h_1 — первая компонента вектор-функции h .

Если последовательность $\{z_p\}$, $p = 1, 2, \dots$, конечна, то последняя её точка есть стационарная точка функционала $\Phi(z)$ по построению.

Замечание 2.6.1. Требуемое свойство равномерной аппроксимации функционала его гиподифференциалом тесно связано [189] с понятием липшицевой аппроксимации функционала своим гиподифференциалом, которое в свою очередь связано [189] с липшицевостью гиподифференциального отображения. Последнее же свойство аналогично липшицевости градиентов, являющейся стандартным предположением [285] при обосновании сходимости классических численных методов оптимизации.

Замечание 2.6.2. Строго говоря, условие минимума (2.29), сам метод гиподифференциального спуска и соотношение сходимости (2.33) формулируются в работе [188] для функционала, заданного на другом пространстве, однако из доказательств этой статьи видно, что данные результаты сохраняют силу для случая пространства, рассматриваемого в диссертации.

Для иллюстрации работы метода гиподифференциального спуска рассмотрим пример.

Пример 2.6.1. Пусть требуется найти минимум функционала

$$\mathcal{P}_2(x) = \left[\int_0^1 \dot{x}^2(t) - tx(t) dt \right]^2$$

с краевыми условиями

$$x(0) = 1, \quad x(1) = 2.$$

Положим $\lambda = 100$, $z_1(t) = 0$, тогда $x_1(t) = 1$. В данном случае субдифференциал функционала $\Phi(z)$ в точке z имеет вид

$$\partial\Phi(z) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{t^2}{2} + 2z \right) \mathcal{I}_1(x) + \lambda(\omega + \mu),$$

где

$$\mathcal{I}_1(x) = \int_0^1 \dot{x}^2(t) - tx(t) dt,$$

а величины ω и μ определены в выражении для субдифференциала $\partial\varphi(z)$ перед Теоремой 2.5.1. Гиподифференциал функционала $\Phi(z)$ в точке z вычисляется по формуле

$$d\Phi(z) = \left[0, \left(-\frac{1}{2} + \frac{t^2}{2} + 2z \right) \mathcal{I}_1(x) \right] + \lambda \text{co} \left\{ \left[\bar{\varphi}(z) - \varphi(z), 1 \right], \left[-\bar{\varphi}(z) - \varphi(z), -1 \right] \right\},$$

здесь положено $\varphi(z) := \varphi_1(z)$, $\bar{\varphi}(z) := \bar{\varphi}_1(z)$.

В Таблице 2.6.1 приведены результаты работы метода гиподифференциального спуска. В точке z_3 необходимое условие (2.29) минимума выполнено точно (т. е. здесь $\bar{\varepsilon} = 0$). В ходе одномерной минимизации были получены точные значения шагов спуска (т. е. здесь $\bar{\gamma} = \infty$). Вспомогательные задачи квадратичного программирования были решены аналитически (точно). Вычисления производились символично в пакете Maple 12, Serial Number 2011-11-11.

Таблица 2.6.1. Пример 2.6.1: результаты работы МГС

k	z_k	x_k	$\ G(z_k)\ _{L_n^2}$	$\Phi(z_k)$
1	0	1	99.833	100.25
2	$0.99917 + 0.0025t^2$	$1 + 0.99917t + 0.0008(3)t^3$	0.00419	0.02782
3	$1.08(3) - 0.25t^2$	$1 + 1.08(3)t - 0.08(3)t^3$	0	0.02596

2.7 Соответствующие приложения метода

Приведем примеры задач, которые могут приводить к необходимости минимизации «полиномиального» функционала.

Рассмотрим вначале задачу нахождения таких вектор-функций $x \in C_n^1[0, T]$ с заданным начальным положением x_0 , которые удовлетворяют интегральному соотношению

$$\int_0^T g(x(t), \dot{x}(t), t) dt = K, \quad (2.34)$$

где K — заданная константа. Функцию $g(x, \dot{x}, t)$ считаем непрерывно дифференцируемой по x и \dot{x} и непрерывной на своей области определения. Нетрудно видеть, что задача (2.34) эквивалентна задаче минимизации функционала

$$\mathcal{P}_2(x) = \left(\int_0^T g(x(t), \dot{x}(t), t) dt - K \right)^2,$$

который представляет собой квадратичный трёхчлен от интегрального функционала. Если ещё присутствует ограничение на правом конце x_T , то нужно минимизировать функционал

$$\mathcal{P}_2(x) = \left(\int_0^T g(x(t), \dot{x}(t), t) dt - K \right)^2 + \left(x_0 + \int_0^T \dot{x}(t) dt - x_T \right)^2. \quad (2.35)$$

Заметим, что в отличие от общего случая задачи с ограничением на правом конце, рассмотренного выше, здесь минимум функционала (2.35) ищется на всём пространстве, поскольку предполагается, что существует решение задачи (2.34), удовлетворяющее заданным начальным и конечным условиям. Поэтому в данном случае не возникает необходимости строить точную штрафную функцию и использовать методы негладкой оптимизации.

Аналогичным образом к задаче минимизации «полиномиального» функционала можно свести любое интегральное соотношение, содержащее положительные степени интегральных функционалов и константы.

Вернёмся к задаче (2.1)–(2.3). С учётом (2.4) нетрудно проверить, что имеет место

Теорема 2.7.1. *Для того чтобы решение x^* системы (2.1) при управлении u^* удовлетворяло условиям (2.2), (2.3) необходимо, чтобы для любого t из промежутка $[0, T]$ выполнялись соотношения*

$$\begin{aligned} & \int_t^T \left(\frac{\partial y(x^*(\tau), z^*(\tau), u^*(\tau), \tau)}{\partial x} \right)' y(x^*(\tau), z^*(\tau), u^*(\tau), \tau) d\tau + \left(\frac{\partial y(x^*(t), z^*(t), u^*(t), t)}{\partial z} \right)' y(x^*(t), z^*(t), u^*(t), t) + \\ & + \sum_{i=1}^s \left(\int_0^T y_{0i}(x^*(t), z^*(t), u^*(t), t) dt - L_i \right) \left(\int_t^T \frac{\partial y_{0i}(x^*(\tau), z^*(\tau), u^*(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial y_{0i}(x^*(t), z^*(t), u^*(t), t)}{\partial z} \right) = \mathbf{0}_n, \\ & \left(\frac{\partial y(x^*(t), z^*(t), u^*(t), t)}{\partial u} \right)' y(x^*(t), z^*(t), u^*(t), t) + \\ & + \sum_{i=1}^s \left(\int_0^T y_{0i}(x^*(t), z^*(t), u^*(t), t) dt - L_i \right) \frac{\partial y_{0i}(x^*(t), z^*(t), u^*(t), t)}{\partial u} = \mathbf{0}_m. \end{aligned}$$

Наконец, если система (2.1) разрешена при $t \in [0, T]$ относительно производных, т. е. рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме (в которой правая часть удовлетворяет условиям гладкости, аналогичными тем, что наложены в общем случае)

$$\dot{x}(t) = y(x(t), u(t), t) \quad (2.36)$$

с заданным начальным условием

$$x(0) = x_0, \quad (2.37)$$

то из Теоремы 2.7.1 следует

Теорема 2.7.2. *Для того чтобы решение x^* системы (2.36) при управлении u^* удовлетворяло условиям (2.3), (2.37) необходимо, чтобы для любого t из промежутка $[0, T]$ выполнялись соотношения*

$$\begin{aligned}
& z^*(t) - y(x^*(t), u^*(t), t) - \int_t^T \left(\frac{\partial y(x^*(\tau), u^*(\tau), \tau)}{\partial x} \right)' (z^*(\tau) - y(x^*(\tau), u^*(\tau), \tau)) d\tau + \\
& + \sum_{i=1}^s \left(\int_0^T y_{0i}(x^*(t), z^*(t), u^*(t), t) dt - L_i \right) \left(\int_t^T \frac{\partial y_{0i}(x^*(\tau), z^*(\tau), u^*(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial y_{0i}(x^*(t), z^*(t), u^*(t), t)}{\partial z} \right) = \mathbf{0}_n, \\
& \left(- \frac{\partial y(x^*(t), u^*(t), t)}{\partial u} \right)' (z^*(t) - y(x^*(t), u^*(t), t)) + \\
& + \sum_{i=1}^s \left(\int_0^T y_{0i}(x^*(t), z^*(t), u^*(t), t) dt - L_i \right) \frac{\partial y_{0i}(x^*(t), z^*(t), u^*(t), t)}{\partial u} = \mathbf{0}_m.
\end{aligned}$$

Пример 2.7.1. В качестве конкретного примера приложения рассматриваемой проблемы к аэродинамике рассмотрим задачу минимизации следующего интеграла качества:

$$\mathcal{I}(x) = \mathcal{I}_1^{m_1}(x) \mathcal{I}_2^{m_2}(x) \mathcal{I}_3^{m_3}(x),$$

здесь

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1(x) &= \int_0^1 x(t) \dot{x}^3(t) dt, & \mathcal{I}_2(x) &= \int_0^1 x(t) dt, & \mathcal{I}_3(x) &= \int_0^1 x^2(t) dt, \\
& x(0) = 0, & x(1) &= 1,
\end{aligned}$$

а m_1, m_2, m_3 — некоторые целые неотрицательные числа. Мы не останавливаемся подробно на физическом смысле функционала $\mathcal{I}(x)$. Здесь лишь кратко отметим, что интегралы $\mathcal{I}_1(x), \mathcal{I}_2(x), \mathcal{I}_3(x)$ с точностью до постоянных множителей представляют собой лобовое сопротивление, площадь и объём объекта соответственно и возникают при рассмотрении осесимметричного тонкого тела, находящегося в ньютоновском гиперзвуковом потоке под нулевым углом атаки. Детальное описание данной задачи можно найти в [340]. В работах [338, 339, 322]) также рассмотрены разные задачи определения оптимальных в каком-то смысле форм аэродинамических объектов, которые приводят к минимизации различных полиномов от интегральных функционалов.

Глава 3

Программное управление гладкими системами

В этой главе рассматривается задача нахождения программного управления динамикой объекта, которая описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Целью управления является перевод данной системы из точки в точку. При этом правая часть системы предполагается непрерывной и непрерывно дифференцируемой по фазовым переменным и по управлениям. Допустимыми считаются кусочно-непрерывные управления, ограниченные некоторым числом по L^2 -норме. С помощью теории точных штрафных функций исходная задача сводится к минимизации некоторого функционала. Для него выписаны субдифференциал и гиподифференциал, в их терминах сформулированы необходимые условия минимума. Выделен класс задач, для которых эти условия оказываются и достаточными. Далее к построенному функционалу применяются методы субдифференциального и гиподифференциального спусков (последний сходится к его стационарной точке в “слабом” смысле). При этом функционал построен таким образом, что можно проверить, является ли полученная стационарная точка точкой его глобального минимума. Разработанный метод иллюстрируется на примерах. См. [104], [222].

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad (3.1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (3.2)$$

$$x(T) = x_T. \quad (3.3)$$

Здесь $t \in [0, T]$, где $T > 0$ — заданный конечный момент времени, $f(x, u, t)$ — вещественная n -мерная вектор-функция, $x(t)$ — n -мерная вектор-функция фазовых координат, которую будем считать кусочно-непрерывно дифференцируемой на $[0, T]$. Предполагаем $f(x, u, t)$ непрерывно дифференцируемой по x и u и непрерывной на своей области определения. Пусть m -мерное управление u принадлежит множеству допустимых управлений (с заданным C):

$$U = \left\{ u \in P_m[0, T] \mid \int_0^T \langle u(t), u(t) \rangle dt \leq C \right\}. \quad (3.4)$$

Если $t_0 \in [0, T)$ — точка разрыва вектор-функции u , то для определённости полагаем $u(t_0) = \lim_{t \downarrow t_0} u(t)$. В точке T считаем, что $u(T) = \lim_{t \uparrow T} u(t)$.

Рассмотрим следующую задачу. Требуется подобрать управление, которое принадлежит множеству допустимых управлений (3.4) и переводит систему (3.1) из начального положения (3.2) в конечное состояние (3.3) за время T . Считаем, что такое управление существует.

3.2 Сведение к вариационной задаче

Положим $z(t) = \dot{x}(t)$, при этом $z \in P_n[0, T]$ по предположению. Тогда с учётом (3.2) имеем

$$x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau. \quad (3.5)$$

Введём в рассмотрение функционал

$$I(z, u) = \frac{1}{2} \int_0^T \varphi^2(z, u, t) dt + \sum_{i=1}^n \psi_i(z) + \max \left\{ 0, \int_0^T \langle u(t), u(t) \rangle dt - C \right\}, \quad (3.6)$$

где

$$\varphi(z, u) = z - f\left(x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau, u, t\right),$$

$$\psi_i(z) = |\bar{\psi}_i(z)|, \quad \bar{\psi}_i(z) = x_{0i} + \int_0^T z_i(t) dt - x_{Ti}, \quad i = \overline{1, n},$$

а x_{0i} — i -ая компонента вектора x_0 , x_{Ti} — i -ая компонента вектора x_T , $i = \overline{1, n}$.

Нетрудно видеть, что функционал $I(z, u)$ неотрицателен для всех $z \in P_n[0, T]$ и для всех $u \in P_m[0, T]$ и обращается в ноль в точке $[z^*, u^*] \in P_n[0, T] \times P_m[0, T]$ тогда и только тогда, когда вектор-функция

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t z^*(\tau) d\tau$$

является программным движением, соответствующим программному управлению u^* .

Очевидно, что если некоторые координаты на правом конце свободны, тогда нужно положить соответствующие слагаемые в функционале $I_2(z)$ равными нулю. Также очевидно, что если отсутствует ограничение на управление, нужно убрать соответствующее слагаемое $I_3(u)$. В обоих случаях сохраним для функционала $I(z, u)$ его обозначение.

Итак, будем минимизировать функционал $I(z, u)$ на пространстве

$$X = \left(P_n[0, T] \times P_m[0, T], \|\cdot\|_{L_n^2[0, T] \times L_m^2[0, T]} \right).$$

3.3 Необходимые условия минимума

Введём множество

$$\Omega = \left\{ z \in P_n[0, T] \mid x_0 + \int_0^T z(t) dt = x_T \right\}.$$

Ниже нам также потребуются индексные множества

$$I_0(z) = \left\{ i \in \{1, \dots, n\} \mid \bar{\psi}_i(z) = 0 \right\},$$

$$I_-(z) = \left\{ i \in \{1, \dots, n\} \mid \bar{\psi}_i(z) < 0 \right\},$$

$$I_+(z) = \left\{ i \in \{1, \dots, n\} \mid \bar{\psi}_i(z) > 0 \right\}$$

и следующие множества управлений

$$U_0 = \left\{ u \in P_m[0, T] \mid \int_0^T \langle u(t), u(t) \rangle dt - C = 0 \right\},$$

$$U_- = \left\{ u \in P_m[0, T] \mid \int_0^T \langle u(t), u(t) \rangle dt - C < 0 \right\},$$

$$U_+ = \left\{ u \in P_m[0, T] \mid \int_0^T \langle u(t), u(t) \rangle dt - C > 0 \right\}.$$

Используя ту же технику, что и в [97] нетрудно убедиться в справедливости следующей теоремы.

Теорема 3.3.1. *Функционал $I(z, u)$ субдифференцируем, и его “субдифференциал” в точке $[z, u]$ выражается по формуле*

$$\begin{aligned} \partial I(z, u) = & \left\{ \left[z - f(x, u, t) - \int_t^T \left(\frac{\partial f(x(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} \right)' (z(\tau) - f(x(\tau), u(\tau), \tau)) d\tau + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{i \in I_0(z)} \omega_i e_i + \sum_{j=1}^n \mu_j e_j, - \left(\frac{\partial f(x, u, t)}{\partial u} \right)' (z - f(x, u, t)) + 2\nu u \right] \mid \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_i &\in [-1, 1], \quad i \in I_0(z), \\ \mu_j &= 0, \quad j \in I_0(z), \quad \mu_j = 1, \quad j \in I_+(z), \quad \mu_j = -1, \quad j \in I_-(z), \\ \nu &\in [0, 1], \quad u \in U_0, \quad \nu = 1, \quad u \in U_+, \quad \nu = 0, \quad u \in U_- \end{aligned} \Bigg\}.$$

Следствие 3.3.1. Если $z \in \Omega$, $u \in U$, то функционал $I(z, u)$ субдифференцируем, и его “субдифференциал” в точке $[z, u]$ выражается по формуле

$$\begin{aligned} \partial I(z, u) &= \left\{ \left[z - f(x, u, t) - \int_t^T \left(\frac{\partial f(x(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} \right)' (z(\tau) - f(x(\tau), u(\tau), \tau)) d\tau + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{i=1}^n \omega_i e_i, - \left(\frac{\partial f(x, u, t)}{\partial u} \right)' (z - f(x, u, t)) + 2\nu u \right] \mid \right. \\ &\quad \left. \omega_i \in [-1, 1], \quad i = \overline{1, n}, \right. \\ &\quad \left. \nu \in [0, 1], \quad u \in U_0, \quad \nu = 0, \quad u \in U_- \right\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Лемма 3.3.1. Если система (3.1) линейна по фазовым переменным x и по управлению u (матрицы при фазовом векторе и управлении, а также неоднородность в правой части считаются непрерывными), то функционал $I(z, u)$ является выпуклым.

Доказательство. Представим функционал (3.6) в виде

$$I(z, u) = \frac{1}{2} I_1(z, u) + I_2(z) + I_3(u),$$

где $I_1(z, u)$, $I_2(z)$, $I_3(u)$ — соответствующие слагаемые из правой части (3.6). Функционалы $I_2(z)$ и $I_3(u)$ выпуклы как максимумы выпуклых функционалов [37]. Покажем выпуклость функционала $I_1(z, u)$ (в случае линейности системы (3.1)).

Пусть система (3.1) имеет вид

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + c(t),$$

где $A(t)$ — $n \times n$ -матрица, $B(t)$ — $n \times m$ -матрица, $c(t)$ — n -мерная вектор-функция. Как было отмечено в условии леммы, считаем $A(t)$, $B(t)$, $c(t)$ вещественными и непрерывными на $[0, T]$. Пусть $z_1, z_2 \in P_n[0, T]$, $u_1, u_2 \in P_m[0, T]$, $\alpha \in (0, 1)$. Имеем

$$\begin{aligned} I_1\left(\alpha(z_1, u_1) + (1 - \alpha)(z_2, u_2)\right) &= \left\| \alpha z_1(t) + (1 - \alpha)z_2(t) - \right. \\ &\quad \left. - A(t) \left(x_0 + \int_0^t \alpha z_1(\tau) + (1 - \alpha)z_2(\tau) d\tau \right) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -B(t)\left(\alpha u_1(t) + (1 - \alpha)u_2(t)\right) - c(t)\Big|_{L_n^2}^2 = \left\|\alpha\varphi(z_1, u_1) + (1 - \alpha)\varphi(z_2, u_2)\right\|_{L_n^2}^2 = \\
& = \alpha^2 \int_0^T \varphi^2(z_1, u_1, t)dt + 2\alpha(1 - \alpha) \int_0^T \langle \varphi(z_1, u_1, t), \varphi(z_2, u_2, t) \rangle dt + \\
& \quad + (1 - \alpha)^2 \int_0^T \varphi^2(z_2, u_2, t)dt = \alpha \int_0^T \varphi^2(z_1, u_1, t)dt + \\
& + (1 - \alpha) \int_0^T \langle \varphi(z_1, u_1, t), \varphi(z_2, u_2, t) \rangle dt + 2\alpha(1 - \alpha) \int_0^T \langle \varphi(z_1, u_1, t), \varphi(z_2, u_2, t) \rangle dt - \\
& \quad - \alpha(1 - \alpha) \int_0^T \varphi^2(z_1, u_1, t)dt - \alpha(1 - \alpha) \int_0^T \varphi^2(z_2, u_2, t)dt = \\
& = \alpha \int_0^T \varphi^2(z_1, u_1, t)dt + (1 - \alpha) \int_0^T \varphi^2(z_2, u_2, t)dt - \\
& \quad - \alpha(1 - \alpha) \int_0^T \langle \varphi(z_1, u_1, t) - \varphi(z_2, u_2, t), \varphi(z_1, u_1, t) - \varphi(z_2, u_2, t) \rangle dt.
\end{aligned}$$

В силу неотрицательности последнего слагаемого имеем для любых $z_1, z_2 \in P_n[0, T]$, $u_1, u_2 \in P_m[0, T]$ и $\alpha \in (0, 1)$ следующее неравенство:

$$I_1(\alpha(z_1, u_1) + (1 - \alpha)(z_2, u_2)) \leq \alpha I_1(z_1, u_1) + (1 - \alpha)I_1(z_2, u_2),$$

что и доказывает выпуклость функционала $I_1(z, u)$.

Теперь остаётся заметить, что функционал $I(z, u)$ является выпуклым как сумма выпуклых функционалов [37].

Лемма доказана. □

Известно [195], что необходимым, а в случае выпуклости и достаточным условием минимума функционала (3.6) в точке $[z^*, u^*]$ в терминах субдифференциала является включение

$$0_{n+m} \in \partial I(z^*, u^*), \tag{3.8}$$

где 0_{n+m} — нулевой элемент пространства $P_n[0, T] \times P_m[0, T]$. Отсюда и из Леммы 3.3.1 заключаем, что справедлива

Теорема 3.3.2. *Для того, чтобы управление $u^* \in U$ переводило систему (3.1) из начального положения (3.2) в конечное состояние (3.3) за время T , необходимо, а в случае линейности системы (3.1) и достаточно, чтобы*

$$0_{n+m} \in \partial I(z^*, u^*), \tag{3.9}$$

где выражение для субдифференциала $\partial I(z, u)$ выписано в формуле (3.7).

Замечание 3.3.1. Строго говоря, условие минимума (3.8) формулируется в работе [195] для функционала, заданного на другом пространстве, однако из доказательства этой статьи видно, что данный результат сохраняет силу для случая пространства, рассматриваемого в диссертации.

3.4 Метод субдифференциального спуска

Найдём минимальный по норме субградиент $h \in \partial I(z, u)$, то есть решим задачу

$$\|h^*(z, u)\|_{L_{n+m}^2}^2 = \min_{h \in \partial I(z, u)} \|h(z, u)\|_{L_{n+m}^2}^2 = \quad (3.10)$$

$$\min_{\omega_i, i \in I_0(z), \nu} \int_0^T \left(s_1(z, u, t) + \sum_{i \in I_0(z)} \omega_i e_i \right)^2 dt + \int_0^T \left(s_2(z, u, t) + 2\nu u(t) \right)^2 dt,$$

где

$$s_1(z, u) = \bar{s}_1(z, u) + \sum_{j=1}^n \mu_j e_j,$$

$$\bar{s}_1(z, u) = z - f(x, u, t) - \int_t^T \left(\frac{\partial f(x(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} \right)' (z(\tau) - f(x(\tau), u(\tau), \tau)) d\tau,$$

$$s_2(z, u) = - \left(\frac{\partial f(x, u, t)}{\partial u} \right)' (z - f(x, u, t)),$$

а величины $\omega_i, i \in I_0(z), \mu_j, j = \overline{1, n}, \nu$ определены в Теореме 3.3.1.

Задача (3.10) представляет собой задачу квадратичного программирования при наличии линейных ограничений и может быть решена одним из известных методов [89], который сходится за конечное число шагов. Обозначим $\omega_i^*, i \in I_0(z), \nu^*$ её решение. Заметим, что задача (3.10) заведомо имеет решение исходя из более общих соображений: как известно, норма слабо полунепрерывна снизу, следовательно она достигает минимума [203] на субдифференциале как на слабо компактном множестве. (Существование направления спуска в случае нарушения условия (3.8) гарантируется также следствием из теоремы Хана-Банаха [285] опять таки в силу слабой компактности субдифференциала.)

Тогда вектор-функция

$$G(z, u) := h^*(z, u) = \left[s_1(z, u) + \sum_{i \in I_0(z)} \omega_i^* e_i, s_2(z, u) + 2\nu^* u \right] \quad (3.11)$$

является наименьшим по норме субградиентом функционала $I(z, u)$ в точке $[z, u]$. Если $\|G(z, u)\|_{L_{n+m}^2} > 0$, то вектор-функция $-\frac{G(z, u)}{\|G(z, u)\|_{L_{n+m}^2}}$ является (нормированным) направлением субдифференциального спуска [37] функционала $I(z, u)$ в точке $[z, u]$.

Замечание 3.4.1. Строго говоря, в работе [37] рассматривается лишь конечномерное пространство, однако из доказательства этой книги видно (см. также [46]), что формула для направления наискорейшего спуска остаётся верна для случая пространства, рассматриваемого в диссертации.

Опишем следующий метод субдифференциального спуска для поиска стационарных точек функционала $I(z, u)$. Фиксируем произвольную точку $[z_1, u_1] \in P_n[0, T] \times P_m[0, T]$.

Пусть уже построена точка $[z_k, u_k] \in P_n[0, T] \times P_m[0, T]$. Если выполнено необходимое условие минимума (3.9) (на практике это условие проверяется с некоторой заранее выбранной точностью $\bar{\varepsilon}$ в смысле L^2 -нормы (см. задачу (3.10))), то точка $[z_k, u_k]$ является стационарной точкой функционала $I(z, u)$, и процесс прекращается. В противном случае положим

$$[z_{k+1}, u_{k+1}] = [z_k, u_k] - \alpha_k G_k,$$

где $G_k = G(z_k, u_k)$ определяется формулой (3.11) (при этом x_k соответствует z_k по формуле (3.5)), а величина α_k является решением следующей задачи одномерной минимизации

$$\min_{\alpha \geq 0} I([z_k, u_k] - \alpha G_k) = I([z_k, u_k] - \alpha_k G_k).$$

На практике одномерная минимизация осуществляется на выбранном отрезке $[0, \bar{\alpha}]$. Тогда

$$I(z_{k+1}, u_{k+1}) \leq I(z_k, u_k).$$

Если последовательность $\{[z_k, u_k]\}$, $k = 1, 2, \dots$, конечна, то последняя её точка является стационарной точкой функционала $I(z, u)$ по построению. Если же последовательность $\{[z_k, u_k]\}$, $k = 1, 2, \dots$, бесконечна, то описанный процесс может и не привести к стационарной точке функционала $I(z, u)$, поскольку субдифференциальное отображение $[z, u] \rightarrow \partial I(z, u)$ не является непрерывным в метрике Хаусдорфа [37].

3.5 Метод гиподифференциального спуска

Найдём гиподифференциал функционала $I(z, u)$ в точке $[z, u]$.

Для гиподифференциала функционалов ψ_i , $i = \overline{1, n}$, в точке $[z, u]$ имеем [180] следующее выражение

$$d\psi_i(z) = \text{co} \left\{ \left[\bar{\psi}_i(z) - \psi_i(z), e_i \right], \left[-\bar{\psi}_i(z) - \psi_i(z), -e_i \right] \right\}.$$

Пусть, как и ранее,

$$I_3(u) = \max \left\{ 0, \int_0^T \langle u(t), u(t) \rangle dt - C \right\}.$$

Для гиподифференциала функционала $I_3(u)$ в точке u имеем выражение

$$dI_3(u) = \text{co} \left\{ \left[\int_0^T \langle u(t), u(t) \rangle dt - C - I_3(u), 2u \right], \left[-I_3(u), 0_m \right] \right\}.$$

Тогда “гиподифференциал” функционала $I(z, u)$ в точке $[z, u]$ выражается по формуле

$$\begin{aligned} dI(z, u) = & \left[0, \bar{s}_1(z, u), s_2(z, u) \right] + \\ & + \sum_{i=1}^n \text{co} \left\{ \left[\bar{\psi}_i(z) - \psi_i(z), e_i, 0_m \right], \left[-\bar{\psi}_i(z) - \psi_i(z), -e_i, 0_m \right] \right\} + \\ & + \text{co} \left\{ \left[\int_0^T \langle u(t), u(t) \rangle dt - C - I_3(u), 0_n, 2u \right], \left[-I_3(u), 0_n, 0_m \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Переход от субдифференциала к гиподифференциалу обусловлен тем фактом, что гиподифференциальное отображение, в отличие от субдифференциального, является непрерывным в метрике Хаусдорфа [38], что позволит гарантировать сходимость в некотором смысле рассматриваемого численного метода.

Известно [38], что необходимым, а в случае выпуклости и достаточным условием минимума функционала (3.6) в точке $[z^*, u^*]$ в терминах гиподифференциала является включение

$$[0, 0_{n+m}] \in dI(z^*, u^*), \quad (3.13)$$

где $[0, 0_{n+m}]$ — нулевой элемент пространства $\mathbb{R} \times P_n[0, T] \times P_m[0, T]$.

Найдём минимальный по норме гипогradient $g \in dI(z, u)$, то есть решим задачу

$$\begin{aligned} \|g^*(z, u)\|_{\mathbb{R} \times L_{n+m}^2}^2 = & \min_{g \in dI(z, u)} \|g(z, u)\|^2 = \min_{\beta_i \in [0, 1], i=1, n+1} \left\| \left[0, \bar{s}_1(z, u), s_2(z, u) \right] + \right. \\ & + \sum_{i=1}^n \left\{ \beta_i \left[\bar{\psi}_i(z) - \psi_i(z), e_i, 0_m \right] + (1 - \beta_i) \left[-\bar{\psi}_i(z) - \psi_i(z), -e_i, 0_m \right] \right\} + \\ & \left. + \beta_{n+1} \left[\int_0^T \langle u(t), u(t) \rangle dt - C - I_3(u), 0_n, 2u \right] + (1 - \beta_{n+1}) \left[-I_3(u), 0_n, 0_m \right] \right\|_{\mathbb{R} \times L_{n+m}^2}^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Задача (3.14) представляет собой задачу квадратичного программирования при наличии линейных ограничений и может быть решена одним из известных методов [89], который сходится за конечное число шагов. Обозначим β_i^* , $i = \overline{1, n+1}$, её решение.

Вектор-функция

$$\begin{aligned} G(z, u) := & \left[\bar{s}_1(z, u), s_2(z, u) \right] + \sum_{i=1}^n \left\{ \beta_i^* \left[e_i, 0_m \right] + (1 - \beta_i^*) \left[-e_i, 0_m \right] \right\} + \\ & + \beta_{n+1}^* \left[0_n, 2u \right] + (1 - \beta_{n+1}^*) \left[0_n, 0_m \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

состоит из последних $n + m$ компонент наименьшего по норме гипогradientа функционала $I(z, u)$ в точке $[z, u]$. Если $\|G(z, u)\|_{L_{n+m}^2} > 0$, то вектор-функция $-\frac{G(z, u)}{\|G(z, u)\|_{L_{n+m}^2}}$ представляет собой (нормированное) направление гиподифференциального спуска [188] функционала $I(z, u)$ в точке $[z, u]$.

Опишем следующий метод гиподифференциального спуска [188] для поиска стационарных точек функционала $I(z, u)$. Фиксируем произвольную точку $[z_1, u_1] \in P_n[0, T] \times P_m[0, T]$. Пусть уже построена точка $[z_k, u_k] \in P_n[0, T] \times P_m[0, T]$. Если выполнено необходимое условие минимума (3.13) (на практике с некоторой выбранной точностью $\bar{\varepsilon}$ в смысле $\mathbb{R} \times L^2$ -нормы (см. задачу (3.14))), то точка $[z_k, u_k]$ является стационарной точкой функционала $I(z, u)$, и процесс прекращается. В противном случае положим

$$[z_{k+1}, u_{k+1}] = [z_k, u_k] - \alpha_k G_k,$$

где $G_k = G(z_k, u_k)$ определяется формулой (3.15) (при этом x_k соответствует z_k по формуле (3.5)), а величина α_k является решением следующей задачи одномерной минимизации

$$\min_{\alpha \geq 0} I([z_k, u_k] - \alpha G_k) = I([z_k, u_k] - \alpha_k G_k).$$

На практике одномерная минимизация осуществляется на выбранном отрезке $[0, \bar{\alpha}]$. Тогда

$$I(z_{k+1}, u_{k+1}) \leq I(z_k, u_k).$$

Предположим, что последовательность $\{dI(z_k, u_k)\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена (по $\mathbb{R} \times L^2$ -норме), а гиподифференциал dI равномерно аппроксимирует функционал I на множестве Лебега $\mathcal{L}_I(z_1, u_1) = \{[z, u] \in P_n[0, T] \times P_m[0, T] \mid I(z, u) \leq I(z_1, u_1)\}$. Если последовательность $\{[z_k, u_k]\}$, $k = 1, 2, \dots$, бесконечна, то при сделанных предположениях метод гиподифференциального спуска сходится [188] в следующем смысле:

$$\|g^*(z_k, u_k)\|_{\mathbb{R} \times L^2_{n+m}[0, T]} = \sqrt{(g_1^*(z_k, u_k))^2 + \int_0^T G_k^2(z_k, u_k, t) dt} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty, \quad (3.16)$$

где g_1 — первая компонента вектор-функции g .

Если последовательность $\{[z_k, u_k]\}$, $p = 1, 2, \dots$, конечна, то последняя её точка является стационарной точкой функционала $I(z, u)$ по построению.

Замечание 3.5.1. Требуемое свойство равномерной аппроксимации функционала его гиподифференциалом тесно связано [189] с понятием липшицевой аппроксимации функционала своим гиподифференциалом, которое в свою очередь связано [189] с липшицевостью гиподифференциального отображения. Последнее же свойство аналогично липшицевости градиентов, являющейся стандартным предположением [285] при обосновании сходимости классических численных методов оптимизации.

Замечание 3.5.2. Строго говоря, условие минимума (3.13), сам метод гиподифференциального спуска и соотношение сходимости (3.16) формулируются в работе [188] для функционала, заданного на другом пространстве, однако из доказательств этой статьи видно, что данные результаты сохраняют силу для случая пространства, рассматриваемого в диссертации.

3.6 Численные примеры

Приведём примеры задач построения программного управления, в которых метод субдифференциального спуска привёл к (приближённой) точке минимума функционала (3.6).

Пример 3.6.1. Пусть задана система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_3 x_1 + u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 + u_3. \end{cases}$$

Такие системы возникают из динамических уравнений Эйлера при моделировании движения спутника [60]. При этом движение спутника относительно его центра инерции рассматривается как вращение твёрдого тела вокруг неподвижной точки. Управления u_1, u_2, u_3 характеризуют воздействие, которое оказывают на спутник установленные на нём двигатели.

В начальный момент спутник вращается с заданной угловой скоростью

$$x(0) = [1, 0, 0].$$

Требуется так управлять двигателями, чтобы за фиксированное время T погасить угловые скорости тела:

$$x_T = [0, 0, 0].$$

При этом ресурсы управления ограничены:

$$\int_0^T \langle u(t), u(t) \rangle dt \leq C.$$

Положим $T = 1, C = 2$. В данной задаче известно точное решение [60]. Для заданных граничных условий оно имеет вид

$$\int_0^1 u_1^*(t) dt = -1, \quad u_2^*(t) = 0, \quad u_3^*(t) = 0,$$

$$z_1^*(t) = u_1^*(t), \quad z_2^*(t) = 0, \quad z_3^*(t) = 0.$$

В Таблице 3.6.1 приведены результаты работы метода субдифференциального спуска. В качестве начального приближения взята точка $z_1(t) = [0, 1, 1]$, $u_1(t) = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, а тогда $x_1(t) = [1, t, t]$. Вычисления производились символьно в пакете Maple 12, Serial Number 2011-11-11. Все интегралы в данном примере вычислялись аналитически (точно). Решение задачи одномерной минимизации осуществлялось на отрезке $[0, 1]$ (т. е. здесь $\bar{\gamma} = 1$) в Maple встроенной функцией `fminbnd()` с её внутренними параметрами по умолчанию. Согласно

документации, для решения этой задачи в Maple используется метод золотого сечения в сочетании с параболической интерполяцией [55]. Вспомогательные задачи квадратичного программирования были решены в Maple встроенной функцией QPSolve() с её внутренними параметрами по умолчанию. Согласно документации, для решения этой задачи в Maple используется метод активных множеств [89]. В данном случае параметр $\bar{\epsilon}$ игнорировался и оценка погрешности решения проводилась исходя из значения функционала. Из данной таблицы видно, что на 6-й итерации ошибка по функционалу не превышает величины 2×10^{-2} .

Таблица 3.6.1. Пример 3.6.1: результаты работы МСС

k	I_k	$\left \int_0^1 u_{1k}(t) dt + 1 \right $	$\ u_{2k}\ _{L_1^2}$	$\ u_{3k}\ _{L_1^2}$	$\ z_{1k} - u_{1k}\ _{L_1^2}$	$\ z_{2k}\ _{L_1^2}$	$\ z_{3k}\ _{L_1^2}$	$\ G_k\ _{L_{n+m}^2}$
1	3.475	1.5	0.5	0.5	0.5	1	1	1.19563
2	1.3084	0.92529	0.53818	0.53818	0.46418	0.29504	0.29504	1.56704
3	0.65596	0.8052	0.51081	0.51081	0.67117	0.08815	0.08815	1.09889
4	0.45822	0.17146	0.31975	0.31975	0.65721	0.07178	0.07178	0.9434
5	0.24556	0	0.19245	0.19245	0.6458	0.06178	0.06178	0.73868
6	0.0146	0	0.03525	0.03525	0.12328	0.03544	0.03544	0.12321

Пример 3.6.2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\sin(x_1) + u, \\ \dot{x}_3 = u. \end{cases}$$

Такие системы возникают в нелинейном варианте задачи об успокоении маятника [21].

Требуется перевести систему из заданного начального положения

$$x_0 = [1, 0, 0]$$

в заданное конечное состояние

$$x_T = [0, 0, \pi].$$

При этом на управление накладывается ограничение

$$\int_0^T \langle u(t), u(t) \rangle dt \leq C.$$

Положим $T = 2\pi$, $C = \pi$.

В Таблице 3.6.2 приведены результаты вычислений. В качестве начального приближения взята точка $u_1(t) = \frac{1}{2}$, $z_1(t) = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, а тогда $x_1(t) = [1 + \frac{1}{2}t, \frac{1}{2}t, \frac{1}{2}t]$. Вычисления производились символьно в пакете Maple 12, Serial Number 2011-11-11. Все интегралы в данном примере вычислялись в Maple встроенной функцией `evalf(int())` с её внутренними параметрами по умолчанию. Согласно документации, для решения этой задачи в Maple используется метод Гаусса-Конрода [13]. Решение задачи одномерной минимизации осуществлялось на отрезке $[0, 1]$ (т. е. здесь $\bar{\gamma} = 1$) в Maple встроенной функцией `fminbnd()` с её внутренними параметрами по умолчанию. Согласно документации, для решения этой задачи в Maple используется метод золотого сечения в сочетании с параболической интерполяцией [55]. Вспомогательные задачи квадратичного программирования были решены в Maple встроенной функцией `QPSolve()` с её внутренними параметрами по умолчанию. Согласно документации, для решения этой задачи в Maple используется метод активных множеств [89]. В данном случае параметр $\bar{\varepsilon}$ игнорировался и оценка погрешности решения проводилась исходя из значения функционала. Из данной таблицы видно, что на 10-й итерации ошибка по функционалу не превышает величины 3×10^{-2} .

Таблица 3.6.2. Пример 3.6.2: результаты работы МСС

k	$I(z_k, u_k)$	$\ G(z_k, u_k)\ _{L_{n+m}^2}$
1	15.04	6.4908
2	4.67627	5.31843
5	0.26627	0.8763
10	0.02361	0.0683

Замечание 3.6.1. Как было отмечено выше, в случае выбора шага по правилу метода наименьшего спуска, гарантировать сходимость метода субдифференциального спуска (МСС) нельзя. Однако известные обстоятельства позволяют говорить о том, что «как правило» данный метод приводит к стационарной точке минимизируемого функционала. См. также Замечание 1.3.1. На практике рекомендуется использовать МСС, поскольку он менее вычислительно затратный, чем метод гиподифференциального спуска (МГС). В рассмотренных примерах МГС показал аналогичные результаты.

Глава 4

Оптимальное управление гладкими системами с гладким функционалом Лагранжа

В данной главе рассматривается классическая задача оптимального управления в форме Лагранжа как со свободным, так и с (частично) закреплённым правым концом. Как подынтегральная функция целевого функционала, так и правая часть системы обыкновенных дифференциальных уравнений считаются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми по фазовым переменным, их производным и по управлениям. Допустимыми считаются кусочно-непрерывные управления, ограниченные по L^2 -норме некоторой заданной величиной. Исходная задача сводится к задаче безусловной минимизации некоторого негладкого функционала; при этом выписаны условия, при которых построенная функция - точная штрафная. Доказывается субдифференцируемость данного функционала; в терминах субдифференциала и гиподифференциала для него найдены необходимые условия минимума. Выделен класс задач, для которых эти условия оказываются и достаточными. На основании полученных условий к рассматриваемой задаче применяются метод субдифференциального спуска и метод гиподифференциального спуска (указана “слабая” сходимость последнего к стационарной точке функционала). В ходе реализации данного метода также осуществляется поиск вектор-функции, которая имеет смысл известной в оптимальном управлении “сопряжённой” переменной, за счёт идеи решения вспомогательной оптимизационной задачи; данная идея позволяет преодолеть принципиальные трудности в построении направления наискорейшего спуска минимизируемого функционала. Приведены примеры реализации применяемых методов. Дополнительно указана задача минимизации максимума конечного

числа интегральных функционалов (с дифференциальными свойствами их интеграндов, аналогичными тем, что рассмотрены в исходной задаче), в которой применим разработанный метод; рассмотрен соответствующий численный пример. См. [220], [232].

4.1 Постановка задачи

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t). \quad (4.1)$$

Требуется подобрать такое управление $u^* \in P_m[0, T]$, удовлетворяющее имеющемуся интегральному ограничению

$$\int_0^T \langle u(t), u(t) \rangle dt \leq 1, \quad (4.2)$$

которое переводит систему (4.1) из заданного начального положения

$$x(0) = x_0 \quad (4.3)$$

в заданное конечное состояние

$$x(T) = x_T \quad (4.4)$$

и вместе с соответствующей траекторией $x^* \in C_n[0, T]$ доставляет минимум функционалу

$$\mathcal{I}(x, u) = \int_0^T f_0(x(t), \dot{x}(t), u(t), t) dt. \quad (4.5)$$

В системе (4.1) $t \in [0, T]$, где $T > 0$ — заданный конечный момент времени, $f(x, u, t)$ — вещественная n -мерная вектор-функция, $x(t)$ — n -мерная вектор-функция фазовых координат, которую будем считать кусочно-непрерывно дифференцируемой на $[0, T]$, $u(t)$ — m -мерная вектор-функция управлений, которую считаем кусочно-непрерывной на промежутке $[0, T]$. Предполагаем $f(x, u, t)$ непрерывно дифференцируемой по x и u и непрерывной на своей области определения.

Если $t_0 \in [0, T)$ — точка разрыва вектор-функции u , то для определённости полагаем $u(t_0) = \lim_{t \downarrow t_0} u(t)$. В точке T считаем, что $u(T) = \lim_{t \uparrow T} u(t)$.

В функционале (4.5) $f_0(x, \dot{x}, u, t)$ — вещественная скалярная функция, которую считаем непрерывно дифференцируемой по x , \dot{x} и u и непрерывной на своей области определения.

Считаем, что решение поставленной задачи существует.

Далее в этой главе иногда будем писать f вместо $f(x, u, t)$ (или вместо $f(x(t), u(t), t)$) и f_0 вместо $f_0(x, \dot{x}, u, t)$ (или вместо $f_0(x(t), \dot{x}(t), u(t), t)$).

4.2 Сведение к вариационной задаче

Положим $z(t) = \dot{x}(t)$, при этом $z \in P_n[0, T]$ по предположению. С учётом (4.3) имеем

$$x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau. \quad (4.6)$$

Введём в рассмотрение пространство

$$X = \left(P_n[0, T] \times P_m[0, T], \|\cdot\|_{L_n^2[0, T] \times L_m^2[0, T]} \right).$$

Введём в рассмотрение функционалы

$$\varphi(z, u) = \sqrt{\int_0^T \left(z(t) - f\left(x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau, u(t), t\right) \right)^2 dt},$$

$$\psi_i(z) = |\bar{\psi}_i(z)|, \quad \bar{\psi}_i(z) = x_{0i} + \int_0^T z_i(t) dt - x_{Ti}, \quad i = \overline{1, n},$$

где x_{0i} — i -ая компонента вектора x_0 , x_{Ti} — i -ая компонента вектора x_T , $i = \overline{1, n}$, $0 < \lambda < \infty$.

Обозначим

$$I(z, u) = \int_0^T f_0\left(x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau, z(t), u(t), t\right) dt.$$

На пространстве X построим функционал

$$F_{\lambda_1}(z, u) = I(z, u) + \lambda_1 \sum_{i=1}^n \psi_i(z), \quad (4.7)$$

В статье [197] приведены условия, при которых вместо исходной задачи можно рассматривать задачу минимизации функционала (4.7) при ограничениях (4.1), (4.2) при достаточно большом значении λ_1 . Здесь мы не приводим подробно данные условия. Упомянув “negative tangent angle” и “(S)” условия, отметим что, грубо говоря, первое исключает множества достижимости в точке x_T , которые слишком “пористы” или слишком “волнисты” в окрестности этой точки, а второе гарантирует, что точка лежащая достаточно близко к конечной точке некоторой траектории соответствующей некоторому управлению может быть достигнута с помощью небольшого изменения этого управления и такого что соответствующая изменённому управлению траектория остаётся в достаточно малой (в некотором смысле) окрестности исходной. “Negative tangent angle” и “(S)” свойства требуются для удовлетворения условия аналогичному 2) из Теоремы 1.2.1. Ограниченность штрафной функции $F_{\lambda_1}(z, u)$ снизу и липшицевость функционала $I(z, u)$ на соответствующем множестве (предполагается также ограниченность этого множества (ср. условие (**)) в Теореме 1.2.1)) требуются для выполнения условий аналогичных 1, 3) соответственно из Теоремы 1.2.1. Наконец, условие существования

глобального решения (ср. условие (*) в Теореме 1.2.1) гарантировано сделанным предположением существования решения в исходной задаче оптимального управления. Требуемые условия описаны на качественном уровне, точные формулировки можно найти в [197]. Далее предполагаем, что все требуемые условия выполнены и в функционале $F_{\lambda_1}(z, u)$ зафиксировано достаточно большое (для справедливости соответствующей теоремы) число λ_1 .

На пространстве X построим функционал

$$F_{\lambda_1, \lambda_2}(z, u) = I(z, u) + \lambda_1 \sum_{i=1}^n \psi_i(z) + \lambda_2 \varphi(z, u), \quad (4.8)$$

В статье [198] приведены условия, при которых вместо задачи минимизации функционала (4.7) при ограничениях (4.1), (4.2) можно рассматривать задачу минимизации функционала (4.8) при ограничениях (4.2) при достаточно большом значении λ_2 . Здесь мы не приводим подробно данные условия. Ограниченность штрафной функции $F_{\lambda_1, \lambda_2}(z, u)$ снизу и липшицевость функционала $I(z, u)$ на соответствующем множестве (предполагается также ограниченность этого множества (ср. условие (**)) в Теореме 1.2.1)) требуется для выполнения условий аналогичных 1, 3) соответственно из Теоремы 1.2.1. Наконец, условие существования глобального решения (ср. условие (*) в Теореме 1.2.1) гарантировано сделанным предположением существования решения в исходной задаче оптимального управления. Требуемые условия описаны на качественном уровне, точные формулировки можно найти в [198]. Далее предполагаем, что все требуемые условия выполнены и в функционале $F_{\lambda_1, \lambda_2}(z, u)$ зафиксировано достаточно большое (для справедливости соответствующей теоремы) число λ_2 .

На пространстве X построим функционал

$$F_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}(z, u) = I(z, u) + \lambda_1 \sum_{i=1}^n \psi_i(z) + \lambda_2 \varphi(z, u) + \lambda_3 \max \left\{ 0, \int_0^T \langle u(t), u(t) \rangle dt - 1 \right\}. \quad (4.9)$$

Обозначим

$$\Phi(z, u) = \varphi(z, u) + \sum_{i=1}^n \psi_i(z) + \max \left\{ 0, \int_0^T \langle u(t), u(t) \rangle dt - 1 \right\}. \quad (4.10)$$

Нетрудно видеть, что функционал (4.10) неотрицателен для всех $z \in P_n[0, T]$ и для всех $u \in P_m[0, T]$ и обращается в ноль в точке $[\bar{z}, \bar{u}] \in P_n[0, T] \times P_m[0, T]$ тогда и только тогда, когда вектор-функция \bar{u} удовлетворяет ограничению (4.2), а вектор-функция

$$\bar{x}(t) = x_0 + \int_0^t \bar{z}(\tau) d\tau$$

удовлетворяет системе (4.1) при $u(t) = \bar{u}(t)$ и ограничениям (4.3), (4.4).

Введём множества

$$\Omega = \left\{ [z, u] \in P_n[0, T] \times P_m[0, T] \mid \Phi(z, u) = 0 \right\},$$

$$\Omega_\delta = \left\{ [z, u] \in P_n[0, T] \times P_m[0, T] \mid \Phi(z, u) < \delta \right\},$$

где $\delta > 0$ — некоторое число. Тогда

$$\Omega_\delta \setminus \Omega = \left\{ [z, u] \in P_n[0, T] \times P_m[0, T] \mid 0 < \Phi(z, u) < \delta \right\}.$$

Опираясь на Теорему 1.2.1 и используя ту же технику, что и в [97], можно показать, что верна следующая теорема.

Теорема 4.2.1. Пусть найдётся такое положительное число $\lambda_0 < \infty$, что $\forall \lambda_3 > \lambda_0$ существует точка $[z(\lambda_3), u(\lambda_3)] \in P_n[0, T] \times P_m[0, T]$, для которой $F_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}(z(\lambda_3), u(\lambda_3)) = \inf_{[z, u] \in P_n[0, T] \times P_m[0, T]} F_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}(z, u)$. Пусть множество $\mathcal{L}_{\bar{\lambda}_0}(\bar{z}, \bar{u}) = \left\{ [z, u] \in X \mid F_{\lambda_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_0}(z, u) \leq F_{\lambda_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_0}(\bar{z}, \bar{u}) \right\}$ ограничено. Пусть также функционал $I(z, u)$ является липшицевым на множестве $K_\varepsilon = \left\{ [z, u] \mid \text{dist}([z, u], \Omega_\delta \setminus \Omega \cap \mathcal{L}_{\bar{\lambda}_0}(\bar{z}, \bar{u})) < \varepsilon \right\}$ для некоторого фиксированного $\varepsilon > 0$. Тогда функционал (4.9) будет точной штрафной функцией.

Таким образом, в исходной задаче последовательно были сняты ограничения на правом конце, в виде дифференциальных связей и на управление, причём при сделанных предположениях все построенные функции являются точными штрафными. Далее будем считать, что в функционале (4.9) числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ фиксированы и взяты достаточно большими (для справедливости соответствующих теорем). При таком наборе этих чисел исходная задача эквивалентна задаче минимизации функционала (4.9) на всём пространстве. Далее в тексте для простоты изложения заменим эти штрафные коэффициенты одним фиксированным (достаточно большим) числом λ (хотя в действительности эти числа могут быть различны).

Тогда с учётом сделанного замечания о “едином” штрафном параметре λ точную штрафную функцию (4.9) можно переписать в виде:

$$F_\lambda(z, u) = I(z, u) + \lambda \Phi(z, u). \quad (4.11)$$

Итак, будем минимизировать функционал $F_\lambda(z, u)$ на пространстве X .

Если $[z^*, u^*] \in P_n[0, T] \times P_m[0, T]$ — точка глобального минимума функционала $F_\lambda(z, u)$, то оптимальное движение

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t z^*(\tau) d\tau$$

соответствует искомому оптимальному управлению u^* .

Очевидно, что если некоторые координаты на правом конце свободны, то нужно положить соответствующие слагаемые в функционале $I_2(z)$ равными нулю. Также очевидно, что если отсутствует ограничение на управление, нужно убрать соответствующее слагаемое. В обоих случаях сохраним для функционала $I(z, u)$ его обозначение.

4.3 Необходимые условия минимума

Введём множества

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \left\{ z \in P_n[0, T] \mid x_0 + \int_0^T z(t)dt = x_T \right\}, \\ \Omega_2 &= \left\{ u \in P_m[0, T] \mid \int_0^T \langle u(t), u(t) \rangle dt \leq 1 \right\}, \\ \Omega_3 &= \left\{ [z, u] \in P_n[0, T] \times P_m[0, T] \mid \varphi(z, u) = 0 \right\}.\end{aligned}$$

Ниже нам также потребуются индексные множества

$$\begin{aligned}I_0(z) &= \left\{ i \in \{1, \dots, n\} \mid \bar{\psi}_i(z) = 0 \right\}, \\ I_-(z) &= \left\{ i \in \{1, \dots, n\} \mid \bar{\psi}_i(z) < 0 \right\}, \\ I_+(z) &= \left\{ i \in \{1, \dots, n\} \mid \bar{\psi}_i(z) > 0 \right\}\end{aligned}$$

и следующие множества управлений

$$\begin{aligned}U_0 &= \left\{ u \in P_m[0, T] \mid \int_0^T \langle u(t), u(t) \rangle dt - 1 = 0 \right\}, \\ U_- &= \left\{ u \in P_m[0, T] \mid \int_0^T \langle u(t), u(t) \rangle dt - 1 < 0 \right\}, \\ U_+ &= \left\{ u \in P_m[0, T] \mid \int_0^T \langle u(t), u(t) \rangle dt - 1 > 0 \right\}.\end{aligned}$$

Используя ту же технику, что и в [53, 97] нетрудно убедиться в справедливости следующей теоремы.

Теорема 4.3.1. При $[z, u] \notin \Omega_3$ функционал $F_\lambda(z, u)$ субдифференцируем, и его “субдифференциал” в точке $[z, u]$ выражается по формуле

$$\begin{aligned}\partial F_\lambda(z, u) &= \left\{ \left[\int_t^T \frac{\partial f_0(x(\tau), z(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \right. \right. \\ &+ \lambda \left(w(z, u) - \int_t^T \left(\frac{\partial f(x(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} \right)' w(z, u, \tau) d\tau + \sum_{i \in I_0(z)} \omega_i e_i + \sum_{j=1}^n \mu_j e_j \right), \\ &\left. \left. \frac{\partial f_0}{\partial u} + \lambda \left(- \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)' w(z, u) + 2\nu u \right) \right] \mid \right. \\ &\left. \omega_i \in [-1, 1], i \in I_0(z), \right. \\ &\left. \mu_j = 0, j \in I_0(z), \mu_j = 1, j \in I_+(z), \mu_j = -1, j \in I_-(z), \right. \\ &\left. \nu \in [0, 1], u \in U_0, \nu = 1, u \in U_+, \nu = 0, u \in U_-, \right. \\ &\left. w(z, u) = \frac{z - f(x, u, t)}{\varphi(z, u)} \right\}.\end{aligned}\tag{4.12}$$

Теорема 4.3.2. При $[z, u] \in \Omega_3$ функционал $F_\lambda(z, u)$ субдифференцируем, и его “субдифференциал” в точке $[z, u]$ выражается по формуле

$$\begin{aligned} \partial F_\lambda(z, u) = \left\{ \left[\int_t^T \frac{\partial f_0(x(\tau), z(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda \left(v - \int_t^T \left(\frac{\partial f(x(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} \right)' v(\tau) d\tau + \sum_{i \in I_0(z)} \omega_i e_i + \sum_{j=1}^n \mu_j e_j \right), \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\partial f_0}{\partial u} + \lambda \left(- \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)' v + 2\nu u \right) \right] \mid \right. \\ \left. \omega_i \in [-1, 1], i \in I_0(z), \right. \\ \left. \mu_j = 0, j \in I_0(z), \mu_j = 1, j \in I_+(z), \mu_j = -1, j \in I_-(z), \right. \\ \left. \nu \in [0, 1], u \in U_0, \nu = 1, u \in U_+, \nu = 0, u \in U_-, \right. \\ \left. v \in L_n^2[0, T], \|v\|_{L_n^2[0, T]} \leq 1 \right\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Доказательство. Слабая* компактность множества $\partial F_\lambda(z, u)$ в пространстве $(P_n[0, T] \times P_m[0, T], \|\cdot\|_{L_n^2[0, T] \times L_m^2[0, T]})^*$ следует из его слабой компактности (в этом пространстве) вследствие определений этих топологий [295].

Докажем слабую компактность множества $\partial F_\lambda(z, u)$ в пространстве $(P_n[0, T] \times P_m[0, T], \|\cdot\|_{L_n^2[0, T] \times L_m^2[0, T]})^*$. Заметим, что вследствие Замечания 5.3.1 достаточно рассмотреть образ множества $\partial F_\lambda(z, u)$ в пространстве $L_n^2[0, T] \times L_m^2[0, T]$ (при изометрически изоморфном отображении из $(P_n[0, T] \times P_m[0, T], \|\cdot\|_{L_n^2[0, T] \times L_m^2[0, T]})^*$ в $L_n^2[0, T] \times L_m^2[0, T]$). Для простоты обозначим так же это множество $\partial F_\lambda(z, u)$. Итак, наша цель состоит в доказательстве слабой компактности множества $\partial F_\lambda(z, u)$ в пространстве $L_n^2[0, T] \times L_m^2[0, T]$. Пространство $L_n^2[0, T] \times L_m^2[0, T]$ рефлексивно [203], поэтому множество там слабо компактно тогда и только тогда оно ограничено по норме и слабо замкнуто [203] в этом пространстве.

Ограниченность множества $\partial F_\lambda(z, u)$ по норме очевидно следует из его структуры с учётом неравенства Гёльдера и предположений, сделанных относительно функций f и f_0 и их переменных (z, u) .

Заметим, что как можно напрямую проверить по определению, множество $\partial F_\lambda(z, u)$ выпуклое. Если множество $\partial F_\lambda(z, u)$ замкнуто в сильной топологии пространства $L_n^2[0, T] \times L_m^2[0, T]$, то в силу его отмеченной выпуклости оно будет также замкнуто [203] в слабой топологии пространства $L_n^2[0, T] \times L_m^2[0, T]$. Поэтому докажем сейчас замкнутость множества $\partial F_\lambda(z, u)$ по норме пространства $L_n^2[0, T] \times L_m^2[0, T]$.

Пространство $L_n^2[0, T] \times L_m^2[0, T]$ рефлексивно, следовательно шар $B(0, 1)$ в нём [285] слабо компактен, поэтому [203] слабо замкнут и ограничен. Поскольку шар $B(0, 1)$ ограничен, он также будет [203] слабо относительно секвенциально компактен, поэтому можно выделить из последовательности $\{v_n\}_{n=1}^\infty$, $v_n \in B(0, 1)$, подпоследовательность $\{v_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, слабо сходящуюся к элементу \bar{v} , принадлежащему множеству $B(0, 1)$ в силу его слабой замкнутости.

Рассмотрим первую компоненту субдифференциала.

Обозначим

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(t) = & \int_t^T \frac{\partial f_0(x(\tau), z(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \\ & + \lambda \left(\bar{v} - \int_t^T \left(\frac{\partial f(x(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} \right)' \bar{v}(\tau) d\tau + \sum_{i \in I_0(z)} \omega_i e_i + \sum_{j=1}^n \mu_j e_j \right). \end{aligned}$$

Имеем, что $\bar{\eta} \in \partial F_\lambda(z, u)$ по построению.

Пусть $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ обозначает некоторую последовательность из множества $\partial F_\lambda(z, u)$, которая сильно сходится (в пространстве $L_n^2[0, T] \times L_m^2[0, T]$) к элементу $\bar{w} \in L_n^2[0, T] \times L_m^2[0, T]$.

Имеем

$$\begin{aligned} w_n(t) = & \int_t^T \frac{\partial f_0(x(\tau), z(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \\ & + \lambda \left(v_n - \int_t^T \left(\frac{\partial f(x(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} \right)' v_n(\tau) d\tau + \sum_{i \in I_0(z)} \omega_i e_i + \sum_{j=1}^n \mu_j e_j \right), \end{aligned}$$

где $v_n \in B(0, 1)$, $n = \overline{1, \infty}$. Наша цель — проверить, что $\bar{w} \in \partial F_\lambda(z, u)$. Обозначим

$$\begin{aligned} w_{n_k}(t) = & \int_t^T \frac{\partial f_0(x(\tau), z(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \\ & + \lambda \left(v_{n_k} - \int_t^T \left(\frac{\partial f(x(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} \right)' v_{n_k}(\tau) d\tau + \sum_{i \in I_0(z)} \omega_i e_i + \sum_{j=1}^n \mu_j e_j \right), \quad k = \overline{1, \infty}. \end{aligned}$$

Покажем, что w_{n_k} слабо сходится (в пространстве $L_n^2[0, T] \times L_m^2[0, T]$) к $\bar{\eta}$. Мы предположили, что w_{n_k} сильно сходится к \bar{w} (как подпоследовательность последовательности $\{w_n\}_{n=1}^\infty$), поэтому в данном случае [203] w_{n_k} слабо сходится к \bar{w} . В силу единственности [203] слабого предела в пространстве $L_n^2[0, T] \times L_m^2[0, T]$ будем иметь $\bar{w} = \bar{\eta}$, но $\bar{\eta} \in \partial F_\lambda(z, u)$, поэтому получим $\bar{w} \in \partial F_\lambda(z, u)$, что и докажет теорему в этом случае.

Таким образом, наша цель сейчас — доказать что w_{n_k} слабо сходится (в пространстве $L_n^2[0, T] \times L_m^2[0, T]$) к элементу $\bar{\eta}$. Рассмотрим только слагаемое $g_{n_k}(t) = \int_t^T \left(\frac{\partial f(x(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} \right)' v_{n_k}(\tau) d\tau$ из выражения для w_{n_k} , $k = 1, 2, \dots$ (Остальные слагаемые качественно проще и аналогичны для рассмотрения.)

Имеем

$$\|g_{n_k}\|_{L_n^\infty[0, T]} \leq \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_{L_n^2[0, T]} \|v_{n_k}\|_{L_n^2[0, T]} = \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_{L_n^2[0, T]} < C_1 \sqrt{T} < \infty,$$

поскольку вектор-функция $\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}$ непрерывна и $x \in C_n[0, T]$, $u \in P_n[0, T]$ по предположению. Следовательно, последовательность $g_{n_k}(t)$ равномерно ограничена на $[0, T]$ по норме $C_n[0, T]$.

При фиксированных $t_1, t_2 \in [0, T]$ (не умаляя общности предположим $t_1 < t_2$) имеем

$$|g_{n_k}(t_2) - g_{n_k}(t_1)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f(x(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} \right)' v_{n_k}(\tau) d\tau \right| \leq \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_{L_n^2} \|v_{n_k}\|_{L_n^2} \leq C_2 \sqrt{t_2 - t_1} < \infty,$$

поскольку вектор-функция $\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}$ непрерывна и $x \in C_n[0, T]$, $u \in P_n[0, T]$ по предположению. Следовательно, последовательность $g_{n_k}(t)$ равномерно непрерывна на $[0, T]$ в смысле метрики $C_n[0, T]$.

В силу двух последних утверждений получаем [203], что существует подпоследовательность $g_{n_{k_l}}(t)$ последовательности $g_{n_k}(t)$, которая равномерно сходится на $[0, T]$ к некоторой вектор-функции $\bar{g} \in C_n[0, T]$. Для фиксированного $t \in [0, T]$ определим отображение

$$p_t(\tau) = \begin{cases} \left(\frac{\partial f(x(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} \right)', & \tau \in [t, T], \\ 0, & \tau \notin [t, T]. \end{cases}$$

Тогда для любого $t \in [0, T]$ имеем $(p_t, v_{n_{k_l}}) = g_{n_{k_l}}(t) \rightarrow \bar{g}(t)$ при $l \rightarrow \infty$. С другой стороны для любого $t \in [0, T]$ будет $(p_t, v_{n_{k_l}}) \rightarrow (p_t, \bar{v})$ при $l \rightarrow \infty$. В силу единственности [203] слабого предела для каждого $t \in [0, T]$ получаем

$$\bar{g}(t) = (p_t, \bar{v}) = \int_t^T \left(\frac{\partial f(x(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} \right)' \bar{v}(\tau) d\tau.$$

Наконец, для любого $p \in L_n^2[0, T]$ из неравенства Гёльдера и свойств интеграла Лебега имеем

$$|(p, g_{n_{k_l}}) - (p, \bar{g})| = \left| \int_0^T \langle p(t), g_{n_{k_l}}(t) - \bar{g}(t) \rangle dt \right| \leq \|g_{n_{k_l}} - \bar{g}\|_{L_n^\infty[0, T]} \|p\|_{L_n^2[0, T]}.$$

Выражение в правой части этого неравенства стремится к нулю при $l \rightarrow \infty$ в силу равномерной сходимости последовательности $g_{n_{k_l}}$, $l = 1, 2, \dots$, к вектор-функции \bar{g} , поэтому окончательно $(p, g_{n_{k_l}}) \rightarrow (p, \bar{g})$ при $l \rightarrow \infty$.

Как уже было отмечено, рассмотрение остальных слагаемых в выражении для w_{n_k} , $k = 1, 2, \dots$, более простое и может быть произведено аналогично. Итак слабая сходимость последовательности $w_{n_{k_l}}$, $l = 1, 2, \dots$, к элементу \bar{w} доказана.

Рассмотрение второй компоненты субдифференциала аналогично.

Теорема доказана. □

Следствие 4.3.1. Если $[z, u] \in \Omega_3$, $z \in \Omega_1$, $u \in \Omega_2$, то функционал $F_\lambda(z, u)$ субдифференцируем, и его “субдифференциал” в точке $[z, u]$ выражается по формуле

$$\begin{aligned} \partial F_\lambda(z, u) = \left\{ \left[\int_t^T \frac{\partial f_0(x(\tau), z(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda \left(v - \int_t^T \left(\frac{\partial f(x(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} \right)' v(\tau) d\tau + \sum_{i \in I_0(z)} \omega_i e_i \right), \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\partial f_0}{\partial u} + \lambda \left(- \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)' v + 2\nu u \right) \right] \mid \right. \\ \left. \omega_i \in [-1, 1], \quad i = \overline{1, n}, \right. \\ \left. \nu \in [0, 1], \quad u \in U_0, \quad \nu = 0, \quad u \in U_-, \right. \\ \left. v \in L_n^2[0, T], \quad \|v\|_{L_n^2[0, T]} \leq 1 \right\}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Лемма 4.3.1. Если система (4.1) линейна по фазовым переменным x и по управлению u (матрицы при фазовом векторе и управлении, а также неоднородность в правой части считаются непрерывными), а функционал $I(z, u)$ является выпуклым, то функционал $F_\lambda(z, u)$ тоже выпуклый.

Доказательство. Представим функционал (4.11) в виде

$$F_\lambda(z, u) = I(z, u) + \lambda\varphi(z, u) + \lambda\psi(z) + \lambda\chi(u),$$

где $I(z, u)$, $\varphi(z, u)$, $\psi(z)$, $\chi(u)$ — соответствующие слагаемые из правой части равенства (4.11) (см. также (4.10)). Функционалы $\psi(z)$ и $\chi(u)$ выпуклы как максимумы выпуклых функционалов [37]. Функционал $I(z, u)$ выпуклый по условию. Покажем выпуклость функционала $\varphi(z, u)$ (в случае линейности системы (4.1)).

Пусть система (4.1) имеет вид

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + c(t),$$

где $A(t)$ — $n \times n$ -матрица, $B(t)$ — $n \times m$ -матрица, $c(t)$ — n -мерная вектор-функция. Как было отмечено в условии леммы, считаем $A(t)$, $B(t)$, $c(t)$ вещественными и непрерывными на $[0, T]$. Пусть $z_1, z_2 \in P_n[0, T]$,

$u_1, u_2 \in P_m[0, T]$, $\alpha \in (0, 1)$. Обозначим $\bar{\varphi}(z, u) = z - f\left(x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau, u, t\right)$. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi^2\left(\alpha(z_1, u_1) + (1 - \alpha)(z_2, u_2)\right) &= \left\| \alpha z_1(t) + (1 - \alpha)z_2(t) - \right. \\ &- A(t)\left(x_0 + \int_0^t \alpha z_1(\tau) + (1 - \alpha)z_2(\tau) d\tau\right) - B(t)\left(\alpha u_1(t) + (1 - \alpha)u_2(t)\right) - c(t) \left. \right\|_{L_n^2}^2 = \\ &= \left\| \alpha \bar{\varphi}(z_1, u_1) + (1 - \alpha)\bar{\varphi}(z_2, u_2) \right\|_{L_n^2}^2 = \alpha^2 \int_0^T \bar{\varphi}^2(z_1, u_1, t) dt + \\ &+ 2\alpha(1 - \alpha) \int_0^T \langle \bar{\varphi}(z_1, u_1, t), \bar{\varphi}(z_2, u_2, t) \rangle dt + (1 - \alpha)^2 \int_0^T \bar{\varphi}^2(z_2, u_2, t) dt, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \left(\alpha\varphi(z_1, u_1) + (1 - \alpha)\varphi(z_2, u_2)\right)^2 &= \alpha^2 \int_0^T \bar{\varphi}^2(z_1, u_1, t) dt + \\ &+ 2\alpha(1 - \alpha) \sqrt{\int_0^T \bar{\varphi}^2(z_1, u_1, t) dt \int_0^T \bar{\varphi}^2(z_2, u_2, t) dt} + (1 - \alpha)^2 \int_0^T \bar{\varphi}^2(z_2, u_2, t) dt. \end{aligned} \quad (4.16)$$

В силу неравенства Гёльдера для всех выбранных z_1, z_2, u_1, u_2 будет

$$\int_0^T \langle \bar{\varphi}(z_1, u_1, t), \bar{\varphi}(z_2, u_2, t) \rangle dt \leq \sqrt{\int_0^T \bar{\varphi}^2(z_1, u_1, t) dt} \sqrt{\int_0^T \bar{\varphi}^2(z_2, u_2, t) dt},$$

поэтому из (4.15) и (4.16) получаем, что

$$\varphi^2\left(\alpha(z_1, u_1) + (1 - \alpha)(z_2, u_2)\right) \leq \left(\alpha\varphi(z_1, u_1) + (1 - \alpha)\varphi(z_2, u_2)\right)^2. \quad (4.17)$$

Так как $\varphi\left(\alpha(z_1, u_1) + (1 - \alpha)(z_2, u_2)\right) \geq 0$, $\alpha\varphi(z_1, u_1) + (1 - \alpha)\varphi(z_2, u_2) \geq 0$, то из неравенства (4.17) $\forall z_1, z_2, u_1, u_2$ и $\alpha \in (0, 1)$ следует

$$\varphi\left(\alpha(z_1, u_1) + (1 - \alpha)(z_2, u_2)\right) \leq \alpha\varphi(z_1, u_1) + (1 - \alpha)\varphi(z_2, u_2),$$

что и доказывает выпуклость функционала $\varphi(z, u)$.

Теперь остаётся заметить, что функционал $F_\lambda(z, u)$ является выпуклым [37] как сумма выпуклых функционалов с положительными коэффициентами.

Лемма доказана. □

Известно [195], что необходимым, а в случае выпуклости и достаточным условием минимума функционала (4.11) в точке $[z^*, u^*]$ в терминах субдифференциала является условие

$$0_{n+m} \in \partial F_\lambda(z^*, u^*), \quad (4.18)$$

где 0_{n+m} — нулевой элемент пространства $L_n^2[0, T] \times L_m^2[0, T]$. Отсюда с учётом Леммы 4.3.1 заключаем, что справедлива

Теорема 4.3.3. Пусть выполнены условия Теоремы 4.2.1 и соответствующие предположения для функционалов (4.7), (4.8). Для того чтобы управление u^* , удовлетворяющее условию (4.2), переводило систему (4.1) из начального положения (4.3) в конечное состояние (4.4) и вместе с соответствующей траекторией x^* доставляло минимум функционалу (4.5), необходимо, а в случае линейности системы (4.1) и выпуклости функционала (4.5) и достаточно, чтобы

$$0_{n+m} \in \partial F_\lambda(z^*, u^*), \quad (4.19)$$

где выражение для субдифференциала $\partial F_\lambda(z, u)$ выписано в (4.14).

Замечание 4.3.1. Строго говоря, условия минимума (4.18) и (4.27) (ниже) формулируются в работе [195] для функционала, заданного на другом пространстве, однако из доказательства этой статьи видно, что данный результат сохраняет силу для случая пространства, рассматриваемого в диссертации.

Замечание 4.3.2. Условие минимума (4.19) может быть использовано для получения “линеаризованной” “интегральной” формы (см. структуру субдифференциала (4.14)) принципа максимума Понтрягина как классического в оптимальном управлении условия оптимальности. Однако поскольку этот результат оказывается слабее известного принципа максимума в общей форме, мы не останавливаемся подробно на теоретическом аспекте разрабатываемого подхода, а сосредоточимся далее на практическом использовании полученного условия минимума (4.19) для построения численных методов решения исходной задачи.

4.4 Метод субдифференциального спуска

Найдём минимальный по норме субградиент $h \in \partial F_\lambda(z, u)$, то есть решим задачу

$$\|h^*(z, u)\|_{L_{n+m}^2}^2 = \min_{h \in \partial F_\lambda(z, u)} \|h(z, u)\|_{L_{n+m}^2}^2. \quad (4.20)$$

Зафиксируем точку $[z, u] \in P_n[0, T] \times P_m[0, T]$ и рассмотрим два случая.

А. Пусть $\varphi(z, u) > 0$. В этом случае

$$\begin{aligned} & \min_{h \in \partial F_\lambda(z, u)} \|h(z, u)\|_{L_{n+m}^2}^2 = \\ & = \min_{\omega_i, i \in I_0(z), \nu} \left[\int_0^T \left(s_1(z, u, t) + \lambda \sum_{i \in I_0} \omega_i e_i \right)^2 dt + \int_0^T \left(s_2(z, u, t) + 2\lambda \nu u(t) \right)^2 dt \right], \end{aligned} \quad (4.21)$$

где

$$s_1(z, u) = \bar{s}_1(z, u) + \lambda \sum_{j=1}^n \mu_j e_j,$$

$$\begin{aligned}\bar{s}_1(z, u) &= \int_t^T \frac{\partial f_0(x(\tau), z(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \\ &+ \lambda \left(w(z, u) - \int_t^T \left(\frac{\partial f(x(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} \right)' w(z, u, \tau) d\tau \right), \\ s_2(z, u) &= \frac{\partial f_0}{\partial u} - \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)' w(z, u),\end{aligned}$$

а величины ω_i , $i \in I_0(z)$, μ_j , $j = \overline{1, n}$, ν и вектор-функция $w(z, u)$ определены в (4.12).

Задача (4.21) представляет собой задачу квадратичного программирования при наличии линейных ограничений и может быть решена одним из известных методов [89], который сходится за конечное число шагов. Обозначим ω_i^* , $i \in I_0(z)$, ν^* её решение.

Тогда вектор-функция

$$G(z, u) := h^*(z, u) = \left[s_1(z, u) + \lambda \sum_{i \in I_0(z)} \omega_i^* e_i, s_2(z, u) + 2\lambda \nu^* u \right] \quad (4.22)$$

является наименьшим по норме субградиентом функционала $F_\lambda(z, u)$ в точке $[z, u]$ в данном случае (при $\varphi(z, u) > 0$). Если $\|G(z, u)\|_{L_{n+m}^2} > 0$, то вектор-функция $-G(z, u)/\|G(z, u)\|_{L_{n+m}^2}$ является (нормированным) направлением субдифференциального спуска [37] функционала $F_\lambda(z, u)$ в точке $[z, u]$.

Б. Пусть $\varphi(z, u) = 0$. В этом случае

$$\begin{aligned}\min_{h \in \partial F_\lambda(z, u)} \|h(z, u)\|_{L_{n+m}^2}^2 &:= \min_{v, \omega, \nu} \|\bar{h}(v, \omega, \nu)\|_{L_{n+m}^2}^2 = \\ &= \min_{v, \omega, \nu} \left[\|h_1(v, \omega, \nu)\|_{L_n^2}^2 + \|h_2(v, \omega, \nu)\|_{L_m^2}^2 \right] = \\ &= \min_{v, \omega, \nu} \left[\int_0^T \left(\int_t^T \frac{\partial f_0(x(\tau), z(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \right. \right. \\ &+ \lambda \left(v(t) - \int_t^T \left(\frac{\partial f(x(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} \right)' v(\tau) d\tau + \sum_{i \in I_0} \omega_i e_i + \sum_{j=1}^n \mu_j e_j \right) \left. \right)^2 dt + \\ &\left. + \int_0^T \left(\frac{\partial f_0}{\partial u} + \lambda \left(- \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)' v(t) + 2\nu u(t) \right) \right)^2 dt \right],\end{aligned} \quad (4.23)$$

где $\bar{h} = [h_1, h_2]$, вектор $\omega \in \mathbb{R}^{|I_0|}$ состоит из компонент ω_i , $i \in I_0$, а величины ω_i , $i \in I_0$, μ_j , $j = \overline{1, n}$, ν и вектор-функция v определены в (4.13).

Обозначим

$$\Psi(v, \omega, \bar{\nu}) = \max \left\{ 0, \|v\|_{L_n^2[0, T]}^2 - 1 \right\} + \max \left\{ 0, \bar{\nu}^2 - 1 \right\} + \sum_{i \in I_0} \max \left\{ 0, \omega_i^2 - 1 \right\}.$$

На пространстве $Y = \left(L_n^2[0, T] \times \mathbb{R}^{|I_0|} \times \mathbb{R}, \|\cdot\|_{L_n^2[0, T] \times \mathbb{R}^{|I_0|} \times \mathbb{R}} \right)$ составим функционал

$$H_\mu(v, \omega, \bar{\nu}) = \|\bar{h}(v, \omega, \bar{\nu})\|_{L_{n+m}^2}^2 + \mu \Psi(v, \omega, \bar{\nu}), \quad (4.24)$$

где $\bar{\nu} = 2\nu - 1$ (для удобства обозначение для вектор-функции \bar{h} сохранено).

Замечание 4.4.1. Отметим, что функционал $H_\mu(v, \omega, \bar{v})$ является выпуклым [37] как сумма минимизируемого выпуклого функционала (расстояния до субдифференциала, который является выпуклым множеством) и выпуклых функционалов (с положительными коэффициентами), учитывающих соответствующие ограничения.

Введём множества

$$\begin{aligned}\bar{\Omega} &= \left\{ [v, \omega, \bar{v}] \in L_n^2[0, T] \times \mathbb{R}^{|I_0|} \times \mathbb{R} \mid \Psi(v, \omega, \bar{v}) = 0 \right\}, \\ \bar{\Omega}_\delta &= \left\{ [v, \omega, \bar{v}] \in L_n^2[0, T] \times \mathbb{R}^{|I_0|} \times \mathbb{R} \mid \Psi(v, \omega, \bar{v}) < \delta \right\}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\bar{\Omega}_\delta \setminus \bar{\Omega} = \left\{ [v, \omega, \bar{v}] \in L_n^2[0, T] \times \mathbb{R}^{|I_0|} \times \mathbb{R} \mid 0 < \Psi(v, \omega, \bar{v}) < \delta \right\}.$$

Также введём следующие множества

$$\begin{aligned}V_0 &= \left\{ v \in L_n^2[0, T] \mid \int_0^T \langle v(t), v(t) \rangle dt - 1 = 0 \right\}, \\ V_- &= \left\{ v \in L_n^2[0, T] \mid \int_0^T \langle v(t), v(t) \rangle dt - 1 < 0 \right\}, \\ V_+ &= \left\{ v \in L_n^2[0, T] \mid \int_0^T \langle v(t), v(t) \rangle dt - 1 > 0 \right\}, \\ N_0 &= \left\{ \bar{v} \in \mathbb{R} \mid \bar{v}^2 - 1 = 0 \right\}, \\ N_- &= \left\{ \bar{v} \in \mathbb{R} \mid \bar{v}^2 - 1 < 0 \right\}, \\ N_+ &= \left\{ \bar{v} \in \mathbb{R} \mid \bar{v}^2 - 1 > 0 \right\}, \\ W_{i_0} &= \left\{ \omega_i \in \mathbb{R} \mid \omega_i^2 - 1 = 0 \right\}, \\ W_{i_-} &= \left\{ \omega_i \in \mathbb{R} \mid \omega_i^2 - 1 < 0 \right\}, \\ W_{i_+} &= \left\{ \omega_i \in \mathbb{R} \mid \omega_i^2 - 1 > 0 \right\},\end{aligned}$$

где $i \in I_0$.

Лемма 4.4.1. Пусть найдётся такое положительное число $\mu_0 < \infty$, что $\forall \mu > \mu_0$ существует точка $[v(\mu), \omega(\mu), \bar{v}(\mu)] \in L_n^2[0, T] \times \mathbb{R}^{|I_0|} \times \mathbb{R}$, для которой $H_\mu(v(\mu), \omega(\mu), \bar{v}(\mu)) = \inf_{[v, \omega, \bar{v}] \in L_n^2[0, T] \times \mathbb{R}^{|I_0|} \times \mathbb{R}} H_\mu(v, \omega, \bar{v})$. Пусть также функционал $\bar{h}(v, \omega, \bar{v})$ является липшицевым на множестве $\bar{\Omega}_\delta \setminus \bar{\Omega}$. Тогда функционал (4.24) будет точной штрафной функцией.

Таким образом, при сделанных в Лемме 4.4.1 предположениях существует такое число $0 < \mu^* < \infty$, что $\forall \mu > \mu^*$ задача (4.23) эквивалентна задаче минимизации функционала (4.24) на всём пространстве. Далее будем считать, что в функционале (4.24) число μ фиксировано и выполнено условие $\mu > \mu^*$.

Лемма 4.4.2. Функционал (4.24) субдифференцируем, и его “субдифференциал” в точке $[v, \omega, \bar{v}]$ выражается по формуле

$$\begin{aligned} \partial H_\mu(v, \omega, \bar{v}) = \left\{ \left[h_v + 2\mu\xi v, h_{\omega_1} + 2\mu\zeta_1\omega_1, \dots, h_{\omega_{|I_0|}} + 2\mu\zeta_{|I_0|}\omega_{|I_0|}, h_{\bar{v}} + 2\mu\zeta_0\bar{v} \right] \mid \right. \\ \left. \begin{aligned} \xi \in [0, 1], v \in V_0, \xi = 1, v \in V_+, \xi = 0, v \in V_-, \\ \zeta_0 \in [0, 1], \bar{v} \in N_0, \zeta_0 = 1, \bar{v} \in N_+, \zeta_0 = 0, \bar{v} \in N_-, \\ \zeta_i \in [0, 1], \omega_i \in W_{i_0}, \zeta_i = 1, \omega_i \in W_{i_+}, \zeta_i = 0, \omega_i \in W_{i_-}, i \in I_0 \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Вычислим следующие вектор-функции, входящие в формулу (4.25).

$$h_v = h_{1v} + h_{2v} := h_{1v}(v, \omega) + h_{2v}(\bar{v}) = h_v(v, \omega, \bar{v}),$$

где

$$\begin{aligned} h_{1v}(v, \omega) = 2\lambda \left[\lambda v - \lambda \int_t^T \left(\frac{\partial f(x(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} \right)' v(\tau) d\tau - \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \int_0^t v(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \int_0^t \int_\tau^T \left(\frac{\partial f(x(\xi), u(\xi), \xi)}{\partial x} \right)' v(\xi) d\xi d\tau + \right. \\ \left. + \int_t^T \frac{\partial f_0(x(\tau), z(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \lambda \left(E - t \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\sum_{i \in I_0} \omega_i e_i + \sum_{j=1}^n \mu_j e_j \right) - \right. \\ \left. - \frac{\partial f}{\partial x} \int_0^t \int_\tau^T \frac{\partial f_0(x(\xi), z(\xi), u(\xi), \xi)}{\partial x} d\xi + \frac{\partial f_0(x(\tau), z(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial z} d\tau \right], \end{aligned}$$

$$h_{2v}(\bar{v}) = -2\lambda \frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial f_0}{\partial u} + \lambda \left(- \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)' v + \bar{v} u + u \right) \right),$$

$$h_{\omega_i} := h_{\omega_i}(v, \omega, \bar{v}) = 2\lambda \int_0^T \left\langle q(v, \omega, \bar{v}, t) + \lambda \omega_i e_i, e_i \right\rangle dt, \quad i \in I_0,$$

где

$$\begin{aligned} q(v, \omega, \bar{v}) = \int_t^T \frac{\partial f_0(x(\tau), z(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \\ + \lambda \left(v - \int_t^T \left(\frac{\partial f(x(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} \right)' v(\tau) d\tau + \sum_{k \in I_0 \setminus \{i\}} \omega_k e_k + \sum_{j=1}^n \mu_j e_j \right), \end{aligned}$$

$$h_{\bar{v}} := h_{\bar{v}}(v, \omega, \bar{v}) = 2\lambda \int_0^T \left\langle r(v, \omega, \bar{v}, t) + \lambda \bar{v} u(t), u(t) \right\rangle dt,$$

где

$$r(v, \omega, \bar{v}) = \frac{\partial f_0}{\partial u} + \lambda \left(- \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)' v + u \right).$$

Следствие 4.4.1. Если $\|v\|_{L_n^2[0,T]} \leq 1$, $|\omega_i| \leq 1$, $i \in I_0$, $|\bar{v}| \leq 1$, то функционал (4.24) субдифференцируем, и его “субдифференциал” в точке $[v, \omega, \bar{v}]$ выражается по формуле

$$\begin{aligned} \partial H_\mu(v, \omega, \bar{v}) = \left\{ \left[h_v + 2\mu\xi v, h_{\omega_1} + 2\mu\zeta_1\omega_1, \dots, h_{\omega_{|I_0|}} + 2\mu\zeta_{|I_0|}\omega_{|I_0|}, h_{\bar{v}} + 2\mu\zeta_0\bar{v} \right] \mid \right. \\ \left. \begin{aligned} \xi \in [0, 1], v \in V_0, \xi = 0, v \in V_-, \\ \zeta_0 \in [0, 1], \bar{v} \in N_0, \zeta_0 = 0, \bar{v} \in N_-, \\ \zeta_i \in [0, 1], \omega_i \in W_{i0}, \zeta_i = 0, \omega_i \in W_{i-}, i \in I_0 \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

С учётом Замечания 4.4.1 заключаем, что справедлива

Лемма 4.4.3. Для того чтобы точка $[v^*, \omega^*, \bar{v}^*] \in L_n^2[0, T] \times \mathbb{R}^{|I_0|} \times \mathbb{R}$ доставляла минимум функционалу (4.24) необходимо и достаточно, чтобы

$$0_{n+|I_0|+1} \in \partial H_\mu(v^*, \omega^*, \bar{v}^*), \quad (4.27)$$

где $0_{n+|I_0|+1}$ — нулевой элемент пространства $L_n^2[0, T] \times \mathbb{R}^{|I_0|} \times \mathbb{R}$, а выражение для субдифференциала $\partial H_\mu(v, \omega, \bar{v})$ выписано в (4.26).

Найдём минимальный по норме субградиент $\bar{h} \in \partial H_\mu(v, \omega, \bar{v})$, то есть решим задачу

$$\begin{aligned} \|\bar{h}^*(v, \omega, \bar{v})\|_{L_n^2 \times \mathbb{R}^{|I_0|} \times \mathbb{R}}^2 &= \min_{\bar{h} \in \partial H_\mu(v, \omega, \bar{v})} \|\bar{h}(v, \omega, \bar{v})\|_{L_n^2 \times \mathbb{R}^{|I_0|} \times \mathbb{R}}^2 = \\ &= \min_{\xi, \zeta_0, \zeta_i, i \in I_0} \left[\int_0^T \left(h_v(v, \omega, \bar{v}, t) + 2\mu\xi v(t) \right)^2 dt + \sum_{i \in I_0} \left(h_{\omega_i} + 2\mu\zeta_i \omega_i \right)^2 + \left(h_{\bar{v}} + 2\mu\zeta_0 \bar{v} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (4.28)$$

где величины $\xi, \zeta_0, \zeta_i, i \in I_0$, определены в (4.25).

Задача (4.28) представляет собой задачу квадратичного программирования при наличии линейных ограничений и может быть решена одним из известных методов [89], который сходится за конечное число шагов. Обозначим $\xi^*, \zeta_0^*, \zeta_i^*, i \in I_0$, её решение. Заметим, что задача (4.28) заведомо имеет решение исходя из более общих соображений: как известно, норма слабо полунепрерывна снизу, следовательно она достигает минимума [203] на субдифференциале как на слабо компактном множестве. (Существование направления спуска в случае нарушения условия (4.27) гарантируется также следствием из теоремы Хана-Банаха [285] опять таки в силу слабой компактности субдифференциала.)

Тогда вектор-функция

$$\bar{G}(v, \omega, \bar{v}) := \bar{h}^*(v, \omega, \bar{v}) = \left[h_v + 2\mu\xi^* v, h_{\omega_1} + 2\mu\zeta_1^* \omega_1, \dots, h_{\omega_{|I_0|}} + 2\mu\zeta_{|I_0|}^* \omega_{|I_0|}, h_{\bar{v}} + 2\mu\zeta_0^* \bar{v} \right] \quad (4.29)$$

является наименьшим по норме субградиентом функционала $H_\mu(v, \omega, \bar{v})$ в точке $[v, \omega, \bar{v}]$. Если $\|\bar{G}(v, \omega, \bar{v})\|_{L_n^2 \times \mathbb{R}^{|I_0|} \times \mathbb{R}} > 0$, то вектор-функция $-\bar{G}(v, \omega, \bar{v})/\|\bar{G}(v, \omega, \bar{v})\|_{L_n^2 \times \mathbb{R}^{|I_0|} \times \mathbb{R}}$ представляет собой (нормированное) направление субдифференциального спуска [37] функционала $H_\mu(v, \omega, \bar{v})$ в точке $[v, \omega, \bar{v}]$.

Опишем следующий метод субдифференциального спуска для поиска точек минимума функционала $H_\mu(v, \omega, \bar{v})$. Фиксируем произвольную точку $[v_{(1)}, \omega_{(1)}, \bar{v}_{(1)}] \in L_n^2[0, T] \times \mathbb{R}^{|I_0|} \times \mathbb{R}$. Пусть уже построена точка $[v_{(k)}, \omega_{(k)}, \bar{v}_{(k)}] \in L_n^2[0, T] \times \mathbb{R}^{|I_0|} \times \mathbb{R}$. Если выполнено условие минимума (4.27) (на практике с некоторой выбранной точностью $\bar{\varepsilon}$ в смысле $L^2 \times \mathbb{R}$ -нормы (см. задачу (4.28))), то точка $[v_{(k)}, \omega_{(k)}, \bar{v}_{(k)}]$ является точкой минимума функционала $H_\mu(v, \omega, \bar{v})$, и процесс прекращается. В противном случае положим

$$[v_{(k+1)}, \omega_{(k+1)}, \bar{v}_{(k+1)}] = [v_{(k)}, \omega_{(k)}, \bar{v}_{(k)}] - \alpha_k \bar{G}_k,$$

где $\bar{G}_k = \bar{G}(v_{(k)}, \omega_{(k)}, \bar{v}_{(k)})$ определяется формулой (4.29), а величина α_k является решением следующей задачи одномерной минимизации

$$\min_{\alpha \geq 0} H_\mu([v_{(k)}, \omega_{(k)}, \bar{v}_{(k)}] - \alpha \bar{G}_k) = H_\mu([v_{(k)}, \omega_{(k)}, \bar{v}_{(k)}] - \alpha_k \bar{G}_k).$$

На практике одномерная минимизация осуществляется на выбранном отрезке $[0, \bar{\alpha}]$. Тогда

$$H_\mu(v_{(k+1)}, \omega_{(k+1)}, \bar{v}_{(k+1)}) \leq H_\mu(v_{(k)}, \omega_{(k)}, \bar{v}_{(k)}).$$

Если последовательность $\{[v_{(k)}, \omega_{(k)}, \bar{v}_{(k)}]\}$, $k = 1, 2, \dots$, конечна, то последняя её точка является точкой минимума функционала $H_\mu(v, \omega, \bar{v})$ по построению. Если же последовательность $\{[v_{(k)}, \omega_{(k)}, \bar{v}_{(k)}]\}$, $k = 1, 2, \dots$, бесконечна, то описанный процесс может и не привести к точке минимума функционала $H_\mu(v, \omega, \bar{v})$, поскольку субдифференциальное отображение $[v, \omega, \bar{v}] \rightarrow \partial H_\mu(v, \omega, \bar{v})$ не является непрерывным в метрике Хаусдорфа [37].

Обозначим v^* , ω^* , ν^* (приближённое) решение задачи (4.23) (Если выполнены условия Леммы 4.4.1, то искать его можно описанным в предыдущем абзаце методом.)

Тогда вектор-функция

$$\begin{aligned} G(z, u) := h^*(z, u) = & \left[\int_t^T \frac{\partial f_0(x(\tau), z(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \right. \\ & + \lambda \left(v^* - \int_t^T \left(\frac{\partial f(x(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} \right)' v^*(\tau) d\tau + \sum_{i \in I_0} \omega_i^* e_i + \sum_{j=1}^n \mu_j e_j \right), \\ & \left. \frac{\partial f_0}{\partial u} + \lambda \left(- \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)' v^* + 2\nu^* u \right) \right] \end{aligned} \quad (4.30)$$

является наименьшим по норме субградиентом функционала $F_\lambda(z, u)$ в точке $[z, u]$ в данном случае (при $\varphi(z, u) = 0$). Если $\|G(z, u)\|_{L_{n+m}^2} > 0$, то вектор-функция $-G(z, u)/\|G(z, u)\|_{L_{n+m}^2}$ является (нормированным) направлением субдифференциального спуска функционала $F_\lambda(z, u)$ в точке $[z, u]$.

Замечание 4.4.2. Строго говоря, в работе [37] рассматривается лишь конечномерное пространство, однако из доказательства этой книги видно (см. также [46]), что формулы для направления наискорейшего спуска остаются верны для случая пространства, рассматриваемого в диссертации.

Заметим, что задачи (4.21) и (4.23) заведомо имеют решения исходя из более общих соображений: как известно, норма слабо полунепрерывна снизу, следовательно она достигает минимума [203] на субдифференциале как на слабо компактном множестве. (Существование направления спуска в случае нарушения условия (4.18) гарантируется также следствием из теоремы Хана-Банаха [285] опять таки в силу слабой компактности субдифференциала (см. д-во Теоремы 4.3.2).)

Таким образом, в пунктах А и Б решалась задача поиска направления субдифференциального спуска функционала $F_\lambda(z, u)$ в точке $[z, u]$. В случае $\varphi(z, u) > 0$ (пункт А) данная задача решается сравнительно просто, так как представляет собой задачу квадратичного программирования при наличии линейных ограничений. В случае $\varphi(z, u) = 0$ (пункт Б) помимо искоемых величин ω^* , ν^* требуется также найти вектор-функцию $v^*(t)$. Это более сложная задача, решать которую можно численными методами, например, методом субдифференциального спуска, как это описано в пункте Б. Таким образом, для построения направления субдифференциального спуска функционала $F_\lambda(z, u)$ в какой-либо точке потребовалось вычислить вектор-функцию $v^*(t)$, которая имеет смысл сопряжённой переменной, хорошо известной в задачах оптимального управления. С этой целью было предложено составить вспомогательную оптимизационную задачу и в конечном счёте решать задачу минимизации функционала (4.24). Данный подход позволяет (приблизённо) вычислить “сопряжённую” вектор-функцию и построить искомое направление спуска. Заметим также что на практике хорошо зарекомендовал себя способ поиска вектор-функции $v^*(t)$ в виде некоторого полинома наперёд заданной степени \overline{deg} и с неизвестными коэффициентами, на которые накладываются ограничения с тем чтобы обеспечить принадлежность искомой вектор-функции единичному L^2 -шару; такой подход позволяет заменить вычисления громоздкого субдифференциала формулы (4.25) более удобными и, кроме того, гарантировать что очередная точка $[z_{k+1}, u_{k+1}]$ “не покинет” пространство $P_n[0, T] \times P_m[0, T]$, тем самым обеспечив корректность метода в

этом смысле; недостатком такой замены является необходимость решения квадратичной задачи при квадратичных ограничениях (что видно из структуры минимизируемого функционала в (4.23)). Также отметим, что данный способ носит эвристический характер; строго обоснован полноценный метод, описанный выше. Кроме того, в качестве практического приёма также на некоторых итерациях осуществлялась аппроксимация искомых вектор-функций (которые могут “разрастаться” при реализации алгоритма и иметь очень громоздкий вид) интерполяционными полиномами Лагранжа наперёд заданной степени deg .

Итак, теперь можно описать метод субдифференциального спуска для поиска стационарных точек функционала $F_\lambda(z, u)$. Фиксируем произвольную точку $[z_1, u_1] \in P_n[0, T] \times P_m[0, T]$. Пусть уже построена точка $[z_k, u_k] \in P_n[0, T] \times P_m[0, T]$. Если выполнено условие минимума (4.19) (на практике с некоторой выбранной точностью $\bar{\varepsilon}$ в смысле L^2 -нормы (см. задачу (4.20))), то точка $[z_k, u_k]$ является стационарной точкой функционала $F_\lambda(z, u)$, и процесс прекращается. В противном случае положим

$$[z_{k+1}, u_{k+1}] = [z_k, u_k] - \alpha_k G_k,$$

где $G_k = G(z_k, u_k)$ берётся либо из формулы (4.22) при $\varphi(z, u) > 0$, либо из формулы (4.30) при $\varphi(z, u) = 0$ (при этом x_k соответствует z_k по формуле (4.6)). Величина α_k является решением задачи

$$\min_{\alpha \geq 0} F_\lambda([z_k, u_k] - \alpha G_k) = F_\lambda([z_k, u_k] - \alpha_k G_k).$$

На практике одномерная минимизация осуществляется на выбранном отрезке $[0, \bar{\alpha}]$. Тогда

$$F_\lambda(z_{k+1}, u_{k+1}) \leq F_\lambda(z_k, u_k).$$

Если последовательность $\{[z_k, u_k]\}$, $k = 1, 2, \dots$, конечна, то последняя её точка является стационарной точкой функционала $F_\lambda(z, u)$ по построению. Если же последовательность $\{[z_k, u_k]\}$, $k = 1, 2, \dots$, бесконечна, то описанный процесс может и не привести к стационарной точке функционала $F_\lambda(z, u)$, поскольку субдифференциальное отображение $[z, u] \rightarrow \partial F_\lambda(z, u)$ не является непрерывным в метрике Хаусдорфа [37].

4.5 Метод гиподифференциального спуска

Как уже отмечалось, описанный в предыдущем разделе метод субдифференциального спуска может не привести к стационарной точке функционала $F_\lambda(z, u)$ в силу разрывности субдифференциального отображения $\partial F_\lambda(z, u)$. Чтобы гарантировать сходимость в некотором смысле рассматриваемого численного метода, перейдём к гиподифференциальному отображению $dF_\lambda(z, u)$.

Пользуясь формулами гиподифференциального исчисления [38], можно показать, что имеют место следующие две теоремы.

Теорема 4.5.1. При $[z, u] \notin \Omega_3$ функционал $F_\lambda(z, u)$ гиподифференцируем, и его “гиподифференциал” в точке $[z, u]$ выражается по формуле

$$\begin{aligned} dF_\lambda(z, u) = & \left[0, \bar{s}_1(z, u), s_2(z, u) \right] + \\ & + \lambda \sum_{i=1}^n \text{co} \left\{ \left[\bar{\psi}_i(z) - \psi_i(z), e_i, 0_m \right], \left[-\bar{\psi}_i(z) - \psi_i(z), -e_i, 0_m \right] \right\} + \\ & + \lambda \text{co} \left\{ \left[\int_0^T \langle u(t), u(t) \rangle dt - 1 - \max \left\{ 0, \|u\|_{L_m^2[0, T]}^2 - 1 \right\}, 0_n, 2u \right], \left[-\max \left\{ 0, \|u\|_{L_m^2[0, T]}^2 - 1 \right\}, 0_n, 0_m \right] \right\}, \end{aligned}$$

где вектор-функции $\bar{s}_1(z, u)$ и $s_2(z, u)$ определены в задаче (4.21).

Теорема 4.5.2. При $[z, u] \in \Omega_3$ функционал $F_\lambda(z, u)$ гиподифференцируем, и его “гиподифференциал” в точке $[z, u]$ выражается по формуле

$$\begin{aligned} dF_\lambda(z, u) = & \left\{ \left[\lambda \left(\int_0^T \langle z(t) - f(x(t), u(t), t), v(t) \rangle dt - \varphi(z, u) \right), \right. \right. \\ & \left. \int_t^T \frac{\partial f_0(x(\tau), z(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \lambda \left(v - \int_t^T \left(\frac{\partial f(x(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} \right)' v(\tau) d\tau \right), \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\partial f_0}{\partial u} - \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)' v \right] + \right. \\ & \left. + \lambda \sum_{i=1}^n \text{co} \left\{ \left[\bar{\psi}_i(z) - \psi_i(z), e_i, 0_m \right], \left[-\bar{\psi}_i(z) - \psi_i(z), -e_i, 0_m \right] \right\} + \right. \quad (4.31) \\ & \left. + \lambda \text{co} \left\{ \left[\int_0^T \langle u(t), u(t) \rangle dt - 1 - \max \left\{ 0, \|u\|_{L_m^2[0, T]}^2 - 1 \right\}, 0_n, 2u \right], \right. \right. \\ & \left. \left. \left[-\max \left\{ 0, \|u\|_{L_m^2[0, T]}^2 - 1 \right\}, 0_n, 0_m \right] \right\} \mid v \in L_n^2[0, T], \|v\|_{L_n^2[0, T]} \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Известно [38], что необходимым, а в случае выпуклости и достаточным условием минимума функционала (4.11) в точке $[z^*, u^*]$ в терминах гиподифференциала является условие

$$[0, 0_{n+m}] \in dF_\lambda(z^*, u^*).$$

Отсюда с учётом Леммы 4.3.1 заключаем, что справедлива

Теорема 4.5.3. Пусть выполнены условия Теоремы 4.2.1 и соответствующие предположения для функционалов (4.7), (4.8). Для того чтобы управление u^* , удовлетворяющее

условию (4.2), переводило систему (4.1) из начального положения (4.3) в конечное состояние (4.4) и вместе с соответствующей траекторией x^* доставляло минимум функционалу (4.5), необходимо, а в случае линейности системы (4.1) и выпуклости функционала (4.5) и достаточно, чтобы

$$[0, 0_{n+m}] \in dF_\lambda(z^*, u^*), \quad (4.32)$$

где $[0, 0_{n+m}]$ — нулевой элемент пространства $\mathbb{R} \times L_n^2[0, T] \times L_m^2[0, T]$, а выражение для гиподифференциала $dF_\lambda(z, u)$ выписано в (4.31).

Найдём минимальный по норме гипогradient $g \in dF_\lambda(z, u)$, то есть решим задачу

$$\|g^*(z, u)\|_{\mathbb{R} \times L_{n+m}^2}^2 = \min_{g \in dF_\lambda(z, u)} \|g(z, u)\|_{\mathbb{R} \times L_{n+m}^2}^2. \quad (4.33)$$

Зафиксируем точку $[z, u] \in P_n[0, T] \times P_m[0, T]$ и рассмотрим два случая.

А. Пусть $\varphi(z, u) > 0$. В этом случае

$$\begin{aligned} \min_{g \in dF_\lambda(z, u)} \|g(z, u)\|_{\mathbb{R} \times L_{n+m}^2}^2 &= \min_{\beta_i \in [0, 1], i=1, n+1} \left\| \left[0, \bar{s}_1(z, u), s_2(z, u) \right] + \right. \\ &+ \lambda \sum_{i=1}^n \left\{ \beta_i \left[\bar{\psi}_i(z) - \psi_i(z), e_i, 0_m \right] + (1 - \beta_i) \left[-\bar{\psi}_i(z) - \psi_i(z), -e_i, 0_m \right] \right\} + \\ &+ \lambda \beta_{n+1} \left[\int_0^T \langle u(t), u(t) \rangle dt - 1 - \max \left\{ 0, \|u\|_{L_m^2}^2 - 1 \right\}, 0_n, 2u \right] + \\ &\left. + \lambda (1 - \beta_{n+1}) \left[-\max \left\{ 0, \|u\|_{L_m^2}^2 - 1 \right\}, 0_n, 0_m \right] \right\|_{\mathbb{R} \times L_{n+m}^2}^2. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Задача (4.34) представляет собой задачу квадратичного программирования при наличии линейных ограничений и может быть решена одним из известных методов [89], который сходится за конечное число шагов. Обозначим β_i^* , $i = \overline{1, n+1}$, её решение.

Вектор-функция

$$\begin{aligned} \bar{G}(z, u) &:= \left[\bar{s}_1(z, u), s_2(z, u) \right] + \lambda \sum_{i=1}^n \left\{ \beta_i^* \left[e_i, 0_m \right] + (1 - \beta_i^*) \left[-e_i, 0_m \right] \right\} + \\ &+ \lambda \beta_{n+1}^* \left[0_n, 2u \right] + \lambda (1 - \beta_{n+1}^*) \left[0_n, 0_m \right] \end{aligned} \quad (4.35)$$

состоит из последних $n + m$ компонент наименьшего по норме гипогradientа функционала $F_\lambda(z, u)$ в точке $[z, u]$ в данном случае (при $\varphi(z, u) > 0$). Если $\|\bar{G}(z, u)\|_{L_{n+m}^2} > 0$, то вектор-функция $-\bar{G}(z, u) / \|\bar{G}(z, u)\|_{L_{n+m}^2}$ является (нормированным) направлением гиподифференциального спуска [188] функционала $F_\lambda(z, u)$ в точке $[z, u]$.

Б. Пусть $\varphi(z, u) = 0$. В этом случае

$$\min_{g \in dF_\lambda(z, u)} \|g(z, u)\|_{\mathbb{R} \times L_{n+m}^2}^2 = \min_{v, \beta_i \in [0, 1], i=1, n+1} \left\| \left[\lambda \left(\int_0^T \langle z(t) - f(x(t), u(t), t), v(t) \rangle dt - \varphi(z, u) \right), \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& \int_t^T \frac{\partial f_0(x(\tau), z(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \lambda \left(v - \int_t^T \left(\frac{\partial f(x(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} \right)' v(\tau) d\tau \right), \frac{\partial f_0}{\partial u} - \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)' \Big] + \\
& + \lambda \sum_{i=1}^n \left\{ \beta_i \left[\bar{\psi}_i(z) - \psi_i(z), e_i, 0_m \right] + (1 - \beta_i) \left[-\bar{\psi}_i(z) - \psi_i(z), -e_i, 0_m \right] \right\} + \\
& + \lambda \beta_{n+1} \left[\int_0^T \langle u(t), u(t) \rangle dt - 1 - \max \left\{ 0, \|u\|_{L_m^2}^2 - 1 \right\}, 0_n, 2u \right] + \\
& + \lambda (1 - \beta_{n+1}) \left[-\max \left\{ 0, \|u\|_{L_m^2}^2 - 1 \right\}, 0_n, 0_m \right] \Big\|_{\mathbb{R} \times L_{n+m}^2}^2 = \\
& = \min_{v, \beta_i \in [0,1], i=\overline{1, n+1}} \left\| \left[\lambda \left(\int_0^T \langle z(t) - f(x(t), u(t), t), v(t) \rangle dt - \varphi(z, u) \right), \right. \right. \\
& \left. \left. \int_t^T \frac{\partial f_0(x(\tau), z(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \lambda \left(v - \int_t^T \left(\frac{\partial f(x(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} \right)' v(\tau) d\tau \right), \frac{\partial f_0}{\partial u} - \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)' v \right] + \right. \\
& \left. + \lambda \sum_{i=1}^n \left\{ \beta_i \left[2\bar{\psi}_i(z), 2e_i, 0_m \right] + \left[-\bar{\psi}_i(z) - \psi_i(z), -e_i, 0_m \right] \right\} + \right. \\
& \left. + \lambda \beta_{n+1} \left[\int_0^T \langle u(t), u(t) \rangle dt - 1, 0_n, 2u \right] + \lambda \left[-\max \left\{ 0, \|u\|_{L_m^2}^2 - 1 \right\}, 0_n, 0_m \right] \right\|_{\mathbb{R} \times L_{n+m}^2}^2,
\end{aligned}$$

где вектор-функция v определена в (4.31). Это выражение можно переписать так

$$\begin{aligned}
& \min_{g \in dF_\lambda(z, u)} \|g(z, u)\|_{\mathbb{R} \times L_{n+m}^2}^2 := \min_{v, \bar{\beta}_i \in [-1,1], i=\overline{1, n+1}} \|\bar{g}(v, \bar{\beta})\|_{\mathbb{R} \times L_{n+m}^2}^2 = \tag{4.36} \\
& = \min_{v, \bar{\beta}_i \in [-1,1], i=\overline{1, n+1}} \left[\|g_1(v, \bar{\beta})\|_{\mathbb{R}}^2 + \|g_2(v, \bar{\beta})\|_{L_n^2}^2 + \|g_3(v, \bar{\beta})\|_{L_m^2}^2 \right] = \\
& \min_{v, \bar{\beta}_i \in [-1,1], i=\overline{1, n+1}} \left[\left(\lambda \left(\int_0^T \langle z(t) - f(x(t), u(t), t), v(t) \rangle dt - \varphi(z, u) \right) + \lambda \sum_{i=1}^n \bar{\psi}_i(z) (\bar{\beta}_i + 1) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \lambda \sum_{i=1}^n (\bar{\psi}_i(z) + \psi_i(z)) + \frac{\lambda}{2} (\bar{\beta}_{n+1} + 1) \left(\int_0^T \langle u(t), u(t) \rangle dt - 1 \right) - \lambda \max \left\{ 0, \|u\|_{L_m^2}^2 - 1 \right\} \right)^2 + \right. \\
& \left. + \int_0^T \left(\int_t^T \frac{\partial f_0(x(\tau), z(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \lambda \left(v(t) - \int_t^T \left(\frac{\partial f(x(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} \right)' v(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^n \bar{\beta}_i e_i \right) \right)^2 dt + \right. \\
& \left. + \int_0^T \left(\frac{\partial f_0}{\partial u} - \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)' v(t) + \lambda \bar{\beta}_{n+1} u(t) + \lambda u(t) \right)^2 dt \right],
\end{aligned}$$

где $\bar{\beta} = 2\beta - 1$, вектор $\beta \in \mathbb{R}^{n+1}$ состоит из компонент β_i , $i = \overline{1, n+1}$, а вектор-функция v определена в (4.31).

Обозначим

$$\bar{\Psi}(v, \bar{\beta}) = \max \left\{ 0, \|v\|_{L_n^2}^2 - 1 \right\} + \sum_{i=1}^{n+1} \max \left\{ 0, \bar{\beta}_i^2 - 1 \right\}.$$

На пространстве $Y = \left(L_n^2[0, T] \times \mathbb{R}^{n+1}, \|\cdot\|_{L_n^2[0, T] \times \mathbb{R}^{n+1}} \right)$ составим функционал

$$\bar{H}_\mu(v, \bar{\beta}) = \|\bar{g}(v, \bar{\beta})\|_{\mathbb{R} \times L_{n+m}^2}^2 + \mu \bar{\Psi}(v, \bar{\beta}). \quad (4.37)$$

Замечание 4.5.1. Отметим, что функционал $\bar{H}_\mu(v, \bar{\beta})$ является выпуклым [37] как сумма минимизируемого выпуклого функционала (расстояния до гиподифференциала, который является выпуклым множеством) и выпуклых функционалов (с положительными коэффициентами), учитывающих соответствующие ограничения.

Введём множества

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\Omega}} &= \left\{ [v, \bar{\beta}] \in L_n^2[0, T] \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \bar{\Psi}(v, \bar{\beta}) = 0 \right\}, \\ \bar{\bar{\Omega}}_\delta &= \left\{ [v, \bar{\beta}] \in L_n^2[0, T] \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \bar{\Psi}(v, \bar{\beta}) < \delta \right\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\bar{\bar{\Omega}}_\delta \setminus \bar{\bar{\Omega}} = \left\{ [v, \bar{\beta}] \in L_n^2[0, T] \times \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 < \bar{\Psi}(v, \bar{\beta}) < \delta \right\}.$$

Также введём следующие множества

$$\begin{aligned} B_{i0} &= \left\{ \bar{\beta}_i \in \mathbb{R} \mid \bar{\beta}_i^2 - 1 = 0 \right\}, \\ B_{i-} &= \left\{ \bar{\beta}_i \in \mathbb{R} \mid \bar{\beta}_i^2 - 1 < 0 \right\}, \\ B_{i+} &= \left\{ \bar{\beta}_i \in \mathbb{R} \mid \bar{\beta}_i^2 - 1 > 0 \right\}, \end{aligned}$$

где $i \in \{1, \dots, n+1\}$.

Лемма 4.5.1. Пусть найдётся такое положительное число $\mu_0 < \infty$, что $\forall \mu > \mu_0$ существует точка $[v(\mu), \bar{\beta}(\mu)] \in L_n^2[0, T] \times \mathbb{R}^{n+1}$, для которой $H_\mu(v(\mu), \bar{\beta}(\mu)) = \inf_{[v, \bar{\beta}] \in L_n^2[0, T] \times \mathbb{R}^{n+1}} H_\mu(v, \bar{\beta})$. Пусть также функционал $\bar{g}(v, \bar{\beta})$ является липшицевым на множестве $\bar{\bar{\Omega}}_\delta \setminus \bar{\bar{\Omega}}$. Тогда функционал (4.37) будет точной штрафной функцией.

Таким образом, при сделанных в Лемме 4.5.1 предположениях существует такое число $0 < \mu^* < \infty$, что $\forall \mu > \mu^*$ задача (4.36) эквивалентна задаче минимизации функционала (4.37) на всём пространстве. Далее будем считать, что в функционале (4.37) число μ фиксировано и выполнено условие $\mu > \mu^*$.

Лемма 4.5.2. Функционал (4.37) гиподифференцируем, и его “гиподифференциал” в точке $[v, \bar{\beta}]$ выражается по формуле

$$\begin{aligned} d\bar{H}_\mu(v, \bar{\beta}) &= \left[0, g_v, g_{\bar{\beta}_1}, \dots, g_{\bar{\beta}_{n+1}} \right] + \\ &+ \mu \left[\text{co} \left\{ \left[\|v\|_{L_n^2}^2 - 1 - \max \left\{ 0, \|v\|_{L_n^2}^2 - 1 \right\}, 2v, 0_{n+1} \right], \left[-\max \left\{ 0, \|v\|_{L_n^2}^2 - 1 \right\}, 0_n, 0_{n+1} \right] \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \text{co} \left\{ \left[\bar{\beta}_1^2 - 1 - \max \left\{ 0, \bar{\beta}_1^2 - 1 \right\}, 0_n, 2\bar{\beta}_1, 0_n \right], \left[-\max \left\{ 0, \bar{\beta}_1^2 - 1 \right\}, 0_n, 0_{n+1} \right] \right\} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \text{co} \left\{ \left[\bar{\beta}_{n+1}^2 - 1 - \max \left\{ 0, \bar{\beta}_{n+1}^2 - 1 \right\}, 0_n, 0_n, 2\bar{\beta}_{n+1} \right], \left[-\max \left\{ 0, \bar{\beta}_{n+1}^2 - 1 \right\}, 0_n, 0_{n+1} \right] \right\} \right]. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Вычислим следующие вектор-функции, входящие в формулу (4.38).

$$g_v = g_{1v} + g_{2v} + g_{3v} := g_{1v}(v, \bar{\beta}) + g_{2v}(v, \bar{\beta}) + g_{3v}(v, \bar{\beta}) = g_v(v, \bar{\beta}),$$

где

$$\begin{aligned} g_{1v}(v, \bar{\beta}) &= 2\lambda^2 \left(\int_0^T \langle z(t) - f(x(t), u(t), t), v(t) \rangle dt - \varphi(z, u) + \sum_{i=1}^n \bar{\beta}_i \bar{\psi}_i(z) + \sum_{i=1}^n \bar{\psi}_i(z) + \right. \\ &+ \left. \sum_{i=1}^n (-\bar{\psi}_i(z) - \psi_i(z)) + \frac{1}{2}(\bar{\beta}_{n+1} + 1) \left(\int_0^T \langle u(t), u(t) \rangle dt - 1 \right) - \max \left\{ 0, \|u\|_{L_m^2}^2 - 1 \right\} \right) (z - f(x, u, t)), \\ g_{2v}(v, \bar{\beta}) &= 2\lambda \left(\lambda v - \lambda \int_t^T \left(\frac{\partial f(x(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} \right)' v(\tau) d\tau - \right. \\ &- \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \int_0^t v(\tau) d\tau + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \int_0^t \int_\tau^T \left(\frac{\partial f(x(\xi), u(\xi), \xi)}{\partial x} \right)' v(\xi) d\xi d\tau + \\ &\quad \left. + \int_t^T \frac{\partial f_0(x(\tau), z(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \lambda \sum_{i=1}^n \bar{\beta}_i e_i - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial f}{\partial x} \int_0^t \left(\int_\tau^T \frac{\partial f_0(x(\xi), z(\xi), u(\xi), \xi)}{\partial x} d\xi + \frac{\partial f_0(x(\tau), z(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial z} \right) d\tau - \lambda t \frac{\partial f}{\partial x} \sum_{i=1}^n \bar{\beta}_i e_i \right), \\ g_{3v}(v, \bar{\beta}) &= -2\lambda \frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial f_0}{\partial u} + \lambda \left(- \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)' v + \bar{\beta}_{n+1} u + u \right) \right), \end{aligned}$$

$$g_{\bar{\beta}_i}(v, \bar{\beta}) = g_{1\bar{\beta}_i}(v, \bar{\beta}) + g_{2\bar{\beta}_i}(v, \bar{\beta}), \quad i = \overline{1, n},$$

где

$$g_{1\bar{\beta}_i}(v, \bar{\beta}) = 2\lambda^2 \left(\int_0^T \langle z(t) - f(x(t), u(t), t), v(t) \rangle dt - \varphi(z, u) + \sum_{i=1}^n \bar{\beta}_i \bar{\psi}_i(z) + \sum_{i=1}^n \bar{\psi}_i(z) + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^n \left(-\bar{\psi}_i(z) - \psi_i(z) \right) + \frac{1}{2}(\bar{\beta}_{n+1} + 1) \left(\int_0^T \langle u(t), u(t) \rangle dt - 1 \right) - \max \left\{ 0, \|u\|_{L_m^2}^2 - 1 \right\} \bar{\psi}_i(z),$$

$$g_{2\bar{\beta}_i}(v, \bar{\beta}) = 2\lambda \int_0^T \left(\int_t^T \frac{\partial f_0(x(\tau), z(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \right. \\ \left. + \lambda \left(v(t) - \int_t^T \left(\frac{\partial f(x(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} \right)' v(\tau) d\tau \right) + \lambda \sum_{i=1}^n \bar{\beta}_i e_i \right)' e_i dt,$$

$$g_{\bar{\beta}_{n+1}}(v, \bar{\beta}) = 2\lambda \int_0^T \left\langle \frac{\partial f_0}{\partial u} + \lambda \left(- \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)' v(t) + \bar{\beta}_{n+1} u(t) + u(t) \right), u(t) \right\rangle dt.$$

С учётом Замечания 4.5.1 заключаем, что справедлива

Лемма 4.5.3. *Для того чтобы точка $[v^*, \bar{\beta}^*] \in L_n^2[0, T] \times \mathbb{R}^{n+1}$ доставляла минимум функционалу (4.37) необходимо и достаточно, чтобы*

$$[0, 0_{n+n+1}] \in d\bar{H}_\mu(v^*, \bar{\beta}^*), \quad (4.39)$$

где $[0, 0_{n+n+1}]$ — нулевой элемент пространства $\mathbb{R} \times L_n^2[0, T] \times \mathbb{R}^{n+1}$, а выражение для гиподифференциала $d\bar{H}_\mu(v, \bar{\beta})$ выписано в (4.38).

Найдём минимальный по норме гипогradient $\bar{g} \in d\bar{H}_\mu(v, \bar{\beta})$, то есть решим задачу

$$\|\bar{g}^*(v, \bar{\beta})\|_{\mathbb{R} \times L_n^2 \times \mathbb{R}^{n+1}}^2 = \min_{\bar{g} \in d\bar{H}_\mu(v, \bar{\beta})} \|\bar{g}(v, \bar{\beta})\|_{\mathbb{R} \times L_n^2 \times \mathbb{R}^{n+1}}^2 = \min_{\gamma_i \in [0, 1], i=\overline{1, n+2}} \left\| \left[0, g_v, g_{\bar{\beta}_1}, \dots, g_{\bar{\beta}_{n+1}} \right] + \right. \\ \left. + \mu \left[\gamma_1 \left[\|v\|_{L_n^2}^2 - 1 - \max \left\{ 0, \|v\|_{L_n^2}^2 - 1 \right\}, 2v, 0_{n+1} \right] + (1 - \gamma_1) \left[-\max \left\{ 0, \|v\|_{L_n^2}^2 - 1 \right\}, 0_n, 0_{n+1} \right] + \right. \right. \\ \left. + \gamma_2 \left[\bar{\beta}_1^2 - 1 - \max \left\{ 0, \bar{\beta}_1^2 - 1 \right\}, 0_n, 2\bar{\beta}_1, 0_n \right] + (1 - \gamma_2) \left[-\max \left\{ 0, \bar{\beta}_1^2 - 1 \right\}, 0_n, 0_{n+1} \right] + \dots + \right. \\ \left. + \gamma_{n+2} \left[\bar{\beta}_{n+1}^2 - 1 - \max \left\{ 0, \bar{\beta}_{n+1}^2 - 1 \right\}, 0_n, 0_n, 2\bar{\beta}_{n+1} \right] + (1 - \gamma_{n+2}) \left[-\max \left\{ 0, \bar{\beta}_{n+1}^2 - 1 \right\}, 0_n, 0_{n+1} \right] \right] \right\|_{\mathbb{R} \times L_n^2 \times \mathbb{R}^{n+1}}^2 \quad (4.40)$$

Задача (4.40) представляет собой задачу квадратичного программирования при наличии линейных ограничений и может быть решена одним из известных методов [89], который сходится за конечное число шагов. Обозначим γ_i^* , $i = \overline{1, n+2}$, её решение.

Вектор-функция

$$\bar{\bar{G}}(v, \bar{\beta}) := \left[g_v, g_{\bar{\beta}_1}, \dots, g_{\bar{\beta}_{n+1}} \right] + \quad (4.41) \\ + \mu \left[\gamma_1^* \left[2v, 0_{n+1} \right] + (1 - \gamma_1^*) \left[0_n, 0_{n+1} \right] + \gamma_2^* \left[0_n, 2\bar{\beta}_1, 0_n \right] + (1 - \gamma_2^*) \left[0_n, 0_{n+1} \right] + \dots + \right. \\ \left. + \gamma_{n+2}^* \left[0_n, 0_n, 2\bar{\beta}_{n+1} \right] + (1 - \gamma_{n+2}^*) \left[0_n, 0_{n+1} \right] \right]$$

состоит из последних $n + n + 1$ компонент наименьшего по норме гипогradientа функционала $\overline{H}_\mu(v, \overline{\beta})$ в точке $[v, \overline{\beta}]$. Если $\|\overline{\overline{G}}(v, \overline{\beta})\|_{L_n^2 \times \mathbb{R}^{n+1}} > 0$, то вектор-функция $-\overline{\overline{G}}(v, \overline{\beta}) / \|\overline{\overline{G}}(v, \overline{\beta})\|_{L_n^2 \times \mathbb{R}^{n+1}}$ является (нормированным) направлением гиподифференциального спуска [188] функционала $\overline{H}_\mu(v, \overline{\beta})$ в точке $[v, \overline{\beta}]$.

Опишем следующий метод гиподифференциального спуска [188] для поиска точек минимума функционала $\overline{H}_\mu(v, \overline{\beta})$. Фиксируем произвольную точку $[v_{(1)}, \overline{\beta}_{(1)}] \in L_n^2[0, T] \times \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть уже построена точка $[v_{(k)}, \overline{\beta}_{(k)}] \in L_n^2[0, T] \times \mathbb{R}^{n+1}$. Если выполнено условие минимума (4.39) (на практике с некоторой выбранной точностью $\bar{\varepsilon}$ в смысле $\mathbb{R} \times L^2 \times \mathbb{R}$ -нормы (см. задачу (4.40))), то точка $[v_{(k)}, \overline{\beta}_{(k)}]$ является точкой минимума функционала $\overline{H}_\mu(v, \overline{\beta})$, и процесс прекращается. В противном случае положим

$$[v_{(k+1)}, \overline{\beta}_{(k+1)}] = [v_{(k)}, \overline{\beta}_{(k)}] - \alpha_k \overline{\overline{G}}_k,$$

где вектор-функция $\overline{\overline{G}}_k = \overline{\overline{G}}(v_{(k)}, \overline{\beta}_{(k)})$ определяется формулой (4.41), а величина α_k является решением следующей задачи одномерной минимизации

$$\min_{\alpha \geq 0} \overline{H}_\mu([v_{(k)}, \overline{\beta}_{(k)}] - \alpha \overline{\overline{G}}_k) = \overline{H}_\mu([v_{(k)}, \overline{\beta}_{(k)}] - \alpha_k \overline{\overline{G}}_k).$$

На практике одномерная минимизация осуществляется на выбранном отрезке $[0, \bar{\alpha}]$. Тогда

$$\overline{H}_\mu(v_{(k+1)}, \overline{\beta}_{(k+1)}) \leq \overline{H}_\mu(v_{(k)}, \overline{\beta}_{(k)}).$$

Предположим, что последовательность $\{d\overline{H}_\mu(v_{(k)}, \overline{\beta}_{(k)})\}_{k=1}^\infty$ ограничена (по $\mathbb{R} \times L^2 \times \mathbb{R}$ -норме), а гиподифференциал $d\overline{H}_\mu$ равномерно аппроксимирует функционал \overline{H}_μ на множестве Лебега $\mathcal{L}_{\overline{H}}(v_{(1)}, \overline{\beta}_{(1)}) = \left\{ [v, \overline{\beta}] \in L_n^2[0, T] \times \mathbb{R}^{n+1}[0, T] \mid \overline{H}_\mu(v, \overline{\beta}) \leq \overline{H}_\mu(v_{(1)}, \overline{\beta}_{(1)}) \right\}$. Если последовательность $\{[v_{(k)}, \overline{\beta}_{(k)}]\}$, $k = 1, 2, \dots$, бесконечна, что при сделанных предположениях метод гиподифференциального спуска сходится [188] в следующем смысле:

$$\|\overline{\overline{g}}^*(v_{(k)}, \overline{\beta}_{(k)})\|_{\mathbb{R} \times L_{n+m}^2[0, T]} = \tag{4.42}$$

$$\sqrt{(\overline{\overline{g}}_1^*(v_{(k)}, \overline{\beta}_{(k)}))^2 + \int_0^T \overline{\overline{G}}_n^2(v_{(k)}, \overline{\beta}_{(k)}, t) dt + \overline{\overline{G}}_{n+1}^2(v_{(k)}, \overline{\beta}_{(k)})} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty,$$

где $\overline{\overline{g}}_1$ — первая компонента вектор-функции $\overline{\overline{g}}$.

Если последовательность $\{[v_{(k)}, \overline{\beta}_{(k)}]\}$, $k = 1, 2, \dots$, конечна, то последняя её точка является точкой минимума функционала $\overline{H}_\mu(v, \overline{\beta})$ по построению.

Замечание 4.5.2. Требуемое свойство равномерной аппроксимации функционала его гиподифференциалом тесно связано [189] с понятием липшицевой аппроксимации функционала своим гиподифференциалом, которое в свою очередь связано [189] с липшицевостью гиподифференциального отображения. Последнее же свойство аналогично липшицевости градиентов, являющейся стандартным предположением [285] при обосновании сходимости классических численных методов оптимизации.

Обозначим v^* , β^* (приближённое) решение задачи (4.36). (Если выполнены условия Леммы 4.5.1, то искать его можно описанным в предыдущем абзаце методом.)

Вектор-функция

$$\begin{aligned} \overline{\overline{G}}(z, u) := & \left[\int_t^T \frac{\partial f_0(x(\tau), z(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \right. \\ & \left. + \lambda \left(v^* - \int_t^T \left(\frac{\partial f(x(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial x} \right)' v^*(\tau) d\tau \right), \frac{\partial f_0}{\partial u} - \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)' v^* \right] + \\ & + \lambda \sum_{i=1}^n \left\{ \beta_i^* [e_i, 0_m] + (1 - \beta_i^*) [-e_i, 0_m] \right\} + \\ & + \lambda \beta_{n+1}^* [0_n, 2u] + \lambda (1 - \beta_{n+1}^*) [0_n, 0_m] \end{aligned} \quad (4.43)$$

состоит из последних $n + m$ компонент наименьшего по норме гипогрadients функционала $F_\lambda(z, u)$ в точке $[z, u]$ в данном случае (при $\varphi(z, u) = 0$). Если $\|\overline{\overline{G}}(z, u)\|_{L_{n+m}^2} > 0$, то вектор-функция $-\overline{\overline{G}}(z, u) / \|\overline{\overline{G}}(z, u)\|_{L_{n+m}^2}$ является (нормированным) направлением гиподифференциального спуска [188] функционала $F_\lambda(z, u)$ в точке $[z, u]$.

Таким образом, в пунктах А и Б решалась задача поиска направления гиподифференциального спуска функционала $F_\lambda(z, u)$ в точке $[z, u]$. В случае $\varphi(z, u) > 0$ (пункт А) данная задача решается сравнительно просто, так как представляет собой задачу квадратичного программирования при наличии линейных ограничений. В случае $\varphi(z, u) = 0$ (пункт Б) помимо искомым величин β_i^* , $i = \overline{1, n+1}$, требуется также найти вектор-функцию $v^*(t)$. Это более сложная задача, решать которую можно численными методами, например, методом гиподифференциального спуска, как это описано в пункте Б. Таким образом, для построения направления гиподифференциального спуска функционала F_λ в какой-либо точке потребовалось вычислить вектор-функцию $v^*(t)$, которая имеет смысл сопряжённой переменной, хорошо известной в задачах оптимального управления. С этой целью было предложено составить вспомогательную оптимизационную задачу и в конечном счёте решать задачу минимизации функционала (4.37). Данный подход позволяет (приближённо) вычислить “сопряжённую” вектор-функцию и построить искомое направление спуска. Заметим также что на практике хорошо зарекомендовал себя способ поиска вектор-функции $v^*(t)$ в виде некоторого полинома

наперёд заданной степени и с неизвестными коэффициентами, на которые накладываются ограничения с тем чтобы обеспечить принадлежность искомой вектор-функции единичному L^2 -шару. Такой подход позволяет заменить вычисления громоздкого гиподифференциала формулы (4.38) более удобными и, кроме того, гарантировать что очередная точка $[z_{k+1}, u_{k+1}]$ “не покинет” пространство $P_n[0, T] \times P_m[0, T]$, тем самым обеспечив корректность метода в этом смысле; недостатком такой замены является необходимость решения квадратичной задачи при квадратичных ограничениях (что видно из структуры минимизируемого функционала в (4.36)). Также отметим, что данный способ носит эвристический характер; строго обоснован полноценный метод, описанный выше. Кроме того, в качестве практического приёма также на некоторых итерациях осуществлялась аппроксимация искомых вектор-функций (которые могут “разрастаться” при реализации алгоритма и иметь очень громоздкий вид) интерполяционными полиномами Лагранжа наперёд заданной степени deg .

Итак, теперь можно описать метод гиподифференциального спуска [188] для поиска стационарных точек функционала $F_\lambda(z, u)$. Фиксируем произвольную точку $[z_1, u_1] \in P_n[0, T] \times P_m[0, T]$. Пусть уже построена точка $[z_k, u_k] \in P_n[0, T] \times P_m[0, T]$. Если выполнено условие минимума (4.32) (на практике с некоторой выбранной точностью $\bar{\varepsilon}$ в смысле $\mathbb{R} \times L^2$ -нормы (см. задачу (4.33))), то точка $[z_k, u_k]$ является стационарной точкой функционала $F_\lambda(z, u)$, и процесс прекращается. В противном случае положим

$$[z_{k+1}, u_{k+1}] = [z_k, u_k] - \alpha_k \bar{\bar{G}}_k,$$

где $\bar{\bar{G}}_k = \bar{\bar{G}}(z_k, u_k)$ берётся либо из формулы (4.35) при $\varphi(z_k, u_k) > 0$, либо из формулы (4.43) при $\varphi(z_k, u_k) = 0$ (при этом x_k соответствует z_k по формуле (4.6)). Величина α_k является решением задачи

$$\min_{\alpha \geq 0} F_\lambda([z_k, u_k] - \alpha \bar{\bar{G}}_k) = F_\lambda([z_k, u_k] - \alpha_k \bar{\bar{G}}_k).$$

На практике одномерная минимизация осуществляется на выбранном отрезке $[0, \bar{\alpha}]$. Тогда

$$F_\lambda(z_{k+1}, u_{k+1}) \leq F_\lambda(z_k, u_k).$$

Предположим, что последовательность $\{dF(z_k, u_k)\}_{k=1}^\infty$ ограничена (по $\mathbb{R} \times L^2$ -норме), а гиподифференциал dF равномерно аппроксимирует функционал F на множестве Лебега $\mathcal{L}_F(z_1, u_1) = \left\{ [z, u] \in P_n[0, T] \times P_m[0, T] \mid F(z, u) \leq F(z_1, u_1) \right\}$. Если последовательность $\{[z_k, u_k]\}$, $k = 1, 2, \dots$, бесконечна, то при сделанных предположениях метод гиподифференциального спуска сходится [188] в следующем смысле:

$$\|g^*(z_k, u_k)\|_{\mathbb{R} \times L^2_{n+m}[0, T]} = \sqrt{(g_1^*(z_k, u_k))^2 + \int_0^T \bar{\bar{G}}^2(z_k, u_k, t) dt} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty, \quad (4.44)$$

где g_1 — первая компонента вектор-функции g .

Если последовательность $\{[z_k, u_k]\}$, $k = 1, 2, \dots$, конечна, то последняя её точка является стационарной точкой функционала $F_\lambda(z, u)$ по построению.

Замечание 4.5.3. Требуемое свойство равномерной аппроксимации функционала его гиподифференциалом тесно связано [189] с понятием липшицевой аппроксимации функционала своим гиподифференциалом, которое в свою очередь связано [189] с липшицевостью гиподифференциального отображения. Последнее же свойство аналогично липшицевости градиентов, являющейся стандартным предположением [285] при обосновании сходимости классических численных методов оптимизации.

Замечание 4.5.4. Строго говоря, условия минимума (4.32) и (4.39), сам метод гиподифференциального спуска и соотношения сходимости (4.44) и (4.42) формулируются в работе [188] для функционала, заданного на другом пространстве, однако из доказательств этой статьи видно, что данные результаты сохраняют силу для случая пространства, рассматриваемого в диссертации.

Замечание 4.5.5. Рассмотрим более общий случай, когда функционал качества задан в виде максимума конечного числа функционалов вида (4.5), то есть

$$J(z, u) = \max \left\{ I_1(z, u), \dots, I_r(z, u) \right\}.$$

Пользуясь правилами субдифференциального исчисления [192] легко убедиться в том, что такой функционал субдифференцируем и его субдифференциал в точке $[z, u]$ выражается по формуле

$$\partial J(z, u) = \text{co} \left\{ \nabla I_i(z, u) \mid I_i(z, u) = J(z, u), i \in \{1, \dots, r\} \right\}.$$

Таким образом, в случае такого минимизируемого функционала построенный метод применим (после внесения очевидных корректировок). Заметим, что данная задача, напротив, уже не относится к стандартным задачам классической теории оптимального управления.

4.6 Численные примеры

Приведём примеры задач построения оптимального управления, в которых метод субдифференциального спуска привёл к (приближённой) точке минимума функционала (4.11).

Вычисления производились символично в пакете Maple 12, Serial Number 2011-11-11. Решение задачи одномерной минимизации осуществлялось на отрезке $[0, 1]$ (т. е. здесь $\bar{\gamma} = 1$) в Maple встроенной функцией `fminbnd()` с её внутренними параметрами по умолчанию. Согласно документации, для решения этой задачи в Maple используется метод золотого сечения

в сочетании с параболической интерполяцией [55]. Вспомогательные задачи квадратичного программирования были решены в Maple встроенной функцией QPSolve() с её внутренними параметрами по умолчанию. Согласно документации, для решения этой задачи в Maple используется метод активных множеств [89]. Использовался описанный подход вычисления “сопряжённой” вектор-функции в виде полинома с показателем степени $\overline{deg} = 5$; при этом соответствующая задача минимизации квадратичной функции с квадратичными ограничениями решалась в Maple встроенной функцией fminunc() с параметром 'quasi-newton' алгоритма и с её другими внутренними параметрами по умолчанию. Согласно документации, для решения этой задачи в Maple используется BFGS квази-ньютоновский метод с линейным поиском, основанным на кубической интерполяции [362]. Использовался параметр $deg = 5$ для аппроксимации искомых вектор функций на каждой 5-й итерации.

Пример 4.6.1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u_1, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = u_2 - 9.8 \end{cases}$$

с граничными условиями

$$x(0) = [-1, 0, 0, 0], \quad x(1) = [0, 0, 0, 0].$$

При этом требуется минимизировать функционал

$$I(z, u) = \int_0^1 u_1^2(t) + u_2^2(t) dt.$$

В данной задаче известно [59] аналитическое решение, которое имеет следующий вид

$$u_1^*(t) = -12t + 6, \quad u_2^*(t) = 9.8,$$

$$z_1^*(t) = -6t^2 + 6t, \quad z_2^*(t) = -12t + 6, \quad z_3^*(t) = 0, \quad z_4^*(t) = 0.$$

При этом

$$I(z^*, u^*) = 108.04.$$

В Таблице 4.6.1 приведены результаты работы метода субдифференциального спуска. В качестве начального приближения взята точка $u_1(t) = [0, 1]$, $z_1(t) = [1, 0, 0, 0]$, а тогда $x_1(t) = [-1 + t, 0, 0, 0]$. Все интегралы в этом примере вычислялись аналитически (точно). В данном случае параметр $\bar{\varepsilon}$ игнорировался и оценка погрешности решения проводилась исходя

из значения функционала. Из данной таблицы видно, что на 30-й итерации погрешность по функционалу не превышает величины 3×10^{-3} .

Таблица 4.6.1. Пример 4.6.1: результаты работы МСС

k	$I(z_k, u_k)$	$\Phi(z_k, u_k)$	$\ u^* - u_k\ _{L_m^2}$	$\ z^* - z_k\ _{L_n^2}$	$\ G(z_k, u_k)\ _{L_{n+m}^2}$
1		1.06044	3.47062	3.21367	197.96324
2		0.94422	3.20293	3.22259	707.22868
10		0.34105	1.15682	1.38112	848.13142
20		0.20739	0.72749	0.69893	256.2921
30	108.0425		0.05774	0.02886	0.425

Пример 4.6.2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2 \end{cases}$$

с граничными условиями

$$x(0) = [2, 0.5], \quad x(1) = [x_1(1), 0]$$

и ограничением на управление

$$\int_0^1 u_1^2(t) + u_2^2(t) dt \leq 1.$$

При этом требуется минимизировать функционал

$$I(z, u) = \int_0^1 z_1(t) dt.$$

В данной задаче известно [48] аналитическое решение, которое имеет следующий вид

$$\begin{aligned} u_1^*(t) &= -\sqrt{\frac{9}{13}}, & u_2^*(t) &= \sqrt{\frac{9}{13}}t - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{13}} - \frac{1}{2}, \\ z_1^*(t) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{13}}t^2 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{9}{13}} + 1\right)t + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{13}}, & z_2^*(t) &= \sqrt{\frac{9}{13}}t - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{13}} - \frac{1}{2}, \\ I(z^*, u^*) &= \frac{1}{4}(1 - \sqrt{13}). \end{aligned}$$

В Таблице 4.6.2 приведены результаты работы метода субдифференциального спуска. В качестве начального приближения взята точка $u_1(t) = [0, 0]$, $z_1(t) = [0, 0]$, а тогда $x_1(t) = [2, 0.5]$. Все интегралы в этом примере вычислялись аналитически (точно). В данном

случае параметр $\bar{\varepsilon}$ игнорировался и оценка погрешности решения проводилась исходя из значения функционала. Из данной таблицы видно, что на 7-й итерации ошибка по функционалу не превышает величины 5×10^{-3} .

Таблица 4.6.2. Пример 4.6.2: результаты работы МСС

k	$I(z_k, u_k)$	$\Phi(z_k, u_k)$	$\ u^* - u_k\ _{L_m^2}$	$\ z^* - z_k\ _{L_n^2}$	$\ G(z_k, u_k)\ _{L_{n+m}^2}$
1		1.0	1.00004	0.86826	188.77058
2		0.51873	0.91483	0.90879	76.71471
5		0.00243	0.79148	0.85081	112.2858
6	-0.61768		0.23167	0.23273	0.70711
7	-0.6464		0.08873	0.1132	0.21357

Пример 4.6.3. Рассмотрим нелинейную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 \end{cases}$$

с граничными условиями

$$x(0) = [0.25, 0], \quad x(1) = [0.25, x_2(1)]$$

и ограничением на управление

$$\int_0^1 u^2(t) dt \leq 1.$$

При этом требуется минимизировать функционал

$$I(z, u) = \int_0^1 z_2(t) dt.$$

Данный пример рассмотрен в работе [302] при более жёстком ограничении на управление $|u(t)| \leq 1$, $t \in [0, 1]$, где также приведено оптимальное значение функционала

$$I(\tilde{z}, \tilde{u}) = \frac{1}{96}.$$

В Таблице 4.6.3 приведены результаты работы метода субдифференциального спуска. В качестве начального приближения взята точка

$$u_1(t) = 10t - 5, \quad z_1(t) = [10t - 5, (0.25 + 5t^2 - 5t)^2],$$

а тогда

$$x_1(t) = [0.25 + 5t^2 - 5t, 5t^5 - 12.5t^4 + 9.1(6)t^3 - 1.25t^2 + 0.0625t].$$

Все интегралы в этом примере вычислялись аналитически (точно). В данном случае параметр $\bar{\varepsilon} = 0.1$. В силу нелинейности системы нельзя гарантировать, что полученное на 8-й итерации значение функционала является глобальным минимумом в этой задаче. Это значение некорректно сравнивать с величиной $I(\tilde{z}, \tilde{u})$, поскольку последняя получена при рассмотрении более жёсткого ограничения на управление, однако из данной таблицы видно, что порядки величин $I(z_8, u_8)$ и $I(\tilde{z}, \tilde{u})$ сопоставимы.

Таблица 4.6.3. Пример 4.6.3: результаты работы МСС

k	$I(z_k, u_k)$	$\Phi(z_k, u_k)$	$\ G(z_k, u_k)\ _{L_{n+m}^2}$
1		8.3333	486.44
2		0.43953	102.93801
5		0.10272	130.33683
7		0.00025	99.303
8	0.01579		0.1127

Пример 4.6.4. Рассмотрим нелинейную систему

$$\dot{x}_1 = \cos(x_3), \quad \dot{x}_2 = \sin(x_3), \quad \dot{x}_3 = u,$$

заданы граничные условия

$$x(0) = [0, 0, 0], \quad x(1) = [3.85, 2.85, x_3(1)]$$

и ограничение на управление

$$\int_0^{5.1228} u^2(t) dt \leq 1.2807.$$

При этом требуется минимизировать функционал

$$I(z, u) = \int_0^{5.1228} z_3(t) dt.$$

В Таблице 4.6.4 приведены результаты работы метода субдифференциального спуска. В качестве начального приближения взята точка $u_1(t) = 0.5$, $z_1(t) = [0.5, 0.5, 0.5]$, а тогда $x_1(t) = [0.5t, 0.5t, 0.5t]$. Все интегралы в данном примере вычислялись в Maple встроенной функцией `evalf(int())` с её внутренними параметрами по умолчанию. Согласно документации, для решения этой задачи в Maple используется метод Гаусса-Конрода [13]. В данном случае параметр $\bar{\varepsilon} = 0.05$. В силу нелинейности системы нельзя гарантировать, что полученное на 35-й итерации значение функционала является глобальным минимумом в этой задаче.

Таблица 4.6.4. Пример 4.6.4: результаты работы МСС

k	$I(z_k, u_k)$	$\Phi(z_k, u_k)$	$\ G(z_k, u_k)\ _{L_{n+m}^2}$
1		328.4571	373.594
2		232.7861	350.5031
10		27.879	81.23427
15		7.18531	48.2351
20	-0.06627		50.3464
25		0.42832	22.2662
30	-0.157194		0.21303
35	-0.19294		0.0573

Пример 4.6.5. Рассмотрим нелинейную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 9x_4, & \dot{x}_2 &= 9x_5, & \dot{x}_3 &= 9x_6, \\ \dot{x}_4 &= 9(u_1 + 17.2656x_3), & \dot{x}_5 &= 9u_2, & \dot{x}_6 &= -\frac{9}{x_2}(u_1 + 27.0756x_3 + 2x_5x_6) \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$x(0) = [0, 22, 0, 0, -1, 0], \quad x(1) = [10, 14, 0, 2.5, 0, 0]$$

и ограничением на управление

$$\int_0^1 u_1^2(t) + u_2^2(t) dt \leq 1.$$

Требуется минимизировать функционал (см. Замечание 4.5.5)

$$\mathcal{J}(x, u) = \frac{9}{2} \max \left\{ \int_0^1 x_3^2(t) dt, \int_0^1 x_6^2(t) dt \right\}.$$

В Таблице 4.6.5 приведены результаты работы метода гиподифференциального спуска. В качестве начального приближения взята точка

$$u_1(t) = [0.5, 0.5], \quad z(t) = [0.5, 1, 1, 1, 0.5, 0.5],$$

а тогда

$$x(t) = [0.5t, 22 + t, t, t, -1 + 0.5t, 0.5t].$$

Все интегралы в данном примере вычислялись в Maple встроенной функцией `evalf(int())` с её внутренними параметрами по умолчанию. Согласно документации, для решения этой задачи в Maple используется метод Гаусса-Конрода [13]. В данном случае параметр $\bar{\varepsilon} = 0.05$. В силу нелинейности системы нельзя гарантировать, что полученное на 40-й итерации значение функционала является глобальным минимумом в этой задаче.

Таблица 4.6.5. Пример 4.6.5: результаты работы МГС

k	$J(z_k, u_k)$	$\Phi(z_k, u_k)$	$\ G(z_k, u_k)\ _{L_{n+m}^2}$
1		1155.5698	1175.336
10		74.1873	99.1894
20		13.8222	15.81931
30		0.6543	0.99113
40	0.00445		0.0324

Данный пример имеет практическое приложение к задаче оптимальной разгрузки судов и с другими ограничениями на управление и с фазовыми ограничениями и с целевым функционалом $\mathcal{I}(x, u) = \frac{9}{2} \int_0^1 x_3^2(t) + x_6^2(t) dt$ был рассмотрен в работе [317], где также приведено полученное там значение функционала

$$I(\tilde{z}, \tilde{u}) = 0.0057.$$

Это значение некорректно сравнивать с величиной $J(z_{40}, u_{40})$, поскольку последняя получена при рассмотрении других ограничений и другого функционала однако из данной таблицы видно, что порядки величин $J(z_{40}, u_{40})$ и $I(\tilde{z}, \tilde{u})$ сопоставимы.

Замечание 4.6.1. Как было отмечено выше, в случае выбора шага по правилу метода наискорейшего спуска, гарантировать сходимость метода субдифференциального спуска (МСС) нельзя. Однако известные обстоятельства позволяют говорить о том, что «как правило» данный метод приводит к стационарной точке минимизируемого функционала. См. также Замечание 1.3.1. На практике рекомендуется использовать МСС, поскольку он менее вычислительно затратный, чем метод гиподифференциального спуска (МГС). В рассмотренных примерах МГС показал аналогичные результаты.

Глава 5

Программное и оптимальное управление негладкими системами с негладким функционалом Лагранжа

В главе рассматривается задача построения программного управления для объекта, описываемого системой с квазидифференцируемой правой частью. Целью управления является перевод системы из заданного начального положения в заданное конечное состояние за заданное конечное время. Допустимыми управлениями считаются кусочно-непрерывные вектор-функции со значениями из некоторого параллелепипеда. Исходная задача сводится к безусловной минимизации построенного функционала. При этом реализована новая техническая идея рассматривать фазовую траекторию и ее производную как независимые переменные (и учитывать естественную связь между ними посредством специальной штрафной функции). Эта идея качественно упростила структуру квазидифференциала и позволила преодолеть принципиальные трудности при построении направления наискорейшего спуска. Доказана квазидифференцируемость функционала, получены необходимые условия его минимума в терминах квазидифференциала. Благодаря упомянутой идее «разделения» траектории и ее производной полученные в диссертации условия оптимальности, в отличие от существующих, являются поточечными, что позволяет эффективно проверять их в дискретные моменты времени. Для решения полученной задачи минимизации в функциональном пространстве применяется метод квазидифференциального спуска. Затем реализуется дискретизация. В отличие от большинства существующих методов, когда дискретизируется исходная задача, здесь дискретизация применяется после того, как квазидифференциал уже получен. Доказано, что для построения направления квазидифференциального спуска необходи-

мо найти хаусдорфово отклонение одного выпуклого компакта (минус супердифференциала) от другого выпуклого компакта (субдифференциала) в каждый момент времени дискретизации и реализовать соответствующую интерполяцию. Направления квазидифференциального спуска вычисляются независимо в каждый момент времени дискретизации благодаря сравнительно простой структуре квазидифференциала, которую удалось получить с помощью отмеченной технической идеи. При этом функционал строится таким образом, что можно проверить, является ли полученная стационарная точка точкой его глобального минимума. Разработанный алгоритм демонстрируется на примерах. Предложенный метод может быть применен к негладкой задаче оптимального управления в форме Лагранжа (при этом требуется минимизировать интеграл с квазидифференцируемым подынтегральным выражением). Подробно обсуждаются преимущества и недостатки метода. См. [212], [216].

5.1 Соответствующие определения

В главе мы будем использовать как квазидифференциалы функций в конечномерном пространстве, так и квазидифференциалы функционалов в функциональном пространстве. Несмотря на то, что второе понятие обобщает первое, для удобства мы введем определения для обоих этих случаев и для тех конкретных функций (функционалов) и их переменных и пространств, которые рассматриваются.

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ со стандартной нормой. Пусть $g = [g_1, g_2] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ — произвольный вектор. Предположим, что в каждый момент времени $t \in [0, T]$ в точке (x, u) существуют такие выпуклые компакты $\underline{\partial}f_i(x, u, t), \bar{\partial}f_i(x, u, t) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $i = \overline{1, n}$, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i(x, u, t)}{\partial g} &= \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha} \left(f_i(x + \alpha g_1, u + \alpha g_2, t) - f_i(x, u, t) \right) = \\ &= \max_{v \in \underline{\partial}f_i(x, u, t)} \langle v, g \rangle + \min_{w \in \bar{\partial}f_i(x, u, t)} \langle w, g \rangle, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

В этом случае функция $f_i(x, u, t)$, $i = \overline{1, n}$, называется квазидифференцируемой в точке (x, u) , а пара $\mathcal{D}f_i(x, u) = [\underline{\partial}f_i(x, u, t), \bar{\partial}f_i(x, u, t)]$ называется квазидифференциалом функции $f_i(x, u, t)$ (при этом множества $\underline{\partial}f_i(x, u, t)$ и $\bar{\partial}f_i(x, u, t)$ называются соответственно субдифференциалом и супердифференциалом функции $f_i(x, u, t)$ в точке (x, u)).

Из выражения (5.1) видно, что при каждом $t \in [0, T]$ справедлива следующая формула:

$$\begin{aligned} f_i(x + \alpha g_1, u + \alpha g_2, t) &= f_i(x, u, t) + \alpha \frac{\partial f_i(x, u, t)}{\partial g} + o_i(\alpha, x, u, g, t), \\ \frac{o_i(\alpha, x, u, g, t)}{\alpha} &\rightarrow 0, \quad \alpha \downarrow 0, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существуют такие числа $\delta > 0$ и $\alpha_0 > 0$, что при $\bar{g} \in B_\delta(g)$ и при $\alpha \in (0, \alpha_0)$ выполнено $|o_i(\alpha, x, u, \bar{g}, t)| < \alpha\varepsilon$, $i = \overline{1, n}$, то функция $f_i(x, u, t)$, $i = \overline{1, n}$, называется равномерно квазидифференцируемой в точке (x, u) . Заметим [37], что если при каждом $t \in [0, T]$ функция $f_i(x, u, t)$, $i = \overline{1, n}$, квазидифференцируема в точке (x, u) и локально Лишшицева в окрестности точки (x, u) , то она равномерно квазидифференцируема в точке (x, u) . Если для равномерно квазидифференцируемой функции $f_i(x, u, t)$, $i = \overline{1, n}$, в выражении (5.2) имеем $\frac{o_i(\alpha, x, u, g, t)}{\alpha} \rightarrow 0$, $\alpha \downarrow 0$, $i = \overline{1, n}$, равномерно по $t \in [0, T]$, то такая функция называется абсолютно равномерно квазидифференцируемой.

Рассмотрим пространство $C_n[0, T] \times P_n[0, T] \times P_m[0, T]$ со следующей нормой: $L_n^2[0, T] \times L_n^2[0, T] \times L_m^2[0, T]$. Пусть $g = [g_1, g_2, g_3] \in C_n[0, T] \times P_n[0, T] \times P_m[0, T]$ — это произвольная вектор-функция. Предположим, что в точке (x, z, u) существуют такие выпуклые слабо* компактные множества $\underline{\partial}I(x, z, u), \bar{\partial}I(x, z, u) \subset (C_n[0, T] \times P_n[0, T] \times P_m[0, T])^*$, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(x, z, u)}{\partial g} &= \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha} \left(I(x + \alpha g_1, z + \alpha g_2, u + \alpha g_3) - I(x, z, u) \right) = \\ &= \max_{v \in \underline{\partial}I(x, z, u)} v(g) + \min_{w \in \bar{\partial}I(x, z, u)} w(g). \end{aligned} \quad (5.3)$$

В этом случае функционал $I(x, z, u)$ называется квазидифференцируемым в точке (x, z, u) , а пара $\mathcal{D}I(x, z, u) = [\underline{\partial}I(x, z, u), \bar{\partial}I(x, z, u)]$ называется квазидифференциалом функционала $I(x, z, u)$ (при этом множества $\underline{\partial}I(x, z, u)$ и $\bar{\partial}I(x, z, u)$ называются субдифференциалом и супердифференциалом соответственно функционала $I(x, z, u)$ в точке (x, z, u)).

Из выражения (5.3) видно, что справедлива следующая формула:

$$\begin{aligned} I(x + \alpha g_1, z + \alpha g_2, u + \alpha g_3) &= I(x, z, u) + \alpha \frac{\partial I(x, z, u)}{\partial g} + o(\alpha, x, z, u, g), \\ \frac{o(\alpha, x, z, u, g)}{\alpha} &\rightarrow 0, \quad \alpha \downarrow 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

5.2 Постановка задачи

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (5.5)$$

с начальной точкой

$$x(0) = x_0. \quad (5.6)$$

В формуле (5.5) $f(x, u, t)$, $t \in [0, T]$, — заданная n -мерная вектор-функция; $T > 0$ — известный конечный момент времени. В формуле (5.6) $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — заданный вектор.

Предположение 5.2.1. Пусть n -мерная вектор-функция $x(t)$ фазовых координат предполагается кусочно-непрерывно дифференцируемой на $[0, T]$, m -мерная вектор-функция $u(t)$ управлений предполагается кусочно-непрерывной на $[0, T]$. Вектор-функция $f(x, u, t)$ предполагается непрерывной на своей области определения; и каждая из ее компонент $f_i(x, u, t)$, $i = \overline{1, n}$, — квазидифференцируемой и локально липшицевой по паре (x, u) переменных при $t \in [0, T]$. При сделанных предположениях для системы (5.5), (5.6) справедливы классические теоремы существования и единственности решения, по крайней мере, в окрестности начальной точки.

Как отмечено выше, мы предполагаем, что каждая траектория $x(t)$ является кусочно-непрерывно дифференцируемой вектор-функцией, а $u(t)$ является кусочно-непрерывной вектор-функцией на $[0, T]$. Если $t_0 \in [0, T)$ является точкой разрыва вектор-функции $u(t)$, то для определенности мы полагаем, что $u(t_0) = \lim_{t \downarrow t_0} u(t)$. В точке T положим $u(T) = \lim_{t \uparrow T} u(t)$. С учетом сделанных предположений и обозначений можно предположить, что вектор-функция x принадлежит пространству $C_n[0, T]$, вектор-функция \dot{x} принадлежит пространству $P_n[0, T]$, а вектор-функция u принадлежит пространству $P_m[0, T]$.

Введем множество допустимых управлений

$$U = \left\{ u \in P_m[0, T] \mid \underline{u}_i \leq u_i(t) \leq \bar{u}_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad t \in [0, T] \right\}. \quad (5.7)$$

Здесь $\underline{u}_i, \bar{u}_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, m}$, — некоторые числа.

А. Задача при ограничениях на управление. Требуется найти такое управление $u^* \in U$, которое переводит соответствующую (в смысле уравнения (5.5)) траекторию $x^* \in C_n[0, T]$ из начальной точки (5.6) в конечное состояние

$$x(T) = x_T, \quad (5.8)$$

где $x_T \in \mathbb{R}^n$ — заданный вектор.

Предположение 5.2.2. Предполагаем, что существует такое управление $u^* \in U$ (и соответствующая ему траектория $x^* \in C_n[0, T]$).

5.3 Сведение к вариационной задаче

Целью этого раздела является сведение **Задачи А**, изложенной выше, к **Задаче Б**, описанной ниже. Построим функционал, учитывающий различные ограничения на объект и на управление, которые заданы в постановке задачи. Пусть $z(t) = \dot{x}(t)$ (при сделанных предположениях, $z \in P_n[0, T]$), тогда согласно (5.6) (где задано начальное состояние системы)

имеем

$$x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau. \quad (5.9)$$

Построим следующий функционал на пространстве $P_n[0, T] \times P_m[0, T]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(z, u) = & \sum_{i=1}^n \int_0^T \left| z_i(t) - f_i \left(x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau, u(t), t \right) \right| dt + \frac{1}{2} \left(x_0 + \int_0^T z(t) dt - x_T \right)^2 + \\ & + \sum_{i=1}^m \int_0^T \max \{ \underline{u}_i - u_i(t), 0 \} dt + \sum_{i=1}^m \int_0^T \max \{ u_i(t) - \bar{u}_i(t), 0 \} dt. \end{aligned}$$

В функционале $\mathcal{I}(z, u)$ первое слагаемое (являющееся суммой) учитывает дифференциальное ограничение (5.5), второе слагаемое учитывает ограничение (5.8) на конечное состояние системы, третье слагаемое (состоящее из двух сумм) учитывает ограничение (5.7) на управление. Отметим, что этот функционал неотрицателен для любого из своих аргументов и $\mathcal{I}(z^*, u^*) = 0$ тогда и только тогда, когда пара $(x^*, u^*) \in C_n[0, T] \times P_m[0, T]$ является решением исходной задачи, т. е. управление u^* принадлежит множеству U допустимых управлений и переводит соответствующую траекторию $x^*(t) = x_0 + \int_0^t z^*(\tau) d\tau$ из заданного начального положения x_0 в заданное конечное состояние x_T за время T .

Переход к “пространству производных” ($z \in P_n[0, T]$) использовался во многих работах В. Ф. Демьянова и его учеников для изучения различных вариационных задач и задач управления. При некоторых естественных дополнительных предположениях можно доказать квазидифференцируемость функционала $\mathcal{I}(z, u)$ в пространстве $P_n[0, T] \times P_m[0, T]$ как нормированном пространстве с нормой $L_n^2[0, T] \times L_m^2[0, T]$. Однако квазидифференциал этого функционала имеет достаточно сложную структуру, что делает его практически непригодным для построения численных методов. Поэтому предлагается рассмотреть некоторую модификацию этого функционала, “принудительно” считая точки z и x “независимыми” переменными. Поскольку, на самом деле, между этими переменными существует связь (5.9) (что, естественно, означает, что вектор-функция $z(t)$ является производной вектор-функции $x(t)$), учтем это, добавив соответствующее (последнее) слагаемое при построении нового функционала на пространстве $C_n[0, T] \times P_n[0, T] \times P_m[0, T]$:

$$\begin{aligned} I(x, z, u) = & I_1(x, z, u) + I_2(z) + I_3(u) + I_4(x, z) = \\ = & \sum_{i=1}^n \int_0^T \left| z_i(t) - f_i(x(t), u(t), t) \right| dt + \frac{1}{2} \left(x_0 + \int_0^T z(t) dt - x_T \right)^2 + \\ & + \sum_{i=1}^m \int_0^T \max \{ \underline{u}_i - u_i(t), 0 \} dt + \sum_{i=1}^m \int_0^T \max \{ u_i(t) - \bar{u}_i, 0 \} dt + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T \left(x(t) - x_0 - \int_0^t z(\tau) d\tau \right)^2 dt. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Заметим, что этот функционал также неотрицателен для любого набора своих аргументов и $I(x^*, z^*, u^*) = 0$ тогда и только тогда, когда пара $(x^*, u^*) \in C_n[0, T] \times P_m[0, T]$ является решением исходной задачи, т. е. управление u^* принадлежит множеству допустимых управлений U и переводит соответствующую траекторию $x^*(t) = x_0 + \int_0^t z^*(\tau) d\tau$ из заданного начального положения x_0 в заданное конечное состояние x_T за время T . Очевидно, что если некоторые из координат на правом конце объекта свободны, то соответствующие слагаемые функционала $I_2(z)$ нужно положить равными нулю. Очевидно также, что при отсутствии некоторых ограничений на управления необходимо убрать соответствующие слагаемые из функционала $I_3(u)$. В обоих этих случаях мы сохраним для функционала $I(x, z, u)$ его обозначение.

Несмотря на то, что размерность аргументов функционала $I(x, z, u)$ на n больше размерности аргументов функционала $\mathcal{I}(z, u)$, структура его квазидифференциала (в пространстве $C_n[0, T] \times P_n[0, T] \times P_m[0, T]$ как нормированного пространства с нормой $L_n^2[0, T] \times L_n^2[0, T] \times L_m^2[0, T]$), как будет видно из дальнейшего, существенно проще структуры квазидифференциала функционала $\mathcal{I}(z, u)$. Это позволит построить численный метод решения исходной задачи.

Б. Вариационная задача без ограничений. Итак, исходная задача свелась к нахождению точки безусловного глобального минимума (x^*, z^*, u^*) функционала $I(x, z, u)$ на пространстве

$$X = \left(C_n[0, T] \times P_n[0, T] \times P_m[0, T], \|\cdot\|_{L_n^2[0, T] \times L_n^2[0, T] \times L_m^2[0, T]} \right).$$

Замечание 5.3.1. Отметим следующий факт. Поскольку, как известно, пространство $(C_n[0, T], \|\cdot\|_{L_n^2[0, T]})$ всюду плотно в пространстве $L_n^2[0, T]$, а пространство $(P_n[0, T], \|\cdot\|_{L_n^2[0, T]})$ также всюду плотно в пространстве $L_n^2[0, T]$, тогда пространство X^* сопряженное пространству X , введенному в предыдущем абзаце, изометрически изоморфно [295] пространству $L_n^2[0, T] \times L_n^2[0, T] \times L_m^2[0, T]$.

5.4 Необходимые условия минимума

Сформулируем условие минимума для функционала $I(x, z, u)$, вытекающее из его построения. Напомним, что функционал $I(x, z, u)$ определен на пространстве $C_n[0, T] \times P_n[0, T] \times P_m[0, T]$.

Теорема 5.4.1. Пусть выполнены Предположения 5.2.1, 5.2.2. Для того чтобы точка (x^*, z^*, u^*) доставляла минимум функционалу $I(x, z, u)$, необходимо и достаточно, чтобы $I(x^*, z^*, u^*) = 0$.

Для того чтобы получить более конструктивное (чем приведенное в теореме 5.4.1) условие минимума, пригодное для построения численных методов решения поставленной задачи, предварительно исследуем дифференциальные свойства функционала $I(x, z, u)$.

Используя классическую вариацию, можно непосредственно доказать дифференцируемость по Гато функционала $I_2(z)$; имеем

$$\nabla I_2(z) = x_0 + \int_0^T z(t)dt - x_T.$$

По правилам квазидифференциального исчисления [192] можно положить

$$\mathcal{D} I_2(z) = \left[\underline{\partial} I_2(z), \bar{\partial} I_2(z) \right] := \left[x_0 + \int_0^T z(t)dt - x_T, 0_n \right].$$

Формально обозначим $\underline{\partial} \varphi_2(x, z, u, t) = \left(0_n, x_0 + \int_0^T z(t)dt - x_T, 0_m \right)'$,
 $\bar{\partial} \varphi_2(x, z, u, t) = (0_n, 0_n, 0_m)'$.

Используя классическую вариацию и интегрирование по частям, можно непосредственно проверить (ср. [184]) дифференцируемость по Гато функционала $I_4(x, z)$; получаем

$$\nabla I_4(x, z) = \left(\begin{array}{c} x - x_0 - \int_0^t z(\tau)d\tau \\ - \int_t^T \left(x(\tau) - x_0 - \int_0^\tau z(s)ds \right) d\tau \end{array} \right).$$

По правилам квазидифференциального исчисления [192] можно положить

$$\mathcal{D} I_4(x, z) = \left[\underline{\partial} I_4(x, z), \bar{\partial} I_4(x, z) \right] := \left[\left(\begin{array}{c} x - x_0 - \int_0^t z(\tau)d\tau \\ - \int_t^T \left(x(\tau) - x_0 - \int_0^\tau z(s)ds \right) d\tau \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0_n \\ 0_n \end{array} \right) \right].$$

Формально обозначим $\bar{\partial} \varphi_4(x, z, u, t) = (0_n, 0_n, 0_m)'$, $\underline{\partial} \varphi_4(x, z, u, t) = \left(x(t) - x_0 - \int_0^t z(\tau)d\tau, - \int_t^T \left(x(\tau) - x_0 - \int_0^\tau z(s)ds \right) d\tau, 0_m \right)'$.

Изучим теперь дифференциальные свойства функционалов $I_1(x, z, u)$ и $I_3(u)$. Для этого докажем следующую теорему для функционала более общего вида.

Теорема 5.4.2. Пусть задан функционал

$$J(\xi) = \int_0^T \varphi(\xi(t), t)dt,$$

где $\xi \in P_l[0, T]$, функция $\varphi(\xi, t)$ непрерывна и также абсолютно равномерно квазидифференцируема, с квазидифференциалом $[\underline{\partial} \varphi(\xi, t), \bar{\partial} \varphi(\xi, t)]$. Предположим также, что отображения $t \rightarrow \underline{\partial} \varphi(\xi(t), t)$ и $t \rightarrow \bar{\partial} \varphi(\xi(t), t)$ полунепрерывны сверху.

Тогда функционал $J(\xi)$ квазидифференцируем, то есть

1) Производная функционала $J(\xi)$ по направлению $g \in P_l[0, T]$ существует и имеет вид

$$\frac{\partial J(\xi)}{\partial g} = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha} (J(\xi + \alpha g) - J(\xi)) = \max_{v \in \underline{\partial}J(\xi)} v(g) + \min_{w \in \bar{\partial}J(\xi)} w(g), \quad (5.11)$$

где множества $\underline{\partial}J(\xi)$, $\bar{\partial}J(\xi)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \underline{\partial}J(\xi) = \left\{ v \in \left(P_l[0, T], \|\cdot\|_{L_l^2} \right)^* \mid v(g) = \int_0^T \langle v(t), g(t) \rangle dt \quad \forall g \in P_l[0, T], \right. \\ \left. v \in L_l^\infty[0, T], \quad v(t) \in \underline{\partial}\varphi(\xi(t), t) \quad \forall t \in [0, T] \right\}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \bar{\partial}J(\xi) = \left\{ w \in \left(P_l[0, T], \|\cdot\|_{L_l^2} \right)^* \mid w(g) = \int_0^T \langle w(t), g(t) \rangle dt \quad \forall g \in P_l[0, T], \right. \\ \left. w \in L_l^\infty[0, T], \quad w(t) \in \bar{\partial}\varphi(\xi(t), t) \quad \forall t \in [0, T] \right\}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

2) Множества $\underline{\partial}J(\xi)$, $\bar{\partial}J(\xi)$ являются выпуклыми и слабо* компактными подмножествами пространства $(P_l[0, T], \|\cdot\|_{L_l^2[0, T]})^*$.

Доказательство. Докажем утверждение 1).

Поскольку функция $\varphi(\xi, t)$ квазидифференцируема по предположению, то для каждого $g \in P_l[0, T]$ и для каждого $\alpha > 0$ мы имеем (см. формулу (5.2))

$$\begin{aligned} J(\xi + \alpha g) - J(\xi) = \int_0^T \max_{v \in \underline{\partial}\varphi(\xi, t)} \langle v(t), \alpha g(t) \rangle dt + \int_0^T \min_{w \in \bar{\partial}\varphi(\xi, t)} \langle w(t), \alpha g(t) \rangle dt + \\ + \int_0^T o(\alpha, \xi(t), g(t), t) dt, \quad \frac{o(\alpha, \xi(t), g(t), t)}{\alpha} \rightarrow 0, \quad \alpha \downarrow 0, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (5.14)$$

На этом этапе проверим, что интегралы в правой части этой формулы корректно определены.

Поскольку $\xi, g \in P_l[0, T]$ и функция $\varphi(\xi, t)$ непрерывна, то для каждого $\alpha > 0$ функции $t \rightarrow \varphi(\xi(t), t)$ и $t \rightarrow \varphi(\xi(t) + \alpha g(t), t)$ принадлежат пространству $L_1^\infty[0, T]$.

При сделанном предположении отображения $t \rightarrow \underline{\partial}\varphi(\xi(t), t)$ и $t \rightarrow \bar{\partial}\varphi(\xi(t), t)$ полунепрерывны сверху и тогда также измеримы [143]. Тогда в силу кусочной непрерывности и ограниченности функции $g(t)$ и в силу непрерывности скалярного произведения получаем, что для каждого $\alpha > 0$ отображения $t \rightarrow \max_{v(t) \in \underline{\partial}\varphi(\xi(t), t)} \langle v(t), \alpha g(t) \rangle$ и $t \rightarrow \min_{w(t) \in \bar{\partial}\varphi(\xi(t), t)} \langle w(t), \alpha g(t) \rangle$ полунепрерывны сверху [123] и тогда также измеримы [143]. В ходе доказательства утверждения 2) будет показано, что при сделанных предположениях множества $\underline{\partial}\varphi(\xi, t)$ и $\bar{\partial}\varphi(\xi, t)$ ограничены равномерно по $t \in [0, T]$, отсюда, учитывая, что $g \in P_l[0, T]$, проверим, что для каждого $\alpha > 0$ отображения $t \rightarrow \max_{v(t) \in \underline{\partial}\varphi(\xi(t), t)} \langle v(t), \alpha g(t) \rangle$ и $t \rightarrow \min_{w(t) \in \bar{\partial}\varphi(\xi(t), t)} \langle w(t), \alpha g(t) \rangle$ также ограничены равномерно по $t \in [0, T]$. Действительно, зафиксируем некоторые

$g \in P_l[0, T]$ и $\alpha > 0$ и для каждого $t \in [0, T]$ возьмем такой вектор $\bar{v}(t) \in \underline{\partial}\varphi(\xi(t), t)$, что $\langle \bar{v}(t), \alpha g(t) \rangle = \max_{v(t) \in \underline{\partial}\varphi(\xi(t), t)} \langle v(t), \alpha g(t) \rangle$ (вектор $\bar{v}(t)$ существует, поскольку для каждого $t \in [0, T]$ множество $\underline{\partial}\varphi(\xi(t), t)$ является выпуклым компактом). Тогда по неравенству Коши-Буняковского $\langle \bar{v}(t), \alpha g(t) \rangle \leq \alpha \|\bar{v}(t)\|_{\mathbb{R}^l} \|g(t)\|_{\mathbb{R}^l}$, и значение в правой части ограничено (равномерно по $t \in [0, T]$), так как $g \in P_l[0, T]$ и так как множество $\underline{\partial}\varphi(\xi(t), t)$ ограничено равномерно по $t \in [0, T]$. (Доказательство относительно отображения $t \rightarrow \min_{w(t) \in \bar{\partial}\varphi(\xi(t), t)} \langle w(t), \alpha g(t) \rangle$ проводится совершенно аналогично.) Итак, получаем, что для каждого $\alpha > 0$ отображения $t \rightarrow \max_{v(t) \in \underline{\partial}\varphi(\xi(t), t)} \langle v(t), \alpha g(t) \rangle$ и $t \rightarrow \min_{w(t) \in \bar{\partial}\varphi(\xi(t), t)} \langle w(t), \alpha g(t) \rangle$ принадлежат пространству $L_1^\infty[0, T]$.

Тогда для каждого $\alpha > 0$ имеем $t \rightarrow o(\alpha, \xi(t), g(t), t) \in L_1^\infty[0, T]$ и в силу абсолютной равномерной квазидифференцируемости функции $\varphi(\xi, t)$ имеем

$$\frac{o(\alpha, \xi(t), g(t), t)}{\alpha} =: \frac{o(\alpha)}{\alpha} \rightarrow 0, \quad \alpha \downarrow 0. \quad (5.15)$$

Теперь наша цель — “вывести операции взятия максимума и минимума из-под интеграла”, т. е. получить выражение в правой части формулы (5.11).

Рассмотрим функционал $\int_0^T \max_{v \in \underline{\partial}\varphi(\xi, t)} \langle v(t), \alpha g(t) \rangle dt$ подробно. Для простоты здесь мы отождествляем вектор-функции v и v . Для каждого $\alpha > 0$ и для каждого $t \in [0, T]$ имеем очевидное неравенство

$$\max_{v \in \underline{\partial}\varphi(\xi, t)} \langle v(t), \alpha g(t) \rangle \geq \langle v(t), \alpha g(t) \rangle$$

где $v(t)$ является измеримой ветвью отображения $t \rightarrow \underline{\partial}\varphi(\xi(t), t)$ (в силу отмеченного свойства ограниченности множества $\underline{\partial}\varphi(\xi, t)$ равномерно по $t \in [0, T]$ имеем $v \in L_1^\infty[0, T]$) и из вида формулы (5.12) для каждого $\alpha > 0$ имеем неравенство

$$\int_0^T \max_{v \in \underline{\partial}\varphi(\xi, t)} \langle v(t), \alpha g(t) \rangle dt \geq \max_{v \in \underline{\partial}J(\xi)} \int_0^T \langle v(t), \alpha g(t) \rangle dt.$$

Поскольку для каждого $\alpha > 0$ и для каждого $t \in [0, T]$ имеем

$$\max_{v \in \underline{\partial}\varphi(\xi, t)} \langle v(t), \alpha g(t) \rangle \in \left\{ \langle v(t), \alpha g(t) \rangle \mid v(t) \in \underline{\partial}\varphi(\xi(t), t) \right\}$$

и множество $\underline{\partial}\varphi(\xi, t)$ замкнуто и ограничено при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ по определению субдифференциала и отображение $t \rightarrow \underline{\partial}\varphi(\xi(t), t)$ полунепрерывно сверху по предположению, и также так как скалярное произведение непрерывно и $g \in P_l[0, T]$, тогда в силу леммы Филишова [208] существует измеримая ветвь $\bar{v}(t)$ отображения $t \rightarrow \underline{\partial}\varphi(\xi(t), t)$, такая что для каждого $\alpha > 0$ и для каждого $t \in [0, T]$ будет

$$\max_{v \in \underline{\partial}\varphi(\xi, t)} \langle v(t), \alpha g(t) \rangle = \langle \bar{v}(t), \alpha g(t) \rangle,$$

поэтому элемент $\bar{v} \in \underline{\partial}J(\xi)$ доставляет равенство предыдущему неравенству. Итак, окончательно мы получаем

$$\int_0^T \max_{v \in \underline{\partial}\varphi(\xi, t)} \langle v(t), \alpha g(t) \rangle dt = \max_{v \in \underline{\partial}J(\xi)} \int_0^T \langle v(t), \alpha g(t) \rangle dt. \quad (5.16)$$

Рассмотрение функционала $\int_0^T \min_{w \in \bar{\partial}\varphi(\xi, t)} \langle w(t), \alpha g(t) \rangle dt$ проводится совершенно аналогично (здесь мы отождествляем w и ϖ). Учитывая вид формулы (5.13), имеем

$$\int_0^T \min_{w \in \bar{\partial}\varphi(\xi, t)} \langle w(t), \alpha g(t) \rangle dt = \min_{w \in \bar{\partial}J(\xi)} \int_0^T \langle w(t), \alpha g(t) \rangle dt. \quad (5.17)$$

Из выражений (5.14), (5.15), (5.16), (5.17) следует формула (5.11) (см. выражение (5.4)).

Докажем утверждение 2).

Выпуклость множеств $\underline{\partial}J(\xi)$ и $\bar{\partial}J(\xi)$ немедленно следует из выпуклости при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ множеств $\underline{\partial}\varphi(\xi, t)$ и $\bar{\partial}\varphi(\xi, t)$ соответственно.

Докажем ограниченность множества $\underline{\partial}\varphi(\xi, t)$ равномерно по $t \in [0, T]$. В силу полунепрерывности сверху отображения $t \rightarrow \underline{\partial}\varphi(\xi(t), t)$ при каждом $t \in [0, T]$ существует такое число $\delta(t)$, что при условии $|\bar{t} - t| < \delta(t)$ справедливо включение $\underline{\partial}\varphi(\xi(\bar{t}), \bar{t}) \subset B_r(\underline{\partial}\varphi(\xi(t), t))$ при $\bar{t} \in [0, T]$, где r - некоторое фиксированное конечное положительное число. Интервалы $D_{\delta(t)}(t)$, $t \in [0, T]$, образуют открытое покрытие отрезка $[0, T]$, поэтому по лемме Гейне-Бореля из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. Следовательно, существует такое число $\delta > 0$, что для любого $t \in [0, T]$ включение $\underline{\partial}\varphi(\xi(\bar{t}), \bar{t}) \subset B_r(\underline{\partial}\varphi(\xi(t), t))$ выполняется, как только $|\bar{t} - t| < \delta$ и $\bar{t} \in [0, T]$. Это означает, что для отрезка $[0, T]$ существует конечное разбиение $t_1 = 0, t_2, \dots, t_{N-1}, t_N = T$ с диаметром δ такое, что $\underline{\partial}\varphi(\xi, t) \subset \bigcup_{i=1}^N B_r(\underline{\partial}\varphi(\xi(t_i), t_i))$ для всех $t \in [0, T]$. Осталось заметить, что множество $\bigcup_{i=1}^N B_r(\underline{\partial}\varphi(\xi(t_i), t_i))$ ограничено в силу компактности множества $\underline{\partial}\varphi(\xi, t)$ при каждом фиксированном $t \in [0, T]$. Ограниченность множества $\bar{\partial}\varphi(\xi, t)$ равномерно по $t \in [0, T]$ может быть доказана аналогично.

Слабая* компактность множества $\underline{\partial}J(\xi)$ в пространстве $(P_l[0, T], \|\cdot\|_{L_l^2[0, T]})^*$ следует из его слабой компактности (в этом пространстве) в силу определений этих топологий [295]. Докажем слабую компактность множества $\underline{\partial}J(\xi)$ в пространстве $(P_l[0, T], \|\cdot\|_{L_l^2[0, T]})^*$. Заметим, что в силу замечания 5.3.1 достаточно рассмотреть образ множества $\underline{\partial}J(\xi)$ (при изометрически изоморфном отображении из $(P_l[0, T], \|\cdot\|_{L_l^2[0, T]})^*$ в $L_l^2[0, T]$) в пространстве $L_l^2[0, T]$. Для простоты обозначим этот образ также через $\underline{\partial}J(\xi)$. Поэтому наша цель сейчас — доказать слабую компактность множества $\underline{\partial}J(\xi)$ в пространстве $L_l^2[0, T]$. Пространство $L_l^2[0, T]$ рефлексивно [203], поэтому множество там слабо компактно тогда и только тогда,

когда оно ограничено по норме и слабо замкнуто [203] в этом пространстве. Ограниченность этого множества по норме была доказана в предыдущем абзаце. В следующем абзаце мы докажем, что это множество слабо замкнуто. Аналогичное рассуждение справедливо и для множества $\bar{\partial}J(\xi)$.

Докажем, что множество $\underline{\partial}J(\xi)$ слабо замкнуто. Как показано при доказательстве утверждения 1) и в начале доказательства утверждения 2), множество $\underline{\partial}J(\xi)$ выпукло и его элементы v принадлежат пространству $L_1^\infty[0, T]$. Тогда тем более множество $\underline{\partial}J(\xi)$ является выпуклым подмножеством пространства $L_1^2[0, T]$. Докажем, что множество $\underline{\partial}J(\xi)$ замкнуто в слабой топологии пространства $L_1^2[0, T]$. Пусть $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность функций из множества $\underline{\partial}J(\xi)$, сходящаяся к функции v^* в сильной топологии пространства $L_1^2[0, T]$. Известно [353], что эта последовательность имеет подпоследовательность $\{v_{n_k}\}_{n_k=1}^\infty$, сходящуюся поточечно к v^* почти всюду на $[0, T]$, т. е. существует такое подмножество $T' \subset [0, T]$, имеющее меру T , что для каждой точки $t \in T'$ имеем $v_{n_k}(t) \in \underline{\partial}\varphi(\xi(t), t)$ и $v_{n_k}(t)$ сходится к $v^*(t)$, $n_k = 1, 2, \dots$. Но множество $\underline{\partial}\varphi(\xi(t), t)$ замкнуто при каждом $t \in [0, T]$ по определению субдифференциала, следовательно, для каждого $t \in T'$ имеем $v^*(t) \in \underline{\partial}\varphi(\xi(t), t)$. Итак, множество $\underline{\partial}J(\xi)$ замкнуто в сильной топологии пространства $L_1^2[0, T]$, но оно также выпукло, поэтому оно также замкнуто [203] в слабой топологии пространства $L_1^2[0, T]$. Аналогичным образом можно доказать, что множество $\bar{\partial}J(\xi)$ слабо замкнуто (в $L_1^2[0, T]$).

Теорема доказана. □

Замечание 5.4.1. Предположение об абсолютной равномерной квазидифференцируемости сделано для упрощения изложения. С помощью специальной формы теоремы о среднем значении [188] для квазидифференциалов можно показать, что это предположение на самом деле излишне.

Таким образом, как видно из теоремы 5.4.2, квазидифференциалы функционалов $I_1(x, z, u)$ и $I_3(u)$ полностью определяются квазидифференциалами их подынтегральных функций (в каждый момент времени $t \in [0, T]$). Ниже приводится подробное описание вычисления требуемых квазидифференциалов, а также основные правила квазидифференциального исчисления.

С помощью правил квазидифференциального исчисления [180] при каждом $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$ и при каждом $t \in [0, T]$ вычислим квазидифференциалы ниже.

$$\mathcal{D} \left| z_i - f_i(x, u, t) \right| = \left[\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) \\ - \bar{\partial} f_i(x, u, t), -\underline{\partial} f_i(x, u, t) \end{array} \right],$$

если $z_i - f_i(x, u, t) > 0$. Здесь 1 стоит на $(n + i)$ -ом месте.

$$\mathcal{D} \left| z_i - f_i(x, u, t) \right| = \left[\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) \\ + \underline{\partial} f_i(x, u, t), \bar{\partial} f_i(x, u, t) \end{array} \right],$$

если $z_i - f_i(x, u, t) < 0$. Здесь -1 стоит на $(n + i)$ -ом месте.

$$\begin{aligned} & \mathcal{D} \left| z_i - f_i(x, u, t) \right| = \\ & = \left[\text{co} \left\{ \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) \\ - 2\bar{\partial} f_i(x, u, t), \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) \\ + 2\underline{\partial} f_i(x, u, t) \right\}, -\underline{\partial} f_i(x, u, t) + \bar{\partial} f_i(x, u, t) \right], \end{aligned}$$

если $z_i - f_i(x, u, t) = 0$. Здесь 1 и -1 стоят на $(n + i)$ -ом месте.

$$\text{Положим } \left[\underline{\partial} \varphi_1(x, z, u, t), \bar{\partial} \varphi_1(x, z, u, t) \right] = \mathcal{D} \sum_{i=1}^n \left| z_i(t) - f_i(x(t), u(t), t) \right|.$$

$$\mathcal{D} \max \{u_j - \bar{u}_j, 0\} = \left[\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) \\ 0_m \end{array} \right],$$

если $u_j - \bar{u}_j > 0$. Здесь 1 стоит на j -ом месте.

$$\mathcal{D} \max \{u_j - \bar{u}_j, 0\} = [0_m, 0_m],$$

если $u_j - \bar{u}_j < 0$.

$$\mathcal{D} \max \{u_j - \bar{u}_j, 0\} = \left[\begin{array}{c} \text{co} \left\{ \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) \right\}, 0_m \end{array} \right], 0_m,$$

если $u_j - \bar{u}_j = 0$. Здесь 1 стоит на j -ом месте.

$$\mathcal{D} \max \{\underline{u}_j - u_j, 0\} = \left[\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) \\ 0_m \end{array} \right],$$

if $\underline{u}_j - u_j(t) > 0$. Здесь -1 стоит на j -ом месте.

$$\mathcal{D} \max \{\underline{u}_j - u_j, 0\} = [0_m, 0_m],$$

если $\underline{u}_j - u_j(t) < 0$.

$$\mathcal{D} \max \{ \underline{u}_j - u_j, 0 \} = \left[\text{co} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, 0_m \right\}, 0_m \right],$$

если $\underline{u}_j - u_j(t) = 0$. Здесь -1 стоит на j -ом месте.

$$\text{Пусть } \left[\underline{\partial}\varphi_3(x, z, u, t), \bar{\partial}\varphi_3(x, z, u, t) \right] = \mathcal{D} \left(\sum_{i=1}^m \max \{ u_j(t) - \bar{u}_j, 0 \} + \sum_{j=1}^m \max \{ \underline{u}_j - u_j(t), 0 \} \right).$$

В формулах предыдущего параграфа субдифференциалы $\underline{\partial}f_i(x, u, t)$ и супердифференциалы $\bar{\partial}f_i(x, u, t)$, $i = \overline{1, n}$, также вычисляются с помощью аппарата квазидифференциального исчисления. Книга [180] содержит подробное описание этих правил для богатого класса функций. Приведем лишь некоторые из этих правил, которые использовались в формулах предыдущего параграфа. Пусть $\xi \in \mathbb{R}^l$. Если функция $\varphi(\xi)$ квазидифференцируема в точке $\xi_0 \in \mathbb{R}^l$ и λ — некоторое число, то имеем

$$\lambda \mathcal{D}\varphi(\xi_0) = \left[\lambda \underline{\partial}\varphi(\xi_0), \lambda \bar{\partial}\varphi(\xi_0) \right], \quad \text{if } \lambda \geq 0,$$

$$\lambda \mathcal{D}\varphi(\xi_0) = \left[\lambda \bar{\partial}\varphi(\xi_0), \lambda \underline{\partial}\varphi(\xi_0) \right], \quad \text{if } \lambda < 0.$$

Если функции $\varphi_k(\xi)$, $k = \overline{1, r}$, квазидифференцируемы в точке $\xi_0 \in \mathbb{R}^l$, тогда квазидифференциал функции $\varphi(\xi) = \max_{k=\overline{1, r}} \varphi_k(\xi)$ в этой точке вычисляется по формуле

$$\mathcal{D}\varphi(\xi_0) = \left[\underline{\partial}\varphi(\xi_0), \bar{\partial}\varphi(\xi_0) \right],$$

$$\underline{\partial}\varphi(\xi_0) = \text{co} \left\{ \underline{\partial}\varphi_k(\xi_0) - \sum_{i \in P(\xi_0), i \neq k} \bar{\partial}\varphi_i(\xi_0), k \in P(\xi_0) \right\},$$

$$\bar{\partial}\varphi(\xi_0) = \sum_{i \in P(\xi_0)} \bar{\partial}\varphi_i(\xi_0),$$

$$P(\xi_0) = \left\{ k \in \{1, \dots, r\} \mid \varphi_k(\xi_0) = \varphi(\xi_0) \right\}.$$

Если функции $\varphi_k(\xi)$, $k = \overline{1, r}$, квазидифференцируемы в точке $\xi_0 \in \mathbb{R}^l$, тогда квазидифференциал функции $\varphi(\xi) = \min_{k=\overline{1, r}} \varphi_k(\xi)$ в этой точке вычисляется по формуле

$$\mathcal{D}\varphi(\xi_0) = \left[\underline{\partial}\varphi(\xi_0), \bar{\partial}\varphi(\xi_0) \right],$$

$$\underline{\partial}\varphi(\xi_0) = \sum_{j \in Q(\xi_0)} \underline{\partial}\varphi_j(\xi_0),$$

$$\bar{\partial}\varphi(\xi_0) = \text{co}\left\{\bar{\partial}\varphi_k(\xi_0) - \sum_{j \in Q(\xi_0), j \neq k} \underline{\partial}\varphi_j(\xi_0), k \in Q(\xi_0)\right\},$$

$$Q(\xi_0) = \left\{k \in \{1, \dots, r\} \mid \varphi_k(\xi_0) = \varphi(\xi_0)\right\}.$$

Отметим также, что если функция $\varphi(\xi)$ субдифференцируема в точке $\xi_0 \in \mathbb{R}^l$, то ее квазидифференциал в этой точке можно представить в виде

$$\mathcal{D}\varphi(\xi_0) = \left[\underline{\partial}\varphi(\xi_0), 0_l\right],$$

и если функция $\varphi(\xi)$ супердифференцируема в точке $\xi_0 \in \mathbb{R}^l$, то ее квазидифференциал в этой точке можно представить в виде

$$\mathcal{D}\varphi(\xi_0) = \left[0_l, \bar{\partial}\varphi(\xi_0)\right].$$

Эти две формулы можно принять за определения субдифференцируемой и супердифференцируемой функции соответственно. Если функция $\varphi(\xi)$ дифференцируема в точке $\xi_0 \in \mathbb{R}^l$, то ее квазидифференциал можно представить в виде

$$\mathcal{D}\varphi(\xi_0) = \left[\varphi'(\xi_0), 0_l\right] \text{ или } \mathcal{D}\varphi(\xi_0) = \left[0_l, \varphi'(\xi_0)\right],$$

где $\varphi'(\xi_0)$ — градиент функции $\varphi(\xi)$ в точке ξ_0 . Последний факт указывает на то, что существует не единственный способ построения квазидифференциала. Отметим также, что субдифференциал (супердифференциал) конечной суммы квазидифференцируемых функций является суммой субдифференциалов (супердифференциалов) слагаемых, т. е. если функции $\varphi_k(\xi)$, $k = \overline{1, r}$, квазидифференцируемы в точке $\xi_0 \in \mathbb{R}^l$, то квазидифференциал функции $\varphi(\xi) = \sum_{k=1}^r \varphi_k(\xi)$ в этой точке вычисляется по формуле

$$\mathcal{D}\varphi(\xi_0) = \left[\sum_{k=1}^r \underline{\partial}\varphi_k(\xi_0), \sum_{k=1}^r \bar{\partial}\varphi_k(\xi_0)\right].$$

С помощью указанных правил и формул (5.12) и (5.13) находим квазидифференциалы $\mathcal{D}I_1(x, z, u)$ и $\mathcal{D}I_3(u)$.

Мы имеем следующую окончательную формулу [192] для вычисления квазидифференциала функционала $I(x, z, u)$ в точке (x, z, u)

$$\mathcal{D}I(x, z, u) = \left[\underline{\partial}I(x, z, u), \bar{\partial}I(x, z, u)\right] = \left[\sum_{k=1}^4 \underline{\partial}I_k(x, z, u), \sum_{k=1}^4 \bar{\partial}I_k(x, z, u)\right] \quad (5.18)$$

где формально $I_2(x, z, u) := I_2(z)$, $I_3(x, z, u) := I_3(u)$, $I_4(x, z, u) := I_4(x, z)$.

Формально обозначим $\underline{\partial}\varphi(\xi, t) = \sum_{i=1}^4 \underline{\partial}\varphi_i(x, z, u, t)$, $\bar{\partial}\varphi(\xi, t) = \sum_{i=1}^4 \bar{\partial}\varphi_i(x, z, u, t)$.

Используя известное условие минимума [190] (функционала $I(x, z, u)$ в точке (x^*, z^*, u^*) в этом случае) в терминах квазидифференциала, получаем следующую теорему.

Теорема 5.4.3. Пусть выполнены Предположения 5.2.1, 5.2.2. Для того чтобы управление $u^* \in U$ переводило систему (5.5) из начальной точки (5.6) в конечное состояние (5.8) за время T , необходимо, чтобы для каждой измеримой ветви $w(\cdot)$ многозначного отображения $t \rightarrow \bar{\partial}\varphi(\xi^*, t)$ следующее включение

$$-w(t) \in \underline{\partial}\varphi(\xi^*, t) \quad (5.19)$$

выполнялось при почти всех $t \in [0, T]$.

Если $I(x^*, z^*, u^*) = 0$, тогда условие (5.19) является также достаточным.

Замечание 5.4.2. Строго говоря, условие минимума (5.19) сформулировано в статье [190] для функционала, определенного на другом пространстве, однако из доказательства этой статьи видно, что данный результат остается справедливым и для случая пространства, рассматриваемого в диссертации.

Теорема 5.4.3 уже содержит конструктивное условие минимума, поскольку на ее основе можно построить метод квазидифференциального спуска; и для решения каждой из подзадач, возникающих при реализации этого метода, (для широкого класса функций) известны эффективные алгоритмы их решения.

После того, как построено направление наискорейшего (квазидифференциального) спуска (см. следующий раздел), можно применить некоторый численный метод (основанный на использовании этого направления) негладкой оптимизации для нахождения стационарных точек функционала $I(x, z, u)$. В главе для численного моделирования используется алгоритм наискорейшего (квазидифференциального) спуска.

5.5 Метод квазидифференциального спуска

Опишем следующий метод квазидифференциального спуска для нахождения стационарных точек функционала $I(x, z, u)$.

Зафиксируем произвольную начальную точку $(x_{(1)}, z_{(1)}, u_{(1)})$ в пространстве $C_n[0, T] \times P_n[0, T] \times P_m[0, T]$. Пусть точка $(x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)}) \in C_n[0, T] \times P_n[0, T] \times P_m[0, T]$ уже построена. Если для каждого $t \in [0, T]$ выполняется условие минимума (5.19) (на практике с некоторой фиксированной точностью $\bar{\varepsilon}$ в смысле L^2 -нормы (см. задачу (5.21)) или в дискретные моменты времени $t_i, i = \overline{1, N}$, с некоторым фиксированным рангом дискретизации N в смысле \mathbb{R} -нормы (см. задачу (5.22))), то $(x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)})$ является стационарной точкой функционала $I(x, z, u)$ и процесс завершается. В противном случае положим

$$(x_{(k+1)}, z_{(k+1)}, u_{(k+1)}) = (x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)}) + \gamma_{(k)} G(x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)})$$

где вектор-функция $G(x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)})$ является направлением квазидифференциального спуска функционала $I(x, z, u)$ в точке $(x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)})$, а величина $\gamma_{(k)}$ является решением следующей одномерной задачи

$$\min_{\gamma \geq 0} I\left((x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)}) + \gamma G(x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)})\right) = I\left((x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)}) + \gamma_{(k)} G(x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)})\right). \quad (5.20)$$

На практике задача выше решается на некотором интервале $[0, \bar{\gamma}]$ с некоторым фиксированным значением $\bar{\gamma}$. Тогда $I(x_{(k+1)}, z_{(k+1)}, u_{(k+1)}) \leq I(x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)})$. Если последовательность $(x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)})$, $k = 1, 2, \dots$, конечна, то ее последняя точка является стационарной точкой функционала $I(x, z, u)$ по построению. Если последовательность $(x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)})$, $k = 1, 2, \dots$, бесконечна, то описанный процесс может не привести к стационарной точке функционала $I(x, z, u)$, поскольку квазидифференциальное отображение $(x, z, u) \rightarrow \mathcal{D}I(x, z, u)$ не является непрерывным [180] в метрике Хаусдорфа.

Как видно из описанного алгоритма, для реализации k -й итерации необходимо решить три подзадачи. Первая подзадача — вычисление квазидифференциала функционала $I(x, z, u)$ в точке $(x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)})$. С помощью правил квазидифференциального исчисления решение этой подзадачи получено в формуле (5.18). Вторая подзадача — нахождение направления квазидифференциального спуска $G(x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)})$; решению этой подзадачи посвящены следующие два абзаца. Третья подзадача — одномерная минимизация (5.20); существует много эффективных методов [18] для ее решения.

Для того чтобы получить вектор-функцию $G(x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)})$, рассмотрим задачу

$$\max_{w \in \bar{\partial}I(x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)})} \min_{v \in \underline{\partial}I(x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)})} \int_0^T (v(t) + w(t))^2 dt. \quad (5.21)$$

Напомним, что для простоты мы отождествляем v и v , w и ϖ . Обозначим \bar{v} , \bar{w} решение задачи выше (ниже мы увидим, что такое решение существует). (Вектор-функции \bar{v} , \bar{w} , конечно, зависят от точки $(x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)})$, но для краткости мы опускаем эту зависимость в обозначениях.) Тогда вектор-функция $G(x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)}) = -(\bar{v} + \bar{w})$ является (не нормированным) направлением квазидифференциального спуска [180] функционала $I(x, z, u)$ в точке $(x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)})$. Отметим, что квазидифференциал функционала $I(x, z, u)$ в каждый момент времени $t \in [0, T]$ вычисляется независимо (т. е. его квазидифференциал, вычисленный в один момент времени, не зависит от его квазидифференциала, вычисленного в другой момент времени).

Замечание 5.5.1. Строго говоря, в [180] рассматривается только конечномерное пространство, однако, если использовать характеристику [5] ближайшего (по норме) элемента замкнутого выпуклого множества в гильбертовом пространстве через неотрицательность соответствующего скалярного произведения, то приведенное там доказательство показывает, что формула направления наискорейшего спуска остается верной и для рассматриваемого в диссертации случая.

Теперь проверим, что для решения задачи (5.21) в данном случае нужно решить задачу

$$\max_{w(t) \in \bar{\partial}\varphi(\xi_{(k)}, t)} \min_{v(t) \in \underline{\partial}\varphi(\xi_{(k)}, t)} (v(t) + w(t))^2 \quad (5.22)$$

для каждого $t \in [0, T]$. Заметим, что эта задача имеет решение, поскольку мы ищем хаусдорфово отклонение одного выпуклого компакта от другого (см. ниже).

Действительно, пусть $\bar{v}, \bar{w} \in L_n^\infty[0, T] \times L_n^\infty[0, T] \times L_m^\infty[0, T]$ (эти вектор-функции существуют по лемме Филиппова) таковы, что для каждого $t \in [0, T]$ мы имеем

$$(\bar{v}(t) + \bar{w}(t))^2 = \max_{w(t) \in \bar{\partial}\varphi(\xi_{(k)}, t)} \min_{v(t) \in \underline{\partial}\varphi(\xi_{(k)}, t)} (v(t) + w(t))^2.$$

Тогда мы получаем

$$\begin{aligned} \int_0^T (\bar{v}(t) + \bar{w}(t))^2 dt &= \int_0^T \max_{w(t) \in \bar{\partial}\varphi(\xi_{(k)}, t)} \min_{v(t) \in \underline{\partial}\varphi(\xi_{(k)}, t)} (v(t) + w(t))^2 dt = \\ &= \int_0^T \min_{v(t) \in \underline{\partial}\varphi(\xi_{(k)}, t)} (v(t) + \bar{w}(t))^2 dt = \min_{v \in \underline{\partial}I(x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)})} \int_0^T (v(t) + \bar{w}(t))^2 dt \end{aligned}$$

где последнее равенство верно по лемме Филиппова (ср. формулу (5.17)). Следовательно

$$\begin{aligned} \max_{w \in \bar{\partial}I(x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)})} \min_{v \in \underline{\partial}I(x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)})} \int_0^T (v(t) + w(t))^2 dt &\geq \\ &\geq \int_0^T \max_{w(t) \in \bar{\partial}\varphi(\xi_{(k)}, t)} \min_{v(t) \in \underline{\partial}\varphi(\xi_{(k)}, t)} (v(t) + w(t))^2 dt. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Теперь зафиксируем некоторые $\bar{\bar{w}} \in L_n^\infty[0, T] \times L_n^\infty[0, T] \times L_m^\infty[0, T]$. Вновь по лемме Филиппова получаем

$$\begin{aligned} \min_{v \in \underline{\partial}I(x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)})} \int_0^T (v(t) + \bar{\bar{w}}(t))^2 dt &= \int_0^T \min_{v(t) \in \underline{\partial}\varphi(\xi_{(k)}, t)} (v(t) + \bar{\bar{w}}(t))^2 dt \leq \\ &\leq \int_0^T \max_{w(t) \in \bar{\partial}\varphi(\xi_{(k)}, t)} \min_{v(t) \in \underline{\partial}\varphi(\xi_{(k)}, t)} (v(t) + w(t))^2 dt. \end{aligned}$$

Поскольку вектор-функция $\bar{\bar{w}}(t)$ была выбрана произвольно, мы получаем неравенство

$$\begin{aligned} \max_{w \in \bar{\partial}I(x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)})} \min_{v \in \underline{\partial}I(x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)})} \int_0^T (v(t) + w(t))^2 dt &\leq \\ &\leq \int_0^T \max_{w(t) \in \bar{\partial}\varphi(\xi_{(k)}, t)} \min_{v(t) \in \underline{\partial}\varphi(\xi_{(k)}, t)} (v(t) + w(t))^2 dt. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Из неравенств (5.23) и (5.24) окончательно получаем равенство

$$\begin{aligned} & \max_{w \in \bar{\partial} I(x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)})} \min_{v \in \partial I(x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)})} \int_0^T (v(t) + w(t))^2 dt = \\ & = \int_0^T \max_{w(t) \in \bar{\partial} \varphi(\xi_{(k)}, t)} \min_{v(t) \in \partial \varphi(\xi_{(k)}, t)} (v(t) + w(t))^2 dt. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Равенство (11.34) показывает, что для решения задачи (5.21) достаточно решить задачу (5.22) для каждого момента времени $t \in [0, T]$. Еще раз подчеркнем, что это утверждение справедливо в силу особой структуры квазидифференциала, которая в свою очередь имеет место из-за реализованного “разделения” вектор-функций $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ на “независимые” переменные.

Задача (5.22) при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ является конечномерной задачей нахождения отклонения Хаусдорфа одного выпуклого компакта (минус супердифференциала) от другого выпуклого компакта (субдифференциала). Эта задача может быть эффективно решена для богатого класса функций; ее решение описано в следующем параграфе. На практике производится (равномерное) разбиение интервала $[0, T]$, и эта задача решается для каждой точки разбиения, т. е. вычисляется $G((x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)}), t_i)$, где $t_i \in [0, T]$, $i = \overline{1, N}$, являются точками дискретизации (см. обозначения лемм 5.5.1, 5.5.2 ниже). При дополнительном естественном предположении Лемма 5.5.1 ниже гарантирует, что вектор-функция, полученная с помощью кусочно-линейной интерполяции направлений квазидифференциального спуска, вычисленных в каждой точке такого разбиения интервала $[0, T]$, сходится в пространстве $L^2_{2n+m}[0, T]$ (при стремлении ранга дискретизации N к бесконечности) к искомой вектор-функции $G(x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)})$. Такое приближение гарантирует, что следующая точка $[x_{k+1}, z_{k+1}, u_{k+1}]$ “не покидает” пространство $C_n[0, T] \times P_n[0, T] \times P_m[0, T]$, обеспечивая корректность метода в этом смысле.

Как было отмечено в предыдущем параграфе, при реализации алгоритма требуется найти хаусдорфово отклонение минус супердифференциала от субдифференциала функционала $I(x, z, u)$ в каждый момент времени (равномерного) разбиения интервала $[0, T]$. В этом параграфе мы подробно описываем решение (для богатого класса функций) этой подзадачи для некоторого фиксированного значения $t \in [0, T]$. Известно [180], что во многих практических случаях субдифференциал $\partial \varphi(\xi, t)$ является выпуклым многогранником $A(t) \subset \mathbb{R}^{2n+m}$ и аналогично супердифференциал $\bar{\partial} \varphi(\xi, t)$ является выпуклым многогранником $B(t) \subset \mathbb{R}^{2n+m}$. Например, если некоторая функция является суперпозицией конечного числа максимумов и минимумов непрерывно дифференцируемых функций, то ее субдифференциал и ее супердифференциал являются выпуклыми многогранниками. При этом, конечно, множества $A(t)$

и $B(t)$ зависят от точки (x, z, u) . Для простоты записи мы опустим эту зависимость в обозначениях этого параграфа. Найдем хаусдорфово отклонение множества $-B(t)$ от множества $A(t)$. Ясно, что в этом случае достаточно перебрать все вершины $b_j(t)$, $j = \overline{1, s}$ (здесь s — число вершин многогранника $-B(t)$): найти евклидово расстояние от каждой из этих вершин до многогранника $A(t)$, а затем среди всех полученных расстояний выбрать наибольшее. Пусть искомое евклидово расстояние, соответствующее вершине $b_j(t)$, $j = \overline{1, s}$, достигается в точке $a_j(t) \in A(t)$ (единственной, поскольку $A(t)$ — выпуклый компакт). Тогда искомое отклонение есть величина $\|b_{\bar{j}}(t) - a_{\bar{j}}(t)\|_{\mathbb{R}^{2n+m}}$, $\bar{j} \in \{1, \dots, s\}$. (При этом это отклонение может достигаться в нескольких вершинах многогранника $-B(t)$; в этом случае $b_{\bar{j}}(t)$ обозначает любую из них.) Отметим, что возникающая задача нахождения евклидова расстояния от точки до выпуклого многогранника может быть эффективно решена различными методами (см., например, [39], [67]).

Сначала приведем лемму с простым условием, которое, с одной стороны, вполне естественно для приложений, а с другой стороны, гарантирует, что функция $\mathcal{L}(t)$, полученная с помощью кусочно-линейной интерполяции искомой функции $\mathcal{G} \in L_1^\infty[0, T]$, сходится к ней в пространстве $L_1^2[0, T]$.

Лемма 5.5.1. Пусть функция $\mathcal{G} \in L_1^\infty[0, T]$ удовлетворяет следующему условию: для любого $\bar{\delta} > 0$ функция $\mathcal{G}(t)$ кусочно-непрерывна на множестве $[0, T]$ за исключением лишь конечного числа интервалов $(\bar{t}_1(\bar{\delta}), \bar{t}_2(\bar{\delta})), \dots, (\bar{t}_r(\bar{\delta}), \bar{t}_{r+1}(\bar{\delta}))$, суммарная длина которых не превосходит числа $\bar{\delta}$.

Выберем (равномерное) конечное разбиение $t_1 = 0, t_2, \dots, t_{N-1}, t_N = T$ интервала $[0, T]$ и вычислим значения $\mathcal{G}(t_i)$, $i = \overline{1, N}$, в этих точках. Пусть $\mathcal{L}(t)$ — функция, полученная с помощью кусочно-линейной интерполяции с узлами $(t_i, \mathcal{G}(t_i))$, $i = \overline{1, N}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\bar{N}(\varepsilon)$, что для каждого $N > \bar{N}(\varepsilon)$ имеем $\|\mathcal{L} - \mathcal{G}\|_{L_1^2[0, T]}^2 \leq \varepsilon$.

Доказательство. Обозначим $M(\bar{\delta}) := \bigcup_{k=1}^r (\bar{t}_k(\bar{\delta}), \bar{t}_{k+1}(\bar{\delta}))$. Имеем

$$\|\mathcal{L} - \mathcal{G}\|_{L_1^2[0, T]}^2 = \int_{M(\bar{\delta})} (\mathcal{L}(t) - \mathcal{G}(t))^2 dt + \int_{[0, T] \setminus M(\bar{\delta})} (\mathcal{L}(t) - \mathcal{G}(t))^2 dt.$$

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. По условию леммы функция $\mathcal{G}(t)$ ограничена, функция $\mathcal{L}(t)$ также ограничена по построению для всех (равномерных) конечных разбиений интервала $[0, T]$. Следовательно, существует такое $\bar{\delta}(\varepsilon)$, что первое слагаемое не превосходит числа $\varepsilon/2$ для всех (равномерных) конечных разбиений интервала $[0, T]$. Поскольку предполагается, что функция $\mathcal{G}(t)$ кусочно-непрерывна и ограничена на множестве $[0, T] \setminus M(\bar{\delta}(\varepsilon))$,

то существует [410] такое число $\bar{N}(\varepsilon)$, что для любого (равномерного) конечного разбиения интервала $[0, T]$ ранга $N > \bar{N}(\varepsilon)$ второе слагаемое (при таком $\bar{\delta}(\varepsilon)$) не превосходит числа $\varepsilon/2$.

Лемма доказана. \square

Приведем теперь лемму с более общим, но менее прозрачным (по сравнению с предыдущей леммой) условием, которое также гарантирует, что функция $\mathcal{L}(t)$, полученная с помощью кусочно-линейной интерполяции искомой функции $\mathcal{G} \in L_1^\infty[0, T]$, сходится к этой функции в пространстве $L_1^2[0, T]$.

Лемма 5.5.2. Пусть функция $\mathcal{G} \in L^\infty[0, T]$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) для любого $\bar{\varepsilon} > 0$ существует такое замкнутое множество $T(\bar{\varepsilon}) \subset [0, T]$, что функция $\mathcal{G}(t)|_{T(\bar{\varepsilon})}$ непрерывна и $|T'(\bar{\varepsilon})| < \bar{\varepsilon}$, где $T'(\bar{\varepsilon}) := [0, T] \setminus T(\bar{\varepsilon})$;
- 2) для любого $\delta > 0$ существует такое число $\bar{N}(\delta)$, что для любого $N > \bar{N}(\delta)$ имеем $|M(\delta)| < \delta$, где $M(\delta) := \bigcup_{k=2}^N [t_{k-1}, t_k]$; здесь мы берем объединение только таких интервалов $[t_{k-1}, t_k]$, в каждом из которых хотя бы одна из точек $t_{k-1}, t_k, k \in \{2, \dots, N\}$, принадлежит множеству $T'(\bar{\varepsilon})$.

Выберем (равномерное) конечное разбиение $t_1 = 0, t_2, \dots, t_{N-1}, t_N = T$ интервала $[0, T]$ и вычислим значения $\mathcal{G}(t_i)$, $i = \overline{1, N}$, в этих точках. Пусть $\mathcal{L}(t)$ — функция, полученная с помощью кусочно-линейной интерполяции с узлами $(t_i, \mathcal{G}(t_i))$, $i = \overline{1, N}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\bar{N}(\varepsilon)$, что при любом $N > \bar{N}(\varepsilon)$ будет $\|\mathcal{L} - \mathcal{G}\|_{L_1^2[0, T]}^2 < \varepsilon$.

Доказательство. Заметим, что первое предположение леммы всегда выполняется, поскольку оно есть не что иное, как формулировка теоремы Лузина [295]. Однако оно приведено в формулировке леммы, поскольку введенное там множество $T'(\varepsilon)$ используется во втором предположении леммы.

Зафиксируем некоторое число $\varepsilon > 0$.

Пусть $\mathcal{P}(t)$ — “полигональное расширение” функции $\mathcal{G}(t)|_{T(\bar{\varepsilon})}$ на весь интервал $[0, T]$, которое можно построить [168] в силу того, что множество $T(\bar{\varepsilon})$ замкнуто (см. предположение 1) леммы). Тогда функция $\mathcal{P}(t)$ непрерывна на $[0, T]$ и $\mathcal{P}(t) = \mathcal{G}(t)$ в точке $t \in T(\bar{\varepsilon})$. При этом можно проверить [168], что можно выбрать $\bar{\varepsilon}$ таким образом, что

$$\int_0^T (\mathcal{P}(t) - \mathcal{G}(t))^2 dt < \varepsilon/3. \quad (5.26)$$

Рассмотрим выражение

$$\int_0^T (\mathcal{L}(t) - \mathcal{P}(t))^2 dt = \int_{M(\delta)} (\mathcal{L}(t) - \mathcal{P}(t))^2 dt + \int_{[0, T] \setminus M(\delta)} (\mathcal{L}(t) - \mathcal{P}(t))^2 dt. \quad (5.27)$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части равенства (5.27). По построению функция $\mathcal{P}(t)$ ограничена, функция $\mathcal{L}(t)$ также ограничена по построению для всех (равномерных) конечных разбиений интервала $[0, T]$. Тогда из предположения 2) леммы следует, что при $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon)$, что для любого (равномерного) разбиения интервала $[0, T]$ ранга $N > \overline{\overline{N}}(\delta(\varepsilon))$ выполнено

$$\int_{M(\delta)} (\mathcal{L}(t) - \mathcal{P}(t))^2 dt < \varepsilon/3. \quad (5.28)$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части равенства (5.27). Пусть $\overline{\mathcal{L}}(t)$ — функция, полученная с помощью кусочно-линейной интерполяции с узлами $(t_i, \mathcal{P}(t_i))$, $i = \overline{1, N}$. Поскольку функция $\mathcal{P}(t)$ непрерывна на $[0, T]$, то существует [410] такое число $\overline{\overline{N}}(\varepsilon)$, что для любого (равномерного) разбиения интервала $[0, T]$ ранга $N > \overline{\overline{N}}(\varepsilon)$ выполняется $\int_0^T (\overline{\mathcal{L}}(t) - \mathcal{P}(t))^2 dt < \varepsilon/3$. Но при $t \in [0, T] \setminus M(\delta)$ мы имеем $\mathcal{L}(t) = \overline{\mathcal{L}}(t)$ по построению (с тем же рангом разбиений, участвующих в построении этих функций), поскольку если $t_i \in [0, T] \setminus M(\delta)$, $i \in \{1, \dots, N\}$, то $t_i \in T(\varepsilon)$, и для таких t_i мы имеем $\mathcal{P}(t_i) = \mathcal{G}(t_i)$. Для любого (равномерного) разбиения интервала $[0, T]$ ранга $N > \overline{\overline{N}}(\varepsilon)$ тогда получаем

$$\int_{[0, T] \setminus M(\delta)} (\mathcal{L}(t) - \mathcal{P}(t))^2 dt = \int_{[0, T] \setminus M(\delta)} (\overline{\mathcal{L}}(t) - \mathcal{P}(t))^2 dt \leq \int_0^T (\overline{\mathcal{L}}(t) - \mathcal{P}(t))^2 dt < \varepsilon/3. \quad (5.29)$$

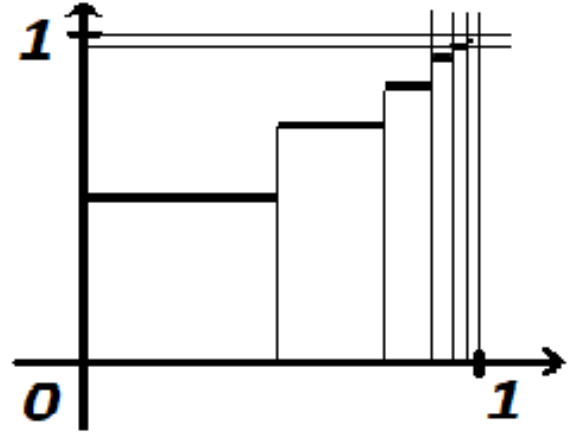
Возьмем $\overline{N}(\varepsilon) = \max \{ \overline{\overline{N}}(\delta(\varepsilon)), \overline{\overline{N}}(\varepsilon) \}$. Для каждого (равномерного) разбиения интервала $[0, T]$ ранга $N > \overline{N}(\varepsilon)$ из (5.26), (5.28), (5.29) окончательно имеем

$$\|\mathcal{L} - \mathcal{G}\|_{L_1^2[0, T]}^2 \leq \int_0^T (\mathcal{L}(t) - \mathcal{P}(t))^2 dt + \int_0^T (\mathcal{P}(t) - \mathcal{G}(t))^2 dt < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Лемма доказана. □

Замечание 5.5.2. Смысл предположения 2) леммы 5.5.2 заключается в требовании, чтобы $\mathcal{G}(t)$ не имела “слишком много” точек разрыва на отрезке $[0, T]$. Можно непосредственно проверить, что если условие леммы 5.5.1 на функцию $\mathcal{G}(t)$ выполнено, то и требуемое условие выполнено. На рисунке приведен простой пример измеримой ограниченной функции с бесконечным числом точек разрыва, для которой можно построить функцию $\mathcal{P}(t)$ таким образом, что мера множества $M(\delta)$ будет сколь угодно малой для достаточно большого ранга разбиения. Это пример “подходящей” в смысле предположения леммы 5.5.2 функции.

Приведем пример функции, для которой это условие нарушается. Пусть $\mathcal{G}(t)$ — функция Дирихле на отрезке $[0, 1]$, т. е. принимающая значение 1 в рациональных точках и значение 0 в иррациональных точках этого интервала. Если взять функцию $\mathcal{P}(t) = 0 \forall t \in [0, 1]$ как непрерывную и удовлетворяющую теореме Лузина, примененной к функции $\mathcal{G}(t)$, то условие 2) леммы 5.5.2 будет нарушено при каждом ранге (равномерного) разбиения отрезка



$[0, 1]$, поскольку при таком разбиении все точки разбиения будут рациональными, т. е. будет принадлежать множеству $T'(\bar{\varepsilon}) \forall \bar{\varepsilon} > 0$, следовательно, в этом случае $|M(\delta)| = 1 \forall \delta > 0$. Видно, что в этом примере для каждой функции $\mathcal{L}(t)$, полученной кусочно-линейной интерполяцией функции $\mathcal{G}(t)$ с равномерным разбиением отрезка $[0, 1]$, имеем $\|\mathcal{L} - \mathcal{G}\|_{L^2_1[0,1]}^2 = 1$, поскольку при таком разбиении всегда имеем $\mathcal{L}(t) = 1 \forall t \in [0, 1]$. Функция Дирихле $\mathcal{G}(t)$ не удовлетворяет условию 2) леммы 5.5.2, поскольку эта функция имеет “слишком много” точек разрыва на интервале $[0, 1]$.

Замечание 5.5.3. Отметим здесь кратко теоретическую и практическую значимость построенного алгоритма. Теоретически алгоритм интересен тем, что в отличие от известных в настоящее время условий оптимальности условия минимума здесь получены в поточечном виде. Практически алгоритм интересен тем, что поиск направлений спуска в отдельные моменты выборки может осуществляться независимо друг от друга. Более подробно эти преимущества описаны в разделе 5.7 (см. Замечание 5.7.2).

Замечание 5.5.4. Основной подход, описанный выше, может быть применен к некоторым более сложным задачам управления. Например, рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(x, z, u) = \int_0^T f_0(x(t), \dot{x}(t), u(t), t) dt$$

при ограничениях (5.5), (5.6), (5.8) и $u \in U$ (см. (5.7)). Предполагается, что вектор-функция $f_0(x, \dot{x}, u, t)$ непрерывна на своей области определения и квазидифференцируема по (x, z, u) и локально липшицева в каждой точке (x, z, u) при каждом фиксированном $t \in [0, T]$.

Построим функционал

$$J(x, z, u) + \lambda I(x, z, u)$$

с достаточно большим числом λ . На практике может быть также более разумным взять различные штрафные множители при слагаемых I_i , $i = \overline{1, 4}$, функционала $I(x, z, u)$ (см. формулу (5.10)), соответствующие различным ограничениям. Целью выбора этих штрафных параметров является удовлетворение соответствующих ограничений с требуемой погрешностью. Заметим, что построенный функционал можно минимизировать предложенным методом.

5.6 Численные примеры

Сначала поясним работу метода квазидифференциального спуска на иллюстративном примере, в котором подробно приведены итерации. Для простоты изложения этот пример выбран не как задача управления, а является негладкой задачей вариационного исчисления, однако по структуре минимизируемого функционала он соответствует постановке рассматриваемой задачи.

Пример 5.6.1. Рассмотрим функционал

$$I(x, z) = \int_0^1 |z(t) + |x(t)|| dt + \int_0^1 |z(t)| dt + \int_0^T \left(x(t) - x_0 - \int_0^t z(\tau) d\tau \right)^2 dt$$

с начальной точкой $x_0 = 0$ и с очевидным решением $x^*(t) = 0$, $z^*(t) = 0$ для всех $t \in [0, 1]$. Заметим, что третье слагаемое здесь означает, что $z(t)$ должно быть производной $x(t)$ (см. функционал $I_4(x, z)$ в формуле (5.10) и формуле (5.9)).

Возьмем функции $x_{(1)}(t) = t - 0.5$, $z_{(1)}(t) = 0$ в качестве начального приближения и дискретизируем отрезок $[0, 1]$ с рангом разбиения, равным 2 (т. е. рассмотрим точки 0, 0.5, 1 для дальнейшей интерполяции направления спуска квазидифференциала). В этом примере будем использовать следующую упрощенную запись $[\underline{\partial}I(x_{(1)}, z_{(1)}), \bar{\partial}I(x_{(1)}, z_{(1)})]$ для обозначения соответствующего квазидифференциала (см. формулы (5.12) и (5.13)). Согласно алгоритму, вычислим направление спуска отдельно в этих точках. В точке $t = 0$ имеем

$$\underline{\partial}I(x_{(1)}, z_{(1)}) = \text{co} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\bar{\partial}I(x_{(1)}, z_{(1)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдя отклонение множества $-\bar{\partial}I(x_{(1)}, z_{(1)})$ от множества $\underline{\partial}I(x_{(1)}, z_{(1)})$ в точке $t = 0$, получаем направление квазидифференциального спуска $G((x_{(1)}, z_{(1)}), 0) = (0, 2)'$. В точке $t = 0.5$ имеем

$$\underline{\partial}I(x_{(1)}, z_{(1)}) = \text{co} \left\{ \begin{pmatrix} -0.25 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.75 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.25 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.75 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2.25 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.25 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\bar{\partial}I(x_{(1)}, z_{(1)}) = \text{co} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

следовательно, имеем $G((x_{(1)}, z_{(1)}), 0.5) = (0, 0)'$. В точке $t = 1$ мы имеем

$$\underline{\partial}I(x_{(1)}, z_{(1)}) = \text{co} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\bar{\partial}I(x_{(1)}, z_{(1)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

поэтому имеем $G((x_{(1)}, z_{(1)}), 1) = (0, -2)'$. Сделав соответствующую интерполяцию, получаем направление квазидифференциального спуска функционала $I(x, z)$ в точке $(x_{(1)}, z_{(1)})$, а именно $G(x_{(1)}, z_{(1)}) = (0, -4t + 2)'$. Построим следующую точку $(x_{(2)}(t), z_{(2)}(t)) = (0 + \gamma_{(1)} 0, t - 0.5 + \gamma_{(1)}(-4t + 2))'$; решив одномерную задачу минимизации $\min_{\gamma \geq 0} I(x_{(2)}, z_{(2)})$, имеем $\gamma_{(1)} = 0.25$, следовательно, $x_{(2)}(t) = 0$, $z_{(2)}(t) = 0$ для всех $t \in [0, 1]$, т. е. в этом случае метод квазидифференциального спуска приводит к точному решению за один шаг.

Конечно, начальное приближение и ранг дискретизации здесь выбраны искусственно, чтобы продемонстрировать суть разработанного метода. Если взять другое начальное приближение и ранг дискретизации, то в общем случае получить точное решение за конечное число шагов уже не удастся.

Рассмотрим теперь несколько примеров перевода негладкой системы из одной точки в другую. В этих задачах метод квазидифференциального спуска привел к (приближенной) точке минимума функционала (5.10).

Расчеты проводились в пакете MatLab 18.0 на компьютере с процессором AMD Ryzen 5 PRO 2400G 3.6 GHz и оперативной памятью 8 GB. Решение задачи одномерной минимизации осуществлялось на интервале $[0, 1]$ (т. е. здесь $\bar{\gamma} = 1$) в MatLab с помощью встроенного алгоритма `fminbnd()` с его внутренними параметрами по умолчанию. Согласно документации, для решения этой задачи в MatLab используется метод золотого сечения в сочетании с параболической интерполяцией [55]. Все интегралы вычислялись в MatLab с помощью встроенной функции `evalf(int())` с ее внутренними параметрами по умолчанию. Согласно документации, для решения этой задачи в MatLab используется метод Гаусса-Кронрода [13]. В примерах параметр $\bar{\varepsilon}$ игнорировался, а погрешность решения оценивалась по значению функционала.

При этом значение на правом конце вычислялось для траекторий, полученных в результате численного интегрирования системы по прямой схеме Эйлера с шагом 10^{-4} (от заданного начального левого конца) после подстановки управления, полученного с помощью метода. Для решения вспомогательной задачи нахождения евклидова расстояния от точки до выпуклого многогранника использовался первый метод последовательных приближений алгоритма Малоземова-Демьянова-Митчелла с его параметром $\bar{\delta} = 10^{-4}$.

Пример 5.6.2. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1(t) = -|x_1(t)|,$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t).$$

Требуется найти такое управление $u^* \in U$, которое переводит эту систему из начальной точки $x(0) = (0, 0)'$ в конечное состояние $x(1) = (0, 0)'$ в момент $T = 1$. При этом положим $\underline{u} = -1$, $\bar{u} = 1$, т. е. предположим, что $-1 \leq u(t) \leq 1 \forall t \in [0, 1]$. Отметим, что граничные условия преднамеренно взяты одинаковыми, чтобы $x_1(t) = 0$ было решением для всех $t \in [0, 1]$, тогда функция $|x_1|$ в этой точке будет существенно негладкой.

Данная задача сводится к безусловной минимизации функционала

$$\begin{aligned} I(x, z, u) = & \int_0^1 |z_1(t) + |x_1(t)|| dt + \int_0^1 |z_2(t) - u(t)| dt + \\ & + \frac{1}{2} \left(\int_0^1 z_1(t) dt \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\int_0^1 z_2(t) dt \right)^2 + \\ & + \int_0^1 \max \{ -1 - u(t), 0 \} dt + \int_0^1 \max \{ u(t) - 1, 0 \} dt + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x_1(t) - \int_0^t z_1(\tau) d\tau \right)^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x_2(t) - \int_0^t z_2(\tau) d\tau \right)^2 dt. \end{aligned}$$

Возьмем $(x_{(1)}, z_{(1)}, u_{(1)}) = (1, 1, 1, 1, 1)'$ в качестве начальной точки, тогда $I(x_{(1)}, z_{(1)}, u_{(1)}) \approx 3.33333$. По мере увеличения количества итераций ранг дискретизации постепенно увеличивался в ходе решения вспомогательной задачи нахождения направления квазидифференциального спуска, описанного в алгоритме, и в итоге шаг дискретизации составил 10^{-1} (т. е. $N = 10$). На 17-й итерации было построено управление $u_{(17)}$:

$$u(t) \approx 0.56234 - 1.61222t - 0.04788t^3 + 0.78478t^2,$$

со значением функционала $I(x_{(17)}, z_{(17)}, u_{(17)}) \approx 0.00462$, при этом $x_1(T) \approx 0.00357$, $x_2(T) \approx 0.00538$. Для удобства мы приводим интерполяционный полином Лагранжа, который точно аппроксимирует (то есть ошибка интерполяции не влияет на значение функционала и граничные значения) результирующее управление.

Возьмем $u_{(17)}$ в качестве приближения к искомому управлению u^* . Для проверки полученного результата и нахождения “истинной” траектории подставим это управление в заданную систему и численно проинтегрируем ее. В результате получим соответствующую траекторию (которая является приближением к искомой x^*) со значениями $x_1(T) = 0$, $x_2(T) = 0.00585$, отсюда видно, что ошибка на правом конце не превышает величины 5×10^{-3} ; ограничения на управление выполняются точно.

Время вычислений составило 0 мин 36 сек. На рисунках представлена динамика управления и траекторий в процессе реализации алгоритма.

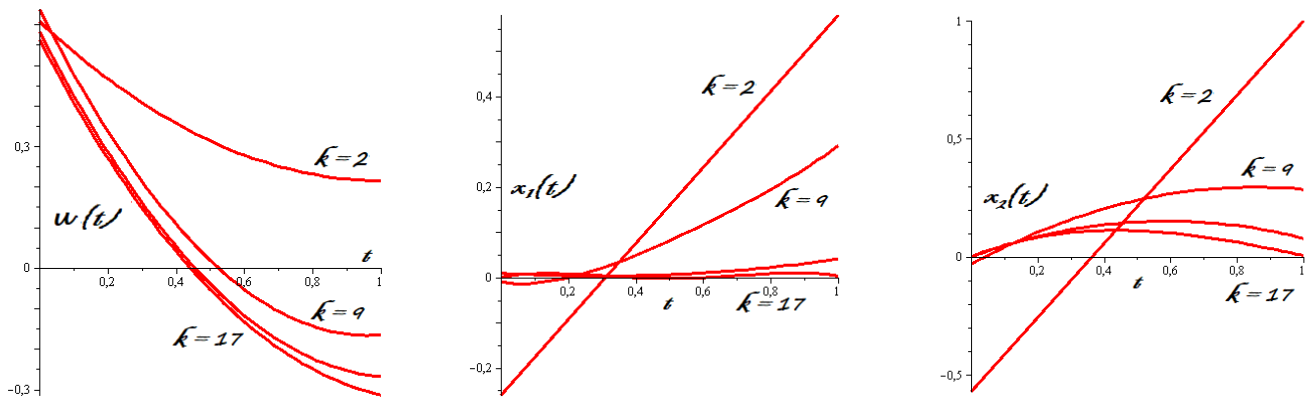


Рис. 5.1: Пример 5.6.2, управление и траектории на итерациях: 2, 9, 13, 17

Пример 5.6.3. Требуется перевести систему

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)x_3(t) + u_1(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t)x_3(t) + u_2(t),$$

$$\dot{x}_3(t) = x_1(t)x_2(t) + u_3(t)$$

из начальной точки $x(0) = (1, 0, 0)'$ в конечное состояние $x(1) = (0, 0, 0)'$ в момент $T = 1$.

При этом мы предполагаем, что суммарный расход управления подчиняется ограничению $\int_0^1 |u_1(t)| + |u_2(t)| + |u_3(t)| dt = 1$. Данная задача имеет практическое применение для оптимальной стабилизации спутника и рассматривалась в работе [60]. С помощью новой переменной $x_4(t) = \int_0^t |u_1(\tau)| + |u_2(\tau)| + |u_3(\tau)| d\tau$ сводим данную задачу к задаче (5.5), (5.6), (5.8), рассматриваемой в главе.

Тогда будем иметь систему

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)x_3(t) + u_1(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t)x_3(t) + u_2(t),$$

$$\dot{x}_3(t) = x_1(t)x_2(t) + u_3(t),$$

$$\dot{x}_4(t) = |u_1(t)| + |u_2(t)| + |u_3(t)|,$$

без ограничений на управление $u^* \in P_3[0, T]$, целью которого является перевод объекта из начальной точки $x(0) = (1, 0, 0, 0)'$ в конечное состояние $x(1) = (0, 0, 0, 1)'$ в момент времени $T = 1$.

Поставленная задача сводится к безусловной минимизации функционала

$$\begin{aligned} I(x, z, u) = & \int_0^1 |z_1(t) - x_2(t)x_3(t) - u_1(t)| dt + \int_0^1 |z_2(t) - x_1(t)x_3(t) - u_2(t)| dt + \\ & + \int_0^1 |z_3(t) - x_1(t)x_2(t) - u_3(t)| dt + \int_0^1 |z_4(t) - |u_1(t)| - |u_2(t)| - |u_3(t)|| dt + \\ & + \frac{1}{2} \left(1 + \int_0^1 z_1(t) dt \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\int_0^1 z_2(t) dt \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\int_0^1 z_3(t) dt \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\int_0^1 z_4(t) dt - 1 \right)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \int_0^1 \left(x_i(t) - x_i(0) - \int_0^t z_i(\tau) d\tau \right)^2 dt. \end{aligned}$$

Возьмем $(x_{(1)}, z_{(1)}, u_{(1)}) = (1 + t, t, t, t, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0)'$ в качестве начальной точки, тогда $I(x_{(1)}, z_{(1)}, u_{(1)}) \approx 5.72678$. По мере увеличения количества итерации ранг дискретизации постепенно увеличивался в ходе решения вспомогательной задачи нахождения направления квазидифференциального спуска, описанного в алгоритме, и в итоге шаг дискретизации составил 10^{-1} (т. е. $N = 10$). На 58-й итерации было построено управление $u_{(58)}$:

$$u_1(t) \approx -2.88657t^5 + 8.96619t^4 - 9.30386t^3 + 2.99867t^2 + 0.10679t - 1.03399,$$

$$u_2(t) \approx -0.83764t^5 + 0.85068t^4 + 0.43135t^3 - 0.54058t^2 + 0.06933t + 0.00945,$$

$$u_3(t) \approx 0.13344t - 0.01334, \quad t \in [0, 0.1), \quad 0.03928t^3 - 0.01848t^2 - 0.00194t, \quad t \in [0.1, 0.6),$$

$$-0.94481t^3 + 2.12646t^2 - 1.55331t + 0.36987, \quad t \in [0.6, 1],$$

со значением функционала $I(x_{(58)}, z_{(58)}, u_{(58)}) \approx 0.00551$, при этом $x_1(T) \approx 0.01251$, $x_2(T) \approx 0.00431$, $x_3(T) \approx 0.00431$, $x_4(T) \approx 1.0069$. Для удобства мы приводим интерполяционный полином Лагранжа, который точно аппроксимирует (то есть ошибка интерполяции не влияет на значение функционала и граничные значения) результирующее управление.

Возьмем $u_{(58)}$ в качестве приближения к искомому управлению u^* . Чтобы проверить полученный результат и найти “истинную” траекторию, подставим это управление в заданную систему и проинтегрируем ее численно. В результате получим соответствующую траекторию (которая является приближением к искомой x^*) со значениями $x_1(T) = 0,00514$, $x_2(T) = 0,00204$, $x_3(T) = 0,00051$, $x_4(T) = 1,00514$, отсюда видно, что ошибка на правом конце не превышает величины 5×10^{-3} .

Время вычислений составило 1 мин 43 сек. На рисунках представлена динамика управления и траекторий в процессе реализации алгоритма.

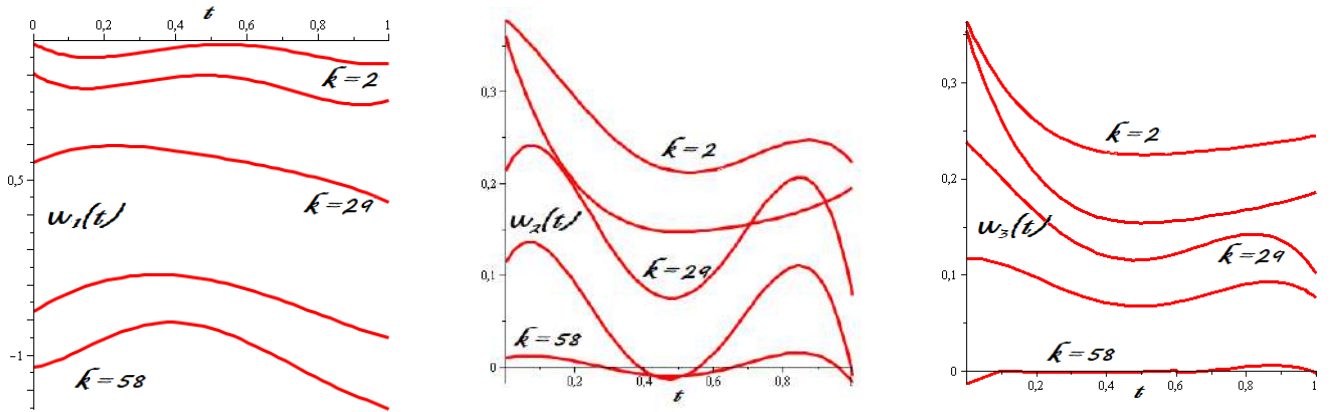


Рис. 5.2: Пример 5.6.3, управление на итерациях: 2, 13, 29, 45, 58

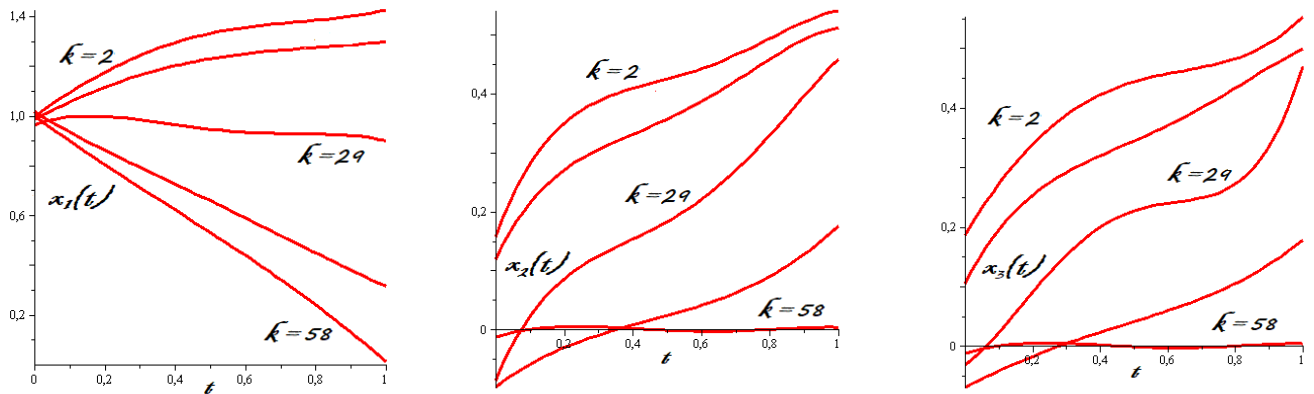


Рис. 5.3: Пример 5.6.3, траектории на итерациях: 2, 13, 29, 45, 58

Пример 5.6.4. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t) - Px_2(t)|x_2(t)| - Qx_2(t).$$

Требуется найти такое управление $u^* \in U$, которое переводит эту систему из начальной точки $x(0) = (0, 0)'$ в конечное состояние $x(48) = (200, 0)'$ в момент времени $T = 48$. При этом положим $\underline{u} = -2/3$, $\bar{u} = 2/3$, т. е. предположим, что $-2/3 \leq u(t) \leq 2/3 \quad \forall t \in [0, 48]$. Параметры задачи $P = 0.78 \times 10^{-4}$ и $Q = 0.28 \times 10^{-3}$. Эта задача имеет практическое приложение к оптимальному движению поезда и рассматривалась в работе [372]. На самом деле, в статье [372] рассматривается более сложная задача минимизации функционала

$$\mathcal{J}(x, u) = \int_0^{48} x_2(t) \max \{u(t), 0\} dt.$$

Мы пытаемся решить задачу оптимального управления (с этим функционалом) с помощью рассматриваемого подхода (см. Замечание 5.5.4).

Поставленная задача сводится к безусловной минимизации функционала

$$\begin{aligned}
 I(z, u) = & \int_0^{48} z_1(t) \max \{u(t), 0\} dt + \lambda_1 \int_0^{48} |z_2(t) - u(t) + Pz_1(t)|z_1(t)| + Qz_1(t)| dt + \\
 & + \lambda_2 \left(\int_0^{48} z_1(t) dt - 200 \right)^2 + \lambda_3 \left(\int_0^{48} z_2(t) dt \right)^2 + \\
 & + \lambda_4 \left(\int_0^{48} \max \{ -2/3 - u(t), 0 \} dt + \int_0^{48} \max \{ u(t) - 2/3, 0 \} dt \right) + \\
 & + \lambda_5 \int_0^{48} \left(z_1(t) - \int_0^t z_2(\tau) d\tau \right)^2 dt.
 \end{aligned}$$

Функционал предварительно немного упрощается с учетом того факта, что $x_2(t) = z_1(t)$, также положим $x_1(t) = \int_0^t z_1(\tau) d\tau$, $x_3(t) = \int_0^t z_3(\tau) d\tau$, $t \in [0, 48]$, на всех итерациях.

Возьмем $(z_{(1)}, u_{(1)}) = (0, 0, 0, 0)'$ в качестве начальной точки, тогда будет $I(z_{(1)}, u_{(1)}) = 2 \times 10^5$. По мере увеличения количества итерации ранг дискретизации постепенно увеличивался в ходе решения вспомогательной задачи нахождения направления квазидифференциального спуска, описанного в алгоритме, и в итоге шаг дискретизации составил 10^{-1} (т. е. $N = 480$). Значения штрафных коэффициентов λ_i , $i = \overline{1, 5}$ также постепенно увеличивались от $(5, 5, 5, 5, 5)$ до $(10, 40, 320, 10, 640)$ (на практике достаточно просто следить за выполнением ограничений для выбранных значений этих параметров и при необходимости увеличивать их; однако такой подход несколько снижает эффективность метода, поскольку часть действий здесь предполагается выполнять “вручную”, поэтому для автоматизации процесса рекомендуется использовать адаптивные (автоматические) правила задания штрафного параметра, обсуждаемые, например, в работах [155], [330]). На 4569-ой итерации было построено управление $u_{(4569)}$ (см. рисунок) со значением функционала $I(z_{(4569)}, u_{(4569)}) \approx 12.49101$, при этом $J(x_{(4569)}, z_{(4569)}, u_{(4569)}) \approx 12.48611$, $x_1(T) \approx 199.99793$, $x_2(T) \approx 0.00289$.

После проведения данных итераций значение функционала практически перестало уменьшаться, поэтому было принято решение остановить процесс на этом этапе. При этом $\|G(z, u)\|_{L_2^2[0, T] \times L_1^2[0, T]} = 0, 3$.

Возьмем $u_{(4569)}$ в качестве приближения к искомому управлению u^* . Чтобы проверить полученный результат и найти “истинную” траекторию, подставим это управление в заданную систему и численно проинтегрируем ее. В результате получим соответствующую траекторию (которая является приближением к искомой x^*) со значениями $x_1(T) \approx 199.99607$,

$x_2(T) \approx 0.00288$, отсюда видно, что ошибка на правом конце не превышает величины 3×10^{-3} ; ошибка на управление не превышает величины 7×10^{-5} при каждом $t \in [0, T]$. Соответствующее значение функционала равно $\mathcal{J}(x, u) = 12.48832$. В силу структуры минимизируемого функционала мы не можем гарантировать, что значение функционала, полученное на 4569-й итерации, является глобальным минимумом в данной задаче.

Время вычислений составило 38 мин 5 сек. На рисунках представлена динамика управления и траекторий в процессе реализации алгоритма.

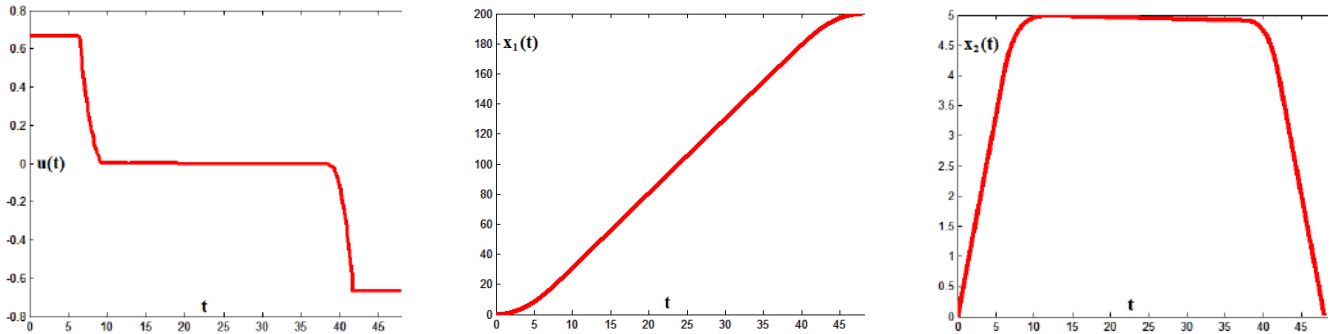
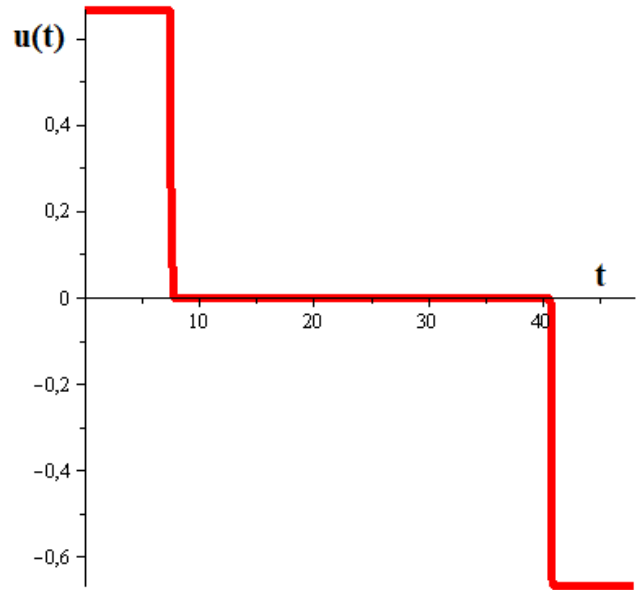


Рис. 5.4: Пример 5.6.4, результирующее управление и траектории

Замечание 5.6.1. Заметим, что если в рассмотренных примерах погрешность на правом конце порядка $3 \times 10^{-2} - 5 \times 10^{-2}$ считать удовлетворительной, то время вычислений может быть сокращено как минимум в два раза. Это объясняется тем, что рассматриваемый метод достаточно быстро получает локализацию решения, но затем для улучшения результата может потребоваться много итераций, такая ситуация является обычной для методов оптимизации градиентного типа.

Приведем решение этого примера, полученное с помощью эффективного DC-метода [430], примененного к соответствующей конечномерной задаче после прямой дискретизации. Под прямой дискретизацией понимается схема Эйлера, примененная к системе дифференциальных уравнений, и прямые левые интегральные суммы Римана, подставляющие соответствующие интегралы. При этом целевой функцией является дискретизированный функционал $\mathcal{J}(x, u)$, а ограничениями являются уравнения разностной системы, ограничения на правый конец (левый конец берется из известных значений) и управление. В качестве шага дискретизации взято значение 0.1. При таком ранге дискретизации получаем задачу DC-оптимизации размерности 1438 с 439 DC-ограничениями-равенствами. С помощью линейной интерполяции по значениям, полученным в дискретные моменты времени, были построены соответствующее управление и траектория (см. рисунок).

Полученное управление доставляет интегральному функционалу $\mathcal{J}(x, u)$ значение 12.59657. Таким образом, мы видим, что данный результат сопоставим с результатом, полученным с помощью подхода настоящей главы. Однако ошибка на правом конце оказывается довольно значительной (получены значения $x_1(T) = 201.55618$ и $x_2(T) = 0.06521$). Заметим, что поскольку, как можно проверить, ограничения дискретизированной задачи удовлетворяются с точностью порядка 10^{-8} на полученном управлении, неясно, как ограничения на правом конце могут быть улучшены до соответствующих значений. По-видимому, для этого нужно сделать меньший шаг дискретизации. Однако следует отметить, что дальнейшее увеличение ранга дискретизации приводит к размерности порядка 10^4 (или более), и, по-видимому, (даже выпуклые) задачи такой размерности приводят к трудностям в “стандартных” машинных вычислениях в общем случае (если такие задачи не имеют специальной структуры и т. п.).



Отметим, что если (вместо кусочно-линейной) реализовать кусочно-постоянную интерполяцию управлений и производных состояния в DC-алгоритме, то результат может быть значительно улучшен (полученное значение целевой функции составляет приблизительно 12.43006 с ошибкой на правом конце 3×10^{-3}). С другой стороны, метод главы может быть легко модифицирован для генерации кусочно-постоянных управлений и производных состояния (и непрерывных кусочно-линейных траекторий); поэтому более корректно сравнивать кусочно-постоянную интерполяцию в обоих методах. Также заметим, что во многих задачах из физических соображений естественно получать непрерывные управления и фазовые производные. Например, в рассмотренном примере естественно предположить, что скорость поезда не может изменяться мгновенно.

Отметим, что DC-алгоритмы требуют d. с.-разложения функций [430]; хотя в этом примере несложно получить такое разложение, в общем случае это недостаток DC-методов в отличие от разработанного алгоритма. Заметим, что из-за произвольности выбора элемента супердифференциала при реализации DC-алгоритма [430] возникает недостаток: этот алгоритм может застрять в так называемых критических точках функционала (которые даже не

являются стационарными); хотя в этом примере DC-метод не застрял в такой критической точке, в общем случае это является недостатком DC-алгоритмов в отличие от разработанного метода. Несмотря на это, DC-алгоритмы довольно эффективны и могут быть успешно использованы для решения многих практических задач и работать достаточно быстро.

5.7 Обсуждение

Прежде всего, кратко поясним, почему новая идея “разделения” переменных x и z имеет принципиальное значение. Если этот прием не реализован, то на некоторой итерации k алгоритма минимизации функционала $\mathcal{I}(z, u)$ придется решать следующую задачу:

$$\max_{w \in \bar{\partial}\mathcal{I}(z^{(k)}, u^{(k)})} \min_{v \in \underline{\partial}\mathcal{I}(z^{(k)}, u^{(k)})} \int_0^T (v(t) + w(t))^2 dt. \quad (5.30)$$

Однако если вычислить квазидифференциал функционала $\mathcal{I}(z^{(k)}, u^{(k)})$, видно, что подынтегральное выражение функционала в выражении (5.30) в общем случае содержит функции вида $\int_0^t V(\tau) d\tau$, $\int_0^t W(\tau) d\tau$, $t \in [0, T]$. Это интегралы Ауманна, поскольку $V(\tau)$, $W(\tau)$ принадлежат некоторым компактам при каждом $\tau \in [0, t]$ (и выполнены другие условия в определении интеграла Ауманна). Неясно, как в этом случае выбрать функции $V(t)$, $W(t)$, чтобы решить задачу (5.30). Реализованная идея позволяет избавиться от подобных интегралов Ауманна в структуре квазидифференциала и решить задачу

$$\max_{w \in \bar{\partial}\varphi(\xi^{(k)}, t)} \min_{v \in \underline{\partial}\varphi(\xi^{(k)}, t)} (v(t) + w(t))^2$$

в каждой точке $t \in [0, T]$ (см. (5.22) и обоснование там). Отметим, что применив дискретизацию и рассматривая отдельные сечения интегралов Ауманна в дискретные моменты времени, задачу (5.30) тоже можно свести к конечномерной задаче на максимум, однако (исходное) наличие указанных интегралов Ауманна не позволяет перейти к поточечным вычислениям, поэтому полученная таким образом конечномерная задача становится чрезвычайно вычислительно затратной (практически нереализуемой в общем случае даже при небольшой размерности исходной задачи). Необходимо фиксировать переменную под максимумом и для каждой такой фиксированной переменной решать задачу на минимум. При этом для каждого момента дискретизации t_i можно брать любой вектор $w(t_i)$ из множества, определяемого супердифференциалом $\bar{\partial}\mathcal{I}(z^{(k)}, u^{(k)})$ в момент времени t_i . При любом разумном ранге дискретизации число вариантов так зафиксировать переменную под максимумом (и соответственно количество получаемое таким образом задач на минимум) становится необозримым.

Теоретическое преимущество предлагаемого метода состоит в следующем: он оригинален в том, что качественно отличается от существующих методов, основанных на прямой дискретизации исходной задачи. Кроме того, метод сохраняет привлекательную геометрическую интерпретацию квазидифференциалов (см. книгу [180] с большим количеством примеров с геометрической иллюстрацией в конечномерном случае).

Предлагаемый метод имеет следующие практические преимущества. В следующих четырех абзацах приведены примеры некоторых конкретных задач, демонстрирующих эти преимущества. Для упрощения изложения и для описания сути происходящих явлений приведем примеры некоторых задач вариационного исчисления и пример одной простейшей задачи управления только в гладком случае.

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(x, z) = \int_0^1 z^4(t)/48 + z^2(t) + x^2(t) - 6x(t) dt$$

при ограничениях

$$x(0) = 1, \quad x(1) = 0, \quad \int_0^1 x(t) dt = 2/3.$$

В данном примере метод наискорейшего спуска оказался весьма эффективным. Наоборот: для построения приближений методом Ритца-Галеркина требуется производить много вычислений, а также необходимо решать существенно нелинейные системы с параметрами.

В задаче минимизации функционала

$$J(z) = \int_0^{10} z^2(t) - x^2(t) dt$$

при ограничениях

$$x(0) = 0, \quad x(10) = 0$$

как уравнение Эйлера, так и метод Ритца-Галеркина дают траекторию, не доставляющую ни сильного, ни слабого минимума. Метод наискорейшего спуска “указывает” на то, что в этой задаче нет решения: задача одномерной минимизации не имеет ограниченного решения.

Минимизируем функционал

$$J(z) = \int_0^2 z^3(t) dt$$

при ограничениях

$$x(0) = 0, \quad x(2) = 4.$$

Этот пример иллюстрирует, что метод наискорейшего спуска “указывает” на тот факт, что на полученном решении функционал достигает слабого минимума, а не сильного, в то время как и уравнение Эйлера, и метод Ритца-Галеркина дают лишь слабый минимум.

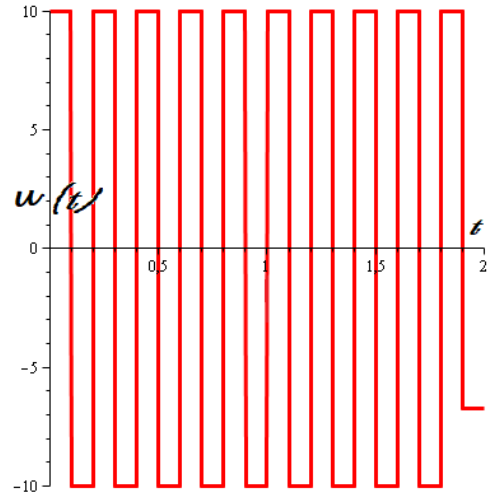
Детали были опущены здесь для краткости. Подробное описание этих задач, а также более интересные примеры, а также обоснование утверждений, выдвинутых выше, можно найти в оригинальных статьях [184], [46]. Также отметим, что метод, используемый в этих статьях, несколько отличается от представленного, но он сохраняет многие его свойства, поэтому сравнительный анализ корректен.

Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$$

на интервале времени $[0, 2]$. Требуется найти управление $u^* \in P_1[0, T]$ такое, чтобы соответствующая траектория удовлетворяла граничным условиям

$$x(0) = x(2) = 0.$$



Применим прямую дискретизацию к этой системе по стандартной формуле $x(i+1) - x(i) = \frac{1}{N}(-x(i) + u(i))$, где $i = \overline{0, 19}$ и шаг дискретизации $N = 20$. Если использовать начальное условие $x_0 = x(0) = 0$ и вычислить $x_{20} = x(2)$ как явную функцию переменных u_i , $i = \overline{0, 19}$, то получим

$$\begin{aligned} x_{20}(u) \approx & 0.01886768013 u_0 + 0.01986071592 u_1 + 0.02090601676 u_2 + 0.02200633334 u_3 + \\ & + 0.02316456151 u_4 + 0.02438374896 u_5 + 0.02566710416 u_6 + 0.02701800438 u_7 + \\ & + 0.02844000461 u_8 + 0.02993684696 u_9 + 0.03151247049 u_{10} + 0.03317102156 u_{11} + \\ & + 0.03491686480 u_{12} + 0.03675459453 u_{13} + 0.03868904688 u_{14} + 0.04072531250 u_{15} + \\ & + 0.04286875000 u_{16} + 0.045125 u_{17} + 0.0475 u_{18} + 0.05 u_{19}. \end{aligned}$$

Поэтому, чтобы получить требуемое конечное состояние, необходимо решить уравнение $x_{20}(u) = 0$ относительно переменных u_i , $i = \overline{0, 19}$. Другими словами, требуется минимизировать функционал $|x_{20}(u)|$. Возьмем начальную точку $u_{(0)}$ со следующими координатами: $u_{2i} = 10$, $i = \overline{0, 9}$, $u_{2i+1} = -10$, $i = \overline{0, 8}$, $u_{19} \approx -6.7101842175$ (см. рисунок). Заметим, что $x_{20}(u_{(0)}) = 0$, поэтому точка $u_{(0)}$ доставляет глобальный минимум функционалу $|x_{20}(u)|$ (т. е. точка $u_{(0)}$ решает дискретизированную задачу). Однако если мы подставим это управление $u_{(0)}$ в исходную систему, то получим соответствующую траекторию $x_{(0)}(t)$ с конечным значением $x(2) \approx -0.1189349683$.

Теперь попробуем решить эту задачу методом главы, т. е. минимизируем функционал

$$I(x, z, u) = \frac{1}{2} \int_0^2 (z(t) + x(t) - u(t))^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^2 \left(x(t) - \int_0^t z(\tau) d\tau \right)^2 dt + \frac{1}{2} \left(\int_0^2 z(t) dt \right)^2$$

(для простоты изложения мы взяли квадратную функцию вместо функции-модуля в качестве подынтегрального выражения в первом слагаемом). Возьмем ту же точку $(x(0), z(0), u(0))'$ (где $z(0) = \dot{x}(0)$) в качестве начального приближения. Можно проверить, что на первой итерации мы получим такое управление, что соответствующая траектория примет конечное значение $|x(2)| < 0.11894$ (т. е. “лучше” чем то, что получено методом дискретизации).

На самом деле, применяя метод к данному примеру, можно получить решение с любой заданной точностью. Это связано с тем, что градиент Гато в данном случае имеет вид:

$$\nabla I(x, z, u) = \begin{pmatrix} (z(t) + x(t) - u(t)) + \left(x(t) - \int_0^t z(\tau) d\tau \right) \\ (z(t) + x(t) - u(t)) - \left(\int_t^2 \left(x(\tau) - \int_0^\tau z(s) ds \right) d\tau \right) + \int_0^2 z(t) dt \\ -(z(t) + x(t) - u(t)) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, критерий остановки (то есть $\|\nabla I(x^*, z^*, u^*)\|_{L_1^2[0,2] \times L_1^2[0,2] \times L_1^2[0,2]} = 0$ в этом случае) может быть выполнен (с некоторой точностью) только при обращении в нуль третьей компоненты градиента. Этот факт означает, что второе слагаемое в первой компоненте обращается в нуль. Этот факт в конечном итоге означает, что третье слагаемое во второй компоненте обращается в нуль. Таким образом, мы видим, что локальных минимумов у рассматриваемого функционала нет, поэтому метод приведет к искомому решению (с любой заданной точностью). Грубо говоря, предлагаемый метод “анализирует” “поведение” всей траектории, а не только ее точек, рассматриваемых в некоторые дискретные моменты времени.

Хотя в примере начальное управление выбрано особым образом, можно проверить, что существует “огромное” число управлений с теми же свойствами (т. е. доставляющих глобальный минимум функционалу $|x_T(u)|$, но дающих ошибку на правом конце). Как увеличение момента времени T , так и добавление негладкости в правую часть системы (например, взятие функции $-|x(t)|$ вместо $-x(t)$ сейчас) только увеличит это “огромное” число. Конечно, при увеличении ранга дискретизации можно уменьшить ошибку на правом конце. С другой стороны, даже выбранный ранг дискретизации кажется не очень большим для задач управления, решаемых с помощью дискретизации или техники “параметризации управления” (см., например, [442]). Кроме того, для любого выбранного ранга дискретизации начальное управление может быть выбрано таким образом, что оно будет обеспечивать глобальный минимум минимизируемому функционалу (т. е. $x_T(u(0)) = 0$), но давать произвольно большую ошибку на правом конце.

Как уже отмечалось, в приведенных примерах для простоты рассматривается только гладкий случай. Негладкий случай может привести к еще большим трудностям: например, в представленной задаче управления любая недифференцируемость в правой части значительно увеличит число “локальных” минимумов при использовании прямой дискретизации.

Следует отметить, что хотя в этом разделе и были приведены некоторые частные конкретные примеры, они демонстрируют общие недостатки известных методов, таким образом, “трудности” с большим количеством нетривиальных вычислений в методе Рунге-Галеркина, “неинформативность” уравнений Эйлера, достаточно большие погрешности на правом конце в дискретных методах и т. д. могут встречаться во многих практических задачах.

Перечислим также некоторые вторичные преимущества предлагаемого метода:

1) хотя большой ранг дискретизации дает хорошее приближение к исходной задаче, выбор подходящего ранга дискретизации не является тривиальным;

2) часто метод квазидифференциального спуска быстро демонстрирует структуру искомого решения, хотя затем сходимость к решению может быть очень медленной;

3) любое интегральное ограничение (например, $\|u(t)\|_{L_m^2[0,T]}^2 \leq C$, $C \in \mathbb{R}$ задано) добавит сложное ограничение с большим числом переменных (равным рангу дискретизации) после применения прямой дискретизации к задаче; напротив: интегральное ограничение очень естественно для вариационной постановки решаемой задачи и легко добавить соответствующее слагаемое к функционалу $I(x, z, u)$, чтобы учесть это ограничение.

4) если по физическим или иным соображениям предпочтительны только непрерывные (в отличие от кусочно-непрерывных) управления и производные состояния, то можно ожидать, что разработанный метод даст лучшие результаты, по сравнению с дискретными (поскольку дискретный метод рассматривает систему разностных уравнений и “не обращает внимания” на “поведение” переменных между точками дискретизации).

5) алгоритм построен таким образом, что вместо одной задачи большой размерности порядка $N(n + m)$ (полученной, например, прямой дискретизацией исходной задачи) с рангом дискретизации N приходится решать N задач размерности порядка $2n + m$ исходной задачи, что представляется более предпочтительным с вычислительной точки зрения; направление спуска $G((x_{(k)}, z_{(k)}, u_{(k)}), t_i)$ на k -й итерации вычисляются независимо для каждого момента времени t_i дискретизации, $i = \overline{1, N}$, поэтому могут быть реализованы параллельные вычисления.

Основной недостаток данного метода сводится к вычислительным затратам: количество итераций может быть очень большим. С другой стороны, время выполнения на одну итерацию довольно мало, поэтому общее время алгоритма кажется удовлетворительным.

Замечание 5.7.1. Как отмечено выше, при выборе величины шага по правилу метода наискорейшего спуска сходимость метода квазидифференциального спуска (МКС) не может быть гарантирована. Однако известные обстоятельства позволяют утверждать, что «как правило» предложенный метод приводит к стационарной точке минимизируемого функционала. См. также Замечание 1.3.1.

Замечание 5.7.2. Наиболее существенным преимуществом примененной идеи «разделения» переменных (имеющей как теоретическое, так и практическое значения) являются условия минимума, получаемые в поточечном виде.

Теоретическое значение заключается в том, что известные на сегодняшний день условия минимума, например, в работах А. Д. Иоффе, Б. Ш. Мордуховича, Е. С. Половинкина, Ф. Х. Кларка и др. (в аналогичном виде для разных задач), содержат неизвестную («сопряженную») функцию, являющуюся решением специального дифференциального включения. Проверка этих условий даже для заданной траектории (и порождающего ее управления) представляет значительные трудности и может быть осуществлена не всегда (поскольку из-за трудностей при вычислении соответствующего субдифференциала в общем случае неясно, как искать сопряженную вектор-функцию, являющуюся решением сложного дифференциального включения, даже с использованием дискретизации). Проверка условий минимума, полученных в диссертации, универсальна в том смысле, что может быть проведена для конкретного управления и соответствующей траектории (в отдельные моменты дискретизации), хотя и для «приближенной» задачи (при больших значениях штрафных параметров). В этой связи отметим условия минимума, полученные в работах М. В. Долгополика в терминах квазидифференциалов, которые также «алгоритмически» проверяемы в общем случае.

Практическая значимость заключается в возможности построения численного метода. (Отметим, что при построении численных методов, основанных на указанных выше известных условиях минимума, в общем случае квазидифференцируемых функций возникают принципиальные трудности.) Кроме того, в предложенном численном методе поиск направлений спуска в алгоритме может осуществляться независимо друг от друга в отдельные моменты дискретизации. Таким образом, вместо одной задачи большой размерности $N(n + m)$ (получающейся при применении прямой дискретизации) требуется решить N задач меньшей размерности $2n + m$, где N — ранг дискретизации, n — размерность фазового вектора, m — размерность управления. Такая «замена» представляется перспективной с вычислительной точки зрения; кроме того, в силу отмеченной взаимной независимости этих задач можно использовать параллельные вычисления.

Глава 6

Классическая задача вариационного исчисления с субдифференцируемым функционалом Лагранжа

Глава посвящена классической вариационной задаче с субдифференцируемой подынтегральной функцией минимизируемого функционала. Исходная задача сводится к безусловной минимизации некоторого функционала. При этом реализуется новая техническая идея рассматривать фазовую траекторию и ее производную как независимые переменные (и учитывать естественную связь между ними через штрафную функцию специального вида). Необходимые условия минимума рассматриваемого функционала получены в терминах субдифференциала. Для решения полученной задачи минимизации в функциональном пространстве применяется метод субдифференциального спуска. Разработанный алгоритм демонстрируется на примерах. См. [216].

6.1 Постановка задачи

Рассмотрим вариационную задачу: требуется минимизировать функционал

$$\mathcal{J}(x) = \int_0^T f_0(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (6.1)$$

с краевыми ограничениями

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T. \quad (6.2)$$

В формуле (6.1) $f_0(x, \dot{x}, t)$, $t \in [0, T]$, — заданная функция, $T > 0$ — заданный конечный момент времени, $x(t)$ — n -мерная вектор-функция, которая предполагается кусочно-

непрерывно дифференцируемой на $[0, T]$. Непрерывная на своей области определения функция $f_0(x, \dot{x}, t)$ субдифференцируема и локально липшицева по (x, \dot{x}) при каждом фиксированном $t \in [0, T]$. В формуле (6.2) $x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$ — заданные векторы.

С учетом сделанных предположений и обозначений можно считать, что вектор-функция x принадлежит пространству $C_n[0, T]$, вектор-функция \dot{x} принадлежит пространству $P_n[0, T]$. Итак, требуется найти такую вектор-функцию $x^* \in C_n[0, T]$, которая минимизирует функционал (6.1) и удовлетворяет граничным условиям (6.2). Предположим, что такое решение существует.

6.2 Соответствующая вариационная задача

Положим $\dot{x}(t) = z(t)$, тогда по предположению $z \in P_n[0, T]$ и мы имеем

$$x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau. \quad (6.3)$$

Построим функционал

$$\begin{aligned} I(x, z) &= J(x, z) + \lambda I_2(z) + \lambda I_4(x, z) = \\ &= \int_0^T f_0(x(t), z(t), t) dt + \\ &+ \lambda \frac{1}{2} \left(x_0 + \int_0^T z(t) dt - x_T \right)^2 + \lambda \frac{1}{2} \int_0^T \left(x(t) - x_0 - \int_0^t z(\tau) d\tau \right)^2 dt. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Целью выбора штрафных коэффициентов является удовлетворение соответствующим ограничениям с требуемой погрешностью. На практике эту задачу решают для фиксированного числа $\bar{\lambda}$. Если решение этой задачи (при $\lambda = \bar{\lambda}$) удовлетворяет ограничениям в виде дифференциального соотношения (6.3) и условию на правом конце (6.2) с требуемой точностью (т. е. значение функционала $I_2 + I_4$ на этом решении достаточно мало), то процесс завершается; в противном случае следует увеличить значение λ и повторить процесс с этим новым значением.

Таким образом, исходная задача свелась к нахождению точки безусловного глобального минимума функционала $I(x, z)$ (при достаточно большом значении $\bar{\lambda}$) на пространстве

$$X = \left(C_n[0, T] \times P_n[0, T], \|\cdot\|_{L_n^2[0, T] \times L_n^2[0, T]} \right).$$

Замечание 6.2.1. Если некоторые из координат объекта на правом конце свободны, то соответствующие слагаемые функционала $I_2(z)$ положим равными нулю. Если же минимизируемый функционал не зависит от производной \dot{x} , то в формуле (6.4) следует также положить

тождественно $I_4(x, z) = 0$. Поскольку по предположению существует решение исходной задачи, то множество траекторий x , удовлетворяющих необходимому условию минимума функционала $I(x, z)$ (см. следующий раздел), будет включать в себя и те, которые удовлетворяют граничным условиям (6.2). Однако, несмотря на то, что в рассматриваемом случае минимизируемый функционал не зависит от производной, можно решить задачу и “полностью”, найдя обе неизвестные в паре (x, \dot{x}) одновременно, т. е. минимизировать функционал (6.4), включая все его слагаемые. Тогда (поскольку по предположению существует решение исходной задачи) среди траекторий x , удовлетворяющих необходимому условию минимума функционала $I(x, z)$, найдутся такие, которые удовлетворяют граничным условиям (6.2).

Ниже мы адаптируем методику, разработанную в Главе 5, к рассматриваемой здесь задаче.

Имеем следующую формулу для вычисления субдифференциала функционала $I(x, z)$ в точке (x, z)

$$\partial I(x, z) = \underline{\partial} J(x, z) + \underline{\partial} I_2(x, z) + \underline{\partial} I_4(x, z) \quad (6.5)$$

где формально $I_2(x, z) := I_2(z)$.

Формально обозначим $\underline{\partial}\varphi_2(x, z, t) = \left(0_n, x_0 + \int_0^T z(t)dt - x_T, 0_m\right)'$, $\bar{\partial}\varphi_2(x, z, t) = (0_n, 0_n, 0_m)'$.

Формально обозначим $\bar{\partial}\varphi_4(x, z, t) = (0_n, 0_n, 0_m)'$, $\underline{\partial}\varphi_4(x, z, t) = \left(x(t) - x_0 - \int_0^t z(\tau)d\tau, -\int_t^T \left(x(\tau) - x_0 - \int_0^\tau z(s)ds\right)d\tau, 0_m\right)'$.

Формально обозначим

$$\underline{\partial}\varphi(\xi, t) = \underline{\partial}f_0(x, z, t) + \bar{\lambda}\underline{\partial}\varphi_2(x, z, t) + \bar{\lambda}\underline{\partial}\varphi_4(x, z, t),$$

$$\bar{\partial}\varphi(\xi, t) = \bar{\partial}f_0(x, z, t) + \bar{\lambda}\bar{\partial}\varphi_2(x, z, t) + \bar{\lambda}\bar{\partial}\varphi_4(x, z, t).$$

Теорема 6.2.1. *При сделанных предположениях, для того чтобы точка (x^*, z^*) доставляла минимум функционалу (6.4) необходимо, чтобы выполнялось следующее включение*

$$\mathbf{0}_n \in \underline{\partial}\varphi(\xi^*, t) \quad (6.6)$$

при почти всех $t \in [0, T]$.

6.3 Метод субдифференциального спуска

Опишем следующий метод субдифференцируемого спуска для нахождения стационарных точек функционала $I(x, z)$.

Зафиксируем произвольную начальную точку $(x_{(1)}, z_{(1)}) \in C_n[0, T] \times P_n[0, T]$. Пусть точка $(x_{(k)}, z_{(k)}) \in C_n[0, T] \times P_n[0, T]$ уже построена. Если для каждого $t \in [0, T]$ выполняется условие минимума (6.6) (на практике с некоторой фиксированной точностью $\bar{\varepsilon}$ в смысле L^2 -нормы (см. задачу (6.8)) или в дискретные моменты времени $t_i, i = \overline{1, N}$, с некоторым фиксированным рангом дискретизации N в смысле \mathbb{R} -нормы (см. задачу (6.9))), то $(x_{(k)}, z_{(k)})$ является стационарной точкой функционала $I(x, z)$ и процесс завершается. В противном случае положим

$$(x_{(k+1)}, z_{(k+1)}) = (x_{(k)}, z_{(k)}) + \gamma_{(k)} G(x_{(k)}, z_{(k)})$$

где вектор-функция $G(x_{(k)}, z_{(k)})$ является направлением субдифференциального спуска функционала $I(x, z)$ в точке $(x_{(k)}, z_{(k)})$, а значение $\gamma_{(k)}$ является решением следующей одномерной задачи

$$\min_{\gamma \geq 0} I\left((x_{(k)}, z_{(k)}) + \gamma G(x_{(k)}, z_{(k)})\right) = I\left((x_{(k)}, z_{(k)}) + \gamma_{(k)} G(x_{(k)}, z_{(k)})\right). \quad (6.7)$$

На практике задача выше решается на некотором интервале $[0, \bar{\gamma}]$ с некоторым фиксированным значением $\bar{\gamma}$. Тогда $I(x_{(k+1)}, z_{(k+1)}) \leq I(x_{(k)}, z_{(k)})$. Если последовательность $(x_{(k)}, z_{(k)})$, $k = 1, 2, \dots$, конечна, то ее последняя точка является стационарной точкой функционала $I(x, z)$ по построению. Если последовательность $(x_{(k)}, z_{(k)})$, $k = 1, 2, \dots$, бесконечна, то описанный процесс может не привести к стационарной точке функционала $I(x, z)$, поскольку субдифференциальное отображение $(x, z) \rightarrow \underline{\partial}I(x, z)$ не является непрерывным в метрике Хаусдорфа.

Как видно из описанного алгоритма, для реализации k -й итерации необходимо решить три подзадачи. Первая подзадача — вычисление субдифференциала функционала $I(x, z)$ в точке $(x_{(k)}, z_{(k)})$. С помощью правил субдифференциального исчисления решение этой подзадачи получено в формуле (6.5). Вторая подзадача — нахождение направления субдифференциального спуска $G(x_{(k)}, z_{(k)})$; решению этой подзадачи посвящены следующие два абзаца. Третья подзадача — одномерная минимизация (6.7); существует множество эффективных методов решения этой подзадачи.

Чтобы получить вектор-функцию $G(x_{(k)}, z_{(k)})$, рассмотрим задачу

$$\min_{v \in \underline{\partial}I(x_{(k)}, z_{(k)})} \int_0^T v^2(t) dt. \quad (6.8)$$

Напомним, что мы отождествляем v и v для простоты. Обозначим \bar{v} решение поставленной выше задачи. (Вектор-функция \bar{v} , конечно, зависит от точки $(x_{(k)}, z_{(k)})$, но мы опускаем эту зависимость в обозначениях для краткости.) Тогда вектор-функция $G(x_{(k)}, z_{(k)}) = -\bar{v}$ является (не нормированным) направлением субдифференциального спуска функционала

$I(x, z)$ в точке $(x_{(k)}, z_{(k)})$. Заметим, что субдифференциал функционала $I(x, z)$ в каждый момент времени $t \in [0, T]$ вычисляется независимо (т. е. субдифференциал, вычисленный в один момент времени, не зависит от его субдифференциала, вычисленного в какой-то другой момент времени).

Чтобы решить задачу (6.8) в этом случае, нужно решить задачу

$$\min_{v(t) \in \partial \varphi(\xi_{(k)}, t)} v^2(t) \quad (6.9)$$

для каждого $t \in [0, T]$. Еще раз подчеркнем, что это утверждение справедливо в силу особой структуры субдифференциала, которая в свою очередь имеет место из-за разделения вектор-функций $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ на “независимые” переменные.

Задача (6.9) при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ является конечномерной задачей нахождения расстояния от нуля до выпуклого компакта (субдифференциала). Эта задача может быть эффективно решена для широкого класса функций; в следующем параграфе описывается ее решение. На практике делается (равномерное) разбиение интервала $[0, T]$, и эта задача решается для каждой точки разбиения, т. е. нужно вычислить $G(x_{(k)}, z_{(k)}, t_i)$, где $t_i \in [0, T]$, $i = \overline{1, N}$, являются точками дискретизации. При некотором естественном дополнительном предположении Лемма 5.5.1 гарантирует, что вектор-функция, полученная с помощью кусочно-линейной интерполяции направлений субдифференциального спуска, вычисленных в каждой точке такого разбиения интервала $[0, T]$, сходится к искомой вектор-функции $G(x_{(k)}, z_{(k)})$ в пространстве $L_{2n}^2[0, T]$ при стремлении ранга дискретизации к бесконечности. Такая аппроксимация гарантирует, что следующая точка $[x_{k+1}, z_{k+1}]$ “не покидает” пространство $C_n[0, T] \times P_n[0, T]$, обеспечивая корректность метода в этом смысле.

Как было отмечено в предыдущем параграфе, для реализации алгоритма требуется найти расстояние от нуля до субдифференциала функционала $I(x, z)$ в каждый момент времени (равномерного) разбиения интервала $[0, T]$. Рассмотрим некоторые методы решения этой подзадачи (для широкого класса функций) для фиксированного момента времени $t \in [0, T]$. Известно, что во многих практических случаях субдифференциал $\partial \varphi(\xi, t)$ является выпуклым многогранником $A(t) \subset \mathbb{R}^{2n}$. Например, если подынтегральная функция является максимумом конечного числа непрерывно дифференцируемых функций, то ее субдифференциал является выпуклым многогранником в каждый момент времени $t \in [0, T]$. При этом, конечно, множество $A(t)$ зависит от точки (x, z) ; для простоты записи в этом параграфе мы опускаем эту зависимость. Эту задачу нахождения евклидова расстояния от точки до выпуклого многогранника можно эффективно решать различными методами. В более общем случае субдифференциал при каждом $t \in [0, T]$ является выпуклым компактом (например,

если подынтегральное выражение зависит от нормы некоторых координат вектор-функций $x(t)$, $z(t)$, то субдифференциал в некоторых точках $t \in [0, T]$ может быть эллипсоидом (со своими внутренними точками), лежащим в подпространстве пространства \mathbb{R}^{2n}). В этом случае приходится решать задачу нахождения евклидова расстояния от точки до выпуклого компакта, и если рассматриваются эллипсоиды или более сложные множества [47], то методы решения этой задачи можно найти в [196].

6.4 Численные примеры

Расчеты проводились в пакете MatLab 18.0. Решение задачи одномерной минимизации проводилось на интервале $[0, 1]$ (т. е. здесь $\bar{\gamma} = 1$) в MatLab с помощью встроенного алгоритма `fminbnd()` с его внутренними параметрами по умолчанию. В соответствии с документацией для решения этой задачи в MatLab используется метод золотого среднего в сочетании с параболической интерполяцией [55]. Все интегралы вычислялись в MatLab с помощью встроенной функции `evalf(int())` с ее внутренними параметрами по умолчанию. В соответствии с документацией для решения этой задачи в MatLab используется метод Гаусса-Кронрода [13].

Пример 6.4.1. Рассмотрим минимизацию функционала

$$\mathcal{J}(x) = \int_0^1 |x(t) - \max\{t - 0.5, 0\}| dt,$$

$$x(0) = 0,$$

с единственным очевидным решением $x^*(t) = \max\{t - 0.5, 0\}$, $t \in [0, 1]$ и $\mathcal{J}(x^*) = 0$.

В соответствии с Замечанием 6.2.1, функционалы $I_2(z)$ и $I_4(x, z)$ здесь отсутствуют.

Возьмем $x_{(1)} = 2t - 1$ в качестве начальной точки, тогда $I(x_{(1)}) = 0.375$ (здесь $I(x) := I(x, z)$). По мере увеличения количества итераций ранг дискретизации постепенно увеличивался в ходе решения вспомогательной задачи нахождения направления субдифференциального спуска, описанного в алгоритме, и в конечном итоге шаг дискретизации составил 10^{-1} (т. е. $N = 10$). Для решения вспомогательной задачи нахождения евклидова расстояния от точки до выпуклого многогранника использовался первый метод последовательных приближений алгоритма Малоземова-Демьянова-Митчелла с его параметром $\bar{\delta} = 10^{-4}$. На 28-й итерации была получена точка $(x_{(28)}, z_{(28)})$ с координатами

$$x(t) = 14.1565t^5 - 13.6885t^4 + 3.7699t^3 - 0.0789t^2 - 0.0739t + 0.0049, \quad 0 \leq t < 0.5,$$

$$6.0666t^5 - 19.4749t^4 + 23.4983t^3 - 12.9012t^2 + 3.9828t - 0.6695, \quad 0.5 \leq t \leq 1,$$

и значение $\mathcal{J}(x_{(28)}) = I(x_{(28)}) \approx 0.00116$. Для удобства изложения приведен интерполяционный полином Лагранжа, который достаточно точно аппроксимирует (то есть погрешность интерполяции не влияет на значение представленного с заданной точностью функционала, но (незначительно) влияет на приведенное значение нормы наименьшего субградиента) результирующую траекторию. При этом мы игнорировали параметр $\bar{\varepsilon}$ и рассматривали только значение функционала. Таким образом, погрешность относительно функционала не превышает величины 10^{-3} .

Пример 6.4.2. Минимизируем функционал

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x) &= \int_0^1 \max \left\{ \dot{x}_1^2(t) - x_1^2(t) - 2tx_1(t), x_2(t) \right\} dt, \\ x_1(0) &= 0, \quad x_2(0) = 0, \\ x_1(1) &= 0, \quad x_2(1) = 0. \end{aligned}$$

Итак, требуется минимизировать функционал

$$\begin{aligned} I(x, z) &= \int_0^1 \max \left\{ \dot{x}_1^2(t) - x_1^2(t) - 2tx_1(t), x_2(t) \right\} dt + \\ &+ \lambda \frac{1}{2} \left(\int_0^1 z_1(t) dt \right)^2 + \lambda \frac{1}{2} \left(\int_0^1 z_2(t) dt \right)^2 + \lambda \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x(t) - \int_0^t z(\tau) d\tau \right)^2 dt. \end{aligned}$$

Возьмем $(x_{(1)}, z_{(1)}) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)'$ в качестве начальной точки, тогда будет $I(x_{(1)}, z_{(1)}) = 0$. По мере увеличения количества итераций ранг дискретизации постепенно увеличивался в ходе решения вспомогательной задачи нахождения направления субдифференциального спуска, описанного в алгоритме, и в итоге шаг дискретизации составил 5×10^{-2} (т. е. $N = 20$); значение штрафного параметра также увеличивалось и в итоге $\lambda = 300$. Для решения вспомогательной задачи нахождения евклидова расстояния от точки до выпуклого многогранника использовался первый метод последовательных приближений алгоритма Малоземова-Демьянова-Митчелла с его параметром $\bar{\delta} = 10^{-4}$. На 56-й итерации была найдена точка $(x_{(56)}, z_{(56)})$ с координатами

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 27.83995t^5 - 18.272210t^4 + 4.163818t^3 - 0.47695t^2 + 0.153284t, \quad 0 \leq t \leq 0.25, \\ &0.763217t^5 - 0.923994t^3 + 0.457991t^2 + 0.018469t + 0.009833, \quad 0.25 \leq t \leq 0.5, \\ &2.02681t^5 - 3.01454t^4 - 0.62533t^3 + 3.13597t^2 - 1.81301t + 0.36767, \quad 0.5 \leq t \leq 0.75, \\ &-0.155737t^4 + 0.420485t^2 - 0.429341t + 0.169993, \quad 0.75 \leq t \leq 1, \end{aligned}$$

$$x_2(t) = 1.934618t^5 - 2.059840t^4 + 0.821448t^3 - 0.169958t^2 - 0.073440t, \quad 0 \leq t \leq 0.5,$$

$$0.463557t^4 - 1.012055t^3 + 1.092861t^2 - 0.647782t + 0.103397, \quad 0.5 \leq t \leq 1,$$

$$z_1(t) = -0.043907t^4 + 0.217162t^3 - 0.337550t^2 - 0.126702t + 0.132179,$$

$$z_2(t) = -0.035801t^4 + 0.661239t^3 - 0.132123t^2 - 0.066889t - 0.080925,$$

и значение $I(x_{(56)}, z_{(56)}) \approx -0.02175$, при этом $x_1(1) \approx 0.0054$, $x_2(1) \approx 0$. Для удобства изложения приведена функция, состоящая из интерполяционных полиномов Лагранжа, отдельно вычисленных на нескольких временных интервалах и достаточно точно аппроксимирующих (т. е. погрешность интерполяции не влияет на значение представленного с заданной точностью функционала, но (незначительно) влияет на заданное значение нормы наименьшего субградиента) результирующую траекторию. В данном примере берётся параметр $\bar{\varepsilon} = 0.1$. При этом $\|\bar{v}_{(56)}\|_{L_2^2[0,T] \times L_2^2[0,T]} \approx 0.0915$.

Поскольку имеем $z(t) = \dot{x}(t)$, $t \in [0, 1]$, можно взять точку $(x_{(56)}, z_{(56)})$ с координатами

$$x_1(t) = 27.83995t^5 - 18.272210t^4 + 4.163818t^3 - 0.476947t^2 + 0.153284t, \quad 0 \leq t \leq 0.25,$$

$$0.763217t^5 - 0.923994t^3 + 0.457991t^2 + 0.018469t + 0.009833, \quad 0.25 \leq t \leq 0.5,$$

$$2.02681t^5 - 3.01454t^4 - 0.625326t^3 + 3.13597t^2 - 1.81301t + 0.36767, \quad 0.5 \leq t \leq 0.75,$$

$$-0.155737t^4 + 0.420485t^2 - 0.429341t + 0.169993, \quad 0.75 \leq t \leq 1,$$

$$x_2(t) = 1.934618t^5 - 2.059840t^4 + 0.821448t^3 - 0.169958t^2 - 0.073440t, \quad 0 \leq t \leq 0.5,$$

$$0.463557t^4 - 1.012055t^3 + 1.092861t^2 - 0.647782t + 0.103397, \quad 0.5 \leq t \leq 1,$$

$$z_1(t) = 139.199755t^4 - 73.88839t^3 + 12.491454t^2 - 0.953894t + 0.153284, \quad 0 \leq t \leq 0.25,$$

$$3.816084t^4 - 2.771981t^2 + 0.915982t + 0.018469, \quad 0.25 < t \leq 0.5,$$

$$10.134052t^4 - 12.058139t^3 - 1.875979t^2 + 6.271932t - 1.813011, \quad 0.5 < t \leq 0.75,$$

$$-0.622947t^3 + 0.840969t - 0.429341, \quad 0.75 < t \leq 1,$$

$$z_2(t) = 9.673089t^4 - 8.239360t^3 + 2.464344t^2 - 0.339916t - 0.073440, \quad 0 \leq t \leq 0.5,$$

$$1.854229t^3 - 3.036168t^2 + 2.185722t - 0.647782, \quad 0.5 < t \leq 1,$$

а тогда $I(x_{(56)}, z_{(56)}) \approx -0.01827$ и $\mathcal{J}(x_{(56)}) \approx -0.02264$, при этом $x_1(1) \approx 0.0054$, $x_2(1) \approx 0$. Таким образом, ошибка значения траектории на правом конце не превышает величины 5×10^{-3} . Из-за структуры функционала нельзя гарантировать, что значение функционала, полученное на 56-й итерации, является глобальным минимумом в этой задаче.

Для оценки адекватности полученного результата обратимся к примеру, рассмотренному в работе [46]. В ней минимизируется гладкий функционал $\mathcal{J}_0(x_1) = \int_0^1 \dot{x}_1^2(t) - x_1^2(t) - 2tx_1(t)dt$ с граничными условиями $x_1(0) = 0$, $x_1(1) = 0$ и дано точное решение $\bar{x}_1(t) = \frac{\sin(t)}{\sin(1)} - t$ и соответствующее ему минимальное значение $\mathcal{J}_0(\bar{x}_1) = -0.02457$. Однако легко заметить, что минимальные значения функционалов $\mathcal{J}_0(x_1)$ и $\mathcal{J}(x_1, x_2)$ (при заданных граничных условиях) совпадают. Действительно, так как $\max \left\{ \dot{x}_1^2(t) - x_1^2(t) - 2tx_1(t), x_2(t) \right\} \geq \dot{x}_1^2(t) - x_1^2(t) - 2tx_1(t)$ для произвольных значений переменных в этом неравенстве, то получается неравенство $\mathcal{J}(x_1, x_2) \geq \mathcal{J}_0(x_1) \geq \mathcal{J}_0(\bar{x}_1) \forall x_1, x_2 \in C_1[0, T]$. Взяв произвольную траекторию $\bar{x}_2 \in C_1[0, 1]$, $\bar{x}_2(0) = 0$, $\bar{x}_2(1) = 0$, такую что $\bar{x}_2(t) \leq \dot{\bar{x}}_1^2(t) - \bar{x}_1^2(t) - 2t\bar{x}_1(t)$ (это возможно, так как значения функции в правой части этого неравенства положительны при $t = 0$ и при $t = 1$), приходим к доказательству утверждения. Поскольку минимальное значение функционала, полученное с помощью метода настоящей работы, приблизительно равно -0.02264 , то можно видеть, что погрешность значения функционала не превосходит величины 2×10^{-3} .

Несмотря на то, что, как только что было отмечено, минимальное значение функционала в этом примере достигается на любой функции $\bar{x}_2(t)$, удовлетворяющей заданным граничным условиям и не превосходящей (при каждом $t \in [0, 1]$) подынтегральной функции функционала $\mathcal{J}_0(x_1)$, на большинстве итераций описанного в главе метода значения функции $x_2(t)$ и подынтегральной функции функционала $\mathcal{J}_0(x_1)$ совпадали на подмножестве интервала $[0, 1]$ ненулевой меры, т. е. обе функции, находящиеся под максимумом в функционале $\mathcal{J}(x)$, были активны на этом подмножестве, следовательно, функционал $\mathcal{J}(x)$ оказался недифференцируемым на этих функциях и в ходе работы метода главы был вычислен “полноценный” субдифференциал данного функционала. На рисунке описанная ситуация представлена для нескольких итераций.

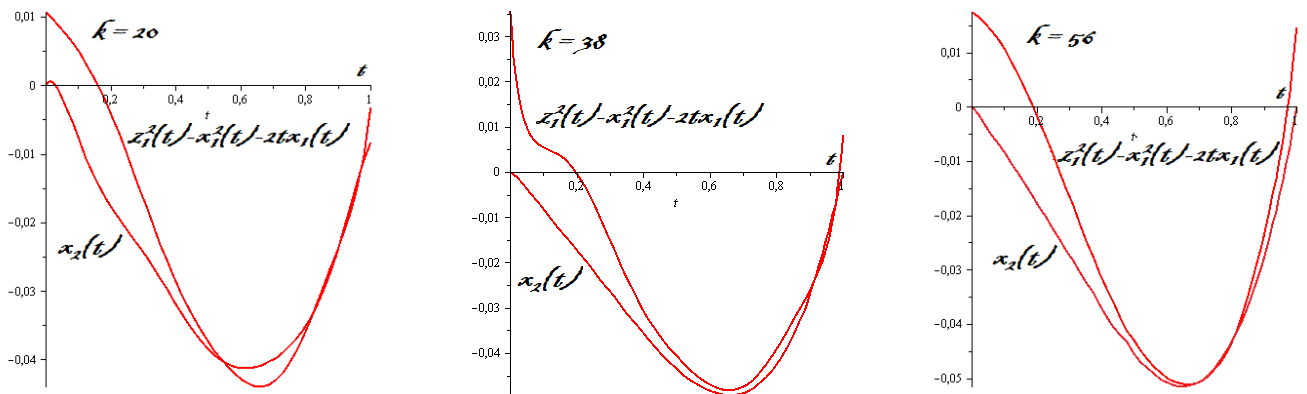


Рис. 6.1: Пример 6.4.2, функции на итерациях 20, 38, 56

Пример 6.4.3. Рассмотрим минимизацию функционала

$$\mathcal{J}(x) = \int_0^5 \sqrt{(\dot{x}_1(t) - 1)^2 + x_2^2(t)} + \left(x_1(t) - x_3(t) - \sin(t)\right)^2 dt,$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0,$$

с единственным очевидным решением $x_1^*(t) = t$, $x_2^*(t) = 0$, $x_3^*(t) = t - \sin(t)$, $t \in [0, 5]$, и $\mathcal{J}(x^*) = 0$.

В соответствии с Замечанием 6.2.1, функционал $I_2(z)$ здесь отсутствует. Итак, требуется минимизировать функционал

$$I(x, z) = \int_0^5 \sqrt{(\dot{x}_1(t) - 1)^2 + x_2^2(t)} + \left(x_1(t) - x_3(t) - \sin(t)\right)^2 dt +$$

$$+ \int_0^5 \left(x(t) - \int_0^t z(\tau) d\tau\right)^2 dt,$$

Очевидно, что $z_1^*(t) = 1$, $z_2^*(t) = 0$, $z_3^*(t) = 1 - \cos(t)$, $t \in [0, 5]$, и $I(x^*, z^*) = 0$.

Возьмем $(x_{(1)}, z_{(1)}) = (0, 0, 0, 1, 0, 0)'$ в качестве начальной точки, тогда $I(x_{(1)}, z_{(1)}) = 44.30267$. По мере увеличения количества итераций ранг дискретизации постепенно увеличивался в ходе решения вспомогательной задачи нахождения направления субдифференциального спуска, описанного в алгоритме, и в итоге шаг дискретизации составил 2.5×10^{-2} (т. е. $N = 200$); был взят параметр штрафа $\lambda = 2$. Вспомогательная задача нахождения евклидова расстояния от точки до эллипсоида была решена в MatLab с помощью встроенной функции `function fminunc()` с параметром алгоритма 'quasi-newton' с его другими внутренними параметрами по умолчанию. Согласно документации, для решения этой задачи MatLab использует квазиньютоновский BFGS-метод с линейным поиском на основе кубической интерполяции. На 178-й итерации была получена точка $(x_{(178)}, z_{(178)})$ с координатами

$$x(t) = (-0.0000056t^5 + 0.000071t^4 - 0.000336t^3 + 0.000783t^2 + 0.999079t,$$

$$0, 0.00002217t^9 - 0.0005342t^8 + 0.0050314t^7 - 0.023074t^6 + 0.053894t^5 -$$

$$-0.097232t^4 + 0.261281t^3 - 0.070276t^2 + 0.0352t)',$$

$$z(t) = (0.000004t^3 - 0.000145t^2 + 0.000744t + 0.999079,$$

$$0, 0.0001996t^8 - 0.0042738t^7 + 0.035220t^6 - 0.138441t^5 + 0.269469t^4 - 0.388926t^3 +$$

$$+0.783842t^2 - 0.14055t + 0.0352)'$$

и значение $I(x_{(178)}, z_{(178)}) = 0,0015$. Для удобства приведен интерполяционный полином Лагранжа, который достаточно точно аппроксимирует (т. е. погрешность интерполяции не

влияет на значение представленного с заданной точностью функционала, но (незначительно) влияет на заданное значение нормы наименьшего субградиента) результирующую траекторию. При этом мы игнорировали параметр $\bar{\varepsilon}$ и рассматривали только значение функционала.

Поскольку имеем $z(t) = \dot{x}(t)$, $t \in [0, 5]$, можно взять точку $(x_{(178)}, z_{(178)})$ с координатами

$$x(t) = (-0.0000056t^5 + 0.000071t^4 - 0.000336t^3 + 0.000783t^2 + 0.999079t,$$

$$0, 0.00002217t^9 - 0.0005342t^8 + 0.0050314t^7 - 0.023074t^6 + 0.053894t^5 -$$

$$-0.097232t^4 + 0.261281t^3 - 0.070276t^2 + 0.0352t)',$$

$$z(t) = (-0.000028t^4 + 0.000284t^3 - 0.001009t^2 + 0.001565t + 0.999079,$$

$$0, 0.0001996t^8 - 0.0042738t^7 + 0.035220t^6 - 0.138441t^5 + 0.269469t^4 - 0.388926t^3 +$$

$$+0.783842t^2 - 0.14055t + 0.0352)'$$

а тогда $\mathcal{J}(x_{(178)}) = I(x_{(178)}, z_{(178)}) \approx 0.0012$. Таким образом, ошибка по функционалу не превышает величины 10^{-3} .

Интересно рассмотреть “поведение” функции $z_1(t)$ при увеличении числа итераций. Эта траектория находится на “далеком” расстоянии от истинного значения и незначительно меняется на большей части временного интервала и заметно “улучшается” только на коротком промежутке времени, начиная с конечного момента $T = 5$. Постепенно функция “выпрямляется”, приближаясь к истинному значению в меньшие моменты времени и, наконец, становится близкой к решению на всем временном интервале. Типичное “поведение” функции $z_1(t) - 1$ показано на рисунке для некоторых итераций.

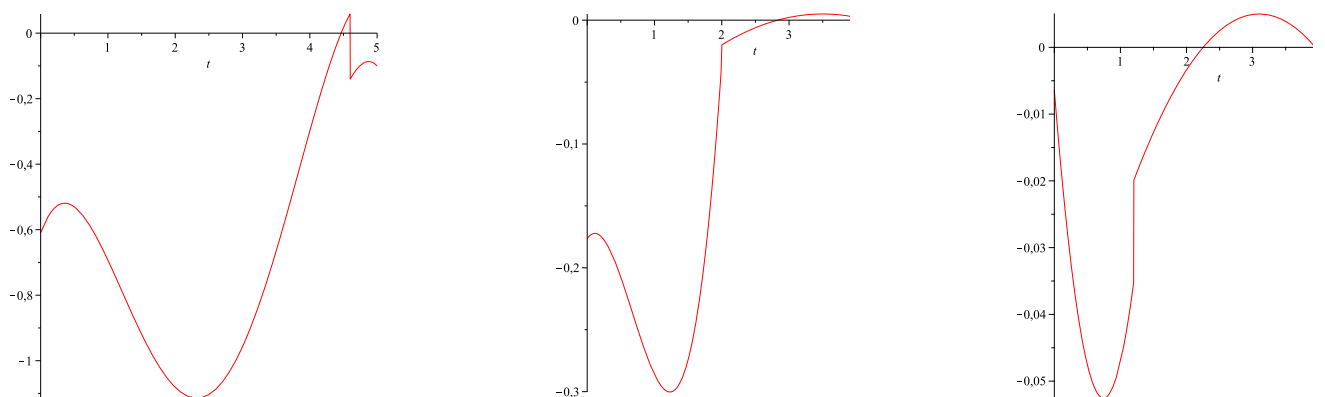


Рис. 6.2: Пример 6.4.3, функции на итерациях: 12, 68, 87

Глава 7

Оптимальное управление гладкими системами с негладким функционалом Майера

Глава посвящена задаче оптимального управления объектом, описываемым системой с непрерывно дифференцируемой правой частью и квазидифференцируемым функционалом качества. Рассматривается задача в форме Майера как со свободным, так и (частично) закрепленным правым концом. Допустимыми управлениями считаются кусочно-непрерывные вектор-функции, принадлежащие в каждый момент времени некоторому параллелепипеду. Проводится стандартная дискретизация исходной системы и параметризация управления, также приведены теоремы о сходимости полученного решения дискретной системы к искомому решению непрерывной задачи. Далее для полученной дискретной системы записываются необходимые условия минимума в терминах квазидифференциала. К данной задаче применяется метод квазидифференциального спуска. В случае, когда рассматривается линейная система ОДУ и минимизируется кусочно-аффинная функция, приводится модифицированный метод кодифференциального спуска, сходящийся к глобальному решению за конечное число шагов. Разработанный алгоритм демонстрируется на примерах. Отмечена возможность применения разработанного метода к более общей задаче управления при наличии смешанных фазовых ограничений и ограничений на управление, описываемых системой неравенств с непрерывно дифференцируемыми функциями. См. [105], [217], [107].

7.1 Соответствующие определения

Рассмотрим некоторое непустое множество $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$.

Функция $\xi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ называется квазидифференцируемой на множестве Σ , если для каждого $\varsigma \in \Sigma$ существуют выпуклые компакты, субдифференциал $\underline{\partial}\xi(\varsigma) \subset \mathbb{R}^n$ и супердифференциал $\bar{\partial}\xi(\varsigma) \subset \mathbb{R}^n$, такие что для каждого допустимого приращения $\Delta\varsigma \in \mathbb{R}^n$ соответствующее приращение функции ξ определяется по формуле

$$\xi(\varsigma + \Delta\varsigma) = \xi(\varsigma) + \max_{\sigma_1 \in \underline{\partial}\xi(\varsigma)} \langle \sigma_1, \Delta\varsigma \rangle + \min_{\sigma_2 \in \bar{\partial}\xi(\varsigma)} \langle \sigma_2, \Delta\varsigma \rangle + o(\varsigma, \Delta\varsigma),$$

$$o(\varsigma, \alpha\Delta\varsigma)/\alpha \rightarrow 0, \quad \text{if } \alpha \rightarrow 0.$$

Пара $\mathcal{D}\xi(\varsigma) = [\underline{\partial}\xi(\varsigma), \bar{\partial}\xi(\varsigma)]$ называется квазидифференциалом ξ в точке ς .

Функция $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ называется кодифференцируемой в точке $\varsigma \in \Sigma$, если существуют компактные выпуклые множества, гиподифференциал $\underline{d}f(\varsigma) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и гипердифференциал $\bar{d}f(\varsigma) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, такие что для каждого допустимого приращения $\Delta\varsigma \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha} \left| f(\varsigma + \alpha\Delta\varsigma) - f(\varsigma) - \max_{[a,v] \in \underline{d}f(\varsigma)} (a + \alpha \langle \Delta\varsigma, v \rangle) - \min_{[b,w] \in \bar{d}f(\varsigma)} (b + \alpha \langle \Delta\varsigma, w \rangle) \right| = 0,$$

$$\max_{[a,v] \in \underline{d}f(\varsigma)} a + \min_{[b,w] \in \bar{d}f(\varsigma)} b = 0.$$

Пара $Df(\varsigma) = [\underline{d}f(\varsigma), \bar{d}f(\varsigma)]$ называется кодифференциалом функции f в точке ς .

Пусть функция f определена в окрестности Σ точки $\varsigma \in \mathbb{R}^n$ и кодифференцируема в этой точке. Для любого $r > 0$ такого, что $B(\varsigma, r) \subset \Sigma$ и для всех $\Delta\varsigma \in B(0, r)$ и $\alpha \in [0, 1]$ определим

$$o_f(\alpha, \varsigma, \Delta\varsigma, r) = \frac{1}{\alpha} \left(f(\varsigma + \alpha\Delta\varsigma) - f(\varsigma) - \max_{[a,v] \in \underline{d}f(\varsigma)} (a + \alpha \langle \Delta\varsigma, v \rangle) - \min_{[b,w] \in \bar{d}f(\varsigma)} (b + \alpha \langle \Delta\varsigma, w \rangle) \right)$$

Из определения кодифференцируемой функции следует, что $o_f(\alpha, \varsigma, \Delta\varsigma, r) \rightarrow 0$ as $\alpha \downarrow 0$.

Пусть функция $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ кодифференцируема на множестве Σ , и пусть существует $r > 0$, для которого $B(x, r) \subset \Sigma$ для всех $\varsigma \in \Sigma$. Говорят, что f равномерно кодифференцируема на множестве Σ , если существует кодифференциальное отображение $\varsigma \rightarrow Df(\varsigma)$ такое, что $o_f(\alpha, \varsigma, \Delta\varsigma, r) \rightarrow 0$ при $\alpha \downarrow 0$ равномерно для всех $\Delta\varsigma \in B(0, r)$ и $\varsigma \in \Sigma$. В этом случае говорят, что кодифференциальное отображение Df равномерно приближает функцию f на множестве Σ .

7.2 Постановка задачи

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \tag{7.1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0. \quad (7.2)$$

Предположение 7.2.1. В формуле (7.1) $f(x, u, t)$ — заданная n -мерная вектор-функция, $t \in [0, T]$, $T > 0$ — заданный конечный момент времени, $x(t)$ — n -мерная вектор-функция фазовых координат, которая предполагается кусочно-непрерывно дифференцируемой на $[0, T]$, $u(t)$ — m -мерная вектор-функция управлений, которая предполагается кусочно-непрерывной на $[0, T]$. Вектор-функция $f(x, u, t)$ и ее частные производные $\frac{\partial f(x, u, t)}{\partial u}$ и $\frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x}$ предполагаются непрерывными по (x, u) в каждый момент $t \in [0, T]$ и кусочно-непрерывными по $t \in [0, T]$ для каждой точки (x, u) на их области определения. В формуле (7.2) $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — заданный вектор.

Предположение 7.2.2. Мы также накладываем стандартное условие роста на правую часть системы: для каждого компактного подмножества $K \subset \mathbb{R}^m$ существует число C , такое что для всех $x, u \in K$ и $t \in [0, T]$ выполняется неравенство $\|f(x, u, t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq C(1 + \|x\|_{\mathbb{R}^n})$. См. также Замечание 7.8.1 ниже.

Введем множество допустимых управлений

$$U = \left\{ u \in P_m[0, T] \mid \underline{u}_i \leq u_i(t) \leq \bar{u}_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad t \in [0, T] \right\}. \quad (7.3)$$

Здесь $\underline{u}_i, \bar{u}_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, m}$, — заданные числа.

Обозначим через $x(t, u)$ решение задачи Коши (7.1), (7.2) для некоторого заданного управления $u \in U$ (иногда будем также писать просто $x(t)$ вместо $x(t, u)$). При сделанных предположениях такое решение существует и единственно [18].

Введем функционал

$$\varphi(u) = \psi(x(T, u)). \quad (7.4)$$

Предположение 7.2.3. Предполагаем, что функция $\psi(x)$ квазидифференцируема.

Теперь формальную постановку задачи можно сформулировать следующим образом. Требуется найти такое управление $u^* \in U$ (множество U задано (7.3)), которое минимизирует функционал (7.4), и найти соответствующую оптимальную траекторию $x(t, u^*)$, удовлетворяющую системе (7.1) с начальным условием (7.2) (обозначим эту траекторию через x^*).

Предположение 7.2.4. Предполагаем, что такое управление существует.

7.3 Параметризация управления

Следуя работе [442], проведем дискретизацию исходной задачи. Разделим временной интервал $[0, T]$ на 2^p равных частей Δt (где p — заданное натуральное число) точками t_k ,

$k = \overline{0, 2^p}$, $t_0 = 0, \dots, t_{2^p} = T$. Рассмотрим управление, принимающее постоянные значения на каждом из этих интервалов. Его можно записать в виде

$$u^p(t) = \sum_{k=1}^{2^p} \sigma^{p,k} \chi_{I_k^p}(t), \quad (7.5)$$

где $\sigma^{p,k} \in \mathbb{R}^m$, $k = \overline{1, 2^p}$, является вектором постоянных управлений, и $\chi_{I_k^p}(t)$ — индикаторная функция множества $I_k^p = [t_{k-1}, t_k)$, $k = \overline{0, 2^p - 1}$, $I_{2^p}^p = [t_{2^p-1}, t_{2^p}]$. Обозначим U^p множество всех векторов $\sigma^{p,k}$, $k = \overline{1, 2^p}$, которые принадлежат множеству U .

Положим $\sigma^p = (\sigma^{p,1}, \dots, \sigma^{p,2^p})'$ и перепишем исходную систему (7.1) с новым управлением $u^p(t)$

$$\dot{x}(t) = \bar{f}(x(t), \sigma^p, t) := f(x(t), u^p(t), t) \quad (7.6)$$

и тем же начальным условием

$$x(0) = x_0. \quad (7.7)$$

Обозначим $x(t, \sigma^p)$ решение задачи Коши (7.6), (7.7) при некотором фиксированном управлении $\sigma^p \in U^p$. При сделанных предположениях такое решение существует и единственно [18]. Введем функционал

$$\bar{\varphi}(\sigma^p) = \psi(x(T, \sigma^p)). \quad (7.8)$$

Предположение 7.3.1. Здесь мы дополнительно предполагаем, что функция $\psi(x)$ липшицева на любом ограниченном подмножестве \mathbb{R}^n . (Поскольку здесь рассматриваются только кусочно-постоянные управления, соответствующие траектории будут ограниченными в равномерной метрике [442], поэтому достаточно рассматривать функцию $\psi(x)$ только на ограниченных подмножествах \mathbb{R}^n .) См. также Замечание 7.8.1 ниже.

Теперь формальную постановку задачи можно переформулировать следующим образом. Требуется найти такое управление $\sigma^{p*} \in U^p$ (множество U задано формулой (7.3)), которое минимизирует функционал (7.8), и найти соответствующую оптимальную траекторию $x(t, \sigma^{p*})$, удовлетворяющую системе (7.6) с начальным условием (7.7) (обозначим эту траекторию через x^{p*}).

Таким образом, исходная задача построения кусочно-непрерывного управления $u^*(t)$ сводится к задаче (или последовательности задач с возрастающим номером p) построения кусочно-постоянного управления $u^{p*}(t) = \sum_{k=1}^{2^p} \sigma^{p*,k} \chi_{I_k^p}(t)$ (то есть определению вектор-параметра σ^{p*}). Проведенная параметризация управления позволит вычислить квазидифференциал минимизируемого функционала в каждой точке σ^p и тем самым применить метод квазидифференциального спуска, получив алгоритм решения исходной задачи.

Можно обосновать построенную параметризацию управления, то есть доказать сходимость значений функционала $\varphi(u^{p^*}) \rightarrow \varphi(u^*)$ при $p \rightarrow \infty$. Известны также некоторые результаты по сходимости последовательности управлений u^{p^*} и соответствующих траекторий $x(t, u^{p^*})$.

В следующих теоремах запишем требуемые результаты [442] по сходимости.

Теорема 7.3.1. *При сделанных предположениях справедливо следующее соотношение*

$$\varphi(u^{p^*}) \rightarrow \varphi(u^*), \quad p \rightarrow \infty.$$

Теорема 7.3.2. *При сделанных предположениях справедливо следующее утверждение: если $u^{p^*}(t) \rightarrow \bar{u}(t)$ при п. в. $t \in [0, T]$, тогда \bar{u} является оптимальным управлением исходной задачи. Тогда имеет место соотношение*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x(t, u^{p^*}) - x(t, \bar{u})\|_{L_n^\infty} = 0,$$

и $x(t, \bar{u})$ является оптимальной траекторией (возможно, не единственной) исходной задачи по определению.

7.4 Необходимые условия минимума

Предварительно рассмотрим случай отсутствия ограничений на управление.

Для простоты предварительно рассмотрим случай $p = 0$, то есть управление считается постоянным вектор-параметром на всем интервале $[0, T]$. Пусть $g \in \mathbb{R}^m$. Вычислим классическую вариацию функционала $\bar{\varphi}(\sigma^0)$. Имеем

$$\frac{\partial \bar{\varphi}(\sigma^0)}{\partial g} = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\bar{\varphi}(\sigma^0 + \alpha g) - \bar{\varphi}(\sigma^0)}{\alpha} = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\psi(x(T, \sigma^0 + \alpha g)) - \psi(x(T, \sigma^0))}{\alpha}.$$

Известно [115], что существует производная вектор-функции $x(T, \sigma^0)$ по направлению g , совпадающая с решением дифференциального уравнения

$$\dot{h}(t) = \frac{\partial f(x(t, \sigma^0), \sigma^0, t)}{\partial x} h(t) + \frac{\partial f(x(t, \sigma^0), \sigma^0, t)}{\partial u} g \quad (7.9)$$

с начальным условием

$$h(0) = 0, \quad (7.10)$$

вычисленным в точке T , то есть

$$\frac{\partial x(T, \sigma^0)}{\partial g} = h(T).$$

Используя этот факт, перепишем искомую производную по направлению в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\varphi}(\sigma^0)}{\partial g} &= \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\psi\left(x(T, \sigma^0) + \alpha \frac{\partial x(T, \sigma^0)}{\partial g} + o(\alpha, \sigma^0, g)\right) - \psi(x(T, \sigma^0))}{\alpha} = \\ &= \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\psi\left(x(T, \sigma^0) + \alpha h(T) + o(\alpha, \sigma^0, g)\right) - \psi(x(T, \sigma^0))}{\alpha} = \\ &= \max_{v \in \underline{\partial}\psi(x(T, \sigma^0))} \langle v, h(T) \rangle + \min_{w \in \bar{\partial}\psi(x(T, \sigma^0))} \langle w, h(T) \rangle. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Последнее равенство справедливо в силу квазидифференцируемости функции $\psi(x)$.

Вычислим вектор $h(T)$ по формуле Коши из системы (7.9), (7.10). Имеем

$$h(T) = Y(T) \int_0^T Y^{-1}(t) \frac{\partial f(x(t, \sigma^0), \sigma^0, t)}{\partial u} g dt,$$

где $Y(t)$ является фундаментальной матрицей системы (7.9). Подставляя полученный вектор в равенство (7.11), окончательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\varphi}(\sigma^0)}{\partial g} &= \max_{v \in \underline{\partial}\psi(x(T, \sigma^0))} \left\langle \left(Y(T) \int_0^T Y^{-1}(t) \frac{\partial f(x(t, \sigma^0), \sigma^0, t)}{\partial u} dt \right)' v, g \right\rangle + \\ &+ \min_{w \in \bar{\partial}\psi(x(T, \sigma^0))} \left\langle \left(Y(T) \int_0^T Y^{-1}(t) \frac{\partial f(x(t, \sigma^0), \sigma^0, t)}{\partial u} dt \right)' w, g \right\rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, функционал $\bar{\varphi}(\sigma^0)$ является квазидифференцируемым:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}(\sigma^0)}{\partial g} = \max_{V \in \underline{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^0)} \langle V, g \rangle + \min_{W \in \bar{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^0)} \langle W, g \rangle,$$

и его квазидифференциал (парный субдифференциал, супердифференциал) в точке σ^0 имеет вид

$$\underline{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^0) = \left\{ \left(Y(T) \int_0^T Y^{-1}(t) \frac{\partial f(x(t, \sigma^0), \sigma^0, t)}{\partial u} dt \right)' v \mid v \in \underline{\partial}\psi(x(T, \sigma^0)) \right\}, \quad (7.12)$$

$$\bar{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^0) = \left\{ \left(Y(T) \int_0^T Y^{-1}(t) \frac{\partial f(x(t, \sigma^0), \sigma^0, t)}{\partial u} dt \right)' w \mid w \in \bar{\partial}\psi(x(T, \sigma^0)) \right\}. \quad (7.13)$$

Итак, если удастся выписать фундаментальную матрицу системы (7.9), то квазидифференциал функционала $\bar{\varphi}(\sigma^0)$ в точке σ^0 вычисляется по формулам (7.12), (7.13). Отметим, что если система (7.9) нестационарна, то в общем случае не существует способов явного построения ее фундаментальной матрицы $Y(t)$, поэтому для возможности вычисления квазидифференциала полезно следующее замечание. Из формулы Коши видно, что выражение $Y(T) \int_0^T Y^{-1}(t) \frac{\partial f(x(t, \sigma^0), \sigma^0, t)}{\partial u} dt$ является решением матричного дифференциального уравнения

$$\dot{H}(t) = \frac{\partial f(x(t, \sigma^0), \sigma^0, t)}{\partial x} H(t) + \frac{\partial f(x(t, \sigma^0), \sigma^0, t)}{\partial u}, \quad (7.14)$$

$$H(0) = \mathbf{O}_n, \quad (7.15)$$

вычисляемого в точке T , то есть $Y(T) \int_0^T Y^{-1}(t) \frac{\partial f(x(t, \sigma^0), \sigma^0, t)}{\partial u} dt = H(T)$. Поэтому в общем случае можно численно проинтегрировать систему (7.14), (7.15) для получения матрицы $H(T)$, а затем найти квазидифференциал функционала $\bar{\varphi}(\sigma^0)$ в точке σ^0 по формулам

$$\underline{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^0) = \left\{ (H(T))'v \mid v \in \underline{\partial}\psi(x(T, \sigma^0)) \right\},$$

$$\bar{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^0) = \left\{ (H(T))'w \mid w \in \bar{\partial}\psi(x(T, \sigma^0)) \right\}.$$

Теперь нетрудно рассмотреть случай произвольного p . Для этого заметим, что для фиксированных векторов $\sigma^{p,1}, \dots, \sigma^{p,k-1}, \sigma^{p,k+1}, \dots, \sigma^{p,2^p}$ производная вектор-функции $x(T, \sigma^p)$ как функции единственного аргумента $\sigma^{p,k}$ по направлению $g_k \in \mathbb{R}^m$ определяется формулой

$$\frac{\partial x(T, \sigma^{p,k})}{\partial g_k} = h^k(T), \quad (7.16)$$

где вектор-функция $h^k(t)$ является решением следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{h}^k(t) &= \frac{\partial f(x(t, \sigma^{p,l}), \sigma^{p,l}, t)}{\partial x} h^k(t) + \delta_{k,l} \frac{\partial f(x(t, \sigma^{p,l}), \sigma^{p,l}, t)}{\partial \sigma^p} g_k, \\ t &\in [t_{l-1}, t_l] \text{ at } l = \overline{k, 2^p - 1}; \quad t \in [t_{l-1}, t_l] \text{ at } l = 2^p, \end{aligned}$$

с начальным условием

$$h^k(t) = \mathbf{O}_n, \quad t \in [0, t_{k-1}).$$

Окончательно имеем следующую теорему.

Теорема 7.4.1. *Функционал $\bar{\varphi}(\sigma^p)$ является квазидифференцируемым, и его квазидифференциал в точке σ^p вычисляется по формуле*

$$\mathcal{D}\bar{\varphi}(\sigma^p) = \left[\underline{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^p), \bar{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^p) \right], \quad (7.17)$$

$$\begin{aligned} \underline{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^p) &= \left\{ \left[V_1, \dots, V_{2^p} \right] \mid V_k = (H^k(T))'v, \quad k = \overline{1, 2^p}, \quad v \in \underline{\partial}\psi(x(T, \sigma^p)) \right\}, \\ \bar{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^p) &= \left\{ \left[W_1, \dots, W_{2^p} \right] \mid W_k = (H^k(T))'w, \quad k = \overline{1, 2^p}, \quad w \in \bar{\partial}\psi(x(T, \sigma^p)) \right\}, \end{aligned}$$

где матрица $H^k(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \dot{H}^k(t) &= \frac{\partial f(x(t, \sigma^{p,l}), \sigma^{p,l}, t)}{\partial x} H^k(t) + \delta_{k,l} \frac{\partial f(x(t, \sigma^{p,l}), \sigma^{p,l}, t)}{\partial \sigma^p}, \\ t &\in [t_{l-1}, t_l] \text{ at } l = \overline{k, 2^p - 1}; \quad t \in [t_{l-1}, t_l] \text{ at } l = 2^p, \end{aligned}$$

с начальным условием

$$H^k(t) = \mathbf{O}_n, \quad t \in [0, t_{k-1}).$$

В соответствии с полученной выше теоремой вычисление квазидифференциала функции $\bar{\varphi}(\sigma^p)$ в точке σ^p состоит из двух этапов.

Во-первых, для $k = \overline{1, 2^p}$ необходимо решить матричное дифференциальное уравнение

$$\dot{H}^k(t) = \frac{\partial f(x(t, \sigma^{p,l}), \sigma^{p,l}, t)}{\partial x} H^k(t) + \delta_{k,l} \frac{\partial f(x(t, \sigma^{p,l}), \sigma^{p,l}, t)}{\partial \sigma^{p,k}},$$

$$t \in [t_{l-1}, t_l) \text{ at } l = \overline{k, 2^p - 1}; \quad t \in [t_{l-1}, t_l] \text{ at } l = 2^p,$$

с начальным условием

$$H^k(t) = \mathbf{O}_n, \quad t \in [0, t_{k-1}).$$

Во-вторых, следует вычислить квазидифференциал функции $\bar{\varphi}(\sigma^p)$ как суперпозицию функций $\psi(x)$ и $x(T, \sigma^p)$, используя правила квазидифференциального исчисления [180] для вычисления квазидифференциала функции $\psi(x)$, при этом с использованием формулы

$$\frac{\partial \zeta(x(T, \sigma^p))}{\partial \sigma^{p,k}} = \left(\frac{\partial x(T, \sigma^p)}{\partial \sigma^{p,k}} \right)' \frac{\partial \zeta(x(T, \sigma^p))}{\partial x} = (H^k(T))' \frac{\partial \zeta(x(T, \sigma^p))}{\partial x}, \quad k = \overline{1, 2^p} \quad (7.18)$$

для вычисления градиентов дифференцируемой функции $\zeta(x(T, \sigma^p))$.

Для иллюстрации данного выше правила вычислим квазидифференциал функции

$$\bar{\varphi}(\sigma^0) = \psi(x(1, \sigma^0)) = \max \left\{ \left(|x_2(1)| - |x_1(1)| + 1 \right) \left(|x_2(1)| + 2|x_1(1)| + 1 \right), 1 \right\},$$

где $p = 0$ (тогда $u = u^0 = \sigma^0$), в точке $\sigma^0 = (1, 0)'$ для системы

$$\dot{x}_1 = u_1,$$

$$\dot{x}_2 = 2x_2 - x_1 + u_2$$

с начальным условием

$$x(0) = (0, 0)'.$$

Для простоты здесь нет ограничений на управление и правый конец. Возьмем $T = 1$, при этом имеем $x(1) \approx (0, 3.195)'$.

Обозначим $\zeta_1(x_1, x_2) = |x_2| - |x_1| + 1$, $\zeta_2(x_1, x_2) = |x_2| + 2|x_1| + 1$. Вычислим $\zeta_1(x(1)) \approx 4.195$, $\zeta_2(x(1)) \approx 4.195$. Согласно правилам квазидифференциального исчисления

$$\underline{\partial} \zeta_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\partial} \zeta_1(x) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\underline{\partial} \zeta_2(x) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \bar{\partial} \zeta_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу

$$H(T) = H^0(T) \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1.097 & 3.195 \end{pmatrix}.$$

Следуя формулам и правилам [180] квазидифференциального исчисления имеем

$$\underline{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^0) \approx 4.195 H'(T) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 4.195 \operatorname{co} \left\{ H'(T) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, H'(T) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\bar{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^0) \approx 4.195 \operatorname{co} \left\{ H'(T) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, H'(T) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + 4.195 H'(T) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Можно получить результат

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\bar{\varphi}(\sigma^0) &= [\underline{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^0), \bar{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^0)] \approx \\ &\approx \left[\operatorname{co} \left\{ \begin{pmatrix} -0.816 \\ 26.8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -17.595 \\ 26.8 \end{pmatrix} \right\}, \operatorname{co} \left\{ \begin{pmatrix} -4.195 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4.195 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right]. \end{aligned}$$

Итак, обозначим полученный квазидифференциал функции $\bar{\varphi}(\sigma^p)$ в точке σ^p , следующим образом:

$$\mathcal{D}\bar{\varphi}(\sigma^p) = [\underline{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^p), \bar{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^p)].$$

Построим штрафную функцию, учитывающую ограничения на управление (см. формулу (7.3)), сохранив для нее то же обозначение

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{\lambda_1}(\sigma^p) &:= \bar{\varphi}(\sigma^p) + \lambda_1 \max \left\{ 0, \sigma_1^{p,1} - \bar{u}_1, \dots, \sigma_m^{p,1} - \bar{u}_m, \dots, \sigma_1^{p,2^p} - \bar{u}_1, \dots, \sigma_m^{p,2^p} - \bar{u}_m, \right. \\ &\quad \left. \underline{u}_1 - \sigma_1^{p,1}, \dots, \underline{u}_m - \sigma_m^{p,1}, \dots, \underline{u}_1 - \sigma_1^{p,2^p}, \dots, \underline{u}_m - \sigma_m^{p,2^p} \right\}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Известно [194], что вместо исходной задачи минимизации функции $\bar{\varphi}(\sigma^p)$ при ограничениях $\sigma^p \in U^p$ можно рассматривать задачу минимизации функции (7.19) при достаточно большом значении λ_1 . Далее предположим, что функционал $\bar{\varphi}_{\lambda_1}(\sigma^p)$ содержит достаточно большое (для справедливости соответствующей теоремы) число λ_1 . Заметим, что штрафное слагаемое здесь является кусочно-аффинной функцией. Очевидно, что при отсутствии некоторых ограничений на управления следует удалить соответствующие слагаемые из функционала выше; при этом мы сохраняем для него то же обозначение.

Предположим теперь, что некоторые координаты объекта системы (7.1), (7.2) в конечный момент времени фиксированы, то есть наложим дополнительное ограничение

$$x_j(T) = x_{T_j}, \quad j \in J, \quad (7.20)$$

где x_{T_j} — заданные числа, соответствующие тем координатам вектора состояния, которые фиксированы на правом конце, здесь $J \subset \{1, \dots, n\}$ — заданное индексное множество. Для точки минимума функции $\bar{\varphi}_{\lambda_1}(\sigma^p)$ при ограничениях (7.20) сохраним то же обозначение σ^{p*} .

Построим штрафную функцию, учитывающую это ограничение, и сохраним для нее то же обозначение

$$\bar{\varphi}_{\lambda_1, \lambda_2}(\sigma^p) := \bar{\varphi}_{\lambda_1}(\sigma^p) + \lambda_2 \sum_{j \in J} |x_j(T, \sigma^p) - x_{T_j}|. \quad (7.21)$$

Сделаем следующее дополнительное предположение.

Предположение 7.4.1. Градиенты

$$\left(\frac{\partial x_j(T, \sigma^p)}{\partial \sigma^p} \right)', \quad j \in J,$$

линейно независимы в точке минимума σ^{p*} функции $\bar{\varphi}_{\lambda_1}(\sigma^p)$ при ограничениях (7.20).

При сделанных предположениях функция $\bar{\varphi}_{\lambda_1, \lambda_2}(\sigma^p)$ будет точной штрафной [194] при достаточно большом значении λ_2 . Тогда задача минимизации (7.19) при ограничениях (7.20) может быть сведена к безусловной минимизации функции (7.21). Далее мы предполагаем, что все требуемые условия выполнены и в функции $\bar{\varphi}_{\lambda_1, \lambda_2}(\sigma^p)$ зафиксировано достаточно большое число λ_2 (для справедливости соответствующей теоремы). Отметим, что штрафное слагаемое $\lambda_2 \sum_{j \in J} |x_j - x_{T_j}|$ — кусочно-аффинная (по x) функция.

Для краткости мы иногда будем опускать штрафные параметры-индексы функции $\bar{\varphi}_{\lambda_1, \lambda_2}(\sigma^p)$ ниже.

Итак, рассмотренные ограничения на управление и на правый конец траектории не меняют структуру задачи и с их учетом в конечном итоге необходимо рассматривать задачу минимизации функционала (7.21) при достаточно больших значениях параметров λ_1, λ_2 . Существуют [36] некоторые оценки для этих параметров, но на практике нужно просто следить за выполнением ограничений для выбранных значений этих параметров и при необходимости увеличивать их. Но такой подход несколько снижает эффективность метода, так как часть действий предполагается выполнять “вручную”. Для дальнейшей автоматизации процесса можно использовать некоторые адаптивные (автоматические) правила задания параметра штрафа, обсуждаемые, например, в работах [155], [330].

Используя известное [180] условие минимума квазидифференцируемого функционала, получаем следующую теорему для случая наличия ограничений на управление.

Теорема 7.4.2. Для того чтобы управление $\sigma^{p*} \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{2p}$ минимизировало $\bar{\varphi}(\sigma^p)$ (при этом соответствующая траектория $x(t, \sigma^{p*})$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (7.6) с начальным условием (7.7)), необходимо чтобы выполнялось включение

$$-\bar{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^{p*}) \subset \underline{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^{p*}). \quad (7.22)$$

Если имеем

$$-\bar{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^{p*}) \subset \text{int } \underline{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^{p*}), \quad (7.23)$$

то σ^{p*} является точкой локального минимума функции $\bar{\varphi}(\sigma^p)$.

Приведем также известное необходимое условие максимума для квазидифференцируемой функции (см. Пример 7.9.8).

Теорема 7.4.3. Для того чтобы управление $\sigma^{p**} \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{2p}$ максимизировало функцию $\bar{\varphi}(\sigma^p)$ (где соответствующая траектория $x(t, \sigma^{p**})$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (7.6) с начальным условием (7.7)), должно выполняться включение

$$-\underline{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^{p**}) \subset \bar{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^{p**}). \quad (7.24)$$

7.5 Метод квазидифференциального спуска

Известно [180], что во многих практических случаях субдифференциал $\underline{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^p)$ является выпуклым многогранником $A \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{2p}$, а супердифференциал $\bar{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^p)$ также является выпуклым многогранником $B \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{2p}$. Разумеется, множества A и B зависят от точки σ^p . Для простоты мы опустим эту зависимость в обозначениях. Найдем хаусдорфово отклонение множества $-B$ от множества A . Ясно, что достаточно перебрать все вершины b_j , $j = \overline{1, o}$, многогранника $-B$: найти евклидово расстояние от каждой из этих вершин до многогранника A и затем среди всех этих расстояний выбрать наибольшее. Заметим, что искомое расстояние может быть достигнуто в нескольких точках многогранника A (а также в нескольких точках многогранника B). Пусть $\bar{a} \in A$, $b_{\bar{j}} \in B$, $\bar{j} \in \{1, \dots, o\}$, — пара таких точек. Тогда искомое расстояние равно $\|b_{\bar{j}} - \bar{a}\|$, а вектор $G(\sigma^p) = -\frac{b_{\bar{j}} - \bar{a}}{\|b_{\bar{j}} - \bar{a}\|}$ является (нормированным) направлением [180] квазидифференциального спуска. Отметим, что задача нахождения евклидова расстояния от точки до выпуклого многогранника может быть эффективно решена различными методами (см., например, [37], [472]).

Опишем следующий алгоритм квазидифференциального спуска для нахождения стационарных точек функционала $\bar{\varphi}(\sigma^p)$ в случае, когда квазидифференциал функционала $\bar{\varphi}(\sigma^p)$ представляет собой пару выпуклых многогранников.

Шаг 0. Зафиксируем произвольную начальную точку $\sigma_{(1)}^p \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{2p}$.

Шаг k (a). Пусть точка $\sigma_{(k)}^p \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{2p}$ уже построена. Если условие минимума (7.22) выполнено (на практике с некоторой фиксированной точностью $\bar{\varepsilon}$ в смысле хаусдорфовой \mathbb{R} -нормы), то точка $\sigma_{(k)}^p$ является стационарной точкой функционала $\bar{\varphi}(\sigma^p)$, и процесс завершается. В противном случае перейдем к **Шагу k (b)**.

Шаг k (b). Решим две подзадачи:

1) Найдем направление $G(\sigma_{(k)}^p)$ квазидифференциального спуска функционала $\bar{\varphi}(\sigma^p)$ в точке $\sigma_{(k)}^p$.

2) Найдем значение $\gamma_{(k)}$ из следующей задачи одномерной минимизации

$$\min_{\gamma \geq 0} \bar{\varphi}\left(\sigma_{(k)}^p - \gamma G(\sigma_{(k)}^p)\right) = \bar{\varphi}\left(\sigma_{(k)}^p - \gamma_{(k)} G(\sigma_{(k)}^p)\right).$$

На практике задача выше решается на некотором интервале $[0, \bar{\gamma}]$ с некоторым фиксированным значением $\bar{\gamma}$.

Далее положим

$$\sigma_{(k+1)}^p = \sigma_{(k)}^p - \gamma_{(k)} G(\sigma_{(k)}^p).$$

Положим $k := k + 1$ и перейдем к **Шагу k (a)**.

Тогда $\bar{\varphi}(\sigma_{(k+1)}^p) \leq \bar{\varphi}(\sigma_{(k)}^p)$. Если последовательность $\{\sigma_{(k)}^p\}$, $k = 1, 2, \dots$, конечна, тогда ее последняя точка является стационарной точкой функционала $\bar{\varphi}(\sigma^p)$ по построению. Если последовательность $\{\sigma_{(k)}^p\}$, $k = 1, 2, \dots$, бесконечна, то описанный процесс может не привести к стационарной точке функционала $\bar{\varphi}(\sigma^p)$, так как квазидифференциальное отображение $\sigma^p \rightarrow \mathcal{D}\bar{\varphi}(\sigma^p)$ не является непрерывным в метрике Хаусдорфа [180].

7.6 Метод кодифференциального спуска

Как уже отмечалось, метод квазидифференциального спуска, описанный в предыдущем разделе, может не привести к стационарной точке функционала $\bar{\varphi}(\sigma^p)$ из-за разрывности квазидифференциального отображения $\mathcal{D}\bar{\varphi}(\sigma^p)$. Чтобы гарантировать сходимость в определенном смысле рассматриваемого численного метода, рассмотрим кодифференциальное отображение $D\bar{\varphi}(\sigma^p)$.

Кодифференцируемость функционала $\bar{\varphi}(\sigma^p)$ можно напрямую проверить совершенно аналогично проверке его квазидифференцируемости. Кодифференциальное исчисление [180] позволяет легко вычислять кодифференциалы функционала $\bar{\varphi}(\sigma^p)$ для широкого класса функций, включая, например, функции, являющиеся суперпозициями конечного числа

максимумов и минимумов непрерывно дифференцируемых функций. Приведем один пример и укажем формулу [180] для вычисления кодифференциала функционала следующего вида:

$$\bar{\varphi}(\sigma^p) = \bar{\varphi}_1(\sigma^p) + \bar{\varphi}_2(\sigma^p) = \max \{ \bar{\psi}_i(x(T, \sigma^p)) \} + \min \{ \bar{\psi}_j(x(T, \sigma^p)) \},$$

где $i = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, s}$ и функции $\bar{\psi}_i(x)$, $i = \overline{1, r}$, и $\bar{\psi}_j(x)$, $j = \overline{1, s}$, непрерывно дифференцируемы. Имеем

$$D\bar{\varphi}(\sigma^p) = \left[\underline{d}\bar{\varphi}(\sigma^p), \bar{d}\bar{\varphi}(\sigma^p) \right],$$

$$\underline{d}\bar{\varphi}(\sigma^p) = \text{co} \left\{ (a_i, v_i)' \mid a_i = \bar{\psi}_i(x(T, \sigma^p)) - \bar{\varphi}_1(\sigma^p), v_i = \frac{\partial \bar{\psi}_i(x(T, \sigma^p))}{\partial \sigma^p} \right\},$$

$$\bar{d}\bar{\varphi}(\sigma^p) = \text{co} \left\{ (b_j, w_j)' \mid b_j = \bar{\psi}_j(x(T, \sigma^p)) - \bar{\varphi}_2(\sigma^p), w_j = \frac{\partial \bar{\psi}_j(x(T, \sigma^p))}{\partial \sigma^p} \right\},$$

где $i = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, s}$, а производные функций $\bar{\psi}_i(x)$, $i = \overline{1, r}$, и $\bar{\psi}_j(x)$, $j = \overline{1, s}$, по переменной σ^p вычисляются по известным правилам вычисления производной суперпозиции непрерывно дифференцируемых функций с использованием формул (7.16), (7.17) и правила (7.18).

Опишем следующий алгоритм кодифференциального спуска для нахождения стационарных точек функционала $\bar{\varphi}(\sigma^p)$ [188], [180] в случае, когда кодифференциал функционала $\bar{\varphi}(\sigma^p)$ — пара выпуклых многогранников.

Для его описания нам понадобятся следующие множества

$$\underline{d}_\nu \bar{\varphi}(\sigma^p) = \left\{ (a, \nu)' \in \text{ext } \underline{d}\bar{\varphi}(\sigma^p) \mid a \geq -\nu \right\},$$

$$\bar{d}_\mu \bar{\varphi}(\sigma^p) = \left\{ (b, \mu)' \in \text{ext } \bar{d}\bar{\varphi}(\sigma^p) \mid b \leq \mu \right\}.$$

Шаг 0. Зафиксируем произвольную начальную точку $\sigma_{(1)}^p \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{2p}$. Выберем произвольные последовательности $\{\nu_k\}_{k=1}^\infty$, $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ положительных чисел.

Шаг k (a). Пусть точка $\sigma_{(k)}^p \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{2p}$ уже построена. Вычислим множества $\underline{d}_{\nu_k} \bar{\varphi}(\sigma_{(k)}^p)$ и $\bar{d}_{\mu_k} \bar{\varphi}(\sigma_{(k)}^p)$. Если условие минимума (7.22) выполнено (на практике с некоторой фиксированной точностью $\bar{\varepsilon}$ в смысле хаусдорфовой \mathbb{R} -нормы), то точка $\sigma_{(k)}^p$ является стационарной точкой функционала $\bar{\varphi}(\sigma^p)$, и процесс завершается. В противном случае перейдем к **Шагу k (b).**

Шаг k (b). Решим три подзадачи:

1) Для каждого вектора $z = (b, w)' \in \bar{d}_{\mu_k} \bar{\varphi}(\sigma_{(k)}^p)$ вычислим

$$(a_k(z), \nu_k(z)) \in \text{argmin} \left\{ \|(a, \nu)\|_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{2p}} \mid (a, \nu)' \in \text{co } \underline{d}_{\nu_k} \bar{\varphi}(\sigma_{(k)}^p) + z \right\}.$$

Это задача нахождения евклидова расстояния от точки до выпуклого многогранника.

2) Для каждого вектора $z \in \bar{d}_{\mu_k} \bar{\varphi}(\sigma_{(k)}^p)$ найдем значение $\gamma_{(k)}(z)$ из следующей одномерной задачи

$$\min_{\gamma(z) \geq 0} \bar{\varphi}(\sigma_{(k)}^p - \gamma(z)v_k(z)) = \bar{\varphi}(\sigma_{(k)}^p - \gamma_{(k)}(z)v_k(z)).$$

На практике задача выше решается на некотором интервале $[0, \bar{\gamma}]$ с некоторым фиксированным значением $\bar{\gamma}$.

3) Вычислим

$$z_k \in \operatorname{argmin} \left\{ \bar{\varphi}(\sigma_{(k)}^p - \gamma_{(k)}(z)v_k(z)) \mid z \in \bar{d}_{\mu_k} \bar{\varphi}(\sigma_{(k)}^p) \right\}.$$

Затем положим

$$\sigma_{(k+1)}^p = \sigma_{(k)}^p - \gamma_{(k)}(z_k)v_k(z_k).$$

Положим $k := k + 1$ и перейдем к **Шагу k (a)**.

Предположим, что $\bar{\sigma}^p$ является предельной точкой последовательности $\{\sigma_{(k)}^p\}_{k=1}^{\infty}$, сгенерированной описанным методом. Пусть кодифференциал $D\bar{\varphi}$ непрерывен в точке $\bar{\sigma}^p$, пусть также кодифференциал $D\bar{\varphi}$ равномерно приближает функцию $\bar{\varphi}$ в некоторой окрестности точки $\bar{\sigma}^p$. Пусть, кроме того, $\liminf_{k \rightarrow \infty} \nu_k > 0$, $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k > 0$. При сделанных предположениях [188] точка $\bar{\sigma}^p$ является стационарной точкой функционала $\bar{\varphi}(\sigma^p)$.

Замечание 7.6.1. Требуемое свойство равномерного приближения функции ее кодифференциалом тесно связано [189] с понятием липшицева приближения функции ее кодифференциалом, которое в свою очередь связано [189] со свойством липшицевости кодифференциального отображения. Последнее свойство аналогично свойству липшицевости градиентов, которое является стандартным предположением [285] при обосновании сходимости классических методов численной оптимизации.

7.7 Кусочно-аффинный случай

Рассмотрим случай, когда система линейна, а функционал качества предполагается кусочно-аффинным (см. определение ниже) по фазовым координатам. Еще в работе [175] было отмечено, что метод кодифференциального спуска обладает свойством “перепрыгивать” локальные минимумы в некоторых случаях. В работе [193] М. В. Долгополик предложил в конечномерном случае модифицированный метод кодифференциального спуска, находящий глобальный минимум кусочно-аффинной функции за конечное число шагов.

Рассмотрим линейную систему ОДУ

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (7.25)$$

с начальной точкой

$$x(0) = x_0. \quad (7.26)$$

В формуле (7.25) $A(t)$, $B(t)$ — вещественные непрерывные матрицы размерности $n \times n$ и $n \times m$ соответственно на временном интервале $[0, T]$, где $T > 0$ — известный конечный момент времени, $x(t)$ — n -мерная непрерывная вектор-функция фазовых координат, которая предполагается кусочно-непрерывно дифференцируемой на $[0, T]$, $u(t)$ — m -мерная вектор-функция управлений, которая предполагается кусочно-непрерывной на $[0, T]$. В формуле (7.26) $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — заданный вектор.

Обозначим через $x(t, u)$ решение задачи Коши (7.25), (7.26) при некотором фиксированном управлении $u \in U$ (иногда для краткости будем также писать просто $x(t)$ вместо $x(t, u)$). При сделанных предположениях такое решение существует и единственно [18].

Требуется найти такое управление $u^* \in U$, которое минимизирует функционал

$$\varphi(u) = \psi(x(T, u)).$$

В этом разделе мы предполагаем, что функция $\psi(x)$ является кусочно-аффинной. Обозначим соответствующую оптимальную траекторию $x(t, u^*)$ (она должна удовлетворять начальному условию (7.2)) через x^* . Мы предполагаем, что такое решение существует.

В общем случае интуитивное определение кусочно-аффинной функции как функции, полученной “склеиванием” определенных на некоторых множествах аффинных функций $\langle c, x \rangle + d$, где $a, x \in \mathbb{R}^d$, $b \in \mathbb{R}$, может быть формализовано с помощью понятия полиэдрального разбиения [244]. При такой формализации определения кусочно-аффинной функции оказывается, что функция $\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является кусочно-аффинной тогда и только тогда, когда существуют такие конечные множества $(a_i, v_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1, r}$, и $(b_j, w_j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1, s}$, что

$$\xi(\varsigma) = \underline{\xi}(\varsigma) + \bar{\xi}(\varsigma) = \max \left\{ a_i + \langle v_i, \varsigma \rangle \right\} + \min \left\{ b_j + \langle w_j, \varsigma \rangle \right\}. \quad (7.27)$$

Здесь мы не используем полиэдральное разбиение, а берем формулу (7.27) за “конструктивное” определение кусочно-аффинной функции, поэтому будем говорить, что функция $\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является кусочно-аффинной тогда и только тогда, когда ее можно представить в (“стандартной”) форме (7.27).

Замечание 7.7.1. Множество кусочно-аффинных функций представляет собой линейное пространство, содержащее все аффинные функции, замкнутое относительно операций взятия конечного числа максимумов и минимумов [244], поэтому, например, функция $x_i(\varsigma_1, \varsigma_2) = \min \{ |\varsigma_1|, \max \{ |\varsigma_1 - 1|, |\varsigma_2| \} \}$ является кусочно-аффинной.

Приведем известную формулу [180] для вычисления кодифференциала кусочно-аффинной функции (записанную в стандартной форме):

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\xi(\varsigma) &= \left[\underline{d}\xi(\varsigma), \bar{d}\xi(\varsigma) \right], \\ \underline{d}\xi(\varsigma) &= \text{co} \left\{ \left(a_i + \langle v_i, \varsigma \rangle - \underline{\xi}(\varsigma), v_i \right)' \mid i = \overline{1, r} \right\}, \\ \bar{d}\xi(\varsigma) &= \text{co} \left\{ \left(b_j + \langle w_j, \varsigma \rangle - \bar{\xi}(\varsigma), w_j \right)' \mid j = \overline{1, s} \right\}. \end{aligned}$$

Используя формулу Коши, легко напрямую проверить, что функция $x(T, \sigma^p)$ является аффинной по своему аргументу σ^p . Действительно:

$$x(T, \sigma^p) = Y(T) \left(x_0 + \sum_{k=0}^{2^p-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} Y^{-1}(\tau) B(\tau) \sigma^{p,k} d\tau \right),$$

где $Y(t)$, $t \in [0, T]$, — фундаментальная матрица системы (7.25), нормированная в нулевой точке. Из этой формулы и из Замечания 7.7.1 следует, что при сделанном предположении, что функция $\psi(x)$ является кусочно-аффинной, функция $\bar{\varphi}(\sigma^p)$ также является кусочно-аффинной. В этом случае функцию $\psi(x)$ можно задать в стандартной форме (7.27) или записать каким-либо другим способом (см. Замечание 7.7.1).

Напомним [115], что производная вектор-функции $x(T, \sigma^p)$ как функции аргумента $\sigma^{p,k}$, $k = \overline{1, 2^p}$, дается формулой

$$\frac{\partial x(T, \sigma^{p,k})}{\partial \sigma^{p,k}} = H^k(T), \quad (7.28)$$

где матрица $H^k(T)$ является решением матричного дифференциального уравнения

$$\dot{H}^k(t) = A(t)H^k(t) + \delta_{k,l}B(t),$$

$$t \in [t_{l-1}, t_l], \text{ at } l = \overline{k, 2^p - 1}, \quad t \in [t_{l-1}, t_l], \text{ at } l = 2^p,$$

с начальным условием

$$H^k(t) = 0, \quad t \in [0, t_{k-1}).$$

Используя правило суперпозиции кодифференцируемой функции и непрерывно дифференцируемой функции [180], дадим явную формулу для кодифференциала функционала $\bar{\varphi}(\sigma^p)$ в случае, когда функция $\psi(x)$ записана в стандартной форме, то есть когда

$$\bar{\varphi}(\sigma^p) = \max \left\{ a_i + \langle v_i, x(T, \sigma^p) \rangle \right\} + \min \left\{ b_j + \langle w_j, x(T, \sigma^p) \rangle \right\}, \quad (7.29)$$

где $i = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, s}$. Имеем

$$D\overline{\varphi}(\sigma^p) = \left[\underline{d}\overline{\varphi}(\sigma^p), \overline{d}\overline{\varphi}(\sigma^p) \right],$$

$$\underline{d}\overline{\varphi}(\sigma^p) = \text{co} \left\{ \left(a_i + \langle v_i, x(T, \sigma^p) \rangle - \overline{\varphi}(\sigma^p), \left(\frac{\partial x(T, \sigma^p)}{\partial \sigma^p} \right)' v_i \right) \mid i = \overline{1, r} \right\},$$

$$\overline{d}\overline{\varphi}(\sigma^p) = \text{co} \left\{ \left(b_j + \langle w_j, x(T, \sigma^p) \rangle - \overline{\varphi}(\sigma^p), \left(\frac{\partial x(T, \sigma^p)}{\partial \sigma^p} \right)' w_j \right) \mid j = \overline{1, s} \right\},$$

где производные $\frac{\partial x(T, \sigma^p)}{\partial \sigma^p}$ вычисляются по формуле (7.28).

В общем случае (то есть когда функция $\psi(x)$ кусочно-аффинна, но не записана в стандартной форме (7.29)), для вычисления кодифференциала функции $\overline{\varphi}(\sigma^p)$ необходимо воспользоваться правилами кодифференциального исчисления [180], правилом суперпозиции и формулой (7.28).

Замечание 7.7.2. Обратим внимание, что при вычислении по правилам кодифференциального исчисления как гиподифференциал $\underline{d}\overline{\varphi}(\sigma^p)$, так и гипердифференциал $\overline{d}\overline{\varphi}(\sigma^p)$ кусочно-аффинной функции $\overline{\varphi}(\sigma^p)$ будут выпуклыми многогранниками, определяемыми выпуклой оболочкой своих вершин.

Замечание 7.7.3. Для учета ограничений на правом конце и на управление используется описанная выше функция штрафа, при этом ее структура остается кусочно-аффинной.

Опишем модифицированный алгоритм кодифференциального спуска [193] для поиска глобального минимума функционала $\overline{\varphi}(\sigma^p)$. Обозначим через $\mathcal{J}(\sigma^p)$ множество индексов вершин, определяющих гипердифференциал $\overline{d}\overline{\varphi}(\sigma^p)$ функции $\overline{\varphi}(\sigma^p)$ в точке σ^p , а сами эти вершины обозначим через $z_j(\sigma^p)$, $j \in \mathcal{J}(\sigma^p)$.

1) Выберем произвольную начальную точку $\sigma_{(1)}^p \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{2p}$ и положим $N := 1$, $M_N = \mathcal{J}(\sigma_{(1)}^p)$.

2) Вычислим гиподифференциал $\underline{d}\overline{\varphi}(\sigma_{(N)}^p)$ и гипердифференциал $\overline{d}\overline{\varphi}(\sigma_{(N)}^p)$, тем самым определив вершины $z_j(\sigma_{(N)}^p)$, $j \in M_N$.

3) Для каждого $j \in M_N$ найдем

$$(a_j(\sigma_{(N)}^p), v_j(\sigma_{(N)}^p)) \in \operatorname{argmin} \left\{ \|(a, v)\|_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{2p}}^2 \mid (a, v) \in \underline{d}\overline{\varphi}(\sigma_{(N)}^p) + z_j(\sigma_{(N)}^p) \right\},$$

и если $a_j(\sigma_{(N)}^p) \geq 0$, тогда положим $M_N := M_N \setminus \{j\}$.

4) Если $M_N = \emptyset$, тогда процесс завершается. В противном случае найдем

$$j(N) \in \operatorname{argmin}_{j \in M_N} \overline{\varphi} \left(\sigma_{(N)}^p + \frac{1}{a_j(\sigma_{(N)}^p)} v_j(\sigma_{(N)}^p) \right).$$

Далее положим $\sigma_{(N+1)}^p = \sigma_{(N)}^p + \frac{1}{a_{j(N)}(\sigma_{(N)}^p)} v_{j(N)}(\sigma_{(N)}^p)$, $M_{N+1} := M_N$, $N := N + 1$ и перейдем к шагу 2).

При сделанных предположениях кусочно-аффинная функция $\bar{\varphi}(\sigma^p)$ ограничена снизу и достигает своего глобального минимума, поэтому справедлив следующий результат.

Теорема 7.7.1. *При сделанных предположениях описанный модифицированный алгоритм кодифференциального спуска сходится к точке глобального минимума функции $\bar{\varphi}(\sigma^p)$ за конечное число шагов.*

7.8 Случай ограничений на фазовые переменные и управление

Пусть исходная задача содержит смешанные ограничения на фазовые переменные и управления, заданные неравенствами

$$h_j(x, u) \leq 0, \quad j = \overline{1, q}, \quad (7.30)$$

в которых $h_j(x, u)$, $j = \overline{1, q}$, заданные непрерывно дифференцируемые функции.

Введем множество

$$\overset{\circ}{\mathcal{U}} = \left\{ u \in U \mid \sup_{t \in [0, T]} h(x(t, u), u) < 0 \right\}.$$

Предположим, что для смешанных ограничений выполняется следующее условие регулярности: если u^* — оптимальное управление в исходной задаче, то существует управление $\hat{u} \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}$ такое, что

$$\beta \hat{u} + (1 - \beta) u^* \in \overset{\circ}{\mathcal{U}} \quad \text{для всех } \beta \in (0, 1].$$

Теперь формальную постановку задачи можно сформулировать следующим образом. Требуется найти такое управление $u^* \in U$ (множество U задано (7.3)), которое минимизирует функционал (7.4), и найти соответствующую оптимальную траекторию $x(t, u^*)$, удовлетворяющую системе (7.1) с начальным условием (7.2) при ограничениях (7.20) на правом конце и смешанных ограничениях (7.30) (обозначим эту траекторию через x^*). Предположим, что такое решение существует.

Снимем ограничения (7.30) на фазовые координаты и управления, используя следующую стандартную методику.

Введем вспомогательные переменные $y_j \in C_1^1[0, T]$, $j = \overline{1, q}$, удовлетворяющие при $t \in [0, T]$ системе ОДУ

$$\dot{y}_j(t) = g_j(x(t, u(t)), u(t)), \quad (7.31)$$

$$g_j(x(t, u(t)), u(t)) = \left[\max \left\{ 0, h_j(x(t, u(t)), u(t)) \right\} \right]^2, \quad j = \overline{1, q},$$

и краевым условиям

$$y(0) = \mathbf{0}_q, \quad (7.32)$$

$$y(T) = \mathbf{0}_q. \quad (7.33)$$

Обозначим через $y(t, u)$ решение задачи Коши (7.31), (7.32) для некоторого заданного управления $u \in U$ (иногда мы также будем писать просто $y(t)$ вместо $y(t, u)$ для краткости). Поскольку, как отмечено выше, $x(t, u)$ существует и единственно, то решение $y(t, u)$ также существует и единственно на $[0, T]$. Очевидно, что смешанные ограничения (7.30) выполняются тогда и только тогда, когда вектор-функция $y(t, u)$ удовлетворяет условию (7.33).

В следующих теоремах запишем требуемые результаты [442] по сходимости в форме, удобной для использования в этой главе.

Теорема 7.8.1. *При сделанных предположениях справедливо следующее соотношение*

$$\varphi(u^{p*}) \rightarrow \varphi(u^*), \text{ at } p \rightarrow \infty.$$

Теорема 7.8.2. *При сделанных предположениях справедливо следующее утверждение: если $u^{p*}(t) \rightarrow \bar{u}(t)$ при п. в. $t \in [0, T]$, то \bar{u} является оптимальным управлением исходной задачи.*

Тогда имеет место соотношение

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x(t, u^{p*}) - x(t, \bar{u})\|_{L_n^\infty} = 0,$$

и $x(t, \bar{u})$ является оптимальной траекторией (возможно, не единственной) исходной задачи по определению.

Далее применяется та же техника параметризации управления и снятия условий на правом конце и на управление, описанная выше, но уже к расширенной системе (7.31). Однако заметим, что штрафная функция (7.21) здесь уже не будет [194] точной, поскольку легко проверить, что штрафные члены, удовлетворяющие ограничениям (7.33), будут непрерывно дифференцируемы (относительно σ^p) по построению. На практике решают задачу для фиксированного числа $\bar{\lambda}$. Если решение этой задачи (при $\lambda_2 = \bar{\lambda}$) удовлетворяет ограничениям на правом конце (7.2) и (7.33) с требуемой точностью (то есть значение этого штрафного слагаемого достаточно мало), то процесс завершается; в противном случае увеличим значение λ_2 и повторим процесс с этим новым значением.

Замечание 7.8.1. Отметим, что классические требования в теории оптимального управления к условиям роста вектор-функции $f(x, u, t)$ исходной системы (которые были сделаны) весьма обременительны и могут не выполняться для многих задач управления нелинейными системами. Эти требования были введены для того, чтобы гарантировать существование и единственность решений встречающихся задач Коши, а также обеспечить равномерную ограниченность последовательности $\{x(t, u^p)\}_{p=1}^{\infty}$ траекторий, фигурирующих в теоремах выше. Поэтому это предположение на самом деле можно существенно ослабить, потребовав вместо этого существования и единственности решений соответствующих задач Коши, а также равномерной ограниченности последовательности $\{x(t, u^p)\}_{p=1}^{\infty}$. В этом случае на функцию $\psi(x)$ может быть наложено [18] требование коэрцитивности на множестве решений системы (7.1), (7.2) (при различных управлениях $u \in U$), рассматриваемых в конечный момент времени T .

7.9 Численные примеры

Приведем несколько примеров оптимального управления системами, в которых метод квазидифференциального спуска привел к (приближенному) решению. Сначала приведен элементарный пример, и для наглядного понимания работы алгоритма первая итерация в этом примере проведена аналитически. Дальнейшие примеры приведены в более кратком виде с результатами численной реализации алгоритма. Все вычисления записаны с точностью до 4-го знака после запятой.

Вычисления проводились в пакете MatLab 18.0. Решение задачи одномерной минимизации проводилось на интервале $[0, 1]$ (то есть здесь $\bar{\gamma} = 1$) в MatLab с помощью встроенного алгоритма `fminbnd()` с его внутренними параметрами по умолчанию. В соответствии с документацией для решения этой задачи в MatLab используется метод золотого сечения в сочетании с параболической интерполяцией [55]. В примерах параметр $\bar{\varepsilon}$ игнорировался, а погрешность решения оценивалась на основе значения функционала. При этом численное интегрирование соответствующих систем дифференциальных уравнений (от заданной начальной точки на левом конце) проводилось в MatLab с помощью встроенной функции `ode45()` с ее внутренними параметрами по умолчанию. В соответствии с документацией для решения этой задачи в MatLab используется прямой метод Рунге-Кутты 4–5 порядка [13]. Для решения вспомогательной задачи нахождения евклидова расстояния от точки до выпуклого многогранника использовался первый метод последовательных приближений алгоритма Малоземова-Демьянова-Митчелла с его параметром $\bar{\delta} = 10^{-4}$.

Пример 7.9.1. На интервале $[0, 1]$ рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = u_1,$$

$$\dot{x}_2 = 2x_2 - x_1 + u_2$$

с начальным условием

$$x(0) = (0, 0)'$$

Требуется найти такое управление $u^* \in P_2[0, T]$ (здесь мы не накладываем на него никаких ограничений), которое минимизирует функционал

$$\varphi(u) = \psi(x(1, u)) = \max \left\{ (|x_2(1)| - |x_1(1)| + 1)(|x_2(1)| + 2|x_1(1)| + 1), 1 \right\}.$$

Очевидное решение (возможно, не единственное) — это точка $u^* = (0, 0)'$, $\varphi(u^*) = 1$.

Проведем подробно первую итерацию предложенного алгоритма. Пусть $p = 0$, тогда $u = u^0 = \sigma^0$ по определению (см. (7.5)). Пусть точка $u_{(1)} = (0, 1)'$ является начальным приближением. Это управление приводит систему в конечное состояние $x(1) = (0, 3.1945)'$.

Квазидифференциал функционала $\varphi(u)$, вычисленный в точке $u_{(1)}$, это

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\varphi(u_{(1)}) &= \left[\underline{\partial}\varphi(u_{(1)}), \bar{\partial}\varphi(u_{(1)}) \right] = \\ &= \left[\text{co} \left\{ \begin{pmatrix} -0.8163 \\ 26.8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -17.5947 \\ 26.8 \end{pmatrix} \right\}, \text{co} \left\{ \begin{pmatrix} -4.1946 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4.1946 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right]. \end{aligned}$$

Находя хаусдорфово отклонение множества $-\bar{\partial}\varphi(u_{(1)})$ (в данном случае отрезка) от множества $\underline{\partial}\varphi(u_{(1)})$ (в данном случае отрезка), получаем направление квазидифференциального спуска функционала $\varphi(u)$ в точке $u_{(1)}$:

$$G(u_{(1)}) = (-5.0109, 26.8)'$$

поэтому точка на следующей итерации строится по формуле

$$u_{(2)} = (\gamma_{(1)} 5.0109, 1 - \gamma_{(1)} 26.8)'$$

На 3-й итерации работы алгоритма была построена точка $u_{(3)} = (0, 0.001)$, и значение минимизируемого функционала в этой точке $\varphi(u_{(3)}) = 1.005$, что является оптимальным с погрешностью величиной порядка 5×10^{-3} (по функционалу).

Пример 7.9.2. На интервале $[0, 1]$ рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = u_1,$$

$$\dot{x}_2 = 2x_2 - x_1 + u_2 - t$$

с начальным условием

$$x(0) = (0, 0)'$$

Пусть управление в этом примере принадлежит множеству U , в котором $\underline{u}_1 = \underline{u}_2 = -0.5$, $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 0.5$. Требуется найти такое управление $u^* \in U$, которое минимизирует функционал

$$\varphi(u) = \psi(x(1, u)) = |x_1(1)| + |x_2(1)|.$$

Очевидно, что если точка $(0, 0)'$ принадлежит множеству достижимости (в момент $T = 1$) этой системы, то оптимальное значение функционала $\varphi(u^*) = 0$, однако в этом случае оптимальное управление u^* в данном примере не очевидно.

Положим $p = 1$, тогда по определению (см. (7.5)) на интервале $[0, 0.5]$ управлением является вектор $\sigma^{1,1} \in \mathbb{R}^2$, а на интервале $[0.5, 1]$ управлением является вектор $\sigma^{1,2} \in \mathbb{R}^2$. Пусть начальной точкой является $\sigma_{(1)}^{1,1} = (0, 0)'$, $\sigma_{(1)}^{1,2} = (0, 0)'$. Это управление переводит систему в состояние $x(1) = (0, -1.0973)'$. В ходе работы метода на 3-й итерации была построена точка $\sigma_{(3)}^1 = (\sigma_{(3)}^{1,1}, \sigma_{(3)}^{1,2})'$, $\sigma_{(3)}^{1,1} = (-0.0707, 0.395)'$, $\sigma_{(3)}^{1,2} = (0.0705, 0.1453)'$ и соответствующее ей значение функционала $\varphi(\sigma_{(3)}^1) = 0.0023$, что показывает, что найденное управление является оптимальным с точностью до величины порядка 3×10^{-3} (по функционалу). Рисунок иллюстрирует полученные траектории.

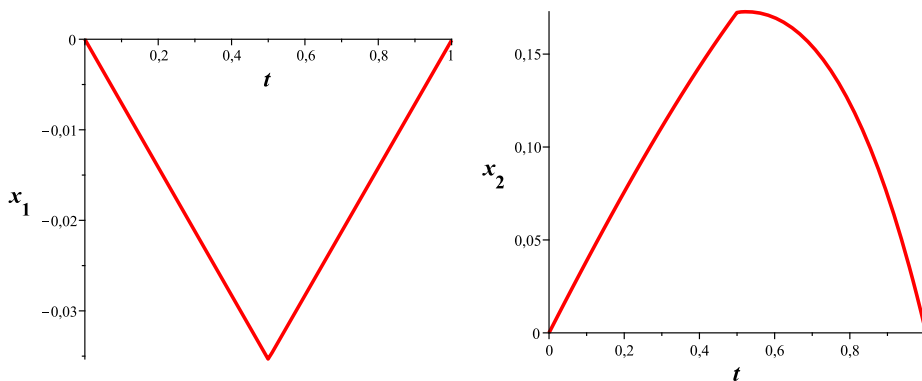


Рис. 7.1: Пример 7.9.2, результирующие траектории

Пример 7.9.3. На интервале $[0, 1]$ рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u, \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 + u^2\end{aligned}$$

с начальным условием

$$x(0) = (1, 0)'$$

Пусть управление данного примера принадлежит множеству U , в котором $\underline{u} = -1$, $\bar{u} = 1$. Требуется найти такое управление $u^* \in U$, которое минимизирует функционал

$$\varphi(u) = \psi(x(1, u)) = 10|x_1(1) - 0.6481| + |x_2(1)|.$$

В книге [442] приведено аналитическое решение задачи, эквивалентной данной. Оптимальное значение функционала качества: $\varphi(u^*) = 0.7616$.

Пусть $p = 1$, тогда по определению (см. (7.5)) на интервале $[0, 0.5)$ управлением является число $\sigma^{1,1}$, а на интервале $[0.5, 1]$ управлением является число $\sigma^{1,2}$. Пусть начальная точка $\sigma_{(1)}^1 = (-0.5, 0.5)'$. Соответствующее значение функционала: $\varphi(\sigma_{(1)}^1) = 1.0208$. В ходе работы метода на 4-й итерации была построена точка $\sigma_{(4)}^1 = (\sigma_{(4)}^{1,1}, \sigma_{(4)}^{1,2})' = (-0.54, -0.168)'$ и соответствующее ей значение функционала $\varphi(\sigma_{(4)}^1) = 0.776$, что показывает, что найденное управление является оптимальным с точностью до величины порядка 2×10^{-2} (по функционалу). Рисунок иллюстрирует полученные траектории.

Отметим, что такая точность была получена при делении интервала $[0, T]$ всего на два промежутка (при $p = 1$), то есть путем аппроксимации аналитически полученного непрерывного управления (см. [442]) кусочно-непрерывным управлением, состоящим из двух “кусков”. С увеличением параметра дискретизации p мы будем получать более точные решения, которые сходятся к оптимальному решению (см. Теорему 7.8.1 и Теорему 7.8.2).

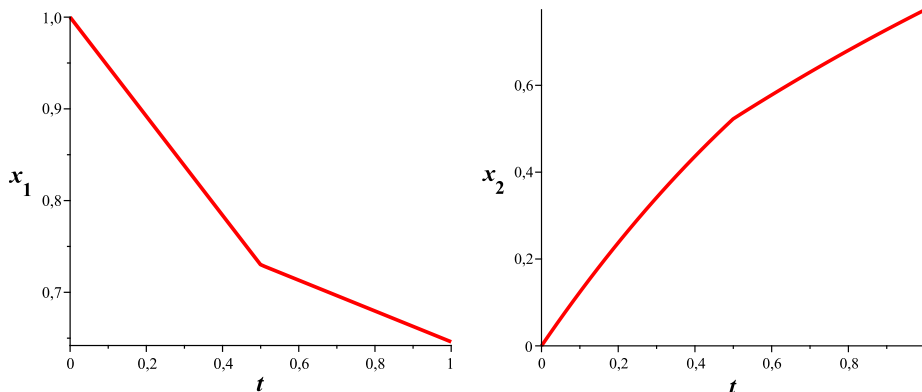


Рис. 7.2: Пример 7.9.3, результирующие траектории

Пример 7.9.4. В этом примере вычисления записываются с точностью до 8-го знака после запятой. На интервале $[0, 60]$ рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = 0.351235 x_2 x_3 + u_1,$$

$$\dot{x}_2 = -0.86058 x_1 x_3 + u_2,$$

$$\dot{x}_3 = 0.73 x_1 x_2 + u_3,$$

$$\dot{x}_4 = 0.5(x_1 x_7 - x_2 x_6 + x_3 x_5),$$

$$\dot{x}_5 = 0.5(x_1 x_6 + x_2 x_7 - x_3 x_4),$$

$$\dot{x}_6 = 0.5(-x_1 x_5 + x_2 x_4 + x_3 x_7),$$

$$\dot{x}_7 = -0.5(x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6),$$

$$\dot{x}_8 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

с начальным условием

$$x(0) = (1/57.3, 1/57.3, 1/57.3, 0.4, 0.8, 0.8, 1.6, 0)'$$

Пусть управление этого примера принадлежит множеству U , в котором $\underline{u}_1 = \underline{u}_2 = \underline{u}_3 = -0.412/57.3$, $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = \bar{u}_3 = 0.412/57.3$. Требуется найти такое управление $u^* \in U$, которое минимизирует функционал

$$\varphi(u) = \psi(x(60, u)) = \psi_1(x(60, u)) + \psi_2(x(60, u)) + \psi_3(x(60, u)),$$

где

$$\psi_1(x(60, u)) = x_8(60), \quad \psi_2(x(60, u)) = x_1^2(60) + x_2^2(60) + x_3^2(60),$$

$$\psi_3(x(60, u)) = |x_4(60)| + |x_5(60)| + |x_6(60)|.$$

Эта задача имеет практическое приложение к оптимальному проектированию минимальной по топливу системы управления положением твердого тела на орбите и рассматривалась в работе [204]. Физическая интерпретация этой задачи такова. [204], [210]. Здесь x_1, x_2, x_3 описывают угловые скорости, а x_4, x_5, x_6, x_7 — позиционные параметры тела. Значение функционала $\psi_1(x(60, u))$ в некоторой точке u есть общий расход топлива $\int_0^{60} u_1^2(t) + u_2^2(t) + u_3^2(t) dt$. Функционал $\psi_3(x(60, u))$ учитывает “жесткое” ограничение на нулевое конечное состояние объекта, а функционал $\psi_1(x(60, u))$ учитывает “мягкое” ограничение на нулевую конечную угловую скорость объекта.

В этом примере не будем делить интервал $[0, 60]$ по правилу (7.5), а выберем следующую дискретизацию: $[0, 60] = [0, 5] \cup (5, 55] \cup (55, 60]$. (Легко видеть, что способ дискретизации не влияет на результаты Теоремы 7.8.1 и Теоремы 7.8.2.) Возьмем начальное приближение $\nu_{(1)} = (\nu_{(1)}^1, \nu_{(1)}^2, \nu_{(1)}^3)'$, $\nu_{(1)}^1 = (-0.412/57.3, -0.412/57.3, -0.412/57.3)'$ (начальное управление на интервале $[0, 5]$), $\nu_{(1)}^2 = (0, 0, 0)'$ (начальное управление на интервале $(5, 55]$), $\nu_{(1)}^3 = (0, 0, 0)'$ (начальное управление на интервале $(55, 60]$). Такое правило дискретизации и выбора начального приближения объясняется сутью задачи: подается некоторый большой (по абсолютной величине) импульс (максимально возможный исходя из заданных ограничений на управление) в начале движения объекта, а затем до конца процесса используется минимальный расход топлива с возможностью немного изменить управление в конце процесса для улучшения желаемого конечного положения объекта. Соответствующее значение функционала: $\varphi(\nu_{(1)}) = 1.05468123$ и соответствующее конечное состояние объекта: $x_4(60, \nu_{(1)}) = -0.15103676$, $x_5(60, \nu_{(1)}) = -0.6253908$, $x_6(60, \nu_{(1)}) = 0.2765517$. В ходе работы метода квазидифференциального спуска на 17-й итерации была построена точка $\nu_{(17)} = (\nu_{(17)}^1, \nu_{(17)}^2, \nu_{(17)}^3)'$, где

$$\nu_{(17)}^1 = (-0.00711912, -0.00713832, -0.00720087)'$$
, $t \in [0, 5]$,

$$\nu_{(17)}^2 = (0.00024904, 0.00033276, -0.00008156)'$$
, $t \in (5, 55]$,

$$\nu_{(17)}^3 = (0.00000018, 0.00000323, -0.00000068)'$$
, $t \in (55, 60]$.

Соответствующее значение функционала: $\varphi(\nu_{(17)}) = 0,00114278$, что показывает, что найденное управление оптимально с точностью до величины порядка 2×10^{-3} (по функционалу), и соответствующие значения конечного состояния: $|x_i(60, \nu^*)| \leq 4 \times 10^{-6}$, $i = \overline{4, 6}$. Рисунок иллюстрирует полученные траектории.

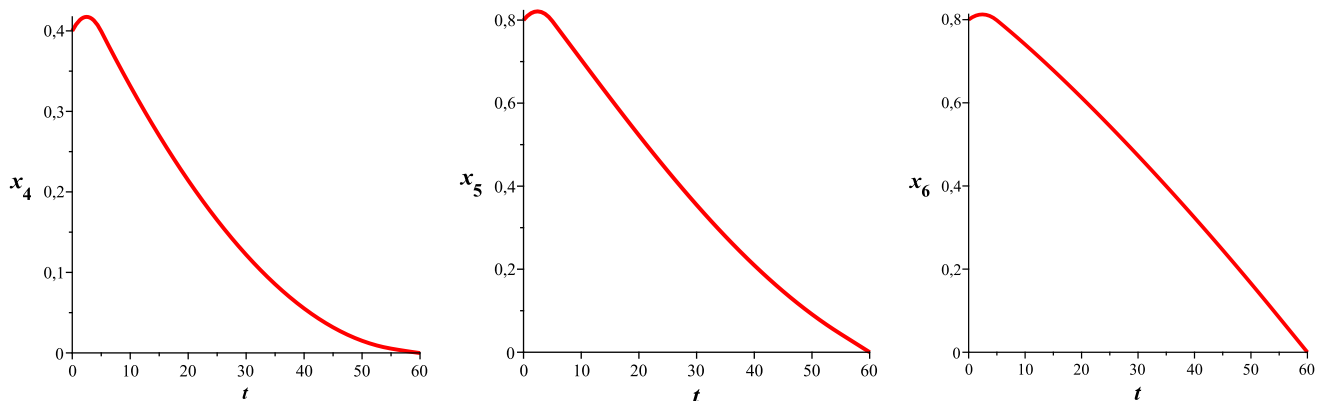


Рис. 7.3: Пример 7.9.4, результирующие траектории

Небольшое увеличение ранга дискретизации, а также выбор некоторых других начальных приближений практически не меняют результат. При некоторых начальных приближениях результат был хуже: в конце работы алгоритма необходимое условие минимума было выполнено, но значение целевого функционала оказалось больше, следовательно был получен локальный минимум (однако значение минимизируемого функционала увеличилось несильно). Поскольку достаточно хороший результат был получен при довольно небольшом ранге дискретизации, существенное увеличение ранга дискретизации не проводилось.

В работе [204] рассматривается похожая задача (результаты там несколько улучшают результаты работы [210]). В ней функционал $\int_0^{60} |u_1(t)| + |u_2(t)| + |u_3(t)| dt$ минимизируется при “жестких” ограничениях как на конечное положение, так и на конечные угловые скорости объекта. Поскольку в настоящей главе рассматриваются только задачи в форме Майера, такой функционал породил бы негладкую правую часть в 8-м уравнении системы движения объекта, поэтому был рассмотрен немного другой функционал $\psi_1(x(60, u))$, описывающий общий расход топлива. В целом результаты данной работы аналогичны полученным в [204]: заметим, что если взять управления, полученные там, то получим значение нашего функционала $\varphi(u) = 0.00143086$, значение функционала $\psi_1(x(60, u))$ немного больше приведенного, а значение функционала $\psi_2(x(60, u))$ немного меньше приведенного. Такой результат кажется логичным, поскольку в работе [204] минимизируется расход топлива в “ L^1 -норме”, но накладываются “жесткие” ограничения на конечные угловые скорости объекта. Отметим также, что в работе [204] также оптимизировались моменты переключения управления.

Рассмотрим дополнительно примеры задач в кусочно-аффинном случае. Как было отмечено при описании модифицированного алгоритма в кусочно-аффинном случае, для каждого фиксированного значения параметра p мы получим точное решение за конечное число шагов. Однако для краткости изложения все результаты вычислений при реализации этого алгоритма записаны в следующих примерах с точностью до 4-го знака после запятой.

Пример 7.9.5. На интервале $[0, 1]$ рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1,$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + u_2$$

с начальным условием

$$x(0) = (0, 0)'$$

Требуется найти такое управление $u^* \in P_2[0, T]$ (здесь мы не накладываем на него никаких ограничений), которое минимизирует функционал

$$\varphi(u) = \psi(x(1, u)) = \min \left\{ \max \{ |x_1(1)|, |x_2(1)| \}, 1 + \max \{ 2|x_1(1) - 2|, |x_2(1) - 2| \} \right\}.$$

Поскольку по своей структуре функция $\varphi(u)$ неотрицательна и обращается в ноль, когда значение на правом конце равно $x(1) = (0, 0)'$, то очевидным решением (возможно, не единственным) является точка $u^* = (0, 0)'$, $\varphi(u^*) = 0$.

Пусть $p = 0$, то есть мы рассматриваем постоянное управление на всем временном интервале: $u = u^0 = \sigma^0$ (см. (7.5)). Заметим, что функция $\varphi(u)$ имеет локальный минимум при $x(1) = (2, 2)'$, то есть если мы возьмем управление (в этом примере его легко вычислить напрямую с помощью формулы Коши) $u_{(0)}^0 = \sigma_{(0)}^0 \approx (0.2397, 9.0124)'$, $\varphi(u_{(0)}^0) = 1$. Мы намеренно берем эту точку (которая является точкой локального минимума функции $\bar{\varphi}(\sigma^p)$) в качестве начального приближения, чтобы показать, что алгоритм действительно находит глобальный минимум.

На первой итерации были получены следующие результаты вычислений: $j(0) = 2$, $a_{j(0)}(\sigma_{(0)}^0) \approx -0.01215$, $v_{j(0)}(\sigma_{(0)}^0) \approx (0.0029, 0.1095)'$, поэтому имеем $\sigma_{(1)}^0 \approx \left(0.2397 + \frac{0.0029}{-0.01215}, 9.0124 + \frac{0.1095}{-0.01215} \right)'$, то есть $\sigma_{(1)}^0 = (0, 0)'$ и в этом примере алгоритм привел к точке глобального минимума за один шаг.

Пример 7.9.6. На интервале $[0, 1]$ рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = (2t + 1)x_1 + 15tx_2 + u_1,$$

$$\dot{x}_2 = tx_1 + x_2 + u_2$$

с начальным условием

$$x(0) = (1, 1)'.$$

Пусть управление в этом примере принадлежит множеству U , в котором $\underline{u}_1 = \underline{u}_2 = -4.5$, $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 4.5$. Требуется найти такое управление $u^* \in U$, которое минимизирует функционал

$$\varphi(u) = \psi(x(1, u)) = |x_1(1)| + |x_2(1)|.$$

Рассмотрим функцию $\bar{\varphi}(\sigma^p)$ (см. (7.19)) со штрафным параметром $\lambda_1 = 1$. Как будет видно из последующих вычислений, этого значения штрафного параметра достаточно для точного удовлетворения ограничений $\sigma^p \in U^p$. Заметим, что в этом примере данная функция субдифференцируема, поэтому ее гипердифференциал, вычисленный в любой точке, состоит из одной нулевой точки [180], поэтому $j(N) = 1$ для любого номера итерации N .

Пусть сначала $p = 0$, то есть мы предполагаем, что управление постоянно на всем интервале времени: $u = u^0 = \sigma^0$ (см. (7.5)). Возьмем точку $\sigma_{(0)}^p = (0, 0)'$ в качестве начального приближения управления.

На первой итерации были получены следующие результаты вычислений:
 $j(0) = 1$, $a_{j(0)}(\sigma_{(0)}^0) \approx -9.20088$, $v_{j(0)}(\sigma_{(0)}^0) \approx (9.2512, 26.1818)'$, поэтому имеем
 $\sigma_{(1)}^0 \approx \left(0 + \frac{9.2512}{-9.20088}, 0 + \frac{26.1818}{-9.20088}\right)' \approx (-1.0055, -2.8456)$.

На второй итерации были получены следующие результаты вычислений:
 $j(1) = 1$, $a_{j(1)}(\sigma_{(1)}^0) \approx -4.2497$, $v_{j(1)}(\sigma_{(1)}^0) \approx (0.6327, 0.8)'$, поэтому имеем
 $\sigma_{(2)}^0 \approx \left(-1.0055 + \frac{0.6327}{-4.2497}, -2.8456 + \frac{0.8}{-4.2497}\right)' \approx (-1.1539, -3.0338)'$.

На третьей итерации были получены следующие результаты вычислений:
 $j(2) = 1$, $a_{j(2)}(\sigma_{(2)}^0) \approx -0.08465$, $v_{j(2)}(\sigma_{(2)}^0) \approx (0.2833, -0.1018)'$, поэтому имеем
 $\sigma_{(3)}^0 \approx \left(-1.1539 + \frac{0.2833}{-0.08465}, -3.0338 + \frac{-0.1018}{-0.08465}\right)' \approx (-4.5, -1.8314)'$ и поскольку на следующей итерации получаем $M_3 = \{1\} \setminus \{1\} = \emptyset$ (то есть $a_{j(3)}(\sigma_{(3)}^0) = 0$ (то есть алгоритм завершается)), то полученная точка $\sigma_{(3)}^0 = (-4.5, -1.8314)'$ является точкой глобального минимума в этом примере.

Однако ясно, что $\bar{\varphi}(\sigma_{(3)}^0) \approx 0.0899$, что отличается от нулевого значения этого функционала, которого, вероятно, можно добиться с помощью управлений $\sigma^p \in U^p$ для больших значений параметра p (см. Теорему 7.8.1 и Теорему 7.8.2).

Теперь возьмем $p = 1$, тогда по определению (см. (7.5)) на интервале $[0, 0.5)$ управлением будет вектор $\sigma^{1,1} \in \mathbb{R}^2$, а на интервале $[0.5, 1]$ управлением будет вектор $\sigma^{1,2} \in \mathbb{R}^2$. В качестве начального приближения возьмем управление, полученное при $p = 0$, то есть положим $\sigma_{(0)}^{1,1} = (-4, 5, -1, 8314)'$, $\sigma_{(0)}^{1,2} = (-4, 5, -1, 8314)'$ или, в более краткой форме, $\sigma_{(0)}^1 = (-4, 5, -1, 8314, -4, 5, -1, 8314)'$.

На первой итерации были получены следующие результаты вычислений:
 $j(0) = 1$, $a_{j(0)}(\sigma_{(0)}^1) \approx -0.08089$, $v_{j(0)}(\sigma_{(0)}^1) \approx (0, 0.0047, 0, -0.0236)'$, поэтому имеем
 $\sigma_{(1)}^1 \approx \left(-4.5 + \frac{0}{-0.08089}, -1.8314 + \frac{0.0047}{-0.08089}, -4.5 + \frac{0}{-0.08089}, -1.8314 + \frac{-0.0236}{-0.08089}\right)'$, то есть
 $\sigma_{(1)}^1 = (-4.5, -1.8843, -4.5, -1.5337)'$ и поскольку при таком управлении имеем $\bar{\varphi}(\sigma_{(1)}^1) = 0$, то алгоритм привел к точке глобального минимума в этом примере.

Дополнительно рассмотрим примеры задач с фазовыми ограничениями.

Пример 7.9.7. На интервале $[0, 1]$ рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2x_3 + u_1,$$

$$\dot{x}_2 = x_3x_1,$$

$$\dot{x}_3 = x_1x_2 + u_2 - p,$$

$$p(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 0.5), \\ -1, & t \in [0.5, 1], \end{cases}$$

с начальным условием

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0$$

и с со свободным правым концом.

Требуется минимизировать функционал

$$\psi(x(T, u)) = |x_1(1)| + |x_3(1)|.$$

Эта задача имеет практическое приложение к оптимальной стабилизации спутника и рассматривалась в работе [60]. Функцию $p(t)$ можно интерпретировать как внешнее возмущение. Интерпретация функционала $\psi(x(T, u))$ очевидна.

Пусть управление подчинено ограничениям

$$-1.5 \leq u_1(t) \leq -0.5,$$

$$-0.2 \leq u_2(t) \leq 0.2.$$

Также наложим смешанные ограничения

$$0.3 \leq x_1(t) - 0.2u_1(t) \leq 1.1,$$

и чтобы их учесть, введем дополнительные переменные, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$\dot{x}_4 = \left[\max \left\{ 0, x_1 - 0.2u_1 - 1.1 \right\} \right]^2,$$

$$\dot{x}_5 = \left[\max \left\{ 0, -x_1 + 0.2u_1 + 0.3 \right\} \right]^2$$

и краевым условиям

$$x_4(0) = 0, \quad x_5(0) = 0,$$

$$x_4(1) = 0, \quad x_5(1) = 0.$$

Положим $p = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 10$, тогда по определению на интервале $[0, 0.5]$ управлением является вектор $\sigma^{1,1} \in \mathbb{R}^2$, а на интервале $[0.5, 1]$ управлением является вектор $\sigma^{1,2} \in \mathbb{R}^2$. В качестве начального приближения примем $\sigma_{(1)}^{1,1} = (1, 1)'$, $\sigma_{(1)}^{1,2} = (1, 1)'$, или, в более краткой форме, $\sigma_{(1)}^1 = (1, 1, 1, 1)'$, а тогда $\bar{\varphi}(\sigma_{(1)}^1) \approx 19.4273$. На 10-й итерации получены точки $\sigma_{(10)}^{1,1} \approx (-0.5265, 0.1976)'$, $\sigma_{(10)}^{1,2} \approx (-1.4998, -0.131)'$ и соответствующее им значение функционала $\bar{\varphi}(\sigma_{(10)}^1) = 0.0034$, что показывает, что найденное управление является оптимальным с точностью до величины порядка 3×10^{-3} (по функционалу). В этом случае ограничения на управление выполняются точно, а погрешность выполнения смешанных ограничений для любого значения $t \in [0, T]$ не превышает величины порядка 5×10^{-3} (причем ограничение нарушается только в окрестности точки $t = 0$).

Пример 7.9.8. На интервале $t \in [0, 1]$ рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_2^2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u_1\end{aligned}$$

с начальным условием

$$x_1(0) = 0.$$

Требуется минимизировать функционал

$$\psi(x(T, u)) = \max \left\{ |x_1(1)| - |x_2(1)| - 1, 0 \right\} + |x_1(1) - 1|.$$

Пусть управление подчинено ограничению

$$-2 \leq u_1(t) \leq 2.$$

Также наложим фазовое ограничение

$$x_2(t) \leq 0.$$

и чтобы учесть его, введем дополнительную переменную, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\dot{x}_3 = \left[\max \{0, x_2\} \right]^2$$

и граничным условиям

$$x_3(0) = 0,$$

$$x_3(1) = 0.$$

Положим $p = 0$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$, тогда по определению на интервале $[0, 1]$ управлением является число σ^0 . Если взять точку $\sigma^{p^{**}} = 0$, то сразу получим верное включение $-\bar{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^{p^{**}}) \subset \underline{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^{p^{**}})$, то есть необходимое условие минимума выполнено, несмотря на то, что эта точка не является точкой глобального минимума (см. ниже) в данной задаче (так как $\bar{\varphi}(\sigma^{p^{**}}) = 1$). Интересно отметить, что на самом деле $\sigma^{p^{**}}$ является точкой максимума (в этом можно убедиться прямыми вычислениями, поскольку этот пример можно решить в аналитической форме). Запишем необходимое условие $-\underline{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^{p^{**}}) \subset \bar{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^{p^{**}})$ для максимума (см. (7.24)), чтобы убедиться, что оно действительно выполняется.

В качестве начального приближения возьмем $\sigma_{(1)}^0 = 1$, а тогда $\bar{\varphi}(\sigma_{(1)}^0) \approx 1.8514$. На 2-й итерации получена точка $\sigma_{(2)}^0 = -1.111$ и соответствующее ей значение функционала $\bar{\varphi}(\sigma_{(2)}^0) \approx 0.0021$, что показывает, что найденное управление является оптимальным с точностью до величины порядка 2×10^{-3} (по функционалу). Заметим, что в этом случае $-\bar{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^{p^*}) \subset \text{int } \underline{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^{p^*})$ и достаточное условие локального минимума выполняется (см. (7.23)). В этом случае ограничения на управление и фазовые координаты выполняются точно.

Изменим теперь начальное условие, положив

$$x_1(0) = 1,$$

и наложим дополнительное ограничение

$$x_2(t) \geq 0,$$

и введем дополнительную переменную, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\dot{x}_4 = \left[\max \{0, -x_2\} \right]^2$$

и краевым условиям

$$x_4(0) = 0,$$

$$x_4(1) = 0.$$

При выполнении фазовых ограничений и наложенных граничных условий функционал автоматически достигает глобального минимума (поскольку тогда будем иметь $|x_1(T, u^*)| - |x_2(T, u^*)| - 1 = 0$), поэтому минимизация рассматриваемого функционала теряет смысл. Однако цель введения таких ограничений — создать ситуацию, при которой обе функции под максимумом (вычисляемые в точке минимума) будут активны, то есть возникнет случай вычисления “полноценного” квазидифференциала рассматриваемого функционала в точке $\sigma^{0*} = 1$. В этом случае имеем равенство $\mathcal{D}\bar{\varphi}(\sigma^{0*}) = \left\{ [-1, 1], [-1, 1] \right\}$. Видно, что $-\bar{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^{0*}) \subset \underline{\partial}\bar{\varphi}(\sigma^{0*})$.

Замечание 7.9.1. Как отмечено выше, при выборе величины шага по правилу метода наискорейшего спуска сходимость метода квазидифференциального спуска (МКС) не может быть гарантирована. Однако известные обстоятельства позволяют утверждать, что «как правило» этот метод приводит к стационарной точке минимизируемого функционала. См. также Замечание 1.3.1. На практике рекомендуется использовать МКС, так как он менее вычислительно затратный, чем метод кодифференциального спуска (за исключением случая кусочно-аффинных функций, где модификация последнего гарантирует нахождение точки глобального минимума). В рассмотренных примерах метод кодифференциального спуска показал аналогичные результаты.

Глава 8

Точная штрафная функция для гладких дифференциальных включений с выпуклой компактной правой частью

В данной главе получены некоторые теоретические результаты для задачи оптимального управления (в смысле Лагранжа) дифференциальным включением со свободным правым концом. На многозначное отображение в правой части дифференциального включения накладывается условие непрерывности, а также выпуклости и компактности его значений. Для такой задачи построена точная штрафная функция. В предположении существования и непрерывности частной производной опорной функции правой части рассматриваемого дифференциального включения по фазовым переменным доказана дифференцируемость по направлениям построенной штрафной функции. Далее в терминах полученной производной по направлениям формулируются условия оптимальности для исходной задачи. Применение известного принципа максимума Благодатских для дифференциальных включений демонстрируется на иллюстративных примерах. См. [198].

8.1 Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x(t), t) \tag{8.1}$$

с заданным начальным условием

$$x(0) = x_0. \tag{8.2}$$

В формуле (8.1) $F(x, t)$ — заданное непрерывное на своей области определения многозначное отображение, $x(t)$ — n -мерная вектор-функция фазовых координат, которая предполагается кусочно-непрерывно дифференцируемой на $[0, T]$, $T > 0$ — заданный конечный момент времени. Будем полагать, что каждому моменту времени $t \in [0, T]$ и каждой фазовой точке $x \in \mathbb{R}^n$ отображение $F(x, t)$ ставит в соответствие некоторый выпуклый компакт из \mathbb{R}^n . Предположим также, что частная производная опорной функции множества $F(x, t)$ по x существует и непрерывна. В формуле (8.2) $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — заданный вектор.

Требуется найти такую вектор-функцию $x^* \in C_n[0, T]$, являющуюся решением включения (8.1) и удовлетворяющую начальному условию (8.2), которая доставляет минимум функционалу

$$\mathcal{J}(x) = \int_0^T f_0(x(t), \dot{x}(t)) dt, \quad (8.3)$$

где $f_0(x, \dot{x})$ — заданная вещественная скалярная функция, непрерывно дифференцируемая по x и по \dot{x} и непрерывная на своей области определения. Предполагаем, что такое решение существует.

8.2 Эквивалентная постановка задачи

Далее иногда для краткости будем иногда писать F вместо $F(x, t)$. Поскольку $\forall t \in [0, T]$ и $\forall x \in \mathbb{R}^n$ множество $F(x, t)$ представляет собой выпуклое замкнутое и ограниченное множество, включение (8.1) можно [143] переписать иначе

$$\langle \dot{x}(t), \psi(t) \rangle \leq c(F(x(t), t), \psi(t)) \quad \forall \psi(t) \in S_n, \quad \forall t \in [0, T].$$

Обозначим $z(t) = \dot{x}(t)$, $z \in P_n[0, T]$, тогда с учётом (8.2) будет

$$x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau. \quad (8.4)$$

Введём функции

$$l(\psi, x, z, t) = \langle z, \psi \rangle - c(F(x, t), \psi), \quad (8.5)$$

$$h(x, z, t) = \max_{\psi \in S_n} \max \left\{ 0, l(\psi, x, z, t) \right\}, \quad (8.6)$$

при этом функция $h(x, z, t)$ непрерывна (см. обоснование в Главе 9), и составим функционал

$$\varphi(z) = \sqrt{\int_0^T h^2 \left(x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau, z(t), t \right) dt}. \quad (8.7)$$

Рассмотрим множества

$$\Omega = \left\{ z \in P_n[0, T] \mid \varphi(z) = 0 \right\},$$

$$\Omega_\delta = \left\{ z \in P_n[0, T] \mid \varphi(z) < \delta \right\}.$$

Тогда

$$\Omega_\delta \setminus \Omega = \left\{ z \in P_n[0, T] \mid 0 < \varphi(z) < \delta \right\}.$$

Нетрудно убедиться, что для функционала (8.7) справедливы соотношения

$$\begin{cases} \varphi(z) = 0 \quad (z \in \Omega), \text{ если } \langle \dot{x}(t), \psi(t) \rangle \leq c(F(x(t), t), \psi(t)) \quad \forall \psi(t) \in S_n, \quad \forall t \in [0, T], \\ \varphi(z) > 0 \quad (z \notin \Omega), \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

то есть включение (8.1) имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi(z) = 0$.

Введём функционал

$$J(z) = \int_0^T f_0 \left(x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau, z(t) \right) dt.$$

Таким образом, требуется минимизировать функционал $J(z)$ на множестве Ω .

Введём в рассмотрение пространство

$$X = \left(P_n[0, T], \|\cdot\|_{L_n^2[0, T]} \right).$$

На пространстве X построим функционал

$$F_\lambda(z) = J(z) + \lambda\varphi(z), \quad (8.8)$$

в котором λ — достаточно большое число. Ниже будет показано, что при некоторых дополнительных предположениях это точная штрафная функция. Тогда задачу минимизации функционала (8.3) при наличии ограничений (8.1), (8.2) (то есть, задачу минимизации функционала $J(z)$ на множестве Ω) можно свести к безусловной минимизации функционала (8.8).

8.3 Необходимые условия минимума

Как уже было отмечено, считаем, что частная производная $\frac{\partial c(F(x, t), \psi)}{\partial x}$ опорной функции $c(F(x, t), \psi)$ множества $F(x, t)$ существует и непрерывна. Тогда для любых $x, y \in C_n[0, T]$, и для любых $\psi \in S_n$, $t \in [0, T]$, верно соотношение

$$\begin{aligned} & c(F(x + \alpha y, t), \psi) - c(F(x, t), \psi) = \\ & = \alpha \left\langle \frac{\partial c(F, \psi)}{\partial x}, y \right\rangle + o(\alpha, x, y, \psi, t), \quad \frac{o(\alpha, x, y, \psi, t)}{\alpha} \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Пусть $v \in P_n[0, T]$. Положим

$$\begin{aligned} z_\alpha(t) &= z(t) + \alpha v(t), \\ y(t) &= \int_0^t v(\tau) d\tau, \\ x_\alpha(t) &= x(t) + \alpha y(t). \end{aligned} \tag{8.10}$$

Используя свойство аддитивности опорной функции по первому аргументу [14] и равенства (8.9), (8.10), для фиксированного $t \in [0, T]$ вычислим

$$\begin{aligned} \ell(\psi, x_\alpha, z_\alpha, t) &= \ell(\psi, x, z, t) + \alpha H_1(\psi, x, z, y, v, t) + o(\alpha, \psi, x, z, y, v, t), \\ \frac{o(\alpha, \psi, x, z, y, v, t)}{\alpha} &\rightarrow 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0, \end{aligned}$$

где

$$H_1(\psi, x, z, y, v, t) = \langle \psi, v \rangle - \left\langle \frac{\partial c(F(x, t), \psi)}{\partial x}, y \right\rangle.$$

С учётом соотношений (8.5), (8.6) далее для фиксированного $t \in [0, T]$ найдём

$$\begin{aligned} h(x_\alpha, z_\alpha, t) &= h(x, z, t) + \alpha H(x, z, y, v, t) + o(\alpha, x, z, y, v, t), \\ \frac{o(\alpha, x, z, y, v, t)}{\alpha} &\rightarrow 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} H(x, z, y, v, t) &= \max_{\psi \in \bar{R}(x, z, t)} H_1(\psi, x, z, y, v, t), \text{ если } \max_{\psi \in S_n} \ell(\psi, x, z, t) > 0, \\ H(x, z, y, v, t) &= 0, \text{ если } \max_{\psi \in S_n} \ell(\psi, x, z, t) < 0, \end{aligned}$$

$$H(x, z, y, v, t) = \max_{\psi \in \bar{R}(x, z, t)} \max \left\{ 0, H_1(\psi, x, z, y, v, t) \right\}, \text{ если } \max_{\psi \in S_n} \ell(\psi, x, z, t) = 0,$$

здесь

$$\bar{R}(x, z, t) = \left\{ \psi^*(x, z, t) \in S_n \mid \max \left\{ 0, \ell(\psi^*, x, z, t) \right\} = \max_{\psi \in S_n} \max \left\{ 0, \ell(\psi, x, z, t) \right\} \right\}.$$

В силу структуры функционала (8.6) легко заметить, что в случае $\ell(\psi, x, z, t) > 0$ максимум выражения

$$\max \left\{ 0, \ell(\psi, x, z, t) \right\} = \ell(\psi, x, z, t)$$

достигается на единственном элементе $\psi^*(x, z, t) \in S_n$. Действительно, в данном случае точка $z(t)$ не принадлежит множеству $F(x(t), t)$. Из свойств опорной функции известно [143], что при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ величина $h(x(t), z(t), t)$ представляет собой евклидово расстояние от точки $z(t)$ до множества $F(x(t), t)$, то есть $h(x(t), z(t), t) = \|z(t) - f(x(t), t)\|_{\mathbb{R}^n}$,

где $f(x(t), t)$ — проекция точки $z(t)$ на множество $F(x(t), t)$, которая существует и единственна, поскольку $F(x(t), t)$ — выпуклый компакт. Отсюда видно, что максимум выражения $h(x(t), z(t), t) = \ell(\psi, x(t), z(t), t) = \langle z(t), \psi \rangle - c(F(x(t), t), \psi) = \|z(t) - f(x(t), t)\|_{\mathbb{R}^n}$ достигается на векторе $\psi^*(x(t), z(t), t) = (z(t) - f(x(t), t)) / \|z(t) - f(x(t), t)\|_{\mathbb{R}^n}$, который единственен в силу единственности вектора $f(x(t), t)$. Поэтому в этом случае множество $\bar{R}(x, z, t)$ состоит из единственного элемента $\psi^*(x, z, t)$. В случае $\ell(\psi, x, z, t) \leq 0$ положим $\psi^*(x, z, t) = \psi_0$, где вектор $\psi_0 \in S_n$ фиксирован. Отметим также, что отображение $t \rightarrow \psi^*(x(t), z(t), t)$ измеримо (см. обоснование в Главе 9).

Замечание 8.3.1. Величина $h(x(t), z(t), t)$ при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ представляет собой евклидово расстояние от точки $z(t)$ до множества $F(x(t), t)$, а функционал (8.7) есть отклонение в L^2 -норме траектории $z(t)$ от множества $F(x(t), t)$.

Изучим дифференциальные свойства функционала φ .

Составим вспомогательный функционал

$$\bar{\varphi}(z) = \frac{1}{2} \int_0^T h^2(x(t), z(t), t) dt.$$

Из доказательства Теоремы 9.3.1 Главы 9 вытекает теорема ниже.

Теорема 8.3.1. *Если частная производная по x опорной функции $c(F, \psi)$ множества $F(x, t)$ существует и непрерывна, то функционал $\bar{\varphi}(z)$ дифференцируем по Гато и его “градиент Гато” в точке z находится по формуле*

$$\nabla \bar{\varphi}(z) = h(x, z, t) \psi^*(x, z, t) - \int_t^T h(x(\tau), z(\tau), \tau) \frac{\partial c(F(x(\tau), \tau), \psi^*(x(\tau), z(\tau), \tau))}{\partial x} d\tau.$$

Если выполнены предположения Теоремы 8.3.1, то при $z \notin \Omega$ функционал φ дифференцируем по Гато (как суперпозиция дифференцируемых по Гато функционалов [45]) и его “градиент Гато” в точке $z \notin \Omega$ находится по формуле

$$\nabla \varphi(z) = \frac{h(x, z, t)}{\varphi(z)} \psi^*(x, z, t) - \int_t^T \frac{h(x(\tau), z(\tau), \tau)}{\varphi(z(\tau))} \frac{\partial c(F(x(\tau), \tau), \psi^*(x(\tau), z(\tau), \tau))}{\partial x} d\tau. \quad (8.11)$$

Введём множества

$$\begin{aligned} T_+(x, z) &= \left\{ t \in [0, T] \mid \ell(\psi^*(x, z, t), x, z, t) > 0 \right\}, \\ T_-(x, z) &= \left\{ t \in [0, T] \mid \ell(\psi^*(x, z, t), x, z, t) < 0 \right\}, \\ T_0(x, z) &= \left\{ t \in [0, T] \mid \ell(\psi^*(x, z, t), x, z, t) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Используя ту же технику, что и в [172, 97] и дифференцируемость по Гато функционала $\varphi^2(z)$ (см. д-во Теоремы 9.3.1) нетрудно убедиться в справедливости следующей теоремы.

Теорема 8.3.2. Если частная производная по x опорной функции $c(F, \psi)$ множества $F(x, t)$ существует и непрерывна, то при $z \in \Omega$ функционал $\varphi(z)$ дифференцируем по направлениям в смысле Дини и

$$\varphi'(z, v) = \max_{w \in W(x, z), \bar{\psi} \in \bar{R}(x, z)} \int_0^T \left\langle w(t) \bar{\psi}(t) - \int_t^T w(\tau) \frac{\partial c(F(x(\tau), \tau), \bar{\psi}(\tau))}{\partial x} d\tau, v(t) \right\rangle dt,$$

где

$$W(x, z) = \left\{ w \in L_1^2[0, T] \mid \|w\|_{L_1^2[0, T]} \leq 1, w(t) \geq 0 \forall t \in T_0(x, z), w(t) = 0 \forall t \in T_-(x, z) \right\},$$

$$\bar{R}(x, z) = \left\{ \bar{\psi} \in L_n^\infty[0, T] \mid \bar{\psi}(t) = \psi^*(x(t), z(t), t) \forall t \in [0, T], \ell(\psi^*(x, z, t), x, z, t) = \max_{\psi \in S_n} \ell(\psi, x, z, t) \right\}.$$

Нетрудно убедиться, что функционал $J(z)$ дифференцируем по Гато и его “градиент Гато” в точке z находится по формуле

$$\nabla J(z) = \frac{\partial f_0(x, z)}{\partial z} + \int_t^T \frac{\partial f_0(x(\tau), z(\tau))}{\partial x} d\tau. \quad (8.12)$$

С помощью Теоремы 8.3.2 и формулы (8.12) можно окончательно выписать производную Дини $F'_\lambda(z, v)$ функционала по направлениям и в её терминах сформулировать известное [36] условие минимума функционала $F_\lambda(x, z)$ при фиксированном значении λ .

Теорема 8.3.3. Пусть выполнены предположения Теоремы 8.3.1. Для того чтобы точка z^* доставляла минимум функционалу $F_\lambda(z)$ на множестве Ω необходимо, чтобы для любого $v \in P_n[0, T]$ имело место неравенство

$$F'_\lambda(z^*, v) \geq 0. \quad (8.13)$$

8.4 Точная штрафная функция

Теорема 8.4.1. Пусть выполнены предположения Теоремы 8.3.1. Пусть $Z \subset (P_n[0, T], \|\cdot\|_{L_n^2[0, T]})$ ограниченное множество, то есть существует такое число $M < \infty$, что $\|z\|_{L_n^2[0, T]} < M \forall z \in Z$. Тогда существует такое число $a > 0$, что

$$\|\nabla \varphi(z)\|_{L_n^2[0, T]} > a > 0 \quad \forall z \in Z, z \notin \Omega.$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдётся такая последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, $z_k \in Z$, $z_k \notin \Omega$, что $\|\nabla\varphi(z_k)\|_{L_n^2[0,T]} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — соответствующая последовательности $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность (см. (8.4)). При каждом $t \in [0, T]$ домножим справа скалярно правую часть выражения (8.11) (вычисленного в точке z_k) на вектор-функцию $\psi^*(x_k, z_k, t)$ (напомним, что при каждом фиксированном t и при каждом фиксированных x_k, z_k вектор $\psi^*(x_k, z_k, t)$ принадлежит единичной сфере), поэтому при сделанном предположении выражение

$$\frac{h(x_k, z_k, t)}{\varphi(z_k)} - \int_t^T \frac{h(x_k(\tau), z_k(\tau), \tau)}{\varphi(z_k(\tau))} \left\langle \frac{\partial c(F(x_k(\tau), \tau), \psi^*(x_k(\tau), z_k(\tau), \tau))}{\partial x}, \psi^*(x_k(t), z_k(t), t) \right\rangle d\tau$$

также должно стремиться к нулю по L^2 -норме.

По свойству интегрального однородного уравнения Вольтерры второго рода [198] с искомой функцией $\frac{h(x_k, z_k, t)}{\varphi(z_k)}$ вследствие этого должно быть $\left\| \frac{h(x_k, z_k, t)}{\varphi(z_k)} \right\|_{L_1^2[0,T]} \rightarrow 0$, что противоречит очевидному равенству $\left\| \frac{h(x_k, z_k, t)}{\varphi(z_k)} \right\|_{L_1^2[0,T]} = 1$ для любого $k = \overline{1, \infty}$.

Теорема доказана. \square

Пусть для функционала (8.8) выполнены условия Теоремы 1.2.1. При этом заметим, что: Предположение (*) Теоремы 1.2.1 выполнено в силу предположения о существовании решения исходной задачи, Предположение 2) Теоремы 1.2.1 выполнено в силу Теоремы 8.4.1 (при выполнении сделанных в ней предположений). Тогда функционал (8.8) является точной штрафной функцией, то есть существует такое конечное число λ^* , что $\forall \lambda > \lambda^*$ исходная задача минимизации функционала (8.3) при ограничениях (8.1), (8.2) эквивалентна минимизации функционала (8.8) на пространстве $P_n[0, T]$.

Замечание 8.4.1. Условие минимума (8.13) может быть использовано для получения принципа максимума В. И. Благодатских для задачи со свободным правым концом как классического для дифференциальных включений условия оптимальности. Однако поскольку этот результат оказывается слабее известного принципа максимума в общей форме, мы не останавливаемся подробно на теоретическом аспекте разрабатываемого подхода, а сосредоточимся ниже, в Главе 9 и в Главе 11, на использовании разработанного подхода для построения численных методов решения исходной задачи (а также более сложных задач с дифференциальными включениями).

8.5 Численные примеры

В данном разделе рассмотрены некоторые примеры, в которых с помощью принципа максимума Благодатских удаётся аналитически получить оптимальное решение. Заметим, что для этих примеров нетрудно проверить выполнение условий [143] существования решения, а поскольку в них получен единственный процесс (x^*, u^*) , удовлетворяющий принципу максимума, то он же является и оптимальным.

Пример 8.5.1. Рассмотрим заданную при $t \in [0, 1]$ систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \\ \dot{x}_2 = x_1, \end{cases}$$

в которой ограничение на управление задаётся множеством

$$U = \left\{ u \in P_1[0, 1] \mid |u(t)| \leq 1, t \in [0, 1] \right\},$$

а краевые условия имеют вид

$$x_0 = (0, 0)', \quad x(1) = (-1/2, -1/3)'.$$

Требуется подобрать такое управление $u^* \in U$, при котором функционал

$$\mathcal{J}(x) = \int_0^1 x_2(t) dt$$

принимает наименьшее значение.

Такие задачи встречаются при моделировании простейших систем движущихся под действием силы тяги [143].

Систему можно переписать в виде (правая часть не зависит от t поэтому здесь пишем $F(x)$ вместо $F(x, t)$) включения

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)),$$

где

$$F = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Опорная функция множества F имеет вид

$$c(F, \psi) = |\psi_1| + x_1 \psi_2.$$

Видно, что функция $c(F, \psi)$ является непрерывно дифференцируемой по фазовым переменным и её градиент выписывается следующим образом

$$\frac{\partial c(F, \psi)}{\partial x} = (\psi_2, 0)'.$$

Для градиента подынтегральной функции $f_0(x, z)$ справедливо выражение

$$\frac{\partial f_0(x, z)}{\partial x} = (0, 1)'$$

Из принципа максимума Благодатских [14] следует, что вектор-функция $\psi(t)$ должна удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = 1. \end{cases} \quad (8.14)$$

и кроме того для $\psi(t)$ при почти всех $t \in [0, 1]$ необходимо выполнение соотношений

$$\langle \dot{x}(t), \psi(t) \rangle = u_1(t)\psi_1(t) + x_1(t)\psi_2(t) = c(F(x(t)), \psi(t)) = |\psi_1(t)| + x_1(t)\psi_2(t),$$

отсюда для почти всех $t \in [0, 1]$ должно выполняться равенство

$$u_1(t)\psi_1(t) = |\psi_1(t)|. \quad (8.15)$$

Из (8.14), (8.15) уже нетрудно получить оптимальное управление

$$\begin{aligned} u_1^*(t) &= -1, & t \in [0, \tau_1), \\ u_1^*(t) &= 1, & t \in [\tau_1, \tau_2), \\ u_1^*(t) &= -1, & t \in [\tau_2, 1], \end{aligned} \quad (8.16)$$

и соответствующую ему оптимальную траекторию

$$\begin{aligned} x_1^*(t) &= -t, \quad x_2^*(t) = -t^2/2, & t \in [0, \tau_1), \\ x_1^*(t) &= t + C_1, \quad x_2^*(t) = t^2/2 + C_1t + C_2, & t \in [\tau_1, \tau_2), \\ x_1^*(t) &= -t + 1/2, \quad x_2^*(t) = -t^2/2 + t/2 - 1/2, & t \in [\tau_2, 1], \end{aligned} \quad (8.17)$$

где $\tau_1 = 13/24$, $\tau_2 = 19/24$, $C_1 = -13/12$, $C_2 = 169/576$. Для поиска величин τ_1 , τ_2 , C_1 , C_2 в (8.16), (8.17) использованы граничные условия и условие непрерывности траектории.

Пример 8.5.2. Дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{yu}{x}, \quad x \in [x_-, x_+], \quad x_+ > x_- > 0$$

с краевыми условиями

$$y(x_-) = y_-, \quad y(x_+) = y_+,$$

фазовыми ограничениями

$$y_- > 0, y_+ > 0$$

и следующим множеством, описывающим ограничение на управление:

$$U = \left\{ u \in P_1[x_-, x_+] \mid -1 < \delta \leq u(x) \leq \sigma < 0, x \in [x_-, x_+] \right\},$$

Требуется подобрать управление $u^* \in U$, которое доставляет минимум функционалу

$$\mathcal{J}(y) = \int_{x_-}^{x_+} -y(x)f'(x)dx,$$

где $f(x)$ — некоторая (непрерывно дифференцируемая) функция распределения.

Такие задачи встречаются при моделировании регрессивной шкалы прибыли [117]. Здесь сохранены обозначения оригинальной постановки задачи, которые имеют очевидную связь с обозначениями данной главы.

Перейдём от исходного дифференциального уравнения к соответствующему дифференциальному включению

$$\frac{dy(x)}{dx} \in F(y(x), x),$$

где

$$F(y(x), x) = \left[\delta \frac{y(x)}{x}, \sigma \frac{y(x)}{x} \right].$$

Опорная функция множества F имеет вид

$$c(F, \psi) = \frac{y}{x} \left(\frac{\sigma + \delta}{2} \psi + \frac{\sigma - \delta}{2} |\psi| \right).$$

Из принципа максимума Благодатских [14] при почти всех $x \in [x_-, x_+]$ имеем

$$\frac{y(x)}{x} u(x) \psi(x) = \frac{dy(x)}{dx} \psi(x) = c(F(y(x), x), \psi(x)) = \frac{y(x)}{x} \left(\frac{\sigma + \delta}{2} \psi(x) + \frac{\sigma - \delta}{2} |\psi(x)| \right),$$

тогда при почти всех $x \in [x_-, x_+]$ должно быть

$$u(x) \psi(x) = \frac{\sigma + \delta}{2} \psi(x) + \frac{\sigma - \delta}{2} |\psi(x)|, \quad (8.18)$$

поэтому

$$\begin{aligned} u(x) &= \sigma, \text{ если } \psi(x) > 0, \\ u(x) &\in [\delta, \sigma], \text{ если } \psi(x) = 0, \\ u(x) &= \delta, \text{ если } \psi(x) < 0. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Далее, поскольку

$$\frac{\partial c(F, \psi)}{\partial y} = \frac{\sigma + \delta}{2x} \psi + \frac{\sigma - \delta}{2x} |\psi| = \frac{u}{x} \psi,$$

то при этом получаем

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{\partial c(F, \psi)}{\partial y} - f' = -\frac{u}{x} \psi - f'. \quad (8.20)$$

Из (8.19), (8.20) уже нетрудно получить оптимальное управление

$$u^*(x) = \sigma, \quad x \in [x_-, x_0], \quad (8.21)$$

$$u^*(x) = \delta, \quad x \in (x_0, x_+],$$

и соответствующую ему оптимальную траекторию

$$y^*(x) = C_1 x^\sigma, \quad x \in [x_-, x_0],$$

$$y^*(x) = C_2 x^\delta, \quad x \in [x_0, x_+], \quad (8.22)$$

где $C_1 = \frac{y_-}{x_-^\sigma}$, $C_2 = \frac{y_+}{x_+^\delta}$, $x_0 = \left(\frac{y_+ x_-^\sigma}{y_- x_+^\delta} \right)^{\frac{1}{\sigma - \delta}}$. Для поиска величин C_1 , C_2 , x_0 в (8.21), (8.22) использованы граничные условия и условие непрерывности траектории. Видно, что фазовые ограничения соблюдены.

Замечание 8.5.1. Нетрудно убедиться, что условия (8.14), (8.15) и (8.18), (8.20) могут быть также получены аналитически непосредственно из принципа максимума Понтрягина [18]. В этом разделе же продемонстрирован несколько иной подход, когда осуществляется переход от исходной системы к соответствующему дифференциальному включению, для которого применяются полученные условия оптимальности для поиска оптимального процесса $(x^*(t), u^*(t))$ ($(y^*(x), u^*(x))$) в аналитической форме.

Глава 9

Оптимальное управление гладкими дифференциальными включениями с выпуклой компактной правой частью

В этой главе исследуется дифференциальное включение с заданным непрерывным многозначным отображением с выпуклыми компактными значениями. На заданном конечном промежутке времени требуется построить решение дифференциального включения, которое удовлетворяет заданным начальным и конечным условиям и доставляет минимум интегральному функционалу с непрерывной и непрерывно дифференцируемой по фазовым переменным и их производным подынтегральной функцией (задача Лагранжа). С помощью аппарата опорных функций исходная задача сводится к безусловной минимизации некоторого функционала. В случае существования и непрерывности частной производной опорной функции правой части дифференциального включения по фазовой переменной этот функционал оказывается дифференцируемым по Гато. Найдены “градиент Гато”, получены необходимые условия минимума этого функционала. На основании этих условий к исходной задаче применяется метод наискорейшего спуска, который сходится в “слабом” смысле к стационарной точке данного функционала. Обсуждаются частные случаи структуры дифференциального включения, когда применяемый алгоритм особенно эффективен. См. [218], [106], [101], [221].

9.1 Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in F(x(t), t) \tag{9.1}$$

с начальной точкой

$$x(0) = x_0 \quad (9.2)$$

и конечным условием

$$x(T) = x_T. \quad (9.3)$$

В формуле (9.1) $F(x, t)$ — заданное непрерывное на своей области определения многозначное отображение, $x(t)$ — n -мерная вектор-функция фазовых координат, которая предполагается кусочно непрерывно дифференцируемой на $[0, T]$, $T > 0$ — заданный конечный момент времени. Будем полагать, что каждому моменту времени $t \in [0, T]$ и каждой фазовой точке $x \in \mathbb{R}^n$ отображение $F(x, t)$ ставит в соответствие некоторый выпуклый компакт из \mathbb{R}^n . Предположим также, что частная производная опорной функции множества $F(x, t)$ по x существует и непрерывна. В формулах (9.2), (9.3) $x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$ — заданные векторы.

Требуется найти такую вектор-функцию $x^* \in C_n[0, T]$, которая удовлетворяет включению (9.1) и краевым условиям (9.2), (9.3), и доставляет минимум функционалу

$$\mathcal{J}(x) = \int_0^T f_0(x(t), \dot{x}(t), t) dt, \quad (9.4)$$

где $f_0(x, \dot{x}, t)$ — заданная вещественная скалярная функция, непрерывно дифференцируемая по x и по \dot{x} и непрерывная на своей области определения. Предполагаем, что такое решение существует.

9.2 Сведение к задаче безусловной оптимизации

Далее для краткости будем иногда писать F вместо $F(x, t)$. Поскольку $\forall t \in [0, T]$ и $\forall x \in \mathbb{R}^n$ множество $F(x, t)$ представляет собой выпуклый компакт в \mathbb{R}^n , то включение (9.1) можно [143] переписать иначе:

$$\langle \dot{x}(t), \psi(t) \rangle \leq c(F(x(t), t), \psi(t)) \quad \forall \psi(t) \in S_n, \quad \forall t \in [0, T].$$

Обозначим $z(t) = \dot{x}(t)$, $z \in P_n[0, T]$, тогда с учётом (9.2) будет

$$x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau. \quad (9.5)$$

Положим

$$\ell(\psi, x, z, t) = \langle z, \psi \rangle - c(F(x, t), \psi), \quad (9.6)$$

$$h(x, z, t) = \max_{\psi \in S_n} \max \left\{ 0, \ell(\psi, x, z, t) \right\}, \quad (9.7)$$

при этом функция $h(x, z, t)$ непрерывна (см. обоснование в следующем разделе) и составим функционал

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} \int_0^T h^2 \left(x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau, z(t), t \right) dt. \quad (9.8)$$

Рассмотрим множество

$$\Omega = \left\{ z \in P_n[0, T] \mid \varphi(z) = 0 \right\}.$$

Нетрудно убедиться, что для функционала (9.8) справедливы соотношения

$$\begin{cases} \varphi(z) = 0 \quad (z \in \Omega), \text{ если } \langle \dot{x}(t), \psi(t) \rangle \leq c(F(x(t), t), \psi(t)) \quad \forall \psi(t) \in S_n, \quad \forall t \in [0, T], \\ \varphi(z) > 0 \quad (z \notin \Omega), \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

то есть включение (9.1) имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi(z) = 0$.

Введём функционал

$$\chi(z) = \frac{1}{2} \left(x_0 + \int_0^T z(t) dt - x_T \right)^2.$$

Видно, что краевые условия (9.2), (9.3) выполнены тогда и только тогда, когда имеем $\chi(z) = 0$. Также очевидно, что если ограничения на какие-то координаты отсутствуют, нужно положить соответствующие слагаемые равными нулю.

Введём функционал

$$J(z) = \int_0^T f_0 \left(x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau, z(t), t \right) dt.$$

Построим функционал

$$I(z) = \int_0^T f_0 \left(x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau, z(t), t \right) dt + \lambda \left[\varphi(z) + \chi(z) \right], \quad (9.9)$$

где $\lambda > 0$ — достаточно большое число.

Целью выбора штрафных коэффициентов является удовлетворение ограничений с заданной погрешностью. На практике задача решается для фиксированного числа $\bar{\lambda}$. Если решение этой задачи (при $\lambda = \bar{\lambda}$) удовлетворяет ограничениям в виде дифференциального включения (9.1) и краевых условий (9.2), (9.3) с заданной точностью (то есть значение функционала $\varphi(z) + \chi(z)$ на этом решении достаточно мало), то процесс прекращается; в противном случае, увеличивают значение λ и повторяют процесс с этим новым значением.

Итак, исходная задача свелась к нахождению точки безусловного глобального минимума функционала $I(z)$ (для достаточно больших значений параметра $\bar{\lambda}$) в пространстве

$$X = \left(P_n[0, T], \|\cdot\|_{L_n^2[0, T]} \right).$$

Обозначим z^* точку глобального минимума функционала (9.9), тогда при фиксированном λ полагаем

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t z^*(\tau) d\tau.$$

9.3 Необходимые условия минимума

Как уже было отмечено, считаем, что частная производная $\frac{\partial c(F(x,t),\psi)}{\partial x}$ опорной функции $c(F(x,t),\psi)$ множества $F(x,t)$ существует и непрерывна. Тогда для любых $x, y \in C_n[0, T]$, и для любых $\psi \in S_n, t \in [0, T]$, верно соотношение

$$\begin{aligned} & c(F(x + \alpha y, t), \psi) - c(F(x, t), \psi) = \\ & = \alpha \left\langle \frac{\partial c(F, \psi)}{\partial x}, y \right\rangle + o(\alpha, x, y, \psi, t), \quad \frac{o(\alpha, x, y, \psi, t)}{\alpha} \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Пусть $v \in P_n[0, T]$. Положим

$$\begin{aligned} z_\alpha(t) &= z(t) + \alpha v(t), \\ y(t) &= \int_0^t v(\tau) d\tau, \\ x_\alpha(t) &= x(t) + \alpha y(t). \end{aligned} \quad (9.11)$$

Используя свойство аддитивности опорной функции по первому аргументу [14] и равенства (9.10), (9.11), для фиксированного $t \in [0, T]$ вычислим

$$\begin{aligned} \ell(\psi, x_\alpha, z_\alpha, t) &= \ell(\psi, x, z, t) + \alpha H_1(\psi, x, z, y, v, t) + o(\alpha, \psi, x, z, y, v, t), \\ & \frac{o(\alpha, \psi, x, z, y, v, t)}{\alpha} \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0, \end{aligned}$$

где

$$H_1(\psi, x, z, y, v, t) = \langle \psi, v \rangle - \left\langle \frac{\partial c(F(x, t), \psi)}{\partial x}, y \right\rangle.$$

С учётом соотношений (9.6), (9.7) далее для фиксированного $t \in [0, T]$ найдём

$$\begin{aligned} h(x_\alpha, z_\alpha, t) &= h(x, z, t) + \alpha H(x, z, y, v, t) + o(\alpha, x, z, y, v, t), \\ & \frac{o(\alpha, x, z, y, v, t)}{\alpha} \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0, \end{aligned}$$

где

$$H(x, z, y, v, t) = \max_{\psi \in \bar{R}(x, z, t)} H_1(\psi, x, z, y, v, t), \text{ если } \max_{\psi \in S_n} \ell(\psi, x, z, t) > 0,$$

$$H(x, z, y, v, t) = 0, \text{ если } \max_{\psi \in S_n} \ell(\psi, x, z, t) < 0,$$

$$H(x, z, y, v, t) = \max_{\psi \in \bar{R}(x, z, t)} \max \left\{ 0, H_1(\psi, x, z, y, v, t) \right\}, \text{ если } \max_{\psi \in S_n} \ell(\psi, x, z, t) = 0,$$

здесь

$$\bar{R}(x, z, t) = \left\{ \psi^*(x, z, t) \in S_n \mid \max \left\{ 0, \ell(\psi^*, x, z, t) \right\} = \max_{\psi \in S_n} \max \left\{ 0, \ell(\psi, x, z, t) \right\} \right\}.$$

В силу структуры функционала (9.6) легко заметить, что в случае $\ell(\psi, x, z, t) > 0$ максимум выражения

$$\max \left\{ 0, \ell(\psi, x, z, t) \right\} = \ell(\psi, x, z, t)$$

достигается на единственном элементе $\psi^*(x, z, t) \in S_n$. Действительно, в данном случае точка z не принадлежит множеству $F(x(t), t)$. Из свойств опорной функции известно [143], что при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ величина $h(x(t), z(t), t)$ представляет собой евклидово расстояние от точки $z(t)$ до множества $F(x(t), t)$, то есть $h(x(t), z(t), t) = \|z(t) - f(x(t), t)\|_{\mathbb{R}^n}$, где $f(x(t), t)$ — проекция точки $z(t)$ на множество $F(x(t), t)$, которая существует и единственна, поскольку $F(x(t), t)$ — выпуклый компакт. Отсюда видно, что максимум выражения $h(x(t), z(t), t) = \ell(\psi, x(t), z(t), t) = \langle z(t), \psi \rangle - c(F(x(t), t), \psi) = \|z(t) - f(x(t), t)\|_{\mathbb{R}^n}$ достигается на векторе $\psi^*(x(t), z(t), t) = (z(t) - f(x(t), t)) / \|z(t) - f(x(t), t)\|_{\mathbb{R}^n}$, который единственен в силу единственности вектора $f(x(t), t)$. Поэтому в этом случае множество $\bar{R}(x, z, t)$ состоит из единственного элемента $\psi^*(x, z, t)$. В случае $\ell(\psi, x, z, t) \leq 0$ положим $\psi^*(x, z, t) = \psi_0$, где вектор $\psi_0 \in S_n$ фиксирован.

Отметим также, что отображение $t \rightarrow \psi^*(x(t), z(t), t)$ измеримо. Действительно, из непрерывности многозначного отображения $F(x, t)$ следует [143] непрерывность опорной функции $c(F(x, t), \psi)$ по (x, t) . Тогда из непрерывности [39] функции максимума функция $h(x, z, t)$ также непрерывна, а следовательно [14] и измерима. Тогда множество $T_+ = \{t \in [0, T] \mid h(x(t), z(t), t) > 0\}$ измеримо. Поскольку функция $\psi^*(x, z, t)$ непрерывна [145] на открытом (в силу непрерывности функции $h(x, z, t)$) множестве $XZT_+ = \{(x, z, t) \mid h(x, z, t) > 0\}$, функция $t \rightarrow \psi^*(x(t), z(t), t)$ при $t \in T_+$ измерима как суперпозиция функции $\psi^*(x, z, t)|_{XZT_+}$ и измеримого (в силу непрерывности $x(t)$ и кусочной непрерывности $z(t)$) отображения $t \rightarrow (x(t), z(t), t)$ при $t \in T_+$. Напомним, что в случае $t \in [0, T] \setminus T_+$ положено $\psi^*(x(t), z(t), t) = \psi_0$ (фиксированный вектор из S_n). Окончательно получаем, что отображение $t \rightarrow \psi^*(x(t), z(t), t)$ при $t \in [0, T]$ измеримо.

Замечание 9.3.1. Величина $h(x(t), z(t), t)$ при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ представляет собой евклидово расстояние от точки $z(t)$ до множества $F(x(t), t)$, а функционал (9.8) есть половина квадрата отклонения в L^2 -норме траектории $z(t)$ от множества $F(x(t), t)$.

Теперь нетрудно получить разложение

$$\varphi(z_\alpha) = \varphi(x) + \alpha \int_0^T h(x(t), z(t), t) H(x(t), z(t), y(t), v(t), t) + o(\alpha, t) dt.$$

Очевидно, что при $z \in \Omega$ функционал φ дифференцируем по Гато, и его градиент Гато равен нулю.

Рассмотрим случай $z \notin \Omega$. Обозначим

$$w(x, z, t) = \frac{1}{2} \max_{\psi \in S_n} \ell(\psi, x, z, t)^2 > 0.$$

Как уже было отмечено, в этом случае данный максимум достигается на единственном элементе $\psi^*(x, z, t)$. Тогда функция $\psi^*(x, z, t)$ непрерывна по (x, z) [145] при фиксированном $t \in [0, T]$, поэтому с учётом непрерывности функции $\frac{\partial c(F(x, t), \psi)}{\partial x}$ получаем, что вектор-функции $\frac{\partial w(x, z, t)}{\partial x}$ и $\frac{\partial w(x, z, t)}{\partial z}$ непрерывны по (x, z) при фиксированном $t \in [0, T]$. Далее по теореме Лагранжа о среднем значении для каждого $t \in [0, T]$ существуют такие векторы $\theta_1(t), \theta_2(t) \in \mathbb{R}^n$, при этом $\theta_{1i}(t), \theta_{2i}(t) \in [0, 1]$, $i = \overline{1, n}$, что

$$\begin{aligned} & w(x + \alpha y, z + \alpha v, t) - w(x, z, t) = \\ &= \alpha \left\langle \frac{\partial w(x + \theta_1 \alpha y, z + \theta_2 \alpha v, t)}{\partial x}, y \right\rangle + \alpha \left\langle \frac{\partial w(x + \theta_1 \alpha y, z + \theta_2 \alpha v, t)}{\partial z}, v \right\rangle = \\ &= \alpha \left\langle \frac{\partial w(x, z, t)}{\partial x}, y \right\rangle + \alpha \left\langle \frac{\partial w(x, z, t)}{\partial z}, v \right\rangle + \\ &\quad + \alpha \left\langle \frac{\partial w(x + \theta_1 \alpha y, z + \theta_2 \alpha v, t)}{\partial x}, y \right\rangle - \alpha \left\langle \frac{\partial w(x, z, t)}{\partial x}, y \right\rangle + \\ &\quad + \alpha \left\langle \frac{\partial w(x + \theta_1 \alpha y, z + \theta_2 \alpha v, t)}{\partial z}, v \right\rangle - \alpha \left\langle \frac{\partial w(x, z, t)}{\partial z}, v \right\rangle \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(z + \alpha v) - \varphi(z)}{\alpha} - \int_0^T \left\langle \frac{\partial w(x(t), z(t), t)}{\partial x}, y(t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial w(x(t), z(t), t)}{\partial z}, v(t) \right\rangle dt \right| = \quad (9.12) \\ &= \left| \frac{\varphi(z + \alpha v) - \varphi(z)}{\alpha} - \left\langle \int_0^T \int_t^T \frac{\partial w(x(\tau), z(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial w(x(t), z(t), t)}{\partial z}, v(t) \right\rangle dt \right| = \\ &= \left| \int_0^T \left\langle \frac{\partial w(x(t) + \theta_1(t) \alpha y(t), z(t) + \theta_2(t) \alpha v(t), t)}{\partial x} - \frac{\partial w(x(t), z(t), t)}{\partial x}, y(t) \right\rangle dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \left\langle \frac{\partial w(x(t) + \theta_1(t) \alpha y(t), z(t) + \theta_2(t) \alpha v(t), t)}{\partial z} - \frac{\partial w(x(t), z(t), t)}{\partial z}, v(t) \right\rangle dt \right| \leq \\ &\leq \max_{t \in [0, T]} \|y(t)\|_{\mathbb{R}^n} \int_0^T \left\| \frac{\partial w(x(t) + \theta_1(t) \alpha y(t), z(t) + \theta_2(t) \alpha v(t), t)}{\partial x} - \frac{\partial w(x(t), z(t), t)}{\partial x} \right\|_{\mathbb{R}^n} dt + \\ &+ \max_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_{\mathbb{R}^n} \int_0^T \left\| \frac{\partial w(x(t) + \theta_1(t) \alpha y(t), z(t) + \theta_2(t) \alpha v(t), t)}{\partial z} - \frac{\partial w(x(t), z(t), t)}{\partial z} \right\|_{\mathbb{R}^n} dt. \end{aligned}$$

Множители $\max_{t \in [0, T]} \|y(t)\|_{\mathbb{R}^n}$ и $\max_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_{\mathbb{R}^n}$ ограничены, поскольку $y \in C_n[0, T]$, $v \in P_n[0, T]$. Нормы под интегралами стремятся к нулю при $\alpha \downarrow 0$ при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ в силу непрерывности функций $\frac{\partial w(x, z, t)}{\partial x}$ и $\frac{\partial w(x, z, t)}{\partial z}$ по (x, z) при фиксированном $t \in [0, T]$. Кроме того, эти нормы ограничены в силу непрерывности функции $\frac{\partial c(F(x, t), \psi)}{\partial x}$. Тогда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости выражение (9.12) стремится к нулю при $\alpha \downarrow 0$, что доказывает дифференцируемость по Гато функционала $\varphi(z)$ в случае $z \notin \Omega$.

Вычисляя также классическую вариацию для функционалов $\chi(z)$ и $J(z)$, приходим к следующему результату.

Теорема 9.3.1. *Если частная производная по x опорной функции $c(F, \psi)$ множества $F(x, t)$ существует и непрерывна, то функционал $I(z)$ дифференцируем по Гато и его “градиент Гато” в точке z находится по формуле*

$$\begin{aligned} \nabla I(z) = & \int_t^T \frac{\partial f_0(x(\tau), z(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0(x, z, t)}{\partial z} + \\ & + \lambda \left[h(x, z, t) \psi^*(x, z, t) - \int_t^T h(x(\tau), z(\tau), \tau) \frac{\partial c(F(x(\tau), \tau), \psi^*(x(\tau), z(\tau), \tau))}{\partial x} d\tau + \right. \\ & \left. + x_0 + \int_0^T z(t) dt - x_T \right]. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Из известного необходимого условия минимума [36] дифференцируемого по Гато функционала и соотношения (9.13) заключаем, что справедлива следующая

Теорема 9.3.2. *Пусть частная производная функции опорной $c(F, \psi)$ множества $F(x, t)$ по x существует и непрерывна. Для того чтобы точка z^* доставляла минимум функционалу $I(z)$ необходимо, чтобы*

$$\begin{aligned} 0_n = & \int_t^T \frac{\partial f_0(x^*(\tau), z^*(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0(x^*, z^*, t)}{\partial z} + \\ & + \lambda \left[h(x^*, z^*, t) \psi^*(x^*, z^*, t) - \int_t^T h(x^*(\tau), z^*(\tau), \tau) \frac{\partial c(F(x^*(\tau), \tau), \psi^*(x^*(\tau), z^*(\tau), \tau))}{\partial x} d\tau + \right. \\ & \left. + x_0 + \int_0^T z^*(t) dt - x_T \right], \end{aligned} \quad (9.14)$$

где 0_n — нулевой элемент пространства $P_n[0, T]$.

9.4 Метод наискорейшего спуска

Опишем метод наискорейшего спуска [285] для поиска стационарных точек функционала функционала $I(z)$.

Фиксируем произвольную точку $z_1 \in P_n[0, T]$. Пусть уже построена точка $z_k \in P_n[0, T]$. Если выполнено условие минимума (9.14) (на практике с некоторой выбранной точностью $\bar{\varepsilon}$ в смысле L^2 -нормы), то точка z_k является стационарной точкой функционала $I(z)$, и процесс прекращается. В противном случае положим

$$z_{k+1} = z_k - \gamma_k \nabla I(z_k),$$

где x_k соответствует z_k по формуле (9.5), а величина γ_k является решением следующей задачи одномерной минимизации

$$\min_{\gamma \geq 0} I\left(z_k - \gamma \nabla I(z_k)\right) = I\left(z_k - \gamma_k \nabla I(z_k)\right).$$

На практике одномерная минимизация осуществляется на выбранном отрезке $[0, \bar{\gamma}]$. Тогда имеем

$$I(z_{k+1}) \leq I(z_k).$$

Предположим, что функционал $\nabla I(z)$ является равномерно непрерывным и ограниченным в шаре $B_{r'}(0_n)$ (пространства $L_n^2[0, T]$) радиуса $r' > \sup_{z \in \mathcal{L}_I(z_1)} \|z\|_{L_n^2[0, T]}$ (множество Лебега $\mathcal{L}_I(z_1) = \{z \in P_n[0, T] \mid I(z) \leq I(z_1)\}$ считаем ограниченным по норме $L_n^2[0, T]$). Если последовательность $\{z_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, бесконечна, то метод наискорейшего спуска сходится [383] в следующем смысле:

$$\|\nabla I(z_k)\|_{L_n^2[0, T]} = \sqrt{\int_0^T (\nabla I(z_k, t))^2 dt} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Если последовательность $\{z_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, конечна, то последняя её точка является стационарной точкой функционала $I(z)$ по построению.

Строго говоря, в книге [285] данный метод описан для другого пространства, но прямая проверка показывает его применимость в случае, рассмотренном в диссертации.

Замечание 9.4.1. Для нахождения вектор функции $\psi^*(x(t), z(t), t)$ в общем случае для каждого $t \in [0, T]$ приходится решать задачу минимизации негладкой функции на сфере (с помощью соответствующей точной штрафной функции [194] эту задачу можно заменить на безусловную минимизацию (с фиксированным штрафным параметром λ) негладкой функции) и осуществлять её методом кодифференциального спуска. На практике производится (равномерное) разбиение интервала $[0, T]$ и эта задача решается для каждой точки разбиения, то есть вычисляется $\psi^*(x(t_i), z(t_i), t_i)$, где $t_i \in [0, T]$, $i = \overline{1, N}$, после чего осуществляется соответствующая интерполяция (см. Лемма 5.5.1, Лемма 5.5.2). Такая аппроксимация

гарантирует, что последующая точка z_{k+1} “не покинет” пространство $P_n[0, T]$, обеспечивая корректность метода в этом смысле. Однако во многих случаях удаётся упростить вычисления в силу “хорошо устроенных” множеств в правой части включения, в отдельных случаях удаётся вычислить $\psi^*(x(t), z(t), t)$, $t \in [0, T]$, аналитически (точно).

Кроме того, в качестве практического приёма также на некоторых итерациях имеет смысл осуществлять аппроксимацию искомым вектор-функций (которые могут “разрастаться” при реализации алгоритма и иметь очень громоздкий вид) интерполяционными полиномами Лагранжа наперёд заданной степени deg .

9.5 Численные примеры

Вычисления производились символично в пакете Maple 12, Serial Number 2011-11-11. Решение задачи одномерной минимизации осуществлялось на отрезке $[0, 1]$ (т. е. здесь $\bar{\gamma} = 1$) в Maple встроенной функцией `fminbnd()` с её внутренними параметрами по умолчанию. Согласно документации, для решения этой задачи в Maple используется метод золотого сечения в сочетании с параболической интерполяцией [55]. В этих примерах параметр $\bar{\epsilon}$ игнорировался и оценка погрешности решения проводилась исходя из значения функционала. Использовался параметр $deg = 5$ для аппроксимации искомым вектор-функций на каждой 5-й итерации. Все интегралы вычислялись в Maple встроенной функцией `evalf(int())` с её внутренними параметрами по умолчанию. Согласно документации, для решения этой задачи в Maple используется метод Гаусса-Конрода [13]. Все вычисления в примерах записаны с точностью до 4-го знака после запятой. Будем писать $F(x)$ вместо $F(x, t)$, когда правая часть дифференциального включения не зависит явно от t .

Вначале рассмотрим примеры построения произвольного решения дифференциального включения (удовлетворяющего заданным краевым условиям). В этом случае все результаты, полученные выше в этой главе, сохраняют силу, при этом нужно положить оптимизируемый функционал равным тождественно нулю, и взять единичный штрафной параметр. Этот функционал устроен таким образом, что можно проверить, является ли полученная стационарная точка точкой его глобального минимума.

Сначала приводятся два примера, и для понимания работы алгоритма первые итерации в этих примерах выполняются аналитически (дальнейшие итерации здесь также выполняются аналитически). Далее примеры приводятся в более краткой форме с результатами численной реализации алгоритма. Поиск вектор-функции $\psi^*(x(t), z(t), t)$, $t \in [0, T]$, осуществлялся аналитически (точно) исходя из анализа соответствующих задач минимизации на сфере.

Пример 9.5.1. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x), \quad F = ([-1, 1], x_1)', \quad t \in [0, 1],$$

и начальное условие

$$x(0) = (0, 0)'.$$

Здесь одно из решений очевидно. Например, можно взять $z_1 = z_1 \in [-1, 1]$, тогда $x_1 = z_1 t$, $z_2 = x_1 = z_1 t$ и $x_2 = 0.5 z_1 t^2$.

$$\text{В этом примере } c(F, \psi) = |\psi_1| + x_1 \psi_2, \quad \frac{\partial c(F, \psi)}{\partial x} = (\psi_2, 0)'.$$

$$\text{Положим } z_1 = (2, x_{1,1})', \quad t \in [0, 1].$$

По формуле (9.6) имеем

$$\ell(\psi, x_1, z_1, t) = 2\psi_1 - |\psi_1| = \psi_1, \quad \psi_1 \geq 0,$$

$$\ell(\psi, x_1, z_1, t) = 3\psi_1, \quad \psi_1 < 0;$$

$$\max_{\psi \in S_2} (2\psi_1 - |\psi_1|) = 1, \quad \text{где } \psi^*(x_1, z_1, t) = (1, 0)',$$

и из (9.7) получаем

$$h(x_1, z_1, t) = 1.$$

“Градиент Гато” функционала $\varphi(z)$ в точке z_1 имеет вид (см. (9.13))

$$\nabla \varphi(z_1) = (1, 0)' - \int_t^1 (0, 0)' d\tau = (1, 0)'.$$

Построим следующую точку $z_2 = (2 - \gamma, x_{2,1})'$.

Вычислим

$$\ell(\psi, x_2, z_2, t) = (2 - \gamma)\psi_1 - |\psi_1| = (1 - \gamma)\psi_1, \quad \psi_1 \geq 0,$$

$$\ell(\psi, x_2, z_2, t) = (3 - \gamma)\psi_1, \quad \psi_1 < 0.$$

Чтобы точка z_2 удовлетворяла рассматриваемому дифференциальному включению, необходимо чтобы $\ell(\psi, x_2, z_2, t) \leq 0$ для всех $\psi \in S_2$ и для всех $t \in [0, T]$, что выполняется, когда $\gamma_1 \in [1, 3]$.

Получаем $z_2 = (2 - \gamma_1, x_{2,1})' = (z_1, x_{2,1})'$, $z_1 \in [-1, 1]$, поэтому на следующей итерации точка

$$x^*(t) := x_2(t) = \int_0^t z_2(\tau) d\tau$$

является точным решением данного примера.

Пример 9.5.2. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x, t), \quad F(x, t) = [0.5xt, 1.5xt], \quad t \in [0, 1], \quad (9.15)$$

и начальное условие

$$x(0) = 1. \quad (9.16)$$

В этом примере $c(F, \psi) = xt(\psi + 0.5|\psi|)$, $\frac{\partial c(F, \psi)}{\partial x} = t(\psi + 0.5|\psi|)$, если $x > 0$. Мы видим, что здесь появляется дополнительное фазовое ограничение, поэтому формально рассматриваемый метод неприменим к данной задаче (так как в постановке рассматриваемой задачи фазовых ограничений нет). Однако метод был успешно применен к этой задаче, так как при выбранной точке z_1 точки x_k удовлетворяют ограничению $x_k > 0$ на всех итерациях.

Положим $z_1 = 1$, тогда $x_1 = t + 1$, $t \in [0, 1]$. По формуле (9.6) имеем

$$\ell(\psi, x_1, z_1, t) = \psi - t(t + 1)(\psi + 0.5|\psi|) = \psi - 1.5t(t + 1)\psi, \quad \psi \geq 0,$$

$$\ell(\psi, x_1, z_1, t) = \psi - t(t + 1)(\psi + 0.5|\psi|) = \psi - 0.5t(t + 1)\psi, \quad \psi < 0;$$

$$\max_{\psi \in S_1} (\psi - t(t + 1)(\psi + 0.5|\psi|)) = 1 - 1.5t(t + 1), \quad t \in [0, 1], \quad \text{где } \psi^*(x_1, z_1, t) = 1.$$

Пусть $t^* \in [0, 1]$ является корнем уравнения $1 - 1.5t(t + 1) = 0$, и из (9.7) получаем

$$h(x_1, z_1, t) = 1 - 1.5t(t + 1), \quad t \in [0, t^*],$$

$$h(x_1, z_1, t) = 0, \quad t \in [t^*, 1].$$

“Градиент Гато” функционала $\varphi(z)$ в точке z_1 имеет вид (см. (9.13))

$$\nabla\varphi(z_1) = 1 - 1.5t(t + 1) - \int_t^{t^*} (1 - 1.5\tau(\tau + 1))1.5\tau d\tau, \quad t \in [0, t^*],$$

$$\nabla\varphi(z_1) = 0_1, \quad t \in [t^*, 1].$$

Во время работы алгоритма на третьей итерации была получена точка

$$x^*(t) := x_3(t) = \begin{cases} 0.5837t^5 - 0.5086t^4 + 0.3914t^3 + 0.6187t^2 + 0.0107t + 1, & t \in [0, t^*], \\ 1.1612 + 0.5t^2, & t \in [t^*, 1], \end{cases}$$

которая является искомым решением этого примера до величины порядка 2×10^{-3} (по функционалу).

На рис. 9.5.2 показаны функции $0.5x^*(t)t$, $1.5x^*(t)t$ и $z^*(t)$. Так как функция $z^*(t)$ лежит “между” функциями $0.5x^*(t)t$ и $1.5x^*(t)t$ при каждом $t \in [0, 1]$, мы видим, что включение (9.15) практически выполнено. (Условие (9.16) автоматически выполняется на каждой итерации.)

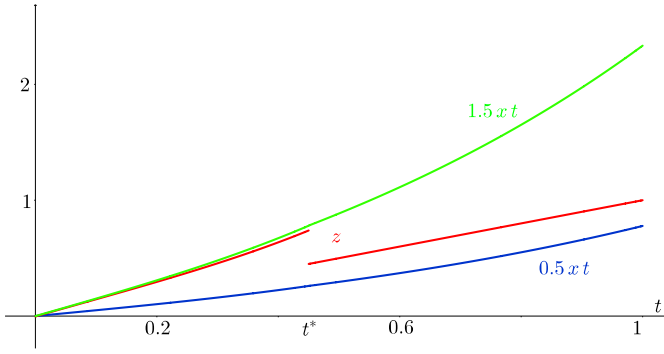


Рис. 9.1: Решение Примера 9.5.2

Пример 9.5.3. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x), \quad F(x) = (x_2, x_1)' + B_2, \quad t \in [0, 1], \quad (9.17)$$

и краевые условия

$$x(0) = (0.5, 0.25)', \quad (9.18)$$

$$x(1) = (1.75, 2)'. \quad (9.19)$$

В этом примере $c(F, \psi) = x_2\psi_1 + x_1\psi_2 + \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}$, $\frac{\partial c(F, \psi)}{\partial x} = (\psi_2, \psi_1)'$.

Положим $z_1 = (2, 1)'$, тогда $x_1 = (0.5 + 2t, 0.25 + t)'$.

По формуле (9.6) имеем

$$\begin{aligned} \ell(\psi, x_1, z_1, t) &= 2\psi_1 + \psi_2 - (0.25 + t)\psi_1 - (0.5 + 2t)\psi_2 - \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} = \\ &= (1.75 - t)\psi_1 + (0.5 - 2t)\psi_2 - \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}, \\ \max_{\psi \in S_2} \left((1.75 - t)\psi_1 + (0.5 - 2t)\psi_2 - \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} \right) &= \\ &= \sqrt{(1.75 - t)^2 + (0.5 - 2t)^2} - 1, \end{aligned}$$

$$\text{где } \psi^*(x_1, z_1, t) = \left(\frac{1.75 - t}{\sqrt{(1.75 - t)^2 + (0.5 - 2t)^2}}, \frac{0.5 - 2t}{\sqrt{(1.75 - t)^2 + (0.5 - 2t)^2}} \right)',$$

и из (9.7) получаем

$$h(x_1, z_1, t) = \sqrt{(1.75 - t)^2 + (0.5 - 2t)^2} - 1.$$

“Градиент Гато” функционала $\varphi(z)$ в точке z_1 имеет вид (см. (9.13))

$$\begin{aligned} \nabla \varphi(z_1) &= \frac{h(x_1, z_1, t)}{\sqrt{(1.75 - t)^2 + (0.5 - 2t)^2}} (1.75 - t, 0.5 - 2t)' - \\ &- \int_t^1 \frac{h(x_1(\tau), z_1(\tau), \tau)}{\sqrt{(1.75 - \tau)^2 + (0.5 - 2\tau)^2}} (0.5 - 2\tau, 1.75 - \tau)' d\tau. \end{aligned}$$

Во время работы алгоритма на 4-й итерации была получена точка

$$x_1^*(t) := x_{4,1}(t) = \begin{cases} 0.5 - 0.0525t^3 + 0.4248t^2 + 0.7192t + 0.0078t^4 - 0.001t^5, & t \in [0, 0.1021], \\ 0.5008 - 0.1707t^3 + 0.7395t^2 + 0.6804t, & t \in [0.1021, 1], \end{cases}$$

$$x_2^*(t) := x_{4,2}(t) = \begin{cases} 0.25 + 0.1424t^3 - 0.0808t^2 + 1.3539t - 0.0022t^4 + 0.0012t^5, & t \in [0, 0.1021], \\ 0.2630 - 0.1027t^3 + 0.6897t^2 + 1.1499t, & t \in [0.1021, 1], \end{cases}$$

которая является искомым решением этого примера до величины порядка 2×10^{-3} (по функционалу).

Перепишем включение (9.17) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + u_2(t), \\ \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} &\leq 1, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

На рис. 9.5.3 показаны функции $x_1^*(t)$ и $x_2^*(t)$. Как мы видим, условие (9.19) практически выполнено. На рис. 9.5.3 также показана функция $\sqrt{u_1^{*2}(t) + u_2^{*2}(t)}$, где $u_1^*(t) = z_1^*(t) - x_2^*(t)$, $u_2^*(t) = z_2^*(t) - x_1^*(t)$. Поскольку $\sqrt{u_1^{*2}(t) + u_2^{*2}(t)} \leq 1$ при каждом $t \in [0, 1]$, мы видим, что включение (9.17) выполнено. (Условие (9.18) автоматически выполняется на каждой итерации.)

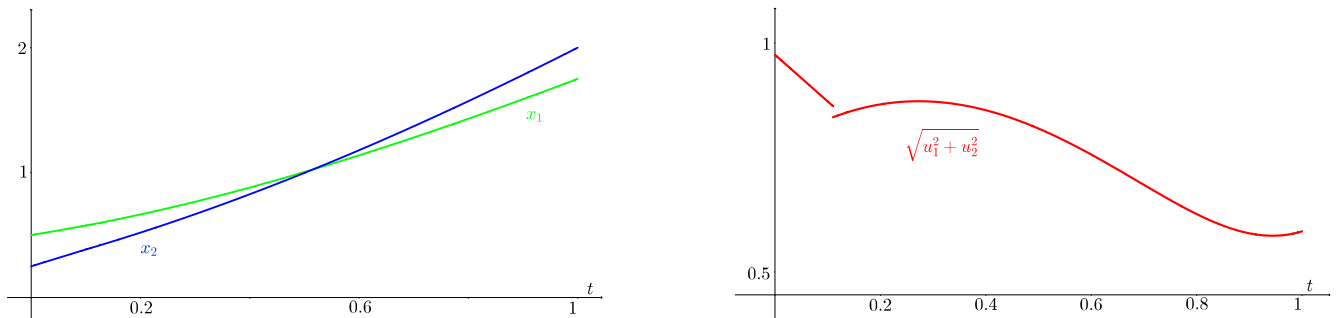


Рис. 9.2: Решение Примера 9.5.3

Пример 9.5.4. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x), \quad F(x) = (x_2^2, 2x_1)' + \mathfrak{D}_2, \quad t \in [0, 1], \quad (9.20)$$

где \mathfrak{D}_n это единичный ромб в \mathbb{R}^n с центром в начале координат

$$\mathfrak{D}_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1 \right\},$$

и с краевыми условиями

$$x(0) = (0, 1)', \quad (9.21)$$

$$x(1) = (1.75, 2)'. \quad (9.22)$$

В этом примере $c(F, \psi) = x_2^2 \psi_1 + 2x_1 \psi_2 + \max\{|\psi_1|, |\psi_2|\}$, $\frac{\partial c(F, \psi)}{\partial x} = (2\psi_2, 2x_2 \psi_1)'$.

Положим $z_1 = (1, 1)'$, тогда $x_1 = (t, 1+t)'$, $t \in [0, 1]$.

По формуле (9.6) имеем

$$\begin{aligned} \ell(\psi, x_1, z_1, t) &= \psi_1 + \psi_2 - (1+t)^2 \psi_1 - 2t \psi_2 - \max\{|\psi_1|, |\psi_2|\} = \\ &= (1 - (1+t)^2) \psi_1 + (1 - 2t) \psi_2 - \max\{|\psi_1|, |\psi_2|\}. \end{aligned}$$

Для поиска вектор-функции $\psi^*(x(t), z(t), t)$, $t \in [0, T]$, использовался метод кодифференциального спуска [180] минимизации соответствующей штрафной функции со штрафным параметром $\lambda = 5$ в точках t_i , $i = \overline{1, 5}$ (т. е. здесь $N = 5$) дискретизации. Во время работы алгоритма на 13-й итерации была получена точка

$$\begin{aligned} x_1^*(t) := x_{13,1}(t) &= \begin{cases} -0.0833t^4 + 0.1666t^3 + 1.3332t, & t \in [0, 0.4901], \\ 0.8103 + 5.3677t^4 - 12.5804t^3 + 11.8697t^2 - 3.7173t, & t \in [0.4901, 1], \end{cases} \\ x_2^*(t) := x_{13,2}(t) &= \begin{cases} 1 + 0.045t^5 + 0.0833t^4 - 0.1666t^3 + 0.417t, & t \in [0, 0.4901], \\ 1.5777 + 2.2506t^4 - 5.2491t^3 + 6.3034t^2 - 2.8826t, & t \in [0.4901, 1], \end{cases} \end{aligned}$$

которая является искомым решением этого примера.

Перепишем включение (9.20) в следующем виде:

$$\dot{x}_1(t) = x_2^2(t) + u_1(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = 2x_1(t) + u_2(t),$$

$$|u_1(t)| + |u_2(t)| \leq 1, \quad t \in [0, 1].$$

На рис. 9.5.4 показаны функции $x_1^*(t)$ и $x_2^*(t)$. Как мы видим, условие (9.22) выполнено. На рис. 9.5.4 также показана функция $|u_1^*(t)| + |u_2^*(t)|$, где $u_1^*(t) = z_1^*(t) - x_2^{*2}(t)$, $u_2^*(t) = z_2^*(t) - 2x_1^*(t)$. Поскольку $|u_1^*(t)| + |u_2^*(t)| \leq 1$ при каждом $t \in [0, 1]$, мы видим, что включение (9.20) выполнено. (Условие (9.21) автоматически выполняется на каждой итерации.) Итак, в примере ограничения удовлетворены точно, поэтому $I(z^*) = 0$.

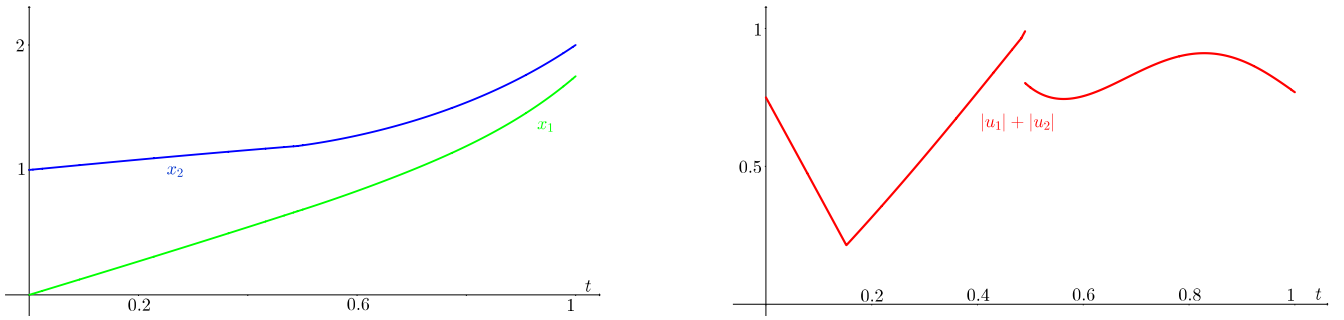


Рис. 9.3: Решение Примера 9.5.4

Теперь рассмотрим примеры реализации предложенного алгоритма для “полноценной” задачи с дифференциальными включениями (при наличии интегрального функционала качества). Во всех трёх примерах было взято значение $\lambda^* = 10$. Вычислительный процесс прерывался на k^* -й итерации в случае $\|\nabla I(z_{k^*})\|_{L_n^2[0,T]} \leq \bar{\varepsilon} = 5 \times 10^{-3}$.

Пример 9.5.5. Имеется дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x), \quad F(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + B_2, \quad t \in [0, 1].$$

Заданы краевые условия

$$x(0) = (0.5, 0.25)', \quad x(1) = (1.75, 2).$$

Требуется найти решение данного дифференциального включения, удовлетворяющее заданным краевым условиям и доставляющее минимум функционалу

$$\mathcal{J}(x) = \int_0^1 x_1^2(t) + x_2^2(t) dt.$$

В данном случае $c(F, \psi) = x_2\psi_1 + x_1\psi_2 + \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}$, $\frac{\partial c(F, \psi)}{\partial x} = (\psi_2, \psi_1)'$.

Положим $z_1 = (2, 1)'$, тогда $x_1 = (0.5 + 2t, 0.25 + t)'$.

Поиск вектор-функции $\psi^*(x(t), z(t), t)$, $t \in [0, T]$, осуществлялся здесь аналитически (точно) исходя из анализа соответствующих задач минимизации на сфере.

Было проведено 13 итераций согласно предложенному алгоритму, в результате чего была построена точка x_{13} (см. рис. 9.5.5), при этом $\mathcal{J}(x_{13}) = 2.219$. Видно, что условие на правом конце практически выполнено. На рис. 9.5.5 использовано обозначение $u_1(t) = z_1(t) - x_2(t)$, $u_2(t) = z_2(t) - x_1(t)$, отсюда видно, что дифф. включение практически выполняется. (Условие на левом конце автоматически выполняется на каждой итерации.)

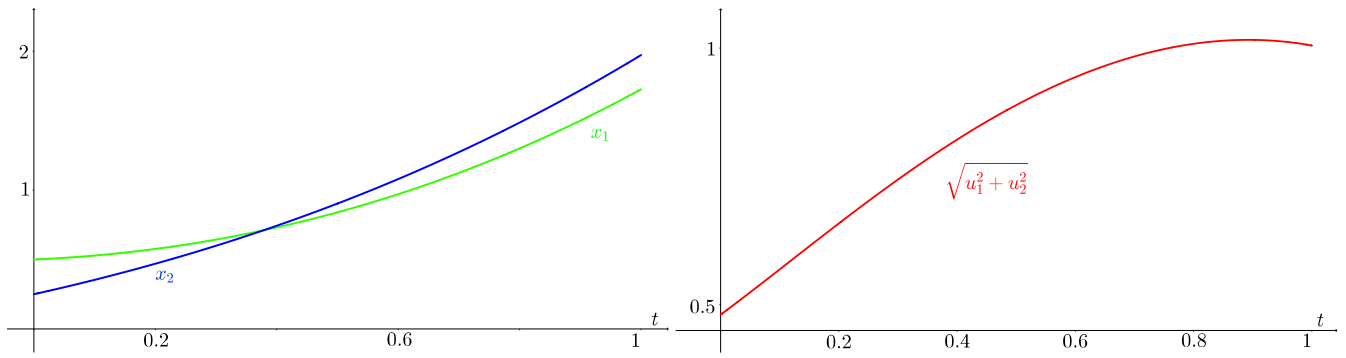


Рис. 9.4: Решение Примера 9.5.5

Данный пример можно решить известными методами, если рассматривать его с позиции теории управления. Эквивалентная этому примеру задача оптимального управления имеет следующий вид.

Нужно найти управление $u \in P_2[0, T]$, которое переводит систему

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + u_2$$

из точки $x(0)$ в точку $x(1)$ (которые заданы) и удовлетворяет ограничению

$$u_1^2(t) + u_2^2(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0, 1].$$

При этом значение функционала

$$\mathcal{J}(x) = \int_0^1 x_1^2(t) + x_2^2(t) dt.$$

должно быть наименьшим.

Оптимальная траектория $x^*(t)$ была найдена с помощью принципа максимума Понтрягина с использованием метода стрельбы для поиска начальных значений сопряжённых переменных [265] с рекомендуемыми там параметрами метода. При этом оказалось $\mathcal{J}(x^*) = 2.195$. Видно, что это значение близко к найденному с помощью предложенного в главе метода (относительная погрешность по функционалу не превышает 1%).

Пример 9.5.6. Имеется дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x), \quad F(x) = \begin{pmatrix} -x_2^2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \Delta_2, \quad t \in [0, 1],$$

где Δ_n — единичный симплекс в \mathbb{R}^n

$$\Delta_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i \leq 1, x_i \geq 0 \forall i = \overline{1, n} \right\}.$$

Задано начальное условие

$$x(0) = (0.5, 0.5)'$$

Требуется найти решение данного дифференциального включения, удовлетворяющее заданному начальному условию и доставляющее минимум функционалу

$$J(z) = x_2(1) = 0.5 + \int_0^1 z_2(t) dt,$$

то есть найти исходящую из заданной начальной точки траекторию включения с наименьшим значением координаты x_2 в конечный момент времени.

В данном случае $c(F, \psi) = -x_2^2\psi_1 + x_1\psi_2 + \max\{0, \psi_1, \psi_2\}$, $\frac{\partial c(F, \psi)}{\partial x} = (\psi_2, -2x_2\psi_1)'$.

Положим $z_1 = (1, 1)'$, тогда $x_1 = (0.5 + t, 0.5 + t)'$.

Для поиска вектор-функции $\psi^*(x(t), z(t), t)$, $t \in [0, T]$, использовался метод кодифференциального спуска [180] минимизации соответствующей штрафной функции со штрафным параметром $\lambda = 5$ в точках t_i , $i = \overline{1, 5}$ (т. е. здесь $N = 5$) дискретизации.

Было проведено 19 итераций согласно предложенному алгоритму, в результате чего была построена точка x_{19} (см. рис. 9.5.6), при этом $J(z_{19}) = 0.835$. На рис. 9.5.6 использовано обозначение $u_1(t) = z_1(t) + x_2^2(t)$, $u_2(t) = z_2(t) - x_1(t)$, отсюда видно, что дифференциальное включение практически выполняется. (Условие на левом конце автоматически выполняется на каждой итерации.)

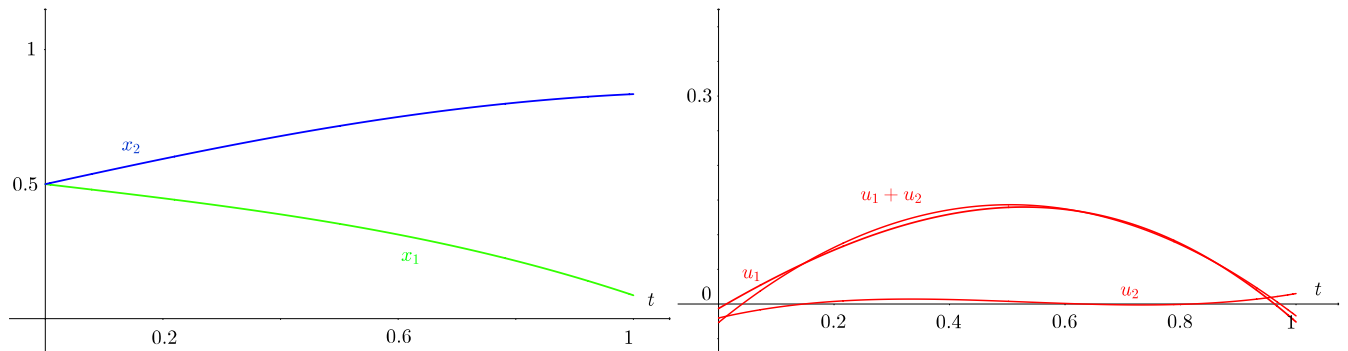


Рис. 9.5: Решение Примера 9.5.6

Данный пример можно решить известными методами, если рассматривать его с позиции теории управления. Эквивалентная этому примеру задача оптимального управления имеет следующий вид.

Нужно найти управление $u \in P_2[0, T]$, которое удовлетворяет ограничению

$$u_1(t) + u_2(t) \leq 1, \quad u_1(t) \geq 0, \quad u_2(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, 1]$$

и переводит систему

$$\dot{x}_1 = -x_2^2 + u_1,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + u_2$$

из точки $x(0)$ (которая задана) в точку с наименьшим значением координаты x_2 в конечный момент времени, то есть доставляет минимум функционалу

$$J(z) = x_2(1) = 0.5 + \int_0^1 z_2(t) dt.$$

Оптимальная траектория $x^*(t)$ была найдена с помощью принципа максимума Понтрягина с использованием метода стрельбы для поиска начальных значений сопряжённых переменных [265] с рекомендуемыми там параметрами метода. При этом оказалось $J(z^*) = 0.803$. Видно, что это значение близко к найденному с помощью предложенного в главе метода (относительная погрешность по функционалу не превышает 4%).

Пример 9.5.7. Имеется дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x), \quad F(x) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + B_2 + \mathfrak{Q}_2, \quad t \in [0, 1],$$

где \mathfrak{Q}_n — единичный квадрат в \mathbb{R}^n

$$\mathfrak{Q}_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leq 1, \forall i = \overline{1, n} \right\}.$$

Задано начальное условие

$$x(0) = (0, 1)'$$

Требуется найти решение данного дифференциального включения, удовлетворяющее заданному начальному условию и доставляющее минимум функционалу

$$J(z) = x_2(1) = 1 + \int_0^1 z_2(t) dt,$$

то есть найти исходящую из заданной начальной точки траекторию включения с наименьшим значением координаты x_2 в конечный момент времени.

В данном случае $c(F, \psi) = -x_2\psi_1 + x_1\psi_2 + \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} + |\psi_1| + |\psi_2|$, $\frac{\partial c(F, \psi)}{\partial x} = (\psi_2, -\psi_1)'$.

Положим $z_1 = (0, -2)'$, тогда $x_1 = (0, 1 - 2t)'$.

Для поиска вектор-функции $\psi^*(x(t), z(t), t)$, $t \in [0, T]$, использовался метод кодифференциального спуска [180] минимизации соответствующей штрафной функции со штрафным параметром $\lambda = 5$ в точках t_i , $i = \overline{1, 5}$ (т. е. здесь $N = 5$) дискретизации.

Была проведена 21 итерация согласно предложенному алгоритму, в результате чего была построена точка x_{21} (см. рис. 9.5.7), при этом $J(z_{21}) = -1.712$. На рис. 9.5.7 сплошная линия есть параметрическая кривая $\{v_1(t) = z_1(t) + x_2(t), v_2(t) = z_2(t) - x_1(t), t \in [0, 1]\}$. Пунктирная линия ограничивает допустимую область $B_2 + \Omega_2$ расположения этой кривой, отсюда видно, что дифф. включение практически выполняется. (Условие на левом конце автоматически выполняется на каждой итерации.)

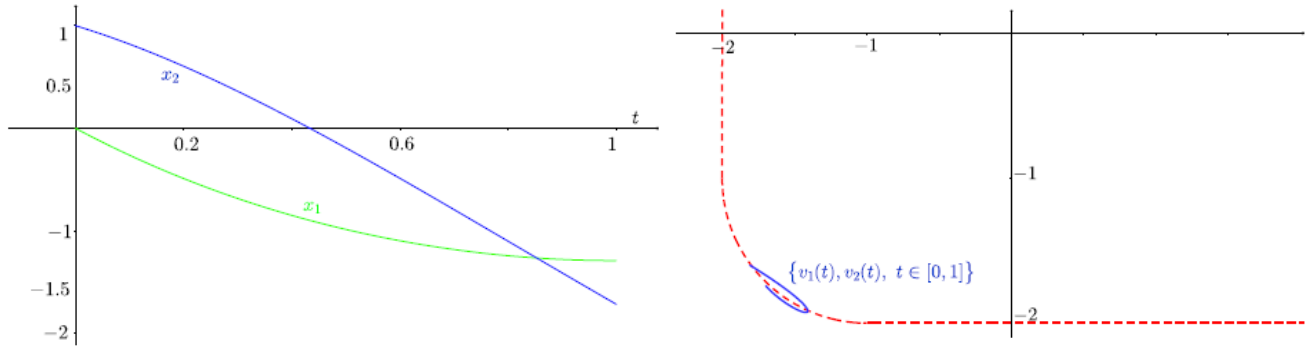


Рис. 9.6: Решение Примера 9.5.7

Данный пример можно решить известными методами, если рассматривать его с позиции теории управления. Эквивалентная этому примеру задача оптимального управления имеет следующий вид.

Нужно найти управление $u \in P_4[0, T]$, которое удовлетворяет ограничению

$$u_1^2(t) + u_3^2(t) \leq 1, \quad |u_2(t)| \leq 1, \quad |u_4(t)| \leq 1 \quad \forall t \in [0, 1]$$

и переводит систему

$$\dot{x}_1 = -x_2 + u_1 + u_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + u_3 + u_4$$

из точки $x(0)$ (которая задана) в точку с наименьшим значением координаты x_2 в конечный момент времени, то есть доставляет минимум функционалу

$$J(z) = x_2(1) = 1 + \int_0^1 z_2(t) dt.$$

Оптимальная траектория $x^*(t)$ была найдена с помощью принципа максимума Понтрягина с использованием метода стрельбы для поиска начальных значений сопряжённых переменных [265] с рекомендуемыми там параметрами метода. При этом оказалось $J(x^*) = -1.761$. Видно, что это значение близко к найденному с помощью предложенного в главе метода (относительная погрешность по функционалу не превышает 3%).

9.6 Примеры наиболее эффективного применения метода

В данном разделе рассмотрим примеры задач, в которых разрабатываемый подход оказывается особенно эффективным или имеет преимущества по сравнению с классическими методами. Далее будет приведён “список” таких задач, для каждой из них идёт общее описание задачи и преимуществ рассматриваемого метода, и дан её конкретный пример.

Рассмотрим управляемую систему, описываемую некоторым дифференциальным уравнением $\dot{x} = f(x, u, t)$ с заданными краевыми условиями. Считаем, что область управления зависит не только от времени, но и от фазовых координат, тогда имеем многозначное отображение $F(x, t) = \left\{ f(x, u, t) \mid u \in U(x, t), t \in [0, T] \right\}$. Несмотря на то, что с позиции теории управления переменная (по фазовым переменным) область управления $U(x, t)$ существенно усложнит задачу, с точки зрения дифференциальных включений получаем такую же по форме постановку задачи, что и в случае не зависящей от x области управления. Конечно, для возможности применения предложенного в данной главе алгоритма для решения полученной задачи при этом нужно предположить, что наложенные в постановке задачи условия на опорную функцию множества, стоящего в правой части дифференциального включения, остаются в такой ситуации выполненными (и что выполнены другие условия основной постановки исходной задачи).

Пример 9.6.1. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = u, \quad t \in [0, 1]$$

с краевыми условиями

$$x(0) = 1, \quad x(1) = 1.5$$

и множеством управлений

$$U(x, t) = \left\{ u \in P_1[0, 1] \mid 0.5x^2t \leq u \leq 1.5x^2t \right\}.$$

Перепишем её как дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x, t), \quad F(x, t) = \left[0.5x^2t, 1.5x^2t \right], \quad t \in [0, 1], \quad (9.23)$$

и краевые условия

$$x(0) = 1, \quad x(1) = 1.5. \quad (9.24)$$

В этом примере $c(F, \psi) = x^2t(\psi + 0.5|\psi|)$, $\frac{\partial c(F, \psi)}{\partial x} = 2xt(\psi + 0.5|\psi|)$.

Возьмём начальную точку $z_1 = 1$, а тогда $x_1 = 1 + t$.

Поиск вектор-функции $\psi^*(x(t), z(t), t)$, $t \in [0, T]$, осуществлялся здесь аналитически (точно) исходя из анализа соответствующих задач минимизации на сфере. Применяя алгоритм главы, на 3-й итерации получаем точку, которая является решением этого примера:

$$x^*(t) := x_3(t) = \begin{cases} 1 + 0.0554t^4 + 0.2001t^3 + 0.2793t^2, & t \in [0, 0.44], \\ 0.5918t^3 - 0.30123t^2 + 0.2289t + 0.9809, & t \in [0.44, 1]. \end{cases}$$

На рис. 9.6.1 изображены функции $0.5(x^*(t))^2t$, $1.5(x^*(t))^2t$ и $z^*(t)$. Поскольку функция $z^*(t)$ лежит “между” функциями $0.5(x^*(t))^2t$ и $1.5(x^*(t))^2t$ в каждый момент $t \in [0, 1]$, видно, что включение (9.23) удовлетворено. Краевые условия (9.24) также имеют место, в чём легко убедиться, вычислив значения $x_3(0)$ и $x_3(1)$. Итак, в примере ограничения удовлетворены точно, поэтому $I(z^*) = 0$.

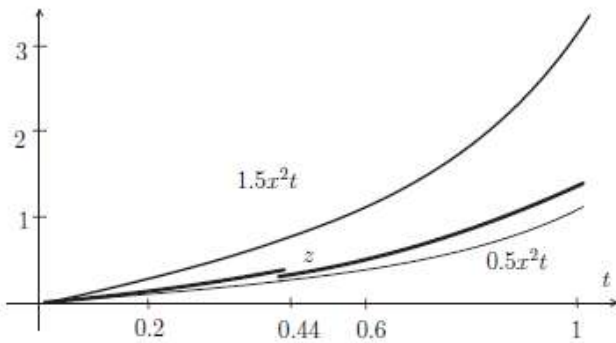


Рис. 9.7: Решение Примера 9.6.1

Дифференциальные включения часто оказываются полезными при описании разрывных систем. В связи с этим откажемся теперь от предположения непрерывной дифференцируемости и даже просто непрерывности правой части $f(x, u, t)$ по фазовым переменным x . Несмотря на то, что функция $f(x, u, t)$ теперь даже не является непрерывной по x , оказывается, что для многозначного отображения $F(x, t) = \{f(x, u, t) \mid u \in U(x, t), t \in [0, T]\}$ опорная функция $c(F(x, t), \psi)$ может обладать непрерывной производной по фазовым координатам, как это и предполагается в постановке задачи. Представляется, что в общем случае разрывные системы устроены достаточно сложно, чтобы заранее можно было сказать, какой должна быть структура исходной разрывной системы ОДУ, чтобы указанный только что случай имел место. Этот вопрос ещё требует тщательного исследования в будущем и представляется перспективным с точки зрения исследования некоторых классов задач с разрывными системами. Однако нетрудно привести пример, когда это действительно так, и тогда предлагаемый в главе подход позволяет строить конкретные решения таких задач.

Пример 9.6.2. Рассмотрим на заданном конечном промежутке $[0, T]$ систему

$$\dot{x}_1 = \omega(x_2)u_1,$$

$$\dot{x}_2 = \omega(x_2)u_2$$

с краевыми условиями

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T.$$

При этом считаем, что $u(t) \in B_2$ при $t \in [0, T]$, а функция $\omega(x_2)$ устроена следующим образом:

$$\begin{cases} \omega(x_2) = -1, & \text{если } x_2 < 0, \\ \omega(x_2) = 1, & \text{если } x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Таким образом, правая часть системы оказывается разрывной по фазовым переменным.

Несмотря на это, получающееся при переписывании этой системы дифференциальное включение с заданными краевыми условиями оказывается очень простым:

$$\dot{x} \in F(x, t), \quad F(x, t) = B_2, \quad t \in [0, T], \quad (9.25)$$

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T. \quad (9.26)$$

Здесь опорная функция $c(F, \psi) = \|\psi\|_{\mathbb{R}^2} = 1$, и $\frac{\partial c(F, \psi)}{\partial x} = 0$, поэтому при решении задачи (9.25), (9.26) с использованием алгоритма главы получаемые формулы будут иметь очень простой вид.

Как известно [100], при адекватном описании процессов, задаваемых системами с разрывными правыми частями, возникает необходимость обобщения принятого в классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений определения решения. Обсудим [100], [114] один из классических вариантов такого определения (по Филиппову). На конечном интервале времени $[0, T]$ рассмотрим систему $\dot{x} = f(x, u_1(x, t), \dots, u_m(x, t), t)$, в которой вектор-функция $f(x, u_1, \dots, u_m, t)$ непрерывна на своей области определения по всем своим аргументам, а вектор-функции $u_i(x, t)$ разрывны на множествах $\mathcal{S}_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid s_i(x) = 0\}$, $i = \overline{1, m}$ соответственно. В каждой точке (x, t) разрыва вектор-функции $u_i(x, t)$ замкнутое множество $U_i(x, t)$, $i = \overline{1, m}$, должно быть определено. Это набор возможных значений переменной u_i функции $f(x, u_1, \dots, u_m, t)$, $i = \overline{1, m}$. Обозначим $F(x, t) = f(x, u_1, \dots, u_m, t)$ множество значений функции $f(x, u_1, \dots, u_m, t)$ при фиксированных переменных x, t , когда u_1, \dots, u_m пробегает множества $U_1(x, t), \dots, U_m(x, t)$ соответственно. Тогда решения этого дифференциального включения принимаются за решения исходного дифференциального уравнения с разрывной

правой частью. В физических системах множества $U_i(x, t)$, $i = \overline{1, m}$, обычно соответствуют различным блокам и предполагаются выпуклыми. В каждой точке (x, t) разрыва вектор-функции $u_i(x, t)$ множество $U_i(x, t)$ также должно содержать все предельные точки всех последовательностей $v_k \in U_i(x_k, t_k)$, $k = 1, 2, \dots$, $i = \overline{1, m}$, где $x_k \rightarrow x$ и $t_k \rightarrow t$ при $k \rightarrow \infty$. Другие общие определения решений разрывных систем см. в [100], [452].

Пример 9.6.3. Рассмотрим на заданном конечном промежутке $[0, T]$ систему

$$\dot{x}_1 = x_1 + \text{sign } x_1,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + \text{sign } x_1$$

с краевыми условиями

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T.$$

При этом считается, что в реальной физической системе функция $u_1(x, t) := \text{sign } x_1$ реализуется при помощи реле и при $s(x) = x_1 = 0$ (то есть при $x \in \mathcal{S}_1$) может принимать любое значение из множества $U_1(x, t) := [-1, 1]$. Предположим, что начальная точка x_0 не находится на поверхности разрыва \mathcal{S}_1 . Вне множества \mathcal{S}_1 правая часть исходной системы есть однозначная функция, поэтому решение может быть найдено стандартными методами решения ОДУ. Пусть в некоторый момент времени $t^* \in (0, 1)$ решение этой системы попадает на поверхность разрыва \mathcal{S}_1 . В реально реализуемых физических системах естественна ситуация, когда решение, попав на поверхность разрыва в некоторый момент времени, будет продолжать оставаться [100] на ней до конца всего рассматриваемого промежутка. Поэтому, если имеется условие на конечное положение объекта, то его в такой ситуации естественно считать принадлежащим поверхности разрыва: $x_T = (0, x_{T,2})$, где значение $x_{T,2}$ задано. На множестве \mathcal{S}_1 решение исходной системы по только что введённому определению есть решение дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(x, t), \quad F(x, t) = (0, x_2 + [-1, 1])', \quad t \in [t^*, 1] \quad (9.27)$$

с краевыми условиями

$$x(t^*) = (0, x_{t^*,2}), \quad x(T) = (0, x_{T,2}), \quad (9.28)$$

где значение $x_{t^*,2}$ однозначно определяется из решения исходной системы до попадания на поверхность разрыва. Заметим, что решение этого включения автоматически удовлетворяет условию $x_1 = 0$. Таким образом, получили задачу (9.27), (9.28), которая укладывается в постановку задачи данной главы.

Рассмотрим линейную нестационарную интервальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + g(t), \quad t \in [0, T], \quad (9.29)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} [\underline{a}_{11} \ \bar{a}_{11}] & [\underline{a}_{12} \ \bar{a}_{12}] & \dots & [\underline{a}_{1n} \ \bar{a}_{1n}] \\ [\underline{a}_{21} \ \bar{a}_{21}] & [\underline{a}_{22} \ \bar{a}_{22}] & \dots & [\underline{a}_{2n} \ \bar{a}_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{a}_{n1} \ \bar{a}_{n1}] & [\underline{a}_{n2} \ \bar{a}_{n2}] & \dots & [\underline{a}_{nn} \ \bar{a}_{nn}] \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} [\underline{g}_1(t) \ \bar{g}_1(t)], \\ [\underline{g}_2(t) \ \bar{g}_2(t)], \\ \dots \\ [\underline{g}_n(t) \ \bar{g}_n(t)] \end{pmatrix} \quad (9.30)$$

с краевыми условиями

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T. \quad (9.31)$$

В формуле (9.30) $\underline{a}_{ij}(t)$ и $\bar{a}_{ij}(t)$, $\underline{a}_{ij}(t) \leq \bar{a}_{ij}(t) \forall t \in [0, T]$, $i, j = \overline{1, n}$, заданные непрерывные на $[0, T]$ функции, и $\underline{g}_i(t)$ и $\bar{g}_i(t)$, $\underline{g}_i(t) \leq \bar{g}_i(t) \forall t \in [0, T]$, $i = \overline{1, n}$, заданные непрерывные на $[0, T]$ функции. В дальнейшем для краткости будем иногда писать $\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}, \underline{g}_i, \bar{g}_i$ вместо $\underline{a}_{ij}(t), \bar{a}_{ij}(t), \underline{g}_i(t), \bar{g}_i(t)$ соответственно, $i, j = \overline{1, n}$.

Замечание 9.6.1. Поставленную задачу можно рассматривать как следующую задачу управления. Требуется найти “управления” $u_{ij}(t) \in P_1[0, T]$ ($\underline{a}_{ij}(t) \leq u_{ij}(t) \leq \bar{a}_{ij}(t) \forall t \in [0, T]$, $i, j = \overline{1, n}$) и $v_i(t) \in P_1[0, T]$ ($\underline{g}_i(t) \leq v_i(t) \leq \bar{g}_i(t) \forall t \in [0, T]$, $i = \overline{1, n}$), которые переводят систему (9.29) (с матрицей $A(t)$, состоящей из элементов $u_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, n}$, и с вектором $g(t)$, состоящий из элементов $v_i(t)$, $i = \overline{1, n}$) из начальной точки в заданное конечное состояние (см. (9.31)) за время T . Однако в такой постановке требуется найти $n^2 + n$ функций управления. С другой стороны, из метода, описанного в данной главе, будет видно, что если записать систему этой задачи в виде (9.29), (9.30) и применить предложенный метод, то вычислительные затраты “пропорциональны” лишь размерности n рассматриваемой системы.

Перепишем систему (9.29) в форме соответствующего дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(x, t), \quad t \in [0, T], \quad (9.32)$$

здесь

$$F(x, t) = A(t)x + g(t).$$

Очевидно, что отображение $F(x, t)$ непрерывно на своей области определения и что множество $F(x, t)$ является выпуклым компактом из \mathbb{R}^n для каждого момента времени $t \in [0, T]$ и для каждой фазовой точки $x \in \mathbb{R}^n$.

Теперь мы можем переформулировать исходную задачу следующим образом. Требуется найти вектор-функцию $x^* \in C_n[0, T]$ (с производной $z^* \in P_n[0, T]$), которая является решением дифференциального включения (9.32) и удовлетворяет граничным условиям (9.31).

В этой задаче мы также можем явно вычислить опорную функцию множества F . Для этого заметим, что множество F является n -мерным параллелепипедом с центром $c(x) = (c_1(x), \dots, c_n(x))'$:

$$c_i(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\underline{a}_{ij} + \bar{a}_{ij}}{2} x_j + \frac{\underline{g}_i + \bar{g}_i}{2}$$

и с полусторонами

$$r_i(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\bar{a}_{ij} - \underline{a}_{ij}}{2} |x_j| + \frac{\bar{g}_i - \underline{g}_i}{2}.$$

Тогда опорная функция множества F может быть выражена [143] по формуле

$$c(F(x, t), \psi) = \sum_{i=1}^n c_i(x) \psi_i + \sum_{i=1}^n r_i(x) |\psi_i|.$$

Мы видим, что опорная функция множества F является непрерывно дифференцируемой по фазовым координатам x , если $x_i \neq 0 \forall i = \overline{1, n}$.

В этой задаче сделаем следующее предположение. Пусть координата $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, $t \in [0, T]$, обращается в нуль только в конечное число моментов времени $t_{ij} \in [0, T]$, $i = \overline{1, n}$, на каждой итерации реализации описанного алгоритма (мы предполагаем, что для искомого решения x^* это свойство также выполняется). Тогда можно непосредственно проверить, что метод применим к этой задаче.

Замечание 9.6.2. Сделанное предположение, по-видимому, не является обременительным, так как оно нарушается, например, в случае, когда существует такая “координата” $x_{\bar{i}}$, $\bar{i} \in \{1, \dots, n\}$, которая остаётся в тождественно нулевой позиции (и имеет нулевую “скорость”) на некотором интервале $[t_1, t_2] \subset [0, T]$, $t_2 > t_1$. Такой случай не представляется естественным для управляемых систем, рассматриваемых на конечном интервале $[0, T]$.

Чтобы дополнительно обосновать естественность сделанного предположения, получим также некоторые достаточные условия в важных частных случаях, когда эта ситуация заведомо не возникает при $n = 1$ и $n = 2$ для однородных уравнений.

Рассмотрим случай $n = 1$.

Имеем уравнение

$$\dot{x}(t) = [\underline{a}_{11}(t) \bar{a}_{11}(t)] x(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, T].$$

Здесь явное решение это $x(t) = x(0) \exp\left(\int_0^t u(\tau) d\tau\right) \neq 0 \forall t \in [0, T]$, если $x(0) \neq 0$ (где $u(t) \in [\underline{a}_{11}(t) \bar{a}_{11}(t)] \forall t \in [0, T]$).

Рассмотрим случай $n = 2$.

Предположим, что $x_1(t) = 0 \forall t \in [t_1, t_2] \subset [0, T]$, $t_2 > t_1$. Тогда $\forall t \in [t_1, t_2]$ имеем

$$0 = [\underline{a}_{12}(t) \bar{a}_{12}(t)]x_2(t), \quad x_1(0) = x_{0,1},$$

$$\dot{x}_2(t) = [\underline{a}_{22}(t) \bar{a}_{22}(t)]x_2(t), \quad x_2(0) = x_{0,2}.$$

Если существует такая точка $t^* \in [t_1, t_2]$, что $0 \notin [\underline{a}_{12}(t^*) \bar{a}_{12}(t^*)]$, тогда из первого уравнения заключаем, что $x_2(t^*) = 0$. Рассматриваемое (второе) линейное однородное уравнение имеет нулевое “начальное” условие, поэтому его решение тождественно равно нулю на всём отрезке: $x_2(t) = 0 \forall t \in [t_1, t_2]$. Но в таком случае мы имеем $x_1(t_1) = 0, x_2(t_1) = 0$, поэтому если мы рассмотрим исходную систему на всём интервале $[0, T]$ с этим “начальным” условием, видно, что у неё имеется единственное решение $x_1(t) = 0, x_2(t) = 0 \forall t \in [0, T]$, что невозможно, если $x_{0,1}^2 + x_{0,2}^2 \neq 0$.

Рассуждая совершенно аналогично в следующем случае: $x_2(t) = 0 \forall t \in [t_3, t_4] \subset [0, T]$, $t_4 > t_3$ (предположим, что существует такая точка $t^{**} \in [t_3, t_4]$, что $0 \notin [\underline{a}_{21}(t^{**}) \bar{a}_{21}(t^{**})]$), приходим к аналогичному заключению (что это также невозможно, если $x_{0,1}^2 + x_{0,2}^2 \neq 0$).

Пример 9.6.4. На отрезке $[0, 1]$ рассмотрим интервальную систему

$$\dot{x}_1 = -x_1 + [t, 2t]x_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + [-t^2, 0],$$

Имеются краевые условия

$$x(0) = (2, 3)', \quad x(1) = (1.5, 1)'$$

В этом примере

$$c(F, \psi) = (-x_1 + 1.5tx_2)\psi_1 + (x_1 - 2x_2 - 0.5t^2)\psi_2 + 0.5t|x_2||\psi_1| + 0.5t^2|\psi_2|.$$

Положим $z^1 = (1, 1)'$, тогда $x^1 = (2 + t, 3 + t)'$.

Для поиска вектор-функции $\psi^*(x(t), z(t), t)$, $t \in [0, T]$, использовался метод кодифференциального спуска [180] минимизации соответствующей штрафной функции со штрафным параметром $\lambda = 5$ в точках t_i , $i = \overline{1, 5}$ (т. е. здесь $N = 5$) дискретизации. Применяя алгоритм главы, на 7-й итерации получаем точку

$$x_1^*(t) := x_{7,1}(t) = 2 - 1.0002t^3 + 2.4732t^2 - 1.9937t - 0.0253t^4 + 0.0425t^5 + 0.0014t^6 + 0.0022t^7,$$

$$x_2^*(t) := x_{7,2}(t) = 3 - 1.1473t^3 + 3.003t^2 - 4.0125t + 0.2522t^4 - 0.1034t^5 + 0.0125t^6 - 0.0044t^7$$

которая является искомым решением примера с точностью до величины порядка 5×10^{-5} (по функционалу).

См. рис. 9.6.4, а), б). Краевые условия для траектории x^* выполнены, в чём легко убедиться, вычислив значения $x_7(0)$ и $x_7(1)$. См. рис. 9.6.4, с), d). Траектории также удовлетворяют интервальной системе.

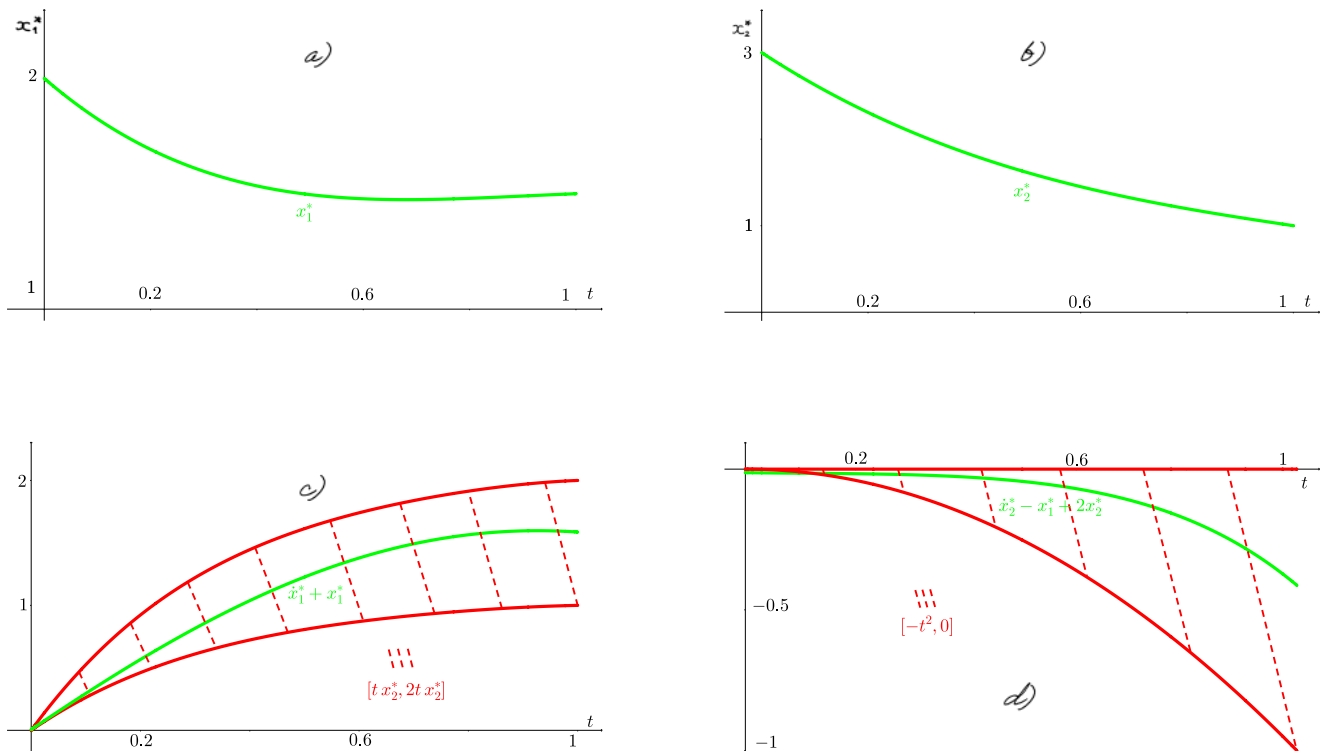


Рис. 9.8: Решение Примера 9.6.4

Пример 9.6.5. На отрезке $[0, 1]$ рассмотрим интервальную систему

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = [-1, -0.5]x_1 + [-2, -1]x_2 - 9.8.$$

Имеется только начальное условие

$$x(0) = (1, 1)'$$

Требуется найти оба решения этого дифференциального включения, удовлетворяющие заданному начальному условию, чтобы как минимизировать, так и максимизировать функционал

$$\mathcal{J}(x) = \int_0^1 \frac{x_2^2(t)}{2} dt.$$

Эта задача имеет практическое применение для оценки кинетической энергии груза, подвешенного на пружине. Физическая интерпретация этой задачи состоит в следующем. Рассмотрим груз, подвешенный на идеальной пружине в поле силы тяжести. Помимо силы тяжести и силы пружины, на груз действует сила трения $\beta \dot{y}$ со стороны окружающей среды,

которую мы считаем пропорциональной скорости \dot{y} , где β — коэффициент сопротивления среды. Второй закон Ньютона для груза (проекция на вертикальную ось y) имеет вид:

$$m\ddot{y} = -ky - \beta\dot{y} - mg,$$

здесь m — масса груза; k — жёсткость пружины; y — координата, отсчитываемая от состояния, при котором пружина в этой колебательной системе не растянута. Предположим теперь, что жёсткость пружины k , а также коэффициент сопротивления среды β являются функциями времени, которые могут изменяться (но лежат в известных интервалах в каждый момент времени) в зависимости от изменений среды и свойств пружины (например, при нагреве и т. д.). Представляет интерес найти минимальное и максимальное возможные в этих условиях значения средней кинетической энергии $\frac{m\dot{y}^2}{2}$ системы за рассматриваемый интервал времени. Если положить $m = 1$, $g = 9.8$, $k(t) \in [0.5, 1]$, $\beta(t) \in [1, 2]$, $t \in [0, 1]$ и обозначить $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, то мы получим дифференциальное включение и функционал качества, приведённые выше.

В этом примере имеем

$$c(F, \psi) = x_2\psi_1 + (-0.75x_1 - 1.5x_2 - 9.8)\psi_2 + (0.25|x_1| + 0.5|x_2|)|\psi_2|.$$

Положим $z^1 = (1, 0)'$, тогда $x^1 = (1 + t, 1)'$.

Положим $\lambda = 85$. Вычислительный процесс прерывался на k^* -й итерации в случае $\|\nabla I(z_{k^*})\|_{L_n^2[0, T]} \leq \bar{\varepsilon} = 3 \times 10^{-2}$. Для поиска вектор-функции $\psi^*(x(t), z(t), t)$, $t \in [0, T]$, использовался метод кодифференциального спуска [180] минимизации соответствующей штрафной функции со штрафным параметром $\lambda = 5$ в точках t_i , $i = \overline{1, 5}$ (т. е. здесь $N = 5$) дискретизации. Результаты в этом примере выписаны с точностью до 6-го знака после запятой.

А. Минимизируем функционал $I(z)$. Применяя алгоритм главы, на 15-й итерации получаем точку

$$\begin{aligned} x_1^*(t) := x_{15,1}(t) = & 1 - 0.001341t^5 - 0.219599t^4 + 1.801792t^3 - \\ & - 5.645627t^2 + 0.006182t^6 + t, \quad 0 \leq t \leq 0.092, \\ & 0.998539 + 0.531280t^5 - 1.741569t^4 + 4.040669t^3 - 6.193228t^2 - \\ & - 0.049752t^6 + 1.048461t - 0.065932t^7 + 0.031599t^8, \quad 0.092 < t \leq 0.624, \\ & 0.061205t^6 + 3.775047t^3 - 6.51987t^2 - 0.975091t^4 - \\ & - 0.004879t^8 + 0.931305 + 1.344730t, \quad 0.624 < t \leq 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2^*(t) := x_{15,2}(t) &= 1 + 0.037092t^5 - 0.006704t^4 - 0.878399t^3 + \\
&+ 5.405375t^2 - 11.291254t, \quad 0 \leq t \leq 0.092, \\
&0.252796t^7 - 0.461527t^6 - 0.298511t^5 + 2.656402t^4 - 6.966278t^3 + \\
&+ 12.122007t^2 - 12.386457t + 1.048461, \quad 0.092 < t \leq 0.624, \\
&- 0.039036t^7 - 13.03974t + 0.367231t^5 - 3.900365t^3 + \\
&+ 11.325142t^2 + 1.344730, \quad 0.624 < t \leq 1,
\end{aligned}$$

которая является по крайней мере (приближённо) стационарной точкой в этой задаче.

См. рис. 9.6.5, (А). Начальное условие для траектории x^* выполнено, в чём легко убедиться, вычислив значение $x_{15}(0)$. Из рис. 9.6.5, (А) видно, что траектория практически удовлетворяет интервальному уравнению системы. При этом $\mathcal{J}(x^*) = 7.711839$.

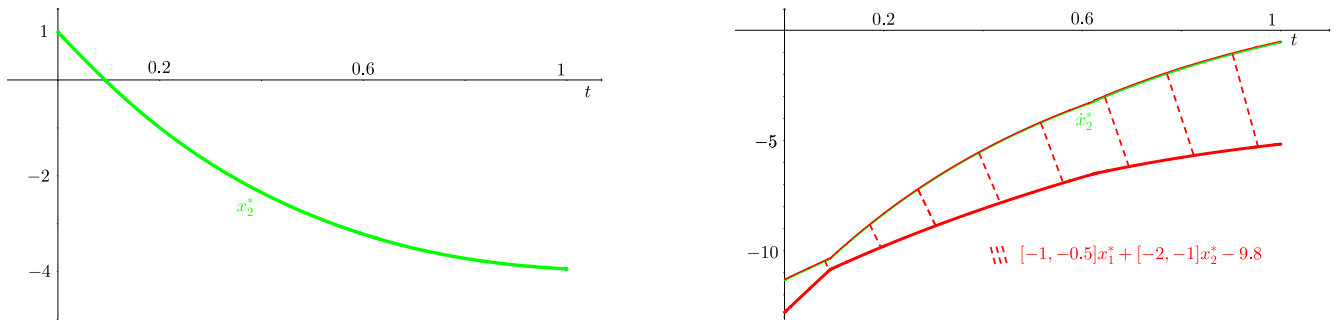


Рис. 9.9: Решение Примера 9.6.5 (А)

Б. Максимизируем функционал $I(z)$. Применяя алгоритм главы, на 32-й итерации получаем точку

$$\begin{aligned}
x_1^*(t) := x_{32,1}(t) &= 1 - 6.40899t^2 + 4.100813t^3 - 1.555853t^4 + 0.618022t^5 + t, \quad 0 \leq t \leq 0.0843, \\
&1.001158 - 0.099432t^4 - 5.893454t^2 + 1.830437t^3 + 0.295029t^5 + \\
&+ 0.95809t - 0.203586t^8 + 0.554507t^7 - 0.618585t^6, \quad 0.0843 < t \leq 0.562, \\
&1.050245 - 0.25779t^4 - 5.571737t^2 - 0.009198t^7 + 1.847321t^3 + \\
&+ 0.020355t^6 + 0.001292t^8 + 0.720453t, \quad 0.562 < t \leq 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2^*(t) := x_{32,2}(t) &= 1 + 3.090111t^4 - 6.223412t^3 + 12.30244t^2 - 12.81798t, \quad 0 \leq t \leq 0.0843, \\
&0.95809 + 3.881548t^6 - 1.628687t^7 - 3.711512t^5 + 1.475147t^4 - \\
&- 0.397728t^3 + 5.491312t^2 - 11.786907t, \quad 0.0843 < t \leq 0.562, \\
&0.720453 - 0.064387t^6 + 0.010339t^7 + 0.122129t^5 - 11.143474t - \\
&- 1.03116t^3 + 5.541962t^2, \quad 0.562 < t \leq 1,
\end{aligned}$$

которая является по крайней мере (приближённо) стационарной точкой в этой задаче.

См. рис. 9.6.5, (Б). Начальное условие для траектории x^* выполнено, в чём легко убедиться, вычислив значение $x_{32}(0)$. Из рис. 9.6.5, (Б) видно, что траектория практически удовлетворяет интервальному уравнению системы. При этом $\mathcal{J}(x^*) = 14.085116$.

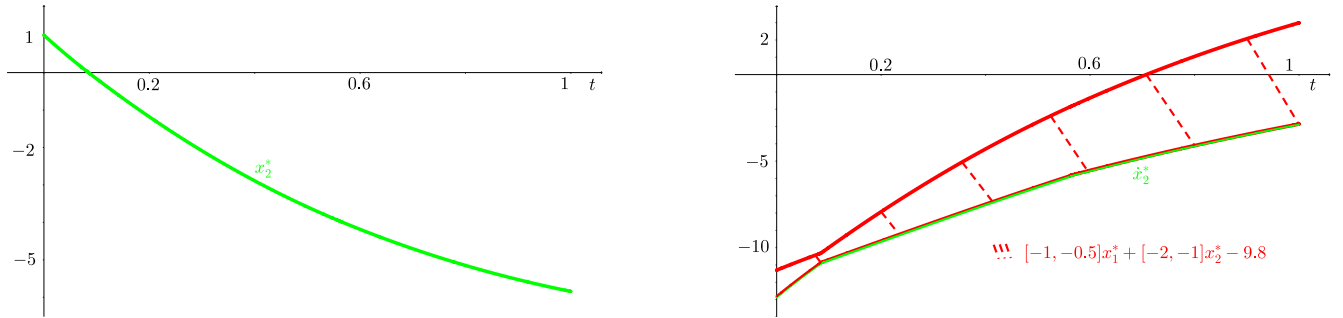


Рис. 9.10: Решение Примера 9.6.5 (Б)

Итак, мы получили нижнюю и верхнюю границы изменения средней кинетической энергии системы при возможном изменении параметров k и β в заданных интервалах: имеем $7.711839 \leq \mathcal{J}(x) \leq 14,085116$.

Рассмотрим случай, когда правая часть дифференциального включения представляет собой сумму нескольких выпуклых множеств. Для простоты изложения опишем случай только с двумя множествами. Рассмотрим систему $\dot{x} \in F(x, t) = F_1(x, t) + F_2(x, t)$, где многозначные отображения $F_1(x, t), F_2(x, t)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и многозначное отображение $F(x, t)$ в постановке задачи главы. Как обычно, считаем, что заданы начальное условие и, возможно, условие на правом конце. Пользуясь простой формулой для опорной функции суммы двух выпуклых компактов, имеем $c(F(x, t), \psi) = c(F_1(x, t), \psi) + c(F_2(x, t), \psi)$.

Пример 9.6.6. Имеется дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x), \quad F(x) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + B_2 + \Omega_2, \quad t \in [0, 1]. \quad (9.33)$$

Заданы краевые условия

$$x(0) = (0, 1)', \quad x(1) = (-1.25, -1.5)'. \quad (9.34)$$

В данном случае

$$c(F, \psi) = -x_2\psi_1 + x_1\psi_2 + \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} + |\psi_1| + |\psi_2|, \quad \frac{\partial(F, \psi)}{\partial x} = (\psi_2, -\psi_1)'.$$

Возьмём начальную точку $z_1 = (0, -2)'$, а тогда $x_1 = (0, 1 - 2t)'$.

Для поиска вектор-функции $\psi^*(x(t), z(t), t)$, $t \in [0, T]$, использовался метод кодифференциального спуска [180] минимизации соответствующей штрафной функции со штрафным параметром $\lambda = 5$ в точках t_i , $i = \overline{1, 5}$ (т. е. здесь $N = 5$) дискретизации. Применяя алгоритм главы, на 5-й итерации получаем точку, которая является решением этого примера:

$$x^*(t) := x_5(t) = \begin{pmatrix} 0.1965t^4 - 0.6125t^3 + 1.9355t^2 - 2.7695t \\ -0.1979t^4 + 1.1887t^3 - 2.1015t^2 - 1.3893t + 1 \end{pmatrix}.$$

На рис. 9.6.6 сплошная линия есть параметрическая кривая $\{u_1(t) = z_1^*(t) + x_2^*(t), u_2(t) = z_2^*(t) - x_1^*(t), t \in [0, 1]\}$. Пунктирная линия ограничивает допустимую область $B_2 + \Omega_2$ расположения этой кривой, отсюда видно, что дифференциальное включение (9.33) выполняется. Краевые условия (9.34) также имеют место, в чём легко убедиться, вычислив значения $x_5(0)$ и $x_5(1)$. В данном примере решение удовлетворяет ограничениям точно, поэтому имеем $I(z^*) = 0$.

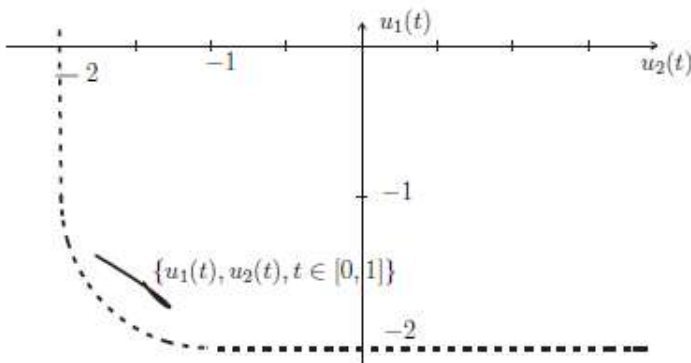


Рис. 9.11: Решение Примера 9.6.6

Рассмотрим случай, когда правая часть дифференциального включения представляет собой пересечение нескольких выпуклых множеств. Для простоты изложения опишем случай только с двумя множествами. Рассмотрим систему $\dot{x} \in F(x, t) = F_1(x, t) \cap F_2(x, t)$, где многозначные отображения $F_1(x, t), F_2(x, t)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и

многозначное отображение $F(x, t)$ в постановке задачи главы. Как обычно, считаем, что заданы начальное условие и, возможно, условие на правом конце. Здесь также можно искать опорную функцию этого множества по известным формулам, однако вместо её нахождения поступим несколько иначе, а именно рассмотрим задачу минимизации функционала

$$I(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \chi(z),$$

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{2} \int_0^T h_1^2(x(t), z(t), t) dt, \quad \varphi_2(z) = \frac{1}{2} \int_0^T h_2^2(x(t), z(t), t) dt,$$

$$\chi(z) = \frac{1}{2} \left(x_0 + \int_0^T z(t) dt - x_T \right)^2,$$

а при $i = \overline{1, 2}$ имеем

$$\ell_i(\psi, x, z, t) = \langle z, \psi \rangle - c(F_i(x, t), \psi),$$

$$h_i(x, z, t) = \max_{\psi \in S_n} \max \left\{ 0, \ell_i(\psi, x, z, t) \right\}.$$

Очевидно, что x^* — решение рассматриваемого в данном случае дифференциального включения тогда и только тогда, когда $I(z^*) = 0$.

Пример 9.6.7. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x), \quad F(x) = B_2 \cap \mathfrak{E}_2(x), \quad t \in [0, 1], \quad (9.35)$$

где $\mathfrak{E}_2(x)$ — эллипс (который зависит от фазовой координаты)

$$\mathfrak{E}_2(x) = \left\{ (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(\bar{x} - 2)^2}{x_1^2 + 3} + \bar{y}^2 \leq 1 \right\}.$$

Заданы краевые условия

$$x(0) = (0, 0)', \quad x(1) = (0.75, 0.5)'. \quad (9.36)$$

В данном случае

$$c(F_1, \psi) = \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} = 1, \quad c(F_2, \psi) = \sqrt{(x_1^2 + 3)\psi_1^2 + \psi_2^2} + 2\psi_1,$$

$$\frac{\partial c(F_1, \psi)}{\partial x} = (0, 0)', \quad \frac{\partial c(F_2, \psi)}{\partial x} = \left(\frac{x_1 \psi_1^2}{\sqrt{(x_1^2 + 3)\psi_1^2 + \psi_2^2}}, 0 \right)'.$$

Возьмём начальную точку $z_1 = (1, 1)'$, а тогда $x_1 = (t, t)'$.

Для поиска вектор-функции $\psi^*(x(t), z(t), t)$, $t \in [0, T]$, использовался метод кодифференциального спуска [180] минимизации соответствующей штрафной функции со штрафным параметром $\lambda = 5$ в точках t_i , $i = \overline{1, 5}$ (т. е. здесь $N = 5$) дискретизации. Применяя алгоритм главы, на 3-й итерации получаем точку, которая является решением этого примера:

$$x^*(t) := x_3(t) = \begin{pmatrix} 0.7553t + 0.0002t^5 + 0.0013t^4 - 0.0078t^3 + 0.0009t^2 \\ 0.5043t + 0.00006t^5 + 0.00006t^4 + 0.0048t^3 - 0.0092t^2 \end{pmatrix}.$$

На рис. 9.6.7 изображены точки $z^*(t)$ и допустимая область $B_2 \cap \mathfrak{E}_2(x(t))$ расположения этих точек при некоторых значениях t из интервала $[0, 1]$, отсюда видно, что дифференциальное включение (9.35) выполняется для этих значений t из интервала $[0, 1]$ (нетрудно проверить, что это верно и для всех остальных значений $t \in [0, 1]$). Краевые условия (9.36) также имеют место, в чём легко убедиться, вычислив значения $x_3(0)$ и $x_3(1)$. В данном примере решение удовлетворяет ограничениям точно, поэтому имеем $I(z^*) = 0$.

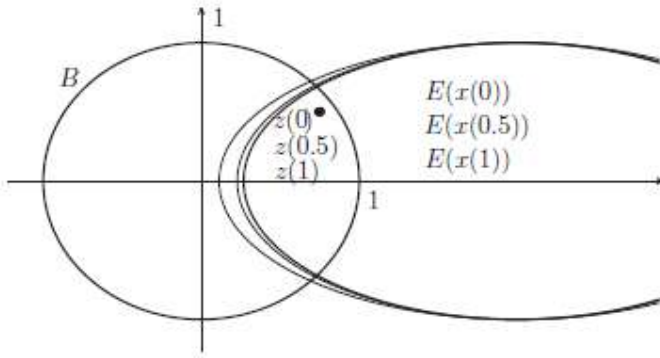


Рис. 9.12: Решение Примера 9.6.7

Рассмотрим случай, когда правая часть дифференциального включения представляет собой объединение нескольких выпуклых множеств. Для простоты изложения опишем случай только с двумя множествами. Рассмотрим систему $\dot{x} \in F(x, t) = F_1(x, t) \cup F_2(x, t)$, где многозначные отображения $F_1(x, t), F_2(x, t)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и многозначное отображение $F(x, t)$ в постановке задачи главы. Как обычно, считаем, что заданы начальное условие и, возможно, условие на правом конце. Наметим путь решения такой задачи. Несмотря на то, что каждое из этих множеств предполагается выпуклым, понятно, что их объединение уже не будет выпуклым в общем случае. Поэтому требуется видоизменить конструкцию функционала $I(z)$, если по-прежнему требуется, чтобы $I(z^*)$ достигал (глобального) минимума в точке z^* тогда и только тогда, когда x^* — решение рассматриваемой в этом случае задачи. Построим соответствующие функционалы следующим образом

$$I(z) = \varphi(z) + \chi(z),$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} \int_0^T h^2(x(t), z(t), t) dt,$$

$$\chi(z) = \frac{1}{2} \left(x_0 + \int_0^T z(t) dt - x_T \right)^2,$$

где

$$h(x, z, t) = \max \left\{ 0, \min \left\{ h_1(x, z, t), h_2(x, z, t) \right\} \right\},$$

а при $i = \overline{1, 2}$ имеем

$$\ell_i(\psi, x, z, t) = \langle z, \psi \rangle - c(F_i(x, t), \psi),$$

$$h_i(x, z, t) = \max_{\psi \in S_n} \ell_i(\psi, x, z, t).$$

Однако построенный функционал $I(z)$ уже не будет дифференцируемым по Гато (хотя он является дифференцируемым по Гато в точке (глобального) минимума, и градиент Гато равен в ней нулю).

Замечание 9.6.3. Как видим, в некоторых примерах было получено точное решение. Это связано с негладкой структурой функционала $I(z)$ и тем, что на некоторых итерациях удавалось получить точное значение шага спуска.

Глава 10

Дифференциальные неравенства

В данной главе рассматривается задача нахождения решения системы дифференциальных неравенств с заданными граничными условиями. Эта система дифференциальных неравенств описывается непрерывными и непрерывно дифференцируемыми по фазовым переменным и их производным функциями. Исходная задача сводится к безусловной минимизации функционала. Для него выписывается градиент Гато, в его терминах получены необходимые условия минимума. На основе этих условий к задаче применяется метод наискорейшего спуска, “слабо” сходящийся к стационарной точке этого функционала. При этом функционал строится таким образом, что можно проверить, является ли построенная стационарная точка действительно точкой глобального минимума задачи. Представлена численная реализация метода. См. [231].

10.1 Постановка задачи и сведение к вариационной

Рассмотрим систему дифференциальных неравенств

$$g_i(x(t), \dot{x}(t), t) \leq 0, \quad i = \overline{1, \ell}, \quad t \in [0, T], \quad (10.1)$$

с заданным начальным условием

$$x(0) = x_0. \quad (10.2)$$

В системе (10.1) $T > 0$ — заданный конечный момент времени, $x(t)$ — n -мерная непрерывно дифференцируемая на $[0, T]$ вектор-функция фазовых переменных, $g_i(x, \dot{x}, t)$, $i = \overline{1, \ell}$, — действительные непрерывные в своих областях определения функции, которые предполагаются непрерывно дифференцируемыми по (x, \dot{x}) . В выражении (10.2) $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — заданный вектор.

Требуется найти решение $x^* \in C_n^1[0, T]$ системы (10.1), удовлетворяющее начальному условию (10.2). Предположим, что такое решение существует.

Обозначим $z(t) = \dot{x}(t)$, тогда $z \in C_n[0, T]$ по предположению. Тогда из (10.2) получаем

$$x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau. \quad (10.3)$$

Используя (10.3), будем писать $g_i(x, z, t)$ вместо $g_i\left(x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau, z, t\right)$, $i = \overline{1, \ell}$, для краткости.

На пространстве

$$X = \left(C_n[0, T], \|\cdot\|_{L_n^2[0, T]} \right)$$

введем функционал

$$I(z) = \sum_{i=1}^{\ell} \int_0^T \left(\max \left\{ 0, g_i(x(t), z(t), t) \right\} \right)^2 dt. \quad (10.4)$$

Легко видеть, что функционал в формуле (10.4), неотрицателен для всех $z \in C_n[0, T]$ и обращается в нуль в точке $z^* \in C_n[0, T]$ тогда и только тогда, когда вектор-функция

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t z^*(\tau) d\tau$$

является решением задачи (10.1), (10.2).

Легко проверить, что имеет место следующая теорема.

Теорема 10.1.1. *Функционал $I(z)$ дифференцируем по Гато и его “градиент Гато” в точке z выражается по формуле*

$$\begin{aligned} \nabla I(z) = \sum_{i=1}^{\ell} \left[\left(|g_i(x, z, t)| + g_i(x, z, t) \right) \frac{\partial g_i(x, z, t)}{\partial z} \right. \\ \left. + \int_t^T \left(|g_i(x(\tau), z(\tau), \tau)| + g_i(x(\tau), z(\tau), \tau) \right) \frac{\partial g_i(x(\tau), z(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau \right]. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Используя тот факт, что максимум выпуклых функций, квадрат неотрицательной выпуклой функции и сумма выпуклых функций являются выпуклыми функциями, нетрудно проверить справедливость следующей леммы.

Лемма 10.1.1. *Если функции $g_i(x, z, t)$, $i = \overline{1, \ell}$, выпуклы по (x, z) при каждом фиксированном $t \in [0, T]$, тогда функционал $I(z)$ является выпуклым.*

Из известного условия минимума [36] заключаем, что имеет место следующая теорема.

Теорема 10.1.2. *Для того чтобы вектор-функция z^* была точкой минимума функционала $I(z)$, необходимо, а в случае выпуклости функций $g_i(x, z, t)$, $i = \overline{1, \ell}$, по (x, z) при каждом фиксированном $t \in [0, T]$, и достаточно, чтобы*

$$\nabla I(z^*) = 0_n, \quad (10.6)$$

где 0_n — нулевой элемент пространства $C_n[0, T]$.

10.2 Метод наискорейшего спуска

Опишем следующий метод наискорейшего спуска [285] для нахождения стационарных точек функционала $I(z)$.

Зафиксируем произвольную точку $z_1 \in C_n[0, T]$. Предположим, что точка $z_k \in C_n[0, T]$ уже найдена. Если необходимое условие минимума (10.6) выполнено (на практике с некоторой фиксированной точностью $\bar{\varepsilon}$ в смысле L^2 -нормы), то точка z_k является стационарной точкой функционала $I(z)$, и процесс завершается. В противном случае положим

$$z_{k+1}(t) = z_k(t) - \gamma_k \nabla I(z_k),$$

где $\nabla I(z_k)$ — “градиент Гато” функционала $I(z)$ в точке z_k (при этом x_k соответствует z_k по формуле (10.3)), а значение γ_k — решение задачи одномерной минимизации

$$\min_{\gamma \geq 0} I(z_k - \gamma \nabla I(z_k)) = I(z_k - \gamma_k \nabla I(z_k)).$$

На практике, задача выше решается на некотором интервале $[0, \bar{\gamma}]$ с некоторым фиксированным значением $\bar{\gamma}$. Тогда мы имеем

$$I(z_{k+1}) \leq I(z_k).$$

Предположим, что функционал $\nabla I(z)$ является равномерно непрерывным и ограниченным в шаре $B_{r'}(0_n)$ (пространства $L_n^2[0, T]$) радиуса $r' > \sup_{z \in \mathcal{L}_I(z_1)} \|z\|_{L_n^2[0, T]}$ (множество Лебега $\mathcal{L}_I(z_1) = \{z \in C_n[0, T] \mid I(z) \leq I(z_1)\}$ предполагается ограниченным по норме $L_n^2[0, T]$). Если последовательность $\{z_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, бесконечна, то метод наискорейшего спуска сходится [383] в следующем смысле:

$$\|\nabla I(z_k)\|_{L_n^2[0, T]} = \sqrt{\int_0^T (\nabla I(z_k, t))^2 dt} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Если последовательность $\{z_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, конечна, то ее последняя точка является стационарной точкой функционала $I(z)$ по построению.

Строго говоря, в книге [285] этот метод описан для другого пространства, но непосредственная проверка показывает, что он применим и к рассматриваемому в диссертации случаю.

10.3 Случай ограничений на правом конце

Рассмотренный подход может быть применен к рассматриваемой задаче в случае, когда начальное состояние и конечное положение объекта подчинены следующим ограничениям:

$$x_i(0) \leq x_{0,i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (10.7)$$

$$x_i(T) \leq x_{T,i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (10.8)$$

где $x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$ — заданные векторы. Предполагаем, что существует решение системы (10.1) с ограничениями (10.7), (10.8) если такие ограничения присутствуют. В этом случае определим

$$x(t) = \bar{x}_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau, \quad \bar{x}_{0,i} \leq x_{0,i}, \quad i = \overline{1, n},$$

и добавим к функционалу $I(z)$ выпуклое слагаемое

$$\varphi(z, \bar{x}_0) = \sum_{i=1}^n \left(\max \left\{ 0, \bar{x}_{0i} - x_{0i} \right\} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\max \left\{ 0, \bar{x}_{0i} + \int_0^T z_i(t) dt - x_{T,i} \right\} \right)^2,$$

которое учитывает ограничения (10.7), (10.8). Тогда помимо вектор-функции z^* требуется также найти вектор $\bar{x}_0^* \in \mathbb{R}^n$, чтобы удовлетворить ограничениям (10.7), (10.8).

В этом случае на пространстве

$$X = \left(C_n[0, T] \times \mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{L_n^2[0, T] \times \mathbb{R}^n} \right)$$

следует рассмотреть функционал

$$J(z, \bar{x}_0) = I(z) + \varphi(z, \bar{x}_0)$$

(вместо функционала $I(z)$) и его “градиент” $\nabla J(z, \bar{x}_0)$ (вместо “градиента” $\nabla I(z)$).

10.4 Случай “нормальной” системы

Рассмотрим частный случай, когда система (10.1) имеет вид

$$\dot{x}_i \leq f_i(x(t), t), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [0, T],$$

и имеется начальное условие (10.2). Предположим, что вектор-функция $f(x, t)$ непрерывна на своей области определения и непрерывно дифференцируема по x .

Используя (10.3), будем писать $f(x, t)$ вместо $f\left(x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau, t\right)$ для краткости.

В этом случае функционал (10.4) принимает вид

$$I(z) = \sum_{i=1}^n \int_0^T \left(\max \left\{ 0, z_i(t) - f_i(x(t), t) \right\} \right)^2 dt. \quad (10.9)$$

Покажем, как может быть получен “градиент Гато” (10.5).

Нетрудно видеть что функционал (10.9) может быть представлен в следующем виде:

$$\begin{aligned} I(z) &= \sum_{i=1}^n I_{1i}(z) + \sum_{i=1}^n I_{2i}(z) = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^T \frac{1}{2} (z_i(t) - f_i(x(t), t))^2 dt + \sum_{i=1}^n \int_0^T \frac{1}{2} |z_i(t) - f_i(x(t), t)| (z_i(t) - f_i(x(t), t)) dt. \end{aligned}$$

Пусть $v \in C_n[0, T]$.

Можно проверить, что

$$\begin{aligned} I_{1i}(z + \alpha v) &= \int_0^T \frac{1}{2} \left(z_i(t) + \alpha v_i(t) - f_i(x(t), t) - \alpha \left(\frac{\partial f_i(x(t), t)}{\partial x} \right)' \int_0^t v(\tau) d\tau + o(\alpha, z, v, t) \right)^2 dt \\ &= I_{1i}(z) + \alpha \int_0^T (z_i(t) - f_i(x(t), t)) \left(v_i(t) - \left(\frac{\partial f_i(x(t), t)}{\partial x} \right)' \int_0^t v(\tau) d\tau \right) dt + o(\alpha, z, v). \\ &\quad \frac{o(\alpha, z, v, t)}{\alpha} \rightarrow 0, \alpha \downarrow 0, t \in [0, T], \quad \frac{o(\alpha, z, v)}{\alpha} \rightarrow 0, \alpha \downarrow 0. \end{aligned} \tag{10.10}$$

Введем при $i = \overline{1, n}$ множества

$$T_{i+}(z) = \left\{ t \in [0, T] \mid z_i(t) - f_i(x(t), t) > 0 \right\},$$

$$T_{i-}(z) = \left\{ t \in [0, T] \mid z_i(t) - f_i(x(t), t) < 0 \right\},$$

$$T_{i0}(z) = \left\{ t \in [0, T] \mid z_i(t) - f_i(x(t), t) = 0 \right\}.$$

Имеем

$$I_{2i}(z) = \begin{cases} \int_0^T \frac{1}{2} (z_i(t) - f_i(x(t), t))^2 dt, & t \in T_{i+}(z) \cup T_{i0}(z), \\ - \int_0^T \frac{1}{2} (z_i(t) - f_i(x(t), t))^2 dt, & t \in T_{i-}(z). \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 I_{2i}(z + \alpha v) &= I_{2i}(z) + \\
 + \alpha \int_0^T (z_i(t) - f_i(x(t), t)) &\left(v_i(t) - \left(\frac{\partial f_i(x(t), t)}{\partial x} \right)' \int_0^t v(\tau) d\tau \right) dt + o(\alpha, z, v), \quad t \in T_{i+}(z) \cup T_{i0}(z), \\
 I_{2i}(z + \alpha v) &= I_{2i}(z) - \\
 - \alpha \int_0^T (z_i(t) - f_i(x(t), t)) &\left(v_i(t) - \left(\frac{\partial f_i(x(t), t)}{\partial x} \right)' \int_0^t v(\tau) d\tau \right) dt + o(\alpha, z, v), \quad t \in T_{i-}(z).
 \end{aligned}$$

Из двух последних равенств получаем

$$\begin{aligned}
 I_{2i}(z + \alpha v) &= I_{2i}(z) + \alpha \int_0^T |z_i(t) - f_i(x(t), t)| \left(v_i(t) - \left(\frac{\partial f_i(x(t), t)}{\partial x} \right)' \int_0^t v(\tau) d\tau \right) dt + o(\alpha, z, v), \\
 \frac{o(\alpha, z, v)}{\alpha} &\rightarrow 0, \quad \alpha \downarrow 0.
 \end{aligned} \tag{10.11}$$

Из (10.10), (10.11) имеем

$$\begin{aligned}
 \nabla I(z) &= \sum_{i=1}^n \left[\left(|z_i - f_i(x, t)| + z_i - f_i(x, t) \right) e_i \right. \\
 &\quad \left. - \int_t^T \left(|z_i(\tau) - f_i(x(\tau), \tau)| + z_i(\tau) - f_i(x(\tau), \tau) \right) \frac{\partial f_i(x(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau \right].
 \end{aligned}$$

10.5 Численные примеры

Рассмотрим некоторые примеры реализации описанного метода. Расчеты проводились в пакете Maple 12, Serial Number 2011-11-11. Решение задачи одномерной минимизации проводилось на интервале $[0, 1]$ (т. е. здесь $\bar{\gamma} = 1$) в Maple с помощью встроенного алгоритма `fminbnd()` с его внутренними параметрами по умолчанию. Согласно документации, для решения этой задачи в Maple используется метод золотого сечения в сочетании с параболической интерполяцией [55]. Все интегралы вычислялись в Maple с помощью встроенной функции `evalf(int())` с ее внутренними параметрами по умолчанию. Согласно документации, для решения этой задачи в Maple используется метод Гаусса-Кронрода [13]. В примерах параметр $\bar{\varepsilon}$ игнорировался, а погрешность решения оценивалась на основе значения функционала. Все вычисления приведены с точностью до 5-го знака после запятой.

Пример 10.5.1. Рассмотрим дифференциальное неравенство

$$\dot{x} \leq -x^2 + t, \quad t \in [0, 1],$$

с начальным условием

$$x(0) = 1.$$

Таблица 10.6.1 демонстрирует результаты работы метода наискорейшего спуска. Здесь взята точка $z_1(t) = 0$ как начальное приближение, тогда $x_1(t) = 1$. Таблица 10.6.1 показывает, что точное решение получено на 2-ой итерации.

Таблица 10.6.1. Пример 10.5.1: результаты работы МНС

k	$I(z_k)$	z_k	x_k	$\ \nabla I(z_k)\ _{L_n^2}$
1	0.(3)	0	1	2.0331
2	0	$-1 + 1.5t - 0.5t^2$	$1 - t + 0.75t^2 - 0.1(6)t^3$	0

Пример 10.5.2. Рассмотрим дифференциальные неравенства

$$\ddot{x} \leq 1, \quad \dot{x} \geq 0, \quad t \in [0, 10],$$

с начальным условием

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 5,$$

и конечным состоянием

$$x(10) \geq 19.$$

Эта задача имеет практическое приложение к определению требуемого движения самолета и рассматривалась в работе [134]. Физическая интерпретация такова. Если x обозначает высоту самолета, то требуется из начального состояния, с заданной начальной скоростью, подлететь к точке на достаточной высоте в предположении, что ускорение самолета не превышает заданного значения.

Положим

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}.$$

Тогда перечисленные ограничения могут быть переписаны так:

$$\dot{x}_1 \leq x_2, \quad -\dot{x}_1 \leq -x_2,$$

$$\dot{x}_2 \leq 1, \quad x_2 \geq 0,$$

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 5,$$

$$-x_1(10) \leq -19.$$

Таблица 10.6.2 демонстрирует результаты работы метода наискорейшего спуска. Здесь взята точка $z_1(t) = [5, 0]$ как начальное приближение, тогда $x_1(t) = [1 + 5t, 5]$. Таблица 10.6.2 показывает, что на 15-ой итерации ошибка не превышает величины 5×10^{-3} (относительно функционала). Мы пишем $J(z_k)$ и $\nabla J(z_k)$, $k = 1, 2, \dots$, поскольку начальная точка в этом примере фиксирована.

Таблица 10.6.2. Пример 10.5.2: результаты работы МНС

k	$J(z_k)$	$\ z_k - z_{k-1}\ _{L_n^2}$	$\ x_k - x_{k-1}\ _{L_n^2}$	$\ \nabla J(z_k)\ _{L_n^2}$
1	16			25.2982
2	1.6	1.26491	7.30297	14.8234
5	0.1601	0.09786	0.40068	2.1766
10	0.0237	0.01227	0.07436	0.409
15	0.0042	0.04468	0.06138	

Пример 10.5.3. Рассмотрим дифференциальные неравенства

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \leq (0.01 - 0.05x_2)x_1, \\ \dot{x}_2 \leq (-0.01 + 0.02x_1)x_2 \end{cases}$$

с начальным состоянием

$$x_1(0) = 40, \quad x_2(0) = 20$$

и конечным условием

$$x_1(1) \geq 15, \quad x_2(1) \leq 30.$$

Эта задача имеет практическое приложение к модели хищник-жертва [256]. Биологическая интерпретация такова. Если x_1 обозначает число жертв, а x_2 обозначает число хищников (в данной модели эти числа могут быть не целыми), то требуется, чтобы число жертв не опускалось ниже определенного значения, а популяция хищников не превышала заданного количества в заданный момент времени. При этом скорости вымирания жертв и увеличения численности хищников ограничены сверху.

Таблица 10.6.3 демонстрирует результаты работы метода наискорейшего спуска. Здесь взята точка $z_1(t) = [0, 0]$ как начальное приближение, тогда $x_1(t) = [40, 20]$. Таблица 10.6.3 показывает, что на 4-ой итерации ошибка не превышает величины 5×10^{-3} (относительно функционала). Мы пишем $J(z_k)$ и $\nabla J(z_k)$, $k = 1, 2, \dots$, поскольку начальная точка в этом примере фиксирована.

Таблица 10.6.3. Пример 10.5.3: результаты работы МНС

k	$J(z_k)$	$\ z_k - z_{k-1}\ _{L_n^2}$	$\ x_k - x_{k-1}\ _{L_n^2}$	$\ \nabla J(z_k)\ _{L_n^2}$
1	1568.16			151.3121
2	0.9498	32.38078	20.12449	1.8403
3	0.0054	2.39244	0.51905	0.09609
4	0.0047	0.0349	0.02015	

Глава 11

“Квазидифференциальные” включения с выпуклой компактной правой частью

В главе исследуется негладкое дифференциальное включение специального вида: предполагается, что многозначное отображение в правой части включения непрерывно, имеет компактные выпуклые значения, а опорная функция соответствующего множества может содержать сумму максимума и минимума конечного числа непрерывно дифференцируемых (по фазовым координатам) функций. Требуется найти траекторию, которая удовлетворяла бы дифференциальному включению при заданных граничных условиях и одновременно лежала бы на заданной непрерывно дифференцируемой поверхности. Приводятся практические приложения таких задач. С помощью аппарата опорных функций исходная задача сводится к вариационной. Доказывается, что полученный минимизируемый функционал является квазидифференцируемым. Выписываются необходимые условия минимума в терминах квазидифференциала. Затем применяется метод квазидифференциального спуска для нахождения стационарных точек этого функционала. При этом функционал строится таким образом, что можно проверить, является ли построенная стационарная точка действительно точкой глобального минимума задачи. Доказывается “слабая” сходимость предложенного (модифицированного) метода в некоторых частных случаях. Построенный метод иллюстрируется на примерах. См. [213], [215].

11.1 Соответствующие определения

В главе мы будем использовать как квазидифференциалы функций в конечномерном пространстве, так и квазидифференциалы функционалов в функциональном пространстве.

Несмотря на то, что второе понятие обобщает первое, для удобства мы введем определения для обоих этих случаев и для тех конкретных функций (функционалов) и их переменных и пространств, которые рассматриваются.

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ со стандартной нормой. Пусть $d = [d_1, d_2] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор. Предположим, что в точке (x, z) существует такой выпуклый компакт $\bar{\partial}h_1(x, z)$ из пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, что

$$\frac{\partial h_1(x, z)}{\partial d} = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha} \left(h_1(x + \alpha d_1, z + \alpha d_2) - h_1(x, z) \right) = \min_{w \in \bar{\partial}h_1(x, z)} \langle w, d \rangle. \quad (11.1)$$

В этом случае функция $h_1(x, z)$ называется супердифференцируемой в точке (x, z) , а множество $\bar{\partial}h_1(x, z)$ называется супердифференциалом функции $h_1(x, z)$ в точке (x, z) .

Из выражения (11.1) видно, что верна формула

$$h_1(x + \alpha d_1, z + \alpha d_2) = h_1(x, z) + \alpha \min_{w \in \bar{\partial}h_1(x, z)} \langle w, d \rangle + o(\alpha, x, z, d),$$

$$\frac{o(\alpha, x, z, d)}{\alpha} \rightarrow 0, \quad \alpha \downarrow 0.$$

Рассмотрим пространство $C_n[0, T] \times P_n[0, T]$ со следующей нормой: $L_n^2[0, T] \times L_n^2[0, T]$. Пусть $g = [g_1, g_2] \in C_n[0, T] \times P_n[0, T]$ — произвольная вектор-функция. Предположим, что в точке (x, z) существует такое выпуклое слабо* компактное множество $\bar{\partial}\varphi_1(x, z) \subset \left(C_n[0, T] \times P_n[0, T], \|\cdot\|_{L_n^2[0, T] \times L_n^2[0, T]} \right)^*$, что

$$\frac{\partial \varphi_1(x, z)}{\partial g} = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha} \left(\varphi_1(x + \alpha g_1, z + \alpha g_2) - \varphi_1(x, z) \right) = \min_{w \in \bar{\partial}\varphi_1(x, z)} w(g). \quad (11.2)$$

В этом случае функционал $\varphi_1(x, z)$ называется супердифференцируемым в точке (x, z) , а множество $\bar{\partial}\varphi_1(x, z)$ называется супердифференциалом функционала $\varphi_1(x, z)$ в точке (x, z) .

Из выражения (11.2) видно, что справедлива следующая формула:

$$\varphi_1(x + \alpha g_1, z + \alpha g_2) = \varphi_1(x, z) + \alpha \min_{w \in \bar{\partial}\varphi_1(x, z)} w(g) + o(\alpha, x, z, g),$$

$$\frac{o(\alpha, x, z, g)}{\alpha} \rightarrow 0, \quad \alpha \downarrow 0.$$

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ со стандартной нормой. Пусть $d = [d_1, d_2] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор. Предположим, что в точке (x, z) существует такой выпуклый компакт $\underline{\partial}h_2(x, z)$ из пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, что

$$\frac{\partial h_2(x, z)}{\partial d} = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha} \left(h_2(x + \alpha d_1, z + \alpha d_2) - h_2(x, z) \right) = \max_{v \in \underline{\partial}h_2(x, z)} \langle v, d \rangle. \quad (11.3)$$

В этом случае функция $h_2(x, z)$ называется субдифференцируемой в точке (x, z) , а множество $\underline{\partial}h_2(x, z)$ называется субдифференциалом функции $h_2(x, z)$ в точке (x, z) .

Из выражения (11.3) видно, что верна формула

$$h_2(x + \alpha d_1, z + \alpha d_2) = h_2(x, z) + \alpha \max_{v \in \underline{\partial} h_2(x, z)} \langle v, d \rangle + o(\alpha, x, z, d),$$

$$\frac{o(\alpha, x, z, d)}{\alpha} \rightarrow 0, \quad \alpha \downarrow 0.$$

Рассмотрим пространство $C_n[0, T] \times P_n[0, T]$ со следующей нормой: $L_n^2[0, T] \times L_n^2[0, T]$. Пусть $g = [g_1, g_2] \in C_n[0, T] \times P_n[0, T]$ — произвольная вектор-функция. Предположим, что в точке (x, z) существует такое выпуклое слабо* компактное множество $\underline{\partial} \varphi_2(x, z) \subset C_n[0, T] \times P_n[0, T]$, $\|\cdot\|_{L_n^2[0, T] \times L_n^2[0, T]}$, что

$$\frac{\partial \varphi_2(x, z)}{\partial g} = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha} \left(\varphi_2(x + \alpha g_1, z + \alpha g_2) - \varphi_2(x, z) \right) = \max_{v \in \underline{\partial} \varphi_2(x, z)} v(g). \quad (11.4)$$

В этом случае функционал $\varphi_2(x, z)$ называется субдифференцируемым в точке (x, z) , а множество $\underline{\partial} \varphi_2(x, z)$ называется субдифференциалом функционала $\varphi_2(x, z)$ в точке (x, z) .

Из выражения (11.4) видно, что справедлива следующая формула:

$$\varphi_2(x + \alpha g_1, z + \alpha g_2) = \varphi_2(x, z) + \alpha \max_{v \in \underline{\partial} \varphi_2(x, z)} v(g) + o(\alpha, x, z, g),$$

$$\frac{o(\alpha, x, z, g)}{\alpha} \rightarrow 0, \quad \alpha \downarrow 0.$$

Замечание 11.1.1. Отметим, что могут быть даны и более общие определения (как для конечномерных, так и для функциональных пространств), когда производная по направлению функции (функционала) представима в виде суммы максимума и минимума линейных функционалов по некоторым множествам (субдифференциалу и супердифференциалу соответственно), тогда функция (функционал) называется квазидифференцируемой, а пара [субдифференциал, супердифференциал] называется квазидифференциалом. Однако мы намеренно даем независимые определения этих объектов, поскольку рассматриваемая в этой главе опорная функция является суммой супердифференцируемой и субдифференцируемой функций (см. формулу (11.9) ниже).

11.2 Постановка задачи и сведение к вариационной

Приведем теперь формальную постановку задачи. Мотивирующие примеры, приводящие к такой задаче, даны в Разделе 11.3.

Требуется найти такую траекторию $x^* \in C_n[0, T]$ (с производной $\dot{x}^* \in P_n[0, T]$), которая при $t \in [0, T]$ удовлетворяет дифференциальному включению

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)), \quad (11.5)$$

движется вдоль поверхности

$$e(x) = \mathbf{0}_o \quad (11.6)$$

и удовлетворяет краевым условиям

$$x(0) = x_0, \quad (11.7)$$

$$x_j(T) = x_{Tj}, \quad j \in J. \quad (11.8)$$

Предположим, что такое решение существует.

В (11.6) считаем $e(x)$ известной непрерывно дифференцируемой o -мерной вектор-функцией; в формуле (11.7) начальная точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — заданный вектор; в формуле (11.8) координаты конечной точки x_{Tj} , $j \in J$ — заданные числа, соответствующие тем координатам вектора состояния, которые зафиксированы на правом конце, здесь $J \subset \{1, \dots, n\}$ — заданный набор индексов.

Теперь сделаем предположения относительно опорной функции правой части. Предположим, что дифференциальное включение в (11.5) обладает следующими свойствами: 1) при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^n$ множество $F(x)$ в правой части может быть “разделено” на множества $F_1(x), \dots, F_n(x)$ (такие, что $\dot{x}_i \in F_i(x)$, $i = \overline{1, n}$) и каждое из множеств $F_1(x), \dots, F_n(x)$ является выпуклым и компактным; 2) опорные функции соответствующих множеств $F_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, могут быть представлены в виде

$$c(F_i(x), \psi_i) = c_1(F_i(x), \psi_i) + c_2(F_i(x), \psi_i), \quad (11.9)$$

где

$$c_1(F_i(x), \psi_i) = \sum_{j=1}^r \max \left\{ f_{i,j_1}(x)\psi_i, \dots, f_{i,j_m(j)}(x)\psi_i \right\}, \quad (11.10)$$

$$c_2(F_i(x), \psi_i) = \sum_{j=1}^s \min \left\{ g_{i,j_1}(x, \psi_i), \dots, g_{i,j_k(j)}(x, \psi_i) \right\}, \quad (11.11)$$

где $f_{i,j_1}(x)\psi_i, \dots, f_{i,j_m(j)}(x)\psi_i$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, r}$, $g_{i,j_1}(x, \psi_i), \dots, g_{i,j_k(j)}(x, \psi_i)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, s}$ (для простоты изложения мы предполагаем, что r и s одинаковы для каждого $i = \overline{1, n}$), являются непрерывно дифференцируемыми по x функциями (при фиксированном $\psi_i \in S_1$, $i = \overline{1, n}$).

Небольшое различие в форме формул двух опорных функций, приведенных выше, обусловлено практическими задачами, порождающими такую структуру опорных функций (соответствующие примеры см. в следующем разделе).

Иногда для краткости мы будем писать F вместо $F(x)$. Поскольку $\forall x \in \mathbb{R}^n$ множество $F_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, — выпуклый компакт в \mathbb{R}^n , включение (11.5) перепишем [143] следующим

образом:

$$\dot{x}_i(t)\psi_i(t) \leq c(F_i(x(t)), \psi_i(t)) \quad \forall \psi_i(t) \in S_1, \quad \forall t \in [0, T], \quad i = \overline{1, n}.$$

Обозначим $z(t) = \dot{x}(t)$, $z \in P_n[0, T]$, тогда из (11.7) имеем

$$x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau. \quad (11.12)$$

Реализуем теперь следующую идею. “Принудительно” будем считать точки z и x “независимыми” переменными. Поскольку между ними в действительности существует связь (11.12) (что, естественным образом означает, что вектор-функция $z(t)$ является производной вектор-функции $x(t)$), учтем это ограничение с помощью функционала

$$v(x, z) = \frac{1}{2} \int_0^T \left(x(t) - x_0 - \int_0^t z(\tau) d\tau \right)^2 dt. \quad (11.13)$$

Видно, что отношение (11.12) и условие (11.7) на левом конце выполняются тогда и только тогда, когда $v(x, z) = 0$.

Для $i = \overline{1, n}$ положим

$$\ell_i(\psi_i, x, z) = \langle z_i, \psi_i \rangle - c(F_i(x), \psi_i),$$

$$h_i(x, z) = \max_{\psi_i \in S_1} \max \left\{ 0, \ell_i(\psi_i, x, z) \right\},$$

затем положим

$$h(x, z) = \left(h_1(x, z), \dots, h_n(x, z) \right)'$$

и построим функционал

$$\varphi(x, z) = \frac{1}{2} \int_0^T \|h(x(t), z(t))\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt. \quad (11.14)$$

Нетрудно проверить, что для функционала (11.14) справедливо соотношение

$$\begin{cases} \varphi(x, z) = 0, & \text{если } \dot{x}_i(t)\psi_i(t) \leq c(F_i(x(t)), \psi_i(t)) \quad \forall \psi_i(t) \in S_1, \quad \forall t \in [0, T], \quad i = \overline{1, n}. \\ \varphi(x, z) > 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

то есть включение (11.5) имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi(x, z) = 0$.

Введем функционал

$$\chi(z) = \frac{1}{2} \sum_{j \in J} \left(x_{0j} + \int_0^T z_j(t) dt - x_{Tj} \right)^2. \quad (11.15)$$

Мы видим, что если $v(x, z) = 0$, то условие (11.8) на правом конце выполняется тогда и только тогда, когда $\chi(z) = 0$.

Введем функционал

$$\omega(x) = \frac{1}{2} \int_0^T \|e(x(t))\|_{\mathbb{R}^c}^2 dt. \quad (11.16)$$

Очевидно, что траектория $x(t)$ принадлежит поверхности (11.6) при каждом $t \in [0, T]$ тогда и только тогда, когда $\omega(x) = 0$.

Наконец, построим функционал

$$I(x, z) = \varphi(x, z) + \chi(z) + \omega(x) + v(x, z). \quad (11.17)$$

Таким образом, исходная задача свелась к минимизации функционала (11.17) на пространстве

$$X = \left(C_n[0, T] \times P_n[0, T], L_n^2[0, T] \times L_n^2[0, T] \right).$$

Обозначим z^* точку глобального минимума этого функционала. Тогда

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t z^*(\tau) d\tau$$

является решением исходной задачи.

Замечание 11.2.1. Структура функционала $\varphi(x, z)$ естественна, так как величина $h_i(x(t), z(t))$, $i = \overline{1, n}$, при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ есть евклидово расстояние от точки $z_i(t)$ до множества $F_i(x(t))$; функционал (11.14) есть половина суммы квадратов отклонений в $L_n^2[0, T]$ норме траекторий $z_i(t)$ от множеств $F_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, соответственно. Смысл структур функционалов (11.13), (11.15), (11.16) очевиден.

11.3 Некоторые прикладные задачи порождающие негладкие дифференциальные включения

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)).$$

Рассмотрим случай, когда правая часть дифференциального включения является выпуклой оболочкой нескольких множеств. Для простоты изложения будем описывать случай только с двумя множествами. Рассмотрим отображение

$$F(x) = \text{co} \left\{ F_1(x), F_2(x) \right\},$$

где многозначные отображения $F_1(x), F_2(x)$ непрерывны и при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^n$ множества $F_1(x), F_2(x)$ выпуклы и компактны. Используя простую формулу [143] для опорной функции объединения двух выпуклых компактов, имеем

$$c(F(x), \psi) = \max \left\{ c(F_1(x), \psi), c(F_2(x), \psi) \right\}.$$

Приведем здесь одну практическую задачу, которая приводит к такой системе. Пусть из некоторых физических соображений “скорость” \dot{x}_1 объекта лежит в диапазоне $[\min\{x_1, x_2, x_3\}, \max\{x_1, x_2, x_3\}]$ “координат” x_1, x_2, x_3 . Заданный отрезок можно записать как $\text{co}\{x_1, x_2, x_3\} = \text{co} \bigcup_{i=1}^3 \mathcal{F}_1^i(x)$, где $\mathcal{F}_1^i(x) = \{x_i\}$, $i = \overline{1, 3}$. Опорная функция [143] этого множества для $\psi_1 \in \mathbb{R}$ равна

$$\begin{aligned} c(F(x), \psi) &= \max \left\{ c(\mathcal{F}_1^1(x), \psi_1), c(\mathcal{F}_1^2(x), \psi_1), c(\mathcal{F}_1^3(x), \psi_1) \right\} = \\ &= \max\{x_1\psi_1, x_2\psi_1, x_3\psi_1\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда правая часть дифференциального включения является пересечением нескольких множеств. Для простоты изложения будем описывать случай только с двумя множествами. Рассмотрим отображение

$$F(x) = F_1(x) \cap F_2(x),$$

где многозначные отображения $F_1(x), F_2(x)$ непрерывны и при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^n$ множества $F_1(x), F_2(x)$ выпуклы и компактны. Используя известную формулу [143] для опорной функции пересечения двух выпуклых компактов, имеем

$$c(F(x), \psi) = \overline{\text{co}} \min \left\{ c(F_1(x), \psi), c(F_2(x), \psi) \right\}. \quad (11.18)$$

Приведем здесь одну практическую задачу, в которой могут возникнуть такие дифференциальные включения. Пусть из некоторых физических соображений “скорость” \dot{x}_1 объекта должна принадлежать как диапазонам $\mathcal{F}_1^1(x) = [x_1, x_2]$, так и $\mathcal{F}_1^2(x) = [x_2 - 1, x_2 + 1]$ “координат” x_1, x_2 . Рассматриваемое множество можно записать как $\mathcal{F}_1^1(x) \cap \mathcal{F}_1^2(x)$. Опорная функция этого множества для $\psi_1 \in S_1$ имеет [143] вид:

$$\begin{aligned} c(F(x), \psi) &= \min \left\{ c(\mathcal{F}_1^1(x), \psi_1), c(\mathcal{F}_1^2(x), \psi_1) \right\} = \\ &= \min \left\{ \frac{x_1 + x_2}{2} \psi_1 + \frac{|x_1 - x_2|}{2}, x_2 \psi_1 + 1 \right\}, \end{aligned}$$

и первая функция под минимумом непрерывно дифференцируема по x , если $x_1 \neq x_2$.

Замечание 11.3.1. Отметим следующий факт. Как видно из примера выше, в некоторых случаях можно непосредственно проверить, что для $\psi \in S_n$ опорная функция пересечения двух множеств является минимумом опорных функций этих множеств. Однако очевидно, что в общем случае правая часть формулы (11.18) не совпадает с

$$\min \left\{ c(F_1(x), \psi), c(F_2(x), \psi) \right\}$$

(могут существовать $\psi \in \mathbb{R}^n$, при которых значения этих выражений различны). С другой стороны, используя известное свойство опорных функций, легко показать, что точка z принадлежит пересечению $F(x)$ тогда и только тогда, когда

$$\langle \psi, z \rangle \leq \min \left\{ c(F_1(x), \psi), c(F_2(x), \psi) \right\} \quad \forall \psi \in S_n.$$

Аналогичное утверждение можно распространить на более общий случай, когда правая часть является суммой конечного числа объединений и пересечений конечного числа выпуклых компактов. Для простоты запишем это условие для суммы объединения $F^1(x) = F_1^1(x) \cup F_2^1(x)$ и пересечения $F^2(x) = F_1^2(x) \cap F_2^2(x)$: точка z принадлежит множеству $F^1(x) + F^2(x)$ тогда и только тогда, когда

$$\langle \psi, z \rangle \leq \max \left\{ c(F_1^1(x), \psi), c(F_2^1(x), \psi) \right\} + \min \left\{ c(F_1^2(x), \psi), c(F_2^2(x), \psi) \right\}$$

для всех $\psi \in S_n$. Поэтому на практике мы можем использовать это условие принадлежности точки множеству, и на самом деле нам нужна не опорная функция пересечения, а опорные функции самих множеств в $\psi \in S_n$. Поэтому вместо функционала $I(x, z)$ можно построить аналогичный функционал

$$\tilde{I}(x, z) = \tilde{\varphi}(x, z) + \chi(z) + \omega(x) + v(x, z),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x, z) &= \frac{1}{2} \int_0^T h^2(x(t), z(t)) dt, \\ \tilde{\ell}(\psi, x, z) &= \langle z, \psi \rangle - \tilde{c}(F(x), \psi), \\ \tilde{h}(x, z) &= \max_{\psi \in S_n} \max \left\{ 0, \tilde{\ell}(\psi, x, z) \right\}, \end{aligned}$$

и $\tilde{c}(F(x), \psi)$ по-прежнему является суммой максимумов и минимумов соответствующих непрерывно дифференцируемых по x функций.

Однако при использовании такой структуры функционала $\tilde{\varphi}(x, z)$ возникает следующий недостаток: поскольку $\tilde{c}(F(x), \psi)$ больше не является опорной функцией, то важнейшее свойство единственности вектора ψ^* больше не выполняется (в случае, когда точка z не принадлежит рассматриваемому множеству). Грубо говоря, это объясняется тем, что функция $\tilde{h}(x, z)$ больше не является расстоянием до пересечения множеств, а максимумом расстояний до этих множеств. В то время как расстояние до выпуклого компакта (как пересечения выпуклых компактов) достигается в единственной точке множества, максимум расстояний до этих множеств может достигаться в двух точках разных множеств (если расстояния равны). Проиллюстрируем это на следующем примере. Возьмем $F_1 = B_1((-1, 0)')$,

$F_2 = B_1((1, 0)')$. Тогда имеем $c(F_1, \psi) = -\psi_1 + 1$, $c(F_2, \psi) = \psi_1 + 1$. Если взять $z = (0, 1)'$, то $\max_{\psi \in S_2} (\psi_2 - \min\{-\psi_1 + 1, \psi_1 + 1\})$ (что равно расстоянию $\sqrt{2} - 1$ вектора z как до множества F_1 , так и до множества F_2) достигается на двух элементах: $\psi^* = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)'$ или $\psi^* = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)'$.

Следовательно, чтобы Теорема 11.4.1 оставалась верной, мы должны сделать дополнительное предположение. Мы предполагаем, что в случае $z \notin F(x)$ вектор ψ^* по-прежнему единственен. Например, в случае, когда правая часть включения представлена в виде пересечения двух множеств, требуемое свойство будет гарантировано (как объяснено в примере выше), если z не является точкой, равноудаленной от этих множеств.

Интересной задачей для будущих исследований является изучение дифференциальных свойств функционала $\tilde{I}(x, z)$ в случае неединственности вектора ψ^* . Гипотеза состоит в том, что функционал остается квазидифференцируемым в этом случае как суперпозиция шах-функции и квазидифференцируемой функции. Также отметим, что в случае пересечения двух множеств в правой части включения равенство функций под min-функцией (при одном и том же значении вектора ψ^*) означает, что точки, в которых достигаются минимальные расстояния от точки z до каждого из этих множеств, совпадают, следовательно, это расстояние от точки z до их пересечения, что в свою очередь означает, что вектор ψ^* в этом случае является единственным и результаты квазидифференцируемости функционала $\tilde{I}(x, z)$ этой главы остаются здесь справедливыми.

Определение ψ^* дано в следующем разделе. Заметим, что здесь мы использовали обозначение ψ^* вместо $\psi^*(x, z)$ для краткости.

Рассмотрим модель двойного маятника, имеем

$$\ddot{x}_1 = -\nu^2(1 + 2\mu^2)x_1 + \nu^2\mu^2x_2,$$

$$\ddot{x}_2 = \nu^2x_1 - \nu^2x_2,$$

где $\nu = \frac{m_1}{m_2}$, $\mu = \frac{g}{l}$, а m_1 и m_2 — массы первого и второго маятников соответственно, g — ускорение свободного падения, а l — длина нити. В литературе (см., например, [161]) такие модели рассматриваются в предположении, что колебания малы, поэтому можно ожидать, что $\sin x_1$, $\sin x_2$, представленные в точной модели, будут приблизительно равны x_1 , x_2 соответственно. Здесь же предлагается рассмотреть более точную модель, например, так, чтобы в модели значения $\sin x_1$ и $\sin x_2$ были заменены сегментами $[0.5x_1, 1.5x_1]$ и $[0.5x_2, 1.5x_2]$ (по крайней мере, при малых значениях координат x_1, x_2 в пределах интервала $[0, 0.5]$). При таком предположении можно заметить, что опорная функция правой части имеет вид:

$$c(F_1(x), \psi_1) = -\nu^2(1 + 2\mu^2)x_1\psi_1 + 0.5\nu^2(1 + 2\mu^2)|x_1||\psi_1| + \nu^2\mu^2x_2\psi_1 + 0.5\nu^2\mu^2|x_2||\psi_1|,$$

$$c(F_2(x), \psi_2) = \nu^2x_1\psi_2 + 0.5\nu^2|x_1||\psi_2| - \nu^2x_2\psi_2 + 0.5\nu^2|x_2||\psi_2|.$$

Рассмотрим систему управления с возмущением:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \varpi(t);$$

в правой части стоит функция управления $u(t)$, а также функция $\varpi(t)$, играющая роль некоторого возмущения в системе. Пусть, исходя из некоторых физических соображений, как управление, так и возмущение $\varpi(t)$ принадлежат множествам, зависящим от фазовых координат, и предположим, что опорные функции этих множеств имеют структуру, о которой идет речь в главе.

Отметим, что в книге [299] дано аналитическое решение этой задачи с использованием аппарата опорных функций, а также сопряженной функции, если предположить, что соответствующая вогнутая оболочка искомым множеств может быть построена. Это решение получено в случае, когда как функции управления, так и функции возмущения принадлежат некоторым выпуклым компактам. Такая аналитическая теория стала возможной благодаря известным формулам решения линейных систем (через фундаментальную матрицу) и опорных функций для стандартных выпуклых компактов достаточно простой структуры. Поэтому обсуждаемые более сложные ограничения на управление можно интерпретировать как обобщение этой задачи.

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{11.19}$$

на временном интервале $[-t^*, T]$ (здесь T — заданный конечный момент времени; см. комментарии по моменту времени t^* ниже).

Пусть также задана поверхность “разрыва”:

$$s(x) = \mathbf{0}_m \tag{11.20}$$

где $s(x)$ — известная непрерывно дифференцируемая m -мерная вектор-функция.

Рассмотрим следующий вид управления:

$$u_i(x) = -a_i|x|\operatorname{sgn}(s_i(x)), \quad i = \overline{1, m}, \quad u_i = 0, \quad i = \overline{m+1, n} \tag{11.21}$$

где $a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$, $i = \overline{1, m}$, — некоторые положительные числа, которые иногда называются коэффициентами усиления.

В книге [452] показано, что если поверхность (11.20) является гиперплоскостью, то при естественных предположениях и достаточно больших значениях факторов a_i , $i = \overline{1, m}$, управления (11.21) обеспечивают попадание системы (11.19) из произвольного начального состояния в малую окрестность этой поверхности (11.20) за конечное время t^* и дальнейшее пребывание в этой окрестности с выполнением условия $s_i(x(t)) \rightarrow 0$, $i = \overline{1, m}$, при $t \rightarrow \infty$. Поэтому теперь нас интересует поведение системы на поверхности “разрыва” (на интервале времени $[0, T]$).

Мы видим, что правые части первых m дифференциальных уравнений в системе (11.19) с управлениями (11.21) разрывны на поверхностях $s_i(x) = 0$, $i = \overline{1, m}$. Поэтому нужно воспользоваться одним из известных определений решения разрывной системы. Согласно определению Филиппова [100] решение рассматриваемой разрывной системы удовлетворяет дифференциальному включению

$$\dot{x}_i \in A_i x + [\underline{a}_i, \bar{a}_i] |x| [-1, 1] = A_i x + [-\bar{a}_i, \bar{a}_i] |x| =: F_i(x), \quad i = \overline{1, m},$$

$$\dot{x}_i = A_i x, \quad i = \overline{m+1, n},$$

и мы имеем

$$c(F_i(x), \psi_i) = \psi_i A_i x + \bar{a}_i |x| |\psi_i| = \psi_i A_i x + \sum_{i=1}^n \max\{\bar{a}_i x_i \psi_i, -\bar{a}_i x_i \psi_i\}, \quad i = \overline{1, m},$$

$$c(F_i(x), \psi_i) = \psi_i A_i x, \quad i = \overline{m+1, n}.$$

Рассмотрим простейшую физическую модель с сухим трением. Пусть на столе лежит брусок, подверженный кулоновскому трению о контактирующую поверхность, притягиваемый силой ускорения свободного падения g . Дифференциальное уравнение [428] для этой системы со скоростью v имеет вид

$$m \frac{dv(t)}{dt} = -\mu F_N \text{Sgn}(v(t)) + g \quad (11.22)$$

где Sgn — это многозначное отображение, заданное как

$$\text{Sgn}(v) = \begin{cases} \{1\}, & v > 0, \\ [-1, 1], & v = 0, \\ \{-1\}, & v < 0. \end{cases}$$

Величина F_N — это нормальная реакция опоры (равная mg для бруска массой m), а μ — коэффициент трения Кулона. Мы видим, что правые части в системе (11.22) разрывны на

поверхностях $s(v) = v = 0$. Здесь применен подход, основанный на работах Филиппова [100] по теории разрывных дифференциальных уравнений, следовательно, система удовлетворяет дифференциальному включению

$$\dot{v} \in \mu F_N[-1, 1] + g.$$

В более общем случае вводится так называемый конус трения FC , а уравнения движения по закону сухого трения Кулона имеют вид

$$M(q) \frac{dv}{dt} \in k(q, v) + FC(q)$$

где $M(q)$ — матрица масс, а $k(q, v)$ — функция, полученная из кинетической и потенциальной энергии с помощью применения уравнений Лагранжа с обобщенными координатами q и скоростями v . Также следует наложить голономные или неголономные (неявные) ограничения, а также некоторые дополнительные условия, учитывающие: 1) случай, когда вектор трения находится на границе конуса трения в случае ненулевой относительной скорости, 2) физическую ситуацию, когда скольжение прекращается в течение периода контакта. Подробности можно найти в [429]. В указанной работе применяется прямая дискретизация, и соответствующая конечномерная задача решается с помощью методов линейной алгебры.

Замечание 11.3.2. Заметим, что если из физических соображений сама скорость является разрывной функцией времени, то, строго говоря, некорректно брать ее производную (так что ускорение формально не определено). Чтобы преодолеть эту трудность, в некоторой литературе [351] используется возможное обобщение производной как меры и соответствующее понятие производной Радона-Никодима и исследуются соответствующие так называемые дифференциальные включения по мере с так определенной производной. Затем применяется прямая дискретизация, чтобы получить соответствующую конечномерную задачу. Интересно отметить следующее: поскольку производная в указанной работе является мерой или обобщенной функцией, то во многих случаях не представляется возможным работать с ее дискретным аналогом; решение, предложенное в [351], состоит в том, чтобы рассмотреть интегральное уравнение вместо исходного дифференциального и “дискретизировать” саму функцию вместо ее производной в левой части (и интеграл от функции в правой части) соответствующего интегрального уравнения. Такой подход успешно применяется, например, когда рассматривается ступенчатая функция Хевисайда и ее обобщенная производная, дельта-функция. Однако в этой главе такие случаи не исследуются.

11.4 Условия минимума функционала $I(x, z)$

В этом разделе для работы с соответствующими супердифференциалами и субдифференциалами мы используем правила квазидифференциального исчисления в функциональном пространстве [190].

Используя классическую вариацию, легко доказать дифференцируемость по Гато функционала $\chi(z)$, имеем

$$\nabla\chi(z) = \sum_{j \in J} \left(x_{0j} + \int_0^T z_j(t) dt - x_{Tj} \right) \mathbf{e}_j.$$

По правилам квазидифференциального исчисления [190] можно положить

$$\underline{\partial}\chi(z) = \left\{ \sum_{j \in J} \left(x_{0j} + \int_0^T z_j(t) dt - x_{Tj} \right) \mathbf{e}_j \right\}, \quad \bar{\partial}\chi(z) = 0_n \quad (11.23)$$

Используя классическую вариацию, легко доказать дифференцируемость по Гато функционала $\omega(x)$, имеем

$$\nabla\omega(x, t) = \sum_{j=1}^o e_j(x(t)) \frac{\partial e_j(x(t))}{\partial x}.$$

По правилам квазидифференциального исчисления [190] можно положить

$$\underline{\partial}\omega(x, t) = \left\{ \sum_{j=1}^o e_j(x(t)) \frac{\partial e_j(x(t))}{\partial x} \right\}, \quad \bar{\partial}\omega(x, t) = 0_n. \quad (11.24)$$

Используя классическую вариацию и интегрирование по частям, также нетрудно проверить дифференцируемость по Гато функционала $v(x, z)$, получаем

$$\nabla v(x, z, t) = \begin{pmatrix} x(t) - x_0 - \int_0^t z(\tau) d\tau \\ - \int_t^T \left(x(\tau) - x_0 - \int_0^\tau z(s) ds \right) d\tau \end{pmatrix}.$$

По правилам квазидифференциального исчисления [190] можно положить

$$\underline{\partial}v(x, z, t) = \left\{ \begin{pmatrix} x(t) - x_0 - \int_0^t z(\tau) d\tau \\ - \int_t^T \left(x(\tau) - x_0 - \int_0^\tau z(s) ds \right) d\tau \end{pmatrix} \right\}, \quad \bar{\partial}v(x, z, t) = 0_{2n}. \quad (11.25)$$

Исследуем дифференциальные свойства функционала $\varphi(x, z)$. Для этого сначала приведем следующие формулы для вычисления квазидифференциала $\left[\underline{\partial}h^2(x, z), \bar{\partial}h^2(x, z) \right]$ в точке (x, z) . При $i = \overline{1, n}$ имеем

$$\bar{\partial} \left(\frac{1}{2} h_i^2(x, z) \right) = h_i(x, z) \left(\psi_i^* \mathbf{e}_{i+n} + \sum_{j=1}^r \bar{\partial} \left(- \max \left\{ f_{i,j_1}(x) \psi_i^*, \dots, f_{i,j_m(j)}(x) \psi_i^* \right\} \right) \right) \quad (11.26)$$

где при $j = \overline{1, r}$ и $j_q \in \mathcal{R}_{ij}^1(x)$ будет

$$\bar{\partial} \left(- \max \left\{ f_{i,j_1}(x)\psi_i^*, \dots, f_{i,j_m(j)}(x)\psi_i^* \right\} \right) = \text{co} \left\{ \left[-\psi_i^* \frac{\partial f_{i,j_q}(x)}{\partial x}, \mathbf{0}_n \right] \right\},$$

$$\mathcal{R}_{ij}^1(x) = \left\{ j_q \in \{j_1, \dots, j_m(j)\} \mid f_{i,j_q}(x)\psi_i^* = \max \left\{ f_{i,j_1}(x)\psi_i^*, \dots, f_{i,j_m(j)}(x)\psi_i^* \right\} \right\}$$

и

$$\underline{\partial} \left(\frac{1}{2} h_i^2(x, z) \right) = h_i(x, z) \sum_{j=1}^s \underline{\partial} \left(- \min \left\{ g_{i,j_1}(x, \psi_i^*), \dots, g_{i,j_k(j)}(x, \psi_i^*) \right\} \right) \quad (11.27)$$

где при $j = \overline{1, s}$ и $j_p \in \mathcal{R}_{ij}^2(x)$ будет

$$\underline{\partial} \left(- \min \left\{ g_{i,j_1}(x, \psi_i^*), \dots, g_{i,j_k(j)}(x, \psi_i^*) \right\} \right) = \text{co} \left\{ \left[-\frac{\partial g_{i,j_p}(x, \psi_i^*)}{\partial x}, \mathbf{0}_n \right] \right\},$$

$$\mathcal{R}_{ij}^2(x) = \left\{ j_p \in \{j_1, \dots, j_k(j)\} \mid g_{i,j_p}(x, \psi_i^*) = \min \left\{ g_{i,j_1}(x, \psi_i^*), \dots, g_{i,j_k(j)}(x, \psi_i^*) \right\} \right\}$$

и

$$\ell_i(\psi_i^*(x, z), x, z) = \max_{\psi_i \in S_1} \ell_i(\psi_i, x, z) \quad \text{если } h_i(x, z) > 0, \quad \psi_i^* := \psi_i^*(x, z),$$

$$\psi_i^* = \psi_i^0 \quad (\psi_i^0 \in S_1) \quad \text{если } h_i(x, z) = 0.$$

Отметим, что в случае $h_i(x, z) > 0$ элемент $\psi_i^*(x, z)$ является единственным по свойствам опорных функций [143] и непрерывным [145] по свойствам \max (\min)- функции.

Формулы (11.26) и (11.27) проверяются на основе теоремы о дифференцируемости по направлению [145] и правил квазидифференциального исчисления [37]. Приведем краткую схему доказательства.

Зафиксируем некоторое $i \in \{1, \dots, n\}$ и рассмотрим два случая.

а) Предположим, что $h_i(x, z) > 0$, то есть $h_i(x, z) = \max_{\psi_i \in S_1} \ell_i(\psi_i, x, z) > 0$. Применим соответствующую теорему о дифференцируемости по направлению из [145]. Там рассматриваются \inf -функции, поэтому применим эту теорему к функции $-\ell_i(\psi_i, x, z)$. Проверим, что функция $h_i(x, z)$ удовлетворяет условиям:

i) функция $\ell_i(\psi_1, x, z)$ непрерывна на $S_1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$;

ii) существует число β и компактное множество $C \in \mathbb{R}$ такие, что для каждого (\bar{x}, \bar{z}) в окрестности точки (x, z) множество уровня $lev_{-\ell(\cdot, \bar{x}, \bar{z})}(\beta) = \left\{ \psi_i \in S_1 \mid -\ell_i(\psi_i, \bar{x}, \bar{z}) \leq \beta \right\}$ непусто и содержится во множестве C ;

iii) для любого фиксированного $\psi_i \in S_1$ функция $\ell_i(\psi_i, \cdot, \cdot)$ дифференцируема по направлению в точке (x, z) ;

iv) если $d = (d_1, d_2)' \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\delta_n \downarrow 0$ и ψ_{i_n} есть последовательность в C , тогда ψ_{i_n} имеет такую предельную точку $\bar{\psi}_i$, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ell_i(\psi_{i_n}, x + \delta_n d_1, z + \delta_n d_2) - (-\ell_i(\psi_{i_n}, x, z))}{\delta_n} \geq \frac{\partial(-\ell(\bar{\psi}_i, x, z))}{\partial d}.$$

Проверка условий i), ii) очевидна.

Для проверки iii) достаточно заметить, что при каждом фиксированном $\psi_i \in S_1$ соответствующие рассматриваемые функции являются максимумами (минимумами) непрерывно дифференцируемых функций и хорошо известно [37], что max-функция (min-функция) (непрерывно дифференцируемых функций) субдифференцируема (супердифференцируема), поэтому можно получить явное выражение для их производных по направлению.

Для проверки iv) достаточно явно выписать правую и левую части требуемого неравенства и непосредственно проверить, что iv) выполняется, используя разложение в ряд Тейлора непрерывно дифференцируемых функций под функцией максимума (минимума) и известные [39] неравенства

$$\min_{j=\overline{1,K}}(\nu_j + \mu_j) \geq \min_{j=\overline{1,K}} \nu_j + \min_{j=\overline{1,K}} \mu_j,$$

$$\max_{i=\overline{1,M}}(\nu_i + \mu_i) \geq \max_{i=\overline{1,M}} \nu_i + \max_{i \in \mathcal{R}} \mu_i, \quad \mathcal{R} = \left\{ i \in \{1, \dots, M\} \mid \nu_i = \max_{i=\overline{1,M}} \nu_i \right\},$$

которые верны для произвольных чисел $\nu_i, \mu_i, i = \overline{1, K}$ или $\nu_i, \mu_i, i = \overline{1, M}$.

Итак, функция $h_i(x, z)$ дифференцируема по направлению в точке (x, z) ; далее явно выписывая ее производную по направлению, убеждаемся, что по определению (см. Замечание 11.1.1) функция $h_i(x, z)$ квазидифференцируема в точке (x, z) ; поэтому функция $h_i^2(x, z)$ квазидифференцируема в точке (x, z) , а ее субдифференциал и супердифференциал получаются с помощью (11.27) и (11.26) соответственно по правилам квазидифференциального исчисления [37].

б) В случае $h_i(x, z) = 0$ очевидно, что функция $h_i^2(x, z)$ дифференцируема в точке (x, z) , и ее градиент обращается в ноль в этой точке.

Если интервал $[0, T]$ можно разбить на конечное число интервалов, в каждом из которых одна (несколько) из рассматриваемых функций активны, то квазидифференцируемость функции $h_i(x, z), i = \overline{1, n}$, доказывается на каждом из таких интервалов совершенно аналогично. В Главе 5 показано, что функционал $\varphi(x, z)$ квазидифференцируем и его квазидифференциал определяется соответствующим квазидифференциалом подынтегрального выражения.

Теорема 11.4.1. Пусть отрезок $[0, T]$ может быть разбит на конечное число интервалов, в каждом из которых одна (несколько) функций $\{f_{i,j_1}(x)\psi_i, \dots, f_{i,j_m(j)}(x)\psi_i\}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, r}, \{g_{i,j_1}(x, \psi_i), \dots, g_{i,j_k(j)}(x, \psi_i)\}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, s}$, активны. Тогда функционал $\varphi(x, z)$ является квазидифференцируемым, то есть

$$\frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial g} = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha} \left(\varphi(x + \alpha g_1, z + \alpha g_2) - \varphi(x, z) \right) = \max_{v \in \underline{\partial} \varphi(x, z)} v(g) + \min_{w \in \overline{\partial} \varphi(x, z)} w(g) \quad (11.28)$$

Здесь множества $\underline{\partial}\varphi(x, z)$, $\overline{\partial}\varphi(x, z)$ имеют следующий вид

$$\underline{\partial}\varphi(x, z) = \left\{ v \in \left(C_n[0, T] \times P_n[0, T], \|\cdot\|_{L_n^2[0, T] \times L_n^2[0, T]} \right)^* \mid \right. \quad (11.29)$$

$$v(g) = \int_0^T \langle v_1(t), g_1(t) \rangle dt + \int_0^T \langle v_2(t), g_2(t) \rangle dt \quad \forall g_1 \in C_n[0, T], g_2 \in P_n[0, T],$$

$$\left. v_1(t), v_2(t) \in L_n^\infty[0, T], \quad (v_1(t), v_2(t))' \in \frac{1}{2} \underline{\partial}h^2(x(t), z(t)) \quad \text{for all } t \in [0, T] \right\}.$$

$$\overline{\partial}\varphi(x, z) = \left\{ w \in \left(C_n[0, T] \times P_n[0, T], \|\cdot\|_{L_n^2[0, T] \times L_n^2[0, T]} \right)^* \mid \right. \quad (11.30)$$

$$w(g) = \int_0^T \langle w_1(t), g_1(t) \rangle dt + \int_0^T \langle w_2(t), g_2(t) \rangle dt \quad \forall g_1 \in C_n[0, T], g_2 \in P_n[0, T],$$

$$\left. w_1(t), w_2(t) \in L_n^\infty[0, T], \quad (w_1(t), w_2(t))' \in \frac{1}{2} \overline{\partial}h^2(x(t), z(t)) \quad \text{for all } t \in [0, T] \right\}.$$

Используя полученные формулы (11.23), (11.55), (11.25), (11.26), (11.27), (11.28), (11.29), (11.30) и правила квазидифференциального исчисления [190] имеем окончательную формулу для вычисления субдифференциала и супердифференциала функционала $I(x, z)$ в точке (x, z) , обозначим

$$\underline{\partial}\mathcal{I}(x, z, t) := \frac{1}{2} \underline{\partial}h^2(x(t), z(t)) + \underline{\partial}\overline{\chi}(x, z) + \underline{\partial}\overline{\omega}(x, z, t) + \underline{\partial}v(x, z, t),$$

$$\overline{\partial}\mathcal{I}(x, z, t) := \frac{1}{2} \overline{\partial}h^2(x(t), z(t)),$$

где формально $\overline{\chi}(x, z) := \chi(z)$, $\overline{\omega}(x, z, t) := \omega(x, t)$.

Используя известное условие минимума [195] функционала $I(x, z)$ в точке (x^*, z^*) в терминах квазидифференциала, заключаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 11.4.2. Пусть отрезок $[0, T]$ может быть разбит на конечное число интервалов, в каждом из которых одна (несколько) функций $\{f_{i,j_1}(x)\psi_i, \dots, f_{i,j_m(j)}(x)\psi_i\}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, r}$, $\{g_{i,j_1}(x, \psi_i), \dots, g_{i,j_k(j)}(x, \psi_i)\}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, s}$, активны. Для того чтобы точка (x^*, z^*) минимизировала функционал $I(x, z)$, необходимо, чтобы для каждой измеримой ветви $w(\cdot)$ многозначного отображения $t \rightarrow \overline{\partial}\mathcal{I}(x^*, z^*, t)$ выполнялось включение

$$-w(t) \subset \underline{\partial}\mathcal{I}(x^*, z^*, t) \quad (11.31)$$

для почти всех $t \in [0, T]$.

Если $I(x^*, z^*) = 0$, то условие (11.31) является и достаточным.

Замечание 11.4.1. Строго говоря, условие минимума (11.31) сформулировано в статье [195] для функционала, определенного на другом пространстве, однако из доказательства этой статьи видно, что данный результат остается справедливым и для случая пространства, рассматриваемого в диссертации.

После того как направление наискорейшего (квазидифференциального) спуска построено (см. следующий раздел) можно применить некоторый численный метод (основанный на использовании этого направления) негладкой оптимизации для нахождения стационарных точек функционала $I(x, z)$. Для численного моделирования главы используется алгоритм наискорейшего (квазидифференциального) спуска.

Теорема 11.4.2 содержит конструктивное условие минимума, поскольку на его основе можно построить направление квазидифференциального спуска, а для решения каждой из возникающих при этом построении подзадач известны эффективные алгоритмы их решения.

11.5 Метод квазидифференциального спуска

Опишите метод квазидифференциального спуска для нахождения стационарных точек функционала $I(x, z)$.

Зафиксируем произвольную начальную точку $(x_{(1)}, z_{(1)}) \in C_n[0, T] \times P_n[0, T]$. Пусть точка $(x_{(k)}, z_{(k)}) \in C_n[0, T] \times P_n[0, T]$ уже построена. Если для каждого $t \in [0, T]$ выполняется условие минимума (11.31) (на практике, в дискретные моменты времени $t_i, i = \overline{1, N}$, с некоторой фиксированной точностью $\bar{\varepsilon}$ в смысле нормы Хаусдорфа в пространстве \mathbb{R}^n , с некоторым фиксированным рангом дискретизации N), то $(x_{(k)}, z_{(k)})$ является стационарной точкой функционала $I(x, z)$ и процесс завершается. В противном случае положим

$$(x_{(k+1)}, z_{(k+1)}) = (x_{(k)}, z_{(k)}) + \gamma_{(k)} G(x_{(k)}, z_{(k)})$$

где вектор-функция $G(x_{(k)}, z_{(k)})$ является направлением квазидифференциального спуска функционала $I(x, z)$ в точке $(x_{(k)}, z_{(k)})$, а величина $\gamma_{(k)}$ является решением следующей одномерной задачи

$$\min_{\gamma \geq 0} I\left((x_{(k)}, z_{(k)}) + \gamma G(x_{(k)}, z_{(k)})\right) = I\left((x_{(k)}, z_{(k)}) + \gamma_{(k)} G(x_{(k)}, z_{(k)})\right). \quad (11.32)$$

На практике, задача выше решается на интервале $[0, \bar{\gamma}]$ с некоторым фиксированным значением $\bar{\gamma}$. Тогда имеет место неравенство

$$I(x_{(k+1)}, z_{(k+1)}) \leq I(x_{(k)}, z_{(k)}).$$

Как видно из описанного алгоритма, для реализации k -й итерации необходимо решить четыре подзадачи. Первая подзадача — вычисление квазидифференциала функционала $I(x, z)$ в точке $(x_{(k)}, z_{(k)})$. Решение этой подзадачи получено в формулах (11.23), (11.55), (11.25), (11.29) и (11.30). Вторая подзадача — нахождение направления квазидифференциального спуска $G(x_{(k)}, z_{(k)})$; решению этой подзадачи посвящены следующие два абзаца. Третья подзадача — одномерная минимизация (11.32); существует множество эффективных методов (см., например, [18]) решения этой подзадачи. Четвертая подзадача — нахождение значений $\psi_i^*(x_{(k)}, z_{(k)})$, $i = \overline{1, n}$ в каждый момент времени t_i , $i = \overline{1, N}$. Решение этой задачи не является тривиальным, поскольку в общем случае она является задачей нелинейной оптимизации. Однако существует также множество методов (см., например, [18]) нелинейного программирования; более того, для некоторых частных случаев множеств в правых частях дифференциального включения ее можно решить аналитически.

Для нахождения вектор-функции $G(x_{(k)}, z_{(k)})$, рассмотрим задачу

$$\max_{w \in \bar{\partial}I(x_{(k)}, z_{(k)})} \min_{v \in \underline{\partial}I(x_{(k)}, z_{(k)})} \int_0^T (v(t) + w(t))^2 dt. \quad (11.33)$$

Мы отождествляем v и $(v_1, v_2)'$, w и $(w_1, w_2)'$ для простоты изложения. Обозначим $\bar{v}(t)$, $\bar{w}(t)$ ее решение. (Вектор-функции $\bar{v}(t)$, $\bar{w}(t)$, конечно, зависят от точки $(x_{(k)}, z_{(k)})$, но мы опускаем эту зависимость в обозначениях для краткости.) Тогда вектор-функция $G(x_{(k)}, z_{(k)}) = -(\bar{v} + \bar{w})$ является (не нормированным) направлением квазидифференциального спуска функционала $I(x, z)$ в точке $(x_{(k)}, z_{(k)})$. Отметим, что квазидифференциал функционала $I(x, z)$ в каждый момент времени $t \in [0, T]$ вычисляется независимо (то есть его квазидифференциал, вычисленный в один момент времени, не зависит от его квазидифференциала, вычисленного в другой момент времени).

Замечание 11.5.1. Строго говоря, в [180] рассматривается только конечномерное пространство, однако, с учетом характеристики [5] ближайшего (по норме) элемента замкнутого выпуклого множества в гильбертовом пространстве через неотрицательность соответствующего скалярного произведения, приведенное там доказательство показывает, что формула направления наискорейшего спуска остается верной также и для рассматриваемого в диссертации случая.

В Главе 5 показано, что

$$\begin{aligned} & \max_{w \in \bar{\partial}I(x_{(k)}, z_{(k)})} \min_{v \in \underline{\partial}I(x_{(k)}, z_{(k)})} \int_0^T (v(t) + w(t))^2 dt = \\ & = \int_0^T \max_{w(t) \in \bar{\partial}I(x, z, t)} \min_{v(t) \in \underline{\partial}I(x, z, t)} (v(t) + w(t))^2 dt. \end{aligned} \quad (11.34)$$

Из (11.34) видно, что для решения задачи (11.33) достаточно решить задачу

$$\max_{w(t) \in \partial \mathcal{I}(x, z, t)} \min_{v(t) \in \underline{\partial} \mathcal{I}(x, z, t)} (v(t) + w(t))^2 \quad (11.35)$$

для каждого момента времени $t \in [0, T]$. Еще раз подчеркнем, что данное утверждение справедливо в силу особой структуры квазидифференциала, которая в свою очередь имеет место благодаря реализованному разделению вектор-функций $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ на “независимые” переменные.

Задача (11.35) при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ является конечномерной задачей нахождения хаусдорфова отклонения одного выпуклого компакта (минус супердифференциала) от другого выпуклого компакта (субдифференциала). Эта задача может быть эффективно решена в нашем случае; ее решение описано в следующем параграфе. На практике делается (равномерное) разбиение интервала $[0, T]$ и эта задача решается для каждой точки разбиения, то есть вычисляется $G((x_{(k)}, z_{(k)}), t_i)$, где $t_i \in [0, T]$, $i = \overline{1, N}$, — точки дискретизации (см. обозначения Леммы 5.5.1). При естественном дополнительном предположении Лемма 5.5.1 гарантирует, что вектор-функция, полученная с помощью кусочно-линейной интерполяции направлений квазидифференциального спуска, вычисленных в каждой точке такого разбиения интервала $[0, T]$, сходится в пространстве $L_{2n}^2[0, T]$ (при стремлении ранга дискретизации N к бесконечности) к искомой вектор-функции $G(x_{(k)}, z_{(k)})$.

Как было отмечено в предыдущем параграфе, при реализации алгоритма требуется найти хаусдорфово отклонение минус супердифференциала от субдифференциала функционала $I(x, z)$ в каждый момент времени (равномерного) разбиения интервала $[0, T]$. В этом параграфе подробно опишем решение этой подзадачи для некоторого фиксированного значения $t \in [0, T]$. Известно [37], что в нашем случае субдифференциал $\underline{\partial} \mathcal{I}(x, z, t)$ является выпуклым многогранником $A(t) \subset \mathbb{R}^{2n}$ и аналогично супердифференциал $\overline{\partial} \mathcal{I}(x, z, t)$ является выпуклым многогранником $B(t) \subset \mathbb{R}^{2n}$. При этом, конечно, множества $A(t)$ и $B(t)$ зависят от точки (x, z) . Для простоты записи мы опустим эту зависимость в обозначениях данного параграфа. Найдем хаусдорфово отклонение множества $-B(t)$ от множества $A(t)$. Ясно, что в этом случае достаточно перебрать все вершины $b_j(t)$, $j = \overline{1, V}$ (здесь V — число вершин многогранника $-B(t)$): найти евклидово расстояние от каждой из этих вершин до многогранника $A(t)$, а затем среди всех полученных расстояний выбрать наибольшее. Пусть искомое евклидово расстояние, соответствующее вершине $b_j(t)$, $j = \overline{1, V}$, достигается в точке $a_j(t) \in A(t)$ (единственной, поскольку $A(t)$ — выпуклый компакт). Тогда искомое отклонение есть величина $\|b_{\bar{j}}(t) - a_{\bar{j}}(t)\|_{\mathbb{R}^{2n}}$, $\bar{j} \in \{1, \dots, V\}$. (При этом это отклонение может достигаться в нескольких вершинах многогранника $-B(t)$; в этом случае $b_{\bar{j}}(t)$ обозначает любую из них.)

Отметим, что возникающая задача нахождения евклидова расстояния от точки до выпуклого многогранника может быть эффективно решена различными известными методами (см., например, [472]).

Изучим “слабую” сходимость предложенного (модифицированного) метода в двух частных случаях.

А. В данном пункте рассматривается случай, когда в результирующем функционале имеется только функция минимума, то есть функция $c_2(F_i(x), \psi_i)$, $i = \overline{1, n}$, отсутствует.

Для того чтобы передать основные идеи, мы предварительно исследуем свойства сходимости предложенного метода для аналогичной задачи в конечномерном случае (что представляет самостоятельный интерес), а затем перейдем к более общей задаче, рассматриваемой в этой главе.

Итак, рассмотрим задачу минимизации функции, которая является минимумом конечного числа непрерывно дифференцируемых функций. Пусть

$$\zeta(x) = \min_{i=\overline{1, M}} \zeta_i(x),$$

где $\zeta_i(x)$, $i = \overline{1, M}$, являются непрерывно дифференцируемыми функциями, определенными на \mathbb{R}^n .

Известно [39], что функция $\zeta(x)$ дифференцируема в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ по любому направлению $d \in \mathbb{R}^n$, $\|d\|_{\mathbb{R}^n} = 1$, и

$$\frac{\partial \zeta(x_0)}{\partial d} = \min_{i \in \mathcal{R}(x_0)} \left\langle \frac{\partial \zeta_i(x_0)}{\partial x}, d \right\rangle = \min_{w \in \bar{\partial} \zeta(x_0)} \langle w, d \rangle, \quad (11.36)$$

$$\mathcal{R}(x_0) = \left\{ i \in \{1, \dots, M\} \mid \zeta_i(x_0) = \zeta(x_0) \right\},$$

$$\bar{\partial} \zeta(x_0) = \text{co} \left\{ \frac{\partial \zeta_i(x_0)}{\partial x}, i \in \mathcal{R}(x_0) \right\}.$$

Известно также [39], что для того, чтобы точка $x^* \in \mathbb{R}^n$ минимизировала функцию $\zeta(x)$, необходимо чтобы

$$\min_{\|d\|_{\mathbb{R}^n}=1} \min_{i \in \mathcal{R}(x^*)} \left\langle \frac{\partial \zeta_i(x^*)}{\partial x}, d \right\rangle \geq 0. \quad (11.37)$$

Обозначим

$$\Psi_1(x) = \min_{\|d\|_{\mathbb{R}^n}=1} \min_{i \in \mathcal{R}(x)} \left\langle \frac{\partial \zeta_i(x)}{\partial x}, d \right\rangle. \quad (11.38)$$

Тогда необходимое условие минимума (11.37) функции $\zeta(x)$ в точке x^* можно переписать в виде неравенства $\Psi_1(x^*) \geq 0$.

Из формул (11.36), (11.38) видно, что по определению вектор $d_0 \in \mathbb{R}^n$, $\|d_0\|_{\mathbb{R}^n} = 1$, является направлением супердифференциального спуска функции $\zeta(x)$ в точке x^0 , если верно

$$\min_{i \in \mathcal{R}(x_0)} \left\langle \frac{\partial \zeta_i(x_0)}{\partial x}, d_0 \right\rangle = \Psi_1(x_0). \quad (11.39)$$

В терминах супердифференциала (см. (11.36)) направление супердифференциального спуска [37] — это вектор

$$d_0 = -\frac{w_0}{\|w_0\|_{\mathbb{R}^n}} \quad (11.40)$$

где w_0 — решение задачи

$$\max_{w \in \partial \zeta(x_0)} \|w\|_{\mathbb{R}^n} = \|w_0\|_{\mathbb{R}^n}. \quad (11.41)$$

Применим метод супердифференциального спуска к минимизации функции $\zeta(x)$. Опишем алгоритм применительно к рассматриваемым функции и пространству. Зафиксируем произвольную начальную точку $x_1 \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что множество

$$\mathcal{L}_\zeta(x_1) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \zeta(x) \leq \zeta(x_1) \right\}$$

ограничено (по \mathbb{R}^n -норме) (в силу произвольности начальной точки, фактически, следует предположить, что множество $\mathcal{L}_\zeta(x_1)$ ограничено для произвольной начальной точки). В силу непрерывности функции $\zeta(x)$ [37] множество $\mathcal{L}_\zeta(x_1)$ также замкнуто. Пусть точка $x_k \in \mathbb{R}^n$ уже построена. Если $\Psi_1(x_k) \geq 0$ (на практике мы проверяем, что это условие выполняется только с некоторой фиксированной точностью $\bar{\varepsilon}$, то есть $\Psi_1(x_k) \geq -\bar{\varepsilon}$), то точка x_k является стационарной точкой функции $\zeta(x)$ и процесс завершается. В противном случае строим следующую точку по правилу

$$x_{k+1} = x_k + \gamma_k d_k$$

где вектор d_k является направлением супердифференциального спуска функции $\zeta(x)$ в точке x_k (см. (11.40), (11.41)), а значение γ_k является решением следующей задачи одномерной минимизации

$$\min_{\gamma \geq 0} \zeta(x_k + \gamma d_k) = \zeta(x_k + \gamma_k d_k).$$

На практике задача выше решается на некотором интервале $[0, \bar{\gamma}]$ с некоторым фиксированным значением $\bar{\gamma}$. Тогда $\zeta(x_{k+1}) \leq \zeta(x_k)$.

Теорема 11.5.1. *При сделанных предположениях справедливо неравенство*

$$\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \Psi_1(x_k) \geq 0 \quad (11.42)$$

для последовательности, построенной по описанному выше алгоритму.

Доказательство. Заметим, что доказательство ниже частично основано на идеях аналогичного доказательства из книги [39].

Предположим противное. Тогда существуют такая подпоследовательность $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ и такое число $b > 0$, что для каждого $j \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\Psi_1(x_{k_j}) \leq -b. \quad (11.43)$$

Заметим, что для каждого $j \in \mathbb{N}$ множество $\mathcal{R}(x_{k_j})$ непусто.

Из определения направления наискорейшего спуска (см. (11.39)) следует, что для каждого $j \in \mathbb{N}$ существует индекс $\bar{i} \in \mathcal{R}(x_{k_j})$ такой, что для каждого $\alpha > 0$ верно соотношение

$$\begin{aligned} \zeta_{\bar{i}}(x_{k_j} + \alpha d_{k_j}) &= \zeta_{\bar{i}}(x_{k_j}) + \alpha \Psi_1(x_{k_j}) + o_{\bar{i}}(\alpha, x_{k_j}, d_{k_j}), \\ \frac{o_{\bar{i}}(\alpha, x_{k_j}, d_{k_j})}{\alpha} &\rightarrow 0, \quad \alpha \downarrow 0. \end{aligned} \quad (11.44)$$

Напомним, что $\zeta_{\bar{i}}(x_{k_j}) = \zeta(x_{k_j})$ для каждого индекса \bar{i} из множества $\mathcal{R}(x_{k_j})$ по определению этого индексного множества. Тогда, поскольку $\zeta_{\bar{i}}(x)$ по предположению является непрерывно дифференцируемой функцией, из неравенства (11.43) следует, что существует [39] такое $\bar{\alpha} > 0$, которое не зависит от числа k_j , и такое, что для $\bar{i} \in \mathcal{R}(x_{k_j})$, удовлетворяющего (11.44), и для каждого $\alpha \in (0, \bar{\alpha}]$ выполняется неравенство

$$\zeta_{\bar{i}}(x_{k_j} + \alpha d_{k_j}) \leq \zeta(x_{k_j}) - \frac{1}{2}\alpha b.$$

Используя тот факт что $\mathcal{R}(x_{k_j}) \neq \emptyset$ для всех $j \in \mathbb{N}$, мы окончательно имеем

$$\zeta(x_{k_j} + \bar{\alpha} d_{k_j}) \leq \zeta(x_{k_j}) - \frac{1}{2}\bar{\alpha} b = \zeta(x_{k_j}) - \beta \quad (11.45)$$

равномерно по $j \in \mathbb{N}$.

Это неравенство приводит к противоречию. Действительно, последовательность $\{\zeta(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ монотонно убывает и ограничена снизу числом $\min_{x \in \mathcal{L}_{\zeta}(x_{(1)})} \zeta(x)$, следовательно, имеет предел:

$$\{\zeta(x_k)\} \rightarrow \zeta^* \quad k \rightarrow \infty,$$

при этом, для каждого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\zeta(x_k) \geq \zeta^*. \quad (11.46)$$

Теперь выберем настолько большое число \bar{j} , что

$$\zeta(x_{k_{\bar{j}}}) < \zeta^* + \frac{1}{2}\beta.$$

В силу (11.45) имеем

$$\zeta(x_{k_{\bar{j}+1}}) \leq \zeta(x_{k_{\bar{j}} + \bar{\alpha} d_{k_{\bar{j}}}}) \leq \zeta^* - \frac{1}{2}\beta$$

что противоречит (11.46). □

Теперь вернемся к задаче главы. Здесь мы рассматриваем случай, когда $c(F_i(x), \psi_i) = c_1(F_i(x), \psi_i)$, $i = \overline{1, n}$. При этом минимизируемый функционал обозначим как $I_1(x, z)$.

Положим

$$\Psi_1(x, z) = \min_{\|g\|_{L_n^2[0, T] \times L_n^2[0, T]} = 1} \frac{\partial I_1(x, z)}{\partial g} = \frac{\partial I_1(x, z)}{\partial G}. \quad (11.47)$$

Тогда необходимым условием минимума [36] функционала $I_1(x, z)$ в точке (x^*, z^*) будет $\Psi_1(x^*, z^*) \geq 0$.

Приведем теперь некоторые результаты о сходимости метода квазидифференциального спуска применительно к функционалу $I_1(x, z)$. Для этого нам нужно сделать несколько дополнительных предположений.

Зафиксируем начальную точку $(x_{(1)}, z_{(1)})$. Предположим, что множество

$$\mathcal{L}_{I_1}((x_1, z_1)) = \left\{ (x, z) \in C_n[0, T] \times P_n[0, T] \mid I_1(x, z) \leq I_1(x_{(1)}, z_{(1)}) \right\}$$

ограничено в $L_n^2[0, T] \times L_n^2[0, T]$ -норме (ввиду произвольности начальной точки, на самом деле, следует предположить, что множество $\mathcal{L}_{I_1}((x_1, z_1))$ ограничено для произвольной точки).

Введем теперь семейство множеств \mathcal{I}_1 . Сначала определим функционал $I_{1,p}$, $p = 1, \left(\prod_{j=1}^r m(j) \right)^n$ следующим образом. Его подынтегральное выражение такое же, как у функционала I_1 , но функция максимума $\{f_{i,j_1}(x)\psi_i, \dots, f_{i,j_{m(j)}}(x)\psi_i\}$, $j = \overline{1, r}$, заменяется для каждого $i = \overline{1, n}$ только одной из функций $f_{i,j_1}\psi_i, \dots, f_{i,j_{m(j)}}\psi_i$, $j \in \{1, \dots, r\}$. Пусть семейство \mathcal{I}_1 состоит из сумм интегралов по интервалам разбиения временного промежутка $[0, T]$ для всех возможных конечных разбиений. При этом подынтегральное выражение каждого слагаемого в сумме совпадает с таковым у функционала $I_{1,p}$, $p \in \left\{ 1, \dots, \left(\prod_{j=1}^r m(j) \right)^n \right\}$.

Пусть для каждой точки, построенной описанным методом, справедливо следующее предположение: отрезок $[0, T]$ можно разбить на конечное число интервалов, в каждом из которых для каждого $i = \overline{1, n}$ либо $h_i(x_{(k)}, z_{(k)}) = 0$, либо активны одна (несколько) из функций $\left\langle -\psi_i^* \frac{\partial f_{i,j_q}(x_{(k)})}{\partial x}, G_1(x_{(k)}, z_{(k)}) \right\rangle$, $j = \overline{1, r}$, $q = \overline{1, m(j)}$ (где $G_1(x_{(k)}, z_{(k)})$ состоит из первых n компонент вектор-функции $G(x_{(k)}, z_{(k)})$).

Проиллюстрируем это предположение на простом примере. Рассмотрим простейший функционал (структура которого, однако, сохраняет основные черты общего случая)

$$\int_0^1 \frac{1}{2} \min^2 \{x(t) + 1, -x(t) + 1\} dt.$$

Рассмотрим точку $x_{(1)} = 0$ (то есть $x_{(1)}(t) = 0$ для всех $t \in [0, 1]$). Для того чтобы найти направление наискорейшего (супердифференциального) спуска функционала в этой точке, необходимо, согласно описанной теории, минимизировать производную по

направлению (вычисляемую в этой точке), то есть найти такую функцию $G(x_{(1)}) \in L_1^2[0, T]$, $\int_0^1 G^2(x_{(1)}, t) dt = 1$, которая минимизирует функционал

$$\int_0^1 \min \{x_{(1)}(t) + 1, -x_{(1)}(t) + 1\} \min \{g(t), -g(t)\} dt.$$

Здесь $g \in L_1^2[0, T]$, $\int_0^1 g^2(t) dt = 1$. Возьмем

$$G(x_{(1)}, t) = \begin{cases} -1, & \text{если } t \in [0, 0.5], \\ 1, & \text{если } t \in (0.5, 1] \end{cases}$$

как одно из очевидных решений. При этом, $\Psi_1(x_{(1)}) = \int_0^1 -1 dt = -1$. Мы видим, что сделанное предположение выполняется. Возьмем

$$\hat{I}_1(x) = \int_0^{0.5} \frac{1}{2}(x(t) + 1)^2 dt + \int_{0.5}^1 \frac{1}{2}(-x(t) + 1)^2 dt.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \hat{I}_1(x_{(1)} + \alpha G(x_{(1)})) &= \hat{I}_1(x_{(1)}) + \alpha \Psi_1(x_{(1)}) + o(\alpha, x_{(1)}, G(x_{(1)})), \\ \frac{o(\alpha, x_{(1)}, G(x_{(1)}))}{\alpha} &\rightarrow 0, \quad \alpha \downarrow 0, \end{aligned}$$

поскольку

$$\nabla \hat{I}_1(x_{(1)}) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [0, 0.5], \\ -1, & \text{если } t \in (0.5, 1], \end{cases}$$

то есть $\int_0^1 \nabla \hat{I}_1(x_{(1)}, t) G(x_{(1)}, t) dt = \int_0^1 -1 dt = -1$. Очевидно, что $\hat{I} \in \mathcal{I}_1$. Заметим что при $\gamma_{(1)} = 1$ получаем точку

$$x_{(2)}(t) = \begin{cases} -1, & \text{если } t \in [0, 0.5], \\ 1, & \text{если } t \in (0.5, 1], \end{cases}$$

которая доставляет глобальный минимум рассматриваемому функционалу.

Для функционалов из семейства \mathcal{I}_1 сделаем следующее дополнительное предположение. Пусть существует такое конечное число L , что для любого $\hat{I}_1 \in \mathcal{I}_1$ и для всех $\bar{x}, \bar{z}, \bar{\bar{x}}, \bar{\bar{z}}$ из шара с центром в начале координат и с некоторым конечным радиусом $\hat{r} + \hat{\alpha}$ (здесь $\hat{r} > \sup_{(x,z) \in \mathcal{L}_{I_1}((x_1, z_1))} \|(x, z)\|_{L_n^2[0, T] \times L_n^2[0, T]}$ и $\hat{\alpha}$ — некоторое положительное число) выполняется

$$\left\| \nabla \hat{I}_1(\bar{x}, \bar{z}) - \nabla \hat{I}_1(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{z}}) \right\|_{L_n^2[0, T] \times L_n^2[0, T]} \leq L \left\| (\bar{x}, \bar{z})' - (\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{z}})' \right\|_{L_n^2[0, T] \times L_n^2[0, T]}. \quad (11.48)$$

Замечание 11.5.2. На первый взгляд может показаться, что существование константы Липшица L для всех $\hat{I}_1 \in \mathcal{I}_1$ одновременно в сделанном предположении слишком обременительно. Однако если вспомнить, что на каждом из конечного числа отрезков интервала $[0, T]$ подынтегральное выражение функционала $\hat{I}_1 \in \mathcal{I}_1$ совпадает с подынтегральным выражением функционала $I_{1,p}$, $p \in \left\{1, \dots, \left(\prod_{j=1}^r m(j)\right)^n\right\}$, по построению (см. определение множества \mathcal{I}_1), то это предположение естественно, если предположить липшицевость каждого из “градиентов” $\nabla I_{1,p}$, $p = 1, \dots, \left(\prod_{j=1}^r m(j)\right)^n$; а это условие липшицевости градиента является общим предположением для обоснования классических методов оптимизации для дифференцируемых функционалов.

Лемма 11.5.1. Пусть выполнено условие (11.48). Тогда для каждого функционала $\hat{I}_1 \in \mathcal{I}_1$ и для всех $(x, z) \in \mathcal{L}_{\hat{I}_1}((x_1, z_1))$, $G \in C_n[0, T] \times P_n[0, T]$, $\|G\|_{L_n^2[0, T] \times L_n^2[0, T]} = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha \leq \hat{\alpha}$ имеет место неравенство

$$\hat{I}_1\left((x, z) + \alpha G\right) \leq \hat{I}_1(x, z) + \alpha \left\langle \nabla \hat{I}_1(x, z), G \right\rangle + \alpha^2 \frac{L}{2}.$$

Доказательство. Доказательство может быть проведено с очевидными изменениями таким же образом, как и для аналогичного утверждения в [285]. \square

Предположим, что при реализации метода для каждого $k \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\gamma_{(k)} < \hat{\alpha}$, где $\hat{\alpha}$ — число из Леммы 11.5.1 (см. также предположение перед Замечанием 11.5.2).

Теорема 11.5.2. При сделанных предположениях справедливо неравенство

$$\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \Psi_1(x_{(k)}, z_{(k)}) \geq 0 \quad (11.49)$$

для последовательности, построенной по правилу выше.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют такая подпоследовательность $\{(x_{k_j}, z_{k_j})\}_{j=1}^{\infty}$ и такое число $b > 0$, что для каждого $j \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\Psi_1(x_{k_j}, z_{k_j}) \leq -b. \quad (11.50)$$

Из определений направления наискорейшего спуска (11.47) и множества \mathcal{I}_1 (см. также (11.26)) следует, что для каждого $j \in \mathbb{N}$ существует функционал \hat{I}_1 из семейства \mathcal{I}_1 такой, что для каждого $\alpha > 0$ верно соотношение

$$\hat{I}_1\left((x_{k_j}, z_{k_j}) + \alpha G(x_{k_j}, z_{k_j})\right) = \hat{I}_1(x_{k_j}, z_{k_j}) + \alpha \Psi_1(x_{k_j}, z_{k_j}) + o\left(\alpha, (x_{k_j}, z_{k_j}), G(x_{k_j}, z_{k_j})\right), \quad (11.51)$$

$$\frac{o\left(\alpha, (x_{k_j}, z_{k_j}), G(x_{k_j}, z_{k_j})\right)}{\alpha} \rightarrow 0, \quad \alpha \downarrow 0,$$

при этом,

$$\Psi_1(x_{k_j}, z_{k_j}) = \left\langle \nabla \hat{I}_1(x_{k_j}, z_{k_j}), G(x_{k_j}, z_{k_j}) \right\rangle.$$

Напомним, что $\hat{I}_1(x_{k_j}, z_{k_j}) = I_1(x_{k_j}, z_{k_j})$ для каждого функционала \hat{I}_1 из семейства \mathcal{I}_1 по определению этого множества. Тогда из неравенства (11.50) в силу Леммы 11.5.1 существует такое $\bar{\alpha} > 0$, не зависящее от числа k_j , что для $\hat{I}_1 \in \mathcal{I}_1$, удовлетворяющего (11.51), и для каждого $\alpha \in (0, \bar{\alpha}]$ выполняется неравенство

$$\hat{I}_1\left((x_{k_j}, z_{k_j}) + \alpha G(x_{k_j}, z_{k_j})\right) \leq I_1(x_{k_j}, z_{k_j}) - \frac{1}{2}\alpha b.$$

Используя определение множества \mathcal{I}_1 , окончательно имеем

$$I_1\left((x_{k_j}, z_{k_j}) + \bar{\alpha} G(x_{k_j}, z_{k_j})\right) \leq I_1(x_{k_j}, z_{k_j}) - \frac{1}{2}\bar{\alpha} b = I_1(x_{k_j}, z_{k_j}) - \beta \quad (11.52)$$

равномерно по $j \in \mathbb{N}$.

Это неравенство приводит к противоречию. Действительно, последовательность $\{I_1(x_{(k)}, z_{(k)})\}_{k=1}^{\infty}$ монотонно убывает и ограничена снизу нулем (напомним, что функционал $I(x, z)$ неотрицателен по построению), следовательно, она имеет предел:

$$\{I_1(x_{(k)}, z_{(k)})\} \rightarrow I_1^* \text{ at } k \rightarrow \infty, \quad (11.53)$$

при этом, при каждом $k \in \mathbb{N}$ имеем $\{I_1(x_{(k)}, z_{(k)})\} \geq I_1^*$.

Теперь выберем настолько большое число \bar{j} , что

$$I_1(x_{(k_{\bar{j}})}, z_{(k_{\bar{j}})}) < I_1^* + \frac{1}{2}\beta.$$

В силу (11.52) имеем

$$I_1(x_{(k_{\bar{j}+1})}, z_{(k_{\bar{j}+1})}) \leq I_1\left((x_{(k_{\bar{j}})}, z_{(k_{\bar{j}})}) + \bar{\alpha} G(x_{(k_{\bar{j}})}, z_{(k_{\bar{j}})})\right) \leq I_1^* - \frac{1}{2}\beta$$

что противоречит (11.53). □

Замечание 11.5.3. Легко показать, что на самом деле в формулах (11.42), (11.49) нижний предел можно заменить на “обычный” предел, а неравенство — на равенство в рассмотренных случаях.

В. В данном пункте рассматривается случай, когда в результирующем функционале имеется только функция максимума, то есть функция $c_1(F_i(x), \psi_i)$, $i = \overline{1, n}$, отсутствует.

Для упрощения изложения предварительно исследуем свойства сходимости предложенного метода для аналогичной задачи с функционалом в “стандартной” форме, а затем перейдем к более общей задаче, рассматриваемой в этой главе.

Итак, рассмотрим задачу минимизации функционала с подынтегральным выражением в виде максимума конечного числа непрерывно дифференцируемых функций. Пусть функционал на пространстве $(C_n[0, T] \times P_n[0, T], \|\cdot\|_{L_n^2[0, T]} \times \|\cdot\|_{L_n^2[0, T]})$ имеет вид

$$I_2(x, z) = \int_0^T \xi(x(t), z(t)) dt = \int_0^T \max \left\{ \xi_1(x(t), z(t)), \dots, \xi_M(x(t), z(t)) \right\} dt,$$

где $\xi_i(x, z)$, $i = \overline{1, M}$, являются непрерывно дифференцируемыми на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ функциями.

Мы предполагаем, что при реализации описанного метода точки $x_k(t)$ и $z_k(t)$, а также направления субдифференциального спуска $G(x_k, z_k, t)$ ограничены (в равномерной норме) равномерно по $k = 1, 2, \dots$.

Заметим, что поскольку переменные x и z здесь рассматриваются как независимые, то, на самом деле поставленная выше задача может быть решена с помощью поточечной минимизации подынтегральной функции. Однако мы не прибегаем к такому упрощению и приводим “полноценное” доказательство, чтобы показать технику, применимую к более общему случаю функционала, рассматриваемого в этой главе.

Положим

$$\begin{aligned} \Psi_2(x, z) &= \min_{\|g\|_{L_n^2[0, T] \times L_n^2[0, T]} = 1} \frac{\partial I_2(x, z)}{\partial g} = \frac{\partial I_2(x, z)}{\partial G} = \\ &= \int_0^T \max_{i \in \mathcal{R}(x(t), z(t))} \left(\left\langle \frac{\partial \xi_i(x(t), z(t))}{\partial x}, G_1(x, z, t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \xi_i(x(t), z(t))}{\partial z}, G_2(x, z, t) \right\rangle \right) dt, \end{aligned}$$

здесь $\mathcal{R}(x, z) = \left\{ i \in \{1, \dots, M\} \mid \xi_i(x, z) = \xi(x, z) \right\}$ и $G_1(x, z)$ ($G_2(x, z)$) состоит из первых (последних) n компонент вектор-функции $G(x, z)$.

Тогда необходимым условием минимума [36] функционала $I_2(x, z)$ в точке (x^*, z^*) будет $\Psi_2(x^*, z^*) \geq 0$.

Пусть

$$\Psi_{2, \bar{\Delta}}(x, z) = \int_0^T \max_{i \in \mathcal{R}_{\bar{\Delta}}(x(t), z(t))} \left(\left\langle \frac{\partial \xi_i(x(t), z(t))}{\partial x}, G_1(x, z, t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \xi_i(x(t), z(t))}{\partial z}, G_2(x, z, t) \right\rangle \right) dt, \quad (11.54)$$

здесь $\mathcal{R}_{\bar{\Delta}}(x, z) = \left\{ i \in \{1, \dots, M\} \mid \xi(x, z) - \xi_i(x, z) \leq \bar{\Delta} \right\}$.

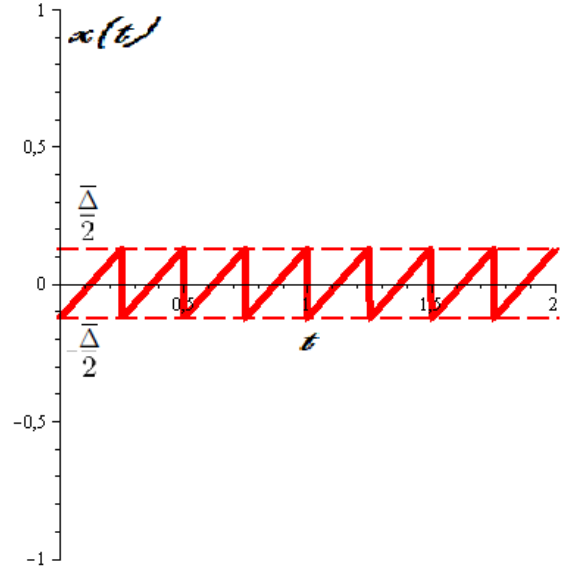
Если имеем $\Psi_{2, \bar{\Delta}}(x^{\bar{\Delta}*}, z^{\bar{\Delta}*}) \geq 0$, тогда точка $(x^{\bar{\Delta}*}, z^{\bar{\Delta}*})$ называется $\bar{\Delta}$ -стационарной точкой функционала $I_2(x, z)$.

Понятие $\bar{\Delta}$ -стационарной точки состоит в следующем. Рассуждая как в [39], можно показать, что если функции $\xi_i(x, z)$ выпуклы в точке $i \in \mathcal{R}_{\bar{\Delta}}(x^{\bar{\Delta}*}, z^{\bar{\Delta}*})$, то выполняется неравенство

$$0 \leq I_2(x^{\bar{\Delta}*}, z^{\bar{\Delta}*}) - \min_{(x,z) \in C_n[0,T] \times P_n[0,T]} \int_0^T \xi(x(t), z(t)) dt \leq T\bar{\Delta},$$

то есть значение функционала I_2 в его $\bar{\Delta}$ -стационарной точке не сильно отличается от значения функционала I_2 в его точке минимума.

Заметим, что при рассмотрении случая функции максимума $\xi(x(t), z(t))$, $t \in [0, T]$, под знаком интеграла мы используем модификацию описанного алгоритма. Модификация заключается в следующем: при вычислении субдифференциала этой max-функции в каждый момент времени мы считаем функцию $\xi_{\bar{i}}(x, z)$, $\bar{i} \in \{1, \dots, M\}$, активной в некоторой точке $(x_0, z_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, если она активна с погрешностью $\bar{\Delta}$, то есть $\xi(x_0, z_0) - \xi_{\bar{i}}(x_0, z_0) \leq \bar{\Delta}$. Другими словами, при использовании соответствующего правила субдифференциального исчисления при реализации метода мы используем множество $R_{\bar{\Delta}}(x_k(t_i), z_k(t_i))$ вместо множества $R(x_k(t_i), z_k(t_i))$ в каждый дискретный момент t_i , $i = \overline{1, \bar{N}}$, временного интервала $[0, T]$.



Проиллюстрируем эту модификацию на простом примере. Рассмотрим минимизацию функционала

$$J(x) = \int_0^2 \xi(x(t)) dt = \int_0^2 \max\{\xi_1(x(t)), \xi_2(x(t))\} dt = \int_0^2 \max\{x(t), -x(t)\} dt = \int_0^2 |x(t)| dt.$$

Очевидно, что $x^*(t) = 0$ для всех $t \in [0, T]$. Возьмем точку $x_1(t) = t - 1$ в качестве начального приближения. При реализации модифицированного метода на некотором шаге будет получена “пилообразная” кривая, показанная на рисунке, при этом она не будет превышать заданного значения $\bar{\Delta}$ при каждом $t \in [0, 2]$. Итак, если рассмотреть $\bar{\Delta}$ -активные функции в любой точке дискретизации t_i , $i = \overline{1, \bar{N}}$, то условие минимума выполняется, поскольку $0 \in [-1, 1] = \text{co} \left\{ \frac{\partial \xi_1(x^{\bar{\Delta}*}(t_i))}{\partial x}, \frac{\partial \xi_2(x^{\bar{\Delta}*}(t_i))}{\partial x} \right\}$, и процесс завершается на этом шаге. Тогда $\bar{\Delta}$ -стационарная точка, полученная “пилообразная” кривая $x^*(t)$, является приближенным решением и $0 \leq J(x^{\bar{\Delta}*}) - J(x^*) \leq T\bar{\Delta} = 2\bar{\Delta}$.

Теорема 11.5.3. При сделанных предположениях выполняется неравенство

$$\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \Psi_{2, \bar{\Delta}}(x(k), z(k)) \geq 0$$

для последовательности, построенной по (модифицированному) правилу выше.

Доказательство. Обозначим

$$\psi_{2, \bar{\Delta}}(x(t), z(t)) = \max_{i \in R_{\bar{\Delta}}(x(t), z(t))} \left(\left\langle \frac{\partial \xi_i(x(t), z(t))}{\partial x}, G_1(x, z, t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \xi_i(x(t), z(t))}{\partial z}, G_2(x, z, t) \right\rangle \right),$$

$$C_1 = \max_{t \in [0, T]} \max_{(x_k(t), z_k(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \max_{i=1, M} \left\| \left(\frac{\partial \xi_i(x_k(t), z_k(t))}{\partial x}, \frac{\partial \xi_i(x_k(t), z_k(t))}{\partial z} \right)' \right\|_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n},$$

$$C_2 = \max_{t \in [0, T]} \max_{(x_k(t), z_k(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \psi_{2, \bar{\Delta}}(x_k(t), z_k(t))$$

и заметим, что $C_1 < \infty$ и $C_2 < \infty$ по предположению.

Предположим противное. Тогда существуют такая подпоследовательность $\{(x_{k_j}, z_{k_j})\}_{j=1}^{\infty}$ и такое число $b > 0$, что для каждого $j \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\int_T \psi_{2, \bar{\Delta}}(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) dt \leq -b.$$

Тогда в силу ограниченности подынтегрального выражения $\psi_{2, \bar{\Delta}}(x(t), z(t))$ на $[0, T]$ ясно, что существует такое число $\bar{b} > 0$, что для каждого $j \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\int_{T_{k_j}^-} \psi_{2, \bar{\Delta}}(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) dt + \int_{T_{k_j}^+} \psi_{2, \bar{\Delta}}(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) dt \leq -\frac{3b}{4}, \quad (11.55)$$

где подмножества $T_{k_j}^-$ и $T_{k_j}^+$ of $[0, T]$ определены следующим образом:

$$T_{k_j}^- = \left\{ t \in [0, T] \mid \psi_{2, \bar{\Delta}}(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) < -\bar{b} \right\},$$

$$T_{k_j}^+ = \left\{ t \in [0, T] \mid \psi_{2, \bar{\Delta}}(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) > 0 \right\},$$

также введем множество

$$T_{k_j}^0 = \left\{ t \in [0, T] \mid -\bar{b} \leq \psi_{2, \bar{\Delta}}(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) \leq 0 \right\}.$$

Ниже мы используем тот факт, что функции $\xi_i(x, z)$, $i = \overline{1, M}$, непрерывно дифференцируемы, а последовательности $\{(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t))\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{G_{k_j}(t)\}_{j=1}^{\infty}$, $G_{k_j}(t) := G(x_{k_j}, z_{k_j}, t)$, $j \in \mathbb{N}$, ограничены равномерно на $[0, T]$ по предположению.

Рассмотрим случай $t \in T_{k_j}^0$.

Для каждого $j \in \mathbb{N}$, если $i \in R_{\bar{\Delta}}(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t))$, тогда для каждого $\alpha > 0$ будет

$$\xi_i\left((x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) + \alpha G_{k_j}(t)\right) \leq \xi_i(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) + \alpha \cdot 0 + o_i\left(\alpha, x_{k_j}(t), z_{k_j}(t), G_{k_j}(t)\right).$$

Существует [39] такое число $\overline{\overline{\alpha}}$, которое не зависит от числа k_j и от индекса i , что для каждого $\alpha \in (0, \overline{\overline{\alpha}}]$ выполняется неравенство

$$\xi_i\left((x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) + \alpha G_{k_j}(t)\right) \leq \xi_i(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) + \alpha \frac{b}{4T}.$$

Для каждого $j \in \mathbb{N}$, если $i \notin R_{\overline{\Delta}}(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t))$, то для каждого $\alpha > 0$ имеем неравенство

$$\begin{aligned} \xi_i\left((x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) + \alpha G_{k_j}(t)\right) &\leq \xi_i(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) + \alpha C_1 + o_i\left(\alpha, x_{k_j}(t), z_{k_j}(t), G_{k_j}(t)\right) \leq \\ &\leq \xi(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) - \overline{\Delta} + \alpha C_1 + o_i\left(\alpha, x_{k_j}(t), z_{k_j}(t), G_{k_j}(t)\right). \end{aligned}$$

Так как $C_1 < \infty$, то существует [39] такое число $\overline{\overline{\alpha}}_0$, $0 < \overline{\overline{\alpha}}_0 \leq \overline{\overline{\alpha}}$, которое не зависит от числа k_j и от индекса i , что для каждого $\alpha \in (0, \overline{\overline{\alpha}}_0]$ имеем

$$\xi_i\left((x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) + \alpha G_{k_j}(t)\right) \leq \xi_i(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) - \frac{\overline{\Delta}}{2}.$$

Для каждого $\alpha \in (0, \overline{\overline{\alpha}}_0]$, поскольку $\max\left\{\alpha \frac{b}{4T}, -\frac{\overline{\Delta}}{2}\right\} = \alpha \frac{b}{4T}$, отсюда получаем неравенство

$$\int_{T_{k_j}^0} \xi\left((x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) + \alpha G_{k_j}(t)\right) dt \leq \int_{T_{k_j}^0} \xi(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) dt + \alpha \frac{b}{4}. \quad (11.56)$$

Рассмотрим случай $t \in T_{k_j}^-$.

Если $i \notin R_{\overline{\Delta}}(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t))$, то (так как $C_1 < \infty$) существует [39] такое число $\overline{\overline{\alpha}}_0$, $0 < \overline{\overline{\alpha}}_0 \leq \overline{\overline{\alpha}}$, которое не зависит от числа k_j и от индекса i , что для каждого $\alpha \in (0, \overline{\overline{\alpha}}_0]$ имеем

$$\xi_i\left((x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) + \alpha G_{k_j}(t)\right) \leq \xi_i(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) - \frac{\overline{\Delta}}{2}.$$

Для каждого $j \in \mathbb{N}$, если $i \in R_{\overline{\Delta}}(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t))$, то для каждого $\alpha > 0$ имеем

$$\xi_i\left((x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) + \alpha G_{k_j}(t)\right) \leq \xi_i(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) + \alpha \psi_{2, \overline{\Delta}}(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) + o_i\left(\alpha, x_{k_j}(t), z_{k_j}(t), G_{k_j}(t)\right).$$

Так как $C_2 < \infty$, то существует [39] такое число $\overline{\overline{\alpha}}$, $0 < \overline{\overline{\alpha}} \leq \overline{\overline{\alpha}}_0$, которое не зависит от числа k_j и от индекса i , что для каждого $\alpha \in (0, \overline{\overline{\alpha}}]$ выполняется неравенство

$$\xi_i\left((x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) + \alpha G_{k_j}(t)\right) \leq \xi_i(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) + \alpha \psi_{2, \overline{\Delta}}(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) + \alpha \frac{b}{8T} \quad (11.57)$$

и кроме того, в силу неравенства $\overline{\Delta} > 0$ и ограниченности функции $\psi_{2, \overline{\Delta}}(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t))$ на $[0, T]$ и в силу определения множества $T_{k_j}^-$, это число $\overline{\overline{\alpha}}$ можно взять таким, что для каждого $\alpha \in (0, \overline{\overline{\alpha}}]$ будет $\max\left\{\alpha \psi_{2, \overline{\Delta}}(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)), -\frac{\overline{\Delta}}{2}\right\} = \alpha \psi_{2, \overline{\Delta}}(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t))$.

Рассмотрим случай $t \in T_{k_j}^+$.

Если $i \notin R_{\bar{\Delta}}(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t))$, то (так как $C_1 < \infty$) существует [39] такое число $\bar{\alpha}_0$, $0 < \bar{\alpha}_0 \leq \bar{\bar{\alpha}}$, которое не зависит от числа k_j и от индекса i , что для каждого $\alpha \in (0, \bar{\alpha}_0]$ имеем

$$\xi_i\left((x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) + \alpha G_{k_j}(t)\right) \leq \xi_i(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) - \frac{\bar{\Delta}}{2}.$$

Для каждого $j \in \mathbb{N}$, если $i \in R_{\bar{\Delta}}(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t))$, тогда для каждого $\alpha > 0$ будет

$$\xi_i\left((x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) + \alpha G_{k_j}(t)\right) \leq \xi_i(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) + \alpha \psi_{2, \bar{\Delta}}(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) + o_i\left(\alpha, x_{k_j}(t), z_{k_j}(t), G_{k_j}(t)\right).$$

Так как $C_2 < \infty$, то существует [39] такое число $\bar{\alpha}$, $0 < \bar{\alpha} \leq \bar{\alpha}_0$, которое не зависит от числа k_j и от индекса i , что для каждого $\alpha \in (0, \bar{\alpha}]$ выполняется неравенство

$$\xi_i\left((x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) + \alpha G_{k_j}(t)\right) \leq \xi_i(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) + \alpha \psi_{2, \bar{\Delta}}(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) + \alpha \frac{b}{8T} \quad (11.58)$$

и заметим, что по определению множества $T_{k_j}^+$ для каждого $\alpha \in (0, \bar{\alpha}]$ будет $\max\left\{\alpha \psi_{2, \bar{\Delta}}(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)), -\frac{\bar{\Delta}}{2}\right\} = \alpha \psi_{2, \bar{\Delta}}(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t))$.

Из (11.55), (11.56), (11.57), (11.58) окончательно имеем

$$\begin{aligned} & \int_T \xi\left((x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) + \bar{\alpha} G_{k_j}(t)\right) dt = \\ & = \int_{T_{k_j}^-} \xi\left((x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) + \bar{\alpha} G_{k_j}(t)\right) dt + \int_{T_{k_j}^+} \xi\left((x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) + \bar{\alpha} G_{k_j}(t)\right) dt + \\ & \quad + \int_{T_{k_j}^0} \xi\left((x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) + \bar{\alpha} G_{k_j}(t)\right) dt \leq \\ & \leq \int_{T_{k_j}^-} \xi(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) dt + \int_{T_{k_j}^-} \bar{\alpha} \psi_{2, \bar{\Delta}}(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) dt + \bar{\alpha} \frac{b}{8} + \\ & \quad + \int_{T_{k_j}^+} \xi(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) dt + \int_{T_{k_j}^+} \bar{\alpha} \psi_{2, \bar{\Delta}}(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) dt + \bar{\alpha} \frac{b}{8} + \\ & \quad + \int_{T_{k_j}^0} \xi(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) dt + \bar{\alpha} \frac{b}{4} \leq \\ & \leq \int_T \xi(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) dt - \bar{\alpha} \frac{3b}{4} + \bar{\alpha} \frac{b}{4} + \bar{\alpha} \frac{b}{4} = \\ & = \int_T \xi(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) dt - \bar{\alpha} \frac{b}{4} = \int_T \xi(x_{k_j}(t), z_{k_j}(t)) dt - \beta \end{aligned}$$

равномерно по $j \in \mathbb{N}$.

Как можно непосредственно проверить (используя определение множества $R_{\overline{\Delta}}(x_{(k)}, z_{(k)})$), последовательность $\{I_2(x_{(k)}, z_{(k)})\}_{k=1}^{\infty}$ монотонно убывает и ограничена снизу нулем (напомним, что функционал $I(x, z)$ неотрицателен по построению), следовательно, она имеет предел:

$$\{I_2(x_{(k)}, z_{(k)})\} \rightarrow I_2^* \text{ at } k \rightarrow \infty,$$

при этом при каждом $k \in \mathbb{N}$ имеем $\{I_2(x_{(k)}, z_{(k)})\} \geq I_2^*$. Далее приходим к противоречию аналогично тому, как это сделано в конце доказательства Теоремы 11.5.2. \square

Теперь вернемся к задаче главы. Здесь мы рассматриваем случай, когда $c(F_i(x), \psi_i) = c_2(F_i(x), \psi_i)$, $i = \overline{1, n}$. При этом минимизируемый функционал обозначим как $I_2(x, z)$.

Положим

$$\Psi_2(x, z) = \min_{\|g\|_{L_n^2[0, T] \times L_n^2[0, T]} = 1} \frac{\partial I_2(x, z)}{\partial g} = \frac{\partial I_2(x, z)}{\partial G}.$$

Тогда необходимым условием минимума [36] функционала $I_2(x, z)$ в точке (x^*, z^*) будет $\Psi_2(x^*, z^*) \geq 0$.

Функционал $\Psi_{2, \overline{\Delta}}(x, z)$ строится для функционала $I_2(x, z)$ по формуле, аналогичной формуле (11.55).

Приведем теперь некоторые результаты о сходимости метода квазидифференциального спуска применительно к функционалу $I_2(x, z)$. Для этого потребуются сделать несколько дополнительных предположений.

Пусть для каждой точки, построенной в ходе описанного метода, справедливо следующее предположение: интервал $[0, T]$ можно разбить на конечное число интервалов, в каждом из которых для каждого $i = \overline{1, n}$ либо $h_i(x_{(k)}, z_{(k)}) = 0$, либо активны одна (несколько) из функций $\left\langle -\psi_i^* \frac{\partial g_{i, j_p}(x_{(k)})}{\partial x}, G_1(x_{(k)}, z_{(k)}) \right\rangle$, $j = \overline{1, s}$, $p = \overline{1, k(j)}$ (где $G_1(x_{(k)}, z_{(k)})$ состоит из первых n компонент вектор-функции $G(x_{(k)}, z_{(k)})$).

Теорема 11.5.4. *При сделанных предположениях справедливо неравенство*

$$\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \Psi_{2, \overline{\Delta}}(x_{(k)}, z_{(k)}) \geq 0$$

для последовательности, построенной по (модифицированному) правилу выше.

Замечание 11.5.4. Как можно заметить, выше мы сделали хотя и связанные с точки зрения теории оптимизации, все же несколько различные предположения относительно свойств функционалов I_1 и I_2 , и использовали разные методы для соответствующих доказательств. Интересный возникающий вопрос — “связать” предположения и доказательства для обоих результатов, поскольку представляется, что они могут быть “унифицированы”.

11.6 Численные примеры

В этом разделе даны иллюстративные примеры реализации описанного алгоритма.

Расчеты проводились в пакете MatLab 18.0. Решение задачи одномерной минимизации проводилось на интервале $[0, 1]$ (то есть здесь $\bar{\gamma} = 1$) в MatLab с помощью встроенного алгоритма `fminbnd()` с его внутренними параметрами по умолчанию. В соответствии с документацией для решения этой задачи в MatLab используется метод золотого сечения в сочетании с параболической интерполяцией [55]. В примере погрешность решения оценивалась на основе значения функционала. Все интегралы вычислялись в MatLab с помощью встроенной функции `evalf(int())` с ее внутренними параметрами по умолчанию. В соответствии с документацией для решения этой задачи в MatLab используется метод Гаусса-Кронрода [13]. В данных примерах параметр $\bar{\varepsilon}$ игнорировался, а погрешность решения оценивалась на основе значения функционала. Для получения вектор-функции $\psi^*(x(t), z(t), t)$, $t \in [0, T]$, был использован метод кодифференциального спуска [180] для минимизации соответствующей штрафной функции со штрафным параметром $\lambda = 5$ в точках t_i , $i = \overline{1, N}$, дискретизации.

Пример 11.6.1. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}_1 \in x_2 + [-2, 2](|x_1| + |x_2|), \quad \dot{x}_2 \in x_1 + [-2, 2](|x_1| + |x_2|)$$

на интервале времени $[0, 1]$ с граничными условиями

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 1, \quad x_1(1) = 0, x_2(1) = 2.$$

В качестве ограничивающей поверхности возьмем

$$s(x) = x_1 = 0.$$

Возьмем $(x_{(1)}, z_{(1)}) = (0, 0, 0, 0)'$ в качестве первого приближения, тогда имеем $I(x_{(1)}, z_{(1)}) = 1$. Шаг дискретизации составил 2×10^{-1} (то есть здесь $N = 5$). Рисунок иллюстрирует полученные траектории. Видно, что дифференциальное включение выполняется, траектория также практически лежит на требуемой поверхности. Погрешность граничных значений не превышает величины 5×10^{-3} . Для получения такой точности потребовалось 5 итераций. Значение функционала на полученной траектории составляет примерно 3×10^{-5} .

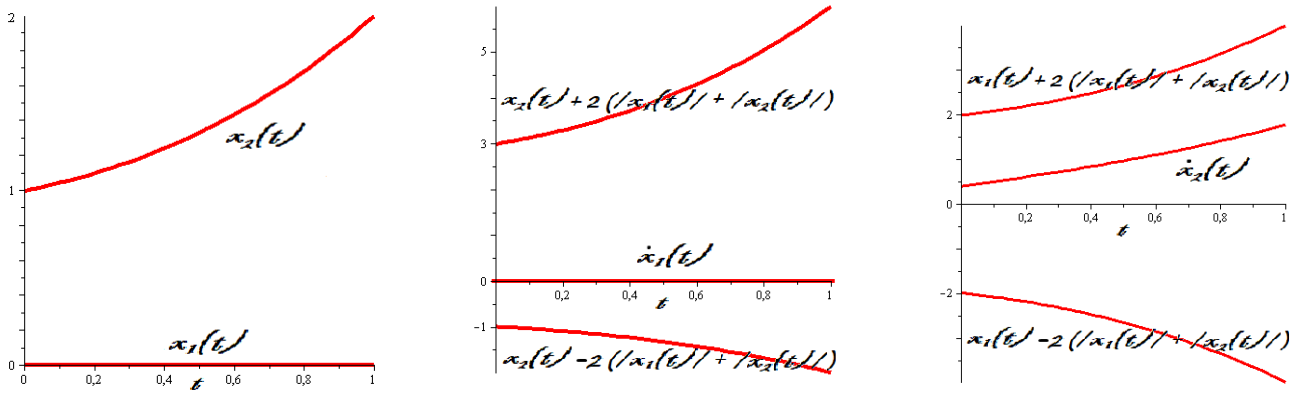


Рис. 11.1: Решение Примера 11.6.1

Пример 11.6.2. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}_1 \in \text{co}\{x_1, x_2, x_3\}, \quad \dot{x}_2 \in \text{co}\{-2x_1, x_3\}, \quad \dot{x}_3 = x_1 + x_2$$

на интервале времени $[0, 1]$ с граничными условиями

$$x_1(0) = -1, \quad x_2(0) = -1, \quad x_3(0) = 2.5, \quad x_1(1) = 1, \quad x_2(1) = 1, \quad x_3(1) = 2.5.$$

В качестве ограничивающей поверхности возьмем

$$s(x) = x_1 = 0.$$

$$s(x) = x_1 - x_2 = 0.$$

Возьмем $(x_{(1)}, z_{(1)}) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)'$ в качестве первого приближения, тогда имеем $I(x_{(1)}, z_{(1)}) = 8.125$. Шаг дискретизации составил 2×10^{-1} (то есть здесь $N = 10$). Рисунок иллюстрирует полученные траектории. Из рисунка видно, что дифференциальное включение выполняется, траектория также практически лежит на требуемой поверхности. Погрешность граничных значений не превышает величины 2×10^{-3} . Для получения такой точности потребовалось 66 итераций. Значение функционала на полученной траектории составляет примерно 2×10^{-5} .

Заметим, что мы намеренно взяли такую поверхность фазовых ограничений, чтобы траектории $x_1(t)$ и $x_2(t)$ совпадали. Таким образом, если на некоторых итерациях траектория уже лежит на поверхности $s(x) = 0$ и $h_1(x, z) > 0$, то обе эти траектории будут активны на некотором ненулевом интервале времени (если $x_1(t) = x_2(t) > x_3(t)$ на этом интервале). Это приведет к вычислению “полноценного” супердифференциала на этих итерациях.



Рис. 11.2: Решение Примера 11.6.2

Пример 11.6.3. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}_1 \in [x_1, x_2] \cap [x_2 - 1, x_2 + 1],$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + 1$$

на интервале времени $[0, 1]$ с граничными условиями

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_2(1) = 1.$$

Рассмотрим более общую задачу минимизации функционала

$$\mathcal{J}(x) = \int_0^1 |x_1(t)| dt.$$

Одним из очевидных решений является $x_1^*(t) = 0$, $x_2^*(t) = t$ for all $t \in [0, 1]$.

Иллюстративный пример в таком виде взят намеренно для того, чтобы функционал качества оказался на оптимальной траектории существенно негладким (а лишь субдифференцируемым). Для решения этой оптимизационной задачи при наличии ограничений рассмотрим соответствующую задачу безусловной минимизации функционала

$$J(x, z) := \mathcal{J}(x) + \lambda I(x, z)$$

с достаточно большим штрафным множителем λ . Возьмем $\lambda^* = 10$ здесь. Также заметим, что $J(x^*, z^*) = 0$.

Имеем

$$c(F_1(x), \psi_1) = \min \left\{ \frac{x_1 + x_2}{2} \psi_1 + \frac{|x_1 - x_2|}{2}, x_2 \psi_1 + 1 \right\},$$

$$c(F_2(x), \psi_2) = \psi_2(x_1 + 1)$$

для $\psi_1, \psi_2 \in S_1$.

Рассмотрим подробно опорную функцию $c(F_1(x), \psi_1)$ для $\psi_1 \in S_1$. Как показано в Разделе 11.4, когда обе функции активны, эта функция супердифференцируема при условии, что $x_1 \neq x_2$. Но интересно отметить, что в случае $x_1 = x_2$ активной является только первая функция, а поскольку функция модуля может быть представлена как max-функция двух непрерывных дифференцируемых функций (самой функции под модулем и противоположной ей), то, как опять же отмечено в Разделе 11.4, эта функция субдифференцируема в случае $x_1 = x_2$.

Возьмем $(x_{(1)}, z_{(1)}) = (-1, -2, 0, 0)'$ в качестве первого приближения. Шаг дискретизации составил 10^{-1} . Рисунок иллюстрирует полученные траектории. Из рисунка видно, что дифференциальное включение практически выполняется (видим, что полученная кривая $\dot{x}_1(t)$ практически совпадает с “нижней” границей $x_1(t)$ множества $F_1(x(t))$, а полученная кривая $\dot{x}_2(t)$ практически совпадает с кривой $x_1(t) + 1$ (что формально и является множеством $F_2(x(t))$)). Погрешность граничных значений не превышает величины 5×10^{-3} . Для получения такой точности потребовалось 37 итераций. Значение функционала на полученной траектории имеет порядок 10^{-3} .

Обратим внимание, что мы намеренно выбрали такую точку на первой итерации, чтобы сделать обе функции под минимумом в первой опорной функции активными (см. формулу выше и заметим, что, как можно проверить, $\psi_1^*(x_{(1)}, z_{(1)}) = 1$), поэтому опорная функция будет существенно негладкой в этой точке.



Рис. 11.3: Решение Примера 11.6.3

Пример 11.6.4. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x), \quad F(x) = B_2 \cap \mathfrak{E}_2(x), \quad t \in [0, 1],$$

где $\mathfrak{E}_2(x)$ есть эллипс, зависящий от фазовой координаты:

$$\mathfrak{E}_2(x) = \left\{ (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(\bar{x} - 2)^2}{x_1^2 + 3} + \bar{y}^2 \leq 1 \right\}.$$

Граничные условия заданы так:

$$x(0) = (0, 0)', \quad x(1) = (0.75, 0.5)'.$$

Имеем

$$c(B_2, \psi) = \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} = 1, \quad c(\mathfrak{E}_2(x), \psi) = \sqrt{(x_1^2 + 3)\psi_1^2 + \psi_2^2} + 2\psi_1.$$

Возьмем $(x_{(1)}, z_{(1)})' = (t, t, 1, 1)'$ в качестве первого приближения. Шаг дискретизации составил 10^{-1} . Рисунок иллюстрирует полученные траектории. На рисунке изображены точки $z^*(t)$ и допустимое множество $B_2 \cap \mathfrak{E}_2(x(t))$ расположения этих точек при некоторых значениях t из отрезка $[0, 1]$, видно, что рассматриваемое дифференциальное включение выполняется для этих значений $t \in [0, 1]$ (легко проверить, что оно справедливо и для всех остальных моментов времени $t \in [0, 1]$). Погрешность граничных значений не превышает величины 5×10^{-3} . Для получения такой точности потребовалось 15 итераций. Значение функционала на полученной траектории имеет порядок 5×10^{-3} .

Заметим, что, как легко проверить, расстояния от этой точки до рассматриваемых множеств не равны для каждого момента времени $t \in [0, 1]$, поэтому требование единственности вектора ψ^* (для справедливости Теоремы 11.4.1) здесь выполнено (см. Замечание 11.3.1). То же самое справедливо для точек $z_{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$ на всех остальных итерациях алгоритма.

Обратим внимание, что здесь мы исследуем функционал $\tilde{I}(x, z)$ (см. Замечание 11.3.1).

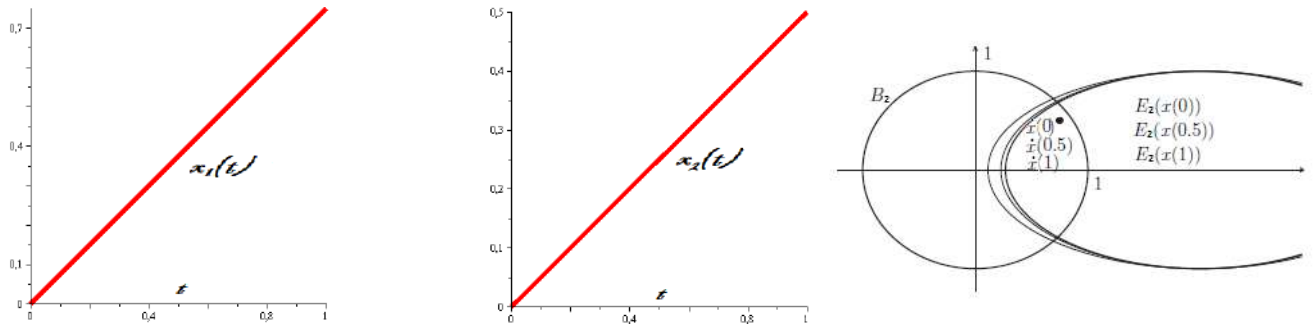


Рис. 11.4: Решение Примера 11.6.4

Пример 11.6.5. Тестовая задача, исследуемая здесь, представляет собой модифицированную задачу из [427] с системой из трех масс, соединенных пружинами под действием силы и с трением, как показано на рисунке. Этот объект объединяет в себе задачи двух типов: моделирование сухого трения порождает разрывную систему, движущуюся в скользящем режиме, поэтому может рассматриваться как дифференциальное включение; переход в скользящий режим на поверхности $s(x) = x_4 = 0$ обеспечивается дополнительной негладкой функцией

управления $u_1(x) = -a_1|x|\text{sgn}(s(x))$, где коэффициент усиления $a_1 = 1.05$, порождая опорную функцию множества в правой части этого включения, вид которой обсуждается в главе. Цель внешнего вынуждающего слагаемого $u(t)$ — перевести систему (движущуюся в скользящем режиме) в заданную точку в конечный момент времени.

Фактические дифференциальные уравнения, которые необходимо решить:

$$\ddot{x}_1 = (-x_1) + (x_2 - x_1) - \dot{x}_1 - 1.05|x|\text{sgn}(\dot{x}_1),$$

$$\ddot{x}_2 = (x_1 - x_2) + (x_3 - x_2) - \dot{x}_2 - 0.3\text{sgn}(\dot{x}_2),$$

$$\ddot{x}_3 = (x_2 - x_3) - \dot{x}_3 - 0.3\text{sgn}(\dot{x}_3) + u,$$

или, в нормальной форме

$$\dot{x}_1 = x_4, \quad \dot{x}_2 = x_5, \quad \dot{x}_3 = x_6,$$

$$\dot{x}_4 = (-x_1) + (x_2 - x_1) - x_4 - 1.05|x|\text{sgn}(x_4),$$

$$\dot{x}_5 = (x_1 - x_2) + (x_3 - x_2) - x_5 - 0.3\text{sgn}(x_5),$$

$$\dot{x}_6 = (x_2 - x_3) - x_6 - 0.3\text{sgn}(x_6) + u,$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = -1, \quad x_2(0) = 1, \quad x_3(0) = -1, \quad x_4(0) = -1, \quad x_5(0) = 1, \quad x_6(0) = 1.$$

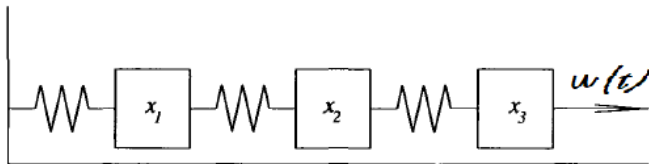


Рис. 11.5: Модель Примера 11.6.5

Согласно определению Филиппова [100] соответствующее дифференциальное включение (с такими же краевыми условиями) на поверхности разрыва $x_4 = 0$ имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_4, \quad \dot{x}_2 = x_5, \quad \dot{x}_3 = x_6,$$

$$\dot{x}_4 \in (-x_1) + (x_2 - x_1) - x_4 + 1.05|x|[-1, 1],$$

$$\dot{x}_5 = (x_1 - x_2) + (x_3 - x_2) - x_5 - 0.3\text{sgn}(x_5),$$

$$\dot{x}_6 = (x_2 - x_3) - x_6 - 0.3\text{sgn}(x_6) + u.$$

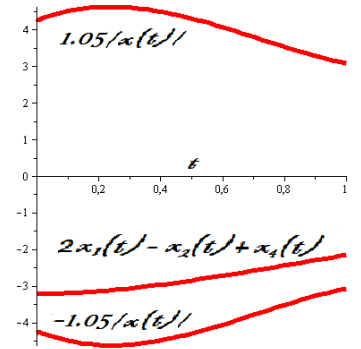
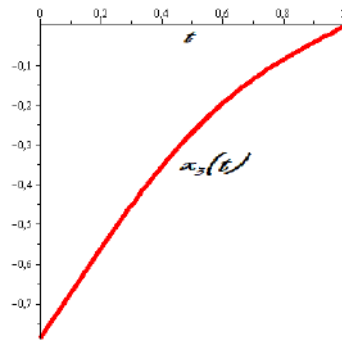
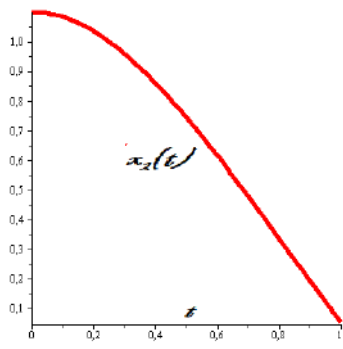


Рис. 11.6: Решение Примера 11.6.5

Глава 12

Скользящие режимы

В главе рассматриваются линейные стационарные системы ОДУ, содержащие в правой части управления, разрывные по фазовым переменным. Эти управления порождают возникновение так называемых скользящих режимов и имеют особую структуру, характерную для теории скользящих режимов. Поверхность разрыва описывается непрерывно дифференцируемой функцией фазовых координат (здесь рассматриваются гиперплоскости) и некоторых параметров, которые также подлежат определению (поэтому рассматривается и задача задания вида скользящего режима). Воспользовавшись одним из известных определений решения разрывных систем по Филиппову, то движение объекта, находящегося на некоторой поверхности, можно описать в терминах дифференциальных включений. Поэтому в данной главе рассматривается задача нахождения решения дифференциального включения, описывающего движение системы в скользящем режиме и с дополнительным ограничением на желаемую траекторию: попадание в определенную точку в конечный момент времени (при движении по поверхности разрыва). Исходная задача сводится к безусловной минимизации функционала, для него необходимые условия минимума формулируются в терминах градиента Гато. На основе этих условий к функционалу применяется метод наискорейшего спуска; доказано, что метод сходится в “слабом” смысле к стационарной точке построенного функционала. Также рассмотрены управления несколько иного, в отличие от классического, вида, непрерывно дифференцируемые по фазовым координатам, что позволяет сохранить полезные дифференциальные свойства правой части системы, и в то же время (как и в случае классического вида управлений) обеспечить попадание системы в малую окрестность искомой поверхности; хотя в общем случае это не обеспечивает устойчивости “в большом”. Таким образом, предложенная структура управления позволяет разработать метод поиска траектории движения системы как в окрестности этой поверхности, так и до попадания на нее. См. [214].

12.1 Введение

Во многих практических задачах при построении математических моделей реальных физических процессов используется разрывное управление, поэтому правые части систем дифференциальных уравнений, описывающих исследуемый процесс, являются разрывными функциями вектора состояния. Например, управление может быть m -мерной векторной функцией следующего вида:

$$u_i(x, t) = \begin{cases} u_i^+(x, t), & s_i(x) > 0, \\ u_i^-(x, t), & s_i(x) < 0, \end{cases} \quad (12.1)$$

где t принадлежит временному интервалу, на котором рассматривается движение системы, функции $u_i^+(x, t)$, $u_i^-(x, t)$, $i = \overline{1, m}$, непрерывны, а $s_i(x) = 0$ являются поверхностями разрыва ($s_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, являются некоторыми непрерывными функциями фазового вектора x). Положим $s(x) = (s_1(x), \dots, s_m(x))'$. Те случаи, в которых точки разрыва изолированы, относятся к классической теории управления и изучены более полно, нежели случаи, когда множество точек разрыва представляет собой множество ненулевой меры по времени.

В таких системах вектор состояния может находиться на одной из поверхностей разрыва (или на некотором их пересечении) в течение участка времени ненулевой меры. Движение по поверхностям разрыва или по некоторому их пересечению называется скользящим режимом. Поскольку траектории системы, принадлежащие множеству точек разрыва, не совпадают ни с одной из траекторий системы, получающихся при различных комбинациях непрерывных управлений $u_i^+(x, t)$, $u_i^-(x, t)$, $i = \overline{1, m}$, то они являются “особыми”. Требуется дать определение в случае, когда имеет место скользящий режим. Обсудим [100], [114] один из классических вариантов такого определения, принадлежащий Филиппову. На конечном интервале времени $[0, T]$ рассмотрим систему $\dot{x} = f(x, u_1(x, t), \dots, u_m(x, t), t)$, причем вектор-функция $f(x, u, t)$ непрерывна на своей области определения по всем своим переменным, а функции $u_i(x, t)$, разрывны на множествах $s_i(x) = 0$, $i = \overline{1, m}$, соответственно. В каждой точке (x, t) разрыва функции $u_i(x, t)$, $i = \overline{1, m}$, должно быть определено замкнутое множество $U_i(x, t)$, $i = \overline{1, m}$. Это множество возможных значений переменной u_i вектор-функции $f(x, u_1, \dots, u_m, t)$, $i = \overline{1, m}$. Обозначим $F(x, t) = f(x, u, t)$ множество значений вектор-функции $f(x, u_1, \dots, u_m, t)$ при фиксированных переменных x, t , когда u_1, \dots, u_m пробегает множества $U_1(x, t), \dots, U_m(x, t)$ соответственно. Тогда решения этого дифференциального включения принимаются как решения дифференциального уравнения с разрывной правой частью. В физических системах множества $U_i(x, t)$, $i = \overline{1, m}$, обычно соответствуют различным блокам и предполагаются выпуклыми. В каждой точке (x, t) разрыва

функции $u_i(x, t)$, $i = \overline{1, m}$, множество $U_i(x, t)$ должно также содержать все предельные точки всех последовательностей $v_k \in U_i(x_k, t_k)$, где $x_k \rightarrow x$ и $t_k \rightarrow t$, если $k \rightarrow \infty$. Если управление имеет вид (12.1), то в качестве таких множеств естественно рассматривать $U_i(x, t) = \text{co}\{u_i^-(x, t), u_i^+(x, t)\}$, $i = \overline{1, m}$. Другие более общие определения решений разрывных систем можно найти в [100], [452].

Таким образом, имеет смысл поставить задачу выбора управления, которое за конечный промежуток времени переводит траекторию системы из произвольного начального состояния в малую окрестность поверхности разрыва, в которой система продолжает движение все остальное время. В этом заключается суть обеспечения устойчивости скользящего режима системы. При этом, если дополнительно потребовать выполнения условия $s(x(t)) \rightarrow \mathbf{0}_m$ при $t \rightarrow \infty$ (где $s(x) = \mathbf{0}_m$ — поверхность разрыва), то это так называемая устойчивость “в большом”. Приведенное определение носит качественный характер; строгое определение устойчивости скользящего режима можно найти в [452].

Как будет видно из строгой постановки задачи, движение системы вдоль поверхности разрыва можно описать некоторой интервальной системой. Как показано в Главе 11, интервальную систему можно записать в виде дифференциального включения определенной структуры. Так, если воспользоваться приведенным выше определением решения разрывной системы, то после попадания на поверхность разрыва (напомним, что используемое управление ставит перед собой данную цель, а также цель удержания траектории на этой поверхности) движение траектории системы описывается соответствующим дифференциальным включением. Ниже мы адаптируем разработанную в Главе 11 методику к рассматриваемой здесь задаче.

12.2 Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{12.2}$$

с начальной точкой

$$x(0) = x_0 \tag{12.3}$$

и с требуемой конечной точкой

$$x_j(T) = x_{Tj}. \tag{12.4}$$

В формуле (12.2) A — постоянная $n \times n$ матрица, B — постоянная $n \times m$ матрица. Для простоты предположим, что $B = \text{diag}[E_m, \mathbf{0}_{n-m}]$ (известно [473], что в случае полной управляемости можно не умаляя общности рассматривать такую структуру). Система рассматривается на заданном конечном интервале времени $[-t^*, T]$ (здесь T — заданный конечный момент времени; комментарии относительно момента времени t^* даны ниже). Далее предположим, что $x(t)$ — n -мерная кусочно-непрерывно дифференцируемая на $[-t^*, T]$ вектор-функция; структура m -мерного управления $u(t)$ будет указана далее. В формуле (12.3) $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — заданный вектор; в формуле (12.4) x_{Tj} — заданные числа, соответствующие тем координатам вектора состояния, которые фиксированы на правом конце, здесь $j \in J \subset \{1, \dots, n\}$, где J — заданное индексное множество.

Пусть также задана поверхность разрыва

$$s(x, c) = \mathbf{0}_m \quad (12.5)$$

где $s(x, c)$ — непрерывно дифференцируемая вектор-функция. Будем считать, что общая структура поверхности задана, а параметры $c \in \mathbb{R}^m$ неизвестны. С точки зрения теории управления скользящими режимами естественно ограничиться рассмотрением гиперплоскостей

$$s_j(x, c) = \sum_{i=1}^n c_{i,j} x_i + c_{n+1,j}, \quad j = \overline{1, m},$$

где некоторые компоненты $\{c_{i,j}\}$, $i = \overline{1, n+1}$, $j = \overline{1, m}$, подлежат определению. Иногда для удобства записи мы будем опускать зависимость вектор-функции, задающей поверхность, от этих переменных.

Замечание 12.2.1. На практике общая структура поверхности разрыва обычно известна заранее и может быть основана на некоторых физических соображениях; иногда также приблизительно известны параметры этой поверхности. Поэтому имеет смысл “подкорректировать” параметры этой поверхности таким образом, чтобы наделить объект некоторыми желаемыми свойствами (например, удовлетворению условий на правом конце).

Сразу выпишем явную форму управления, которая в основном будет использоваться в этой главе. Пусть

$$u_i(x) = -\alpha_i |x| \text{sign}(s_i(x)), \quad (12.6)$$

где $i = \overline{1, m}$, $\alpha_i \in [a_i, \bar{a}_i]$, $i = \overline{1, m}$, — некоторые положительные числа, которые иногда называют коэффициентами усиления.

В книге [452] показано, что если поверхность (12.5) является гиперплоскостью, то при естественных предположениях и достаточно больших значениях коэффициентов α_i , $i = \overline{1, m}$, управления (12.6) обеспечивают попадание системы (12.2) из произвольного начального состояния (12.3) в малую окрестность поверхности разрыва (12.5) за конечное время t^* и дальнейшее пребывание в этой окрестности с выполнением условия $s_i(x(t)) \rightarrow 0$, $i = \overline{1, m}$, при $t \rightarrow \infty$, то есть управления (12.6) обеспечивают устойчивость “в большом” скользящего режима системы (12.2). В [452] можно найти также оценки на момент времени t^* . При этом мы предполагаем, что все требуемые условия уже выполнены, то есть числа \underline{a}_i , \bar{a}_i , $i = \overline{1, m}$, а также время t^* берутся достаточно большими равномерно (по параметрам c , которые встречаются в ходе дальнейшей работы алгоритма). В Разделе 12.3 нас будет интересовать поведение системы на поверхности разрыва (на интервале времени $[0, T]$). В Разделе 12.4 также обсуждается поиск траектории движения системы как на поверхности разрыва, так и до попадания на нее; при этом будет использоваться иная (в отличие от приведенной в формуле (12.6)) структура управления.

Пусть на поверхностях $s_i(x) = 0$, $i = \overline{1, m}$, решение исходной разрывной системы является решением следующего дифференциального включения:

$$\dot{x}_i \in A_i x + [\underline{a}_i, \bar{a}_i] |x| [-1, 1] = A_i x + [-\bar{a}_i, \underline{a}_i] |x|, \quad i = \overline{1, m}. \quad (12.7)$$

$$\dot{x}_i = A_i x, \quad i = \overline{m+1, n}. \quad (12.8)$$

В формулах (12.7), (12.8) A_i — это i -я строка матрицы A , $i = \overline{1, n}$. Заметим, что более общий вариант определения решения разрывной системы, используемого в этой главе, приведен в [114]. Оно имеет строгий и довольно сложный вид, поэтому мы не будем приводить его здесь. Для наших целей достаточно постулировать, что решения системы (12.2) с используемыми управлениями (12.6) являются решениями системы (12.7), (12.8) по определению.

Замечание 12.2.2. Понятно, что на практике мы считаем, что траектория находится на поверхности разрыва, если она лежит в заданной достаточно малой окрестности этой поверхности (которая может быть определена в каждом конкретном случае исходя из требований к точности расчетов и моделирования процесса, описываемого системой).

Пусть $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))'$, где $f_1(x), \dots, f_n(x)$ пробегают соответствующие множества $F_1(x), \dots, F_n(x)$ из правых частей включений (12.7); при этом $f_i(x) = F_i(x) := A_i x$, $i = \overline{m+1, n}$ (см. (12.8)), поэтому мы можем переписать данные включения в виде

$$\dot{x} \in F(x). \quad (12.9)$$

Сформулируем задачу следующим образом: требуется найти такую траекторию $x^* \in C_n[0, T]$ (с производной $\dot{x}^* \in P_n[0, T]$), которая движется вдоль поверхности разрыва (12.5) (при этом параметры $c^* \in \mathbb{R}^m$ также подлежат определению) при $t \in [0, T]$, удовлетворяет дифференциальному включению (12.9) и граничным условиям (12.3), (12.4). Очевидно, что в силу требования непрерывности искомой траектории, наличия ограничений на правом конце и сложной, заранее неизвестной структуры поверхности разрыва, классические теоремы существования решения здесь неприменимы. Можно лишь сказать, что если из инженерной практики известно, что решение существует для некоторых “начальных” значений искомых параметров поверхности c и для некоторой конечной точки, то имеет смысл поставить задачу “корректирования” этих параметров таким образом, чтобы были достигнуты желаемые свойства траектории. Поэтому естественно предположить, что решение задачи существует, если такое “корректирование” не слишком существенно. Эти соображения обосновывают (на качественном уровне) такую постановку задачи и предположение о существовании соответствующего решения.

12.3 Соответствующая вариационная задача

Сводим задачу к вариационной аналогично Главе 11. Построим функционал

$$I(z, c) = \varphi(z) + \chi(z) + \omega(z, c) \quad (12.10)$$

где

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} \int_0^T h^2 \left(x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau, z(t) \right) dt, \quad (12.11)$$

$$\chi(z) = \frac{1}{2} \sum_{j \in J} \left(x_{0j} + \int_0^T z_j(t) dt - x_{Tj} \right)^2. \quad (12.12)$$

$$\omega(z, c) = \frac{1}{2} \int_0^T s^2 \left(x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau, c \right) dt. \quad (12.13)$$

(здесь мы переходим в “пространство производных”).

Напомним используемые обозначения:

$$z(t) = \dot{x}(t), \quad x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau), \quad t \in [0, T], \quad (12.14)$$

$$\ell_i(\psi_i, x, z) = \langle z_i, \psi_i \rangle - c(F_i(x), \psi_i),$$

$$h_i(x, z) = \max_{\psi_i \in S_1} \max \left\{ 0, \ell_i(\psi_i, x, z) \right\},$$

$$h(x, z) = \left(h_1(x, z), \dots, h_n(x, z) \right)'$$

В этой задаче мы также можем явно вычислить опорную функцию множества F_i . Для этого заметим, что множество F_i представляет собой одномерный “шар” с центром

$$c_i(x) = A_i x, \quad i = \overline{1, n},$$

и с “радиусом”

$$r_i(x) = \bar{a}_i |x|, \quad i = \overline{1, m},$$

$$r_i(x) = 0, \quad i = \overline{m+1, n}.$$

Поэтому опорная функция множества F_i может быть выражена [143] по формуле

$$c(F_i(x), \psi_i) = \psi_i A_i x + \bar{a}_i |x| |\psi_i|, \quad i = \overline{1, m},$$

$$c(F_i(x), \psi_i) = \psi_i A_i x, \quad i = \overline{m+1, n}.$$

Мы видим, что опорная функция множества F_i непрерывно дифференцируема по фазовым координатам x , если $x_i \neq 0$, $i = \overline{1, n}$.

Таким образом, исходная задача свелась к минимизации функционала (12.10) на пространстве

$$X = \left(P_n[0, T] \times \mathbb{R}^m, \|\cdot\|_{L_n^2[0, T] \times \mathbb{R}^m} \right).$$

Обозначим через z^* , c^* точку глобального минимума этого функционала. Тогда

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t z^*(\tau) d\tau$$

есть решение исходной задачи (а вектор c^* определяет структуру поверхности разрыва).

Замечание 12.3.1. Структура функционала $\varphi(z)$ естественна, так как величина $h_i(x(t), z(t))$, $i = \overline{1, n}$, при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ есть просто евклидово расстояние от точки $z_i(t)$ до множества $F_i(x(t))$; функционал (12.11) есть половина суммы квадратов отклонений в $L_n^2[0, T]$ норме траекторий $z_i(t)$ от множеств $F_i(x(t))$, $i = \overline{1, n}$, соответственно; смысл структур функционалов (12.12), (12.13) очевиден.

Очевидно, что точка x^* является решением задачи этого раздела тогда и только тогда, когда функционал $I(z, c)$ обращается в ноль в соответствующей точке, т. е. $I(z^*, c^*) = 0$. Для того чтобы получить более конструктивное условие минимума (которое применимо для разработки численного метода решения исходной задачи), изучим дифференциальные свойства функционала $I(z, c)$.

Сначала рассмотрим случай, когда функционал $I(z, c)$ дифференцируем по Гато.

Теорема 12.3.1. Пусть траектории $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, обращаются в ноль только в отдельные моменты времени интервала $[0, T]$. Тогда функционал $I(z, c)$ является дифференцируемым по Гато и его “градиент” в точке (z, c) выражается по формуле

$$\begin{aligned} \nabla I(z, c) = & \left[\sum_{i=1}^n h_i(x, z) \psi_i^*(x, z) \mathbf{e}_i - \sum_{i=1}^n \int_t^T h_i(x(\tau), z(\tau)) \frac{\partial c_i(F_i(x(\tau)), \psi_i^*(x(\tau), z(\tau)))}{\partial x} d\tau + \right. \\ & + \sum_{j \in J} \left(x_{0j} + \int_0^T z_j(t) dt - x_{Tj} \right) \mathbf{e}_j + \\ & \left. + \sum_{i=1}^m \int_t^T s_i(x(\tau), c) \frac{\partial s_i(x(\tau), c)}{\partial x} d\tau, \sum_{i=1}^m \int_0^T s_i(x(\tau), c) \frac{\partial s_i(x(\tau), c)}{\partial c} d\tau \right]. \end{aligned}$$

Отметим, что для дифференцируемости функционала $I(z, c)$ по Гато существенно, что вектор $\psi_i^*(x, z)$ единственен в случае $\ell_i(\psi_i, x, z) > 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$; а именно: в силу структуры функционала $\ell_i(\psi_i, x, z)$ легко проверить, что в случае $\ell_i(\psi_i, x, z) > 0$ максимум выражения $\max\{0, \ell_i(\psi_i, x, z)\} = \ell_i(\psi_i, x, z)$ достигается на единственном элементе $\psi_i^*(x, z) \in S_1$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Простое обоснование этого факта проводится аналогично Разделу 9.3 и основывается на выпуклости множества $F_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, при каждом x и на известных свойствах опорной функции. В случае $\ell_i(\psi_i, x, z) \leq 0$ мы положили $\psi_i^*(x, z) = \psi_0$, $i \in \{1, \dots, n\}$, где $\psi_0 \in S_1$ фиксировано. Заметим, что в частном случае этой главы можно записать явное выражение для вектора $\psi_i^*(x, z)$ в случае $\ell_i(\psi_i, x, z) > 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$, следующим образом:

$$\psi_i^*(x, z) = \text{sign}(z_i - A_i x),$$

заметим, что $z_i - A_i x \neq 0$ в случае $\ell_i(\psi_i, x, z) > 0$.

Следующая теорема формулирует известное условие минимума [36] для дифференцируемого по Гато функционала.

Теорема 12.3.2. Пусть траектории $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, обращаются в ноль только в отдельные моменты времени интервала $[0, T]$. Для того чтобы точка (z^*, c^*) доставляла минимум функционалу $I(z, c)$, необходимо, чтобы

$$0_n \times 0_m = \left[\sum_{i=1}^n h_i(x^*, z^*) \psi_i^*(x^*, z^*) \mathbf{e}_i - \sum_{i=1}^n \int_t^T h_i(x^*(\tau), z^*(\tau)) \frac{\partial c_i(F_i(x^*(\tau)), \psi_i^*(x^*(\tau), z^*(\tau)))}{\partial x} d\tau + \right.$$

$$+ \sum_{j \in J} \left(x_{0j} + \int_0^T z_j^*(t) dt - x_{Tj} \right) \mathbf{e}_j +$$

$$+ \left[\sum_{i=1}^m \int_t^T s_i(x^*(\tau), c^*) \frac{\partial s_i(x^*(\tau), c^*)}{\partial x} d\tau, \sum_{i=1}^m \int_0^T s_i(x^*(\tau), c^*) \frac{\partial s_i(x^*(\tau), c^*)}{\partial c} d\tau \right]$$

где 0_n — нулевой элемент пространства $P_n[0, T]$.

Очевидно, что $I(z^*, c^*) = 0$ является необходимым и достаточным условием минимума для функционала и в этом случае равенство теоремы 12.3.2 выполняется автоматически.

Замечание 12.3.2. Заметим, что формально поведение объекта описывается дифференциальным включением (12.9), только если $s(x, c) = 0$. На практике очевидно, что применяя любой метод оптимизации, можно найти лишь приближенный минимум функционала $I(z, c)$, поэтому если получена приближенная точка (\bar{x}, \bar{c}) глобального минимума, то имеем $\omega(\bar{x}, \bar{c}) \leq \varepsilon_s$. С одной стороны, можно удовлетвориться такой (заранее заданной) точностью, исходя из физических соображений (см. замечание 12.2.2). С другой стороны, в некоторых задачах можно обеспечить точное равенство $s(\bar{x}, \bar{c}) = 0$ (например, выразив одну из переменных через полученные), а затем проверить, что такая подстановка не влияет на выполнение дифференциального включения и ограничения на правом конце (см. пример 12.3.1, где реализована такая процедура).

Замечание 12.3.3. Таким образом, мы показали, что функционал $I(z, c)$ является дифференцируемым по Гато, и согласно сделанному предположению был исключен случай, когда хотя бы одна из фазовых переменных была бы тождественно равна нулю на некотором интервале времени множества $[0, T]$ ненулевой длины. Дифференциальные свойства функционала $I(z, c)$ в “существенно негладком” случае изучаются в Главе 11, где рассматривается более общая задача (и предлагается метод ее решения).

Пример 12.3.1. Рассмотрим следующую систему

$$\dot{x}_1(t) \in [-1, 1](|x_1(t)| + |x_2(t)| + |x_3(t)|), \quad \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t), \quad \dot{x}_3(t) = x_2(t)$$

с краевыми условиями

$$x_1(0) = -3, \quad x_2(0) = 4, \quad x_3(0) = 6, \quad x_1(1) = 0.$$

Пусть поверхность разрыва в этом примере записана в виде

$$s(x, c) = x_1 + c_1 x_2 + c_2 = 0.$$

В этом примере в данной задаче был использован метод наискорейшего спуска [285] с некоторыми модификациями (см. замечание 12.3.4, b) ниже), что привело к (приближенному) решению задачи минимизации функционала $I(z, c)$.

Вычисления проводились в пакете MatLab 18.0. Решение задачи одномерной минимизации проводилось на интервале $[0, 1]$ (т. е. здесь $\bar{\gamma} = 1$) в MatLab с помощью встроенного алгоритма `fminbnd()` с его внутренними параметрами по умолчанию. В соответствии с документацией для решения этой задачи в MatLab используется метод золотого сечения в сочетании с параболической интерполяцией [55]. В примере погрешность решения оценивалась на основе значения функционала. Все интегралы вычислялись в MatLab с помощью встроенной функции `evalf(int())` с ее внутренними параметрами по умолчанию. В соответствии с документацией для решения этой задачи в MatLab используется метод Гаусса-Кронрода [13]. Для получения вектор-функции $\psi^*(x(t), z(t), t)$, $t \in [0, T]$, методом кодифференциального спуска [180] минимизировалась соответствующая штрафная функция со штрафным параметром $\lambda = 5$ в точках t_i , $i = \overline{1, 5}$ дискретизации (т.е. здесь $N = 5$). Параметр $deg = 5$ использовался для аппроксимации искомых вектор-функций на каждой 5 итерации. (См. замечание 9.4.1.) При этом численное интегрирование соответствующих систем дифференциальных уравнений (из заданного начального значения на левом конце) проводилось в MatLab с использованием встроенной функции `ode45()` с ее внутренними параметрами по умолчанию. В соответствии с документацией для решения данной задачи в MatLab используется прямой метод Рунге-Кутты 4–5 порядка [13].

В качестве начальной взята точка $(z_{\{0\}}, c_{\{0\}}) = (0, 0, 0, 1.25, -1.25)'$ (отметим, что здесь $(0, 0, 0)'$ — нулевая точка в функциональном пространстве $P_3[0, 1]$, а точка $(1.25, -1.25)'$ принадлежит пространству \mathbb{R}^2). При этом имеем $I(z_{\{0\}}, c_{\{0\}}) \approx 37.28125$. Положим $x_1(t) := -c_{\{0\}1}x_2(t) - c_{\{0\}2}$ и численно проинтегрируем последние два уравнения системы. Убеждаемся, что первое включение также выполнено, и окончательно имеем $x_1(1) \approx 0.10175$; мы видим, что ошибка на правом конце имеет порядок 10^{-1} .

На 60-й итерации была построена точка $(z_{\{60\}}, c_{\{60\}})'$ и мы приближенно положим $(z^*, c^*) \approx (z_{\{60\}}, c_{\{60\}})$. При этом $c^* \approx (0.98467, -0.93868)'$, $I(z^*, c^*) \approx 0.00015$, и мы имеем $\|\nabla I(z^*, c^*)\|_{L_3^2[0,1] \times \mathbb{R}^2} \approx 0.02009$. Точка z^* здесь не приводится по двум причинам: 1) для краткости изложения (так как она строится в виде довольно громоздкой кусочно-непрерывной вектор-функции) и 2) в силу того, что в конечном итоге для оценки полученного результата используются только параметры c^* (см. следующий абзац).

Найдя параметры c^* , положим $x_1(t) := -c_1^*x_2(t) - c_2^*$ и подставим их в последние два уравнения данной системы. Численно проинтегрируем эту замкнутую систему, затем убедим-

ся, что первое включение также выполняется, и в итоге получим $x_1(1) \approx -0.00431$. Таким образом, видно, что желаемое значение на правом конце достигается с погрешностью порядка 5×10^{-3} . Итак, это значение было улучшено за счет “корректирования” параметров рассматриваемой поверхности (см. замечание 12.2.1). Рисунок 12.3.1 демонстрирует результаты вычислений. Черными линиями обозначены кривые, полученные с помощью метода, изложенного в главе, а штриховыми красными линиями обозначены кривые, полученные путем интегрирования замкнутой системы (и с помощью соотношения $x_1(t) = -c_1^*x_2(t) - c_2^*$).

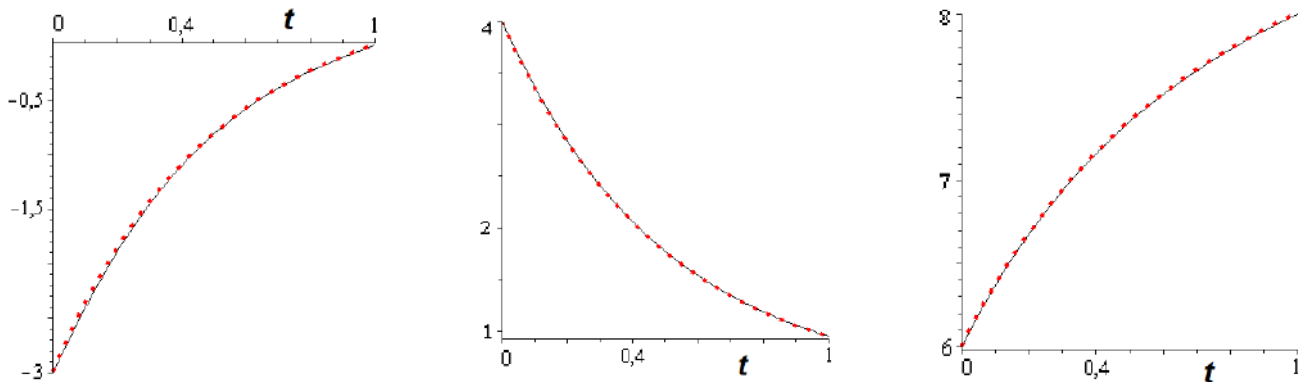


Рис. 12.1: Пример 12.3.1: траектории $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$, $x_3^*(t)$.

Замечание 12.3.4. а) На практике дифференциальные включения (12.7) выполняются на большинстве итераций, поскольку при $i = \overline{1, m}$ значения функции $z_i(t) - A_i x(t)$ обычно не очень велики, поэтому они находятся внутри интервала $[-\bar{a}_i, \bar{a}_i]|x(t)|$ в течение интервала $[0, T]$ (напомним, что коэффициент усиления \bar{a}_i достаточно велик). Этот факт существенно упрощает вычисления, поскольку в случае $\varphi(z) > 0$ градиент функционала $\varphi(z)$ вычисляется наиболее сложно (по сравнению с другими рассматриваемыми функционалами).

б) В ходе вычислений было отмечено, что z_i , $i = \overline{1, n}$, являются так называемыми “быстрыми” переменными, тогда как c_k , $k = \overline{1, m}$, являются так называемыми “медленными” переменными. Это означает, что в ходе итераций траектории могут изменяться относительно сильно при фиксированных параметрах, в то время как переменные c_k , $k = \overline{1, m}$, изменяются незначительно при фиксированных переменных z_i , $i = \overline{1, n}$. Поэтому на практике оказалось разумно зафиксировать параметры c_k , $k = \overline{1, m}$, и сделать одну итерацию с относительно большим шагом спуска (чтобы минимизировать функционал по переменным z_i , $i = \overline{1, n}$), а затем зафиксировать траектории z_i , $i = \overline{1, n}$, и сделать несколько итераций с малыми шагами спуска (чтобы минимизировать функционал по переменным c_k , $k = \overline{1, m}$), и повторить этот процесс.

12.4 Случай “гладкого” управления

Рассмотрим теперь другой тип управления для обеспечения движения объекта в окрестности поверхности $s(x) = \mathbf{0}_m$. Как видно из предыдущих разделов главы, основная сложность при работе с управлением (12.6) обусловлена недифференцируемостью (и даже разрывностью) этой функции по фазовым переменным. Для преодоления этой трудности попробуем изменить структуру управления таким образом, чтобы, с одной стороны, она сохранила основное свойство этого управления (а именно, обеспечила попадание системы в некоторую (приемлемую на практике) окрестность поверхности $s(x) = \mathbf{0}_m$ и дальнейшее нахождение там), а с другой стороны, наделила искомое управление требуемыми дифференциальными свойствами, что даст возможность (как мы увидим ниже) использовать разработанную “вариационную” технику для решения “полноценной” задачи нахождения траектории движения системы как на поверхности $s(x) = \mathbf{0}_m$, так и до попадания на нее. Обратим внимание, что в этом разделе мы не используем термин “поверхность разрыва” (а говорим просто о поверхности $s(x) = \mathbf{0}_m$), поскольку, как будет показано ниже, правая часть системы с рассматриваемыми в этом разделе типами структур управления сохраняет свойство непрерывности (и даже непрерывной дифференцируемости, если мы имеем $x_i \neq 0, i = \overline{1, n}$).

В этом разделе мы ограничимся рассмотрением поверхностей $s(x, c) = \mathbf{0}_m$ с гиперплоскостями

$$s_j(x, c) = x_j - c_j, \quad j \in K,$$

где $K \in \{1, \dots, n\}$, $|K| = m$, а элементы вектора c размерности m еще предстоит определить (иногда для удобства обозначений мы будем опускать зависимость вектор-функции поверхности от этого вектора). Регулирование структуры поверхности с помощью этих параметров даст больше возможностей для достижения определенных целей движения объекта, например, попадания в требуемое положение в заданный момент времени. Как отмечалось в Разделе 12.2, во многих практических случаях естественно считать, что эти параметры известны приблизительно, исходя из физического смысла системы. Отметим также, что структура рассматриваемой поверхности не столь специфична, как может показаться на первый взгляд. На самом деле, соответствующим выбором параметров $c_j, j \in K$ (и соответствующей размерности m) можно гарантировать, что вектор x является, например, решением некоторой заданной (разрешимой) системы линейных алгебраических уравнений.

Вместо управления (12.6) рассмотрим ещё два типа управления для $i = \overline{1, m}$:

$$u_i^{[1]}(x, c) = -\alpha_i |x| s_i(x) \exp \left\{ \text{sign}(s_i(x)) (-s_i(x)) \right\}, \quad (12.15)$$

$$\begin{cases} u_i^{[2]}(x, c) = \alpha_i |x| k \sqrt{-s_i(x)}, & \text{если } s_i(x) \leq -\delta, \\ u_i^{[2]}(x, c) = -\alpha_i |x| (e s_i^3(x) + f s_i(x)), & \text{если } -\delta \leq s_i(x) \leq \delta, \\ u_i^{[2]}(x, c) = -\alpha_i |x| k \sqrt{s_i(x)}, & \text{если } s_i(x) \geq \delta, \end{cases} \quad (12.16)$$

где α_i — по-прежнему некоторые положительные числа, которые фиксированы в этом разделе (см. Замечание 12.4.1 ниже), заданное число $\delta > 0$ достаточно мало, а параметры k , e и f выбираются исходя из требования непрерывной дифференцируемости функций $u_i^{[2]}(x, c)$ (если $x_i \neq 0$, $i = \overline{1, n}$). Для каждой заданной наперед окрестности поверхности $s(x) = \mathbf{0}_m$ можно обеспечить попадание объекта в эту окрестность за конечное время выбором чисел α_i , $i = \overline{1, m}$ и δ , поскольку условие возникновения скользящего режима [452] выполняется по построению. Недостатком такого выбора управлений является следующее обстоятельство: несмотря на то, что они переводят систему в малую окрестность поверхности (т. е., в соответствии с данным определением, обеспечивают устойчивость скользящего режима), эти управления не наделяют систему свойством устойчивости “в большом”, поскольку величина $s(x(t))$ в общем случае не стремится к нулю при t , стремящемся к бесконечности. Поэтому “коррекция” параметров поверхности имеет дополнительный смысл: более строго удовлетворять условиям на правом конце (чем точность, обеспечиваемая введенными управлениями (12.15), (12.16)). Преимущество такого выбора состоит в том, что правая часть системы является непрерывно дифференцируемой функцией фазовых координат, если $x_i \neq 0$, $i = \overline{1, n}$ (и вектора c). Отметим, что хотя управления, используемые, например, в работах [434], [421] непрерывны, они не являются непрерывно дифференцируемыми по фазовым координатам.

Отметим также конструктивные особенности приведенных управлений. Достоинством управления $u^{[1]}$ является относительная простота (по сравнению с управлением $u^{[2]}$) задания этой функции. Недостатком управления $u^{[1]}$ является то, что необходимые (для обеспечения устойчивости скользящего режима) значения коэффициентов усиления α_i , $i = \overline{1, m}$, слишком велики и даже иногда неприемлемы для практики в случае, когда начальное положение объекта достаточно далеко от поверхности $s(x) = \mathbf{0}_m$; и для любых коэффициентов усиления α_i , $i = \overline{1, m}$, выбранных заранее, существует начальная точка объекта, из которой управление $u^{[1]}$ не способно перевести систему в малую окрестность поверхности $s(x) = \mathbf{0}_m$ (управление $u^{[2]}$ лишено этого недостатка).

Как и ранее, задача состоит в нахождении траектории x^* из пространства $C_n[0, T]$ (с производной \dot{x}^* из пространства $P_n[0, T]$), описываемой системой

$$\dot{x}_i = A_i x + u_i^{[1],[2]}(x, c), \quad i = \overline{1, m},$$

$$\dot{x}_i = A_i x, \quad i = \overline{m+1, n},$$

с новым управлением (12.15) или (12.16) (параметры c_j , $j \in K$ также подлежат определению), удовлетворяющей граничным условиям (12.3), (12.4). Предположим, что такое решение существует.

Обозначим

$$h_i^{[1],[2]}(x, z, c) = z_i - A_i x - u_i^{[1],[2]}(x, c), \quad i = \overline{1, m},$$

$$h_i(x, z) = z_i - A_i x, \quad i = \overline{m+1, n},$$

и построим функционал

$$\varphi^{[1],[2]}(z, c) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^T h_i^2(x(t), z(t), c) dt + \frac{1}{2} \sum_{i=m+1}^n \int_0^T h_i^2(x(t), z(t)) dt,$$

где вместо фазовой переменной $x(t)$ нужно написать ее выражение через ее производную $z(t)$ по формуле (12.14).

Затем, как и прежде, построим функционал

$$I^{[1],[2]}(z, c) = \varphi^{[1],[2]}(z, c) + \chi(z), \quad (12.17)$$

в котором функция $\chi(z)$ дается формулой (12.12).

Рассмотрим задачу минимизации функционала (12.17) на пространстве

$$X = \left(P_n[0, T] \times \mathbb{R}^m, \|\cdot\|_{L_n^2[0, T] \times \mathbb{R}^m} \right).$$

Обозначим (z^*, c^*) точку глобального минимума этого функционала. Тогда

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t z^*(\tau) d\tau$$

является решением исходной задачи (а вектор c^* определяет структуру рассматриваемой поверхности).

Очевидно, что точка x^* является решением этой задачи раздела тогда и только тогда, когда функционал $I^{[1],[2]}(z, c)$ обращается в ноль в соответствующей точке, то есть $I^{[1],[2]}(z^*, c^*) = 0$. Для того чтобы получить более конструктивное условие минимума, применимое для разработки численного метода решения исходной задачи, изучим дифференциальные свойства функционала $I^{[1],[2]}(z, c)$. Предположим, что траектории $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, обращаются в ноль только в отдельные моменты времени отрезка $[0, T]$. Это предположение естественно, если до перехода в скользящий режим не существует траекторий, находящихся в нулевом положении и имеющих нулевую “скорость” на некотором подмножестве интервала $[0, T]$ ненулевой меры, и если поверхности разрыва не содержат ни одной из этих траекторий, обращающихся в ноль на подмножестве интервала $[0, T]$ ненулевой меры. С помощью классической вариации, теоремы Лагранжа о среднем значении и интегрирования по частям легко проверить дифференцируемость по Гато заданного функционала.

Теорема 12.4.1. Пусть траектории $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, обращаются в ноль только в отдельные моменты времени интервала $[0, T]$. Тогда функционал $I^{[1],[2]}(z, c)$ является дифференцируемым по Гато и его “градиент” в точке (z, c) выражается по формуле

$$\begin{aligned} \nabla I^{[1],[2]}(z, c) = & \sum_{i=1}^m \left[h_i^{[1],[2]}(x, z, c) \mathbf{e}_i - \right. \\ & - \int_t^T h_i^{[1],[2]}(x(\tau), z(\tau), c) \left(A'_i + \frac{\partial u_i^{[1],[2]}(x(\tau), c)}{\partial x} \right) d\tau, \\ & \left. - \int_0^T h_i^{[1],[2]}(x(t), z(t), c) \frac{\partial u_i^{[1],[2]}(x(t), c)}{\partial c} dt \right] + \\ & + \left[\sum_{i=m+1}^n h_i(x, z) \mathbf{e}_i - \int_t^T h_i(x(\tau), z(\tau)) A'_i d\tau, \mathbf{0}_m \right] + \\ & + \left[\sum_{j \in J} \left(x_{0j} + \int_0^T z_j(t) dt - x_{Tj} \right) \mathbf{e}_j, \mathbf{0}_m \right]. \end{aligned}$$

Запишем хорошо известное [36] условие минимума для дифференцируемого по Гато функционала.

Теорема 12.4.2. Пусть траектории $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, обращаются в ноль только в изолированные моменты времени интервала $[0, T]$. Для того чтобы точка (z^*, c^*) доставляла минимум функционалу $I^{[1],[2]}(z, c)$, необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} 0_n \times \mathbf{0}_m = & \sum_{i=1}^m \left[h_i^{[1],[2]}(x^*, z^*, c^*) \mathbf{e}_i - \right. \\ & - \int_t^T h_i^{[1],[2]}(x^*(\tau), z^*(\tau), c^*) \left(A'_i + \frac{\partial u_i^{[1],[2]}(x^*(\tau), c^*)}{\partial x} \right) d\tau, \\ & \left. - \int_0^T h_i^{[1],[2]}(x^*(t), z^*(t), c^*) \frac{\partial u_i^{[1],[2]}(x^*(t), c^*)}{\partial c} dt \right] + \\ & + \left[\sum_{i=m+1}^n h_i(x^*, z^*) \mathbf{e}_i - \int_t^T h_i(x^*(\tau), z^*(\tau)) A'_i d\tau, \mathbf{0}_m \right] + \\ & + \left[\sum_{j \in J} \left(x_{0j} + \int_0^T z_j^*(t) dt - x_{Tj} \right) \mathbf{e}_j, \mathbf{0}_m \right]. \end{aligned}$$

где 0_n — нулевой элемент пространства $P_n[0, T]$.

Очевидно, что $I(z^*, c^*) = 0$ является необходимым и достаточным условием минимума для функционала и в этом случае равенство теоремы 12.4.2 выполняется автоматически.

Пример 12.4.1. Рассмотрим следующую систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1(t) - 3x_2(t) + x_3(t) - 50|x(t)|(x_1(t) - c_1) \exp \left\{ (-|x_1(t) - c_1|) \right\}, \\ \dot{x}_2(t) &= 5x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) - 50|x(t)|(x_2(t) - c_2) \exp \left\{ (-|x_2(t) - c_2|) \right\}, \\ \dot{x}_3(t) &= 5x_1(t) - x_2(t) + x_3(t)\end{aligned}$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned}x_1(0) &= 2, \quad x_2(0) = -2, \quad x_3(0) = 2, \\ x_1(0.2) &= 0.55, \quad x_2(0.2) = 2.5, \quad x_3(0.2) = 2.95.\end{aligned}$$

Как мы видим, поверхности в этом примере имеют вид

$$s_1(x) = x_1 - c_1 = 0, \quad s_2(x) = x_2 - c_2 = 0.$$

В этом примере в данной задаче был использован метод наискорейшего спуска [285] с некоторыми модификациями (см. замечание 12.3.4, b) выше), что привело к (приближенному) решению задачи минимизации функционала $I^{[1]}(z, c)$.

Вычисления проводились в пакете Maple 12, Serial Number 2011-11-11. Решение задачи одномерной минимизации проводилось на интервале $[0, 1]$ (т. е. здесь $\bar{\gamma} = 1$) в Maple с помощью встроенного алгоритма `fminbnd()` с его внутренними параметрами по умолчанию. В соответствии с документацией для решения этой задачи в Maple используется метод золотого сечения в сочетании с параболической интерполяцией [55]. В примере погрешность решения оценивалась на основе значения функционала. Все интегралы вычислялись в Maple с помощью встроенной функции `evalf(int())` с ее внутренними параметрами по умолчанию. В соответствии с документацией для решения этой задачи в Maple используется метод Гаусса-Кронрода [13]. Для аппроксимации искомых вектор-функций на каждой 5 итерации использовался параметр $deg = 5$. (См. замечание 9.4.1.) При этом численное интегрирование соответствующих систем дифференциальных уравнений (из заданного начального значения на левом конце) проводилось в Maple с использованием встроенной функции `dsolve()` с параметрическим методом `= rosenbrock` и другими ее внутренними параметрами по умолчанию. Согласно документации, для решения этой задачи в Maple используется неявный жесткий метод Розенброка 3-4-го порядка [13].

В качестве начальной взята точка $(z_{\{0\}}, c_{\{0\}}) = (0, 0, 0, 2/3, 2.55)'$ (обратим внимание, что здесь $(0, 0, 0)'$ — нулевая точка в функциональном пространстве $P_3[0, 1]$, а точка $(2/3, 2.55)'$ принадлежит пространству \mathbb{R}^2 . При этом имеем $I(z_{\{0\}}, c_{\{0\}}) \approx 1591.75905$. Подставим параметры $c_{\{0\}}$ в данную систему и численно проинтегрируем ее. В итоге получим

$x_1(0.2) \approx 0.5879$, $x_2(0.2) \approx 2.59282$, $x_3(0.2) \approx 2.97868$; мы видим, что ошибка на правом конце составляет величину порядка 10^{-1} .

На 79-й итерации была построена точка $(z_{\{79\}}, c_{\{79\}})'$ и мы приближенно положим $(z^*, c^*) \approx (z_{\{79\}}, c_{\{79\}})$. При этом $c^* \approx (0.620652, 2.466487)'$, $I(z^*, c^*) \approx 0.00064$ и $\|\nabla I(z^*, c^*)\|_{L^2_3[0,1] \times \mathbb{R}^2} \approx 0.0308$. Точка z^* здесь не приводится по двум причинам: 1) для краткости изложения (так как она строится как довольно громоздкая кусочно-непрерывная вектор-функция) и 2) в силу того, что в конечном итоге для оценки полученного результата используются только параметры c^* (см. следующий абзац).

Получив параметры c^* , подставим их в данную систему. Численно проинтегрируем эту замкнутую систему и в итоге получим $x_1(0.2) \approx 0.54513$, $x_2(0.2) \approx 2.50537$, $x_3(0.2) \approx 2.95221$, отсюда видно, что желаемое значение на правом конце достигается с погрешностью порядка 5×10^{-3} . Таким образом, эти значения были улучшены за счет “корректирования” параметров рассматриваемой поверхности. Рисунок 12.4.1 демонстрирует результаты вычислений. Черные линии обозначают кривые, полученные с помощью метода главы, а пунктирные красные линии обозначают кривые, полученные путем интегрирования замкнутой системы. Легко видеть, что $|s_1(x^*(t))|, |s_2(x^*(t))| < \varepsilon_s$ начиная с некоторого момента времени, где величина ε_s имеет порядок 10^{-1} , поэтому рассматриваемая система попадает в ε_s -окрестность искомой поверхности в некоторый конечный момент времени и остается там начиная с этого момента. Для того чтобы уменьшить эту окрестность, нужно увеличивать коэффициенты усиления α_i , $i = \overline{1, m}$ (см. также замечание 12.4.1 ниже).

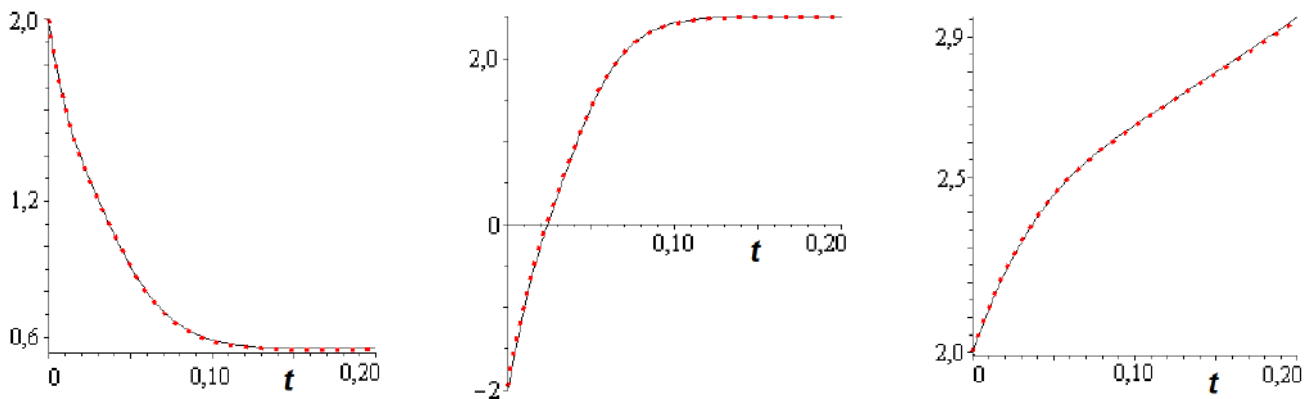


Рис. 12.2: Пример 12.4.1, траектории $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$, $x_3^*(t)$.

Замечание 12.4.1. Помимо регулирования структуры вектор-функции $s(x, c)$ (то есть параметров c), можно также считать коэффициенты усиления α_i , $i = \overline{1, m}$, “свободными” и оптимизировать их на основе желаемых свойств системы по аналогичной схеме.

Заключение

Приведём краткий обзор результатов, полученных в данной работе.

Во введении обсуждаются актуальности исследования и степень его разработанности, даётся краткий обзор литературы по теме работы, кратко формулируются основные результаты диссертации, её теоретическая и практическая значимость, даны сведения по её апробации.

В главе 1 даются основные предварительные сведения, которые используются в последующих главах. Доказано некоторое обобщение одного известного условия точности штрафной функции.

В главе 2 рассматривается задача минимизации полинома от интегральных функционалов с гладкими подынтегральными функциями. Для учёта ограничения на правом конце строится точная штрафная функция. Для данной точной штрафной функции выписаны необходимые условия минимума в терминах субдифференциала и гиподифференциала. На основании этих условий к данной функции применяются методы субдифференциального и гиподифференциального спусков. Указана “слабая” сходимость метода гиподифференциального спуска. Приведены примеры реализации построенного метода. Отмечено, что такие полиномы имеют приложения в некоторых задачах управления, интегральных уравнениях и аэродинамике.

В главе 3 задача построения программного управления системой ОДУ с гладкой правой частью, удовлетворяющего интегральному ограничению, и соответствующего ему программного движения, удовлетворяющее заданным краевым условиям, сводится к вариационной задаче минимизации негладкого функционала на всём пространстве. Для этого функционала выписаны субдифференциал и гиподифференциал, найдены необходимые условия минимума, которые в случае линейности системы по фазовым переменным и управлению оказываются и достаточными. На основании этих условий описываются методы субдифференциального и гиподифференциального спусков. Указана “слабая” сходимость метода гиподифференциального спуска. Приведены численные примеры реализации описанных методов.

В главе 4 задача построения оптимального в смысле интегрального функционала с гладкой подынтегральной функцией управления системой ОДУ с гладкой правой частью с (частично) закреплённым правым концом и с интегральным ограничением на управление сводится к вариационной задаче минимизации некоторого негладкого функционала на всём пространстве, при этом даны условия, при которых построенный функционал оказывается точной штрафной функцией. Доказаны субдифференцируемость и гиподифференцируемость построенного функционала, найдены необходимые условия минимума, которые в случае линейности исходной системы по фазовым переменным и управлению и выпуклости минимизируемого функционала оказываются и достаточными. На основании этих условий описываются метод субдифференциального спуска и метод гиподифференциального спуска для данной задачи. Указана “слабая” сходимости метода гиподифференциального спуска. Реализована новая техническая идея приближённого нахождения “сопряжённой” переменной в ходе реализации алгоритма как решения специальной оптимизационной задачи. Данная идея позволяет осуществлять поиск направления наискорейшего спуска минимизируемого функционала. Приведены численные примеры реализации описанных методов. Отмечена возможность применимости данного алгоритма с негладким целевым функционалом, представляющим собой максимум конечного числа интегральных функционалов с гладкими подынтегральными функциями.

В главе 5 рассматривается задача построения программного управления объектом, описываемым системой с негладкой (а только квазидифференцируемой) правой частью. Целью управления является перевод такой системы из заданного начального положения в заданное конечное состояние за определенное конечное время. Допустимыми управлениями считаются кусочно-непрерывные и ограниченные вектор-функции со значениями из некоторого параллелепипеда. Исходная задача сводится к безусловной минимизации некоторого штрафного функционала, учитывающего ограничения в виде дифференциальных уравнений, ограничения на начальное и конечное положения объекта, а также ограничения на управление. Реализована новая техническая идея разделения переменных (фазовой траектории и ее производной) и учета естественной связи между ними с помощью специального штрафного слагаемого. Доказана квазидифференцируемость построенного функционала, выписаны необходимые условия его минимума в терминах квазидифференциала. Благодаря “разделению” траектории и ее производной эти условия минимума оказываются поточечными (по времени) и их можно проверить (при заданных траектории и управлении). Для решения полученной задачи минимизации в функциональном пространстве применяется метод квазидифференциального спуска. Идея “разделения” траектории и ее производной позволя-

ет найти направление наискорейшего спуска минимизируемого функционала. Доказывается, что функция, полученная интерполяцией построенных направлений спуска в каждый момент времени дискретизации, сходится в среднем к направлению квазидифференциального спуска исходной непрерывной задачи. Разработанный алгоритм демонстрируется на примерах. Подробно обсуждаются преимущества и недостатки метода. Отмечена возможность применения этого алгоритма к более общей задаче управления с интегральным функционалом качества, в которой подынтегральная функция негладкая (а только квазидифференцируемая).

В главе 6 рассматривается классическая вариационная задача с негладкой (а только субдифференцируемой) подынтегральной функцией минимизируемого функционала. Исходная задача со свободным или фиксированным правым концом сводится к безусловной минимизации некоторого функционала. Реализована новая техническая идея разделения переменных (фазовой траектории и ее производной) и учета естественной связи между ними с помощью специального штрафного слагаемого. Доказана субдифференцируемость построенного функционала. Сформулированы необходимые условия минимума в терминах субдифференциала. Благодаря “разделению” траектории и ее производной эти условия минимума оказываются поточечными (по времени) и их можно проверить (для заданной траектории). Для решения полученной задачи минимизации в функциональном пространстве применяется метод субдифференциального спуска. Идея “разделения” траектории и ее производной позволяет найти направление наискорейшего спуска минимизируемого функционала. Доказано, что функция, полученная интерполяцией построенных направлений спуска в каждый момент времени дискретизации, сходится в среднем к направлению квазидифференциального спуска исходной непрерывной задачи. Разработанный алгоритм демонстрируется на примерах.

Глава 7 посвящена задаче оптимального управления объектом, описываемым системой с непрерывно дифференцируемой правой частью и недифференцируемым (а только квазидифференцируемым) функционалом качества. Рассматривается задача в форме Майера как со свободным, так и с (частично) закрепленным правым концом. Допустимыми управлениями считаются кусочно-непрерывные вектор-функции, принадлежащие в каждый момент времени некоторому многограннику. Проведена стандартная дискретизация исходной системы и параметризация управления, а также приведены теоремы о “слабой” сходимости полученного решения дискретной системы к искомому решению непрерывной задачи. Далее для дискретной системы выписаны необходимые условия минимума в терминах квазидифференциала. К данной задаче применен метод квазидифференциального спуска. Разработанный алгоритм продемонстрирован на примерах. В случае линейности системы и кусочно-аффинной целевой

функции представлен модифицированный алгоритм кодифференциального спуска, который сходится к точке глобального минимума рассматриваемой задачи за конечное число шагов. Отмечена возможность применения данного алгоритма к более общей задаче со смешанными поточечными ограничениями на траекторию и управление.

Глава 8 демонстрирует применение теории точных штрафных функций к задаче оптимального управления дифференциальным включением со свободным правым концом. Многозначное отображение в правой части дифференциального включения предполагается непрерывным с выпуклыми компактными значениями. Аппарат опорных функций позволяет свести исходную задачу к оптимизационной задаче при наличии ограничений. Строится точная штрафная функция, позволяющая исходную задачу при наличии ограничений свести к минимизации некоторого негладкого функционала на всём пространстве. При условии непрерывности частной производной опорной функции множества в правой части дифференциального включения по вектору фазовых координат этот функционал оказывается дифференцируемым по направлениям в смысле Дини, что позволяет выписать необходимые условия минимума в терминах производной по направлениям. Приведены примеры применения известных условий оптимальности для дифференциальных включений.

Глава 9 исследует дифференциальное включение как со свободным так и с (частично) закреплённым правым концом. Многозначное отображение в правой части дифференциального включения предполагается непрерывным с выпуклыми компактными значениями. На заданном конечном промежутке времени требуется построить решение дифференциального включения, которое удовлетворяет заданным начальным и конечным условиям и доставляет минимум интегральному функционалу. С помощью аппарата опорных функций исходная задача сводится к безусловной минимизации некоторого функционала. В случае непрерывности частной производной опорной функции правой части дифференциального включения по фазовой переменной этот функционал оказывается дифференцируемым по Гато. В главе найден градиент Гато, получены необходимые условия минимума данного функционала. На основании этих условий к исходной задаче применяется метод наискорейшего спуска, указана его “слабая” сходимост. Численные примеры иллюстрируют работу построенного алгоритма. Отмечена возможность эффективного применения данного алгоритма к следующим классам задач с дифференциальными включениями: 1) дифференциальное включение, получающееся из управляемой системы с переменной областью управления, зависящей от фазовых координат, 2) дифференциальное включение, содержащее в правой части прямую сумму, объединение или пересечение выпуклых множеств, 3) линейная интервальная система ОДУ, рассматриваемая как дифференциальное включение.

В главе 10 рассматривается задача нахождения решения системы дифференциальных неравенств. Рассматриваются как неравенства в “нормальной” форме с гладкой правой частью, так и системы гладких дифференциальных неравенств, неразрешенные относительно производной. Исходная задача сводится к безусловной минимизации функционала. Найден градиент Гато, получены необходимые и достаточные условия минимума. На основе этих условий к задаче применяется метод наискорейшего спуска. Доказывается “слабая” сходимость предложенного метода наискорейшего спуска. Представлена численная реализация метода.

В главе 11 исследуется “негладкое” дифференциальное включение специального вида. Предполагается, что опорная функция множества в правой части включения может содержать сумму максимума и минимума конечного числа непрерывно дифференцируемых (по фазовым координатам) функций. При этом многозначные отображения из правой части дифференциального включения предполагаются непрерывными и имеющими компактные выпуклые значения. Требуется найти траекторию, которая удовлетворяла бы дифференциальному включению с заданными граничными условиями и одновременно лежала бы на заданной поверхности. Исходная задача сводится к вариационной. Доказывается, что полученный минимизируемый функционал является квазидифференцируемым. Формулируются необходимые условия минимума в терминах квазидифференциала. Затем к этому функционалу применяется метод квазидифференциального спуска. Доказывается “слабая” сходимость предложенного (модифицированного) метода в некоторых частных случаях. Приводятся некоторые интересные прикладные задачи, в которых возникают дифференциальные включения рассматриваемого типа. Построенный метод иллюстрируется численными примерами.

В главе 12 рассматриваются линейные стационарные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащие в правой части управления, разрывные по фазовым переменным. Эти управления вызывают возникновение так называемых скользящих режимов и имеют особую структуру, характерную для теории скользящих режимов. Поверхность разрыва описывается непрерывно дифференцируемой функцией фазовых координат (здесь рассматриваются гиперплоскости) и некоторых параметров, которые также подлежат определению (поэтому рассматривается и задача построения структуры скользящего режима). Целью является нахождение решения дифференциального включения, описывающего движение системы в скользящем режиме и с дополнительным ограничением на желаемую траекторию для попадания в определенную точку в конечный момент времени. Исходная задача сводится к безусловной минимизации функционала, для которого формулируются необхо-

димые условия минимума в терминах градиента Гато. На основе полученных условий для функционала предлагается метод наискорейшего спуска, сходящийся в “слабом” смысле. Рассматриваются также управления несколько иного, в отличие от классических, типа, обладающие полезными дифференциальными свойствами, и строится метод решения систем с такими управлениями, рассматриваемых как до попадания на требуемую поверхность, так и при движении в ее окрестности.

Список обозначений

- $X \times Y$ — прямое произведение пространств X и Y ;
 X^* — пространство, сопряжённое к пространству X ;
 \mathbb{R} — вещественная прямая;
 \mathbb{N} — множество натуральных чисел;
 \exists — квантор существования;
 \forall — квантор всеобщности;
 $\|\cdot\|_X$ — норма в пространстве X ;
 $\rho(\cdot, \cdot)$ — метрика в соответствующем пространстве;
 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в соответствующем пространстве;
 $dist(v, W)$ — расстояние от точки $v \in X$ до множества $W \subset X$;
 $B(c, r)$ — замкнутый шар радиуса r с центром в точке c ;
 $D(c, r)$ — открытый шар радиуса r с центром в точке c ;
 S_n — единичная сфера в пространстве \mathbb{R}^n ;
 $\text{dom } f$ — эффективное множество функции f ;
 $f'(x, g)$ — производная функции f в точке x по направлению g ;
 $\nabla f(x)$ — “производная Гато” функции f в точке x ;
 $\partial f(x)$ — субдифференциал функции f в точке x ;
 $\bar{\partial} f(x)$ — супердифференциал функции f в точке x ;
 $\underline{d}f(x)$ — гиподифференциал функции f в точке x ;
 $\bar{d}f(x)$ — гипердифференциал функции f в точке x ;
 $C_n[0, T]$ — пространство непрерывных n -мерных вектор-функций, определённых на отрезке $[a, b]$;
 $P_n[0, T]$ — пространство кусочно непрерывных n -мерных вектор-функций, определённых на отрезке $[0, T]$;
 $L_n^2[0, T]$ — пространство измеримых, суммируемых с квадратом n -мерных вектор-функций, определённых на отрезке $[0, T]$;

$\text{sign } \alpha$ — знак числа α ;

$\alpha \downarrow 0$ — $\alpha \rightarrow +0$;

$\text{co } A$ — выпуклая оболочка множества A ;

E — единичная матрица;

e_i — канонический базис в пространстве \mathbb{R}^n ;

$(\cdot)'$ — транспонирование;

$c(F, \psi) = \sup_{f \in F} (f, \psi)$ — опорная функция множества $F \subset \mathbb{R}^n$;

Литература

- [1] Андрамонов М. Ю. Метод доверительных окрестностей для минимизации кодифференцируемых функций // Известия вузов. Математика. 2004. № 1. С. 3–9.
- [2] Аноров В. П. Принцип максимума для процессов с ограничениями общего вида. II // Автомат. и телемех., 1967. Вып. 4. С. 5–17.
- [3] Антипин А. С., Хорошилова Е. В. Оптимальное управление со связанными начальными и терминальными условиями // Труды института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 2. С. 13–28.
- [4] Ащепков Л. Т., Левченко Н. М. Об оптимальности траектории разрывной системы управления на участке скольжения // Сиб. матем. журн., 1981. Том 22, номер 2. С. 38–47.
- [5] Балакришнан А. Введение в теорию оптимизации в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1974. 260 с.
- [6] Баранов А. Ю., Казаринов Ю. Ф., Хоменюк В. В. Градиентные методы оптимизации нелинейных систем автоматического регулирования. В сб. «Прикл. задачи техн. кибернетики». М.: Советское радио, 1966. С. 307–316.
- [7] Барбашин Е. А., Геращенко Е. И. О форсировании скользких режимов в системах автоматического регулирования // Дифференц. уравнения, 1965. Том 1. № 1. С. 25–32.
- [8] Бейко И. В. Численные методы отыскания оптимальных управлений. В сб. «Оптимальные системы. Статист. методы». М.: Наука, 1967. С. 176–183.
- [9] Бейко И. В., Бейко М. Ф. Об одном новом подходе к решению нелинейных краевых задач // Укр. мат. ж. 1968. Т. 20. № 6. С. 723–731.
- [10] Беллман Р. Динамическое программирование. Перев. с англ. М.: Изд-во ин. лит., 1960. 400 с.

- [11] Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления. Перев. с англ. М.: Наука, 1969. 118 с.
- [12] Бережинский Т. А., Островский Г. М. Об оптимальном управлении процессами с параметрами при ограниченных фазовых координатах // Автомат. и телемех. 1970. Выпуск 2. С. 7–13.
- [13] Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Том 1. Изд. 2-е, стереотип. М.: Физматлит, 1962. 464 с.
- [14] Благодатских В. И., Филиппов А. Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды МИАН. 1985. Т. 169. С. 194–252.
- [15] Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.
- [16] Брайсон А., Хо Ю-Ши Прикладная теория оптимального управления Перев. с англ. М.: Мир, 1972. 544 с.
- [17] Будаков Б. М., Беркович Е. М., Соловьева Е. Н. О сходимости разностных аппроксимаций для задач оптимального управления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969. Том 9. № 3. С. 522–547.
- [18] Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
- [19] Ватель И. А., Кононенко А. Ф. Об одной численной схеме решения задач оптимального управления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1970. Том 10, номер 1. С. 67–73.
- [20] Величенко В. В. О задачах оптимального управления для уравнений с разрывными правыми частями // Автомат. и телемех., 1966. Выпуск 7. С. 20–30.
- [21] Габасов Р. Вопросы конструктивной теории оптимального управления // Вестник Белорусского государственного университета, серия 1. 1981. № 3. С. 56–61.
- [22] Гамкрелидзе Р. В. О скользящих оптимальных режимах // Докл. АН СССР, 1962. Том 143, № 6. С. 1243–1245.
- [23] Гревцов Н. М., Ефимов О. Е., Мельц И. О. Выбор начального приближения для множителей Лагранжа при решении задач оптимального управления методом второго порядка // Ученые записки ЦАГИ. 1998. Том 29. № 1-2. С. 142–149.

- [24] Горбунов В. К. О сведениях задач оптимального управления к конечномерным // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1978. Том 18. № 5. С. 1083–1095.
- [25] Гороховик В. В. О квазидифференцируемости вещественнозначных функций // Доклады АН СССР. 1982. Т. 266. № 6. С. 1294–1298.
- [26] Гороховик В. В. Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации. Минск: Навука і тэхніка, 1990. 239 с.
- [27] Гурин Л. Г., Столярова Е. М. Принцип максимума в одной минимаксной задаче // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1973. Том 13. № 5. С. 1175–1185.
- [28] Гюнтер Н. М. Курс вариационного исчисления. М.: Гостехиздат, 1941. 308 с.
- [29] Данскин Дж. Теория максимина и её приложение к задачам распределения вооружения. М.: Советское радио, 1970. 200 с.
- [30] Даугавет В. А. Модификация метода Вулфа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1981. Т. 21. № 2. С. 504–508.
- [31] Даугавет В. А. Численные методы квадратичного программирования. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2001. 128 с.
- [32] Демьянов В. Ф. К построению оптимальной программы в линейной системе // Автоматика и телемеханика. 1964. Т. 25. № 1. С. 3–11.
- [33] Демьянов В. Ф. Минимакс: дифференцируемость по направлениям. Л.: Изд-во ЛГУ, 1974. 112 с.
- [34] Демьянов В. Ф. Негладкий анализ на плоскости. Часть I // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. № 8. С. 122–127.
- [35] Демьянов В. Ф. Построение программного управления в линейной системе, оптимального в интегральном смысле // Прикл. мат. и мех. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 554–556.
- [36] Демьянов В. Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 2005. 335 с.
- [37] Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.

- [38] Демьянов В. Ф., Долгополик М. В. Кодифференцируемые функции в банаховых пространствах: методы и приложения к задачам вариационного исчисления // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2013. Вып. 3. С. 48–66.
- [39] Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н. Введение в минимакс. М: Наука, 1972. 368 с.
- [40] Демьянов В. Ф., Полякова Л. Н. Условия минимума квазидифференцируемой функции на квазидифференцируемом множестве // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1980. Т. 20. № 4. С. 849–856.
- [41] Демьянов В. Ф., Полякова Л. Н., Рубинов А. М. Об одном обобщении понятия субдифференциала / Всесоюзная конференция «Динамическое управление»: тезисы докладов. С. 79–84. Свердловск, 1979.
- [42] Демьянов В. Ф., Рощина В. А. Обобщенные субдифференциалы и экзостеры // Владикавказ. матем. журн. 2006. Т. 8. № 4. С. 19–31.
- [43] Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. О квазидифференцируемых функционалах // Доклады АН СССР. 1980. Т. 250. № 1. С. 21–25.
- [44] Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Элементы квазидифференциального исчисления / Негладкие задачи теории оптимизации и управления; под ред. В. Ф. Демьянова. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1982. С. 5–127.
- [45] Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Приближённые методы решения экстремальных задач. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1968. 178 с.
- [46] Демьянов В. Ф., Тамасян Г. Ш. О прямых методах решения вариационных задач // Труды института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 5. С. 36–47.
- [47] Дудов С. И., Осипцев М. А. О подходе к приближенному решению задачи наилучшего приближения выпуклого тела шаром фиксированного радиуса // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2014. Вып. 3. С. 267–272.
- [48] Егоров А. И. Основы теории управления. М.: Физматлит, 2007. 504 с.
- [49] Ерёмин И. И. Метод «штрафов» в выпуклом программировании // Доклады АН СССР, 1967. Т. 143. № 4. С. 74–75.

- [50] Зубов В. И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1969. 497 с.
- [51] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 481 с.
- [52] Исаев В. К. Сонин В. В. Вычислительные аспекты задачи об оптимальном перелёте как краевой задачи // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1965. Т. 5. № 2. С. 252–261.
- [53] Карелин В. В. Точные штрафы в одной задаче управления // Автоматика и телемеханика. 2004. № 3. С. 137–147.
- [54] Карелин В. В. Точные штрафы в задаче наблюдения // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2008. Вып. 4. С. 3–7.
- [55] Карманов В. Г. Математическое программирование. М.: Физматлит, 2004. 264 с.
- [56] Карпенко М. Ф. Итерационный метод отысканий оптимальных управлений. В сб. «Кибернетика и техн. вычисл.». Киев: Наукова думка, 1964. С. 148–157.
- [57] Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
- [58] Колмановский В. Б. Задачи оптимального управления // Соровский образовательный журнал, 1997. № 6. С. 121–127.
- [59] Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
- [60] Крылов И. А. Численное решение задачи об оптимальной стабилизации спутника // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1968. Т. 8. № 1. С. 203–208.
- [61] Крылов И. А., Черноусько Ф. Л. Алгоритм метода последовательных приближений для задач оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1972. Т. 12. № 1. С. 14–34.
- [62] Крылов И. А., Черноусько Ф. Л. О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1962. Т. 2. № 6. С. 1132–1139.
- [63] Кузнецов А. Г., Черноусько Ф. Л. Об оптимальном управлении, минимизирующем экстремум функции фазовых координат // Кибернетика. 1968. № 3. С. 50–55.

- [64] Крылов И. А., Черноусько Ф. Л. Решение задач оптимального управления методом локальных вариаций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1966. Т. 6. № 1. С. 203–217.
- [65] Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциалы. Теория и приложения. Ч. 1. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002. 380 с.
- [66] Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциалы. Теория и приложения. Ч. 2. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2003. 413 с.
- [67] Лебедев П. Д., Успенский А. А., Ушаков В. Н. Итерационные алгоритмы минимизации хаусдорфова расстояния между выпуклыми многогранниками // Изв. ИМИ УдГУ, 2021. Том 57. С. 142–155.
- [68] Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. Москва: Наука, 1972. 576 с.
- [69] Лотов А. В. Численный метод построения множеств достижимости для линейной управляемой системы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972. Том 12. № 3. С. 785–788.
- [70] Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М.—Л.: Гостехиздат, 1951. 360 с.
- [71] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостеориздат, 1950. 471 с.
- [72] Мельц И. О., Усков Г. В. Градиентный метод коррекции управления для решения краевой задачи // Ученые записки ЦАГИ. 1972. Том 3. № 2. С. 77–85.
- [73] Михалевич В. С. Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение // Киберн. 1965. Т. 1. № 1. С. 44–55.
- [74] Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975. 528 с.
- [75] Нурминский Е. А. О непрерывности ε -субградиентных отображений // Кибернетика. 1977. № 5. С. 148–149.
- [76] Обен Ж.-П., Эккланд И. Прикладной нелинейный анализ: пер. с англ. М.: Мир, 1988. 512 с.

- [77] Орлов В. С., Поляк Б. Т., Ребрий В. А., Третьяков Н. В. Опыт решения задач оптимального управления // Вычисл. методы и программир. Вып. 9. 1967. С. 179–192.
- [78] Орлов И. В., Стонякин Ф. С. Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты // Современная математика. Фундаментальные направления, 2009. Том 34. С. 121–138.
- [79] Охоцимский Д. Е. К теории движения ракет // Прикл. мат. и мех., 1946. Т. 10. Вып. 2. С. 251–272.
- [80] Плотников В. И., Сумин М. И. Необходимые условия в негладкой задаче оптимального управления // Матем. заметки. 1982. Том 32. Выпуск 2. С. 187–197.
- [81] Плотников В. И., Сумин М. И. О построении минимизирующих последовательностей // Дифференц. уравнения, 1983. Том 19. № 4. С. 581–588.
- [82] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
- [83] Полякова Л. Н. О методе точных штрафных квазидифференцируемых функций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2001. Том 41, номер 2. С. 225–238.
- [84] Полякова Л. Н. Минимизации функции максимума сильно выпуклых функций с постоянным шагом // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 1998. Вып. 4. С. 59–63.
- [85] Полякова Л. Н. Необходимые условия экстремума квазидифференцируемых функций // Вестник Ленинградского университета, 1980. № 13. С. 57–62.
- [86] Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.
- [87] Пшеничный Б. Н. Необходимые условия экстремума. М.: Наука, 1969. 151 с.
- [88] Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. О дифференцируемости решения систем дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями по начальным значениям. В сб. «Теория оптимальных решений». Киев: изд. Института кибернетики АН УССР, 1968. С. 25–43.
- [89] Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1976. 192 с.

- [90] Розова В. Н. Управляемость систем регулирования при разрывных ограничениях на управление // Автомат. и телемех., 1968. Вып. 7. С. 5–18.
- [91] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472 с.
- [92] Серков Д. А. Оптимальное управление при компактных в L_p ограничениях на помеху // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 2013. Вып. 3. С. 79–87.
- [93] Сухорукова Н. В. Применение квазидифференциалов к задачам аппроксимации непрерывных функций / Труды XXIX научной конференции Процессы управления и устойчивость. С. 388–390. Санкт-Петербург: издательство Санкт-Петербургского государственного университета, 1998.
- [94] Тамасян Г. Ш. Градиентные методы в вариационной задаче со свободными концами // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2012. Вып. 4. С. 77–84.
- [95] Тамасян Г. Ш. Градиентные методы решения задачи Коши // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2009. Вып. 4. С. 224–230.
- [96] Тамасян Г. Ш. Метод точных штрафов в вариационной задаче с отклоняющимся аргументом // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2003. № 2. С. 66–75.
- [97] Тамасян Г. Ш. Численные методы в задачах вариационного исчисления для функционалов, зависящих от производных высшего порядка // Проблемы математического анализа. 2012. Вып. 67. С. 113–132.
- [98] Тамасян Г. Ш., Чумаков А. А. Нахождение расстояния между эллипсоидами // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2014. Т. 21. № 3. С. 87–102.
- [99] Федоренко Р. П. Замечание в связи с критикой уравнения Беллмана // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1967. Том 7, номер 5. С. 1193–1198.
- [100] Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Москва: Наука, 1985. 224 с.
- [101] Фоминых А. В. Метод нахождения оптимального решения дифференциального включения // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Том 5, номер 4. С. 645–657.

- [102] Фоминых А. В. Градиентные методы решения задачи Коши для нелинейной системы ОДУ // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Вып. 3. С. 311–316.
- [103] Фоминых А. В. Необходимые условия минимума полинома от интегральных функционалов // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2015. Вып. 2. С. 93–107.
- [104] Фоминых А. В. Метод гиподифференциального спуска в задаче построения программного управления // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2016. Вып. 1. С. 117–124.
- [105] Фоминых А. В., Карелин В. В., Полякова Л. Н. Метод решения задачи оптимального управления в форме Майера с квазидифференцируемым функционалом при наличии фазовых ограничений // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2023. Том 19, номер 1. С. 120–134.
- [106] Фоминых А. В., Карелин В. В., Полякова Л. Н. Градиентный метод решения некоторых типов дифференциальных включений // Труды Института Математики и Механики УРО РАН. 2020. Vol. 26, no. 1. P. 256–273.
- [107] Фоминых А. В., Карелин В. В., Полякова Л. Н., Мышков С. К., Трегубов В. П. Метод кодифференциального спуска в задаче нахождения глобального минимума кусочно-аффинного целевого функционала в линейных системах управления // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2021. Том 17, номер 1. С. 47–58.
- [108] Шатровский Л. И. Об одном численном методе решения задач оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1962. Т. 2. № 3. С. 488–491.
- [109] Шор Н. З. О классе почти-дифференцируемых функций и одном методе минимизации функций этого класса // Кибернетика. 1972. № 4. С. 65–70.
- [110] Шор Н. З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев: Наукова думка, 1979. 200 с.
- [111] Энеев Т. М. О применении градиентного метода в задачах оптимального управления // Космические исследования. 1966. Т. 4. № 5. С. 651–669.

- [112] Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. Пер. с англ. М.: Мир, 1986. 243 с.
- [113] Ahmerov R. R., Sadovskiy B. N. Basics of the Ordinary Differential Equations Theory. <http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/ode-unicode/index.html>
- [114] Aizerman M. A., Pyatniskii E. S. Fundamentals of the theory of discontinuous systems. I // Automation and Remote Control. 1974. V. 7. P. 33–47.
- [115] Alekseev V. M., Tikhomirov V. M., Fomin S. V. Optimal control. Moscow: Nauka 1979. 432 p.
- [116] Alexandrov A. Y., Platonov A. V. Differential inequalities and motion stability. SPb: Solo, 2006. 107 p.
- [117] Andersen A., Chistiakov S., Vishnevskii V. A Game-theoretic Model of a Regressive Profit Tax // Applied Mathematical Sciences. 2015. Vol. 9, no. 85. P. 4201–4209.
- [118] Anderson G. An indirect numerical method for the solution of a class of optimal control problems with singular arcs // IEEE Transactions on Automatic Control, 1972. Vol. 17, no. 3. P. 363–365.
- [119] Artstein Z. First-order approximations for differential inclusions // Set-Valued Anal. 1994. Vol. 2. P. 7–17.
- [120] Arutyunov A. V., Aseev S. M., Blagodatskikh V. I. Necessary conditions of the first order in the problem of optimal control of a differential inclusion with phase constraints // Russian Acad. Sci. Sb. Math. 1994. Vol. 79, no. 1. P. 117–139.
- [121] Aseev S. M. A method of smooth approximation in the theory of necessary optimality conditions for differential inclusions // Izv. Math. 1997. Vol. 61, no. 2. P. 235–258.
- [122] Ashrafioun H., Muske K. R., McNinch L. C., Soltan R. A. Sliding-Mode Tracking Control of Surface Vessels // IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2008. V. 55, no. 11. P. 4004–4012.
- [123] Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston: Birkhauser Basel, 1990. 482 p.
- [124] Aubin J.-P., Cellina A. Differential inclusions. Berlin: Springer-Verlag Publ., 1984. 344 p.

- [125] Bagirov A. M., Nazari Ganjehlou A., Ugon J., Tor A. H. Truncated codifferential method for nonsmooth convex optimization // *Pacific J. Optim.* 2010. Vol. 6, no 3. P. 483–496.
- [126] Bagirov A. M., Ugon J. Codifferential method for minimizing DC functions // *J. Glob. Optim.* 2011. Vol. 50, no. 1. P. 3–22.
- [127] Baier R., Gerdts M., Xausa I. Approximation of reachable sets using optimal control algorithms // *Numer. Algebra Control Optim.*, 2013. Vol. 3. P. 519–548.
- [128] Balakrishnan A. V. On a new computing technique in optimal control and its application to minimal-time flight profile optimization // *J. Optim. Theory Appl.* 1969. Vol. 4, no. 1. P. 1–21.
- [129] Baldwin J. F., Sims-Williams J. H. An On-Line Control Scheme Using a Successive Approximation in Policy Space Approach // *Journal of Optimization Theory and Applications.* 1968. V. 182. P. 523–536.
- [130] Bartoszewicz A. Discrete-time quasi-sliding-mode control strategies // *IEEE Transactions on Industrial Electronics.* 1998. V. 45, no. 4. P. 633–637.
- [131] Basaeva E. K., Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Quasidifferentials in Kantorovich Spaces // *J. Optim. Theory Appl.* 2016. Vol. 171, no. 2. P. 365–383.
- [132] Bastien J. Convergence order of implicit Euler numerical scheme for maximal monotone differential inclusions // *Z. Angew. Math. Phys.* 2013. V. 64. P. 955–966.
- [133] Beckenbach E., Bellman R. *Inequalities.* Berlin: Springer Verlag, 1965. 208 p.
- [134] Belen'kyi V. Z. Sufficient Optimality Conditions for Linear Differential Inequalities with Discontinuous Trajectories // *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics,* 1993. Vol. 41, iss. 1. P. 39–54.
- [135] Bell D. J. Singular problems in optimal control — a survey // *International Journal of Control,* 1975. Vol. 21, no. 2. P. 319–331.
- [136] Bellmore M., Greenberg H. J., Jarvis J. J. Generalized Penalty-Function Concepts in Mathematical Optimization // *Operations Research,* 1970. Vol. 18, iss. 2. P. 229–252.
- [137] Beltran B., Ahmed-Ali T., Benbouzid M. High-Order Sliding-Mode Control of Variable-Speed Wind Turbines // *Journal of IEEE Transactions on Industrial Electronics.* 2009. V. 56, iss. 9. P. 3314–3321.

- [138] Berkovitz L. D. An existence theorem for optimal controls // *J. Optim. Theory Appl.* 1969. Vol. 4, no. 2. P. 77–86.
- [139] Berkovitz L. D. Existence and Lower Closure Theorems for Abstract Control Problems // *SIAM Journal on Control*, 1974. Vol. 12, no. 1. P. 27–42.
- [140] Berkovitz L. D., Dreyfus, S. E. The equivalence of some necessary conditions for optimal control in problems with bounded state variables // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1965. Vol. 10, iss. 2. P. 275–283.
- [141] Beyn W-J., Rieger J. The implicit Euler scheme for one-sided Lipschitz differential inclusions // *Discr. and Cont. Dynam. Syst. Ser. B.* 2010. V. 14, no. 2. P. 409–428.
- [142] Birta L. G., Deo U. A sequential refinement approach for parameter optimization in continuous dynamic models // *Mathematics and Computers in Simulation*, 1986. Vol. 28, no. 1. P. 25–39.
- [143] Blagodatskih V. I. *Introduction to Optimal Control*. Moscow: Vysshaya shkola Publ., 2001. 239 p.
- [144] Bogolyubov N. N. Sur quelques methodes nouvelles dans le calcul des variations // *Ann Math. Pura and Appl.*, 1930. Vol. 7, no. 4. S. 249–271.
- [145] Bonnans J. F., Shapiro A. *Perturbation analysis of optimization problems*. New York: Springer Science+Business Media Publ., 2000. 601 p.
- [146] Brammer R. F. Controllability in Linear Autonomous Systems with Positive Controllers // *SIAM Journal on Control*, 1972. Vol. 10, no. 2. P. 339–353.
- [147] Breakwell J. V., Speyer J. L., Bryson A. E. Optimization and Control of Nonlinear Systems Using the Second Variation // *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series A Control*, 1963. Vol. 1, no. 2. P. 193–223.
- [148] Bruschi R. G., Schappelle R. H. Solution of Highly Constrained Optimal Control Problems Using Nonlinear Programming // *AIAA Journal*, 1973. Vol. 11, no. 2. P. 135–136.
- [149] Bryson A. E., Denham W. F. A Steepest-Ascent Method for Solving Optimum Programming Problems // *Journal of Applied Mechanics*. 1962. V. 29, no. 2. P. 247–257.

- [150] Bryson A. E., Denham W. F. Optimal programming problems with inequality constraints. Part I — necessary conditions for extremal solutions // AIAA Journal, 1963. Vol. 1, no. 11. P. 2544–2550.
- [151] Bryson A. E., Denham W. F. Optimal programming problems with inequality constraints. Part II — solution by steepest-ascent // AIAA Journal, 1964. Vol. 2, no. 1. P. 25–34.
- [152] Bryson A. E., Mehra R. K. Conjugate gradient methods with an application to V/STOL flight-path optimization // Journal of Aircraft, 1969. Vol. 6, no. 2. P. 123–128.
- [153] Bryson A. E., Speyer J. L. Optimal programming problems with a bounded state space // AIAA Journal, 1968. Vol. 6, no. 8. P. 1488–1491.
- [154] Burghart J. A technique for suboptimal feedback control of nonlinear systems // IEEE Transactions on Automatic Control, 1969. Vol. 14, no. 5. P. 530–533.
- [155] Byrd R. H., Nocedal J., Waltz R. A. Steering exact penalty methods for nonlinear programming // Optimization Methods and Software. 2008. Vol. 23, no. 2. P. 197–213.
- [156] Campbell J. H., Moore W. E., Wolf H. A general method for selection and optimization of trajectories // Methods astrodyam. and celestial Mech. New York–London, Acad. Press, 1966. P. 355–375.
- [157] Cernea A., Georgescu C. Necessary optimality conditions for differential-difference inclusions with state constraints // J. Math. Anal. Appl. 2007. Vol. 344. P. 43–53.
- [158] Cesari L. Existence theorems for weak and usual optimal solutions in Lagrange problems with unilateral constraints. I // Trans. Amer. Math. Soc., 1966. Vol. 124, no. 3. P. 369–412.
- [159] Cheng Y. Existence of Solutions for a Class of Nonlinear Evolution Inclusions with Nonlocal Conditions // J. Optim. Theory Appl. 2014. Vol. 162, no. 1. P. 13–33.
- [160] Chernousko F. L. State Estimation for Dynamical Systems by Means of Ellipsoids // Dynamical Systems, 1987. P. 95–105.
- [161] Chernukhin K. V. Modeling of the “double pendulum” system // Modern Science. 2022. No. 5. P. 357–362.
- [162] Clarke F. H. The Erdmann condition and Hamiltonian inclusions in optimal control and the calculus of variations // Canadian Journal of Mathematics. 1980. V. 32, no. 2. P. 494–509.

- [163] Clarke F. H., Ledyaev Y. S., Stern R. J., Wolenski P. R. *Nonsmooth analysis and Control Theory*. New York: Springer–Verlag, 1998. 278 p.
- [164] Clarke F. H., Wolenski P. R. Control of systems to sets and their interiors // *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1996. V. 88, no. 1. P. 3–23.
- [165] Cook G. Application of Green's Theorem to Optimization Problems with State-Variable Inequality Constraints // *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1967. Vol. 12, no. 1. P. 105–106.
- [166] Cook G., Funk J. E. Quadratic control problem with an energy constraint; approximate solutions // *Automatica*, 1968. Vol. 4, no. 5–6. P. 351–363.
- [167] Cong S., Fei S.-M., Li T. On exponential stability of switched systems with time-delays: Differential inequality approach // *Control Theory and Applications*, 2008. Vol. 25, iss. 3. P. 521–524.
- [168] Cullum J. Discrete approximations to continuous optimal control problems // *SIAM J. Control*. 1969. V. 7, no. 1. P. 32–49.
- [169] Cullum J. An explicit procedure for discretizing continuous, optimal control problems // *J. Optim. Theory Appl.* 1971. Vol. 8, no. P. 15–34.
- [170] Daniel J. W. On the Convergence of a Numerical Method for Optimal Control Problems // *Journal of Optimization Theory and Applications*. 1969. V. 4, no. 5. P. 330–342.
- [171] Demyanov V. F. Continuous generalized gradients for nonsmooth functions / *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, vol. 304; A. Kurzhanski, K. Neumann and D. Pallaschke, eds. Berlin: Springer, 1988. P. 24–27.
- [172] Demyanov V. F. Constrained Problems of Calculus of Variations Via Penalization Technique / In P. Daniele, F. Giannessi, A. Maugeri, editors. *Equilibrium Problems and Variational Models. Nonconvex Optimization and Its Applications*, vol 68. P. 79–108. Springer, Boston, MA, 2003.
- [173] Demyanov V. F. On codifferentiable functions // *Vestn. Leningr. Univ., Math.* 1988. Vol. 21. P. 27–33.
- [174] Demyanov V. F. Fixed point theorem in nonsmooth analysis and its applications // *Numer. Funct. Anal. Optim.* 1995. Vol. 16, no. 1–2. P. 53–109.

- [175] Demyanov V. F., Bagirov A. M., Rubinov A. M. A method of truncated codifferential with applications to some problems of cluster analysis // *J. Glob. Optim.* 2002. Vol. 23. P. 63–80.
- [176] Demyanov V. F., Dixon L. C. W. *Quasidifferential Calculus*. Berlin: Heidelberg Springer, 1986. 222 p.
- [177] Demyanov V. F., Gamidov S., Sivelina, T. I. An algorithm for minimizing a certain class of quasidifferentiable functions // *Quasidifferential Calculus*, 1986. P. 74–84.
- [178] Demyanov V. F., Gianessi F., Karelin V. V. Optimal control problems via exact penalty functions // *J. Glob. Optim.* 1998. Vol. 12, no. 3. P. 215–223.
- [179] Demyanov V. F., Nikulina V. N., Shablinskaya I. R. Quasidifferentiable functions in optimal control // *Mathematical Programming Study*. 1986. V. 29. P. 160–175.
- [180] Demyanov V. F., Rubinov A. M. *Basics of nonsmooth analysis and quasidifferential calculus*. 1990. Moscow: Nauka. 432 p.
- [181] Demyanov V. F., Rubinov A. M. Exhausters and convexifiers — new tools in nonsmooth analysis / V. F. Demyanov, A. M. Rubinov, editors. *Quasidifferentiability and related Topics*. P. 85–137. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [182] Demyanov V. F., Rubinov A. M. On quasidifferentiable mappings // *Mathematische Operationforschung und Statistik, Series Optimization*. 1983. Vol. 14, no. 1. P. 3–21.
- [183] Demyanov V. F., Stavroulakis G., Polyakova L. N., Panagiotopoulos P. D. *Quasidifferentiability and nonsmooth modelling in mechanics, engineering and economics*. Dordrecht, London: Kluwer Academic Publishers, 1996. 348 p.
- [184] Demyanov V. F., Tamasyan, G. Sh. Exact penalty functions in isoperimetric problems // *Optimization*. 2011. V. 60, no. 1. P. 153–177.
- [185] Desoer C. A. Pontriagin's maximum principle and the principle of optimality // *Journal of the Franklin Institute*, 1967. Vol. 271, no. 5. P. 361–367.
- [186] Dickmanns E. D., Well K. H. Approximate solution of optimal control problems using third order hermite polynomial functions / In G. I. Marchuk, editors. *Optimization Techniques IFIP 1974. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 27. P. 158–166. Springer, Berlin, Heidelberg, 1975.

- [187] Dolgopolik M. V. Constrained nonsmooth problems of the calculus of variations // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2021. V. 27, no. 79. P. 1–35.
- [188] Dolgopolik M. V. A convergence analysis of the method of codifferential descent // Comput. Optim. Appl. 71, 2018. P. 879–913.
- [189] Dolgopolik M. V. Hypodifferentials of nonsmooth convex functions and their applications to nonsmooth convex optimization. arXiv: 2303.13464. 2023. P. 1–44.
- [190] Dolgopolik M. V. Nonsmooth problems of calculus of variations via codifferentiation // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2014. V. 20, no. 4. P. 1153–1180.
- [191] Dolgopolik M. V. Steering exact penalty DCA for nonsmooth DC optimisation problems with equality and inequality constraints // Optimization Methods and Software. 2023. Vol. 38, iss. 4. P. 668–697.
- [192] Dolgopolik M. V. Codifferential calculus in normed spaces // Journal of Mathematical Sciences. 2011. V. 173, no. 5. P. 441–462.
- [193] Dolgopolik M. V. The method of codifferential descent for convex and global piecewise affine optimization // Optimization Methods and Software. 2020. V. 35, iss. 6. P. 1191–1222.
- [194] Dolgopolik M. V. A unifying theory of exactness of linear penalty functions // Optimization. 2016. V. 65, no. 6. P. 1167–1202.
- [195] Dolgopolik M. V. A new constraint qualification and sharp optimality conditions for nonsmooth mathematical programming problems in terms of quasidifferentials // SIAM J. Optim. 2020. Vol. 30. P. 2603–2627.
- [196] Dolgopolik M. V. The alternating direction method of multipliers for finding the distance between ellipsoids // Applied Mathematics and Computation. 2021. V. 409. P. 1–19.
- [197] Dolgopolik M. V. Exact penalty functions for optimal control problems II: Exact penalization of terminal and pointwise state constraints // Optimal Control Applications and Methods. 2020. Vol. 41, iss. 3. P. 898–947.
- [198] Dolgopolik M. V., Fominyh A. V. Exact penalty functions for optimal control problems I: Main theorem and free-endpoint problems // Optimal Control Applications and Methods, 2019. Vol. 40, no. 6. P. 1018–1044.

- [199] Dontchev A., Lempio F. Difference Methods for Differential Inclusions: A Survey // SIAM Rev. 1992. V. 34, no. 2. P. 263–294.
- [200] Dreyfus S. The Numerical Solution of Variational Problems // Journal of Optimization Theory and Applications. 1963. V. 5. P. 30–45.
- [201] Dreyfus S. Control problems with linear dynamics, quadratic criterion, and linear terminal constraints // IEEE Transactions on Automatic Control, 1967. Vol. 12, no. 3. P. 323–324.
- [202] Dreyfus S. Variational Problems with Inequality Constraints // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1962. V. 4, iss. 2. P. 297–308.
- [203] Dunford N., Schwartz J. T. Linear Operators, Part 1: General Theory. New York: Interscience Publishers Inc., 1958. 872 p.
- [204] Dyer P., McReynolds S. R. Optimization of control systems with discontinuities and terminal constraints // IEEE Transactions on Automatic Control. 1969. V. 14, iss. 3. P. 223–229.
- [205] Emelyanov S. V., Korovin S. K., Levant A. Sliding modes of higher orders in control systems // Differential Equations. 1993. V. 29, no. 11. P. 1627–1647.
- [206] Evans J. P., Gould F. J., Tolle J. W. Exact Penalty Functions in Nonlinear Programming // Mathematical Programming, 1973. Vol. 4, iss. 1. P. 72–97.
- [207] Fiacco A. V., McCormick G. P. The sequential unconstrained minimization technique for nonlinear programming, a primal-dual method // Management Sci., 1964. Vol. 10. P. 360–366.
- [208] Filippov A. F. On certain questions in the theory of optimal control // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control. 1959. V. 1, iss. 1. P. 76–84.
- [209] Fletcher R. An exact penalty function for nonlinear programming with inequalities // Math. Program. 1973. Vol. 5, no. 1. P. 129–150.
- [210] Flugge-Lotz I., Hales K. A. Minimum-fuel attitude control of a rigid body in orbit by an extended method of steepest descent / Stanford University, Dept. of Aeron. and Astron. Report № 257, 1966.
- [211] Frankowska H. The first order necessary conditions for nonsmooth variational and control problems // SIAM J. Control Optim. 1984. V. 22, no. 1. P. 1–12.

- [212] Fominyh A. V. Method of quasidifferential descent in the problem of bringing a nonsmooth system from one point to another // *International Journal of Control*, 2025. Vol. 98, iss. 2. P. 307–325.
- [213] Fominyh A. V. Method for Finding Solution to Nonsmooth Differential Inclusion of Special Structure // *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 2024. Vol. 30. P. 1–26.
- [214] Fominyh A. V. On Differential Inclusions Arising from Some Discontinuous Systems // *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2024. Vol. 45, iss. 4–6. P. 304–332.
- [215] Fominyh A. V. Method for finding solution to “quasidifferentiable” differential inclusion // *Optimization Letters*, 2024. P. 1–29. DOI: 10.1007/s11590-024-02176-z
- [216] Fominyh A. V. The subdifferential descent method in a nonsmooth variational problem // *Optimization Letters*, 2023. Vol. 17. P. 675–698.
- [217] Fominyh A. V. The quasidifferential descent method in a control problem with nonsmooth objective functional // *Optimization Letters*, 2021. Vol. 15. P. 2773–2792.
- [218] Fominyh A. V. Method for finding a solution to a linear nonstationary interval ODE system // *Vestnik of St. Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2021. Vol. 17, no. 2. P. 148–165.
- [219] Fominyh A. V. Open-Loop Control of a Plant Described by a System with Nonsmooth Right-Hand Side // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2019. Vol. 59. P. 1639–1648.
- [220] Fominyh A. V. The hypodifferential descent method in the problem of constructing an optimal control // *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2016, no. 3. P. 106–125.
- [221] Fominyh A. V. A method for solving differential inclusions with fixed right end // *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2018. Vol. 14, no. 4. P. 302–315.
- [222] Fominyh A. V. Methods of subdifferential and hypodifferential descent in the problem of constructing an integrally constrained program control // *Automation and Remote Control*. 2017. V. 78. P. 608–617.

- [223] Fominyh A. Method for Solving a Differential Inclusion with a Subdifferentiable Support Function of the Right-Hand Side / Mathematical Optimization Theory and Operations Research — 22nd International Conference. Vol. 13930. P. 345–361. Springer Nature, Lecture Notes in Computer Science, 2023.
- [224] Fominyh A. On Discontinuous Systems with Sliding Modes / Intelligent Computing and Optimization — the 6th International Conference. Volume 729. P. 46–56. Springer Nature, Lecture Notes in Networks and Systems, 2023.
- [225] Fominyh A. On Optimal Control of a “Superdifferentiable” Differential Inclusion / Intelligent Computing and Optimization — the 7th International Conference. Volume 1169. P. 390–399. Springer Nature, Lecture Notes in Networks and Systems, 2025.
- [226] Fominyh A. Application of Quasidifferential Calculus to Solve Optimal Control Problems with a Nonsmooth Functional / Stability and Control Processes — the 4th International Conference. P. 293–301. Springer Nature, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 2022.
- [227] Fominyh A. Application of the Subdifferential Descent Method to a Classical Nonsmooth Variational Problem / Mathematical Optimization Theory and Operations Research — 21st International Conference Vol. 13367. P. 34–45. Springer Nature, Lecture Notes in Computer Science, 2022.
- [228] Fominyh A. Optimal Control of Convex Differential Inclusion // IX International Conference on Optimization and Applications. Suppl. vol. P. 141–151. DEStech Transactions on Computer Science and Engineering, 2018.
- [229] Fominyh A. Application of the Steepest Descent Method to Solving Differential Inclusions with Either Free or Fixed Right End / Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics. P. 99–102. IEEE Canada, 2017.
- [230] Fominyh A. Application of the Hypodifferential Descent Method to the Problem of Constructing an Optimal Control / Stability and Control Processes — the 3rd International Conference. P. 560–563. IEEE Canada, 2015.
- [231] Fominyh A. V., Karelin V. V., Polyakova L. N. Application of the steepest descent method to solve differential inequalities // Electronic Journal of Differential Equations, 2017. № 241. P. 1–8.

- [232] Fominyh A. V., Karelin V. V., Polyakova L. N. Application of the hypodifferential descent method to the problem of constructing an optimal control // Optimization Letters. 2018. Vol. 12. P. 1825–1839.
- [233] Friedman A. Uniqueness of solutions of ordinary differential inequalities in Hilbert space // Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1964. Vol. 17, iss. 5. P. 353–357.
- [234] Furuta K. Sliding mode control of a discrete system // Systems & Control Letters. 1990. V. 14, no. 2. P. 145–152.
- [235] Gama R., Smirnov G. Stability and optimality of solutions to differential inclusions via averaging method // Set-Valued and Variational Analysis. 2014. Vol. 22, no. 2. P. 349–374.
- [236] Getz W. M., Martin D. H. Optimal control systems with state variable jump discontinuities // J. Optim. Theory Appl. 1980. Vol. 31, no. 2. P. 195–205.
- [237] Gill A., Sivan R. Optimal control of linear systems with quadratic costs which are not necessarily positive definite // IEEE Transactions on Automatic Control, 1969. Vol. 14, no. 1. P. 83–86.
- [238] Glad T., Polak E. A multiplier method with automatic limitation of penalty growth // Mathematical Programming, 1979. Vol. 17, iss. 1. P. 140–155.
- [239] Goh B. S. The Second Variation for the Singular Bolza Problem // SIAM Journal on Control, 1966. Vol. 4, no. 2. P. 309–325.
- [240] Goodman T. R., Lance G. N. The numerical integration of two-point boundary value problems // Mathematics of Computation, 1956. Vol. 10, no. 54. P. 82–86.
- [241] Gorelik V. A., Tarakanov A. F. Penalty method and maximum principle for nonsmooth variable-structure control problems // Cybernetics and Systems Analysis. 1992. V. 28, iss. 3. P. 432–437.
- [242] Gorelik V. A., Tarakanov A. F. Penalty method for nonsmooth minimax control problems with interdependent variables // Cybernetics. 1989. V. 25, iss. 4. P. 483–488.
- [243] Gorokhovik V. V., Demyanov V. F., Dixon L. C. W. ε -Quasidifferentiability of real-valued functions and optimality conditions in extremal problems / Quasidifferential Calculus. P. 203–218. Berlin: Heidelberg, 1986.

- [244] Gorokhovik V. V., Zorko O. I. Piecewise affine functions and polyhedral sets // Optimization. 1994. Vol. 31. P. 209–221.
- [245] Gottlieb R. G. Rapid convergence to optimum solutions using a Min-H strategy // AIAA Journal, 1967. Vol. 5, no. 2. P. 322–329.
- [246] Graham R. G., Leondes C. T. An extended quasilinearization algorithm // J. Optim. Theory Appl., 1973. Vol. 12, no. 3. P. 268–284.
- [247] Gurman V. I., Trushkova E. A. Estimates for attainability sets of control systems // Differential Equations, 2009. Vol. 45, no. 11. P. 1636–1644.
- [248] Haas V. B. On Normality and Conjugate Point Criteria for Singular Extremals // SIAM Journal on Control, 1975. Vol. 13, no. 6. P. 1172–1182.
- [249] Haas V. B. The Clebsch and Jacobi conditions for singular extremals // International Journal of Control, 1978. Vol. 27, no. 4. P. 557–570.
- [250] Haas V. An alternate form of the conjugate gradient method for dynamic optimization // IEEE Transactions on Automatic Control, 1975. Vol. 20, no. 4. P. 581–582.
- [251] Haas V. B. Linear-quadratic optimal control revisited // Systems & Control Letters, 1984. Vol. 5, no. 1. P. 55–57.
- [252] Hales K. A., Flugge-Lotz I., Lange B. D. Minimum-fuel attitude control of a spacecraft by an extended method of steepest-descent // Internat. J. Non-Linear Mech., 1968. Vol. 3, no. 4. P. 413–436.
- [253] Halkin H. Liapounov's theorem on the range of a vector measure and Pontryagin's maximum principle // Arch. Rational Mech. Anal. 1962. Vol. 10, no. 4. P. 296–304.
- [254] Han S. P., Mangasarian O. L. A dual differentiable exact penalty function // Math. Program. 1983. Vol. 25, no. 3. P. 293–306.
- [255] Han S. P., Mangasarian O. L. Exact penalty functions in nonlinear programming // Mathematical Programming, 1979. Vol. 17, iss. 1. P. 251–269.
- [256] Hartman F. Ordinary Differential Equations. Moscow: Mir Publ., 1970. 720 p.
- [257] Hay J. Necessary conditions for the existence of global solutions of higher-order nonlinear ordinary differential inequalities // Differential Equations, 2002. Vol. 38, iss. 3. P. 362–368.

- [258] Heideman J. C., Levy A. V. Sequential conjugate-gradient-restoration algorithm for optimal control problems. Part 1. Theory // *J. Optim. Theory Appl.*, 1975. Vol. 15, no. 2. P. 203–222.
- [259] Heideman J. C., Levy A. V. Sequential conjugate-gradient-restoration algorithm for optimal control problems. Part 1. Examples // *J. Optim. Theory Appl.*, 1975. Vol. 15, no. 2. P. 223–244.
- [260] Hestenes M. R. Multiplier and gradient methods // *J. Optim. Theory Appl.* 1969. Vol. 4, no. 5. P. 303–320.
- [261] Ho Y.-C., Brentani P. B. On Computing Optimal Control with Inequality Constraints // *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series A Control*, 1963. Vol. 1, no. 3. P. 319–348.
- [262] Hontoir Y., Cruz J. B. A manifold imbedding algorithm for optimization problems // *Automatica*, 1972. Vol. 8, no. 5. P. 581–588.
- [263] Hussu A. The conjugate-gradient method for optimal control problems with undetermined final time // *International Journal of Control*, 1972. Vol. 15, no. 1. P. 79–82.
- [264] Huyer W., Neumaier A. A New Exact Penalty function // *SIAM J. Optim.*, 2003. Vol. 13, iss. 4. P. 1141–1158.
- [265] Iglin S. P. *Mathematical calculations on the basis of MATLAB*. SPb.: BHV-Petersburg, 2005. 640 p.
- [266] Ioffe A. D. Necessary conditions in nonsmooth optimization // *Mathematics of Operations Research*. 1984. V. 9, no. 2. P. 159–189.
- [267] Ioffe A. D. Approximate subdifferentials and applications I: the finite dimensional theory // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1984. Vol. 281, no. 1. P. 389–416.
- [268] Ioffe A. D. Calculus of Dini subdifferentials of functions and contingent coderivatives of set-valued maps // *Nonlinear Anal.* 1984. Vol. 8, no. 5. P. 517–539.
- [269] Ioffe A. D. On the theory of subdifferentials // *Advances in Nonlinear Analysis*. 2012. Vol. 1, no. 1. P. 47–120.
- [270] Ioffe A. D. *Nonsmooth Analysis: differential calculus of nondifferentiable functions* // *Tran. Amer. Math. Soc.* 1981. Vol. 266, no. 1. P. 1–55.

- [271] Ioffe A. D. An existence theorem for problems of the calculus of variations // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1972. V. 205, iss. 2. P. 277–280.
- [272] Ioffe A. D. On generalized Bolza problem and its application to dynamic optimization // Journal of Optimization Theory and Applications. 2019. V. 182. P. 285–309.
- [273] Ioffe A. D., Rockafellar R. T. The Euler and Weierstrass conditions for nonsmooth variational problems // Calculus of Variations and Partial Differential Equations. 1996. V. 4. P. 59–87.
- [274] Isayev V. K. Sonin V. V. Survey of methods for the numerical solutions of variational problems of flight dynamics / Post Apollo Space Explorat. Part 2. Washington, D. C. Amer. Astronaut. Soc., 1966. P. 1144–1171.
- [275] Ito K., Kunisch K. Karush-Kuhn-Tucker conditions for nonsmooth mathematical programming problems in function spaces // SIAM J. Control Optim. 2011. V. 49, no. 5. P. 2133–2154.
- [276] Jacobson D. H. A New Necessary Condition of Optimality for Singular Control Problems // SIAM Journal on Control, 1969. Vol. 7, no. 4. P. 578–595.
- [277] Jacobson D. H. New second-order and first-order algorithms for determining optimal control: A differential dynamic programming approach // Journal of Optimization Theory and Applications, 1968. Vol. 2, no. 6. P. 411–440.
- [278] Jacobson D. H. On conditions of optimality for singular control problems // IEEE Transactions on Automatic Control, 1970. Vol. 15, no. 1. P. 109–110.
- [279] Jacobson D., Gershwin S., Lele M. Computation of optimal singular controls // IEEE Transactions on Automatic Control, 1970. Vol. 15, no. 1. P. 67–73.
- [280] Jacobson D., Lele M. A transformation technique for optimal control problems with a state variable inequality constraint // IEEE Transactions on Automatic Control, 1969. Vol. 14, no. 5. P. 457–464.
- [281] Jleli M., Kirane M., Saet B. Blow-up phenomena for second-order differential inequalities with shifted arguments // Electronic Journal of Differential Equations, 2016. Vol. 2016, no. 91. P. 1–12.
- [282] Jacobson D., Lele M., Speyer J. New necessary conditions of optimality for control problems with state-variable inequality constraints // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1971. Vol. 35, iss. 2. P. 255–284.

- [283] Jazwinski A. H. Optimal trajectories and linear control of nonlinear systems // AIAA Journal, 1964. Vol. 2, no. 8. P. 1371–1379.
- [284] Kalaba R., Spingarn K. Control, Identification, and Input Optimization. New York: Plenum Press, 1982. 442 p.
- [285] Kantorovich L. V., Akilov G. P. Functional analysis. Moscow: Nauka Publ., 1977. 752 p.
- [286] Kapur K. C., Van Slyke R. M. Cutting plane algorithms and state space constrained linear optimal control problems // Journal of Computer and System Sciences, 1970. Vol. 4, no. 6. P. 570–605.
- [287] Kapur K. C. An algorithm for linear optimal control systems with state-space constraints // International Journal of Control, 1971. Vol. 14, no. 5. P. 873–879.
- [288] Kelly H. J. Gradient theory of optimal flight paths // ARS Journal, 1960. Vol. 30, no. 10. P. 947–954.
- [289] Kelly H. J. Method of gradients / Optimiz. techn. applic. aerospace syst., New York–London. Acad. Press, 1962. P. 205–254.
- [290] Kelly H. J., Kopp R. E., Moyer H. G. Singular extremals // Mathematics in Science and Engineering, 1967. Vol. 31. P. 63–101.
- [291] Kelly H., Kopp R., Moyer H. A trajectory optimization technique based upon the theory of the second variation / Astrodynamics Conference. 1963. Yale University, New Haven, № 63-415.
- [292] Kelly H. J., Kopp R. E., Moyer H. G. Successive approximation techniques for trajectory optimization / Proc. of the Symp. on Vehicle System Optimization, N. Y., 1961.
- [293] Kenneth P., McGill R. Solution of variational problems by means of a generalized Newton-Raphson operator // AIAA Journal, 1964. Vol. 2, no. 10. P. 1761–1766.
- [294] Kikuchi N. Control problems of contingent equation // Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, 1967. Vol. 3, no. 1. P. 85–99.
- [295] Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elements of the theory of functions and functional analysis. New York: Dover Publications Inc., 1999. 288 p.

- [296] Komarov V. A. Estimates for the attainable set for differential inclusions // Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR, 1985. V. 37. P. 501–506.
- [297] Koplatadze R. G. On oscillatory solutions of second order delay differential inequalities // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1973. Vol. 42, iss. 1. P. 148–157.
- [298] Kopp R. E., McGill R. Several trajectory optimization techniques Part I. Discussion // Comput. Methods Optimizat. Problems, New York–London, Acad. Press, 1964. P. 65–89.
- [299] Kostousova E. K., Kurzanski A. B. Guaranteed estimates of accuracy of computations in problems of control and estimation // Computational Technologies, 1977. Vol. 2, no. 1. P. 19–27.
- [300] Krastanov M., Quincampoix M. Local small time controllability and attainability of a set for nonlinear control system // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2001. V. 6. P. 499–516.
- [301] Kruger A. Ya. On Fréchet subdifferentials // Journal of Mathematical Sciences. 2003. Vol. 116, no. 3. P. 3325–3358.
- [302] Kumar V. A control averaging technique for solving a class of singular optimal control problems // International Journal of Control. 1976. Vol. 23, no. 3. P. 361–380.
- [303] LaSalle J. P. Time optimal control systems // Proc. Natl. Acad. Sci. 1959. Vol. 45, no. 4. P. 573–577.
- [304] Lasdon L., Mitter S., Ware A. The conjugate gradient method for optimal control problems // IEEE Transactions on Automatic Control, 1967. Vol. 12, no. 2. P. 132–138.
- [305] Lasdon L., Ware A., Rice R. An interior penalty method for inequality constrained optimal control problems // IEEE Transactions on Automatic Control, 1967. Vol. 12, no. 4. P. 388–395.
- [306] Lastman G. J. A modified Newton's method for solving trajectory optimization problems // AIAA Journal, 1968. Vol. 6, no. 5. P. 777–780.
- [307] Lastman G. J., Tapley B. D. Optimization of non-linear systems with inequality constraints explicitly containing the control // International Journal of Control, 1970. Vol. 12, no. 3. P. 497–510.

- [308] Leibniz G. Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus // *Acta Eruditorum*, 1684. October issue. S. 467-473.
- [309] Leitmann G., Stalford H. A note on termination in optimal control problems // *J. Optim. Theory Appl.* 1971. Vol. 8, no. 3. P. 228–230.
- [310] Leitmann G., Stalford H. A sufficiency theorem for optimal control // *J. Optim. Theory Appl.* 1971. Vol. 8, no. 3. P. 169–174.
- [311] Lele M. M., Jacobson D. H. A proof of the convergence of the Kelley-Bryson penalty function technique for state-constrained control problems // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1969. Vol. 26, no. 1. P. 163–169.
- [312] Lempio F. Modified Euler methods for differential inclusions // in *Proc. of the Worksh. on Set-Val. Anal. and Diff. Incl.*, Pamporovo, Bulgaria. 1990. P. 131–148.
- [313] Levant A. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control // *International Journal of Control*. 2003. V. 76, no. 9. P. 924–941.
- [314] Levine M. D. Trajectory optimization using the Newton–Raphson method // *Automatica*, 1966. Vol. 3, no. 34. P. 203–217.
- [315] Li F., Li X. A priori estimates for nonlinear differential inequalities and applications // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2011. Vol. 378, iss. 2. P. 723–733.
- [316] Li B., Xu C., Teo K. L., Chu J. Time optimal Zermelo’s navigation problem with moving and fixed obstacles // *Applied Mathematics and Computation*. 2013. V. 224. P. 866–875.
- [317] Li B., Yu C. J., Teo K. L., Duan G. R. An exact penalty function method for continuous inequality constrained optimal control problem // *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2011. V. 151, no. 2. P. 260–291.
- [318] Lin Q., Loxton R., Teo K. L., Wu Y. H. Optimal feedback control for dynamic systems with state constraints: an exact penalty approach // *Optim. Lett.* 2014. Vol. 8, no. 4. P. 1535–1551.
- [319] Loewen P. D., Rockafellar R. T. New necessary conditions for the generalized problem of Bolza // *SIAM Journal on Control and Optimization*. 1996. V. 34, no. 5. P. 1496–1511.

- [320] Loxton R. C., Teo K. L., Rehbocka V., Yiu K. F. C. Optimal control problems with a continuous inequality constraint on the state and the control // *Automatica*. 2009. V. 45. P. 2250–2257.
- [321] Luo H. Z., Wu H., Liu J. Some results on augmented Lagrangians in constrained global optimization via image space analysis // *J. Optim. Theory Appl.* 2013. Vol. 159, no. 2. P. 360–385.
- [322] Lusty A. H., Miele A. Bodies of Maximum Lift-to-Drag Ratio in Hypersonic Flow // *AIAA Journal*. 1966. Vol. 4, no. 12. P. 2130–2135.
- [323] Makela M., Neittaanmaki P. *Nonsmooth Optimization: Analysis and Algorithms with Applications to Optimal Control*. London: World Scientific Publishing, 1992. 254 p.
- [324] Man F. T. On the optimal linear regulator problem with control energy constraint // *Automatica*, 1969. Vol. 5, no. 6. P. 855–857.
- [325] Mangasarian O. L. Sufficiency of Exact Penalty Minimization // *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1985. Vol. 23, no. 1. P. 30–37.
- [326] Mangasarian O. L. Sufficient Conditions for the Optimal Control of Nonlinear Systems // *SIAM Journal on Control*, 1966. Vol. 4, no. 1. P. 139–152.
- [327] Masubuchi I. On numerical solution to parameter-dependent convex differential inequalities // *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, 1999. Vol. 1. P. 305–309.
- [328] Matviychuk A. R., Ushakov V. N. On the construction of resolving controls in control problems with phase constraints // *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2006. Vol. 45, no. 1. P. 1–16.
- [329] Mayne D. Q., Polak E. An exact penalty function algorithm for control problems with state and control constraints // *24th IEEE Conference on Decision and Control*. 1985. P. 1447–1452.
- [330] Mayne D. Q., Smith S. Exact penalty algorithm for optimal control problems with control and terminal constraints // *International Journal of Control*. 1988. V. 48, no. 1. P. 257–271.
- [331] Mayne D. A Second-order Gradient Method for Determining Optimal Trajectories of Non-linear Discrete-time Systems // *International Journal of Control*, 1966. Vol. 3, no. 1. P. 85–95.

- [332] McGill R. Optimal control, inequality state constraints and the generalized Newton–Raphson algorithm // *J. Soc. Industr. and Appl. Math.*, 1965. A3, no. 2. P. 1291–298.
- [333] McReynolds S. R., Bryson A. E. A Successive sweep method for solving optimal programming problems / Harvard University, Joint Automatic Control Conference Craft Lab Report № 463, 1965.
- [334] Mc Shane E. J. Existence theorems for Bolza problems in the calculus of variations // *Duke Math J.* 1940, Vol. 7, no. 1. P. 28–61.
- [335] Meditch J. S. A class of suboptimal linear controls // Joint Automatic Control Conference, 1966. Vol. 4. P. 776–782.
- [336] Merriam C. W. An Algorithm for the Iterative Solution of a Class of Two-Point Boundary Value Problems // *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series A Control*, 1964. Vol. 2, no. 1. P. 1–10.
- [337] Michel P. Calcul souls-differentiel pour les fonctions Lipschitzienne et non Lipschitzienne // *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences — Series I — Mathematics*, 1984. Vol. 298. P. 269–272.
- [338] Miele A. Drag Minimization as the Extremization of Products of Powers of Integrals / Rice University, Aero-Astronautics Report № 31, 1967.
- [339] Miele A. The Extremization of Products of Powers of Functionals and Its Application to Aerodynamics // *Astronautica Acta.* 1966. Vol. 12, no. 1. P. 1–41.
- [340] Miele A., Hull D. G. On the Minimization of the Product of the Powers of Several Integrals // *J. Optim. Theory Appl.* 1967. Vol. 1, no. 1. P. 70–82.
- [341] Miele A., Mohanty B. P., Venkataraman P., Kuo Y. M. Numerical Solution of Minimax Problems of Optimal Control, Part 1 // *J. Optim. Theory Appl.* 1982. Vol. 98, no. 1. P. 97–109.
- [342] Miele A., Mangiavacchi A., Aggarwal A. K. Modified quasilinearization algorithm for optimal control problems with nondifferential constraints // *J. Optim. Theory Appl.* 1974. Vol. 14, no. 1. P. 529–556.
- [343] Miele A., Tietze J. L., Cloutier J. R. A hybrid approach to optimal control problems with bounded state // *Computers and Mathematics with Applications*, 1975. Vol. 1, no. 2. P. 175–194.

- [344] Miele A., Well K. H., Tietze J. L. Modified quasilinearization algorithm for optimal control problems with bounded state // *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1973. Vol. 12, no. 3. P. 285–319.
- [345] Millers H. F., Takahashi Y. Optimal State Variable Feedback With Bounded Gains // *ASME J. Basic Eng.*, 1969. Vol. 91. P. 251–256.
- [346] Mitter S. K. Successive approximation methods for the solution of optimal control problems // *Automatica*, 1966. Vol. 3, no. 3. P. 136–149.
- [347] Mordukhovich B. S. Optimization and Finite Difference Approximations of Nonconvex Differential Inclusions with Free Time / In B. S. Mordukhovich, H. J. Sussmann, editors. *Nonsmooth Analysis and Geometric Methods in Deterministic Optimal Control. The IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, vol. 78. P. 153–202. Springer, New York, NY, 1996.
- [348] Mordukhovich B. Sh. Discrete approximations and refined Euler-Lagrange conditions for nonconvex differential inclusions // *SIAM J. Control Optim.* 1995. Vol. 33, no. 3. P. 887–915.
- [349] Mordukhovich B. S. *Variational Analysis and Generalized Differentiation I. Basic Theory*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2006. 582 p.
- [350] Mordukhovich B. Necessary conditions for optimality in nonsmooth control problems with nonfixed time // *Differential Equations*. 1989. V. 25, no. 1. P. 290–299.
- [351] Moreau J. J. Unilateral Contact and Dry Friction in Finite Freedom Dynamics / In J. J. Moreau, P. D. Panagiotopoulos, editors. *Nonsmooth Mechanics and Applications*. Vol. 302. P. 1–82. Springer, International Centre for Mechanical Sciences, Vienna, 1988.
- [352] Morzhin O. V. On approximation of the subdifferential of the nonsmooth penalty functional in the problems of optimal control // *Avtomatika i Telemekhanika*. 2009, no. 5. P. 24–34.
- [353] Munroe M. E. *Introduction to measure and integration*. Massachusetts: Addison-Wesley, 1953. 320 p.
- [354] Nahra J. E. Balance function for the optimal control problem // *J. Optim. Theory Appl.* 1971. Vol. 8, no. 1. P. 35–48.

- [355] Neustadt L. W. Discrete Time Optimal Control Systems // International Symposium on Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics, 1963. P. 267–283.
- [356] Neustadt L. W. Time optimal control systems with position and integral limits // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1961. Vol. 3, no. 3. P. 406–427.
- [357] Neustadt L. W. The existence of optimal controls in the absence of convexity conditions // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1963. Vol. 7, no. 1. P. 110–117.
- [358] Newton Is. Tractatus de quadratura curvarum. Uppsala, 1762. 112 s.
- [359] Niemann R. A. On the Optimal Control Problem With Variable Terminal Point // Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1971. Vol. 93, no. 4. P. 218–220.
- [360] Nikol'skiy M. S. On approximation of the attainability domain of control process // Mat. Zametki, 1987. Vol. 41, no. 1. P. 71–76.
- [361] Nikol'skiy M. S. On a method for approximation of attainable set for a differential inclusion // Journ. of Vych. Mat. Math. Phys., 1988. Vol. 28. P. 1252–1254.
- [362] Nocedal J., Wright S. J. Numerical Optimization. 2nd edition. USA: Springer, 2006. 664 p.
- [363] Noori Skandari M. H., Kamyad A. V., Effati S. Smoothing approach for a class of nonsmooth optimal control problems // Applied Mathematical Modelling. 2015. V. 40, no. 2. P. 886–903.
- [364] Noori Skandari M. H., Kamyad A. V., Erfanian H. R. Control of a class of nonsmooth dynamical systems // Journal of Vibration and Control. 2013. V. 21, no. 11. P. 2212–2222.
- [365] Noton A., Dyer P., Markland C. Numerical computation of optimal control // IEEE Transactions on Automatic Control, 1967. Vol. 12, no. 1. P. 59–66.
- [366] Okamura K. A Simplified Steepest-Ascent Method // J. Appl. Mech. 1966. Vol. 33, no. 2. P. 452–454.
- [367] Olech C. Extremal solutions of a control system // J. Different. Equal, 1966. Vol. 2, no. 1. P. 74–101.
- [368] De Oliveira V. A., Silva G. N. New optimality conditions for nonsmooth control problems // J. Glob. Optim. 2013. V. 57, no. 4. P. 1465–1484.

- [369] Opial A., Lasota Z. An application of the Kakutani-Ky Fan theorem in the theory of ordinary differential equations // *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. math. astron. phys.*, 1965. Vol. 13. P. 781–786.
- [370] Ortiz N. L., Wolenski P. R. An existence theorem for neutral variational problems of Bolza // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2004. V. 289, iss. 1. P. 260–265.
- [371] Otakulov S. Approximation of the optimal-time problem for controlled differential inclusions // *Cybernetics and Systems Analysis*, 1994. Vol. 30, no. 3. P. 458–462.
- [372] Outrata J. V. On a class of nonsmooth optimal control problems // *Applied Mathematics and Optimization*. 1983. V. 10, no. 1. P. 287–306.
- [373] Ovseevich A. I. On Equations of Ellipsoids Approximating Attainable Sets // *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1997. Vol. 95, no. 3. P. 659–676.
- [374] Pachter M., Jacobson D. H. On the reachable sets in linear systems // *Appl. Math Optim.* 1979. Vol. 5. P. 83–86.
- [375] Pagurek B., Woodside C. M. The conjugate gradient method for optimal control problems with bounded control variables // *Automatica*, 1968. Vol. 4, no. 5–6. P. 337–349.
- [376] Paiewonsky B. Optimal control — A review of theory and practice // *AIAA Journal*, 1965. Vol. 3, no. 11. P. 1985–2006.
- [377] Pallaschke D., Recht P., Urbanski R. On locally-Lipschitz quasi-differentiable functions in Banach spaces // *Optim.* 1986. Vol. 17, no. 3. P. 287–295.
- [378] Panasyuk A. I. Equations of attainable set dynamics, Pt 1: Integral funnel equations // *J. Optim. Theory Appl.*, 1990. No. 64. P. 349–366.
- [379] Pappas G. S. Optimal Solutions to Differential Inclusions in Presence of State Constraints // *J. Optim. Theory Appl.* 1984. Vol. 44, no. 4. P. 657–679.
- [380] Pearson J., Sridhar R. A discrete optimal control problem // *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1966. Vol. 11, no. 2. P. 171–174.
- [381] Pearson J. D. Approximation Methods in Optimal Control I. Sub-optimal Control // *Journal of Electronics and Control*, 1962. Vol. 13, no. 5. P. 453–469.

- [382] Pecsvaradi T., Narendra K. S. Reachable sets for linear dynamical systems // *Information and Control*, 1971. Vol. 19, no. 4. P. 319–344.
- [383] Penot J. P. On the convergence of descent algorithms // *Computational Optimization and Applications*. 2002. Vol. 23, no. 3. P. 279–284.
- [384] Penot J.–P. *Calculus Without Derivatives*. New York: Springer Science+Business Media, 2013. 544 p.
- [385] Di Pillo G., Facchinei F. Exact Barrier Function Methods for Lipschitz Programs // *Appl. Math. Optim.*, 1995. Vol. 32, iss. 1. P. 1–31.
- [386] Di Pillo G., Grippo L. On the Exactness of a Class of Nondifferentiable Penalty Functions // *J. Optim. Theory Appl.*, 1988. Vol. 57, iss. 3. P. 399–410.
- [387] Di Pillo G., Grippo L. Exact Penalty Functions in Constrained Optimization // *SIAM J. Control Optim.*, 1989. Vol. 27. P. 1333–1360.
- [388] Di Pillo G., Grippo L. A new class of augmented Lagrangians in nonlinear programming // *SIAM J. Control Optim.* 1979. Vol. 17, no. 5. P. 618–628.
- [389] Di Pillo G., Liuzzi S., Liuzzi G. An exact penalty-Lagrangian approach for large-scale nonlinear programming // *Optim.* 2011. Vol. 60, no. 1–2. P. 223–252.
- [390] Polovinkin E. S. *Multivalued analysis and differential inclusions*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2014. 597 p.
- [391] Polyakova L. Quasidifferentiable optimization: Exact penalty methods // *Encyclopedia of optimization* / Ed. C. A. Floudas, P. M. Pardalos. Doordrecht: Kluwer Academic Publ. 2001. Vol. 4. P. 478–483.
- [392] Polyakova L. N. On global unconstrained minimization of the difference of polyhedral functions // *J. Glob. Optim.* 2011. Vol. 50, no. 2. P. 179–195.
- [393] Polyakova L. N., Stavroulakis G. E. Difference convex optimization techniques in nonsmooth computational mechanics // *Optimization Methods and Software*. 1996. Vol. 7. P. 57–81.
- [394] Puri A., Borkar V., Varaiya P. ε -Approximation of Differential Inclusions / In R. Alur, T. A. Henzinger, E. D. Sontag, editors. *Hybrid Systems III*. HS 1995. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 1066. P. 362–376. Springer, Berlin, Heidelberg, 2005.

- [395] Rieger J. Shadowing and the Viability Kernel Algorithm // Applied Mathematics and Optimization, 2009. Vol. 60, no. 3. P. 429–441.
- [396] Ringlee R. Bounds for convex variational programming problems arising in power system scheduling and control // IEEE Transactions on Automatic Control, 1965. Vol. 10, no. 1. P. 28–35.
- [397] Rink R. E., Mohler R. R. Completely Controllable Bilinear Systems // SIAM Journal on Control, 1968. Vol. 6, no. 3. P. 477–486.
- [398] Robbins H. M. A Generalized Legendre-Clebsch Condition for the Singular Cases of Optimal Control // IBM Journal of Research and Development, 1967. Vol. 11, no. 4. P. 361–372.
- [399] Roberts S., Shipman J. Justification for the continuation method in two-point boundary value problems // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1968. Vol. 21, iss. 1. P. 23–30.
- [400] Rockafellar R. T. Existence theorems for general control problems of Bolza and Lagrange // Advances in mathematics. 1975. V. 15. P. 312–333.
- [401] Rockafellar R. T. Level sets and continuity of conjugate convex functions // Transactions of the American Mathematical Society. 1966. V. 123, no. 1. P. 46–63.
- [402] Rockafellar R. T. Integrals which are convex functionals // Pacific Journal of Mathematics. 1968. V. 24, no. 3. P. 525–539.
- [403] Rockafellar R. T. State Constraints in Convex Control Problems of Bolza // SIAM Journal on Control, 1972. Vol. 10. P. 691–715.
- [404] Rohrer R. A., Sobral M. Optimal Singular Solutions for Linear Multi-Input Systems // Journal of Basic Engineering, 1966. Vol. 88, no. 2. P. 323–328.
- [405] Ross I. M., Fahroo F. Pseudospectral knotting methods for solving optimal control problems // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2004. V. 27, no. 3. P. 397–405.
- [406] Rosen J. B. Iterative Solution of Nonlinear Optimal Control Problems // SIAM Journal on Control, 1966. Vol. 4, no. 1. P. 223–244.
- [407] Roxin E. The existence of optimal controls // Michigan Math. J., 1962. Vol. 9, no. 2. P. 109–119.

- [408] Russak B. On Problems with Bounded State Variables // Journal of Optimization Theory and Applications. 1970. Vol. 5. P. 114–157.
- [409] Russell D. L. Penalty Functions and Bounded Phase Coordinate Control // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series A Control, 1964. Vol. 2, no. 3. P. 409–422.
- [410] Ryaben’kii V. S. Introduction to computational mathematics. Moscow: Fizmatlit, 2008. 288 p.
- [411] Rybicki G., Usher P. The Generalized Riccati Transformation as a Simple Alternative to Invariant Imbedding // The Astrophysical Journal, 1966. No. 3. P. 871–880.
- [412] Saint-Pierre P. Approximation of the viability kernel // Applied Mathematics and Optimization, 1994. Vol. 29, no. 2. P. 187–209.
- [413] Sandberg M. Convergence of the forward Euler method for nonconvex differential inclusions // SIAM J. Numer. Anal. 2008. V. 47, no. 1. P. 308–320.
- [414] Saperstone S. H., Yorke J. A. Controllability of Linear Oscillatory Systems Using Positive Controls // SIAM Journal on Control, 1971. Vol. 9, no. 2. P. 253–262.
- [415] Sbaiti A. A., Sage A. P. System optimization using quasilinearization and sensitivity analysis // International Journal of Control, 1972. Vol. 16, no. 2. P. 343–352.
- [416] Scharmack D. K., Sandell N. R. Generalized Quasi-Linearization Method // AIAA Journal, 1974. Vol. 12, no. 9. P. 1236–1240.
- [417] Schilling K. An algorithm to solve boundary value problems for differential inclusions and applications in optimal control // Numer. Funct. Anal. and Optim. 1989. V. 10, no. 7. P. 733–764.
- [418] Schley C., Imson L. Optimal control computation by the Newton-Raphson method and the Riccati transformation // IEEE Transactions on Automatic Control, 1967. Vol. 12, no. 2. P. 139–144.
- [419] Sethi S. P., Drews W. P., Segers R. G. A unified framework for linear control problems with state-variable inequality constraints // J. Optim. Theory Appl. 1982. Vol. 36, no. 1. P. 93–109.

- [420] Shvartsman I. A. New approximation method in the proof of the Maximum Principle for nonsmooth optimal control problems with state constraints // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2007. V. 326, iss. 2. P. 974–1000.
- [421] Shtessel Y. B., Shkolnikov I. A., Levant A. Smooth second-order sliding modes: Missile guidance application // *Automatica*. 2007. V. 43, no. 8. P. 1470–1476.
- [422] Sidar M. An iterative algorithm for optimum control problems // *Internal J. Nonlinear Mech.*, 1968. Vol. 3, no. 1. P. 1–6.
- [423] Sirisena H., Tan K. Computation of constrained optimal controls using parameterization techniques // *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974. Vol. 19, no. 4. P. 431–433.
- [424] Sirisena H. R., Chou F. S. Convergence of the control parameterization Ritz method for nonlinear optimal control problems // *J. Optim. Theory Appl.*, 1979. Vol. 29, no. 3. P. 369–382.
- [425] Smirnov G. V. *Introduction to the Theory of Differential Inclusions*. Providence: American Mathematical Society, 2000. 227 p.
- [426] Sobral M. Linear control laws for singular linear systems // *Journal of the Franklin Institute*, 1964. Vol. 278, no. 5. P. 313–326.
- [427] Stewart D. E. A numerical method for friction problems with multiple contacts // *Journal of the Australian Mathematical Society. Series B, Applied mathematics*. 1996. Vol. 37, no. 3. P. 288–308.
- [428] Stewart D. E. Optimal control of systems with discontinuous differential equations // *Numerische Mathematik*. 2009. V. 114. P. 653–695.
- [429] Stewart D. E., Trinkle J. C. An implicit time-stepping scheme for rigid body dynamics with inelastic collisions and Coulomb friction // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1996. Vol. 39, no. 15. P. 2673–2691.
- [430] Strekalovsky A. S. Local search for nonsmooth DC optimization with DC equality and inequality constraints / In A. M. Bagirov, M. Gaudioso, N. Karmitsa, M. M. Makela, and S. Taheri, editors. *Numerical Nonsmooth Optimization. State of the Art Algorithms*. P. 229–262. Springer, Cham, 2020.

- [431] Tabak D. Kuo B. C. Application of mathematical programming in the design of optimal control systems // *International Journal of Control*, 1969. Vol. 10, no. 5. P. 545–552.
- [432] Talwar D., Sivan R. An efficient numerical algorithm for the solution of a class of optimal control problems // *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1989. Vol. 34, no. 12. P. 1308–1311.
- [433] Tamasyan G. Sh. Numerical methods in problems of calculus of variations for functionals depending on higher order derivatives // *Journal of Mathematical Sciences*. 2013. V. 188, iss. 3. P. 299–321.
- [434] Tang Y. Terminal sliding mode control for rigid robots // *Automatica*. 1998. V. 34, no. 1. P. 51–56.
- [435] Tapley B. D., Lewallen J. M. Comparison of several numerical optimization methods // *J. Optim. Theory Appl.* 1967. Vol. 1, no. 1. P. 1–32.
- [436] Tapley B. D., Williamson W. E. Comparison of Linear and Riccati Equations Used to Solve Optimal Control Problems // *AIAA Journal*, 1972. Vol. 10, no. 9. P. 1154–1159.
- [437] Tapley B. D., Williamson W. E. A modified perturbation method for solving optimal control problems with state variable inequality constraints // *AIAA Journal*, 1971. Vol. 9, no. 11. P. 2222–2228.
- [438] Taubert K. Dierenzenverfahren fir Schwingungen mit trockener und zdher Reibung und fir Regelungssysteme // *Numerische Mathematik*. 1976. No. 26. P. 379–395.
- [439] Taylor J. Comments on a multiplier condition for problems with state variable inequality constraints // *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1972. Vol. 17, no. 5. P. 743–744.
- [440] Taylor J. G. On Boundary Conditions for Adjoint Variables in Problems with State Variable Inequality Constraints // *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974. Vol. 19. P. 450–452.
- [441] Teo K. L., Goh C. J. On constrained optimization problems with nonsmooth cost functionals // *Applied Mathematics and Optimization*. 1988. V. 18, no. 1. P. 181–190.
- [442] Teo K. L., Goh C. J., Wong K. H. A unified computational approach to optimal control problems. New York: Longman Scientific and Technical, 1991. 329 p.

- [443] Thompson D. D., Volz R. A. The Linear Quadratic Cost Problem with Linear State Constraints and the Nonsymmetric Riccati Equation // *SIAM Journal on Control*, 1975. Vol. 13, no. 1. P. 110–145.
- [444] Tifford A. N. On the Solution of Total Differential, Boundary Value Problems // *Journal of the Aeronautical Sciences*, 1951. Vol. 18, no. 1. P. 65–66.
- [445] Tokumaru H., Adachi N., Goto K. Davidon's Method for Minimization Problems in Hilbert Space with an Application to Control Problems // *SIAM Journal on Control*, 1970. Vol. 8, no. 2. P. 163–178.
- [446] Tor A. H., Bagirov A. M., Karasozen B. Aggregate codifferential method for nonsmooth DC optimization // *J. Comput. Appl. Math.* 2014. Vol. 259, Part B. P. 851–867.
- [447] Tripathi S. S., Narendra K. S. Constrained optimization problems using multiplier methods // *J. Optim. Theory Appl.* 1972. Vol. 9, no. 1. P. 59–70.
- [448] Tripathi S. S., Narendra K. S. Optimization using conjugate gradient methods // *IEEE Trans. Automat. Control*, 1970. Vol. 15, no. 2. P. 268–270.
- [449] Troitskii V. A. On variational problems of optimization of control processes // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1962. Vol. 26, no. 1. P. 35–49.
- [450] Troitskii V. A. Variational problems of optimization of control processes for equations with discontinuous right-hand sides // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1962. Vol. 26, no. 2. P. 336–355.
- [451] Truemper K. Note on Finite Convergence of Exterior Penalty Functions // *Mgt. Sci.*, 1975. Vol. 21, no. 5. P. 600–606.
- [452] Utkin V. I. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Berlin: Springer-Verlag, 1992. 286 p.
- [453] Vachino R. F. Steepest Descent with Inequality Constraints on the Control Variables // *SIAM Journal on Control*, 1966. Vol. 4, no. 1. P. 245–261.
- [454] Vainel't V. Difference Schemes for Solving Boundary Value Problems for Differential Inequalities // *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1978. Vol. 18, iss. 3. P. 113–125.

- [455] Valentine F. A. The Problems of Lagrange with Differential Inequalities as Added Side Conditions / Contributions to the Calculus of Variations. P. 407–448. Chicago: Chicago University Press, 1937.
- [456] Van Schieveen H. M., Kwakernaak H. Solution of state-constrained optimal control problems through quasilinearization // J. Eng. Math. 1970. Vol. 4. P. 87–94.
- [457] Vasilyeva A. B., Nefyodov N. N. Comparison theorems. Chaplygin method of differential inequalities. Moscow: Moscow State University Publ. House, 2007. 9 p.
- [458] Veliov V. Second order discrete approximations to strongly convex differential inclusions // Syst. Contr. Lett. 1989. V. 13. P. 263–269.
- [459] Vinter R. B., Cheng H. Necessary conditions for optimal control problems with state constraints // Transactions of the American Mathematical Society. 1998. V. 350, no. 3. P. 1181–1204.
- [460] Vinter R. B. Minimax optimal control // SIAM J. Control Optim. 2005. V. 44, no. 3. P. 939–968.
- [461] Walter W. Differential and Integral Inequalities. Berlin: Springer Verlag, 1970. 352 p.
- [462] Wang C., Ma C., Zhou J. A New Class of Exact Penalty Functions and Penalty Algorithms // J. Glob. Optim., 2014. Vol. 58, iss. 1. P. 51–73.
- [463] Warga J. Relaxed variational problems // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1962. Vol. 4, iss. 1. P. 111–128.
- [464] Watbled F. On singular perturbations for differential inclusions on the infinite interval // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2005. Vol. 310, iss. 2. P. 362–378.
- [465] Wazewski T. Selected papers. Warsaw: PWN — Polish Scientific Publishers, 1990. 572 p.
- [466] Weinreb A., Bryson A. E. Optimal control of systems with had control bounds // IEEE transactions on automatic control, 1985. Vol. 30, no. 11. P. 1135–1138.
- [467] Williamson W. E. An intermediate matching technique for solving two point boundary value problems using the perturbation method // Celestial Mechanics. 1972. Vol. 5. P. 174–188.
- [468] Williamson W. E. Use of polynomial approximations to calculate suboptimal controls // AIAA Journal, 1971. Vol. 9, no. 11. P. 2271–2273.

- [469] Williamson W. E., Tapley B. D. Riccati transformations for control optimization using the second variation // IEEE Transactions on Automatic Control, 1972. Vol. 17, no. 3. P. 319–327.
- [470] Willoughby J. K., Pierson B. L. The projection operator applied to gradient methods for solving optimal control problems with terminal state constraints // International Journal of Systems Science, 1973. Vol. 4, no. 1. P. 45–57.
- [471] Willoughby J. K., Pierson B. L. A constraint-space conjugate gradient method for function minimization and optimal control problems // International Journal of Control, 1971. Vol. 14, no. 6. P. 1121–1135.
- [472] Wolfe P. The simplex method for quadratic programming // Econom. 1959. V. 27. P. 382–398.
- [473] Wonham W. M., Johnson C. D. Optimal Bang-Bang Control with Quadratic Performance Index. Trans. ASME // J. Basic Eng. 1964. Vol. 86. P. 107–115.
- [474] Wu A. K., Miele A. Sequential conjugate gradient-restoration algorithm for optimal control problems with non-differential constraints and general boundary conditions, part I // Optimal Control Applications and Methods, 1980. Vol. 1, no. 1. P. 69–88.
- [475] Wua C. Z., Teo K. L., Zhaoc Yi. Numerical method for a class of optimal control problems subject to nonsmooth functional constraints // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2008. V. 217. P. 311–325.
- [476] Xu R., Özgüner Ü. Sliding mode control of a class of underactuated systems // Automatica. 2015. V. 44, no. 1. P. 233–241.
- [477] Yang F., Teo K. L., Loxton R., Rehbock V., Li B., Yu C., Jennings L. VISUAL MISER: An efficient user-friendly visual program for solving optimal control problems // Journal of Industrial and Management Optimization. 2016. V. 12, no. 2. P. 781–810.
- [478] Yeh Hsi-Han, Tou J. T. On the general theory of optimal processes // International Journal of Control, 1969. Vol. 9, no. 4. P. 433–451.
- [479] Yeh Hsi-Han. Optimal control with partially specified input functions // International Journal of Control, 1972. Vol. 16, no. 1. P. 71–80.

- [480] Yorke J. A. The Maximum Principle and Controllability of Nonlinear Equations // SIAM Journal on Control, 1972. Vol. 10, no. 2. P. 334–338.
- [481] Yuan J., Xie J., Xu H., Feng E., Xiu Z. Optimization for Nonlinear Uncertain Switched Stochastic Systems with Initial State Difference in Batch Culture Process // Complexity, 2019. V. 2019. P. 1–15.
- [482] Zaffaroni A. Continuous approximations, codifferentiable functions and minimization methods / V. F. Demyanov, A. M. Rubinov, editors. Quasidifferentiability and related Topics. P. 361–391. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [483] Zangwill W. I. Non-Linear Programming Via Penalty Functions // Mgt. Sci., 1967. Vol. 13, no. 5. P. 344–358.
- [484] Zeidan V. Sufficient conditions for the generalized problem of Bolza // Transactions of the American Mathematical Society. 1983. V. 275, no. 2. P. 561–586.
- [485] Zhu Q. J. Necessary Optimality Conditions for Nonconvex Differential Inclusions with Endpoint Constraints // Journal of Differential Equations. 1996. Vol. 124. P. 186–204.