

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Чжао Шисян

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ
ПЛАСТИЧНОСТИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ
МАТЕРИАЛОВ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ
УДАРНЫХ НАГРУЗОК: ЭФФЕКТ
СКОРОСТИ ВОЗДЕЙСТВИЯ И
ТЕРМИЧЕСКОЕ РАЗУПРОЧНЕНИЕ**

Научная специальность – 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

**Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Научный руководитель:
член-корреспондент РАН, профессор,
доктор физико-математических наук,
Петров Юрий Викторович

Санкт-Петербург

2024

Оглавление

Введение	4
Обзор литературы	14
Глава 1 Существующие модели для задач динамической пластичности	25
1.1 Основные сведения.....	25
1.2 Феноменологические модели.....	27
1.2.1 Модель Джонсона-Кука.....	27
1.2.2 Модель Хан-Хуан-Лян.....	27
1.3 Модели на основе дислокационной механики.....	28
1.3.1 Модели Немат-Нассер.....	28
1.3.2 Модели Зерилли-Армстронга.....	30
1.4 Модель искусственной нейронной сети.....	31
Глава 2 Релаксационная модель пластичности и температурно-временное соответствие	35
2.1 Разработка релаксационной модели пластичности.....	35
2.1.1 Критерий инкубационного времени для динамической пластичности.....	35
2.1.2 Первоначальная релаксационная модель пластичности.....	37
2.1.3 Концепция модифицированной релаксационной модели пластичности.....	38
2.2 Температурно-временное соответствие.....	47
2.2.1 Параметры τ и α	47
2.2.2 Температурная зависимость параметра τ и/или α	49
2.2.3 Коэффициент относительных напряжений для стали HSLA-65 и композита на основе вольфрама.....	51
2.2.4 Определение параметров τ и α	57
2.3 Заключение к главе.....	58

Глава 3 Методика моделирования: конечно-элементный анализ	
для задач динамической пластичности	60
3.1 Основы метода конечных элементов	60
3.2 Нелинейный динамический анализ	65
3.2.1 Алгоритмы интегрирования по времени	65
3.2.2 Вычисление инкремента напряжений в задачах изотропной пластичности J_2	68
3.3 Расчетная схема, подходящая для модели РП	72
3.3.1 Безопасная версия метода Ньютона-Рафсона	72
3.3.2 Реализация в коммерческом программном пакете	74
3.4 Заключение главы	76
Глава 4 Результаты расчета по различным моделям и	
сравнительный анализ	79
4.1 Сравнение результатов: модели ИРП и ПРП	79
4.1.1 Алюминиевые сплавы 6082-T6 и 2519A	80
4.1.2 Титановый сплав Ti-6Al-4V	84
4.2 Сравнение результатов: ИРП и другие существующие модели	86
4.2.1 Коэффициент Тейлора-Куинни	87
4.2.2 Сталь HSLA-65	88
4.2.3 Композит на основе вольфрама 93W-4.9Ni-2.1Fe	94
4.2.4 Ti-6Al-4V	96
4.2.5 Отличия между моделью ИНС и другими моделями	101
4.3 Верификация конечно-элементной схемы для модели РП	105
Заключение	114
Приложения	118
А Интегральный критерий текучести	118
В Среднее касательное напряжение	119
Литература	121

Введение

Актуальность темы диссертации

Тема диссертации является актуальной в связи с потенциальными возможностями применения подобных разработок в различных отраслях промышленности и инженерных приложениях. Например, в автомобильной отрасли, где безопасность при столкновении и защита пассажиров являются важными задачами, изучение пластического поведения металлических материалов под воздействием ударных нагрузок является очевидно необходимым. Разработка новых математических моделей, учитывающих эффекты скорости воздействия и термическое разупрочнение, позволит прогнозировать реакцию материалов во время высокоскоростных столкновений или аварий. Это будет способствовать созданию улучшенных конструкций транспортных средств и систем безопасности, что приведёт к улучшению защиты пассажиров. В авиационной отрасли подобные исследования являются ключевыми для проектирования самолетов и выявления возможных реакций материалов и элементов конструкций при экстремальных воздействиях, например, в случаях аварийной посадки и столкновения с птицами. Путем включения эффектов скорости воздействия и термического разупрочнения в вычислительные модели инженеры могут эффективней оптимизировать структуру компонентов самолета. Эта оптимизация способствует более безопасным и надежным полетам, снижая риски, связанные с ударными событиями. Кроме того, выявленные в процессе подобных исследований закономерности могут быть использованы для процессов обработки материалов, например, резки металлов. Точное моделирование процесса деформирования и разрушения материалов позволяет производителям оптимизировать параметры обработки, конструкцию инструментов и стратегии резания. Путем математического моделирования задач динамической пластичности при ударно-волновых воздействиях можно добиться улучшения безопасности, надежности и эффективности во множестве приложений.

Степень разработанности темы диссертации

Пластическая деформация при больших скоростях нагружения часто сопровождается заметным адиабатическим повышением температуры. Этот процесс включает в себя эффекты скорости воздействия и явление термического разупрочнения. Для учета совместного влияния скорости деформации и температуры обычно ориентируются на принцип температурно-скоростное соответствия. Предполагается, что повышенное напряжение, вызванное большими скоростями деформации, можно эффективно моделировать путем снижения температуры. Математически эту зависимость часто выражают в мультипликативной форме $\sigma = f_1(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon})f_2(\varepsilon_p, T)$, где f_1 представляет функцию, описывающую эффект скорости деформации, а f_2 – функцию, учитывающую температурное влияние. Соответствующие эмпирические формулы можно найти во многих моделях [1] [2] [3] [4] [5]. Эти модели обычно создаются введением дополнительных и эмпирических компонентов, зависящих от скорости и температуры, в классические модели, изначально разработанные для квазистатических случаев. Они дают удовлетворительное описание динамического пластического поведения при умеренных скоростях воздействия для многих материалов и широко используются для решения различных инженерных задач. Эти модели являются примером использования прямого эмпирического подхода на основе экспериментального анализа и откровенной экстраполяции традиционных квазистатических представлений о предельном деформировании на динамику. Эксперименты по интенсивным быстрым воздействиям показывают, что в диапазоне высоких скоростей деформации такие модели уже плохо работают. В динамике деформационные диаграммы характеризуются остро выраженной нестабильностью, выражающейся в том, что вся форма деформационной кривой может кардинально меняться при смене скоростного режима нагружения. Кроме того, динамические деформационные кривые многих материалов оказываются немонотонными. Во многих экспериментах можно наблюдать эффект возникновения (и исчезновения) зуба текучести, который часто игнорируется при моделировании диаграмм деформирования. Поскольку пластическая деформация в металлах порождается движением дислокаций, было разработано множество моделей, основанных на дислокационной механике и физике [6] [7]. Для применения подобных моделей часто требуется детальное понимание мик-

роструктуры конкретного материала и взаимодействия между дислокациями. Кроме того, значения многих параметров этих моделей весьма сложно определить экспериментально. Эти ограничения затрудняют их применение в инженерной практике. Применяемый в диссертации структурно-временной подход, базирующийся на понятии инкубационного времени, предоставляет новую точку зрения для понимания динамической реакции материалов. Использование подхода инкубационного времени показывает, что в предельном случае низкоскоростной нагрузки он переходит в классические квазистатические модели путем пренебрежения определенными незначительными компонентами, но в то же время позволяет качественно спрогнозировать и оценить многие принципиальные динамические эффекты необратимого деформирования, которые лежат за пределами возможной традиционных моделей. Этот перспективный подход требует дальнейшего развития.

Цели и задачи диссертации

Основной целью данной диссертации является предоставление новой перспективы в понимании скоростной чувствительности необратимого деформирования и термического разупрочнения металлических материалов путем развития подхода инкубационного времени. Данная цель реализуется при помощи развития релаксационной модели пластичности (модели РП), учитывающей совокупное влияние эффектов скорости воздействия и термического разупрочнения материалов, подвергаемых высокоскоростным нагрузкам.

Для достижения этой общей цели были определены следующие конкретные задачи:

1. Развить модифицированный вариант модели РП. Это включает формулирование и всесторонний анализ модели и базовых наблюдаемых эффектов необратимого деформирования, которые не укладываются в классические подходы. Описать скоростные эффекты и термическое разупрочнение, наблюдаемые в металлических материалах при ударных нагрузках.
2. Исследовать температурно-временное соответствие. На основе анализа экспериментальных данных и введенного понятия коэффициента относительных напряжений (КОН), изучить связи между температурой и инкубационным временем для более полного понимания динамической пластической

реакции металлических материалов.

3. Провести сравнительный анализ различных существующих моделей, описывающих скоростные эффекты и термическое разупрочнение. Эта задача включает оценку и сравнение предложенной модели РП с другими существующими моделями, используемыми для моделирования динамической пластичности. Изучив их преимущества и недостатки, можно получить новые данные для дальнейшего улучшения точности и эффективности разработанной модели РП.
4. Разработать вычислительную схему для конечно-элементного анализа задач динамической пластичности с использованием модели РП. Провести моделирование трехмерных задач динамической пластичности. Эта задача фокусируется на создании надежной вычислительной программы с использованием метода конечных элементов (МКЭ), чтобы обеспечить точное моделирование и предсказание пластического поведения металлических материалов при ударных нагрузках.

Научная новизна

Пластическое поведение металлов при ударных нагрузках обычно моделируется путем введения скоростно-зависимых и температурно-зависимых компонентов в классические модели, изначально разработанные для квазистатических случаев. Мультипликативная форма $\sigma = f_1(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon})f_2(\varepsilon_p, T)$ является наиболее популярной для решения исследуемых задач. В отличие от этого, в данной работе скоростная чувствительность материалов рассматривается как проявление более общей временной чувствительности и для исследования этого явления применяется релаксационная модель пластичности (модель РП), основанная на использовании подхода инкубационного времени. При этом всесторонне изучается температурно-временное соответствие (ТВС). Предыдущие исследования [8] [9] [10] о ТВС рассматривали некоторые математические зависимости инкубационного времени от температуры. Однако, работы были проведены в ограниченном диапазоне деформации и скорости деформации, не учитывалось адиабатическое повышение температуры при ударной нагрузке. Также не учитывалось влияние температуры на упругие свойства изучаемых материалов, что могло повлиять на результаты определения параметров моделей. Разработан-

ная ранее первоначальная модель РП имеет ограниченные возможности и описывает упрочнение в нешироком диапазоне скоростей деформации и температур. В отличие от предыдущих исследований, для преодоления существующих трудностей в данной работе разрабатывается модифицированная модель РП и исследуется ТВС путем введения коэффициента относительных напряжений (КОН) в широком диапазоне деформации, скорости деформации и температуры. Эксперименты показывают, что КОН обладает явной зависимостью от скорости деформации и температуры. Однако традиционные мультипликативные модели в форме $\sigma = f_1(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}) f_2(\varepsilon_p, T)$ приводят к температурно-независимому поведению КОН, что противоречит экспериментальному наблюдению. Кроме того, в работе исследуется связь между разработанной модифицированной моделью РП и уравнением поверхности текучести, которая трактуется в рамках подхода инкубационного времени. В результате, на основе подхода инкубационного времени были смоделированы немонотонные диаграммы деформирования, в частности, отрицательное упрочнение, вызываемое адиабатической пластической диссипацией при ударном воздействии. Также обсуждаются основные различия между моделью искусственных нейронных сетей и другими исследуемыми моделями. В конце работы, предлагается вычислительная схема для конечно-элементного анализа задач динамической пластичности с использованием упрощенного варианта модели РП.

Методология и методы исследования

Модель РП разрабатывается с использованием подхода инкубационного времени. Температурно-временная зависимость исследуется путем введения коэффициента относительных напряжений (КОН) и анализа существующих экспериментальных данных при различных скоростях деформации и температурах. Вычислительная схема реализуется с использованием метода конечных элементов. Для решения задач динамической пластичности, с учетом разработанной модели РП, используются несколько численных методов: явный метод центральной разности для интегрирования коротко-временных динамических уравнений; алгоритм предиктор-корректор для точного вычисления пластических деформаций; безопасная версия метода Ньютона-Рафсона для обеспечения сходимости в процессе итерационного решения. При помощи применения апробированного для многих задач подхода инкубационного времени, анализа экс-

периментальных данных и различных верифицированных численных методов разработанная вычислительная схема обеспечивает свою надежность и пригодность к решению задач динамической пластичности.

Теоретическая и практическая значимость

Данная работа имеет теоретическое значение, так как она способствует развитию релаксационной модели пластичности, установлению и обоснованию температурно временного соответствия, а также формулировке новых принципов создания вычислительных схем для конечно-элементного анализа необратимого деформирования материалов. Её результаты дополняют понимание динамической пластичности и повышают точность их моделирования. В частности, данная работа обогащает новую область исследования, развивая подход инкубационного времени для более широкого спектра задач. Применение данного подхода к изучению динамической пластической реакции металлических материалов предоставляет ценную основу для моделирования и предсказания их поведения при ударных нагрузках. Практически, данная диссертация имеет прямое отношение ко многим инженерным приложениям, требующим моделирования и предсказания пластического поведения материалов в экстремальных условиях. Специалисты различных отраслей промышленности, таких как автомобильная, аэрокосмическая и строительная инженерия, могут воспользоваться этими результатами для оптимизации конструкций, повышения мер безопасности и обеспечения целостности компонентов, подвергающихся высокоскоростным термомеханическим воздействиям.

Положения, выносимые на защиту

1. Концепция модифицированной релаксационной модели пластичности (модель РП). Введены упрощенный и инкрементальный варианты модели РП (УРП и ИРП). Подход инкубационного времени рассматривает скоростную чувствительность материалов как частный случай проявления их временной чувствительности.
2. Методология исследования температурно-временного соответствия (ТВС). В работе введен коэффициент относительных напряжений (КОН) для анализа тенденций ТВС в широком диапазоне деформации, скорости дефор-

мации и температуры. Надежность методологии подтверждается имеющимися экспериментальными данными.

3. В ходе решения задач была исследована описательная способность часто используемых мультипликативных моделей вида $\sigma = f_1(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon})f_2(\varepsilon_p, T)$. Показано, что эти модели непригодны для моделирования влияния скорости деформации и термического разупрочнения в широком диапазоне температур.
4. Результат сравнительного анализа модели ИРП с другими феноменологическими моделями и моделями на основе микромеханики. Сравнение проведено на основе экспериментальных данных различных металлических материалов, в том числе алюминиевых сплавов 6082-T6 и 2519A, стали HSLA-65, композита на основе вольфрама 93W-4.9Ni-2.1Fe и титанового сплава Ti-6Al-4V.
5. Модель необратимого деформирования на основе искусственной нейронной сети (ИНС) и результат сравнения с моделью РП и другими исследуемыми моделями. Модель ИНС, как черный ящик, изучает закономерности напрямую из имеющихся данных, не объясняя смысл аппроксимированных зависимостей. Её поведение значительно зависит от качества представленных данных, в то время как другие модели предлагаются на основе анализа физических законов.
6. Новые способы и результаты моделирования отрицательного упрочнения стали HSLA-65, вызванного быстрой пластической деформацией и адиабатической диссипацией энергии.
7. Оригинальная вычислительная схема для конечно-элементного анализа задач динамической пластичности с использованием упрощенного варианта модели РП. Для решения трехмерных задач динамической пластичности реализована на языке Fortran программа расчета по разработанной конечно-элементной схеме
8. Программные модули для расчета диаграмм деформирования разных материалов и определения параметров различных моделей, написанные на языке Python.

К **основным научным результатам**, достигнутым в ходе диссертационного исследования, следует отнести:

1. Модификацию релаксационной модели по пластичности. Модифицированная модель РП может быть получена из уравнения поверхности текучести в рамках подхода инкубационного времени, в то время как многие другие феноменологические модели в основном получаются с помощью прямого эмпирического подхода. В этом одно из основных отличий между модифицированной моделью РП и другими феноменологическими моделями.
2. Построение зависимости инкубационного времени от температуры для стали HSLA-65 и композита на основе вольфрама 93W-4.9Ni-2.1Fe и титанового сплава Ti-6Al-4V.
3. Сравнение модели ИРП с другими феноменологическими моделями и моделями на основе микромеханики. Показано, что применяемая во многих работах мультипликативная форма $\sigma = f_1(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon})f_2(\varepsilon_p, T)$ не пригодна для моделирования эффекта скорости воздействия и термического разупрочнения в широком диапазоне температур.
4. Моделирование отрицательного упрочнения стали HSLA-65, вызванного быстрым деформированием и адиабатической диссипацией энергии.
5. Разработку оригинальной вычислительной схемы для конечно-элементного анализа задач динамической пластичности с использованием упрощенного варианта модели РП. Проведено моделирование экспериментов РСГК с помощью МКЭ для верификации разработанной расчетной схемы. Результаты моделирования показывают хорошее согласие с имеющимися экспериментальными данными.

Степень достоверности и апробация результатов

Основные результаты данной диссертационной работы были представлены автором на следующих конференциях:

1. Международная студенческая конференция “Science and Progress” организованная Германо-русским междисциплинарным научным центром (Санкт-Петербург, 2021)

2. 7th International Conference on Crack Paths (Trondheim, 2021)
3. School-Seminar "Mechanics, Chemistry, and New Materials" (Saint Petersburg, 2022, 2023)
4. Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (Санкт-Петербург, 2023)
5. 3rd Sino-Russian Forum «Material science & Technology» (Harbin, 2023)

На Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике, проведенном в 2023 году, автор был награжден за лучший секционный доклад среди молодых ученых.

Основные результаты исследования представлены в 6 работах, из которых 3 работы были опубликованы в изданиях, индексируемых базами Web of Science и Scopus.

1. Modeling of the thermal softening of metals under impact loads and their temperature–time correspondence / S. Zhao, Yu. V. Petrov, Yuyi Zhang et al. // International Journal of Engineering Science. — 2024. — Vol. 194. — P. 103969. (Q1)
2. Zhao S., Petrov Yu.V., Volkov G.A. The modified relaxation plasticity model and the nonmonotonic stress–strain diagram // International Journal of Mechanical Sciences. — 2023. — Vol. 240. — P. 107919. (Q1)
3. Zhao S., Petrov Yu. V., Volkov G. A. Modeling the Nonmonotonic Behavior Flow Curves under Dynamic Loads // Physical Mesomechanics. — 2022. — Vol. 25, no. 3. — P. 221–226. (Q2)

По разработанной автором релаксационной модели также была получена одна государственная регистрация программы для ЭВМ № 2023684476 с названием "Программный комплекс для построения диаграмм деформирования металлов под ударным нагружением, рассчитанных по инкрементальной релаксационной модели пластичности" [11].

Благодарности

Автор искренне благодарит профессора Юрия Викторовича Петрова и доцента Григория Александровича Волкова за их бесценную поддержку, полезные

советы, постоянное воодушевление, всестороннюю помощь и обширное руководство на протяжении подготовки данной диссертации. Автор также от всей души благодарит свою жену, Ци Дунфан, за её неизменную любовь, бесконечную заботу, долгосрочную поддержку, глубокое понимание и постоянное сопровождение во всех обстоятельствах. Кроме того, автор хотел бы выразить признательность за поддержку от Китайского стипендиального совета во время его аспирантской жизни.

Эта диссертация была финансово поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации в рамках проекта мегагранта (соглашение No. 075-15-2022-1114 от 30.06.2022). Результаты главы 2 и 4 также были поддержаны Российским научным фондом (РНФ No. 22-11-00091).

Обзор литературы

В инженерных задачах точное моделирование пластического поведения разных материалов, в частности металлов, в широком диапазоне скоростей деформации и температур является весьма важным. В конечно-элементном анализе для решения задач пластичности часто используется модель пластичности Мизеса J_2 , в которой функция текучести играет ключевую роль в описании поведения поверхности текучести. Функция текучести задает критерий текучести и закон упрочнения для каждого элемента рассматриваемого объекта. Классические изотропные и кинематические модели упрочнения, часто используемые для решения статических задач, не пригодны для описания динамического поведения материалов, подвергаемых высокоскоростным нагрузкам и разным термическим условиям. Для преодоления этого ограничения в классические модели, изначально разработанные для квазистатических случаев, были введены дополнительные скоростно-зависимые и температурно-зависимые компоненты для изучения термомеханической реакции материалов при ударных нагружениях.

Эффекты скорости воздействия отражают различные явления, возникающие при разных скоростях деформации. В общем, эти эффекты проявляются в увеличении напряжений при повышении скоростей деформации. Особенно было отмечено, что металлы обычно имеют большее значение предела текучести при повышенных скоростях деформации. Кроме того, ударные нагрузки иногда вызывают немонотонную диаграмму деформирования, включая эффект зуба текучести. При повышенных температурах, наоборот, обычно происходит релаксация напряжений или разупрочнение материалов, что приводит к снижению напряжений. Это явление обычно называется температурным эффектом (или термическим разупрочнением).

Большинство экспериментальных данных, используемых в данной работе для верификации развиваемого подхода получены при помощи широко применяе-

мой технологии разрезных стержней Гопкинсона-Кольского (РСГК). Она является одним из основных экспериментальных методов для оценки динамических свойств материалов, подвергаемых ударным нагружением [12]. Дадим краткое описание основных принципов данного экспериментального метода и примеров его применения.

Испытательное оборудование РСГК состоит из нескольких частей, включая газовую пушку (gas gun) в качестве системы запуска, ударник (striker bar), передающий стержень (incident bar), опорный стержень (transmission bar) и систему сбора данных, как показано на рисунке 1 [13]. Следует отметить, что передающий и опорный стержни имеют одинаковые механические свойства.

Во время эксперимента ударник запускается газовой пушкой и сталкивается с концом передающего стержня, создавая упругий импульс, который распространяется вдоль передающего стержня. На интерфейсе ①, соединяющем передающий стержень и образец, упругая волна напряжения частично отражается и проникает через короткий образец с длиной l . В результате возникает пластическая деформация образца. Аналогично, на интерфейсе ② между образцом и опорным стержнем также происходит частичное отражение и проникновение волны напряжения. Выбор "короткой" длины образца удобен для обеспечения в нем равномерного распределения напряжения. В результате данной установки исключается влияние распространения волны на термомеханическое поведение образца, так как пластическая деформация порождается в равномерном поле напряжения по образцу. Кроме того, скорость деформации образца во время его деформирования остается почти постоянной.

В РСГК предполагается изучение одномерного распространения волн напряжения. Для образца с длиной l скорость деформации может быть выражена следующим образом:

$$\dot{\varepsilon}_s = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{v_1(t) - v_2(t)}{l}, \quad (1)$$

где $v_1(t)$ и $v_2(t)$ – скорость частиц на интерфейсах ① и ②, соответственно. Используя одномерную теорию волн, связь между скоростями частиц и деформациями записывается как $v_1 = c_0(\varepsilon_I - \varepsilon_R)$ и $v_2 = c_0\varepsilon_T$, где c_0 – скорость продольных волн в передающем и опорном стержнях, а ε_I , ε_R обозначают деформации, вызванные направившимся и отраженным импульсами в передающем стержне. ε_T – деформации, вызванные импульсом проходящим через опорный стержень. Следовательно, скорость деформации и деформацию можно определить следу-

ющим образом:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_s &= \frac{d\varepsilon_s}{dt} = \frac{c_0 (\varepsilon_R + \varepsilon_T - \varepsilon_I)}{l}, \\ \varepsilon_s &= \frac{c_0}{l} \int_0^t (\varepsilon_R + \varepsilon_T - \varepsilon_I) dt.\end{aligned}\tag{2}$$

Исходя из предположения о равномерном напряженном поле внутри образца, напряжение может быть определено с использованием уравнения:

$$\sigma_s = \frac{F_1 + F_2}{2A_s} = \frac{E_0 A_0 (\varepsilon_I + \varepsilon_R + \varepsilon_T)}{2A_s},\tag{3}$$

где $F_1 = A_0 E_0 (\varepsilon_I + \varepsilon_R)$ и $F_2 = A_0 E_0 \varepsilon_T$ – силы на двух интерфейсах, а E_0 и A_0 – модуль Юнга и поперечное сечение передающего и опорного стержней, а A_s – поперечное сечение образца. Предположение о равномерности также подразумевает равенство, выраженное следующим образом:

$$\varepsilon_I + \varepsilon_R = \varepsilon_T\tag{4}$$

Подставив это равенство в уравнения для скорости деформации и напряжения, получаемые из уравнений (2) и (3), соответственно, получаем следующие связи, раскрывающие определяющее соотношение испытываемых материалов:

$$\varepsilon_s(t) = \frac{2c_0}{l} \int_0^t \varepsilon_R(t) dt\tag{5}$$

$$\dot{\varepsilon}_s(t) = \frac{2c_0}{l} \varepsilon_R(t)\tag{6}$$

$$\sigma_s(t) = E_0 \frac{A_0}{A_s} \varepsilon_T(t)\tag{7}$$

Настоящая диссертация не предполагает проведение экспериментальных работ. Описание РСГК основано на работах других профессоров, указанных в ссылках [12] и [13].

При медленном нагружении процесс пластического деформирования обычно является изотермическим. Вслед за диссипацией энергии, создаваемой необратимой деформацией, материалы обычно стремятся достичь нового теплового равновесия с окружающей средой. Однако материал, подвергающийся высокоскоростной нагрузке, неспособен достичь теплового равновесия с окружающей средой в периоде деформирования. Таким образом, необратимая деформация при высокоскоростных нагрузках сопровождается заметным адиабатическим

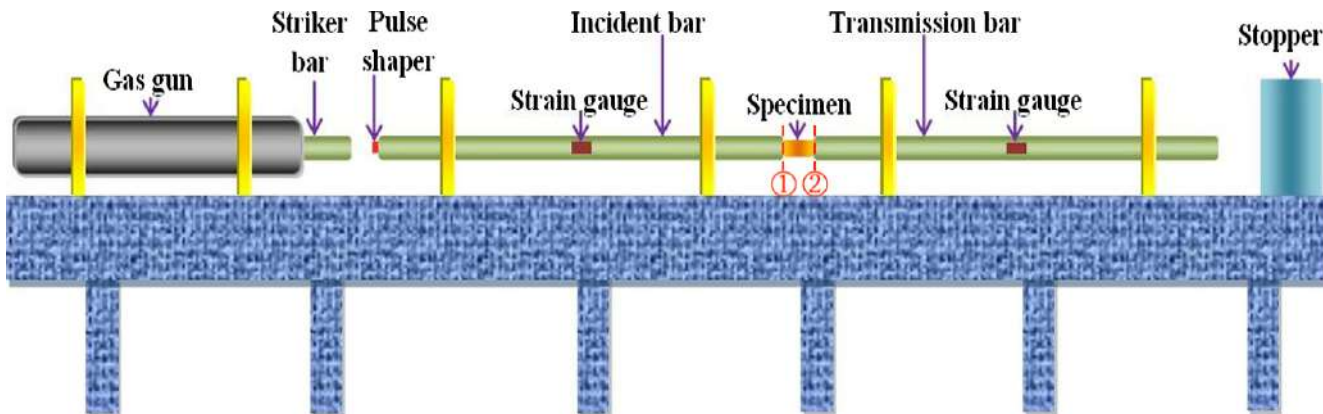


Рис. 1: Схема экспериментальной установки с разрезным стержнем Гопкинсона-Кольского (РСГК), используемая в работе [13].

повышением температуры [14] [15] [16] [17] [18] [19]. Термическое разупрочнение относится к процессу, при котором уровень напряжения в материалах снижается при повышении внутренней температуры. Это связано с релаксацией напряжений, то есть с уменьшением внутреннего сопротивления деформации. Для некоторых металлов, подвергающихся быстрым нагрузкам, может быть обнаружено немонотонное соотношение между истинным напряжением и истинной деформацией [14], что кажется противоречит постулатам устойчивости Друкера. На самом деле это указывает на отрицательное упрочнение из-за термического разупрочнения, вызванного быстрой пластической диссипацией. Для моделирования термического разупрочнения, возникающего при ударных нагрузках, разработаны различные типы феноменологических моделей, моделей на основе микромеханики и моделей искусственных нейронных сетей, которые далее обсуждаются в данной работе.

Для учета совместного влияния скорости деформации и температуры предлагается температурно-скоростное соответствие. Считается, что повышенное напряжение, вызванное большими скоростями деформации, может быть также получено понижением температуры. Математически это соотношение выражается в мультипликативной форме $\sigma = f_1(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon})f_2(\varepsilon_p, T)$, где f_1 представляет функцию, описывающую скоростной эффект, а f_2 – функцию, учитывающую температурный эффект. Для функции f_1 было предложено использование различных эмпирических формул [1] [2] [3] [4] [5]. Например, модели Джонсона-Кука [1] и Джонсона-Холмквиста [20] включают логарифмический компонент, зависящий от скорости $1 + C \ln(\dot{\varepsilon}/\dot{\varepsilon}_0)$, описывающий динамическое поведение пластических и хрупких материалов, соответственно. Модель Каупера-Симондса [3] добавля-

ет степенной компонент $1 + (\dot{\varepsilon}/B)^{1/q}$ к классической модели упрочнения. Пенг и др. [21] предложили модифицированную модель Джонсона-Кука, которая предполагает экспоненциальную зависимость между скоростным компонентом и нормализованной логарифмической скоростью деформации, заданной выражением $\exp [C \ln (\dot{\varepsilon}/\dot{\varepsilon}_0)]$. Шокри предложил множитель $1 + (C_1 + C_2\varepsilon) \ln (\dot{\varepsilon}/\dot{\varepsilon}_0)$ для описания динамического поведения материалов [22]. Чжанг и др. [23] улучшили модель Джонсона-Кука, введя синусоидальный коэффициент упрочнения как $1 + \left(C_1 + C_2 \sin \left(\frac{\ln \dot{\varepsilon} - C_3}{C_4} \pi \right) \right) \ln (\dot{\varepsilon}/\dot{\varepsilon}_0)$. В исследовании Чжао и др. [24] по динамической реакции сварного соединения вспышечной сварки U75VG было обнаружено, что вышеупомянутые модели не точно описывают поведение упрочнения в основном металле и зоне сварки при больших скоростях деформации. Для преодоления этого ограничения была предложена улучшенная модель:

$$\sigma = [\eta_1 A + B (\varepsilon_p)^{n_1}] \left[1 + \eta_2 C^\# \left(\frac{\dot{\varepsilon}_p}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{n_2} \ln \left(\frac{\dot{\varepsilon}_p}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right],$$

где $C^\#$ – скоростно-зависимый параметр. Все упомянутые здесь модели обеспечивают удовлетворительное описание скоростно-зависимого пластического поведения разных материалов и широко используются для решения разных инженерных задач. Однако важно отметить, что эти модели в основном разработаны путем предположения эмпирических скоростно-зависимых и/или температурно-зависимых компонентов в существующие классические основы, изначально предложенные для квазистатических случаев.

Одной из недостатков эмпирических моделей является их однообразная описательная способность, что может вызывать трудности в объяснении многих фундаментальных эффектов, отличающих динамическое поведение материалов от статического. Модель Джонсона-Кука (ДжК) [1] и её модификации [21] [22] [23] [25] являются широко используемыми моделями такого типа. Они основаны на предположении, что поведение материала описывается комбинацией квазистатического упрочнения, динамического упрочнения и термического разупрочнения. Это мультипликативные модели. В них термическое разупрочнение характеризуется температурно-зависимой компонентой $f_2 = 1 - \left(\frac{T - T_r}{T_m - T_r} \right)^m$, где T_m , T_r и m – постоянные материала. Модель Хань-Хуанг-Лиан (ХХЛ), предложенная впервые Ханом и Лиангом [26], также является мультипликативной. В ней предложен температурно-зависимый множитель $\left(\frac{T_m - T}{T_m - T_r} \right)^m$. Фаррох и Кхан [27] усовершенствовали модель ХХЛ, изучая механические свойства ультрамелко-

зернистых и нанокристаллических материалов. Пиао и соавторы [28] также ввели скоростно-температурно-зависимый множитель в модель Лима-Ха [29] для описания термического разупрочнения. Омер, Батчер и Ворсвик продемонстрировали, что обобщенная модель Воце точно представляет определяющее соотношение современных сплавов серии 7000 при термомеханических условиях, созданных горячей объёмной штамповкой [30]. Эти модели были разработаны с использованием эмпирических подходов на основе экспериментальных наблюдений и хорошо согласуются с экспериментальными данными при различных скоростях деформации и температурах. Следовательно, они полезны для численного моделирования, такого как конечно-элементного анализа, и могут быть удобно определены с использованием коммерческих программных пакетов. Недостатки таких моделей заключается в отсутствии физической основы для параметров модели и неспособности описать немонотонное поведение диаграммы деформирования. Чтобы преодолеть эти ограничения, следует ввести дополнительные компоненты в классические основы или заменить логарифмическую и/или степенную функцию другими эмпирическими функциями, зависящими от скорости деформации и/или температуры.

В металлах пластическая деформация порождается движением дислокаций. Взаимодействие дефектов материалов с дислокациями может привести к препятствиям для движения дислокаций. Напряжения, необходимые для преодоления этих препятствий, были разделены на атермальные и термальные компоненты. Термальный компонент может быть получен с помощью различных соотношений в кинетике дислокаций для металлов с объёмноцентрированной кубической (ОЦК), гранецентрированной кубической (ГЦК) и гексагональной плотно-упакованной (ГПУ) структурами. Форма атермального компонента может быть определена на основе экспериментальных результатов. Таким образом, были получены различные версии моделей. Согласно уравнению Орована для скорости пластической деформации и соотношению Кока о энергии, требуемой для преодоления дислокацией своих близкодействующих препятствий, вызванного её термической активацией, Немат-Нассер и Исаакс [6] представили физически основанную модель для металлов с ОЦК структурой. Позднее были обсуждены аналогичные модели для металлов с ГЦК [31] и ГПУ [32] структурой. Термическое разупрочнение стали HSLA-65 при скорости деформации 3000 с^{-1} было обнаружено экспериментами [14]. Согласно энергии активации, выра-

женной формулой $G = G_0 - \int_0^{\sigma_{th}} A^* b d\sigma'_{th}$, Зерилли и Армстронг предложили различные физически основанные модели для металлов с ОЦК, ГЦК [7] и ГПУ структурами [33]. Войяджис и Абед разработали модели для описания напряжений чистых металлов с различными кристаллическими структурами [34] [35]. Сонг, Йон и Войяджис предложили модель, которая использует дополнительный компонент, учитывающий упрочнение, вызванное динамическим деформационным старением (ДДС) в мартенситной стальном сплаве [36]. Войяджис, Сонг и Русинек изучили явление ДДС и представили модель Войяджиса-Абеда-Русинека для объяснения повышения напряжения за счет явления ДДС [37]. Согласно теории о термически активированном движении дислокаций, Русинек и Клепачко предположили разложение напряжения на внутреннее составляющее и эффективное составляющее с учетом температурно-зависимого модуля Юнга [38]. Модель Русинека-Клепачко дальше развивается в работах [39] [40] и др. Основываясь на термически активированном движении дислокаций с учетом препятствий границ зерен, Хан и Лью установили уравнение скорости типа Аррениуса для сверхтонкозернистых/нанокристаллических поликристаллов с ГЦК структурой [41]. Чжан, Лу, Канг и др. разработали термодинамическую модель для изучения влияния температуры на поведение высокоэнтропийного сплава с учетом скольжения дислокаций, двойникования и превращения фазы мартенсита [42]. Применяя подходящее правило масштабного перехода от монокристаллической зерна к поликристаллическим агрегатам, Си, Чжу, Канг и др. представили динамическую модель на основе кристаллической пластичности [43]. Позднее они предложили термически активированную динамическую модель для изучения деформирования магниевого сплава AZ31В при разных температурах [44]. Это модели на основе дислокационной механики. Они хорошо описывают термомеханическое поведение различных металлических материалов при различных условиях нагружения. Однако для применения подобных моделей требуется детальное понимание микроструктуры материала и взаимодействия между дислокациями, а также значение некоторых параметров модели может быть сложно определить экспериментально.

В последние годы модели искусственных нейронных сетей (ИНС) привлекли значительное внимание в исследованиях о моделировании пластического поведения разных материалов, например, Джиа и др. [40], Али и др. [45], Оливье и др. [46] и Шу [47]. Гу, Чжан и Голуб предложили метод безэлементной фи-

зически информированной нейронной сети для решения задач тонкостенных конструкций [48]. Ли, Моор и др. разработали модель пластичности на основе машинного обучения, способную учитывать сложное упрочнение, зависящее от скорости деформации и температуры и динамическое деформационное старение [49]. Они также предложили модель на основе нейронных сетей для прогнозирования начала разрушения. Джордан, Горджи и Моор [50] показали, что однослойная нейронная сеть достаточна для описания упрочнения полипропилена. Алгоритм обратного распространения ошибки с применением байесовской регуляризации был использован для идентификации соответствующей функции нейронной сети. В нашей работе мы также подтвердили, что однослойная искусственная нейронная сеть подходит для описания термомеханического поведения металлов. Кроме того, обсуждаются основные различия между моделями ИНС и другими моделями пластичности, включая феноменологическими и физически основанными моделями.

Зависящее от скорости поведение пластиков и металлов было исследовано Криштеску [51] и Лублинером [52]. В их работах была предложена функция, описывающая немгновенное пластическое поведение. Другой подход для учета немгновенного поведения – интегральный подход. Теория дислокаций Коттрелла и Билби [53] утверждает, что время, необходимое для освобождения дислокаций, пропорционально $\exp\left(\frac{U(\sigma/\sigma_0)}{kT}\right)$, где T представляет абсолютную температуру, σ_0 – предел текучести при температуре $T = 0$, K , k – постоянная Больцмана, U – энергия активации, а σ – приложенное напряжение. Предполагая, что пластический процесс начинается, когда плотность дислокаций достигает определенного критического значения, Кэмпбелл получил динамический критерий текучести в виде интегрального уравнения:

$$\int_0^{t_y} \left(\frac{\sigma(t)}{\sigma_0}\right)^\alpha dt = C, \quad (8)$$

Здесь t_y представляет время начала пластического процесса, α – параметр, который может меняться с температурой, а C – константа в единице времени. Критерий Кэмпбелла считается удобным и применимым для произвольных историй нагружения [54]. Более того, Клепачко [55], Столярский [56] и Янковиак [57] считают вид интегрального критерия подходящим для использования в качестве динамического критерия разрушения. Тулер и Бутчер предложили аналогичный интегральный критерий разрушения [58] на основе понятий на-

копленного повреждения. Эти интегральные критерии показали свою эффективность в описании условий текучести и разрушения при больших скоростях нагружения. Однако следует отметить, что они противоречат квазистатическим условиям пластичности и разрушения, где $\sigma(t_c) = \sigma_c$, σ_c – статический предел текучести или прочности.

Новые перспективы моделирования динамического отклика материалов могут быть связаны с структурно-временным подходом, который был впервые предложен Петровым и Уткиным [59], Петровым и Морозовым [60] и Петровым [61] в области динамики разрушения. Подход основан на понятии инкубационного времени процесса разрушения и предполагает, что в случае низкоскоростной нагрузки соответствующий критерий разрушения может быть упрощен и путем пренебрежения незначительными компонентами превращен в классические квазистатические критерии прочности и трещиностойкости. Вместо использования эмпирической зависимости от скорости, этот подход вводит параметр инкубационного времени, обозначаемый далее символом τ , в соответствующий временной интеграл, имеющий смысл структурного импульса (momentum), действующего в представительном объеме данной среды. Параметр τ характеризует временную чувствительность материалов и имеет смысл характерного времени релаксационных процессов в микроструктуре, предваряющих событие разрушения на заданном макроскопическом уровне. Релаксационная природа инкубационного времени обсуждалась в работах [62] [63]. Для учета динамического разрушения горных пород, Щу и др. [64] использовали модифицированный критерий инкубационного времени с весовым коэффициентом, и обсудили аналогию вязкости кинематики микротрещин. Фактически, весовой коэффициент можно рассматривать как ядро $K'(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$ интегрального оператора $\int_0^t K'(t-s)\sigma(s) ds$, тогда как оригинальный критерий инкубационного времени использует ядро $K(t) = \frac{1}{\tau} H(\tau-t)$, где $H(\cdot)$ – функция Хевисайда, как линейное приближение экспоненциальной функции $K'(t)$, что ранее уже отмечалось в [62]. Петров и Груздков предложили интегральный критерий пластичности [8], который был вдохновлен структурно-временным подходом [59] [60] [61] и идеями Кэмпбелла [54]. Критерий Петрова [65] [66], рассмотренный позднее в разделе 2.1.1 и применимый для произвольных форм нагрузки (см., например, [67] [68]), обеспечивает единое описание как квазистатического, так и динамического состояний текучести с использованием ограниченного набора

параметров.

Необратимая деформация и соответствующие критические характеристики могут быть описаны релаксационной моделью пластичности (модель РП), впервые предложенной Петровым и его научной группой [69] [70] [71]. Модель РП рассматривает пластическое деформирование как процесс релаксации, при котором напряжения, вызванные нагрузками, со временем освобождаются в результате движения дефектов в кристаллической решетке. В модели РП вводится безразмерная функция релаксации для описания релаксационного процесса, сопровождающего развитие необратимой деформации, которая вычисляется на основе концепции инкубационного времени без участия эмпирических зависимостей от скорости. Модель РП показала свою эффективность в моделировании эффекта скорости деформации и эффекта зуба текучести в широком диапазоне скоростей деформации [69] [70] [71]. Однако, модель РП имеет ограниченную способность в описании упрочнения материалов в широком диапазоне деформаций. Инкубационное время, отражающее временную чувствительность материалов, является характерным временем релаксационного процесса, протекающего благодаря развитию дефектной структуры материала на микроуровне. Разупрочнение материалов, как релаксационное событие, существенно зависит от температуры. При повышении температур разупрочнение становится более заметным, что приводит к уменьшению его характерного времени релаксации. Это температурно-временное соответствие может быть математически описано через зависимость инкубационного времени от температуры. Ранее были проведены исследования некоторых зависимостей температуры и инкубационного времени, таких как [9] и [10], однако эти работы были выполнены в ограниченном диапазоне деформации и скорости деформации без учета возможного адиабатического повышения температуры при ударных нагрузках. Кроме того, не учитывалось влияние температуры на упругие свойства изучаемых материалов, которое может повлиять на критические характеристики материала. В отличие от предыдущих исследований, в данной работе мы рассматриваем температурно-временное соответствие, вводя коэффициент относительных напряжений (КОН) в широком диапазоне деформации, скорости деформации и температуры. Кроме того, обсуждаются возможные феноменологические объяснения различных температурно-временных эффектов. Также моделируется немонотонное поведение диаграммы деформирования, в частности отрицатель-

ного упрочнения, вызванного термическим разупрочнением при условиях ударной нагрузки. Кроме того, подход инкубационного времени рассматривает скоростную чувствительность как частный случай временной чувствительности материалов. Уравнение поверхности текучести в рамках подхода инкубационного времени также играет важную роль для дальнейшего развития этой теории. В данной диссертационной работе представлены основы модифицированной модели РП и исследована роль функции релаксации $\gamma(t)$ в эволюции поверхности текучести.

Глава 1

Существующие модели для задач динамической пластичности

В этой главе кратко представлены некоторые широко используемые модели, описывающие эффекты скорости воздействия и термическое разупрочнение, включая феноменологические, физически основанные модели и модель с использованием искусственной нейронной сети.

Обсуждение, представленное в данной главе, опубликовано в статье [72].

1.1 Основные сведения

Чувствительность материалов к скорости деформации может быть эффективно изучена с помощью экспериментов РСГК [73]. В этих экспериментах образец подвергается ударной нагрузке, находясь в состоянии динамического равновесия. В процессе деформирования материал находится в изотермических или адиабатических условиях. Поэтому мы сосредоточимся на упруго-пластическом поведении изотропных металлических материалов под монотонными нагрузками, пренебрегая теплопередачей. Это поведение описывается законом Гука (1.1), законом пластического течения $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \forall \boldsymbol{\sigma} : f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0$ и уравнением поверхности текучести $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$, где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений Коши (тензор истинных напряжений), \mathbf{C} – тензор упругих модулей, $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ – тензоры упругой и пластической деформации, соответственно, γ – скалярная функция, $\Phi(\boldsymbol{\sigma})$ – пластический потенциал течения. Внутренние переменные \mathbf{q} обычно рассматриваются как функции пластической деформации $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ и набора параметров упрочнения. Мы рассматриваем изотропную задачу по пластичности J_2 , то есть случай с изотропной поверхностью текучести Мисеса

(1.4), где $\bar{\sigma}(\mathbf{s}) = (\frac{3}{2}\mathbf{s} : \mathbf{s})^{1/2}$ представляет интенсивность касательных напряжений, \mathbf{s} – девиаторный составляющий тензора напряжений. Функция упрочнения $\sigma^y(\bar{\varepsilon}^p, \dot{\bar{\varepsilon}}^p, T)$ может быть определена по результатам одноосных испытаний на растяжение или сжатие. Эквивалентная пластическая деформация $\bar{\varepsilon}^p$ определяется по формуле $\bar{\varepsilon}^p = \int_0^t \dot{\bar{\varepsilon}}^p dt'$ и $\dot{\bar{\varepsilon}}^p = (\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)^{\frac{1}{2}}$.

Поведение материалов обычно соответствует постулату Друкера (1.5), означающий, что выпуклость поверхности текучести справедлива при разных скоростях деформации. Более того, эти материалы также удовлетворяют принципу максимума диссипации, указывая на действительность ассоциированного закона течения (1.2) ($\Phi(\cdot) = f(\cdot)$). Однако в определенных случаях, например, под воздействием ударных нагрузок [14], упрочняющие материалы могут проявлять разупрочнение, кажущееся противоречащим постулату Друкера и ассоциированному закону течения. Это специфическое поведение, характеризующееся отрицательным упрочнением при высоких скоростях воздействия, может быть объяснено термическим разупрочнением, вызванным адиабатическим повышением температуры (или быстрой пластической диссипацией). Для описания этого термического разупрочнения, вызванного ударными нагрузками, уравнение (1.3) предлагает объяснение. Здесь ρ – плотность массы, C_v – зависящая от температуры теплоемкость, а η – коэффициент Тейлора-Куинни, учитывающий превращение пластической работы в тепловую энергию. Обычно η определяется экспериментальным путем измерения изменения температуры образца в процессе пластического деформирования.

В данной работе мы рассматриваем задачу по динамической пластичности J_2 . Эта задача характеризуется набором определяющих соотношений, представленных уравнениями (1.1)–(1.4), где скалярная функция упрочнения $\sigma^y(\bar{\varepsilon}^p, \dot{\bar{\varepsilon}}^p, T)$ зависит от скорости деформации и была разработана различными научными группами. Для исследования поведения материалов в условиях динамической нагрузки в литературе было предложено несколько подходов.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e, \mathbf{C} = K\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - 2G \left(\mathbf{E} - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) \quad (1.1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \mathbf{n}, \mathbf{n} = \frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{s} : \mathbf{s})^{\frac{1}{2}}} = \frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|} \quad (1.2)$$

$$\dot{T} = \frac{\eta(\dot{\bar{\varepsilon}}^p)}{\rho C_v} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (1.3)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p, \dot{\varepsilon}^p, T) = \bar{\sigma}(\mathbf{s}) - \sigma^y(\bar{\varepsilon}^p, \dot{\varepsilon}^p, T) = 0, \bar{\sigma}(\mathbf{s}) = \left(\frac{3}{2}\mathbf{s} : \mathbf{s}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.4)$$

$$\int_0^t (\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(s)) - \boldsymbol{\sigma}') : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(s) ds \geq 0 \quad (1.5)$$

В следующих разделах рассматриваются некоторые феноменологические модели, модели на основе дислокационной механики и модели искусственных нейронных сетей (ИНС). Эти модели могут служить потенциальными вариантами для представления функции упрочнения $\sigma^y(\bar{\varepsilon}^p, \dot{\varepsilon}^p, T)$.

1.2 Феноменологические модели

1.2.1 Модель Джонсона-Кука

Модель Джонсона-Кука (ЖС) [1] является одной из наиболее популярных феноменологических моделей для описания пластического поведения материалов при различных скоростях деформации и температурах. Модель представлена следующим образом:

$$\sigma = (A + B\varepsilon_p^n) \left(1 + C \ln\left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)\right) \left(1 - \left(\frac{T - T_r}{T_m - T_r}\right)^m\right). \quad (1.6)$$

В модели ЖС (1.6), σ – напряжение по Мисесу ($\bar{\sigma}(\mathbf{s})$), ε_p – эквивалентная пластическая деформация, $\dot{\varepsilon}$ – скорость деформации, $\dot{\varepsilon}_0$ – отсчетная скорость деформации, T_m – температура плавления, а T_r – комнатная температура. A, B, n, C, m – параметры модели.

Эта модель была предложена на основе прямого эмпирического подхода, основанного на анализе экспериментальных данных. Она реализована во множестве коммерческих пакетов конечных элементов (КЭ), что значительно облегчает моделирование термомеханического поведения различных материалов. Однако она может не давать относительно точные результаты в широком диапазоне скоростей деформации и температур.

1.2.2 Модель Хан-Хуан-Лян

Модель Хан-Хуан-Лян (КНЛ) была предложена Ханом и Ляном [26] для описания зависимости упрочнения от деформации, скорости деформации и температуры. Позже она была модифицирована для более точного предсказания

наблюдаемого поведения материалов [74]. Широко применяемая модель КНЛ представлена в уравнении (1.7). Здесь A , B , n_0 , n_1 , c и m – параметры модели; T_r – комнатная температура; T_m – температура плавления; D_0 – произвольно выбранное верхнее значение скорости деформации; $\dot{\epsilon}_0$ – отсчетная скорость деформации, обычно принимаемая равной 1 c^{-1} .

$$\sigma = \left\{ A + B \left[\left(1 - \frac{\ln \dot{\epsilon}}{\ln D_0} \right) \right]^{n_1} \varepsilon_p^{n_0} \right\} \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^c \left(\frac{T_m - T}{T_m - T_r} \right)^m \quad (1.7)$$

1.3 Модели на основе дислокационной механики

Еще один класс моделей относится к моделям на основе дислокационной механики. Одним из основных факторов, влияющих на пластическую деформацию, является движение дислокаций. Взаимодействие дефектов в материалах с дислокациями может препятствовать движению дислокаций. Дислокации леса, точечные дефекты, примеси и другие дефекты могут создавать близкодействующие барьеры; границы зерен может создавать дальнедействующие препятствия. Потребность в преодолении этих препятствий для достижения пластической деформации разумно разделить на две составляющих, представленных в выражении (1.8). Атермальная составляющая σ_{ath} характеризует взаимодействие дислокаций с дальнедействующими барьерами, которое считается нечувствительными к температуре. Тепловая составляющая σ_{th} в основном отражает взаимодействие дислокаций с близкодействующими препятствиями, преодолеваемое за счет термической активации.

$$\sigma = \sigma_{ath} + \sigma_{th} \quad (1.8)$$

Тепловая составляющая σ_{th} может быть получена с помощью различных соотношений в дислокационной кинетике, а форма атермальной составляющей σ_{ath} может определяться экспериментальными результатами. Таким образом, могут быть получены различные версии моделей.

1.3.1 Модели Немат-Нассер

Немат-Нассер и Исаакс [6] предложили модель с физическим обоснованием. Предполагая зависимость атермальной составляющей напряжения от плотности дислокаций, они предложили простое степенное представление, показанное

ниже в качестве первого приближения

$$\sigma_{ath} = a\varepsilon_p^n, \quad (1.9)$$

где ε_p – эквивалентная пластическая деформация. a и n – параметры модели. Исходя из уравнения Орована и соотношения Кока для расчета энергии, необходимой дислокации для преодоления своих близкодействующих препятствий за счет термической активации, тепловая составляющая σ_{th} представлена следующим образом

$$\sigma_{th} = \sigma_0 \left[1 - \left(-\frac{kT}{G_0} \ln \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{1/q} \right]^{1/p} H \left(1 + \frac{kT}{G_0} \ln \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right), \quad (1.10)$$

где σ_0 – пороговое напряжение, при котором дислокация преодолевает свое препятствие без какой-либо помощи от термической активации, и $\dot{\varepsilon}_0$ является отсчетной скоростью деформации, характеризующей чувствительность к скорости деформации, а параметр k/G_0 представляет собой температурную чувствительность материала (k – постоянная Больцмана). Функция $H(\cdot)$ – функция Хэвисайда. Параметры $0 < p \leq 1$ и $1 \leq q \leq 2$ определяют профиль близкодействующих препятствий.

Для металлов с объемноцентрированной кубической решеткой (ОЦК), главное препятствие для движения дислокации – барьеры Пейерлса, а среднее расстояние между дислокациями l можно обозначить как постоянную. Таким образом, можно предположить, что $\sigma_0 = \sigma_0(l)$ может быть постоянной материала [6][14]. Следовательно, модель Немат-Нассера-Исаакса (NNI) может быть записана следующим образом

$$\sigma = a\varepsilon_p^n + \sigma_0 \left[1 - \left(-\frac{kT}{G_0} \ln \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{1/q} \right]^{1/p} H \left(1 + \frac{kT}{G_0} \ln \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right). \quad (1.11)$$

В модели NNI (1.11), параметрами модели являются $a, n, \sigma_0, k/G_0, \dot{\varepsilon}_0, q$ и p .

Для металлов с гранецентрированной кубической решеткой (ГЦК), барьеры Пейерлса ограничивают движение дислокаций только при очень низких температурах, а основными преградами для дислокаций, лежащих на плоскостях скольжения, являются дислокации леса, пересекающих эти плоскости. Следовательно, среднее расстояние между дислокациями, зависящее от плотности дислокаций l , а также значение $\sigma_0(l)$ должны быть функцией пластической деформации ε_p и температуры T . Предполагая, что $l \sim (1 + a_0(1 - (T/T_m)^2)\varepsilon_p^{n_0})^{-1}$,

Немат-Нассер и Ли [31] предложили модель NNL следующего вида

$$\sigma = a\varepsilon_p^n + \sigma_0 f(\varepsilon_p, T) \left[1 - \left(-\frac{kT}{G_0} \ln \frac{\dot{\varepsilon} f(\varepsilon_p, T)}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{1/q} \right]^{1/p} H \left(1 + \frac{kT}{G_0} \ln \frac{\dot{\varepsilon} f(\varepsilon_p, T)}{\dot{\varepsilon}_0} \right), \quad (1.12)$$

$$f(\varepsilon_p, T) = 1 + a_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_m} \right)^2 \right] \varepsilon_p^{n_0}.$$

В модели NNL (1.12) необходимо определить параметры a , n , σ_0 , k/G_0 , $\dot{\varepsilon}_0$, q , p , a_0 , T_m и n_0 . T_m – температура плавления. Для бескислородной меди с высокой проводимостью параметр n_0 принимается равным $\frac{1}{2}$ [31].

Модель NNL также была применена для Ti-6Al-4V с гексагонально плотноупакованной (ГПУ) структурой, учитывая $n_0 = 1$ [32].

1.3.2 Модели Зерилли-Армстронга

Ссылаясь на энергию активации, выраженную как $G = G_0 - \int_0^{\sigma_{th}} A^* b d\sigma'_{th}$, Зерилли и Армстронг предложили различные физически обоснованные модели для металлов с ОЦК, ГЦК [7] и ГПУ структурами [33].

Для металлов с ОЦК структурой, где напряжение Пейерлса отвечает за термическую активацию, площадь активации A^* считается практически независимой от пластической деформации ε_p . Следовательно, тепловая компонента σ_{th} может быть записана без учета деформации следующим образом

$$\sigma_{th} = B \exp(-\beta_0 T + \beta_1 T \ln \dot{\varepsilon}). \quad (1.13)$$

Окончательная модель определяется в виде (1.14). Первый член – это атермальная компонента; второй член возникает из термоактивационного анализа для взаимодействия напряжения Пейерлса; третий член проявляет непрерывное упрочнение при большой деформации [75].

$$\sigma = \sigma_a + B \exp(-\beta_0 T + \beta_1 T \ln \dot{\varepsilon}) + B_0 \varepsilon_p^{n_0} \quad (1.14)$$

Для металлов с ГЦК структурой, где пересечение дислокаций является основным механизмом термической активации, предполагается, что площадь активации зависит от пластической деформации ε_p . Термическая компонента отличается от (1.13) и имеет дополнительный множитель $\varepsilon_p^{1/2}$. Тогда модель для металлов с ГЦК структурой принимает форму (1.15).

$$\sigma = \sigma_a + B \varepsilon_p^{1/2} \exp(-\beta_0 T + \beta_1 T \ln \dot{\varepsilon}) \quad (1.15)$$

Для металлов с ГПУ структурой окончательная модель была предложена как

$$\sigma = \sigma_a + B \exp(-\beta_0 T + \beta_1 T \ln \dot{\epsilon}) + B_0 \epsilon_p^{1/2} \exp(-\alpha_0 T + \alpha_1 T \ln \dot{\epsilon}). \quad (1.16)$$

В вышеуказанных моделях Зерилли-Армстронга (ЗА) параметры $\sigma_a, B, B_0, \beta_0, \beta_1, \alpha_0, \alpha_1, n_0$ могут потребоваться для определения, в зависимости от типа структуры рассматриваемых металлов.

1.4 Модель искусственной нейронной сети

Алгоритмы искусственных нейронных сетей (ИНС) в основном изучаются как решения задач аппроксимации. Задача обучения отображения между входным и выходным пространством может рассматриваться как задача создания "памяти", которая находит правильный выход при заданном входе и обобщает свой выход при предъявлении новых входов [76]. Классический подход к аппроксимации предполагает линейную зависимость подходящего набора функций $\Phi_i(\mathbf{x})$ от его векторного аргумента \mathbf{x} следующим образом, где \mathbf{w} представляет вектор коэффициентов веса с компонентами w_i , а повторяющийся индекс i следует конвенции Эйнштейна для суммирования.

$$F(\mathbf{w}, \mathbf{x}) = w_i \Phi_i(\mathbf{x}). \quad (1.17)$$

Сплайн-интерполяция и множество других подходов к аппроксимации, таких как разложения в ряд ортогональных полиномов, относятся к представлению (1.17). Подход искусственной нейронной сети предполагает композицию функций, таких как активная функция $f(\cdot)$ и регрессионные связи, для аппроксимации необходимых функций, как показано в выражении (1.18). Данный подход предполагает многослойную сеть блоков, которые суммируют свои аргументы с весовыми коэффициентами $w_1, \dots, w_n, v_1, \dots, v_i, u_1, \dots, u_j$.

$$F(\mathbf{W}, \mathbf{x}) = \sum_n w_n f \left(\sum_i v_i f \left(\dots f \left(\sum_j u_j x_j \right) \dots \right) \right) \quad (1.18)$$

Алгоритмы машинного обучения, как подход к аппроксимации, способны аппроксимировать определяющие соотношения как функции аргументов $\epsilon_p, \dot{\epsilon}$ и T , то есть $\sigma = F(\epsilon_p, \dot{\epsilon}, T)$. В данной работе рассматривается модель ИНС с

сигмоидной активационной функцией (1.20) и линейным регрессионным соотношением (1.21), где \mathbf{W} – матрица весовых коэффициентов, а \mathbf{b} – вектор смещения. Сигмоидная функция монотонна и изменяется в пределах интервала $(0, 1)$. Нормализация аргументов (или входных данных) выполняется с использованием выражения (1.22), где $[\cdot]_{\min}$ и $[\cdot]_{\max}$ являются нижней и верхней границами соответствующего набора данных. Для модели ИНС с N скрытыми слоями функцию $\sigma = F(\mathbf{x})$ можно аппроксимировать соотношением (1.19). Технически, $\mathbf{W}^{(k)}$ и $\mathbf{b}^{(k)}$ являются матрицей весов и вектором смещений k -го скрытого слоя. Компонента $w_{ij}^{(k)}$ матрицы весов $\mathbf{W}^{(k)}$ представляет связь между i -м нейроном скрытого слоя k и j -м нейроном скрытого слоя $(k - 1)$. Размерность $n \times m$ матрицы $\mathbf{W}^{(k)}$ соответствует m нейронам скрытого слоя $(k - 1)$ и n нейронам скрытого слоя k . Предварительно определенные гиперпараметры часто относятся к общему числу скрытых слоев, количеству нейронов на каждом скрытом слое и функции активации [77]. Значения ”встроенных” параметров, включая весовые коэффициенты $w_{ij}^{(k)}$, компоненты $b_i^{(k)}$ вектора смещений, компоненты w_{0i} вектора весов \mathbf{w}_0 и скалярный параметр b_0 , определяются путем ”обучения” заданного набора данных, то есть подгонки модели к набору данных с помощью алгоритма оптимизации. Градиентный спуск (ГС) – это стандартный алгоритм оптимизации, используемый в машинном обучении [78]. Он работает путем движения против градиента с заранее заданной скоростью, контролируемой коэффициентом обучения α , чтобы найти точку экстремума или оптимальные параметры. Однако традиционный градиентный спуск очень легко попадает в локальный экстремум в процессе поиска экстремума. Поэтому для увеличения вероятности нахождения глобального экстремума выбирается стохастический градиентный спуск (СГС) [79] в качестве оптимизатора для обучения нейронной сети. Он работает так же, как и ГС, обновляя параметры модели, за исключением добавления случайности в процесс спуска, что увеличивает вероятность нахождения глобального оптимального решения. Архитектура нейронной сети и инференция модели¹ с одним скрытым слоем

¹Вывод неизвестных данных в модель и вывод результатов через вычисление модели называется инференцией модели в области искусственного интеллекта.

($N = 1$) и n нейронами показаны на рисунке 1.1.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(1)} &= \mathbf{W}^{(1)} \mathbf{x} + \mathbf{b}^{(1)}, \\ \mathbf{y}^{(k)} &= \mathbf{W}^{(k)} f\left(\mathbf{y}^{(k-1)}\right) + \mathbf{b}^{(k)}, k = 2 \dots N \\ \sigma &= \mathbf{w}_0 \cdot f\left(\mathbf{y}^{(N)}\right) + b_0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

В данной диссертационной работе обсуждается модель ИНС с использованием сигмоидной активационной функции (1.20) и линейным регрессионным соотношением (1.21), где \mathbf{W} – матрица весовых коэффициентов, а \mathbf{b} – вектор смещения.

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{1 + e^{-\mathbf{x}}} \quad (1.20)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{W} \mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\varepsilon^p - [\varepsilon^p]_{\min}}{[\varepsilon^p]_{\max} - [\varepsilon^p]_{\min}} \\ x_2 &= \frac{\dot{\varepsilon} - [\dot{\varepsilon}]_{\min}}{[\dot{\varepsilon}]_{\max} - [\dot{\varepsilon}]_{\min}} \\ x_3 &= \frac{T - [T]_{\min}}{[T]_{\max} - [T]_{\min}} \end{aligned} \quad (1.22)$$

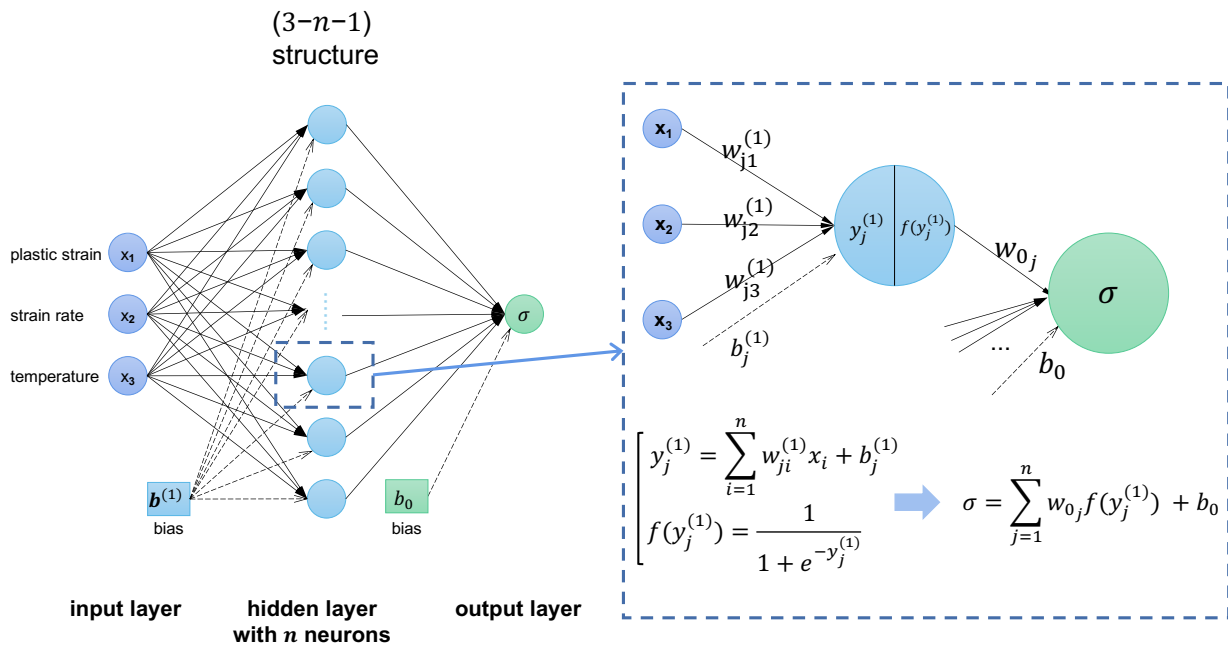


Рис. 1.1: Архитектура модели Нейронной Сети с 3-n-1 структурой. Слева: общая архитектура модели. Справа: детали j -го нейрона и выходного слоя. Три характеристики (x_1, x_2, x_3) содержатся во входном слое. Единственный скрытый слой состоит из n нейронов, каждый из которых включает вектор весовых параметров ($w_{j1}^{(1)}, w_{j2}^{(1)}, w_{j3}^{(1)}$), параметр смещения $b_j^{(1)}$ и функцию активации $f(\cdot)$. В результате весь скрытый слой содержит матрицу весов $\mathbf{W}^{(1)}$ с $n \times 3$ компонентами $w_{ji}^{(1)}$ и вектор смещения $\mathbf{b}^{(1)}$ с n компонентами $b_j^{(1)}$. Наконец, исходные 3 характеристики отображаются в n неявных характеристик $y_j^{(1)}$, которые преобразуются скрытым слоем в одномерный выход σ с использованием вектора весовых параметров \mathbf{w}_0 и параметра смещения b_0 .

Глава 2

Релаксационная модель пластичности и температурно-временное соответствие

Изучение динамических явлений текучести было предметом многочисленных работ [73] [80] [81] [82] [83]. Кэмпбелл вывел интегральный критерий текучести в виде (8), основанный на теории дислокаций Коттрелла и Билби [53]. Однако этот критерий противоречит квазистатическим условиям текучести и критериям разрушения $\sigma(t_c) = \sigma_c$, где σ_c представляет собой статический предел текучести или прочности. Разрешая это противоречие, Петров и Груздков предложили интегральный критерий текучести, который использует параметр инкубационного времени τ , и соответствует как статическим, так и динамическим экспериментальным результатам [8]. Позднее, исходя из подхода инкубационного времени, Петровым была разработана релаксационная модель пластичности, новая модификация которой и соответствующее температурно-временное соответствие обсуждаются и разрабатываются в данной работе.

Результаты, представленные в этой главе, опубликованы в статьях [72] [84] [85].

2.1 Разработка релаксационной модели пластичности

2.1.1 Критерий инкубационного времени для динамической пластичности

Интегральный критерий текучести, предложенный Петровым и его научной группой, выражается следующим образом:

$$I(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \left(\frac{\sigma(s)}{\sigma_y} \right)^\alpha ds \leq 1, \quad (2.1)$$

где τ обозначает инкубационное время (или характерное время релаксации), σ_y – это статический предел текучести, α – безразмерный параметр (обычно $\alpha \geq 1$). Инкубационное время τ характеризует временную или скоростную чувствительность материалов. Критерий (2.1) тесно приближается к условию статической текучести $\sigma(t) \leq \sigma_y$, когда продолжительность нагружения значительно превышает инкубационное время τ . В случае быстрой нагрузки, где длительность нагружения сравнима или меньше инкубационного времени, критерий (2.1) напоминает критерий Кэмпбелла (8). Это преимущество критерия (2.1) позволяет единообразно описывать как квазистатические, так и динамические условия текучести, делая его подходящим для исследования эффекта скорости воздействия, наблюдаемого во многих экспериментах.

Согласно неравенству (2.1), пластический процесс начинается только тогда, когда выполняется условие $I(t_y) = 1$. Для нагружения с постоянной скоростью деформации (т.е. $\sigma(t) = E\dot{\epsilon}tH(t)$, где $H(t)$ – функция Хевисайда), связь между скоростно-зависимым пределом текучести $\sigma_{dy} = \sigma(t_y)$ и скоростью деформации $\dot{\epsilon}$ может быть определена уравнением (2.2), полученным из (2.1) (см. приложение А).

$$\sigma_{dy}^{1+\alpha} - (\sigma_{dy} - E\dot{\epsilon}\tau)^{1+\alpha} H(\sigma_{dy} - E\dot{\epsilon}\tau) = (1 + \alpha)(E\dot{\epsilon}\tau)\sigma_y^\alpha, \quad (2.2)$$

или следующими эквивалентными уравнениями (2.3)

$$\begin{cases} \sigma_{dy}^{1+\alpha} - (\sigma_{dy} - E\dot{\epsilon}\tau)^{1+\alpha} = (1 + \alpha)(E\dot{\epsilon}\tau)\sigma_y^\alpha, & \dot{\epsilon} \leq \frac{\sigma_y(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{E\tau}; \\ \sigma_{dy} = ((1 + \alpha)(E\dot{\epsilon}\tau)\sigma_y^\alpha)^{\frac{1}{1+\alpha}}, & \dot{\epsilon} > \frac{\sigma_y(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{E\tau}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Для ”быстрой” нагрузки, определяемой как $\dot{\epsilon} > \frac{\sigma_y(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{E\tau}$, предел текучести имеет простую и ясную зависимость от скорости деформации, как показано в уравнении (2.3). В случае относительно ”медленной” нагрузки, где $\dot{\epsilon} \leq \frac{\sigma_y(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{E\tau}$, зависимость более сложная и может быть решена с использованием различных численных методов итерации.

Критерий (2.1) обладает несколькими преимуществами: он применим к произвольным профилем нагрузки, обеспечивает единообразное описание как квазистатических, так и динамических условий текучести, и определяет условие текучести на основе ограниченного набора материальных констант (τ, α, σ_y). Более того, он позволяет дальнейшее исследование эффекта скорости воздействия, эффекта зуба текучести и упрочнения при деформации, о которых подробно рассказывается ниже.

2.1.2 Первоначальная релаксационная модель пластичности

Релаксационная модель пластичности (модель РП), впервые представленная Петровым и его группой [69] [70] [71] [86], позволяет прогнозировать нестабильное поведение в диаграмме деформирования. В первоначальной модели РП вводится безразмерная функция релаксации $\gamma(t)$, удовлетворяющая тождеству (2.4), справедливому на пластической стадии ($t \geq t_y$)

$$\frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \left(\frac{\gamma(t)\Sigma(s)}{\sigma_y} \right)^\alpha ds \equiv 1, \quad (2.4)$$

где $\Sigma(t) = E\varepsilon(t)H(t)$ представляет собой упругий предиктор истинного напряжения. Следовательно, $\gamma(t)$ изменяется в интервале $(0, 1]$ и однозначно определяется условием (2.5), выведенным из уравнения (2.4). В выражении (2.5) $I(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t (\Sigma(s)/\sigma_y)^\alpha ds$.

$$\gamma(t) = \begin{cases} 1, & I(t) < 1 \\ I(t)^{-1/\alpha}, & I(t) \geq 1 \end{cases} \quad (2.5)$$

В уравнении (2.5) равенство $\gamma(t) = 1$ соответствует накоплению упругой деформации, а постепенное уменьшение функции релаксации в пределах $0 < \gamma(t) < 1$ обозначает переход материала в стадию пластической деформации. Соотношение между напряжением и деформацией устанавливается выражением (2.6), где β представляет параметр упрочнения ($0 \leq \beta < 1$), а случай $\beta = 0$ соответствует идеальной пластичности.

$$\sigma(t) = \Sigma(t)\gamma(t)^{1-\beta} = E\gamma(t)^{1-\beta}\varepsilon(t). \quad (2.6)$$

В первоначальной модели РП (2.4)-(2.6) предполагается, что все три параметра τ, α, β остаются неизменными на протяжении истории нагружения, завися только от структурных превращений внутри материала. Следовательно, ограниченный набор параметров (τ, α, β) может быть использован для моделирования различных деформационных кривых в широком диапазоне скоростей деформации [87].

Первоначальная модель РП (2.4)-(2.6) было успешно применено для моделирования эффектов скорости воздействия и эффекта зуба текучести [70] [71] [86]. Однако параметр упрочнения β , предполагающийся в виде степени функции релаксации $\gamma(t)$, может ограничивать возможность модели для описания упрочнения, и об этом будет подробнее рассказано в разделе 2.1.3. В то время как

первоначальная модель РП надежно характеризует и прогнозирует поведение деформационных кривых для определенных материалов в пределах диапазона деформации около предела текучести (на начальной стадии пластичности), она не учитывает влияние развития пластической деформации на последующие пластические свойства. Эти аспекты могут объяснять некоторые отклонения, наблюдаемые между модельными описаниями и экспериментальными деформационными кривыми на стадии упрочнения пластического течения. Поэтому требуется модификация первоначальной модели РП.

2.1.3 Концепция модифицированной релаксационной модели пластичности

Динамическая интенсивность напряжений

В данной работе исследуется динамическая интенсивность напряжений, полученная из интегрального динамического критерия текучести (2.1). Для понимания различий и связи между новой динамической интенсивностью напряжений и классической квазистатической интенсивностью касательных напряжений $\bar{\sigma}$ (эквивалентное напряжение Мизеса, заданное в выражении (2.7)), необходимо объяснить интенсивность касательных напряжений Новожилова (ИКН). Новожилов показал, что ИКН представляет собой предельное значение, полученное путем интегрального усреднения (или среднеквадратического значения) касательных напряжений σ_τ по всей сферической поверхности Ω , ограничивающей точку рассмотрения. Это выражено в уравнении (2.8), где r представляет собой радиус сферы, $d\Omega$ обозначает площадь бесконечно малой плоскости на сферической поверхности Ω , а σ_τ представляет собой касательное напряжение в конкретной точке на плоскости $d\Omega$. Дополнительные обсуждения приведены в приложении В. В классической теории пластичности предполагается, что критерий текучести имеет вид

$$\bar{\sigma}(\mathbf{s}) \leq \sigma_y,$$

где \mathbf{s} – девиаторный составляющий тензора напряжений.

$$\bar{\sigma}(\mathbf{s}) = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (2.7)$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{15}{2}} \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Omega} \iint \sigma_\tau^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.8)$$

Вводим функционал $M_\alpha(\sigma, t)$ в форме (2.9), который представляет собой среднее интегральное значение напряжения $\sigma(t)$ во временном пространстве и рассматривается как динамическая интенсивность напряжений¹ в интервале $[t - \tau, t]$.

$$M_\alpha(\sigma, t) = \left(\frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \sigma^\alpha(s) ds \right)^{1/\alpha} \quad (2.9)$$

В более общих случаях критерий текучести предполагается быть сформулированным в следующей форме, аналогичной классическому критерию текучести

$$M_\alpha(\bar{\sigma}(\mathbf{s}), t) \leq \sigma_y \text{ или } \|\bar{\sigma}\|_\alpha \leq \sigma_y. \quad (2.10)$$

Таким образом, критерий (2.1) может быть сформулирован следующим образом: текучесть происходит тогда, когда динамическая интенсивность напряжения в интервале инкубационного времени достигает критического значения.

Функционал $M_\alpha(\sigma, t)$ характеризует интенсивность напряжения вдоль временной оси и рассматривает скоростную чувствительность материалов как проявление временной чувствительности. Скоростная чувствительность относится к реакции поведения материала на изменение скорости деформации, в то время как временная чувствительность связана с реакцией поведения материала на изменение состояний переменных по временной оси. В частности, функционал $M_\alpha(\sigma, t)$ фокусируется на изменении напряженного состояния во временном интервале с постоянной длиной τ . Это означает, что он учитывает не только скорость деформации, но и историю развития напряженного состояния. В испытаниях растяжения или сжатия при ударных нагрузках, обычно предполагается постоянная скорость деформации. В этом особом случае напряженное состояние в основном характеризуется напряжением или скоростью деформации в соответствии с законом Гука, а критерий (2.10) выводит скоростной критерий (2.3).

Модифицированная релаксационная модель пластичности

Вначале рассмотрим одномерную задачу и обсудим структуру модифицированной модели РП. В первоначальной модели РП (ПРП), параметр β используется для представления поведения упрочнения. В модифицированной модели

¹Динамическая интенсивность напряжений также может быть нормой измеримой функции $\sigma(t)$ в пространстве Лебега (L^p пространство), определенной по формуле $M_\alpha(\sigma, t) = \|\sigma\|_\alpha = \left(\int_{t'-1}^{t'} \sigma^\alpha(s') ds' \right)^{1/\alpha}$, $1 \leq \alpha \leq \infty$, где $t' = t/\tau$ и $s' = s/\tau$.

мы вводим функцию упрочнения $\sigma_c(t)$ в тождество (2.4) следующим образом:

$$\frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \left(\frac{\gamma(t)\Sigma(s)}{\sigma_c(t)} \right)^\alpha ds \equiv 1. \quad (2.11)$$

Теперь переформулируем тождество (2.11) с использованием обозначения $M_\alpha(\sigma, t)$ и введем функцию упрочнения $\sigma_c(\varepsilon_p(t))$, затем получаем

$$M_\alpha(\Sigma, t)\gamma(t) \equiv \sigma_c(\varepsilon_p(t)), \quad \forall t \geq t_y, \quad (2.12)$$

где $\sigma_c(\varepsilon_p(t_y)) = \sigma_y$ и $\varepsilon_p(t) = 0, \forall t \leq t_y$. Правило упрочнения Людвига [88], выраженное в уравнении (2.13), может быть одним из вариантов для функции упрочнения $\sigma_c(t)$. Также можно использовать квадратичную интерполяцию для закона упрочнения [89]. Здесь σ_y остается равным значению предела текучести, и ε_p представляет пластическую деформацию, а K и n – параметры упрочнения. Параметр n также известен как показатель упрочнения по деформации.

$$\sigma_c(\varepsilon_p(t)) = \sigma_y + K\varepsilon_p^n(t) \quad (2.13)$$

Согласно тождеству (2.12), функция релаксации $\gamma(t)$ предполагается

$$\gamma(t) = \frac{\sigma_c(\varepsilon_p(t))}{\tilde{\Sigma}(t)}, \quad (2.14)$$

где

$$\tilde{\Sigma}(t) = \begin{cases} \sigma_y, & t < t_y \\ M_\alpha(\Sigma, t), & t \geq t_y. \end{cases}$$

Кроме того, в соответствии с уравнением (2.6), истинное напряжение теперь определяется уравнением (2.15):

$$\sigma(t) = \Sigma(t)\gamma(t) = \Sigma(t) \frac{\sigma_c(\varepsilon_p(t))}{\tilde{\Sigma}(t)} = \sigma_c(\varepsilon_p(t)) \left(\frac{\Sigma(t)}{\tilde{\Sigma}(t)} \right) \quad (2.15)$$

Важной особенностью модифицированной модели является ее способность описывать одновременно как упругие, так и пластические свойства материалов при различных скоростях деформации. В случае упругой деформации ($t < t_y$) очевидно, что $\sigma_c(\varepsilon_p(t)) = \tilde{\Sigma}(t) = \sigma_y$, а затем $\sigma(t) = \Sigma(t) = E\varepsilon(t)$. На стадии пластической деформации можно получить структуру модифицированной модели РП в мультипликативной форме (2.16), которая активно используется в данной работе. Модификация модели РП заключается прежде всего в определении поведения упрочнения. Вместо использования параметра упрочнения β

вводим функцию упрочнения $\sigma_c(\varepsilon_p(t))$ в тождество (2.4) для замены константы текучести σ_y . Функция упрочнения $\sigma_c(\varepsilon_p(t))$ может быть определена по экспериментально измеренной квазистатической диаграмме деформирования, так как в случаях $\dot{\varepsilon}\tau \ll 1$ имеем $M_\alpha(\Sigma, t) \approx \Sigma(t)$ и, следовательно, $\sigma(t) \approx \sigma_c(\varepsilon_p(t))$. Второй множитель $\frac{\Sigma(t)}{M_\alpha(\Sigma, t)}$, или более точно $M_\alpha(\Sigma, t)$, способствует описанию эффектов скорости деформации. Таким образом, модель РП рассматривает скоростную чувствительность как проявление временной чувствительности.

$$\sigma(t) = \sigma_c(\varepsilon_p(t)) \left(\frac{\Sigma(t)}{M_\alpha(\Sigma, t)} \right), \quad \forall t \geq t_y. \quad (2.16)$$

О функции релаксации $\gamma(t)$

В процессе пластической деформирования истинное напряжение σ может быть определено через пластическую деформацию по формуле (2.17), которое использует безразмерную функцию $\gamma(\varepsilon_p)$. Эта функция γ , принимающая значения в интервале $(0, 1]$, характеризует релаксационное поведение материала во время пластической деформирования. Пластическая деформация ε_p может быть найдена уравнением (2.18) с использованием функции упрочнения $\sigma_c(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon})$ (см. уравнение (1.4)). Кроме того, функция релаксации $\gamma(t) = \gamma(\varepsilon_p(t))$ может быть определена с использованием выражения (2.19). Например, в случае мультипликативной функции упрочнения $\sigma_c(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}) = f_1(\varepsilon_p)f_2(\dot{\varepsilon})$, функция релаксации γ при квазистатической скорости деформации $\dot{\varepsilon}_0$ принимает значение $\gamma(\varepsilon_p) = \frac{\sigma_c(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_0)}{\Sigma(\varepsilon)} = \frac{f_1(\varepsilon_p)}{\Sigma(\varepsilon)} = \frac{\sigma_c(\varepsilon_p)}{\Sigma(\varepsilon)}$, где $f_2(\dot{\varepsilon}_0) = 1$. В подходе инкубационного времени вместо непосредственного введения скорости деформации $\dot{\varepsilon}$ рассматривается временной функционал $M_\alpha(\cdot)$, который учитывает инкубационное время или характерное время релаксации τ . Следовательно, функция релаксации $\gamma(t)$ предполагается заданной уравнением (2.20), согласующимся с классической теорией в квазистатическом случае, то есть $\gamma(t) = \frac{\sigma_c(\varepsilon_p(t))}{M_\alpha(\Sigma, t)} \approx \frac{\sigma_c(\varepsilon_p(t))}{\Sigma(t)}$ при $\dot{\varepsilon}\tau = \dot{\varepsilon}_0\tau \ll 1$. Уравнение (2.20) может привести к тождеству, представленному в уравнении (2.12). Следует отметить, что одним из недостатков первоначальной модели РП является то, что функция релаксации $\gamma(t) = \frac{\sigma_y}{M_\alpha(\Sigma, t)}$ в уравнении (2.4) или (2.5) не содержит пластическую деформацию $\varepsilon_p(t)$, что ограничивает ее возможности описания упрочнения в широком диапазоне деформаций.

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p) = E\varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon}\right) = \Sigma(\varepsilon)\gamma(\varepsilon_p) \quad (2.17)$$

$$\sigma = \Sigma(\varepsilon)\gamma(\varepsilon_p) = \sigma_c(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}) \quad (2.18)$$

$$\gamma(t) = \frac{\sigma_c(\varepsilon_p(t), \dot{\varepsilon}(t))}{\Sigma(t)} \quad (2.19)$$

$$\gamma(t) = \frac{\sigma_c(\varepsilon_p(t))}{M_\alpha(\Sigma, t)} \quad (2.20)$$

Уравнение (2.18) может представлять одномерную форму уравнения поверхности текучести (1.4). Аналогично, модифицированная модель РП (2.12), (2.15) также может быть получена из уравнения поверхности текучести $f(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon_p, t) \equiv 0$ в рамках подхода инкубационного времени, а не эмпирически выведена в мультипликативной форме $\sigma = f_1(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon})f_2(\varepsilon_p, T)$. Интенсивность касательных напряжений $\bar{\sigma}(t)$, задаваемая тензором напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и используемая в уравнение (1.4), можно рассматривать как произведение двух функций $\bar{\sigma}(t) = \Sigma(t)\gamma(t)$, где $\Sigma(t)$ – предиктор напряжения, а $\gamma(t)$ – функция релаксации, принимающая значения в диапазоне $(0, 1]$. Затем, следуя уравнению (2.20), мы можем ожидать уравнения $f(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon_p, t) = M_\alpha(\Sigma, t)\gamma(t) - \sigma_c(\varepsilon_p(t)) \equiv 0$ для определения поверхности текучести, а тождество (2.12) характеризует пластическое течение.

В последующих разделах этой работы наше внимание сосредоточено на реализации и исследовании модифицированной модели РП. В частности, мы изучаем разные варианты этой модели, рассматривая различные версии функции упрочнения $\sigma_c(\varepsilon_p(t))$ и предиктора напряжения $\Sigma(t)$. Для простоты и ясности в наших обсуждениях будем в основном ссылаться на модифицированную модель РП (2.16) как ”модель РП”. Важно отметить, что всякий раз, когда упоминается первоначальная модель РП (2.6), будем обозначать ее как модель ПРП.

Упрощенный вариант релаксационной модели пластичности

Как известно, скорость деформации почти не изменяется в экспериментах стержня Гопкинсона-Кольского. Поэтому мы можем получить упрощенный вариант модели РП, предполагая линейный предиктор напряжения $\Sigma(t) = E\varepsilon(t) = E\dot{\varepsilon}tH(t)$. Затем функционал $M_\alpha(\Sigma, t)$ может быть вычислен следующим обра-

ЗОМ:

$$\begin{aligned}
M_\alpha(\Sigma, t) &= \left(\frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t (E\dot{\varepsilon})^\alpha H(s) ds \right)^{1/\alpha} \\
&= \frac{E\dot{\varepsilon}}{\tau^{1/\alpha}} \left(\frac{s^{1+\alpha} H(s)}{1+\alpha} \Big|_{t-\tau}^t \right)^{1/\alpha} \\
&= \frac{E\dot{\varepsilon}}{\tau^{1/\alpha}} \left(\frac{t^{1+\alpha} - (t-\tau)^{1+\alpha} H(t-\tau)}{1+\alpha} \right)^{1/\alpha} \\
&= E \left(\frac{\varepsilon^{1+\alpha} - (\varepsilon - \dot{\varepsilon}\tau)^{1+\alpha} H(\varepsilon - \dot{\varepsilon}\tau)}{\dot{\varepsilon}\tau(1+\alpha)} \right)^{1/\alpha}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Это приводит к скоростно-зависимому варианту модели РП (2.22) или альтернативной версии (2.23), которая также подтверждает скоростную чувствительность как проявление временной чувствительности материалов. Функция $g(t)$ обозначает множитель $\frac{\Sigma(t)}{M_\alpha(\Sigma, t)}$.

$$\sigma(t) = \sigma_c(\varepsilon_p, T) g(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = \sigma_c(\varepsilon_p, T) \left(\frac{\dot{\varepsilon}\tau(1+\alpha)\varepsilon^\alpha}{\varepsilon^{1+\alpha} - (\varepsilon - \dot{\varepsilon}\tau)^{1+\alpha} H(\varepsilon - \dot{\varepsilon}\tau)} \right)^{1/\alpha} \tag{2.22}$$

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_c(\varepsilon_p, T) \left(\frac{\dot{\varepsilon}\tau(1+\alpha)}{\varepsilon} \right)^{1/\alpha}, & \frac{\varepsilon}{\dot{\varepsilon}\tau} \leq 1, \\ \sigma_c(\varepsilon_p, T) \left(\frac{\dot{\varepsilon}\tau(1+\alpha)\varepsilon^\alpha}{\varepsilon^{1+\alpha} - (\varepsilon - \dot{\varepsilon}\tau)^{1+\alpha}} \right)^{1/\alpha}, & \frac{\varepsilon}{\dot{\varepsilon}\tau} > 1. \end{cases} \tag{2.23}$$

При относительно низких скоростях деформации $\dot{\varepsilon}\tau \ll 1$ или $\xi = \frac{\varepsilon}{\dot{\varepsilon}\tau} \gg 1$, имеем

$$\begin{aligned}
g(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) &= g(\xi) = \left(\frac{1+\alpha}{\xi - (\xi-1) \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)^\alpha} \right)^{1/\alpha} \\
&= \left(\frac{1+\alpha}{(1+\alpha) - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\xi^{-1} + \frac{(\alpha-1)\alpha(\alpha+1)}{6}\xi^{-2} - \frac{(\alpha-2)(\alpha-1)\alpha(\alpha+1)}{24}\xi^{-3} + o(\xi^{-4})} \right)^{1/\alpha} \\
&\approx 1.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Это подтверждает соответствие между упрощенным вариантом модели РП и классической квазистатической моделью, т.е. $\sigma(t) \approx \sigma_c(\varepsilon_p, T)$ в условиях квазистатической нагрузки.

Инкрементный вариант релаксационной модели пластичности

Модель РП (2.16) может иметь различные варианты, выбирая разные функции упрочнения $\sigma_c(\varepsilon_p(t))$ и форму предиктора напряжения $\Sigma(t)$. Введя ин-

крементный вариант предиктора напряжения $\Sigma(t)$, определенный в уравнении (2.25), можно получить инкрементный вариант модели РП (модель ИРП), который учитывает развитие истинного напряжения.

Рассмотрим последовательность по времени $\{t_k\}$, где $t_k - t_{k-1} = h$ и $t_0 = t_y$. Здесь h представляет собой длину временного шага, а t_y обозначает начальное время пластического процесса ($M_\alpha(\Sigma, t_y) = \sigma_y$). Во время упругого деформирования $\Sigma(t)$ остается упругим напряжением $\Sigma(t) = E\varepsilon(t)$. Однако во время пластической деформации ($t \geq t_0 = t_y$), $\Sigma(t)$ зависит от временного интервала $[t_k, t_{k+1}]$ определяется следующим образом:

$$\Sigma(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma^{(k)}(t) = \begin{cases} \sigma(t), & t \leq t_k \\ \sigma(t_k) + E(\varepsilon(t) - \varepsilon(t_k)), & t \in (t_k, t_{k+1}] \end{cases}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.25)$$

Графическое представление функции $\Sigma(t)$ приведено на рисунке 2.1. Инкрементный вариант предиктора напряжения $\Sigma(t)$ совпадает с истинным напряжением $\sigma(t)$ в предыдущих временных интервалах и предлагает упругий прирост в последнем временном интервале $[t_k, t_{k+1}]$, так как $\Sigma(t) - \Sigma(t_k) = \Sigma(t) - \sigma(t_k) = E(\varepsilon(t) - \varepsilon(t_k))$. Истинное напряжение в момент времени t_{k+1} , например, может быть получено по формуле $\sigma(t_{k+1}) = \Sigma^{(k+1)}(t_{k+1}) \cdot \gamma(t_{k+1})$, как показано на рисунке 2.1.

Исходя из многочисленных экспериментальных данных для различных материалов при динамической нагрузке было обнаружено, что отношение $m = t_y/h$ может быть постоянным для большинства металлов. Безразмерный параметр m также должен удовлетворять логическому соотношению $h \leq \tau$. В случае квазистатической нагрузки требуется $h = \tau$. Схема расчета для модели ИРП иллюстрируется на рисунке 2.2.

Возможные сценарии модели ИРП

Модель ИРП позволяет описывать как монотонное, так и немонотонное поведение упругопластической деформации благодаря множителю $\Sigma(t)/M_\alpha(\Sigma, t)$. Поскольку скорость деформации практически не меняется при большинстве одноосных растяжениях и сжатиях, здесь обсуждение продолжается в случае постоянной скорости деформации $\varepsilon(t) = \dot{\varepsilon}tH(t)$. Рассматривается монотонная диаграмма текучести в условиях квазистатического состояния. В квази-

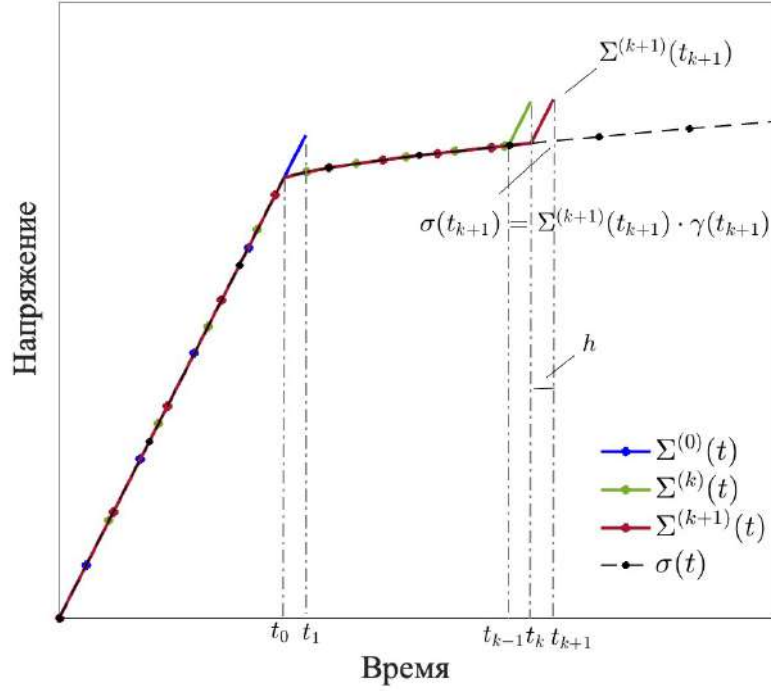


Рис. 2.1: Временная зависимость предиктора напряжения $\Sigma(t)$.

статическом случае (точнее говоря, $\dot{\epsilon}\tau \ll 1$), выше было отмечено, что нет существенной разницы между значением функционала $M_\alpha(\Sigma, t)$ и функцией $\Sigma(t)$. Таким образом, скоростно-зависимый множитель $\Sigma(t)/M_\alpha(\Sigma, t)$ близок к 1, а закон упрочнения Людвига играет решающую роль, что соответствует классической модели пластичности и дает монотонную деформационную кривую. Модель ИРП также может справиться с немонотонной диаграммой деформирования при динамическом или ударном воздействии. Рассмотрим самый простой случай, когда $\dot{\epsilon}\tau \geq \frac{(1+\alpha)^{1/\alpha}\sigma_y}{E}$, то есть $t_y \leq \tau$. Согласно уравнению (2.26), следующее неравенство (2.27) выводит отношение $\Sigma(t_y)/M_\alpha(\Sigma, t_y) > \Sigma(t_y + h)/M_\alpha(\Sigma, t_y + h)$, что подтверждает возможность описания эффекта зуба текучности. Неравенство $\dot{\epsilon}\tau \geq \frac{(1+\alpha)^{1/\alpha}\sigma_y}{E}$ не считается необходимым условием для возникновения эффекта зуба текучности. Оно лишь упрощает теоретический анализ немонотонного поведения множителя $\Sigma(t)/M_\alpha(\Sigma, t)$.

$$M_\alpha(\Sigma, t_y) = \left(\frac{1}{\tau} \int_0^{t_y} (E\dot{\epsilon}s)^\alpha ds \right)^{1/\alpha} = \left(\frac{(E\dot{\epsilon})^\alpha t_y^{1+\alpha}}{\tau^{1+\alpha}} \right)^{1/\alpha}, \quad (2.26)$$

$$M_\alpha(\Sigma, t_y + h) = \left(\frac{(E\dot{\epsilon})^\alpha (t_y + h)^{1+\alpha}}{\tau^{1+\alpha}} \right)^{1/\alpha}$$

$$(t_y + h)^{1+\alpha} t_y^\alpha > t_y^{1+\alpha} (t_y + h)^\alpha \quad (2.27)$$

Что касается модели ДжК (1.6), ясно, что она показывает только монотонные



Рис. 2.2: Расчетная схема модели ИРП

кривые. Более того, из-за низкой скорости роста логарифмической функции $\ln\left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)$ иногда модель ДжК не позволяет различить уровни напряжения, полученные при среднескоростной и высокоскоростной нагрузках.

2.2 Температурно-временное соответствие

В модифицированной модели РП (2.16) эффекты скорости воздействия в основном характеризуются функционалом $M_\alpha(\Sigma, t_y)$ через параметр времени релаксации τ . Поскольку процесс релаксации очевидно зависит от температуры, его время релаксации должно зависеть от температуры. В данном разделе исследуется одна из основных тем – температурно-временное соответствие, т.е. зависимость между температурой и инкубационным временем, и предлагается методика его исследования. Введение коэффициента относительных напряжений позволяет анализировать тенденции температурно-временного соответствия. Предлагается возможное объяснение различных феноменологических соотношений между температурой и инкубационным временем, предложенных ранее, которое далее обсуждается в разделе 4.2. Кроме того, исследуется пригодность мультипликативных моделей $\sigma = f_1(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon})f_2(\varepsilon_p, T)$ в широком диапазоне температур и скоростей деформации.

2.2.1 Параметры τ и α

Понимание того, как параметры τ и α влияют на поведение материалов при различных термомеханических условиях, является ключевым для точного моделирования термомеханической реакции рассматриваемых материалов. Выражение (2.3) представляет упрощенное математическое соотношение между пределом текучести и двумя параметрами τ и α . Тем не менее, графическое представление диаграмм деформирования на рисунках 2.3 (а) и (б) прямо показывает способность τ и α в описании эффекта скорости воздействия. В этих примерах используется модель ИРП для моделирования диаграмм деформирования на рисунках 2.3 (а) и (б) с различными значениями параметров τ и α , где предполагается постоянная скорость деформации, т.е. $\varepsilon(t) = \dot{\varepsilon}t$. $\dot{\varepsilon}_0$ представляет квазистатическую скорость деформации, и напряжение $\sigma(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_0)$, равное $\sigma_c(\varepsilon_p(t))$, считается отсчетным. В большинстве случаев параметры τ и α почти не влияют на напряжение при квазистатической скорости деформации

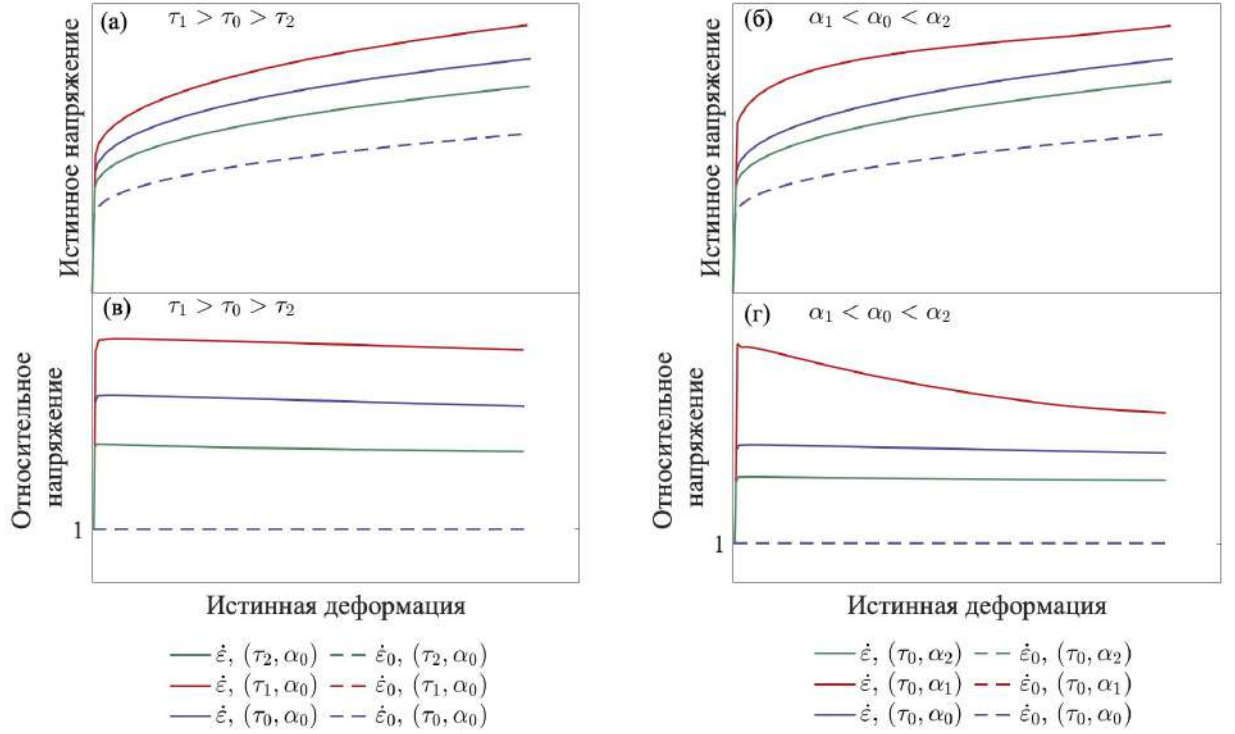


Рис. 2.3: Диаграммы деформирования, рассчитанные с использованием модели ИРП (2.16), (2.25) и соответствующие кривые относительных напряжений $\sigma(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon})/\sigma(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_0)$ при различных скоростях деформации и значениях параметров τ и α . На (а) и (в) параметры τ_0, τ_1 и τ_2 удовлетворяют соотношению $\tau_1 > \tau_0 > \tau_2$, в то время как на (б) и (г) параметры α_0, α_1 и α_2 удовлетворяют условию $\alpha_1 < \alpha_0 < \alpha_2$. Деформационные кривые при отсчетной скорости деформации $\dot{\varepsilon}_0$ изображены пунктирными линиями, а кривые при более высокой скорости деформации $\dot{\varepsilon}$ обозначены сплошными линиями.

$\dot{\varepsilon}_0$ [84], как показано на рисунках 2.3 (а) и (б), где пунктирные кривые практически совпадают. На рисунках 2.3 (в) и (г) продемонстрированы относительные напряжения, т.е. $\sigma(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon})/\sigma(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_0)$, при различных скоростях деформации и значениях τ и α .

Показано на рисунках 2.3 (а) и (б), что при фиксированных значениях τ и α увеличение скорости деформации ($\dot{\varepsilon} > \dot{\varepsilon}_0$) приводит к повышенному уровню напряжения; при фиксированной скорости деформации $\dot{\varepsilon}$ уменьшение τ при фиксированном α или увеличение α при фиксированном τ приводит к снижению значения напряжения. Более важно отметить, что параметры τ и α фактически влияют на относительное соотношение значения напряжения $\sigma(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon})$ к отсчетному напряжению $\sigma(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_0)$, т.е. относительное напряжение, которое также подробно обсуждается в подразделах 2.2.2 и 2.2.3. Таким образом, можно

заклучить, что уменьшение τ при фиксированном α или увеличение α при фиксированном τ приводит к уменьшению значения относительного напряжения при фиксированной скорости деформации.

2.2.2 Температурная зависимость параметра τ и/или α

Экспериментально наблюдается, что повышение начальной температуры T_0 материалов обычно приводит к релаксации напряжения, то есть к термическому разупрочнению. Кроме того, при высоких скоростях нагружения пластическая деформация сопровождается адиабатическим повышением температуры. Таким образом, понимание термического разупрочнения материалов при различных условиях нагружения важно для их моделирования. Разумно ожидать, что функция релаксации (2.20) зависит от температуры, т.е. $\gamma(T, t) = \frac{\sigma_c(\varepsilon_p(t), T(t))}{M_\alpha(\Sigma, T, t)}$, поскольку термическое разупрочнение приводит к релаксации напряжения. Это означает, что функция упрочнения $\sigma_c(\varepsilon_p(t), T(t))$ и/или динамическая интенсивность напряжения $M_\alpha(\Sigma, T, t)$ должны зависеть от температуры. Следовательно, модифицированная модель РП (2.16) ожидается иметь следующий вид:

$$\sigma(t) = \sigma_c(\varepsilon_p(t), T(t)) \left(\frac{\Sigma(t)}{M_\alpha(\Sigma, T, t)} \right), \forall t \geq t_y. \quad (2.28)$$

Функция упрочнения $\sigma_c(\varepsilon_p(t), T(t))$ (или $\sigma_c(\varepsilon_p, T)$) может принимать различные формы в зависимости от квазистатического поведения испытываемых материалов при разных температурах, например, известные формы (2.29) и (2.30). Здесь A, B_0, B_1, n_0, n_1 и β_1 – параметры модели; T_m – температура плавления, а T_r – комнатная температура.

$$\sigma_c(\varepsilon_p, T) = (A + B_0 \varepsilon_p^{n_0}) \left(1 - \left(\frac{T - T_r}{T_m - T_r} \right)^{n_1} \right) \quad (2.29)$$

$$\sigma_c(\varepsilon_p, T) = A + B_0 \varepsilon_p^{n_0} + B_1 \exp(-\beta_1 T) \quad (2.30)$$

Динамическая интенсивность напряжения $M_\alpha(\cdot)$ также зависит от температуры. Согласно дислокационной теории Коттрелла и Билби, Кэмпбелл вывел интегральный критерий текучести [54]. В его критерии параметр α является зависимым от температуры и определяется выражением (2.35), где n – постоянная модели, а k – постоянная Больцмана. Груздьков и Петров [9] представили зависимость инкубационного времени от температуры в выражении (2.31), предполагая, что параметр α является постоянным, а инкубационное время

обратно пропорционально средней скорости дислокаций, предложенной Джонсоном и Гилманом [90]. Селютиной [10] было предложено другое соотношение между инкубационным временем и температурой (2.33). В данной работе мы рассмотрим эти зависимости вместе с двумя дополнительными феноменологическими зависимостями (2.32) и (2.34), чтобы проанализировать, почему используются различные зависимости и как определить температурно-временное соответствие для разных материалов. Результаты на рисунках 2.3 (а) и (б) подтверждают возможную зависимость τ и/или параметра α от температуры. С другой стороны, предположение, что только один из них зависит от температуры, удобнее при численном моделировании.

$$\tau = \tau_0 \exp\left(\frac{\beta_0}{T}\right), \alpha = \text{constant}. \quad (2.31)$$

$$\tau = \tau_0 \exp(-\beta_0 T), \alpha = \text{constant}. \quad (2.32)$$

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \left(\frac{T - Tr}{Tm - Tr}\right)^{\beta_0}\right), \alpha = \text{constant}. \quad (2.33)$$

$$\tau = \tau_0 \left(\frac{Tm - T}{Tm - Tr}\right)^{\beta_0}, \alpha = \text{constant}. \quad (2.34)$$

Инкубационное время является характерным временем релаксационного процесса микроскопических событий. Разупрочнение материалов, как релаксационный процесс, существенно зависит от температуры. При повышении температуры разупрочнение становится более заметным, что приводит к снижению его характерного времени. Математически соответствие между характерным временем релаксации и температурой можно описать зависимостью инкубационного времени τ от температуры. Кроме того, для сравнения также рассматриваются следующие зависимости параметра α от температуры.

$$\alpha = (nkT)^{-1}, \tau = \text{constant}. \quad (2.35)$$

$$\alpha = \alpha_0 \exp(\beta_0 T), \tau = \text{constant}. \quad (2.36)$$

$$\alpha = \alpha_0 \left(\frac{Tm - Tr}{Tm - T}\right)^{\beta_0}, \tau = \text{constant}. \quad (2.37)$$

Как было заключено в разделе 2.2.1, уменьшение значения τ или увеличение значения α приводит к более низкому уровню напряжения, что соответствует разупрочнению (или релаксации) напряжения. Однако, согласно уравнению (2.28), значение отсчетного напряжения (при отсчетной скорости деформации $\dot{\varepsilon}_0$) $\sigma_c(\varepsilon_p, T)$ также существенно влияет на значение напряжения. Уравнение (2.28) позволяет технически моделировать снижение напряжения при повышенной температуре, даже если значения τ и α постоянны, так как отсчетное напряжение $\sigma_c(\varepsilon_p, T)$ уменьшается с увеличением температуры (см. выражения (2.29) и (2.30)). Однако следует отметить, что параметры τ и α влияют на относительное напряжение $\sigma(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}, T)/\sigma(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_0, T)$, как показано на рисунках 2.3 (в) и (г). Таким образом, зависимый от температуры параметр τ или α должен отражать изменение относительных напряжений при различных температурах, которое характеризуется коэффициентом относительных напряжений (КОН) $\frac{\sigma(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}, T)}{\sigma(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_0, T)}$. В широком диапазоне температур КОН обычно уменьшается с увеличением температуры для многих материалов, хотя иногда появляется немонокотонная температурная зависимость. Результаты работы с КОН для сталей HSLA-65 и композитов на основе вольфрама обсуждаются далее в подразделе 2.2.3. Различные зависимости τ и α от температуры, приведенные в выражениях (2.31)–(2.37), рассматриваются в разделах 2.2.3, 2.2.4 и 4.2.

2.2.3 Коэффициент относительных напряжений для стали HSLA-65 и композита на основе вольфрама

В работе Немат-Насера и Го [14] было исследовано термомеханическое поведение стали HSLA-65 при широком диапазоне скоростей деформации и температур. Температурная зависимость истинного напряжения при разных скоростях деформации и истинной деформации 10%, 15% и 20% показана на рисунках 2.4 (а), (в) и (д), а рисунки 2.4 (б), (г) и (е) демонстрируют соответствующую температурную зависимость КОН $\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T)/\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}_0, T)$. Отсчетная скорость деформации $\dot{\varepsilon}_0$ была принята равной 0.001 c^{-1} . Символы на графиках представляют экспериментальные данные из работы [14], а штрихпунктирные кривые приближенно отображают экспериментальные данные с использованием алгоритма сплайна, показывая тенденцию их изменения с увеличением температуры. Результаты свидетельствуют о том, что механическое поведение стали HSLA-65 при низких скоростях нагружения $\dot{\varepsilon} = 0.001 \text{ c}^{-1}, 0.1 \text{ c}^{-1}$ не зависит от

температуры при температурах 296–700 К, в то время как кривые при высоких скоростях нагружения чувствительны к температуре в этом диапазоне температур. Немат-Насер и Го предполагают, что температурно-нечувствительный диапазон в случае высокоскоростных нагрузок может сместиться до еще более высоких температур из-за динамического старения материала. Некоторые аномальные реакции материала, вызванные динамическим старением деформации, требуют дополнительного внимания и не обсуждаются в данной диссертации. Эти реакции включают необычное поведение истинного напряжения при скоростях деформации 0.1 с^{-1} , то есть напряжение при температуре 400–600 К ниже, чем при более низкой скорости деформации 0.001 с^{-1} , также включают аномальное поведение истинного напряжения при температурах выше 700 К, то есть напряжение при скорости деформации 3000 с^{-1} увеличивается с повышением температуры. Следовательно, случаи при скорости деформации 0.1 с^{-1} и случаи при температурах выше 700 К не рассматриваются.

В работе изучены КОН при высоких скоростях деформации 3000 с^{-1} и 8500 с^{-1} и температурах до 700 К на рисунках 2.4 (б), (г) и (е). Следует отметить, что значения левых и правых концов кривых при высоких скоростях деформации больше начальных температур 77 К и 700 К, при которых были протестированы образцы. Это объясняется интенсивным адиабатическим повышением температуры, обсуждаемым в разделе 1.1. При ударной нагрузке окончательные температуры испытуемых образцов, изначально протестированных при температурах 77 К и 700 К, увеличились до более чем 105 К и 710 К соответственно при истинной деформации 10%. Результаты на рисунках 2.4 показывают, что КОН зависят не только от скорости деформации, но также от температуры. В широком диапазоне температур $T \in (250 \text{ К}, 600 \text{ К})$ КОН убывает с увеличением температуры, в то время как в других диапазонах температур они могут слегка возрасть. Незначительный рост КОН при более высоких температурах может быть связан с аномальным увеличением напряжений при отсчетной скорости деформации и температурах 400–650 К. Это аномальное поведение может привести к заметному падению КОН в этом диапазоне температур, что в свою очередь ”вызывает” небольшое увеличение КОН при температурах выше 650 К. КОН при более низких температурах также немного возрастают. Однако для композита на основе вольфрама здесь указанные аномальные явления не наблюдаются в широком диапазоне температур.

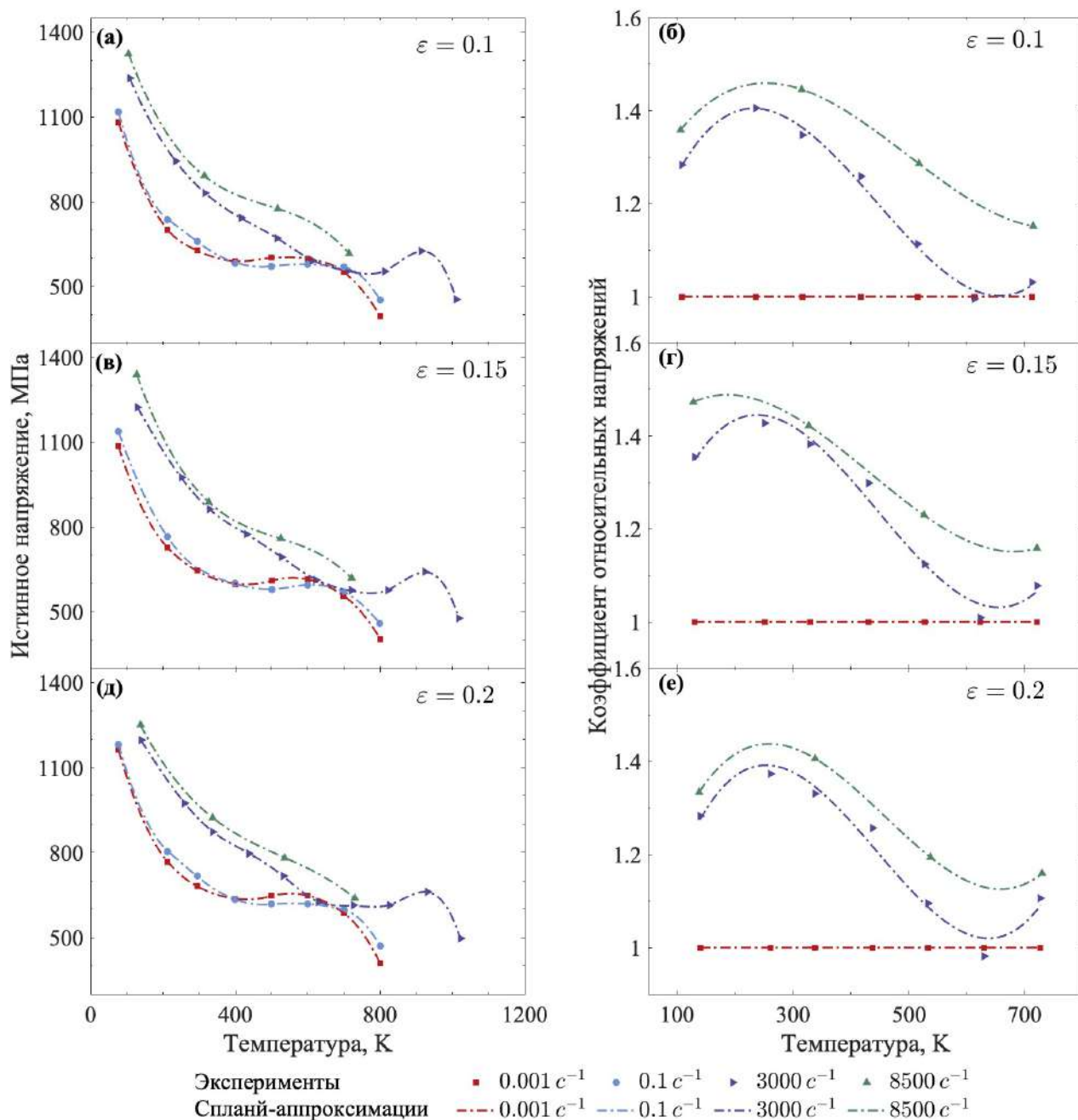


Рис. 2.4: Влияние скоростей деформации и температур на истинное напряжение $\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T)$ при истинных деформациях стали HSLA-65, равных 10%, 15% и 20%, представлено на (а), (в) и (д), соответственно. Символы являются экспериментальными данными, взятыми из работы [14]. Штрих-точечные линии – кривые, аппроксимированные методом сплайн. Соответствующая зависимость коэффициента относительных напряжений $\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T)/\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}_0, T)$ от температуры при истинных деформациях, равных 10%, 15% и 20%, показана на (б), (г) и (е), соответственно. Отсчетная скорость деформации полагается $\dot{\varepsilon}_0 = 0.001 \text{ c}^{-1}$.

Ху и Huang [16] провели эксперименты на композите на основе вольфрама с составом 93W–4.9Ni–2.1Fe при широком диапазоне температур и скоростей деформации. На рисунках 2.5 (а), (в) и (д) показана зависимость температуры от истинного напряжения при разных скоростях деформации и пластической деформации 3%, 5% и 8%, соответственно. Соответствующим образом на рисунках 2.5 (б), (г) и (е) отображается зависимость КОН $\sigma(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}, T)/\sigma(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_0, T)$ от температуры, где отсчетная скорость деформации $\dot{\varepsilon}_0$ равна 0.001 c^{-1} . Символы на рисунках 2.5 представляют экспериментальные данные из работы [16], а штрихпунктирные кривые приближенно отображают экспериментальные данные с использованием алгоритма сплайна, демонстрируя их тенденцию с увеличением температуры. Подобно выводам, сделанным для стали HSLA-65, КОН при низких скоростях нагружения менее чувствителен к температуре, чем при высоких скоростях нагружения. Как предположено Немат-Насер и Го [14], можно ожидать, что температурно-нечувствительный диапазон для материалов в условиях динамической нагрузки может сместиться до температур выше тех, которые при статической нагрузке. Результаты свидетельствуют о том, что несмотря на особую точку при скорости деформации 200 c^{-1} и комнатной температуре, КОН при разных скоростях деформации обычно монотонно убывают по оси температуры. Особый случай при скорости деформации 200 c^{-1} будет особенно обсуждено в разделе 4.2.5.

Как было заключено в подразделе 2.2.2, уменьшение τ при фиксированном α или увеличение α при фиксированном τ приводит к уменьшению значения КОН при фиксированной скорости деформации. Соотношения (2.31)–(2.34) и соотношения (2.36)–(2.37) согласуются с наблюдаемыми фактами и их сравнение обсуждается в разделе 4.2. Соотношение (2.35) предполагает отрицательную корреляцию между α и температурой и может быть полезно в некоторых диапазонах температур, таких как температуры выше 600 К для стали HSLA-65. В целом, при температурах выше комнатной КОН испытываемых материалов при разных скоростях деформации обычно показывают монотонное уменьшение с увеличением температуры. Это означает, что повышение температуры приводит к уменьшению τ или увеличению α . Однако возможны некоторые особые случаи немонотонного поведения из-за, например, динамического старения деформации, и может потребоваться немонотонная связь между τ (или α) и температурой. Тем не менее, в этой работе мы сосредоточимся на простых

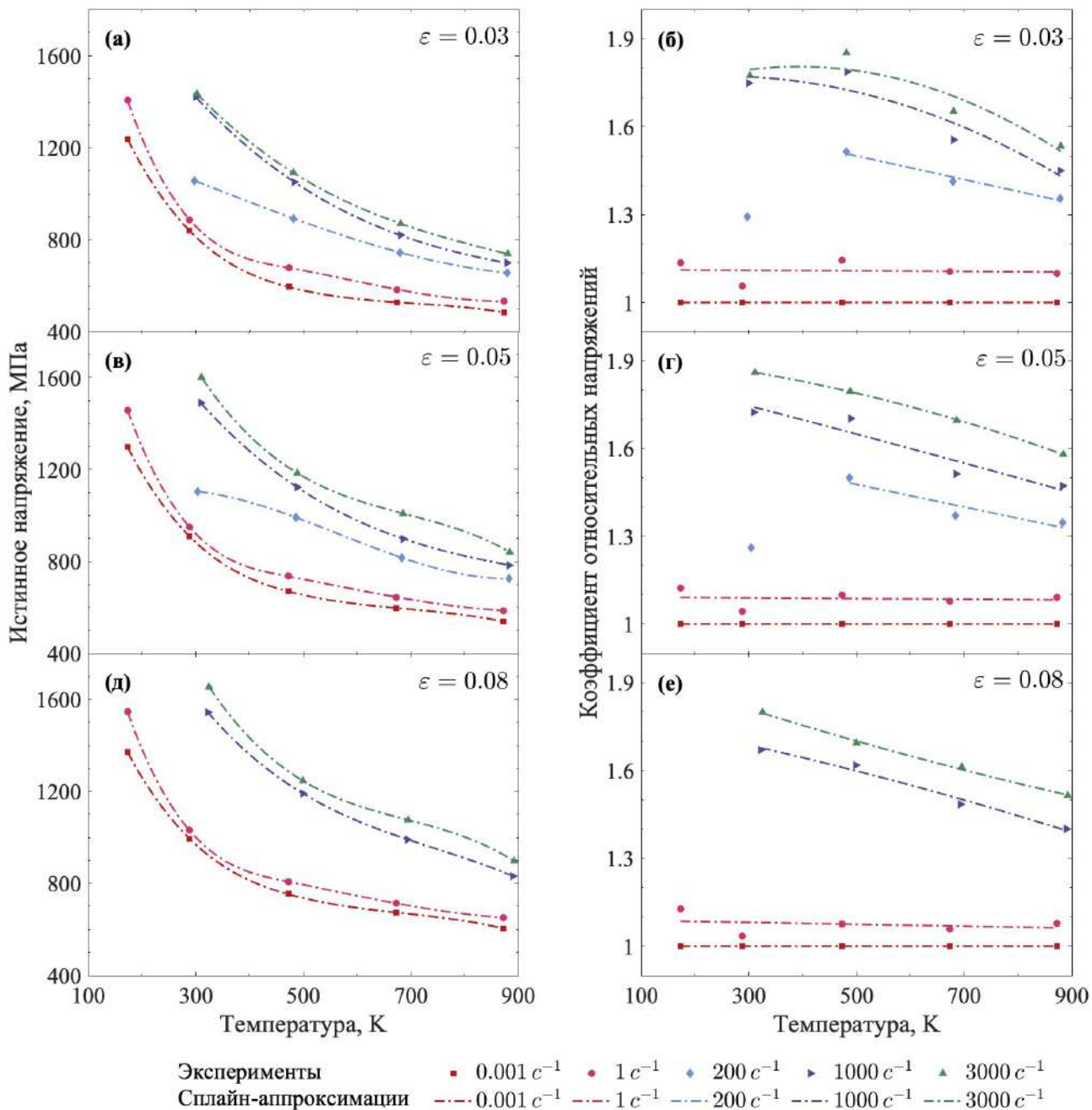


Рис. 2.5: Влияние скоростей деформации и температур на истинное напряжение $\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T)$ при деформациях композита на основе вольфрама 93W–4.9Ni–2.1Fe, равных 3%, 5% and 8%, представлено на (а), (в) и (д), соответственно. Символы являются экспериментальными данными, взятыми из работы [16]. Штрих-точечные линии – кривые, аппроксимированные методом сплайн. Соответствующая зависимость коэффициента относительных напряжений $\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T)/\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}_0, T)$ от температуры при истинных деформациях, равных 3%, 5% and 8%, показана на (б), (г) и (е), соответственно. Отсчетная скорость деформации полагается $\dot{\varepsilon}_0 = 0.001 \text{ c}^{-1}$.

МОНОТОННЫХ СВЯЗЯХ.

Поведение КОН при разных температурах указывает на то, что может быть неудобно моделировать эффект скорости деформации и явление термического разупрочнения отдельно с использованием специальных множителей, зависящих от скорости деформации или температуры, в широком диапазоне температур. Другими словами, по крайней мере для рассматриваемых здесь материалов модель для описания диаграммы деформирования не может быть записана как $\sigma = f_1(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon})f_2(\varepsilon_p, T)$. Широко используемая модель Джонсона-Кука (ЖК) (1.6) состоит из трех множителей, соответствующих упрочнению, эффекту скорости воздействия и термическому разупрочнению. Она предполагает независимый от температуры КОН следующего вида

$$\frac{\sigma(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}, T)}{\sigma(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_0, T)} = 1 + C \ln \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right),$$

что не соответствует наблюдаемому поведению КОН при анализе существующих экспериментальных фактов. Аналогично, некоторые модификации модели ДжК [21] [22] [23] [25], показанные в выражениях (2.38), также не могут быть подходящими для моделирования в широком диапазоне температур. Эти модели следуют соотношению $\sigma = f_1(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon})f_2(\varepsilon_p, T)$, которое получено из прямого эмпирического подхода и приводит к независимому от температуры КОН. В этих моделях динамические определяющие соотношения обычно строятся путем прямой экстраполяции статических представлений в динамические случаи с использованием понятий, включенных в известную статическую формулу. Тем не менее, они все еще очень удобны для инженерных задач, где температура изменяется незначительно. С другой стороны, модифицированная модель РП следует соотношению $\sigma = f(\varepsilon_p, T, t)$, полученному из подхода с инкубационным временем, и рассматривает скоростную чувствительность как проявление временной чувствительности материалов.

$$\begin{aligned} \sigma &= (A + B\varepsilon_p^n) \exp \left(C_0 \ln \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right) \left(1 - \left(\frac{T - T_r}{T_m - T_r} \right)^m \right), \\ \sigma &= (A + B\varepsilon_p^n) \left[1 + C_1 + C_2 \sin \left(\frac{\ln \dot{\varepsilon} - C_3}{C_4} \pi \right) \ln \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right] \left(1 - \left(\frac{T - T_r}{T_m - T_r} \right)^m \right), \\ \sigma &= (A + B_1\varepsilon_p + B_2\varepsilon_p^2 + B_3\varepsilon_p^3) \left[1 + (C_1 + C_2\varepsilon_p) \ln \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right] \left(1 - \left(\frac{T - T_r}{T_m - T_r} \right)^{m_1 + m_2\varepsilon_p} \right). \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\sigma(t) = (A + B_0 \varepsilon_p^{n_0}) \left(\frac{\Sigma(t)}{M_\alpha(\Sigma, T, t)} \right) \left(1 - \left(\frac{T - T_r}{T_m - T_r} \right)^{n_1} \right), \quad \forall t \geq t_y. \quad (2.39)$$

Модифицированная релаксационная модель пластичности (2.28) может быть переформулирована в выражении (2.39), близко напоминающем известную модель Джонсона-Кука по структуре, если функция упрочнения $\sigma_c(\varepsilon_p(t), T(t))$ принимает форму (2.29). Помимо этого сходства, модель (2.39) достаточно отличается от модели ДжК. "Скоростной-зависимый" множитель модели (2.39), представленный как $\Sigma(t)/M_\alpha(\Sigma, T, t)$, является функцией времени и не включает в себя явную зависимость от скорости деформации. В то же время модель ДжК аппроксимирует скоростно-зависимое поведение с помощью аналитической логарифмической функции от скорости деформации, которая основана на эмпирическом анализе. Это прямой эмпирический подход, удобный для численных моделирований, таких как конечно-элементные моделирования, но имеющих заметное ограничение. Этот подход дает однообразное поведение модели. Он ограничен в описании немонотонного напряжено-деформационного поведения, аномального упрочнения и других сложных эффектов. Чтобы преодолеть эти ограничения, в модель ДжК (2.38) должны быть введены новые дополнительные члены, или логарифмическая функция должна быть заменена другими эмпирическими функциями, зависящими от скорости деформации. В отличие от этого, модифицированная релаксационная модель пластичности (2.28) основана на подходе инкубационного времени. Множитель $\Sigma(t)/M_\alpha(\Sigma, T, t)$ отражает не только скоростно-зависимое поведение материалов, но и температурно-зависимую природу КОН.

2.2.4 Определение параметров τ и α

Функция упрочнения $\sigma_c(\varepsilon_p(t), T(t))$ и связанные с ней параметры должны быть определены с использованием квазистатических диаграмм деформирования. Хотя инкубационное время τ имеет физическую основу [69, 71], в данной работе мы рассматриваем его как параметр модели (феноменологический параметр). Параметры τ и α при конкретных температурах должны быть установлены путем подгонки динамических диаграмм. Обычные алгоритмы подгонки кривых могут не сходиться при одновременном определении параметров τ и α . Тем не менее, их можно определить отдельно. Предполагая, что значение

параметра α зафиксировано, значение параметра τ можно найти с помощью группы методов наименьших квадратов, в частности, алгоритма Левенберга-Марквардта (также называемого затухающим методом наименьших квадратов). Технически, значение τ , обеспечивающее описание динамических кривых с менее чем 5% погрешностью (см. уравнение (4.1)), считается подходящим. В данной работе параметр α принимается целым числом для упрощения вычислений, и его значение обычно варьируется от 3 до 35 для изучаемых металлов. Значение параметра α , при котором погрешность описания менее 5% со значением τ , считается подходящим для моделирования. В целом можно найти диапазон значений параметра τ , обеспечивающих погрешность менее 5%, при фиксированном значении α , как обсуждается позже в разделе 4.2 и иллюстрируется на рисунках 4.4 (б), (в) и 4.8. Иногда этот диапазон значений для параметра τ может быть достаточно широким, что указывает на то, что изменения τ могут не оказывать значительного влияния на конечные результаты. В таких случаях любое температурно-временное соотношение, которое обеспечивает значение τ , попадающее в эти диапазоны значений, может считаться технически подходящим. В результате были предложены и проверены разные температурно-временные соответствия для моделирования динамических диаграмм деформирования. Следует отметить, что также можно использовать простое линейное соотношение. Однако это может привести к отрицательному значению τ . Поэтому экспоненциальные или степенные феноменологические соотношения, как показано в уравнениях (2.31)–(2.34) и (2.35)–(2.37), являются предпочтительным выбором для избежания отрицательных значений.

2.3 Заключение к главе

В данной главе представлено всестороннее исследование модифицированной модели РП. Обсуждаются понимание функции релаксации $\gamma(t)$, уравнение поверхности текучести, и методология исследования температурно-временного соответствия. Сделаны следующие основные выводы.

1. Предложены упрощенный вариант и инкрементальный вариант модели РП. Подход инкубационного времени рассматривает скоростную чувствительность как проявление временной чувствительности материалов. Модифицированная модель РП может быть получена из предложенного уравне-

ния поверхности текучести вместо использования эмпирического подхода на основе мультипликативной формы $\sigma = f_1(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon})f_2(\varepsilon_p, T)$.

2. Коэффициент относительных напряжений (КОН) может быть использован для анализа тенденции температурно-временного соответствия. Для исследуемой стали HSLA-65 и композита на основе вольфрама КОН при разных скоростях деформации обычно показывают монотонное уменьшение КОН с увеличением температуры. Это означает, что повышение температуры приводит к уменьшению значения τ . Некоторые особые случаи немонотонного поведения также могут возникать вследствие, например, динамического старения деформации, и может потребоваться немонотонная зависимость между τ и температурой.
3. Мультипликативные модели $\sigma = f_1(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon})f_2(\varepsilon_p, T)$ не подходят для моделирования в широком диапазоне температур и скоростей деформации, хотя они все еще предоставляют эффективный инструмент для многих инженерных задач в случаях с незначительным изменением температуры.

Глава 3

Методика моделирования: конечно-элементный анализ для задач динамической пластичности

В данной главе представлено введение в основные понятия, связанные с методом конечных элементов (МКЭ), а также представлены возможные решения для задач динамической пластичности. Кроме того, предлагается расчетная схема для конечно-элементного анализа с использованием упрощенного варианта модели РП. Некоторые методы, обсуждаемые в этой главе, были использованы автором в его опубликованных работах [91], [92], [93] и [94].

3.1 Основы метода конечных элементов

Основы метода конечных элементов были подробно рассмотрены в работах профессора Бельчко и Зинкевича [95, 96, 97]. В этом разделе рассмотрены некоторые основные аспекты их работ по решению задач динамической пластичности.

Лагранжевы формулировки метода используют лагранжевы описания, где переменные выражены как функции материальных (лагранжевых) координат \mathbf{X} и времени t . Узлы и элементы внутри сетки движутся в соответствии с материалом, а границы сопоставляются с гранями элементов, что упрощает их обработку. Существуют две классификации лагранжевых сеток: обновленные лагранжевы формулировки и полные лагранжевы формулировки. В обновленной лагранжевой формулировке производные берутся по пространственным (эйлеровым) координатам \mathbf{x} , а слабая форма включает в себя интегралы по актуальной конфигурации. Напротив, полная лагранжева формулировка выпол-

няет интегралы по отсчетной конфигурации и берет производные относительно материальных координат \mathbf{X} . Для решения задач динамической пластичности мы в данной работе принимаем обновленную лагранжеву формулировку, которая выражает уравнения движения в терминах эйлеровых координат \mathbf{x} и тензора напряжений Коши $\boldsymbol{\sigma}$. Затем обсуждается принцип виртуальной мощности – слабую форму уравнений движения.

Слабая форма: принцип виртуальной мощности

Слабая форма, часто называемая вариационной формой, снижает требования к непрерывности базисных функций, используемых для аппроксимации, что позволяет использовать полиномы меньшей степени. Такой подход преобразует дифференциальное уравнение в интегральную форму, которую обычно проще решать. Функция смещения $u(\mathbf{X}, t) = x(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$ должна удовлетворять всем граничным условиям на смещение и быть достаточно гладкой, чтобы все производные в разрешающих уравнениях были определены. Кроме того, предполагается, что изменения смещения или скорости, обозначаемые как δu или δv , достаточно гладкие, чтобы гарантировать "хорошую" определенность на протяжении последующих шагов и обнуляться на заданной границе смещения Γ_u , т.е. $\delta u = \delta v = 0, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u$. Это стандартный, классический способ разработки слабой формы.

Интегрированием произведения локального уравнения баланса импульса на вариацию скорости δv по актуальной конфигурации, мы можем получить уравнение (3.1), где \mathbf{b} – объемная сила, ρ – плотность массы, а Ω – объем в актуальной конфигурации. Эквивалентная формулировка в виде компонент демонстрируется в уравнении (3.2).

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} - \rho \dot{\mathbf{v}}) d\Omega = 0 \quad (3.1)$$

$$\int_{\Omega} \delta v_i \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i - \rho \dot{v}_i \right) d\Omega = 0 \quad (3.2)$$

Правило производной произведения дает

$$\int_{\Omega} \delta v_i \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\delta v_i \sigma_{ji}) - \frac{\partial (\delta v_i)}{\partial x_j} \sigma_{ji} \right] d\Omega. \quad (3.3)$$

Согласно условию о поверхностной силе $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}^*$ на границе Γ_t , первое слагаемое в выражении (3.3) может быть преобразовано с помощью теоремы Гаусса

следующим образом, где $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ – граница объема Ω .

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta v_i \sigma_{ji}) d\Omega = \int_{\Gamma} \delta v_i n_j \sigma_{ji} d\Gamma = \int_{\Gamma_t} \delta v_i t_i^* d\Gamma. \quad (3.4)$$

Уравнения (3.2)–(3.4) выводят слабую форму уравнения движения и силовые граничные условия, известную как принцип виртуальной мощности:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial (\delta v_i)}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega - \int_{\Omega} \delta v_i \rho b_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta v_i t_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} \delta v_i \rho \dot{v}_i d\Omega = 0 \quad (3.5)$$

Также важно отметить, что элементы в слабой форме (3.5) имеют физическое обоснование. Учитывая симметрию тензора напряжений Коши и переписывая слагаемое

$$\frac{\partial (\delta v_i)}{\partial x_j} \sigma_{ij} = \delta L_{ij} \sigma_{ij} = (\delta D_{ij} + \delta W_{ij}) \sigma_{ij} = \delta D_{ij} \sigma_{ij} = \delta \mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma},$$

можно вывести виртуальную внутреннюю мощность в виде (3.6), где $\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = (\nabla \mathbf{v})^T$ – пространственный градиент скорости, $\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)$ – тензор скорости деформации и $\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)$ – тензор вращения.

$$\delta P^{\text{int}} = \int_{\Omega} \delta D_{ij} \sigma_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial (\delta v_i)}{\partial x_j} \sigma_{ij} d\Omega \equiv \int_{\Omega} \delta L_{ij} \sigma_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (3.6)$$

Второе и третье слагаемые слабой формы дают виртуальную внешнюю мощность, возникающую из внешних объемных сил \mathbf{b} и заданных поверхностных сил \mathbf{t}^* .

$$\delta P^{\text{ext}} = \int_{\Omega} \delta v_i \rho b_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta v_i t_i^* d\Gamma = \int_{\Omega} \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^* d\Gamma \quad (3.7)$$

Последнее слагаемое в слабой форме представляет виртуальную инерционную (или кинетическую) мощность.

$$\delta P^{\text{kin}} = \int_{\Omega} \delta v_i \rho \dot{v}_i d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{v} \cdot \rho \dot{\mathbf{v}} d\Omega \quad (3.8)$$

В результате слабая форма (3.5) может быть сформулирована как следующее виртуальное/вариационное уравнение мощности

$$\delta P = \delta P^{\text{int}} - \delta P^{\text{ext}} + \delta P^{\text{kin}} = 0. \quad (3.9)$$

Обновленная лагранжева дискретизация в МКЭ

Пусть актуальная область Ω разбита на элементы Ω_e , т.е. $\Omega = \bigcup_e \Omega_e$, которые содержат N_e узлов с перемещениями $\mathbf{x}_I(t)$, где $I = 1$ до N_e . Приближение поля перемещений $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ для элемента Ω_e предполагается определенным интерполяционными функциями (или функциями формы) $N_I(\mathbf{X})$ и движением узла \mathbf{X}_I следующим образом

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = N_I(\mathbf{X})\mathbf{x}_I(t) \text{ или } x_i(\mathbf{X}, t) = N_I(\mathbf{X})x_{iI}(t). \quad (3.10)$$

Здесь $x_{iI}(t)$ обозначает координаты узла $\mathbf{x}_I(t)$ в актуальной конфигурации. В отсчетной конфигурации имеем

$$\mathbf{X} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, 0) = N_I(\mathbf{X})\mathbf{x}_I(0) = N_I(\mathbf{X})\mathbf{X}_I. \quad (3.11)$$

Равенство $\mathbf{X}_J = N_I(\mathbf{X}_J)\mathbf{X}_I$ приводит к условию (3.12), где δ_{IJ} – символ Кронекера.

$$N_I(\mathbf{X}_J) = \delta_{IJ} \quad (3.12)$$

Поле смещений $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ может быть определено следующим образом

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} = N_I(\mathbf{X})\mathbf{x}_I(t) - N_I(\mathbf{X})\mathbf{X}_I = N_I(\mathbf{X})\mathbf{u}_I(t), \quad (3.13)$$

где $\mathbf{u}_I(t) = \mathbf{x}_I(t) - \mathbf{X}_I$ является смещением узла \mathbf{X}_I . Скорости получаются путем материальной производной от смещений, что дает

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = N_I(\mathbf{X})\dot{\mathbf{u}}_I(t) = N_I(\mathbf{X})\mathbf{v}_I(t) \text{ или } v_i(\mathbf{X}, t) = \frac{Du_i(\mathbf{X}, t)}{Dt} = N_I(\mathbf{X})v_{iI}(t). \quad (3.14)$$

Аналогично, ускорения $\mathbf{a}(\mathbf{X}, t)$ определяются следующим образом

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}, t) = N_I(\mathbf{X})\dot{\mathbf{v}}_I(t) = N_I(\mathbf{X})\mathbf{a}_I(t) \text{ или } a_i(\mathbf{X}, t) = \frac{Dv_i(\mathbf{X}, t)}{Dt} = N_I(\mathbf{X})a_{iI}(t). \quad (3.15)$$

В обновленной лагранжевой формулировке важно отметить, что функции формы выражены относительно материальных координат, несмотря на использование слабой формы в актуальной конфигурации. Этот выбор является важным для лагранжевых сеток, поскольку он гарантирует, что движения полностью определяется узловыми переменными в конечно-элементной аппроксимации.

Пространственный градиент скорости \mathbf{L} и тензор скорости деформации \mathbf{D} вычисляются следующим образом

$$\mathbf{L} = \mathbf{v}_I \nabla N_I = \mathbf{v}_I \frac{\partial N_I}{\partial \mathbf{x}} \text{ или } L_{ij} = v_{iI} \frac{\partial N_I}{\partial x_j}, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{v}_I \frac{\partial N_I}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial N_I}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}_I \right) \text{ или } D_{ij} = \frac{1}{2} \left(v_{iI} \frac{\partial N_I}{\partial x_j} + \frac{\partial N_I}{\partial x_j} v_{iI} \right). \quad (3.17)$$

Вариации аппроксимируются выражением (3.18).

$$\delta \mathbf{v}(\mathbf{X}) = \delta \mathbf{v}_I N_I(\mathbf{X}) \text{ или } \delta v_i(\mathbf{X}) = \delta v_{iI} N_I(\mathbf{X}) \quad (3.18)$$

В результате этих приближений принцип виртуальной мощности (3.5) переписывается как

$$\delta v_{iI} \int_{\Omega} \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega - \delta v_{iI} \int_{\Omega} N_I \rho b_i d\Omega - \delta v_{iI} \int_{\Gamma_t} N_I t_i^* d\Gamma + \delta v_{iI} \int_{\Omega} N_I \rho \dot{v}_i d\Omega = 0. \quad (3.19)$$

Произвольность виртуальных узловых скоростей δv_{iI} на границе Γ/Γ_u приводит к

$$\int_{\Omega} \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega - \int_{\Omega} N_I \rho b_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} N_I t_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} N_I \rho \dot{v}_i d\Omega = 0, \forall (I, i) \notin \Gamma_u. \quad (3.20)$$

Теперь мы определяем узловые силы \mathbf{f}^{int} , \mathbf{f}^{ext} и \mathbf{f}^{kin} , соответствующие виртуальным внутренним, внешним и кинетическим мощностям. Виртуальные уравнения мощности (3.6)–(3.8) дадут

$$\delta P^{\text{int}} = \delta v_{iI} f_{iI}^{\text{int}} = \int_{\Omega} \frac{\partial (\delta v_i)}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega = \delta v_{iI} \int_{\Omega} \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega, \quad (3.21)$$

$$\delta P^{\text{ext}} = \delta v_{iI} f_{iI}^{\text{ext}} = \delta v_{iI} \int_{\Omega} N_I \rho b_i d\Omega + \delta v_{iI} \int_{\Gamma_t} N_I t_i^* d\Gamma, \quad (3.22)$$

$$\delta P^{\text{kin}} = \delta v_{iI} f_{iI}^{\text{kin}} = \delta v_{iI} \int_{\Omega} N_I \rho \dot{v}_i d\Omega. \quad (3.23)$$

Это приводит к определению внутренних и внешних узловых сил \mathbf{f}^{int} и \mathbf{f}^{ext} :

$$\mathbf{f}_I^{\text{int}} = \int_{\Omega} \nabla N_I \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega \text{ или } f_{iI}^{\text{int}} = \int_{\Omega} \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{f}_I^{\text{ext}} = \int_{\Omega} N_I \rho \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} N_I \mathbf{t}^* d\Gamma \text{ или } f_{iI}^{\text{ext}} = \int_{\Omega} N_I \rho b_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} N_I t_i^* d\Gamma. \quad (3.25)$$

Кинетические силы определяются следующим образом

$$\mathbf{f}_I^{\text{kin}} = \int_{\Omega} \rho N_I \dot{\mathbf{v}} d\Omega = \mathbf{I} \int_{\Omega} \rho N_I N_J d\Omega \cdot \dot{\mathbf{v}}_J, \quad (3.26)$$

где $\mathbf{I} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ – единичный тензор второго порядка. Вводя матрицу (или тензор) масс \mathbf{M} (3.27), получаем окончательную форму (3.28) кинетических сил.

$$\mathbf{M}_{IJ} = \mathbf{I} \int_{\Omega} \rho N_I N_J d\Omega \text{ или } M_{ijIJ} = \delta_{ij} \int_{\Omega} \rho N_I N_J d\Omega \quad (3.27)$$

$$\mathbf{f}_I^{\text{kin}} = \mathbf{M}_{IJ}\dot{\mathbf{v}}_J \text{ или } f_{iI}^{\text{kin}} = M_{ijIJ}\dot{v}_{jJ} \quad (3.28)$$

Таким образом, мы можем кратко записать дискретное приближение виртуального уравнения мощности (3.9) в виде

$$\mathbf{M}_{IJ}\mathbf{a}_J + \mathbf{f}_I^{\text{int}} - \mathbf{f}_I^{\text{ext}} = 0, \quad I \text{ и } J = 1 \text{ to } N_e. \quad (3.29)$$

В ассамблировании системы конечных элементов, которое преобразует локальные матрицы и векторы отдельных элементов Ω_e в глобальные для всей области Ω , ключевую роль играет матрица связности \mathbf{L}_e . Матрица связности является булевой матрицей, которая помогает в этом процессе преобразования. Подробное обсуждение этой процедуры можно найти в работе Бельчко [95]¹. В целях краткости мы опустим номера узлов и элементов в дальнейшем обсуждении и сосредоточимся только на окончательном разрешающем уравнении (3.30) для всей области Ω , где \mathbf{P} – глобальные внутренние узловые силы, а \mathbf{f} обозначает глобальный вектор внешних узловых сил.

$$\mathbf{M}\mathbf{a} + \mathbf{P} - \mathbf{f} = 0. \quad (3.30)$$

3.2 Нелинейный динамический анализ

В данном разделе рассматриваются возможные решения для динамической задачи, включающей физическую/материальную нелинейность, в частности пластичность. Математически эта нелинейность проявляется в определяющих соотношениях (уравнения (1.1)–(1.4)), влияя на внутренние узловые силы \mathbf{P} в разрешающем уравнении (3.30). Изучая определяющие соотношения, мы получаем представление о том, как эта нелинейность влияет на общее поведение системы (3.30). Уравнение (3.30) также называется полудискретными уравнениями импульса, поскольку они еще не были дискретизированы по времени. Ниже также представляем некоторые алгоритмы интегрирования по времени для дискретизации.

3.2.1 Алгоритмы интегрирования по времени

Алгоритмы интегрирования по времени позволяют моделировать поведение физической системы, дискретизируя время на более малые интервалы или шаги

¹Раздел 2.5: Матрицы элементов и глобальные матрицы.

времени. На каждом временном шаге алгоритм вычисляет текущее состояние системы на основе предыдущего состояния и разрешающих уравнений. Для выполнения этих вычислений алгоритм использует текущее время, переменные состояния, соответствующие производные по времени и т. д. Итеративно выполняя этот процесс, алгоритм обновляет величины для последующих временных шагов до достижения требуемого времени моделирования. Таким образом, он эффективно отслеживает эволюцию системы с течением времени. Существуют различные алгоритмы интегрирования по времени, включая явные схемы, такие как прямой метод Эйлера или метод центральной разности, и неявные методы, такие как метод обратного Эйлера, метод Рунге-Кутты, метод Ньюмарка-бета (β -метод), α -метод² [98] и т. д. Эти методы позволяют численно решать систему дифференциальных уравнений в момент времени t_{k+1} , представленную уравнением (3.31), превращая ее в систему алгебраических уравнений, которые могут быть линейными или нелинейными по своей природе. Это преобразование позволяет применить эффективные численные методы для получения приближенных решений задачи динамического равновесия. Здесь мы кратко рассмотрим два метода: явный и неявный методы.

$$\mathbf{M} \mathbf{a}_{k+1} + \mathbf{P}_{k+1}(\mathbf{u}_{k+1}) - \mathbf{f}_{k+1} = 0 \quad (3.31)$$

Явный метод центральной разности

Метод центральной разности – это широко используемый подход для интегрирования по времени. Эта явная схема вычисления может быть представлена следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{k+1} &= \mathbf{u}_k + \Delta t \mathbf{v}_k + \frac{1}{2} \Delta t^2 \mathbf{a}_k = \tilde{\mathbf{u}}_{k+1}, \\ \mathbf{v}_{k+1} &= \mathbf{v}_k + \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{a}_k + \mathbf{a}_{k+1}) = \tilde{\mathbf{v}}_{k+1} + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{a}_{k+1}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

где $\tilde{\mathbf{u}}_{k+1}$ и $\tilde{\mathbf{v}}_{k+1}$ – значения, зависящие только от решения при $t = t_k$. В отличие от метода прямого Эйлера, метод центральной разности позволяет вычислить перемещения \mathbf{u}_{k+1} , тем самым $\mathbf{P}_{k+1}(\mathbf{u}_{k+1})$, только с использованием значений предыдущего временного шага, т.е. без зависимости от \mathbf{a}_{k+1} . Следовательно, это может преобразовать динамические уравнения (3.31) в линейные алгебраические уравнения с одним неизвестным значением \mathbf{a}_{k+1} . Это свойство

²Метод α доступен в пакете ABAQUS/Standard.

делает его более удобным подходом для динамического анализа. Таким образом, он широко используется во многих коммерческих пакетах моделирования, например, в пакете ABAQUS/Explicit. Однако явные схемы являются условно устойчивыми только при выполнении условия $\Delta t \leq \Delta t_{crit}$. Здесь Δt_{crit} определяется минимальным временем, необходимым для "проникновения волн" через любой элемент или, иначе, наибольшей "частотой", присутствующей в конечно-элементной сетке [96] ³.

Метод Ньюмарка-бета

Метод Ньюмарка-бета в качестве метода интегрирования по времени предназначен специально для решения систем уравнений второго порядка. Он находит применение в различных областях, включая физические и/или инженерные задачи, и обеспечивает эффективный подход для численного решения сложных систем, таких как динамической системы. Он позволяет вычислять перемещения, скорости и ускорения с использованием

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{k+1} &= \mathbf{u}_k + \int_0^{\Delta t} \mathbf{v}(t') dt' \\ &= \mathbf{u}_k + \Delta t \mathbf{v}_k + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \mathbf{a}_k + \beta \Delta t^2 \mathbf{a}_{k+1} = \tilde{\mathbf{u}}_{k+1} + \beta \Delta t^2 \mathbf{a}_{k+1}, \\ \mathbf{v}_{k+1} &= \mathbf{v}_k + \int_0^{\Delta t} \mathbf{a}(t') dt' \\ &= \mathbf{v}_k + (1 - \gamma) \Delta t \mathbf{a}_k + \gamma \Delta t \mathbf{a}_{k+1} = \tilde{\mathbf{v}}_{k+1} + \gamma \Delta t \mathbf{a}_{k+1}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

где β и γ – параметры, а $\tilde{\mathbf{u}}_{k+1}$ и $\tilde{\mathbf{v}}_{k+1}$ – значения, зависящие только от решения при $t = t_k$. Параметры β и γ выбираются для обеспечения точности и устойчивости. Явная схема безусловно устойчива при условии $\beta \geq \frac{\gamma}{2} \geq \frac{1}{4}$. Она преобразует динамические уравнения (3.31) в нелинейные алгебраические уравнения с одним неизвестным значением \mathbf{a}_{k+1} , которые могут быть решены, например, методом Ньютона-Рафсона и его модификациями. Для более подробного обсуждения случаев с условной устойчивостью можно ознакомиться с работой Белычко [95] ⁴. Отметим, что явные схемы центральной разности и недемпфированного трапециевидного метода являются особыми случаями метода Ньюмарка-бета, где $\beta = 0, \gamma = \frac{1}{2}$ и $\beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{2}$, соответственно.

³глава 2: Метод Галеркина приближения, страница 31

⁴глава 6: Методы решения и устойчивость, страница 339

Помимо алгоритмов интегрирования по времени, также важно точно вычислять определяющие уравнения, в частности $\mathbf{P}_{k+1}(\mathbf{u}_{k+1})$, для решения уравнений (3.31). Особенно, необходимо вычислить инкремент напряжений $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ при заданном значении $\Delta\mathbf{u}$ и, следовательно, инкремент деформаций $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$.

3.2.2 Вычисление инкремента напряжений в задачах изотропной пластичности J_2

Упругопластическая задача имеет нелинейный характер из-за нелинейных определяющих соотношений. В терминах матрицы упруго-пластического модуля $\mathbf{D}_{\text{ep}}^*(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon})$, данного Зенкевичем [96]⁵, это означает, что напряжения должны быть проинтегрированы как $\Delta\boldsymbol{\sigma} = \int_0^{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{D}_{\text{ep}}^*(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}') d\boldsymbol{\varepsilon}'$. В случае изотропной пластичности J_2 (или пластичности Мизеса) решаются следующие дифференциальные уравнения (3.34)–(3.36), эквивалентные соотношениям (1.1)–(1.3) с начальными условиями (3.37) и нормой тензора, дающей $|\mathbf{s}| = (\mathbf{s} : \mathbf{s})^{\frac{1}{2}}$. Алгоритм предиктор–корректор⁶ обычно используется для интегрирования разрешающих уравнений (3.34)–(3.36). Уравнение поверхности текучести фон-Мизеса (3.38) (или 1.4) может быть решено методом Ньютона-Рафсона.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}} &= 2G \operatorname{dev} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = 2G \operatorname{dev} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - 2G \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \\ &= 2G \operatorname{dev} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - 2G \gamma \mathbf{n} \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\dot{T} = \frac{\eta\gamma}{\rho C_v} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{n} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p &= \left(\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma (\mathbf{n} : \mathbf{n})^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{s}(t_k) = \mathbf{s}_k, \quad T(t_k) = T_k, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^p(t_k) = \boldsymbol{\varepsilon}_k^p \quad (3.37)$$

$$f(\gamma) = \sqrt{\frac{3}{2}} |\mathbf{s}| - \sigma^y(\gamma) = 0 \quad (3.38)$$

⁵Глава 4: Безупречные и нелинейные материалы, страница 95

⁶Алгоритм "возвращения на поверхность" (Return mapping algorithm) в англоязычной литературе

Алгоритм предиктор-корректор для интегрирования напряжений по времени

На основе неявного метода Эйлера алгоритм предиктор-корректор инкрементирует тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, тензор пластических деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ и эквивалентную пластическую деформацию $\bar{\varepsilon}^p$. Этот алгоритм предлагает и вводит пробный девиаторный составляющий тензора напряжений $\mathbf{s}_{k+1}^{\text{tr}}$ (предиктор напряжений в момент времени t_{k+1}), показанный в уравнении (3.39), и использует соосность между тензорами \mathbf{s}_{k+1} , $\mathbf{s}_{k+1}^{\text{tr}}$ и $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k+1}^p$. В случае изотропной пластичности J_2 , коэффициент $m = \frac{|\mathbf{s}_{k+1}|}{|\mathbf{s}_{k+1}^{\text{tr}}|}$, возникающий из соосности тензоров \mathbf{s}_{k+1} и $\mathbf{s}_{k+1}^{\text{tr}}$, играет важную роль в упрощении процедуры вычисления.

$$\mathbf{s}_{k+1}^{\text{tr}} = \mathbf{s}_k + 2G \operatorname{dev}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}) \quad (3.39)$$

С использованием метода неявного Эйлера (3.40), разрешающие уравнения (3.34)–(3.36) могут быть интегрированы по формулам (3.41)–(3.43), где $\Delta \bar{\varepsilon}_{k+1}^p = \bar{\varepsilon}_{k+1}^p - \bar{\varepsilon}_k^p$ и $\sigma_{k+1}^y = \sigma^y(t_{k+1})$.

$$y_{k+1} = y_k + \int_0^{\Delta t} f(t, y) dt \approx y_k + \Delta t f(t_{k+1}, y_{k+1}) \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{k+1} &= \mathbf{s}_k + 2G \operatorname{dev}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}) - 2G \Delta t \gamma_{k+1} \mathbf{n}_{k+1} \\ &= \mathbf{s}_{k+1}^{\text{tr}} - \sqrt{6} G \Delta \bar{\varepsilon}_{k+1}^p \mathbf{n}_{k+1} \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= T_k + \frac{1}{\rho C_v} \int_0^{\Delta t} \eta \gamma |\mathbf{s}| dt' = T_k + \frac{\eta_{k+1}}{\rho C_v} \Delta t \gamma_{k+1} |\mathbf{s}_{k+1}| \\ &= T_k + \frac{\eta_{k+1}}{\rho C_v} \Delta \bar{\varepsilon}_{k+1}^p \sigma_{k+1}^y \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{k+1}^p &= \bar{\varepsilon}_k^p + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta t \gamma_{k+1} \\ &= \bar{\varepsilon}_k^p + \Delta \varepsilon_{k+1}^p \end{aligned} \quad (3.43)$$

Уравнение (3.42) использует равенство $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{n} = \mathbf{s} : \mathbf{n} = |\mathbf{s}|$. Соосность тензоров \mathbf{s}_{k+1} и $\mathbf{s}_{k+1}^{\text{tr}}$ использована в уравнении (3.41), которое приводит к соотношению

$$|\mathbf{s}_{k+1}| = |\mathbf{s}_{k+1}^{\text{tr}}| - \sqrt{6} G \Delta \bar{\varepsilon}_{k+1}^p.$$

Далее, уравнение поверхности текучести Мизеса (3.38) может быть выведено, как показано в уравнении (3.44), где $\bar{\sigma}_{k+1}^{\text{tr}} = \left(\frac{3}{2}\mathbf{s}_{k+1}^{\text{tr}} : \mathbf{s}_{k+1}^{\text{tr}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} |\mathbf{s}_{k+1}^{\text{tr}}|$.

$$f(\Delta\bar{\varepsilon}_{k+1}^p) = \bar{\sigma}_{k+1}^{\text{tr}} - 3G\Delta\bar{\varepsilon}_{k+1}^p - \sigma^y(\Delta\bar{\varepsilon}_{k+1}^p) = 0 \quad (3.44)$$

В результате решение системы уравнений (3.34)–(3.38) переформулируется в решение алгебраического скалярного уравнения (3.44) относительно скалярной переменной $\Delta\bar{\varepsilon}_{k+1}^p$. Соосность тензоров \mathbf{s}_{k+1} и $\mathbf{s}_{k+1}^{\text{tr}}$, а также уравнение поверхности текучести Мизеса, дают

$$\mathbf{s}_{k+1} = \frac{|\mathbf{s}_{k+1}|}{|\mathbf{s}_{k+1}^{\text{tr}}|} \mathbf{s}_{k+1}^{\text{tr}} = \frac{\sigma_{k+1}^y}{\bar{\sigma}_{k+1}^{\text{tr}}} \mathbf{s}_{k+1}^{\text{tr}} = m \mathbf{s}_{k+1}^{\text{tr}}.$$

Коэффициент пропорциональности $m = \frac{\sigma_{k+1}^y}{\bar{\sigma}_{k+1}^{\text{tr}}}$ может быть использован для расчета приращения пластической деформации в виде

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}^p = \frac{\mathbf{s}_{k+1}^{\text{tr}} - \mathbf{s}_{k+1}}{2G} = \frac{1-m}{2G} \mathbf{s}_{k+1}^{\text{tr}}.$$

Поэтому простой алгоритм предиктор-корректор может быть реализован по следующей схеме:

1. Решить алгебраическое скалярное уравнение (3.44) для нахождения приращения эквивалентной пластической деформации $\Delta\bar{\varepsilon}_{k+1}^p$. Обновить эквивалентную пластическую деформацию $\bar{\varepsilon}_{k+1}^p$ и ее скорость $\dot{\bar{\varepsilon}}_{k+1}^p = \Delta\bar{\varepsilon}_{k+1}^p/\Delta t$.
2. Вычислить пробный тензор напряжений $\mathbf{s}_{k+1}^{\text{tr}}$, значение функции изотропного упрочнения $\sigma_{k+1}^y = \sigma^y(\Delta\bar{\varepsilon}_{k+1}^p)$ и коэффициент пропорциональности $m = \frac{\sigma_{k+1}^y}{\bar{\sigma}_{k+1}^{\text{tr}}}$.
3. Определить приращение тензора пластических деформаций $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}^p$ по значениям m и $\mathbf{s}_{k+1}^{\text{tr}}$ и обновить девиаторную часть тензора напряжений \mathbf{s}_{k+1} и тензор пластических деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}^p$.
4. Обновить температуру T , изменяющуюся за счет пластической диссипации, по уравнению (3.42).
5. Перейти к следующему шагу по времени.

Метод Ньютона–Рафсона для решения уравнения поверхности текучести Мизеса

Существует несколько итерационных методов для решения уравнения поверхности текучести (3.44) с одной переменной $\Delta\bar{\varepsilon}_{k+1}^p$. Среди этих методов метод Ньютона–Рафсона (НР) широко используется благодаря своей эффективности. Однако, прежде чем подробно рассматривать метод НР, полезно дать краткое введение в явный метод поиска предварительного решения, который также может служить способом предоставления начального приближения для метода НР. Функция упрочнения $\sigma^y(\bar{\varepsilon}^p, \dot{\bar{\varepsilon}}^p, T)$ может быть разложена в ряд

$$\sigma_{k+1}^y \approx \sigma_k^y + \frac{\partial \sigma_k^y}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \Delta\bar{\varepsilon}^p + \frac{\partial \sigma_k^y}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}^p} \Delta(\dot{\bar{\varepsilon}}^p) + \frac{\partial \sigma_k^y}{\partial T} \Delta T,$$

что приводит к уравнению (3.45). Для упрощения решения используется выражение (3.46) вместо (3.42). Следовательно, приращение эквивалентной пластической деформации можно аппроксимировать, вычислив по формуле (3.47). Для достижения достаточной точности явного метода, условие $f(\Delta\bar{\varepsilon}_{k+1}^p) \approx 0$ должно выполняться на каждом временном шаге.

$$f(\Delta\bar{\varepsilon}_{k+1}^p) \approx \bar{\sigma}_{k+1}^{\text{tr}} - 3G\Delta\bar{\varepsilon}_{k+1}^p - (\sigma_k^y + \frac{\partial \sigma_k^y}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \Delta\bar{\varepsilon}^p + \frac{\partial \sigma_k^y}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}^p} \Delta(\dot{\bar{\varepsilon}}^p) + \frac{\partial \sigma_k^y}{\partial T} \Delta T) \approx 0 \quad (3.45)$$

$$T_{k+1} = T_k + \frac{\sigma_k^y \eta_k}{\rho C_v} \Delta\bar{\varepsilon}_{k+1}^p \quad (3.46)$$

$$\Delta\bar{\varepsilon}_{k+1}^p = \frac{\bar{\sigma}_{k+1}^{\text{tr}} - \sigma_k^y}{3G + \frac{\partial \sigma_k^y}{\partial \bar{\varepsilon}^p} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \sigma_k^y}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}^p} + \frac{\eta_k}{\rho C_v} \sigma_k^y \frac{\partial \sigma_k^y}{\partial T}} \quad (3.47)$$

Метод Ньютона–Рафсона основан на итерационной процедуре (3.48), где x обозначает переменную $\Delta\bar{\varepsilon}_{k+1}^p$, а x_n представляет значение x на n -м шаге итерации, т.е. $x_n = \Delta\bar{\varepsilon}_{k+1}^{p(n)}$. Производная функции $f'(x)$ приведена в уравнении (3.49). Решение явного метода (3.47) может служить начальным приближением для итерационного метода, как показано в выражении (3.50). Таким образом, уравнения (3.48)–(3.50) устанавливают метод Ньютона–Рафсона.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (3.48)$$

$$f'(x) = -3G - \frac{\partial \sigma^y}{\partial \bar{\varepsilon}^p} - \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \sigma^y}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}^p} - \frac{\sigma^y \eta}{\rho C_v} \frac{\partial \sigma^y}{\partial T} \quad (3.49)$$

$$x_0 = \frac{\bar{\sigma}_{k+1}^{\text{tr}} - \sigma_k^y}{3G + \frac{\partial \sigma_k^y}{\partial \varepsilon^p} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \sigma_k^y}{\partial \varepsilon^p} + \frac{\eta_k}{\rho C_v} \sigma_k^y \frac{\partial \sigma_k^y}{\partial T}} \quad (3.50)$$

3.3 Расчетная схема, подходящая для модели РП

Метод Ньютона-Рафсона (НР) известен своей удобностью и быстрой сходимостью. Однако при использовании метода НР могут возникать некоторые проблемы. Одна из таких проблем возникает, когда функция $f(x)$ не является монотонной, а ее производная $f'(x)$ обращается в ноль в некоторых точках в процессе итерации, как показано на рисунке 3.1 [99]. Кроме того, возможны сложности, если функция $f(x)$ не имеет производной в некоторых точках, например, в случае ступенчатой функции. В задачах динамической пластичности функция $f(x)$ может иметь не монотонное поведение из-за эффекта зуба текучести, термического размягчения при ударных нагрузках и других факторов. Поэтому в данной работе используется безопасная версия метода НР [100].

3.3.1 Безопасная версия метода Ньютона-Рафсона

Безопасная версия метода Ньютона-Рафсона объединяет процедуру Ньютона-Рафсона и метод бисекции, чтобы обеспечить сходимость [100]. Метод бисекции использует интервал $[x_{\min}, x_{\max}]$ на каждом шаге итерации и устанавливает середину интервала $x_{\text{mid}} = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}$ в качестве новой границы для следующего интервала. Определение верхней или нижней границы основано на знаке произведения $f(x_{\text{mid}})f(x_{\min})$. В безопасной версии метода НР после каждой итерации интервал корректируется заменой одной из его границ на полученное новое решение x . Если полученное решение от метода НР на текущей итерации, определенное в уравнении (3.48), выходит за пределы интервала, то оно считается недействительным. В таких случаях выполняется шаг бисекции, чтобы вернуть решение в пределы интервала, то есть x_{mid} становится новой границей. Этот итерационный процесс гарантирует, что последующие итерации остаются в заданном интервале и обеспечивают сходимость к нужному решению.

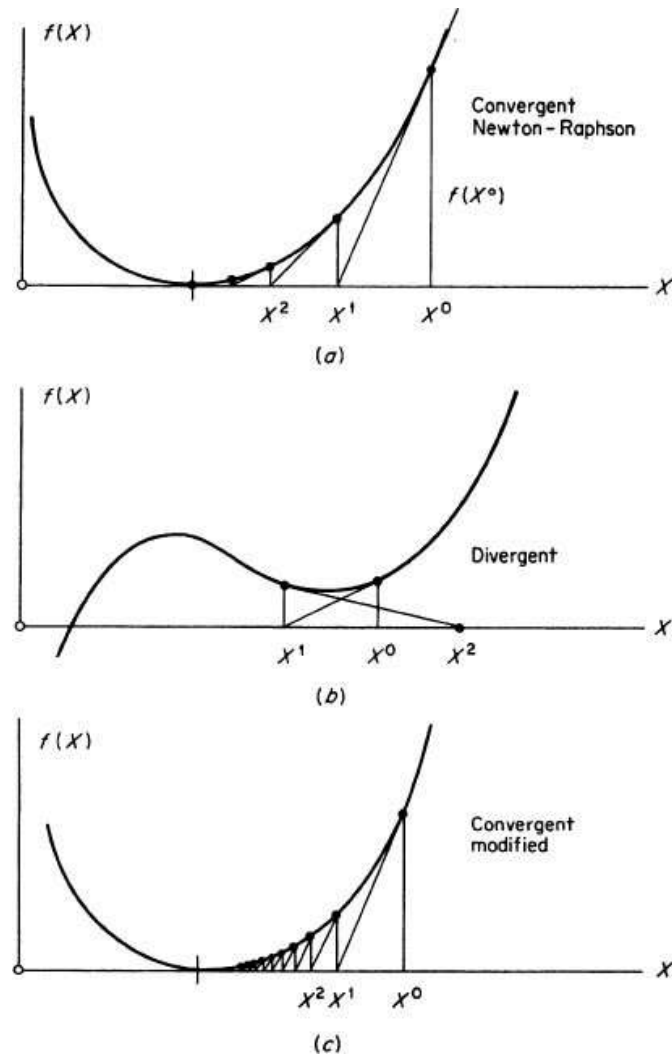


Рис. 3.1: Пример случаев сходимости и расходимости для метода Ньютона-Рафсона, обсуждаемые в работе [99].

3.3.2 Реализация в коммерческом программном пакете

Коммерческий программный пакет ABAQUS/Explicit использует явный метод центральных разностей, как было обсуждено в разделе 3.2.1, для решения динамического уравнения (3.31). Для облегчения использования этого подхода доступна подпрограмма VUMAT, которая позволяет пользователям интегрировать свои собственные пользовательские программы для вычисления приращений напряжений с помощью процедуры ABAQUS/Explicit. Это сочетание пользовательских программ и функциональности ABAQUS/Explicit повышает гибкость и универсальность программного пакета для широкого спектра приложений. В данном исследовании безопасная версия метода НР была интегрирована в подпрограмму VUMAT на основе языка программирования Fortran. Функция упрочнения $\sigma_y(\cdot)$ следует упрощенному варианту модели РП (2.22). Важно подчеркнуть некоторые ключевые аспекты модели РП, которые особенно важны для реализации подпрограммы.

Во-первых, скалярные переменные $\sigma, \dot{\epsilon}, \dot{\epsilon}_p$ должны быть связаны с инвариантами тензоров $\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$. В случае одномерного напряженного состояния имеем следующие тензоры напряжений и деформаций, где $\dot{\theta} = \text{tr } \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \text{tr } \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e$ характеризует изменение объема элемента, а ν – коэффициент Пуассона.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \sigma \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1, \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\epsilon} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} (\dot{\theta} - \dot{\epsilon}) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} (\dot{\theta} - \dot{\epsilon}) \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e &= \dot{\epsilon}_e \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \nu \dot{\epsilon}_e \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 - \nu \dot{\epsilon}_e \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\epsilon}_p \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_p \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 - \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_p \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Согласно выражениям (3.36) и (3.38), инварианты $\bar{\sigma}(\mathbf{s}) = \left(\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}\right)^{\frac{1}{2}}$ и $\bar{\dot{\epsilon}}^p$ дают

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}(\mathbf{s}) &= \left(\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}\right)^{\frac{1}{2}} = \sigma, \\ \bar{\dot{\epsilon}}^p &= \left(\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p\right)^{\frac{1}{2}} = \dot{\epsilon}_p.\end{aligned}\tag{3.51}$$

Изменение объема, описываемое через θ , в одномерной задаче пластичности не учитывается, поэтому скалярная переменная $\dot{\epsilon}$ не равна $\left(\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}\right)^{\frac{1}{2}}$. Однако мы можем записать

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\theta}}{3} + \left(\frac{2}{3} \text{dev } \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \text{dev } \dot{\boldsymbol{\epsilon}}\right)^{\frac{1}{2}} = \dot{\epsilon}.\tag{3.52}$$

Следовательно, мы решаем уравнения (3.34)–(3.38), где функция упрочнения

σ^y определяется следующим образом:

$$\sigma^y(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}^p, \dot{\bar{\varepsilon}}, T) = \sigma_c(\bar{\varepsilon}^p, T) g(\bar{\varepsilon}, \dot{\bar{\varepsilon}}, T),$$

$$g(\bar{\varepsilon}, \dot{\bar{\varepsilon}}, T) = \begin{cases} \left(\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}\tau(1+\alpha)}{\bar{\varepsilon}}\right)^{1/\alpha}, & \frac{\bar{\varepsilon}}{\dot{\bar{\varepsilon}}\tau} \leq 1, \\ \left(\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}\tau(1+\alpha)\bar{\varepsilon}^\alpha}{\bar{\varepsilon}^{1+\alpha} - (\bar{\varepsilon} - \dot{\bar{\varepsilon}}\tau)^{1+\alpha}}\right)^{1/\alpha}, & \frac{\bar{\varepsilon}}{\dot{\bar{\varepsilon}}\tau} > 1. \end{cases}, \tau = \tau(T). \quad (3.53)$$

В модели (3.53) значение $\bar{\varepsilon}^\alpha$ или $\bar{\varepsilon}^{1+\alpha}$ может быть крайне малым, особенно в начальных стадиях пластической деформации, когда ε намного меньше 1 и α относительно большое. В то же время значение $\sigma_c(\bar{\varepsilon}^p, T)$ значительно превышает $\bar{\varepsilon}^\alpha$ или $\bar{\varepsilon}^{1+\alpha}$. Заметное различие в масштабе этих значений может привести к значительным накопительным ошибкам в процедуре итеративного расчета. Поэтому при численных вычислениях необходимо скорректировать функцию $g(\bar{\varepsilon}, \dot{\bar{\varepsilon}}, T)$ для уменьшения возможных неточностей, возникающих из-за ее формы.

Обозначим безразмерное значение $\frac{\bar{\varepsilon}}{\dot{\bar{\varepsilon}}\tau}$ как ξ . Тогда функцию $g(\bar{\varepsilon}, \dot{\bar{\varepsilon}}, T)$ можно переписать в виде $g(\xi)$, заданной уравнением (3.54), где $\xi = \xi(\bar{\varepsilon}, \dot{\bar{\varepsilon}}, T) = \frac{\bar{\varepsilon}}{\dot{\bar{\varepsilon}}\tau(T)}$. Частные производные, используемые в безопасной версии метода НР, представлены в выражении (3.55).

$$g(\xi) = \left(\frac{(1+\alpha)\xi^\alpha}{\xi^{1+\alpha} - (\xi-1)^{1+\alpha}H(\xi-1)}\right)^{1/\alpha} = \begin{cases} \left(\frac{1+\alpha}{\xi}\right)^{1/\alpha}, & \xi \leq 1 \\ \left(\frac{1+\alpha}{\xi - (\xi-1)(1-\frac{1}{\xi})^\alpha}\right)^{1/\alpha}, & \xi > 1 \end{cases} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{\varepsilon}} &= \sigma_c \frac{\partial g}{\partial \bar{\varepsilon}}, & \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{\varepsilon}^p} &= \frac{\partial \sigma_c}{\partial \bar{\varepsilon}^p} g, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}} &= \sigma_c \frac{\partial g}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}}, & \frac{\partial \sigma}{\partial T} &= \frac{\partial \sigma_c}{\partial T} g + \sigma_c \frac{\partial \tau}{\partial T} \frac{\partial g}{\partial \tau}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

Значения $\frac{\partial g(\xi)}{\partial \xi}$, $\frac{\partial g(\xi)}{\partial \bar{\varepsilon}}$ и $\frac{\partial g(\xi)}{\partial \tau}$ могут быть вычислены в двух случаях. Если $\xi \leq 1$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dg(\xi)}{d\xi} &= (1+\alpha)^{1/\alpha} \left(-\frac{1}{\alpha}\right) \xi^{-1/\alpha-1} = -\frac{(1+\alpha)^{1/\alpha}}{\alpha \xi^{1+1/\alpha}} = -\frac{g(\xi)}{\alpha \xi}, \\ \frac{\partial g(\xi)}{\partial \bar{\varepsilon}} &= \frac{1}{\tau \dot{\bar{\varepsilon}}} \frac{dg(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{\tau \dot{\bar{\varepsilon}}} \left(-\frac{g(\xi)}{\alpha \xi}\right) = -\frac{g(\xi)}{\alpha \bar{\varepsilon}}, \\ \frac{\partial g(\xi)}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}} &= -\frac{\xi}{\dot{\bar{\varepsilon}}} \frac{dg(\xi)}{d\xi} = \frac{(1+\alpha)^{1/\alpha}}{\alpha \dot{\bar{\varepsilon}}} \left(\frac{1}{\xi}\right)^{1/\alpha} = \left(\frac{1+\alpha}{\xi}\right)^{1/\alpha} (\alpha \dot{\bar{\varepsilon}})^{-1} = \frac{g(\xi)}{\alpha \dot{\bar{\varepsilon}}}, \\ \frac{\partial g(\xi)}{\partial \tau} &= -\frac{\xi}{\tau} \frac{dg(\xi)}{d\xi} = \left(\frac{1+\alpha}{\xi}\right)^{1/\alpha} (\alpha \tau)^{-1} = \frac{g(\xi)}{\alpha \tau}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

В случае $\xi > 1$ получаем следующие уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dg(\xi)}{d\xi} &= -\frac{\xi - (\xi + \alpha) \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)^\alpha g(\xi)}{\xi - (\xi - 1) \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)^\alpha \alpha \xi}, \\ \frac{\partial g(\xi)}{\partial \bar{\varepsilon}} &= \frac{1}{\tau \dot{\bar{\varepsilon}}} \frac{dg(\xi)}{d\xi} = -\frac{\xi - (\xi + \alpha) \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)^\alpha g(\xi)}{\xi - (\xi - 1) \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)^\alpha \alpha \bar{\varepsilon}}, \\ \frac{\partial g(\xi)}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}} &= -\frac{\xi dg(\xi)}{\dot{\bar{\varepsilon}} d\xi} = \frac{\xi - (\xi + \alpha) \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)^\alpha g(\xi)}{\xi - (\xi - 1) \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)^\alpha \alpha \dot{\bar{\varepsilon}}}, \\ \frac{\partial g(\xi)}{\partial \tau} &= -\frac{\xi dg(\xi)}{\tau d\xi} = \frac{\xi - (\xi + \alpha) \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)^\alpha g(\xi)}{\xi - (\xi - 1) \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)^\alpha \alpha \tau}. \end{aligned} \tag{3.57}$$

В общем, имеем частные производные, представленные в уравнениях (3.58), (3.59) и (3.60).

$$\frac{\partial g(\xi)}{\partial \bar{\varepsilon}} = \begin{cases} -\frac{g(\xi)}{\alpha \bar{\varepsilon}}, & \xi \leq 1 \\ -\frac{\xi - (\xi + \alpha) \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)^\alpha g(\xi)}{\xi - (\xi - 1) \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)^\alpha \alpha \bar{\varepsilon}}, & \xi > 1 \end{cases} \tag{3.58}$$

$$\frac{\partial g(\xi)}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}} = \begin{cases} \frac{g(\xi)}{\alpha \dot{\bar{\varepsilon}}}, & \xi \leq 1 \\ \frac{\xi - (\xi + \alpha) \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)^\alpha g(\xi)}{\xi - (\xi - 1) \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)^\alpha \alpha \dot{\bar{\varepsilon}}}, & \xi > 1 \end{cases} \tag{3.59}$$

$$\frac{\partial g(\xi)}{\partial \tau} = \begin{cases} \frac{g(\xi)}{\alpha \tau}, & \xi \leq 1 \\ \frac{\xi - (\xi + \alpha) \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)^\alpha g(\xi)}{\xi - (\xi - 1) \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)^\alpha \alpha \tau}, & \xi > 1 \end{cases} \tag{3.60}$$

Расчетная схема безопасной версии метода Ньютона–Рафсона для задачи динамической пластичности с использованием модели РП представлена на рисунке 3.2. Начальная точка x_0 метода НР для модели РП отличается от обсуждаемой в уравнении (3.50), и имеет вид:

$$x_0 = \frac{\bar{\sigma}_{k+1}^{\text{tr}} - \sigma_k^y - \frac{\partial \sigma_k^y}{\partial \bar{\varepsilon}} \Delta \bar{\varepsilon}}{3G + \frac{\partial \sigma_k^y}{\partial \bar{\varepsilon}^p} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \sigma_k^y}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}^p} + \frac{\eta_k}{\rho C_v} \sigma_k^y \frac{\partial \sigma_k^y}{\partial T}}. \tag{3.61}$$

3.4 Заключение главы

В данной главе рассмотрены алгоритмы интегрирования по времени, алгоритм предиктор-корректор для интегрирования напряжений во времени и без-

опасная версия метода Ньютона—Рафсона для решения алгебраических уравнений. Представлена схема расчета, подходящая для упрощенной версии модели РП. Разработанные расчетные схемы используются для моделирования задач динамической пластичности. Результаты обсуждаются в разделе 4.3.

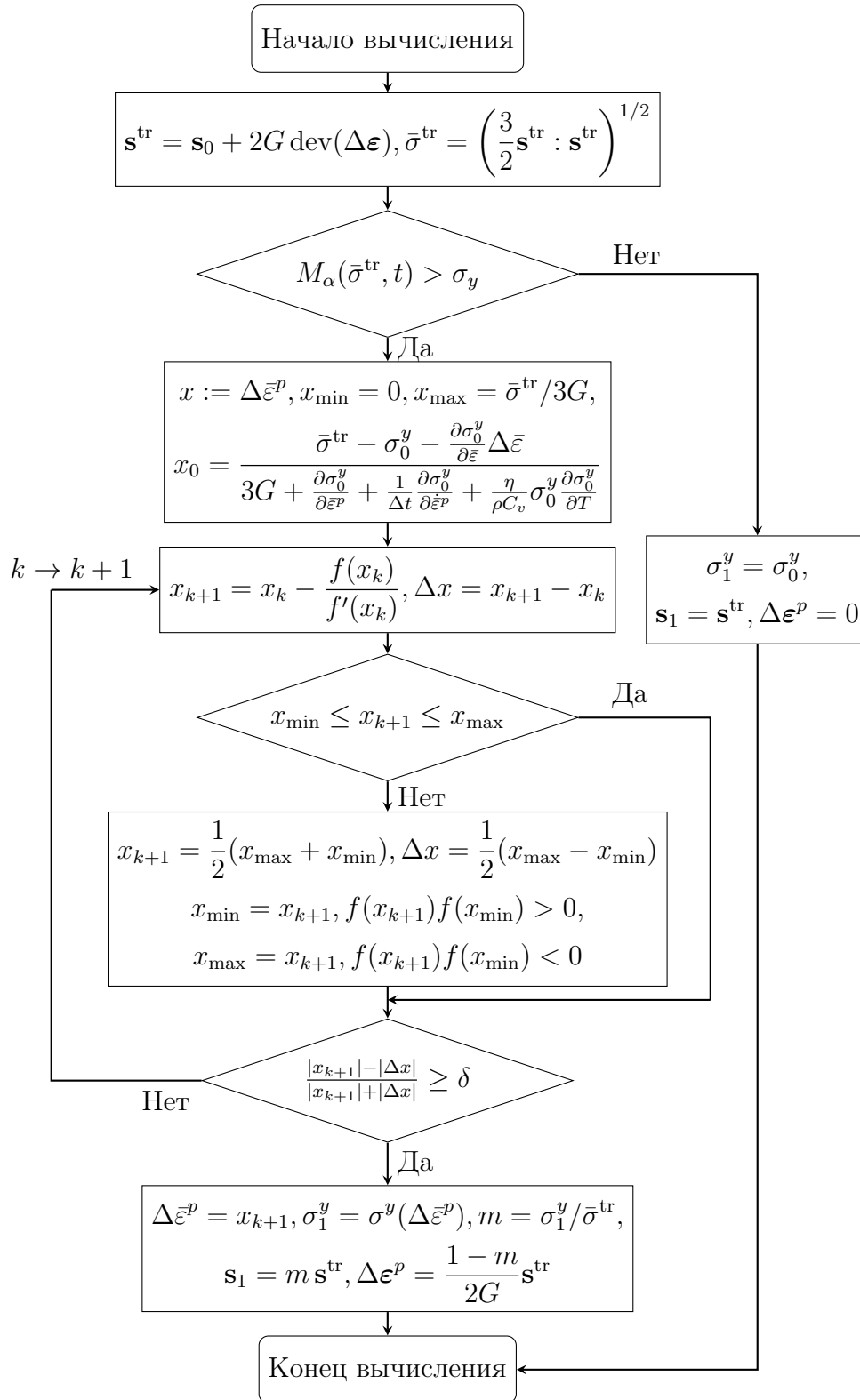


Рис. 3.2: Вычислительная схема для конечно-элементного анализа задач динамической пластичности с использованием упрощенного варианта модели РП (3.53).

Глава 4

Результаты расчета по различным моделям и сравнительный анализ

В этой главе сравниваются поведение первоначальной и модифицированной моделей РП на основе алюминиевых сплавов 6082-T6 и 2519A и титанового сплава Ti-6Al-4V без учета явления термического разупрочнения. Затем термомеханические характеристики стали HSLA-65, коммерческого композитного материала на основе вольфрама 93W-4.9Ni-2.1Fe и Ti-6Al-4V в широком диапазоне скоростей деформации и температур моделируются с использованием модели ИРП, различных феноменологических, физически основанных моделей и модели искусственных нейронных сетей, обсуждаемых в главах 1 и 2. Также исследуются основные отличия между разными типами моделей. Кроме того, сравниваются разные феноменологические температурно-временные соответствия для модели ИРП. В конце, для проверки разработанной в главе 3 расчетной схемы (показанной на рисунке 3.2), проведен конечно-элементный анализ с использованием упрощенного варианта модели РП. Этот анализ служит необходимым шагом к подтверждению точности и надежности разработанного вычислительного подхода.

Большинство результатов, представленных в этой главе, были опубликованы в статьях [72] [84].

4.1 Сравнение результатов: модели ИРП и ПРП

В данном разделе приводится оценка поведения модели при описании эффектов скорости деформации. Упругопластическое поведение алюминиевых сплавов 6082-T6, 2519A и титанового сплава Ti-6Al-4V при широком диапазоне

скоростей деформации описываются моделью ИРП, моделью ПРП и моделью ДжК. Важно отметить, что этот раздел не рассматривает поведение термического разупрочнения, а фокусируется только на эффектах скорости воздействия. Поэтому все моделирования выполняются при истинной деформации менее 0.15. Кроме того, предполагаются постоянные скорости деформации на протяжении всего моделирования. Теоретические результаты для случаев одноосной нагрузки получаются и сравниваются с экспериментальными данными, чтобы оценить точность моделей.

4.1.1 Алюминиевые сплавы 6082-T6 и 2519A

Моко В., Родригес-Мартинес Х. А. и др. провели ряд экспериментов для изучения пластического поведения алюминиевого сплава 6082-T6 (AA6082-T6) при сжатии в широком диапазоне скоростей деформации при комнатной температуре [101]. Эксперименты с низкоскоростным сжатием ($10^{-4} \text{ с}^{-1} < \dot{\epsilon} < 10^{-1} \text{ с}^{-1}$) проводились с использованием гидравлической универсальной испытательной машины. Случаи при среднескоростных и высокоскоростных сжатиях ($950 \text{ с}^{-1} < \dot{\epsilon} < 4500 \text{ с}^{-1}$) исследовались с помощью разрезного стержня Гопкинсона-Кольского (РСГК). Эксперименты при очень высокоскоростных сжатиях ($2 \times 10^4 \text{ с}^{-1} < \dot{\epsilon} < 4 \times 10^4 \text{ с}^{-1}$) проводились с использованием миниатюризированной конфигурации прямого компрессионного испытания (МДИКИ). Кроме того, в исследовании Моко были упомянуты некоторые результаты экспериментов Винцера [102] по динамическому сжатию сплава AA6082-T6. Механизм реакции материала при нагрузке с очень высокой скоростью может быть другим, поэтому в текущей работе не рассматриваются эксперименты при очень высокоскоростных сжатиях ($2 \times 10^4 \text{ с}^{-1} < \dot{\epsilon} < 4 \times 10^4 \text{ с}^{-1}$).

Экспериментальные результаты, полученные при одноосном сжатии в широком диапазоне скоростей деформации, и моделирование моделями ИРП, ДжК и ПРП показаны на рисунках 4.1 (а), (б) и (в). Значения параметров приведены в таблицах 4.1, 4.2 и 4.3. Модуль Юнга при температуре $T = 0 \text{ К}$ и его зависимость от температуры приведены в работе [101], где можно получить модуль Юнга при комнатной температуре. Согласно экспериментальным результатам, наблюдается скоростной эффект, то есть уровень напряжения повышается с увеличением скорости деформации. Модели ИРП и ДжК сравниваются в первую очередь. На рисунках 4.1 (а) и 4.1 (б) видно, что обе модели

хорошо описывают скоростной эффект благодаря своим скоростной-зависимым множителям $\Sigma(t)/\tilde{\Sigma}(t)$ и $1 + C \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0}\right)$, соответственно. В квазистатическом случае ($\dot{\epsilon} = 0.01 \text{ с}^{-1}$), экспериментальные данные и кривые, расчетные по моделям ИРП и ДжК, практически совпадают. Однако в динамических случаях ($950 \text{ с}^{-1} < \dot{\epsilon} < 4500 \text{ с}^{-1}$) модель ИРП показывает лучшую описательную способность.

Нужно подчеркивать три важных момента. Во-первых, при проведении экспериментов обнаруживается три группы уровней напряжений, соответствующие условиям низкоскоростного ($\dot{\epsilon} = 0.01 \text{ с}^{-1}$), среднескоростного ($\dot{\epsilon} = 950 \text{ с}^{-1}$ и 1100 с^{-1}) и высокоскоростного сжатий ($\dot{\epsilon} = 3900 \text{ с}^{-1}$ и 4500 с^{-1}). При среднескоростной деформации уровни напряжения, полученный моделью ИРП, ближе к экспериментальным данным, чем те, полученные моделью ДжК. Кроме того, деформационные кривые, расчетные по модели ДжК при среднескоростной деформации значительно превышают экспериментальные результаты, и они практически не отличаются от кривых при высокоскоростной деформации. В отличие от этого, кривые, полученные моделью ИРП при среднескоростной и высокоскоростной деформациях, отделены друг от друга, и только кривая при скорости деформации 1100 с^{-1} немного превышает экспериментальную. Кроме того, модель ИРП дает три уровня напряжений, которые хорошо соответствуют экспериментальным данным. Однако, модель ДжК получает только два уровня напряжений (квазистатический и динамический). Во-вторых, в испытании при высокоскоростном сжатии обнаруживается явный эффект зуба текучести. После начала пластической деформации динамические кривые сначала незначительно возрастают, а затем опускаются ниже предела текучести. Как показано на рисунке 4.1 (б), уровни напряжения, полученные моделью ДжК при высокоскоростных нагрузках, согласуются с экспериментальными результатами, когда истинная деформация превышает 4%. Тем не менее, в диапазоне деформации, приближающемся к пределу текучести, модель ДжК может не работать. При почти постоянной скорости деформации обе модели ИРП и ПРП могут описывать немонотонное поведение материала. Во-третьих, в численном моделировании (например, методом конечных элементов), помимо закона упрочнения, также важен критерий по пластичности в функции поверхности текучести. Деформационные кривые, расчетные по моделям ИРП (или ПРП) и моделью ДжК, показаны на рисунке 4.1 (г). Значение $C = 0.01$ определяется подгонкой

Таблица 4.1: Значения параметров модели ИРП для различных материалов.

Материалы	Упругость	Пластичность					
	E (ГПа)	σ_y (МПа)	K (МПа)	n	τ (мкс)	α	m
AA 6082T6	30 [101]	306.52	116.48	0.408	2.10	3	5.5
Ti-6Al-4V	114 [82]	773.99	322.75	0.370	459	22	12
Al 2519A	78 [103]	424.30	241.00	0.433	0.65	5	4

Таблица 4.2: Значения параметров модели ДжК для различных материалов.

Материалы	A (МПа)	B (МПа)	n	C	$\dot{\epsilon}_0$ (с ⁻¹)
AA 6082T6	306.52	116.48	0.408	0.01	0.01
Ti-6Al-4V	773.99	322.75	0.370	0.016	0.001
Al 2519A	424.30	241.00	0.433	0.008	0.001

деформационных кривых при различных скоростях деформации. Однако скоростная зависимость предела текучести ($\epsilon_p = 0$) не может быть хорошо описана. Как видно на рисунке 4.1 (г), модель ИРП лучше описывает скоростную зависимость предела текучести, чем критерий по пластичности $\sigma \leq A \left(1 + C \ln \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0}\right)\right)$, используемый в модели ДжК. В результате модель ДжК может давать менее точный результат при моделировании сложной динамической системы. Можно было бы ожидать, что критерий по пластичности ДжК всё еще применим, если значение параметра C было хорошо подобрано согласно зависимости пределов текучести от скорости деформации. Такая коррекция приведена на рисунке 4.1 (г), где $C = 0.0176$. Однако, смоделированные уровни напряжений в диаграммах деформирования заметно превышают экспериментальные точки, как представлено на рисунке 4.1 (д). Таким образом, в случае использования модели ДжК, необходимо пройти компромисс между точным описанием уровней напряжений и пределов текучести.

Результаты, рассчитанные по модели ПРП, хорошо соответствуют экспериментальным данным при динамических нагрузках. Однако при квазистатическом нагружении модель переоценивает напряжений, сравнивая с экспериментальными данными. Это расхождение указывает недостатки модели ПРП в точном описании диаграмм деформирования при разных скоростях деформации. Конкретно, это недостаток возникает из-за отсутствия связи между функцией релаксации $\gamma(t)$ и пластической деформацией $\epsilon_p(t)$, как обсуждено в разделе 2.1.3.

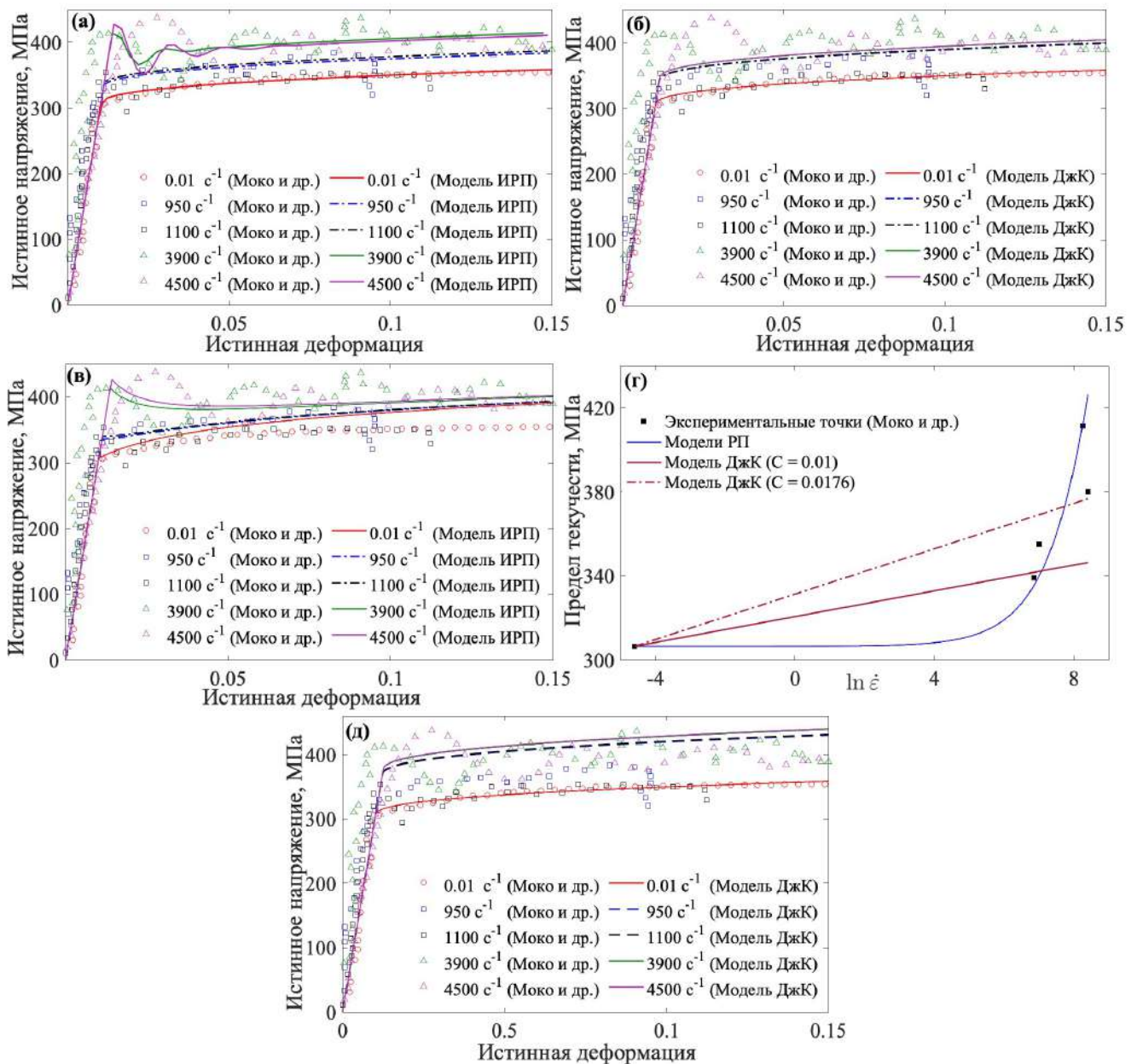


Рис. 4.1: Сравнение кривых деформирования алюминиевого сплава 6082Т6, полученных в испытаниях на сжатие [101], и смоделированных при комнатной температуре и различных скоростях деформации моделями (а) ИРП, (б) ДжК с параметром $C = 0.01$, (в) ПРП и (д) ДжК с параметром $C = 0.0176$. (г) Зависимость предела текучести от скорости деформации, полученная из эксперимента, моделей ПРП и ИРП и модели ДжК. Символы обозначают экспериментальные данные, линии – результаты моделирования.

Таблица 4.3: Определенные значения параметров для различных материалов в модели ПРП.

Материалы	Упругость	Пластичность			
	E (ГПа)	σ_y (МПа)	τ (мкс)	α	β
AA 6082T6	30 [101]	306.52	2.10	3	0.09
Ti-6Al-4V	114 [82]	773.99	459	22	0.45
Al 2519A	78 [103]	424.3	0.65	5	0.09

В работе [89] исследованы зависимости напряжения от деформации алюминиевого сплава 2519A (Al 2519A) при комнатной температуре и различных скоростях деформации. Экспериментальные точки и соответствующие моделирования представлены на рисунках 4.2 (а), (б) и (в). Значения параметров моделей приведены в таблицах 4.1, 4.2 и 4.3. Модуль Юнга дан в работе [103]. Модели ИРП и ПРП показывают разделяющиеся уровни напряжений при больших скоростях деформации, в то время как деформационные кривые, полученные моделью ДжК, почти совмещаются. На рисунке 4.2 (г) показано, что зависимость предела текучести от скорости деформации лучше описывается моделями ПРП и ИРП.

4.1.2 Титановый сплав Ti-6Al-4V

В работе [73] Ху и др. провели серию испытаний на растяжение для изучения квазистатического и динамического пластического поведения коммерческого титанового сплава Ti-6Al-4V под различными условиями нагружения и температурами.

Результаты испытаний на растяжение и описание моделей представлены на рисунках 4.3 (а), (б) и (в). Значения параметров моделей приведены в таблицах 4.1, 4.2 и 4.3. Модуль Юнга приведен в работе [82]. При динамических нагрузках наблюдается падение предела текучести, которое может быть описано моделью ИРП. Все три модели дают удовлетворительные расчетные кривые при большой скорости деформации. Однако в экспериментах заметно, что при высоких скоростях деформации упрочнение материала неочевидно, хотя при квазистатической нагрузке наблюдается заметное упрочнение. Модель ДжК не дает различия в упрочнении при разных скоростях деформации, в то время как модель ПРП и модель ИРП лучше характеризуют стабильное упрочнение материала при динамических условиях. При низкой скорости деформации $\dot{\epsilon} = 1 \text{ c}^{-1}$

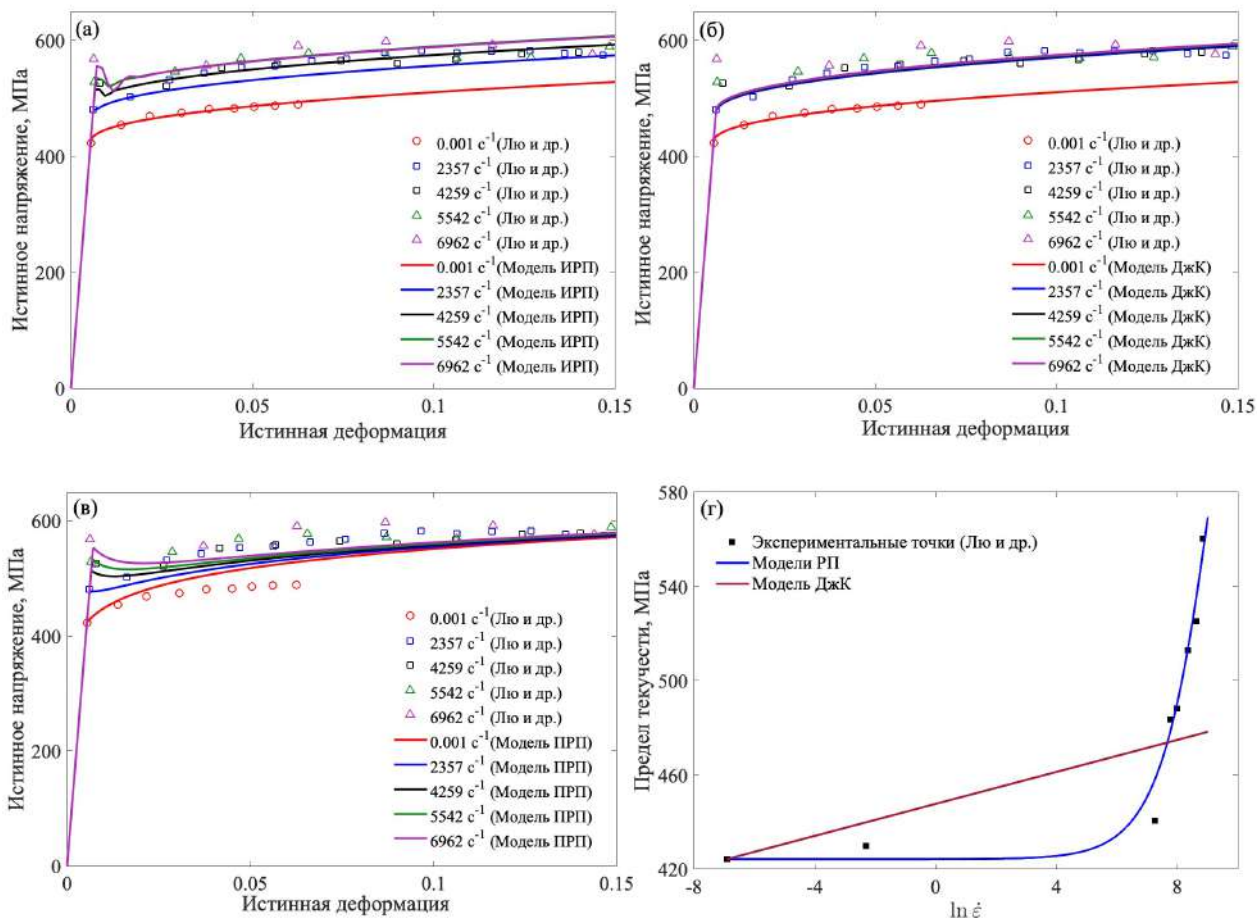


Рис. 4.2: Сравнение кривых деформирования алюминиевого сплава 2519А, полученных в испытаниях на сжатие [89], и смоделированных при комнатной температуре и различных скоростях деформации моделями (а) ИРП, (б) ДжК и (в) ПРП. (г) Зависимость предела текучести от скорости деформации, полученная из эксперимента, моделей ПРП и ИРП и модели ДжК. Символы обозначают экспериментальные данные, линии – результаты моделирования.

модель ДжК показывает более точные результаты по сравнению с другими моделями.

В заключение, модель ДжК дает приемлемые результаты при разных скоростях деформации, но в ущерб точности описания пределов текучести. Кроме того, модель ДжК не может моделировать немонотонное поведение диаграммы деформирования. Модель ПРП, напротив, может более точно описывать пределы текучести и эффект падения напряжений, но она слегка уступает модели ДжК в описании упрочнения при низких скоростях деформации. Модель ИРП продемонстрирует лучшую описательную способность.

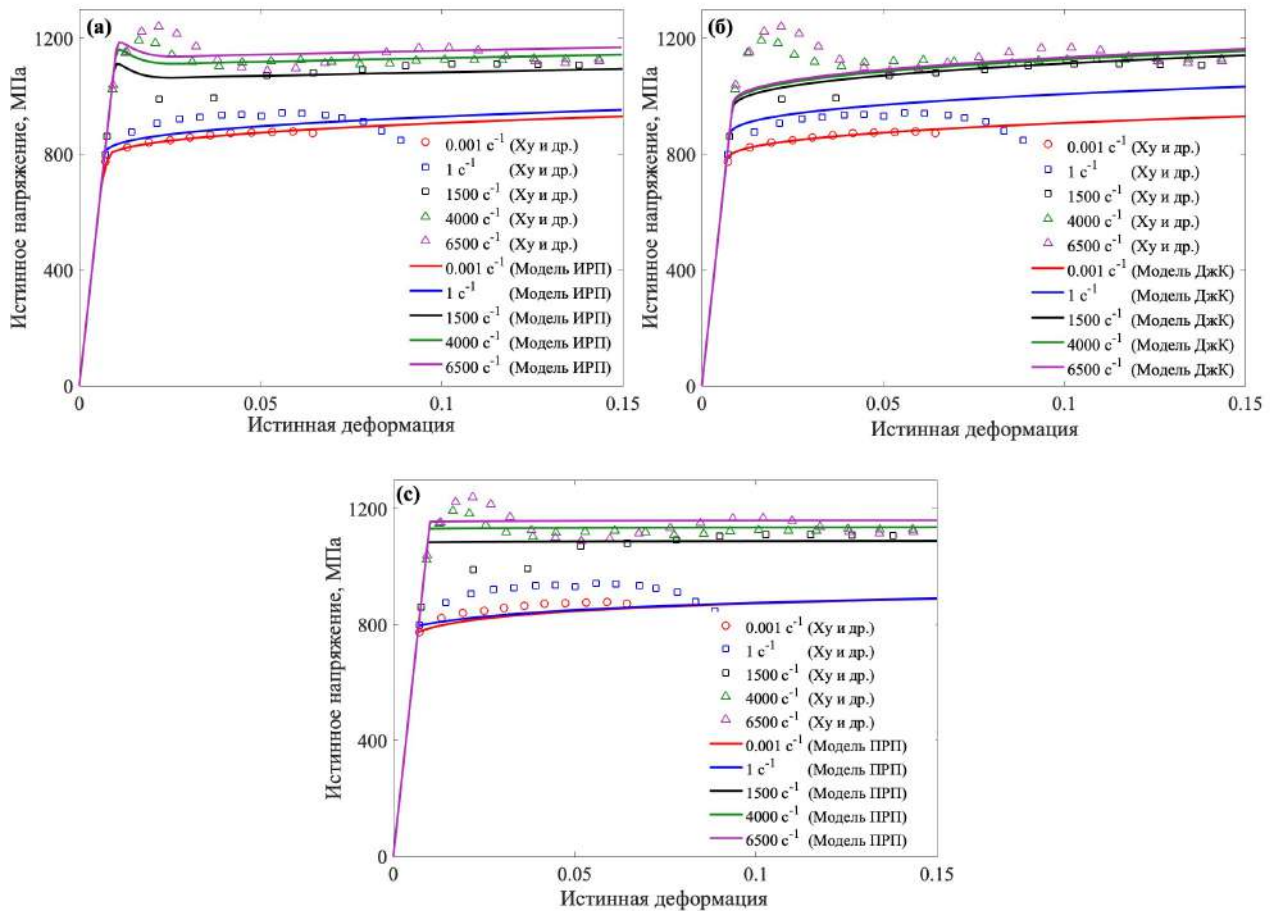


Рис. 4.3: Сравнение диаграмм деформирования сплава Ti-6Al-4V, экспериментально полученных в растяжении [73], и кривых, построенных с использованием модели ИРП (а), модели ДжК (б) и модели ПРП (в) при комнатной температуре и различных скоростях деформации. Зависимость предела текучести от скорости деформации показана на (г). Символы представляют экспериментальные данные, линии – результаты моделей.

4.2 Сравнение результатов: ИРП и другие существующие модели

В этом разделе исследуются термомеханические поведения стали HSLA-65, коммерческого композитного материала на основе вольфрама 93W-4.9Ni-2.1Fe и титанового сплава Ti-6Al-4V в широком диапазоне скоростей деформации и температур с использованием модели ИРП с учетом температурно-временного соответствия. Сравняется описательная способность различных моделей, упомянутых в главе 1. Все моделирования выполняются при постоянной скорости деформации. Начальные значения модельных параметров определяются с

помощью физических определений или подгонки экспериментальных данных. Затем эти значения оптимизируются при помощи процедуры оптимизации для минимизации отклонений между результатами моделей и экспериментальными данными. Способность изученных моделей оценивается количественно с использованием следующей меры погрешности/ошибки описания

$$\Delta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\sigma_i^{\text{exp}} - \sigma_i^{\text{mod}}}{\sigma_i^{\text{exp}}} \right| \times 100\%, \quad (4.1)$$

где N – общее число экспериментальных данных, σ_i^{exp} – экспериментально измеренное истинное напряжение, а σ_i^{mod} – напряжение, вычисленное по моделям. Результаты считаются относительно точными при условии, что погрешность описания Δ составляет менее 5%.

Для исследования отрицательного упрочнения при низких температурах и больших скоростях деформации рассматриваются экспериментальные данные стали HSLA-65. В разделе 4.2.5 особенно рассмотрены основные различия между моделью искусственной нейронной сети (ИНС) и другими моделями на примере экспериментальных данных для композитного материала на основе вольфрама. Кроме того, проверяется работоспособность температурно-временного соответствия, изученного для стали HSLA-65 и композита на основе вольфрама, на примере титанового сплава Ti-6Al-4V.

4.2.1 Коэффициент Тейлора-Куинни

Пластические деформации производят тепло, которое может рассеиваться в окружающую среду и/или остается внутри материала, увеличивая температуру тела. Если скорость производства тепла превышает скорость его отвода, то температура материала повышается. При больших скоростях деформации процесс деформирования носит адиабатический характер. В этом случае быстрый и непрерывный рост температуры во время пластической деформации приводит к одновременному снижению/релаксации напряжения тела. Температурный рост обычно определяется уравнением (1.3), из которого выводится формула (4.2) в одномерном случае.

$$\Delta T = \frac{\eta}{\rho C_v} \int_{\varepsilon_p}^{\varepsilon_p + \Delta \varepsilon_p} \sigma d\varepsilon_p \quad (4.2)$$

4.2.2 Сталь HSLA-65

Как упоминалось в разделе 2.2.3, Немат-Насер и Го провели всестороннее исследование [14] термомеханического поведения стали HSLA-65 с ОЦК структурой. Испытания по сжатию были проведены в широком диапазоне скоростей деформации от скорости 0.001 c^{-1} до 8500 c^{-1} и температурах от 77 до 1000 К. Для квазистатических случаев 0.001 c^{-1} и 0.1 c^{-1} испытания проводились с использованием гидравлической испытательной машины Instron при температурах от 77 до 800 К. Высокоскоростные испытания проводились с использованием РСГК в диапазоне температур от 77 до 1000 К. При температурах выше 700 К напряжение значительно возрастало с увеличением температуры из-за динамического старения при деформации. Это необычное явление не рассматривается в данной диссертации. Поэтому моделирование проводится только в пределах температуры от 77 до 700 К. Модули Юнга стали HSLA-65 при разных температурах представлены в работе [104]. В диапазоне температур от 296 до 700 К, зависимость модуля Юнга от температуры может быть описана соотношением (4.3), упомянутым в работе [38]. E_0 – модуль Юнга при $T = 0 \text{ К}$, T_m – температура плавления, а θ^* – параметр модели. Экспериментально измеренные упругие модули и соответствующие поведения модели (4.3) отображены на рисунке 4.4 (а). Значения параметров модели показаны в таблице 4.4. Значение массовой плотности ρ стали HSLA-65 и коэффициента Тейлора-Куинни η представлены в таблице 4.4. Теплоемкость C_v принимается равной 0.5 J/gK .

$$E(T) = E_0 \left\{ 1 - \frac{T}{T_m} \exp \left[\theta^* \left(1 - \frac{T_m}{T} \right) \right] \right\} \quad (4.3)$$

Экспериментальные диаграммы деформирования стали HSLA-65 при квазистатических скоростях деформации хорошо описываются соотношением (2.30). Таким образом, в данном случае соотношение (2.30) включено в модель ИРП (2.28). Диапазоны значений параметров τ и α при разных температурах, обеспечивающие погрешности Δ менее 5 %, могут быть определены путем подгонки соответствующих экспериментальных кривых деформирования. Эти подходящие диапазоны обозначены зелеными вертикальными линиями на рисунках 4.4 (б) и (в). На рисунке 4.4 (б) представлена зависимость инкубационного времени τ от температуры при фиксированном значении $\alpha = 15$, в то время как на рисунке 4.4 (в) иллюстрирована зависимость параметра α от температуры при

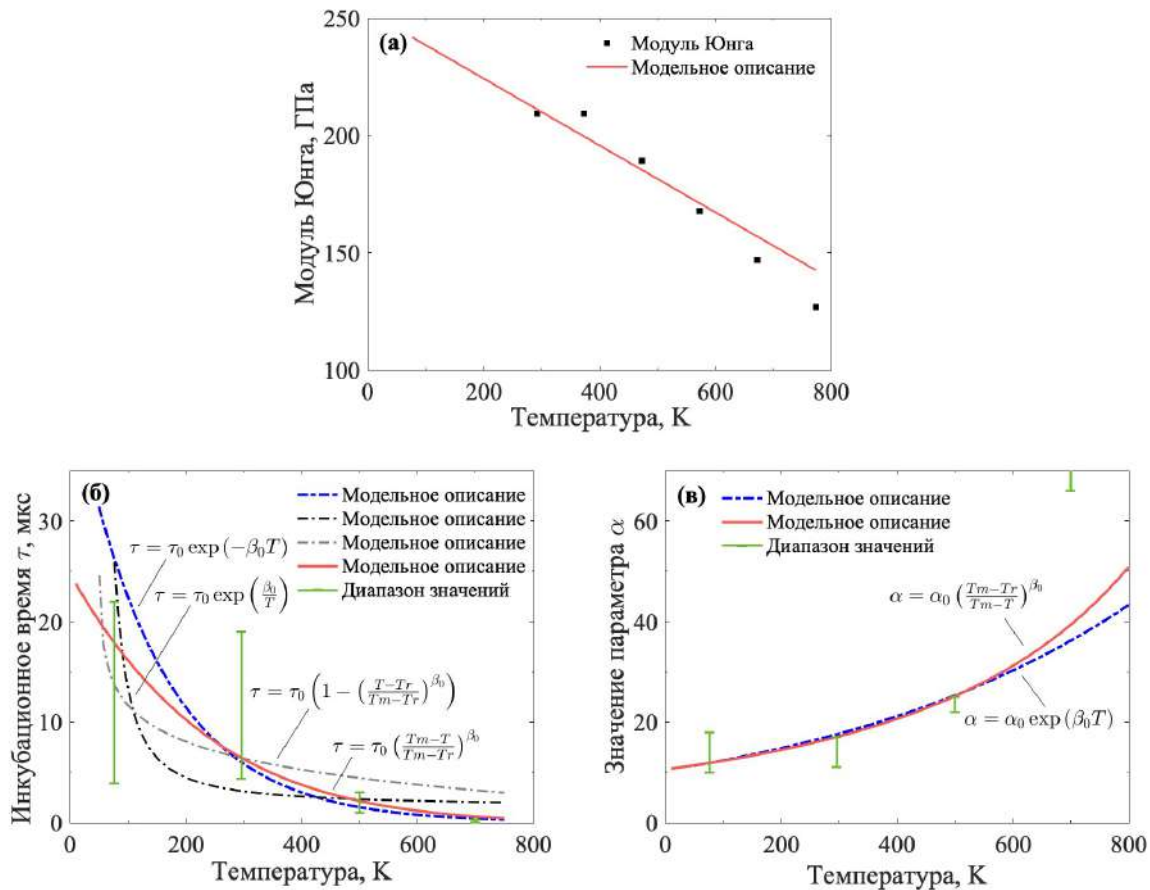


Рис. 4.4: Зависимость модуля Юнга от температуры (а), инкубационного времени τ при фиксированном значении $\alpha = 15$ (б) и параметра α при фиксированном значении $\tau = 6.44$ мкс (в) для стали HSLA-65. Символы представляют экспериментально измеренный модуль Юнга (а). Диапазоны значений для τ (б) и α (в), полученные путем подгонки модели ИРП к набору экспериментальных данных, обозначены зелеными вертикальными линиями. Сплошные и штрих-точечные линии в (б) и (в) соответствуют кривым, рассчитанным по модели ИРП.

фиксированном значении $\tau = 6.44$ мкс. Соотношения (2.34) и (2.37) более точно описывают зависимость параметров τ и α от температуры по сравнению с другими соотношениями. Хотя соотношение (2.37) не позволяет идеально уложить расчетные кривые в диапазон, подходящий для α , при температуре 700 К, оно все равно обеспечивает удовлетворительные диаграммы деформирования, представленные ниже на рисунке 4.5 (б).

На рисунках 4.5 и 4.6 представлены экспериментально полученные диаграммы деформирования и соответствующие расчетные кривые с использованием разных феноменологических и физически-основанных моделей. Рисунок 4.5 демонстрирует результаты моделирования при температурах 77, 296, 500 и 700 К

Таблица 4.4: Значение модули Юнга, массовой плотности, коэффициента Тейлора-Куинни и температуры плавления испытываемых материалов.

Материалы	E_0 (ГПа)	T_m (К)	θ^*	ρ (г/см ³)	η
Сталь HSLA-65 [38][14]	252.80	1773	0	7.8	1
Вольфрам [16]	370	1730	0.5	17.8	0.9
Ti-6Al-4V [105] [74]	109	1941	0.29	4.428	0.9

и больших скоростях деформации 3000 и 8500 c^{-1} . Рисунки 4.5 (а) и (б) показывают результаты, вычисленные по модели ИРП с учетом соотношений (2.34) и (2.37), соответственно. Значения параметров, используемые в модели ИРП, приведены в таблице 4.5 и таблице 4.6 или 4.7. Значения параметров моделей ДжК, ХХЛ¹, ННИ и ЗА указаны в таблицах 4.8, 4.9, 4.10 и 4.11, соответственно. Рисунок 4.6 демонстрирует диаграммы деформирования стали HSLA-65 под квазистатическим нагружением. Ошибки описания (4.1) для разных моделей представлена на рисунке 4.7.

При температуре 77 К и высокоскоростных нагрузках наблюдается отрицательное упрочнение из-за термического разупрочнения, вызванного быстрой пластической диссипации. Расчетные кривые по моделям, основанным на дислокационной механике, хорошо согласуются с экспериментальными данными при разных скоростях деформации. Однако эти модели не описывают отрицательное упрочнение. Модели ДжК и ХХЛ достаточно точно описывают некоторые кривые при больших скоростях деформации, но их результаты страдают в случае медленных нагружений. Экспериментальные данные более точно описываются моделями ИРП, ННИ и ЗА. В частности, модель ИРП показывает тенденцию отрицательного упрочнения благодаря уравнению (1.3) и температурно-временному соответствию, следуя температурной зависимости коэффициента относительных напряжений. Температурно-зависимые соотношения (2.34) и (2.37) дают похожие результаты. Начальные значения параметров модели ННИ приведены в работе [14]. Значения параметров других моделей определяются путем подгонки экспериментальных данных.

¹Поскольку нет данных при скорости деформации 1 c^{-1} , параметры модели ХХЛ для стали HSLA65 определяются с учетом всех доступных кривых и минимизации погрешности. Этот подход может не обеспечить оптимальную работоспособность модели ХХЛ. Желательно иметь экспериментальные диаграммы при скорости деформации 1 c^{-1} для улучшения точности и надежности оценки параметров.

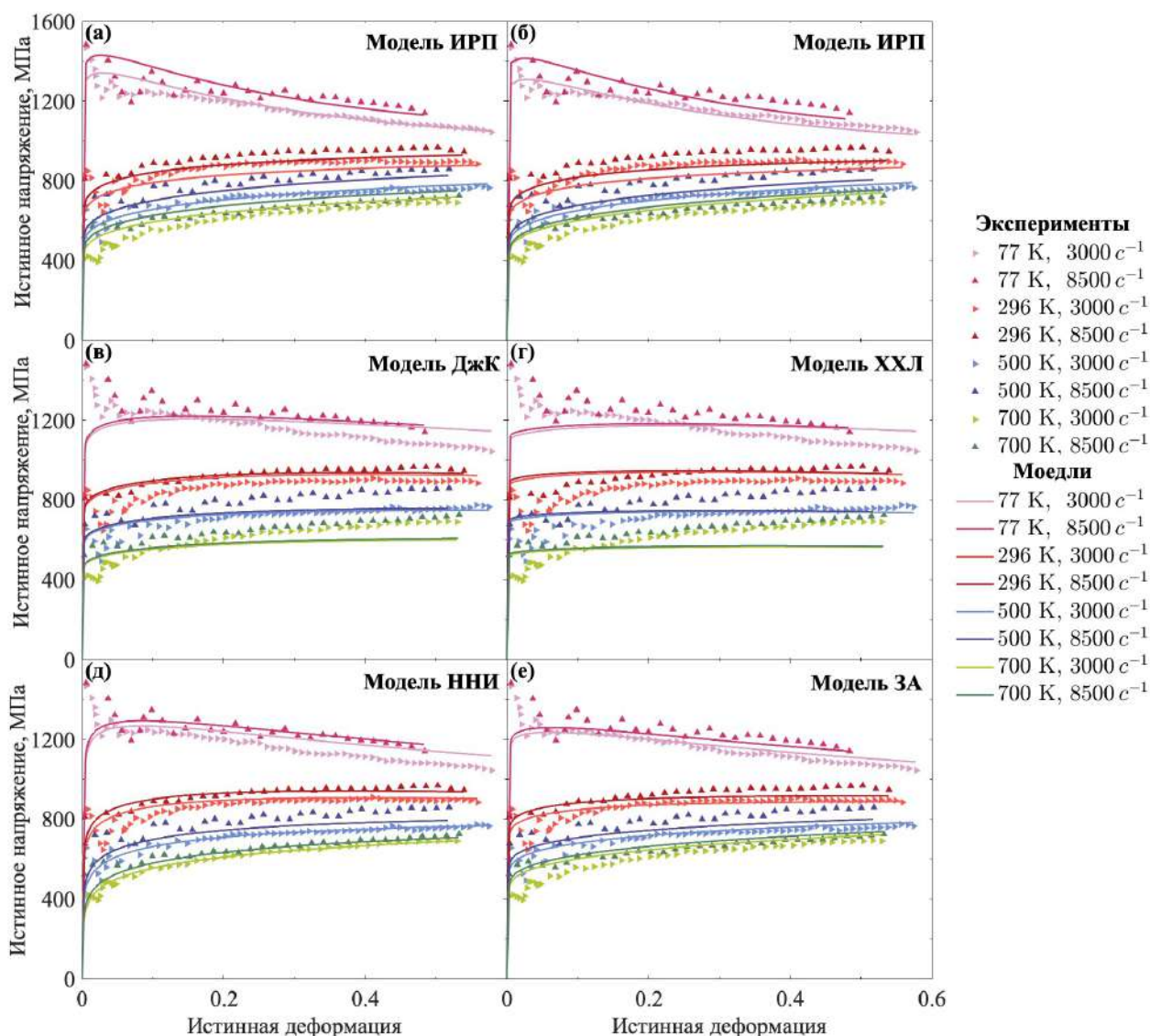


Рис. 4.5: Диаграммы деформирования стали HSLA-65 при 4 температурах и 2 больших скоростях деформаций, а также соответствующие расчетные кривые, построенные с использованием модели ИРП с температурно-зависимым τ (а), модели ИРП с температурно-зависимым α (б), модели ДжК (в), модели ХХЛ (г), модели ННИ для ОЦК металлов (д) и модели ЗА для ОЦК металлов (е).

Таблица 4.5: Значение параметров, определяющих напряжение исследуемых материалов при квазистатическом нагружении соответствием (2.29) или (2.30).

Материалы	σ_0 (МПа)	B_0 (МПа)	n_0	B_1 (МПа)	β_1 (K ⁻¹)	n_1	T_r (K)
Сталь HSLA-65	361.74	386.12	0.35	1049.81	8e-3	–	–
Вольфрам	248.06	1023.17	0.42	2062.87	5.40e-3	–	–
Ti-6Al-4V	759.84	211.08	0.28	–	–	0.72	296

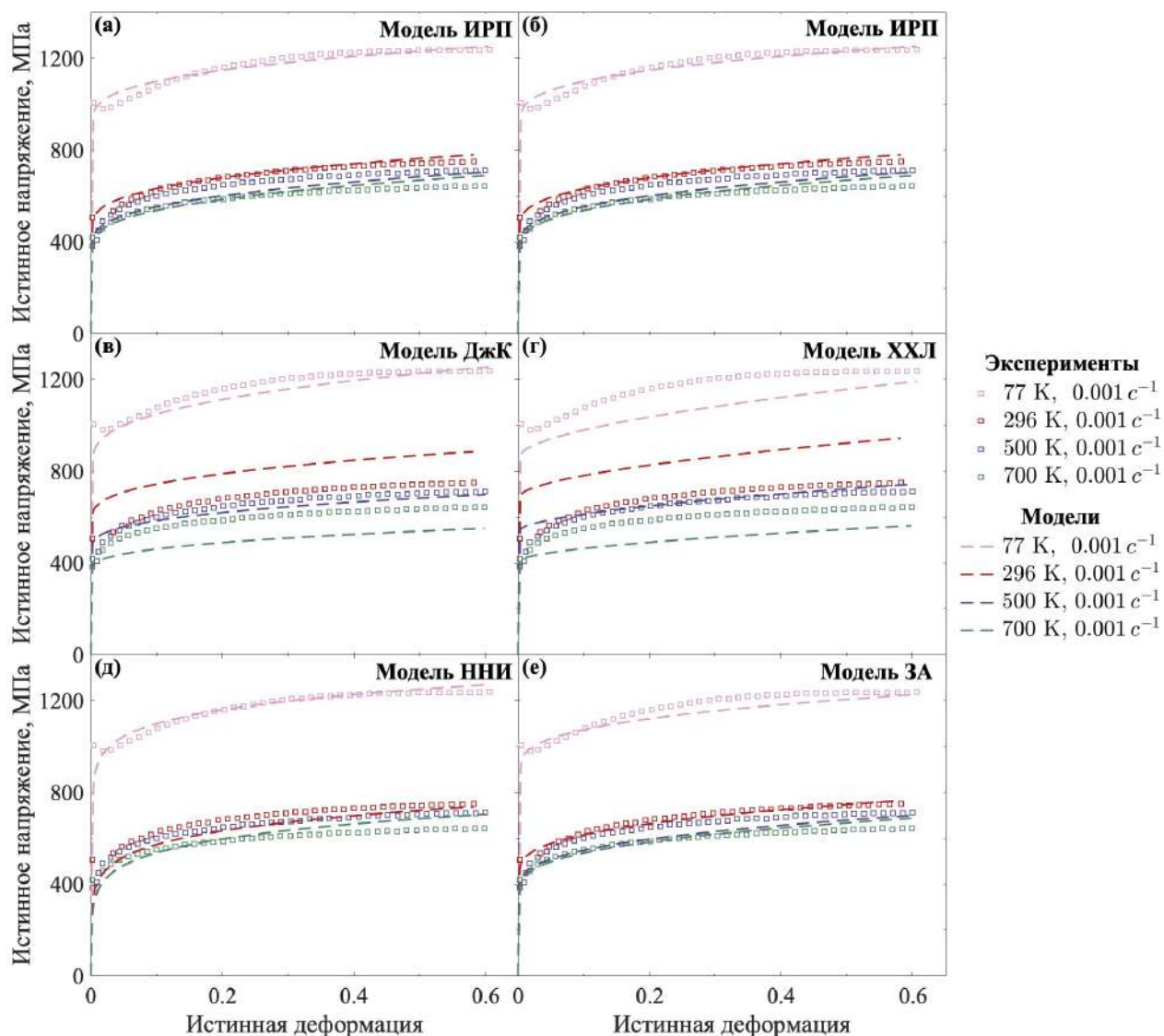


Рис. 4.6: Диаграммы деформирования стали HSLA-65 при 4 температурах и 1 малой скорости деформаций, а также соответствующие расчетные кривые, построенные с использованием модели ИРП с температурно-зависимым τ (а), модели ИРП с температурно-зависимым α (б), модели ДжК (в), модели ХХЛ (г), модели ННИ для ОЦК металлов (д) и модели ЗА для ОЦК металлов (е).

Таблица 4.6: Значение параметров, используемых в модели ИРП с температурно-зависимым τ , определенным соотношением (2.34).

Материалы	τ_0 (мкс)	β_0	α	m	Tr (K)
Сталь HSLA-65	6.44	7.38	15	1	296
Вольфрам	118	2.08	10	1	173
Ti-6Al-4V	1300	2.35	25	5	296

Таблица 4.7: Значение параметров, используемых в модели ИРП с температурно-зависимым α , определенным соотношением (2.37).

Материалы	τ (мкс)	α_0	β_0	m	T_r (K)
Сталь HSLA-65	6.44	17.05	2.62	1	296
Вольфрам	110	9.98	0.94	1	173
Ti-6Al-4V	1300	24.97	0.70	5	296

Таблица 4.8: Значение параметров исследуемых материалов, используемых в модели Джонсона-Кука (ДжК).

Материалы	A (МПа)	B (МПа)	n	C	$\dot{\epsilon}_0$ (с ⁻¹)	m	T_r (K)
Сталь HSLA-65	969.30	570.98	0.382	0.015	1e-3	0.494	50
Вольфрам [16]	1011.10	1601.50	0.4982	0.0305	1	0.7263	173
Ti-6Al-4V	759.84	211.08	0.28	0.02	0.001	0.72	296

Таблица 4.9: Значение параметров исследуемых материалов, используемых в модели Хан-Хуан-Лян (ХХЛ).

Материалы	A (МПа)	B (МПа)	n_0	n_1	D_0 (с ⁻¹)	$\dot{\epsilon}_0$ (с ⁻¹)	C	m	T_r (K)
Сталь HSLA-65	772.93	337.38	0.584	0.333	1e6	1	0.016	1.64	296
Вольфрам [16]	264.6	1533.7	0.2172	3.9588	1e6	1	0.2196	1.1444	288
Ti-6Al-4V	851.79	91.94	0.087	2.45	1e6	1	0.032	1.50	296

Таблица 4.10: Значение параметров исследуемых материалов, используемых в моделях Немат-Нассера (ННИ или ННЛ).

Материалы	a (МПа)	n	σ_0 (МПа)	a_0	n_0	k/G_0 (K ⁻¹)	$\dot{\epsilon}_0$ (с ⁻¹)	q	p
Сталь HSLA-65 [14]	760	0.15	1450	–	–	10.6e-5	4e8	2	2/3
Вольфрам [16]	1154.4	0.2635	2061.4	–	–	3.89e-5	2e10	3/2	1/2
Ti-6Al-4V	685	0.05	1037.59	0	1	6.2e-5	1.32e10	2	1

Таблица 4.11: Значение параметров исследуемых материалов, используемых в модели Зерилли-Армстронга (ЗА).

Материалы	σ_a (МПа)	B (МПа)	β_0 (K ⁻¹)	β_1 (K ⁻¹)	B_0 (МПа)	n	α_0 (K ⁻¹)	α_1 (K ⁻¹)
Сталь HSLA-65	361.74	1049.81	6.39e-3	3.23e-4	386.12	0.35	–	–
Вольфрам [16]	230.50	1864.60	4.01e-3	2.49e-4	1083.10	0.4355	–	–
Ti-6Al-4V	513.73	1167.99	3.49e-3	1.54e-4	2812.71	–	0.31	0

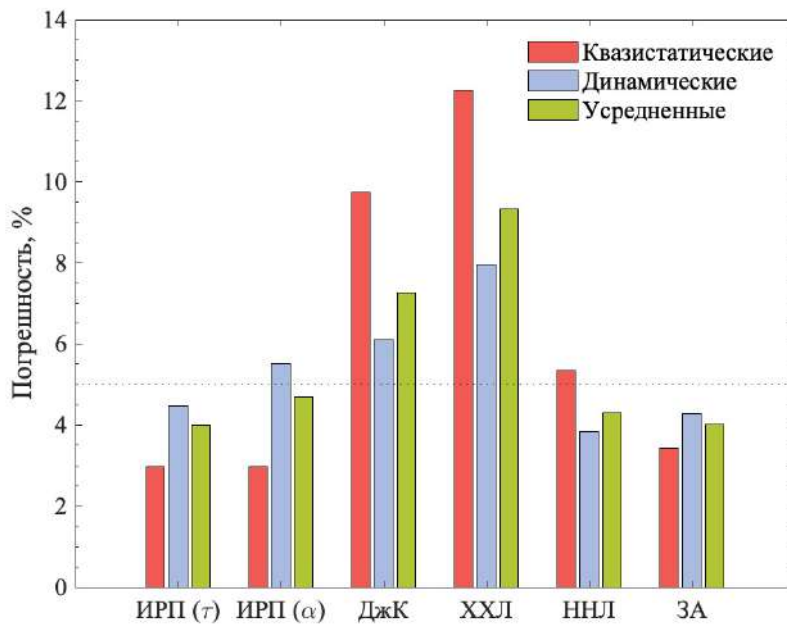


Рис. 4.7: Сравнение разных моделей при описании диаграмм деформирования стали HSLA-65.

4.2.3 Композит на основе вольфрама 93W–4.9Ni–2.1Fe

Щу и Хуан провели серию испытаний на сжатие композита на основе вольфрама 93W–4.9Ni–2.1Fe с ОЦК структурой [16] при широком диапазоне скоростей деформации от 0.001 c^{-1} до 3000 c^{-1} и температуре от 173 до 873 К. Квазистатические испытания на сжатие со скоростями деформации 0.001 c^{-1} и 1 c^{-1} проводились с использованием испытательной машины MTS с гидравлическим приводом. Динамические испытания на сжатие со скоростями деформации 200 c^{-1} , 1000 c^{-1} и 3000 c^{-1} проводились с использованием РСГК. Эти динамические испытания проводились при повышенных температурах 288–873 К с использованием электротермических ячеек. Модуль Юнга исследуемых материалов при разных температурах был представлен в работе [16]. Зависимость модуля Юнга от температуры также описывается уравнением (4.3). Значения требуемых параметров, а также плотности массы ρ образцов и коэффициента Тейлора-Куинни η указаны в таблице 4.4. Температурно-зависимая удельная теплоемкость C_v принимается как функция $C_v = 162.92 - 0.00995T + 1.74 \times 10^{-5} T^2$ ($\times 10^{-3} \text{ J/gK}$, для $0^\circ\text{C} \leq T \leq 1000^\circ\text{C}$) [16].

Диапазоны значений для τ и α , обеспечивающие погрешность Δ менее 5 %, представлены на рисунке 4.8. Уравнения (2.34) и (2.37) удовлетворительно

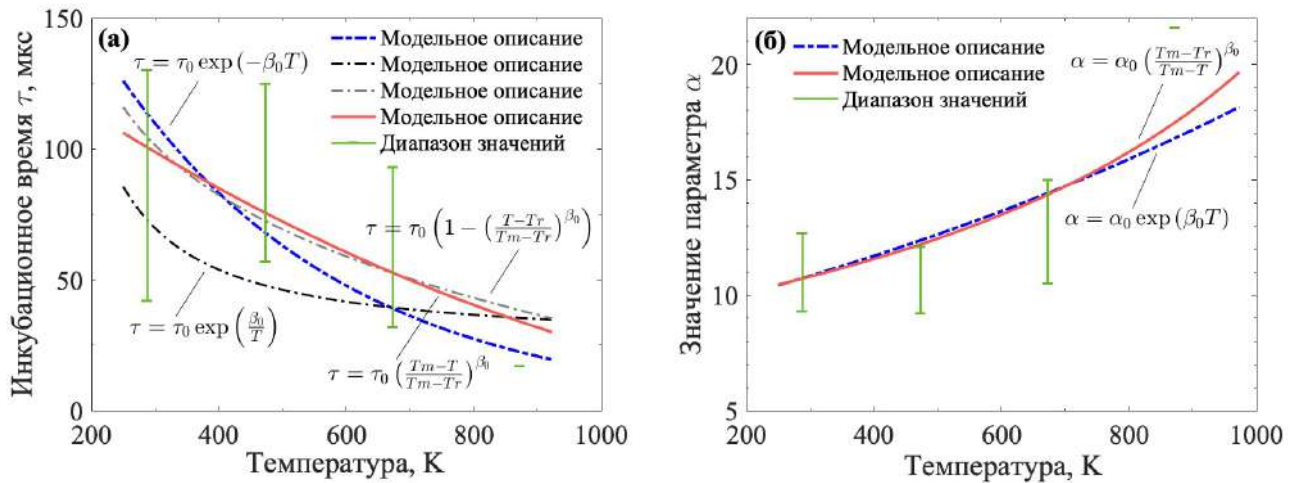


Рис. 4.8: Зависимость от температуры инкубационного времени τ при фиксированном значении $\alpha = 10$ (а) и параметра α при фиксированном значении $\tau = 101$ мкс (б) для композита на основе вольфрама 93W–4.9Ni–2.1Fe. Диапазоны значений для τ (а) и α (б), полученные путем подгонки модели ИРП к набору экспериментальных данных, обозначены зелеными вертикальными линиями. Сплошные и штрих-точечные линии соответствуют кривым, рассчитанным по модели ИРП.

описывают зависимость температуры от τ и α , соответственно. Хотя кривая, расчетная по соотношению (2.32), также в основном лежит внутри диапазонов для τ , соотношение (2.34) дает меньшую погрешность. При температуре 873 K, погрешность модели ИРП составляет около 6–7 %. Таким образом, вместо диапазона значений изображается только одна зеленая точка. Значения параметров представлены в таблицах 4.6 и 4.7. Диаграммы деформирования и описания модели при разных скоростях деформации и температурах представлены на рисунках 4.9 и 4.10, соответственно. Квазистатические диаграммы деформирования хорошо описываются соотношением (2.30), используемом в модели ИРП. Значения параметров указаны в таблице 4.5. Значения параметров моделей ДжК, ХХЛ, ННИ и ЗА были приведены в работе [16]. Окончательные значения параметров, использованные в моделях ДжК, ХХЛ, ННИ и ЗА, приведены в таблицах 4.8, 4.9, 4.10 и 4.11, соответственно.

Экспериментальные данные также описываются моделью ИНС с 1 слоем и 512 нейронами, то есть структурой 3–512–1 на рисунке 1.1. Общее количество встроенных параметров составляет 2561, и результаты модели представлена на рисунке 4.11 (а), (б) и (в). Набор данных для обучения модели ИНС представляют экспериментальные данные, полученные при низких скоростях деформации 0.001 c^{-1} и 1 c^{-1} , как показано на рисунке 4.11 (а), а также при больших скоро-

стях деформации 200 c^{-1} и 3000 c^{-1} , приведенных на рисунке 4.11 (б). Количество точек данных для обучения составляет 3600, поскольку всегда можно получить достаточное количество точек из непрерывных кривых деформирования, и часть из них представлена на рисунках 4.11 (а) и (б). Проверка способности модели проводится с использованием экспериментальных данных при скорости деформации 1000 c^{-1} , и результаты представлены на рисунке 4.11 (в). Экспериментальные точки представлены символами, а сплошные линии указывают результаты модели. Ошибки описания разных моделей отражены на рисунке 4.12 (а), среди которых более точное описание предоставляется моделями ИРП, ЗА и ИНС. Заметим, что модель ИНС обладает наилучшей описательной способностью, так как большое количество параметров всегда позволяет достичь относительно точных результатов. Ошибки описания разных моделей на проверочном наборе данных представлены на рисунке 4.12 (б), где модель ИНС, кажется, утрачивает свое превосходство. Большая погрешность модели ИНС по сравнению с другими моделями, показанная на рисунке 4.12 (б), объясняется и подробно обсуждается в разделе 4.2.5, отсюда также выводятся основные различия между моделью ИНС и остальными рассматриваемыми моделями.

4.2.4 Ti-6Al-4V

Как обсуждено в разделах 4.2.2 и 4.2.3, для стали HSLA-65 и композита на основе вольфрама зависимости τ от температуры (2.34) и α от температуры (2.37) дают лучшие результаты. Поэтому эти зависимости проверяются на экспериментальных данных широко используемого сплава Ti-6Al-4V. В то же время, также проверяется функция упрочнение (2.29), хотя соотношение (2.30) тоже хорошо описывает термическое разупрочнение в квазистатическом случае.

В исследовании [82] Шу and Хуан провели серию испытаний для изучения квазистатической и динамической пластической реакции сплава Ti-6Al-4V, который имеет ГПУ структуру, при разных термомеханических условиях нагружения. Подробно рассмотрены эффект скорости деформации, эффект упрочнения, вида напряженного состояния и температурного влияния. Здесь мы сосредоточимся на испытаниях на растяжение, которые показали интересное немонотонное поведение. В работе [105] приведены значения модуля Юнга для Ti-6Al-4V при разных температурах. Температурная зависимость модуля Юнга может быть точно описана с использованием соотношения (4.3), как представлено на

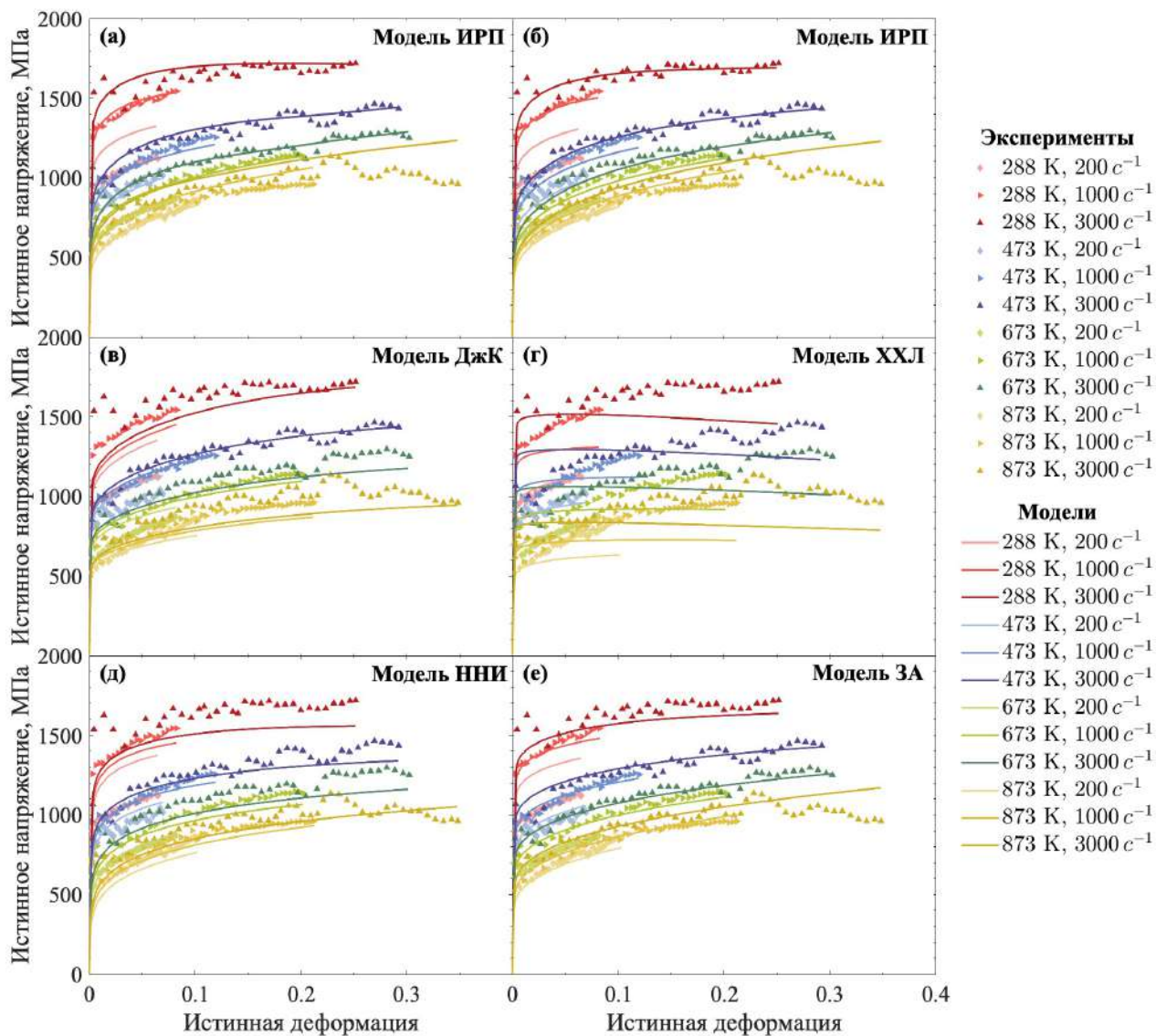


Рис. 4.9: Диаграммы деформирования композита на основе вольфрама $93\text{W}-4.9\text{Ni}-2.1\text{Fe}$ при 4 температурах и 3 больших скоростях деформаций, а также соответствующие расчетные кривые, построенные с использованием модели ИРП с температурно-зависимым τ (а), модели ИРП с температурно-зависимым α (б), модели ДжК (в), модели ХХЛ (г), модели ННИ для ОЦК металлов (д) и модели ЗА для ОЦК металлов (е).

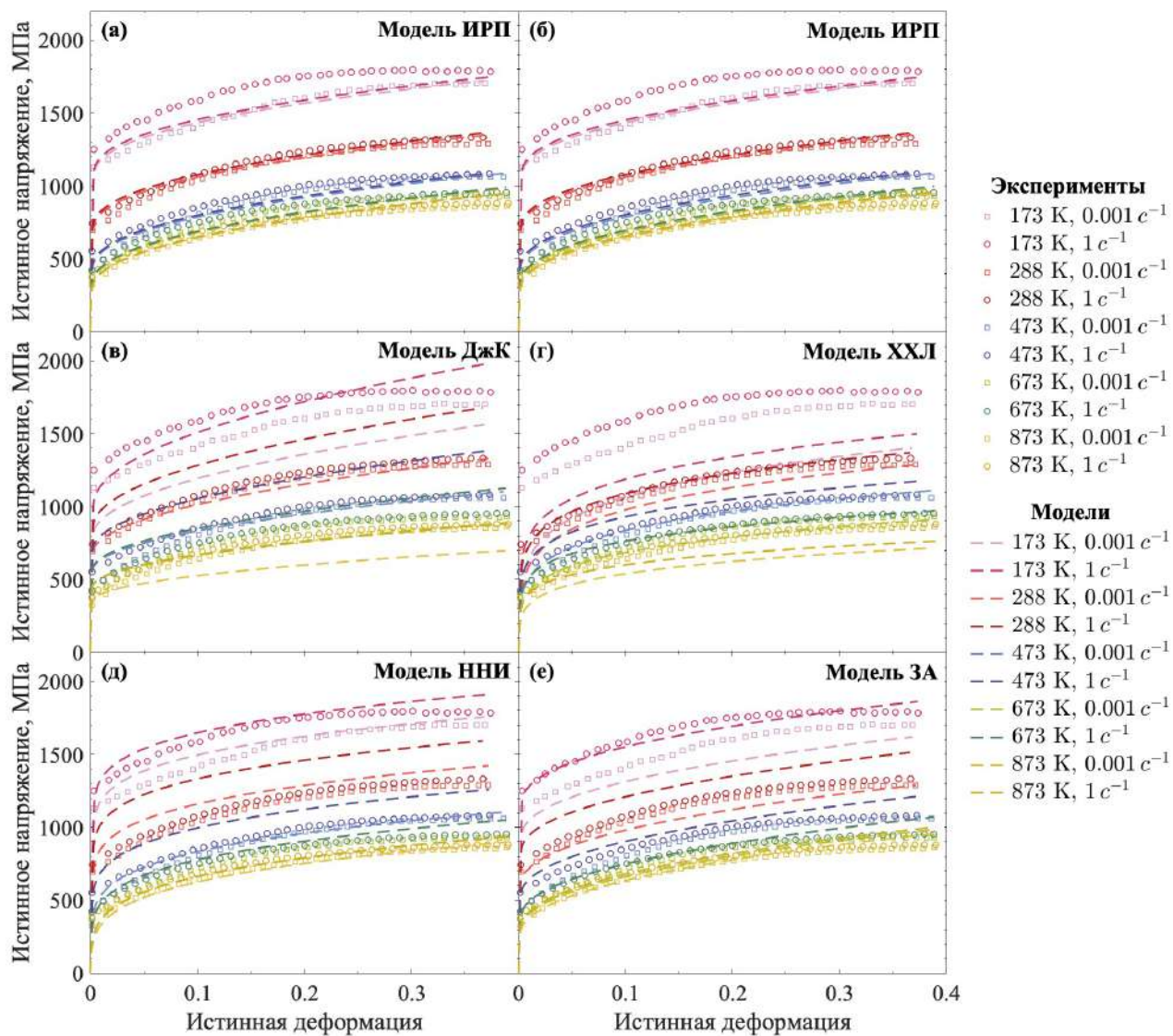


Рис. 4.10: Диаграммы деформирования композита на основе вольфрама 93W-4.9Ni-2.1Fe при 5 температурах и 2 малых скоростях деформаций, а также соответствующие расчетные кривые, построенные с использованием модели ИРП с температурно-зависимым τ (а), модели ИРП с температурно-зависимым α (б), модели ДжК (в), модели ХХЛ (г), модели ННИ для ОЦК металлов (д) и модели ЗА для ОЦК металлов (е).

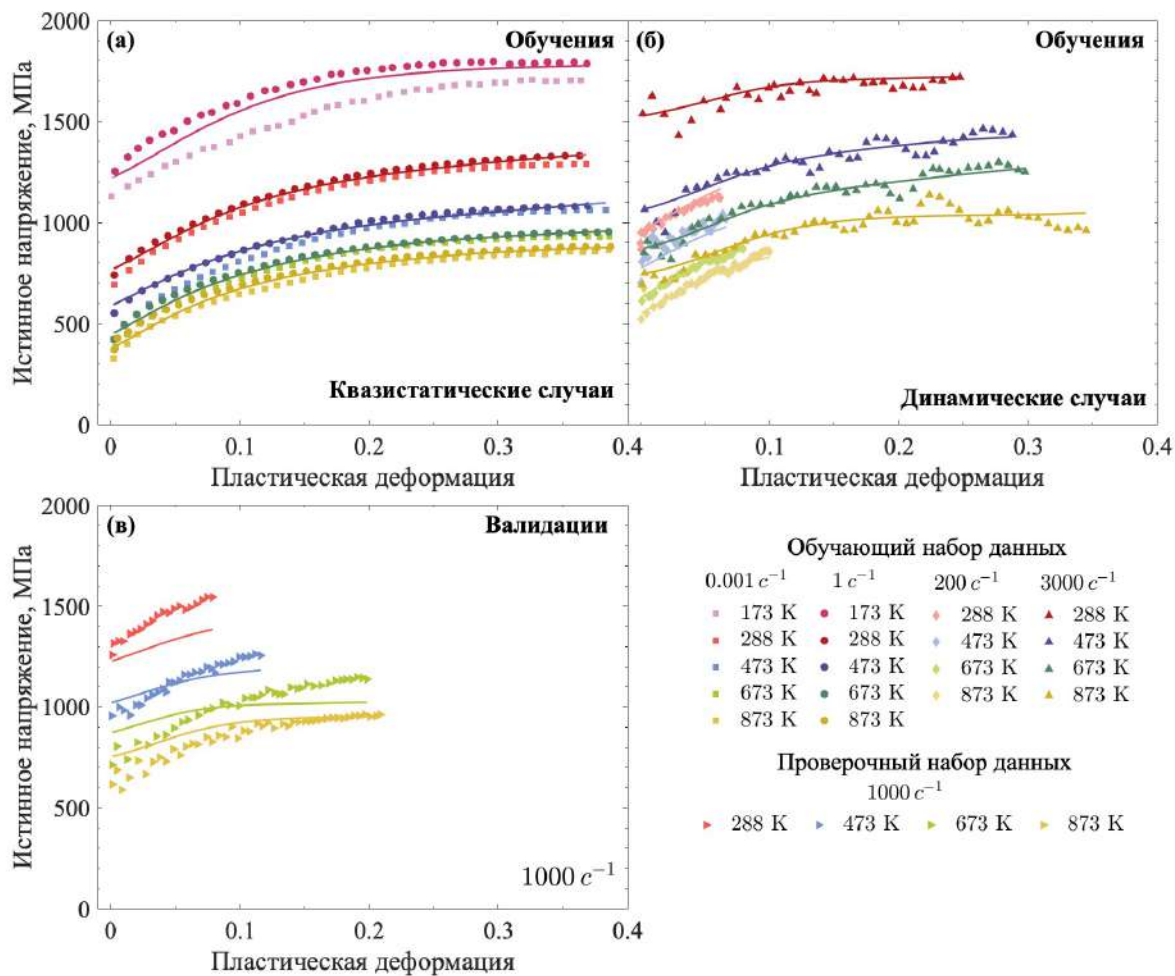


Рис. 4.11: Поведение модели искусственной нейронной сети (ИНС) в описании диаграмм деформирования композита на основе вольфрама 93W–4.9Ni–2.1Fe при различных температурах и скоростях деформации. Обучающий набор данных включает экспериментальные данные, полученные при статических нагружениях $0.001 c^{-1}$ и $1 c^{-1}$ (а) а также при динамических нагружениях $200 c^{-1}$ и $3000 c^{-1}$ (б). Валидация модели проводится с использованием экспериментальных данных при скорости деформации $1000 c^{-1}$ (в). Экспериментальные данные представлены символами, а сплошные линии обозначают расчетные кривые.

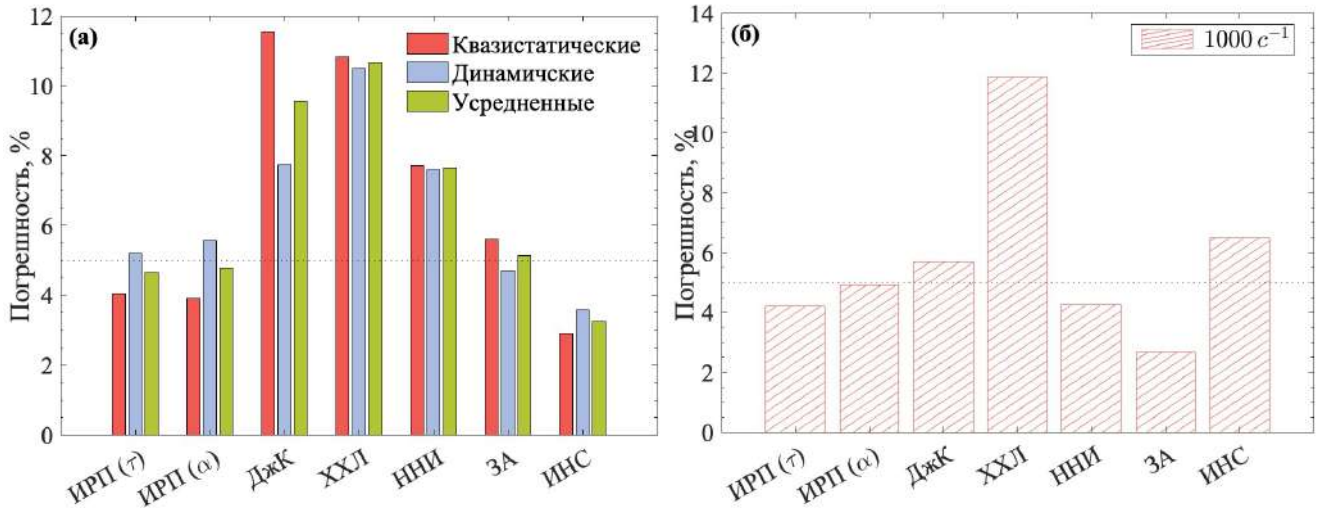


Рис. 4.12: Сравнение погрешностей различных моделей в описании диаграмм деформирования коммерческого композита на основе вольфрама 93W–4.9Ni–2.1Fe. Включено сравнение погрешностей в отдельных случаях квазистатической и динамической нагрузки, а также их усредненных значений (а). В то же время, особое внимание уделяется погрешность модели ИНС на ее проверочном наборе данных (1000 c^{-1}) и ее сравнению с другими моделями (б).

рисунке 4.13 (а). Таблица 4.4 показывает значения параметров моделей, а также плотности массы ρ образцов и коэффициента Тейлора-Куинни η [74]. Кроме того, в работе [74] использована зависимость удельной теплоемкости от температуры ($C_v = (559.77 - 0.1473T + 0.00042949T^2) \times 10^{-3} \text{ J/(gK)}$ ($278 \text{ K} < T < 1144 \text{ K}$)).

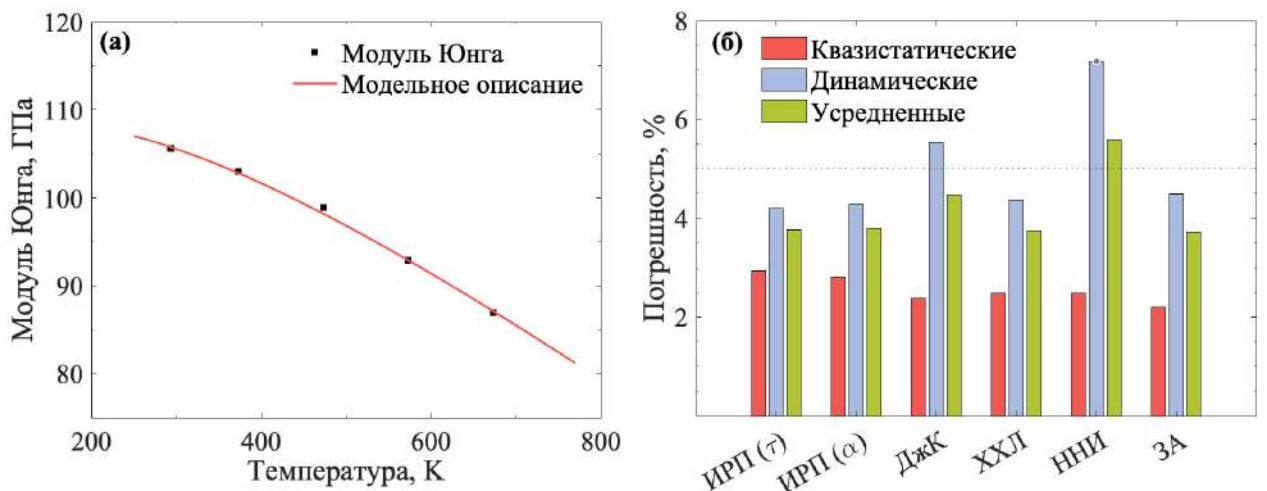


Рис. 4.13: Зависимость модуля Юнга от температуры (а) и погрешность различных моделей (б) для сплава Ti-6Al-4V. Символы представляют экспериментально измеренный модуль Юнга. Сплошные линии соответствуют кривым, рассчитанным по модели (4.3).

На рисунке 4.14 представлены диаграммы деформирования сплава Ti-6Al-4V при разных скоростях деформации и температурах. Начальные значения

параметров для моделей ХХЛ, ННЛ и ЗА для ГПУ металлов устанавливаются на основе работ [74], [106] и [107], соответственно. Затем эти значения оптимизируются с использованием процедуры оптимизации для минимизации ошибок между описательными и экспериментальными результатами. Окончательные значения параметров, используемые в моделях ДжК, ХХЛ, ННЛ и ЗА, приведены в таблицах 4.8, 4.9, 4.10 и 4.11, соответственно. Значения параметров, использованные в модели ИРП, приведены в таблице 4.5 и таблице 4.6 или 4.7. Рисунок 4.13 (б) показывает ошибки описания разных моделей, среди которых модели ИРП, ДжК, ХХЛ и ЗА дают относительно точные результаты. Однако модель ЗА не описывает упрочняющее поведение материала при низких скоростях деформации. Среди всех упомянутых моделей только модель ИРП может учитывать тенденцию немонотонного характера кривых при больших скоростях нагружения.

4.2.5 Отличия между моделью ИНС и другими моделями

В этом разделе термин "другие модели" специфически относится к феноменологическим и физически основанным моделям, как показано в выражениях (2.38)–(1.16). Как обсуждено в разделе 1.4, модель ИНС аппроксимирует определяющее соотношение $\sigma = F(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}, T)$ с помощью комбинации активной функции (1.20) и линейной регрессии (1.21), требующих большого количества параметров весов и смещений. Поэтому модель ИНС изучает закономерности напрямую из имеющихся данных, не объясняя смысл аппроксимированных зависимостей. Ее поведение значительно зависит от качества представленных данных. В то время как другие рассматриваемые модели предлагаются (или "обучаются" человеком) на основе анализа "правил" (или законов). Эти проанализированные правила защиты математически в моделях, следовательно, их описательные и предсказательные возможности ограничены. В этом состоит основное отличие между моделью ИНС и другими моделями. Изучаем это различие в двух аспектах: методологии анализа данных и интерпретируемости.

Одно из основных преимуществ алгоритма ИНС заключается в его общности. Поведение модели ИНС зависит от данных, а не от правил. Она может "автоматически" извлекать даже неявные характеристики или паттерное поведение заданного набора данных, не обращая внимания на тип или смысл данных. Эта общность является характеристикой большинства методов аппроксимации, но

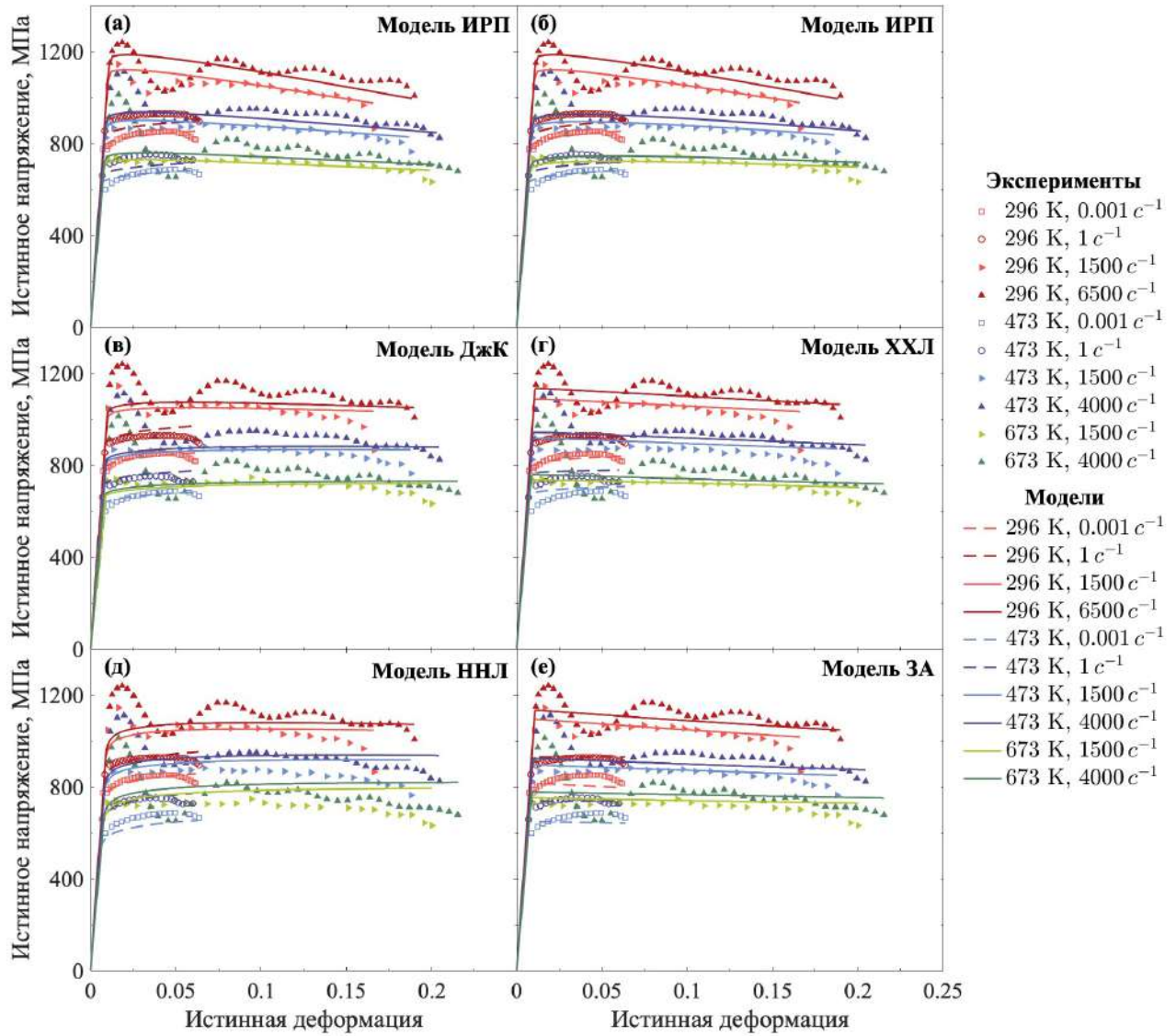


Рис. 4.14: Диаграммы деформирования сплава Ti-6Al-4V при 3 температурах и 5 скоростях деформаций, а также соответствующие расчетные кривые, построенные с использованием модели ИРП с температурно-зависимым τ (а), модели ИРП с температурно-зависимым α (б), модели ДжК (в), модели ХХЛ (г), модели ННЛ для ГПУ металлов (д) и модели ЗА для ГПУ металлов (е).

кажется, что ИНС предоставляет более мощный метод аппроксимации (1.18) по сравнению с классическими подходами (1.17). Он может оказаться более преимущественным при решении сложных многомерных задач. Однако из-за своей природы о зависимости от данных он более чувствителен к качеству данных. В машинном обучении модель, обученная слишком хорошо на обучающем наборе данных, может стать слишком сложной и плохо обобщать новые, невиданные данные. Это переобучение модели и оно может происходить, когда у модели слишком много параметров или она обучается слишком много раз, в результате чего она подстраивается под "шум" или случайные флуктуации в обучающих данных. Переобучение модели ИНС может быть обнаружено путем оценки ее поведения на отдельном наборе данных для проверки. Таким образом, для анализа данных и извлечения конкретных паттернов из них модели ИНС требуется разделить данные как минимум на две группы: обучающий набор данных и проверочный набор данных. Проверочный набор данных часто используется для искусственной настройки значений гиперпараметров в достаточно простых случаях. Описательная способность модели ИНС может быть приписана ее способности извлекать неявные паттерные поведения из доступных данных, включая обучающие и проверочные наборы данных. В отличие от этого, другие модели основаны на правилах, скрытых внутри данных. Паттерное поведение уже заранее математически описаны с использованием небольшого количества параметров. И это делается благодаря надежному научному и интерпретируемому анализу экспериментальных фактов. Все имеющиеся данные могут использоваться для проверки их описательных способностей, и они не подстраиваются под шум или случайные флуктуации данных. Описательная способность других моделей определяется их способностью математически адаптировать установленные правила/паттерны к существующим данным. Таким образом, их описательные и предсказательные возможности ограничены. Новые нетипичные физические явления часто требуют введения дополнительных членов в существующую модель, в то время как для модели ИНС такие изменения не требуются.

Модель ИНС, являющаяся "черным ящиком", не способна (в данный момент) интерпретировать физическое значение параметров или саму модель. Она может быть рассмотрена как некая чистая эмпирическая модель, но с большим количеством параметров. Это также является следствием ее зависимости от

данных. Вместо этого, другие модели показывают интерпретируемое значение своих параметров. Например, модель ДжК использует температуру плавления T_m и показатель упрочнения при деформации n , соответствующий упрочнению.

В целом, основные принципы механики всегда должны быть простыми, понятными и "визуализируемыми" для исследователей, и, что более важно, надежными. Надежность обеспечивается описанными математическими правилами, а не группой активных функций и регрессий, которые могут иметь нестабильное поведение и технические сложности. Поэтому для обобщения или описания основных принципов не рекомендуется использовать метод машинного обучения из-за его слабой интерпретируемости. Однако его можно использовать для описания и предсказания последствий основных принципов, особенно в сложных случаях. После общих тем мы продолжаем сравнивать поведение различных моделей на примере композита на основе вольфрама, рассмотренного в разделе 4.2.3.

Хорошее поведение модели ИНС при описании диаграмм деформирования на обучающем наборе данных менее ценно по сравнению с ее поведением на проверочном наборе данных. Для композита на основе вольфрама выбраны экспериментальные данные при скорости деформации 1000 c^{-1} и разных температурах в качестве проверочного набора данных. Это позволяет оценить поведение модели при большой скорости деформации, которая принадлежит "выученному" диапазону скоростей деформации от 200 c^{-1} до 3000 c^{-1} . С использованием этого проверочного набора данных можно оценить, переобучается ли модель. Ошибки описания всех упомянутых моделей для проверочного набора данных показаны на рисунке 4.12 (б). За исключением моделей ДжК, КНЛ и ИНС все остальные модели имеют ошибку описания менее 5%. Однако это не обязательно означает, что модель ИНС имеет более плохое поведение, чем многие другие модели. Отклонение результатов модели ИНС от экспериментальных данных, в основном при температуре 288 К и скорости деформации 1000 c^{-1} , скорее всего связано с "аномальным" поведением напряжений при температуре 288 К и скорости деформации 200 c^{-1} . Как показано на рисунке 4.9, все другие модели дают тенденцию переоценивать эти значения напряжений, обозначенные розовыми алмазами. Более важно, рисунки 2.5 (б) и (г) показывают то, что экспериментально измеренные напряжения при температуре 288 К и скорости деформации 200 c^{-1} не следуют общей тенденции убывания КОН. Иными сло-

вами, другие модели, предложенные на основе анализа "правил", ограничены в описании этого "аномального" поведения напряжений. Однако модель ИНС, разработанная на основе данных, способна отлично захватить это "аномальное" поведение в процессе обучения. Поэтому ее "недооцененное" значение напряжений при температуре 288 К и скоростях деформации выше 200 с^{-1} , показанное на рисунке 4.11 (в), является разумным. Обучив модель ИНС с еще несколькими наборами данных при температуре 288 К и скоростях деформации выше 200 с^{-1} , ошибка описания, очень вероятно, легко уменьшится до менее 5%.

4.3 Верификация конечно-элементной схемы для модели РП

Для проверки разработанной расчетной схемы из раздела 3.3.2 для упрощенного варианта модели РП (3.53) было проведено моделирование эксперимента РСГК с использованием программного пакета ABAQUS/Explicit. Этот пакет использует явный метод центральных разностей для решения динамического уравнения (3.31). Шаг по времени выбирается пакетом ABAQUS/Explicit для обеспечения стабильности, но для повышения точности максимальный шаг по времени установлен равным 0.2 микросекунд. В работе Чжуана et al. [108] показаны оптимизированные размеры передающего и опорного стержней для верификации конечно-элементной расчетной схемы с целью минимизации вычислительных ресурсов. Рекомендуемые размеры составляют $\varnothing 25 \times 1000$ мм для стержней и $\varnothing 18 \times 22$ мм для образца. Механические свойства передающего и опорного стальных стержней следующие:

$$E = 200 \text{ ГПа}, \nu = 0.3, \rho = 7.85 \text{ г/см}^3$$

В качестве образца использовалась сталь 603, исследованная Шу и Хуан [109]. На рисунке 4.15 представлены экспериментальные данные и поведение модели при квазистатическом нагружении и ударных нагрузках 2000 с^{-1} и 4500 с^{-1} . Здесь основное внимание уделяется случаям ударной нагрузки. Упругий модуль стержней равен $E = 200$ ГПа, коэффициент Пуассона равен $\nu = 0.3$. Значения параметров модели установлены следующим образом: $\sigma_y = 850$ МПа, $K = 505.15$ МПа, $n = 0.40$, $\tau = 0.14$ мс и $\alpha = 35$.

Ввиду наличия симметрии как в геометрии, так и в граничных условиях, создана четверть трехмерных стержней и образца, как показано на рисунках

4.16a и 4.16b. В работе используется элемент типа C3D8R для всей геометрии. Контакт между стержнями и образцом полагается жестким (без трения, без теплового взаимодействия и т. д.). Геометрия экспериментальной установки и приложенные на них граничные условия показаны на рисунках 4.17a и 4.17b, соответственно. Поперечное сечение, перпендикулярное оси x , ограничено условиями закрепления всех поворотов и смещения $u_x = 0$. Аналогично, поперечное сечение, перпендикулярное оси y , ограничено условиями закрепления всех поворотов и смещения $u_y = 0$. Левая сторона передающего стержня подвергается импульсам, как представлено на рисунках 4.18a и 4.18b. Например, импульс, показанный на рисунке 4.18a, приводит к скорости деформации образца 2000 c^{-1} . В этом случае на рисунке 4.19a демонстрируется, что напряженное состояние образца остается примерно однородным во время нагружения. Кроме того, рисунки 4.20a и 4.20b показывают, что история деформации ε_{zz} и напряжений σ_{zz} элементов 182, 801 и 1497 (показанных на рисунке 4.19b) подтверждают равномерность напряженного состояния и практически постоянство скорости деформации. Другой импульс, как показано на рисунке 4.18b, приводит к скорости деформации 4500 c^{-1} . Диаграммы деформирования $\sigma_{zz}-\varepsilon_{zz}$, полученные с использованием конечно-элементного анализа при двух больших скоростях нагружения, представлены на рисунке 4.21. Результаты моделирования хорошо согласуются с экспериментальными данными, что подтверждает надежность модели РП (3.53) и разработанной расчетной схемы.

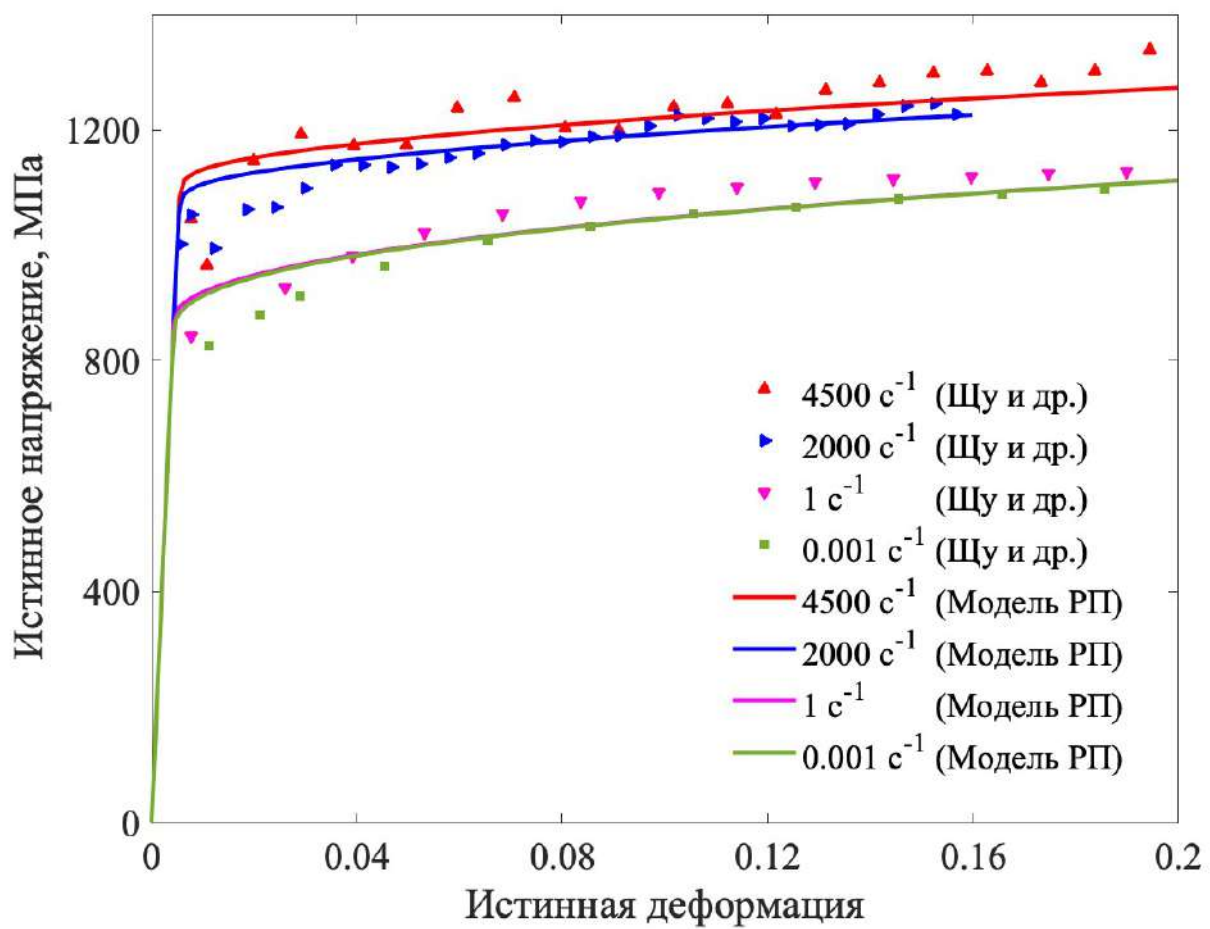
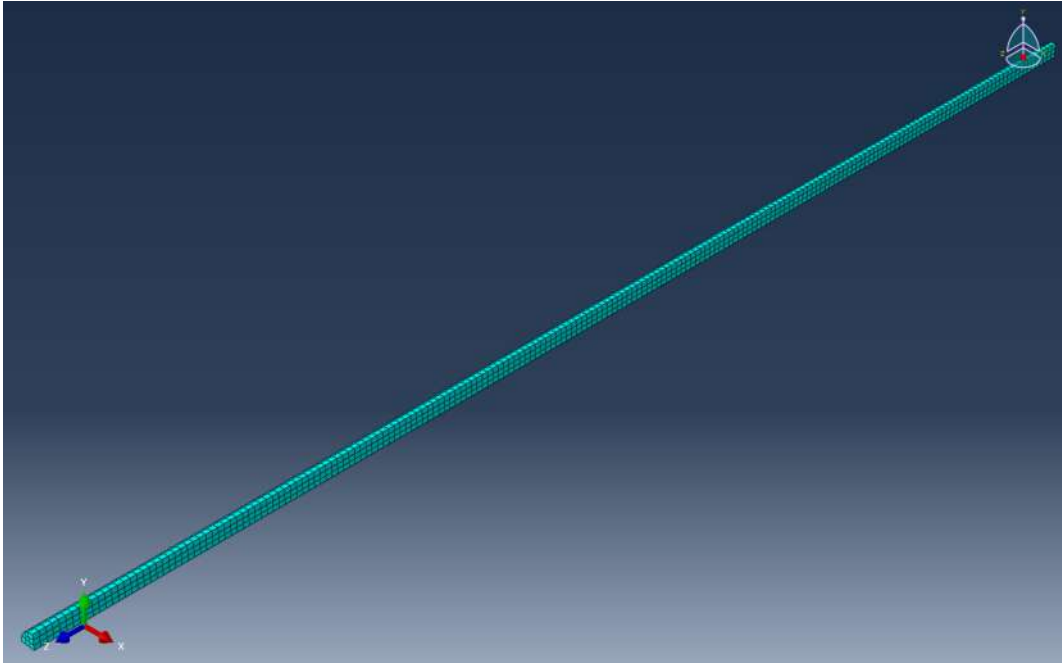
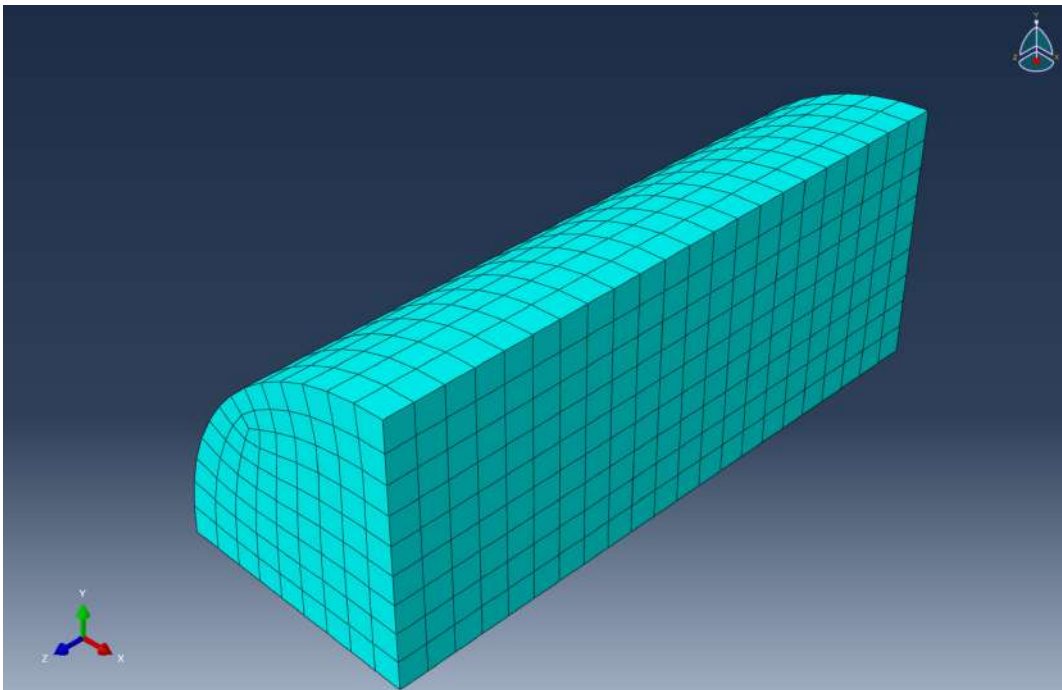


Рис. 4.15: Диаграммы деформирования стали 603 при различных скоростях деформации и расчетные кривые, построенные с использованием упрощенного варианта модели РП.

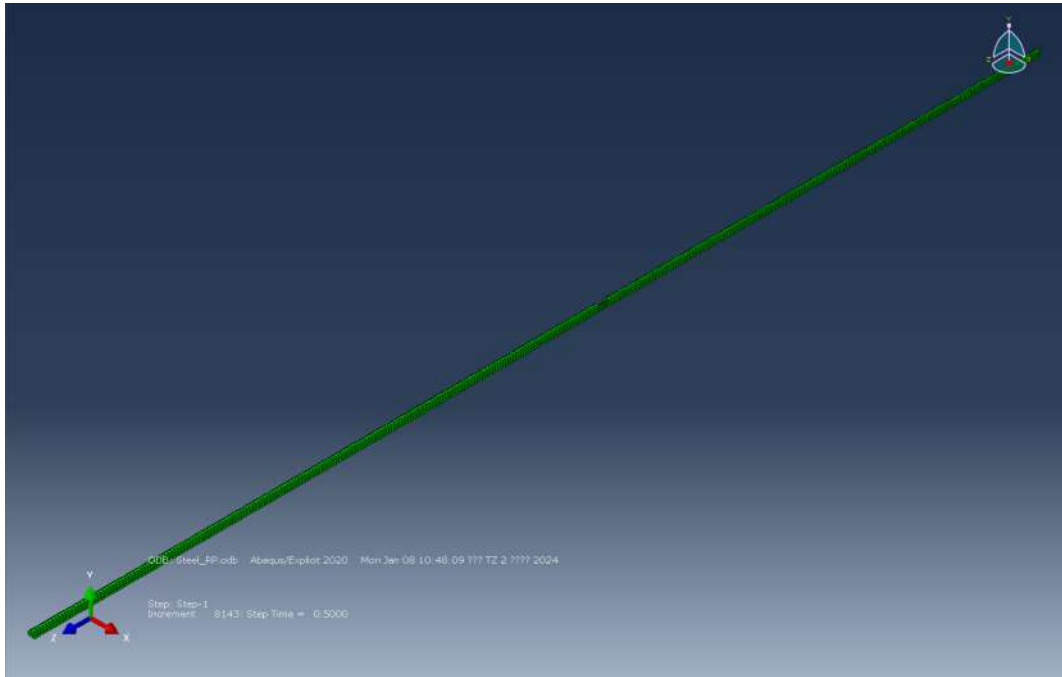


(a)

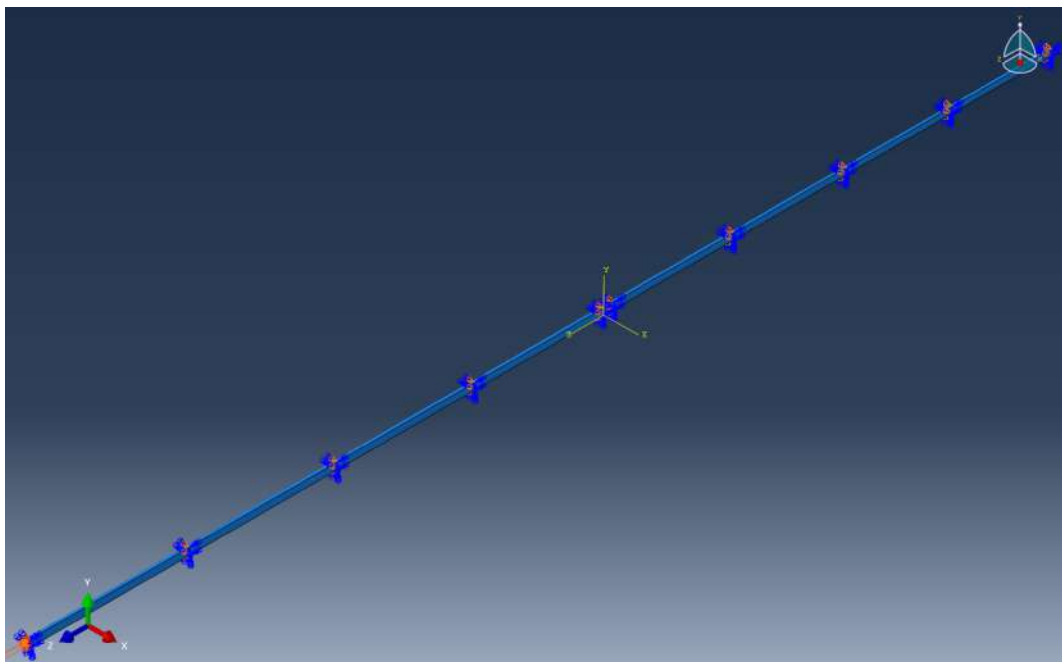


(b)

Рис. 4.16: Геометрия для моделирования: (a) Четверть передающего и опорного стержня, (b) четверть образца.

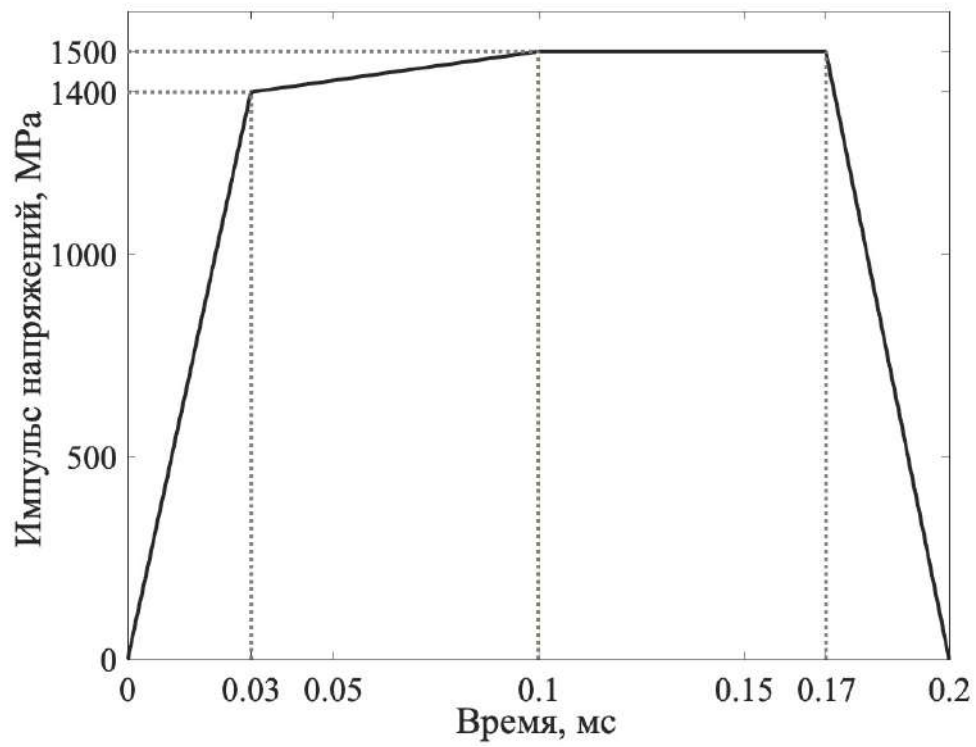


(a)

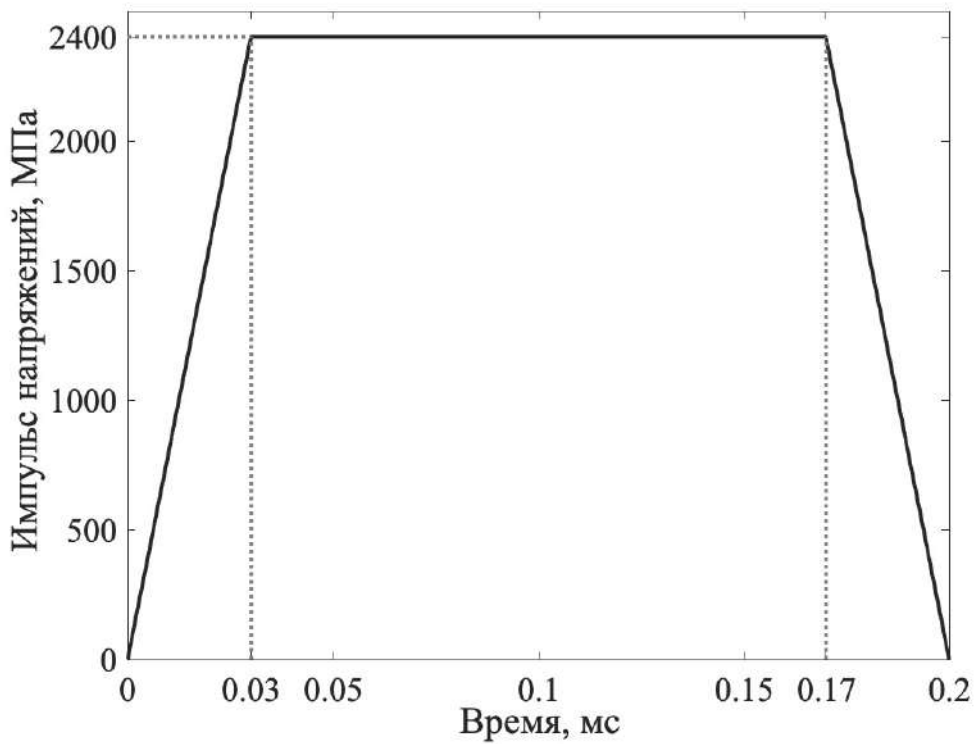


(b)

Рис. 4.17: Геометрия установки РСГК (а) и прикладываемые на ней граничные условия (b).

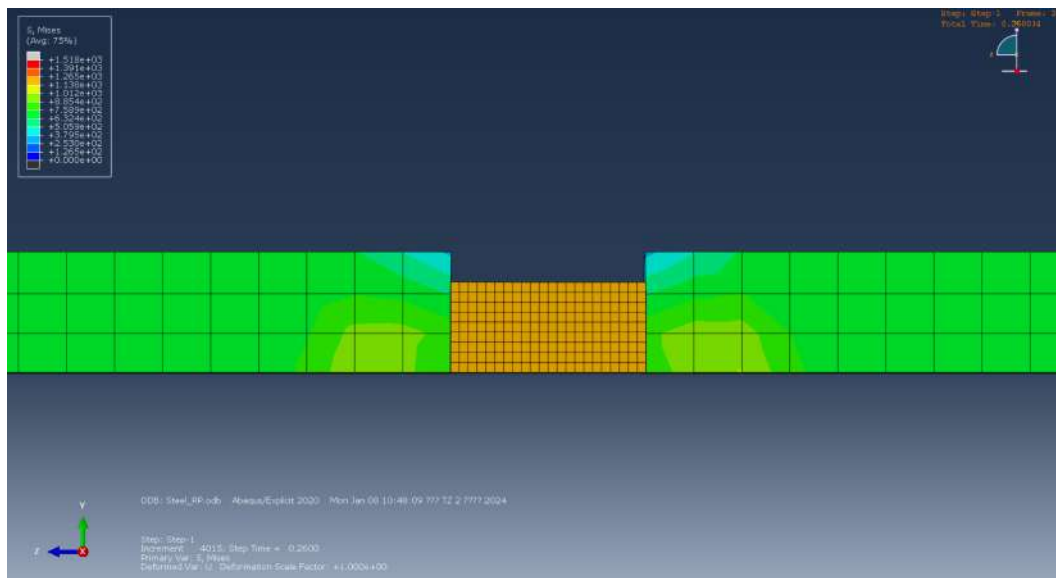


(a)

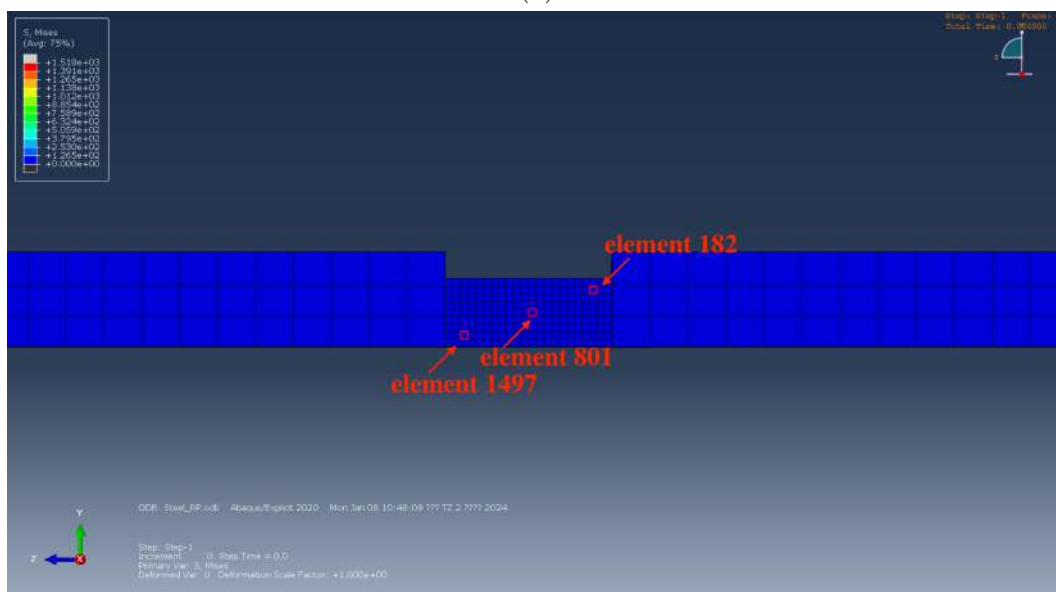


(b)

Рис. 4.18: Импульсы напряжения, накладываемые на левой стороне передающего стержня, вызывают две разные скорости деформации образца: (a) $\dot{\epsilon} = 2000 \text{ c}^{-1}$, (b) $\dot{\epsilon} = 4500 \text{ c}^{-1}$.

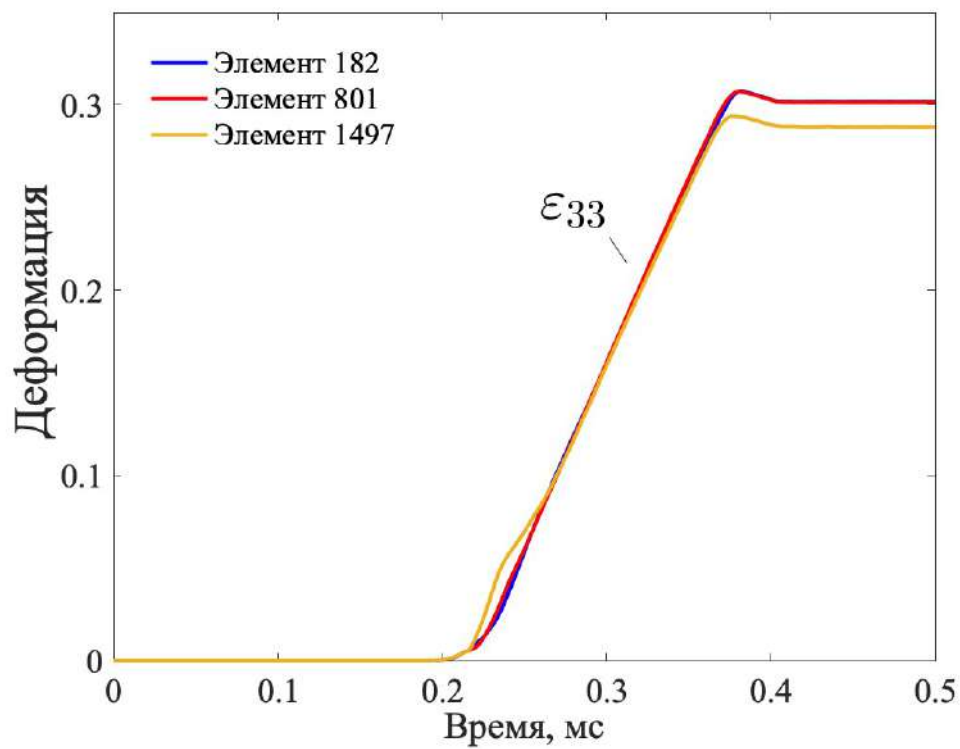


(a)

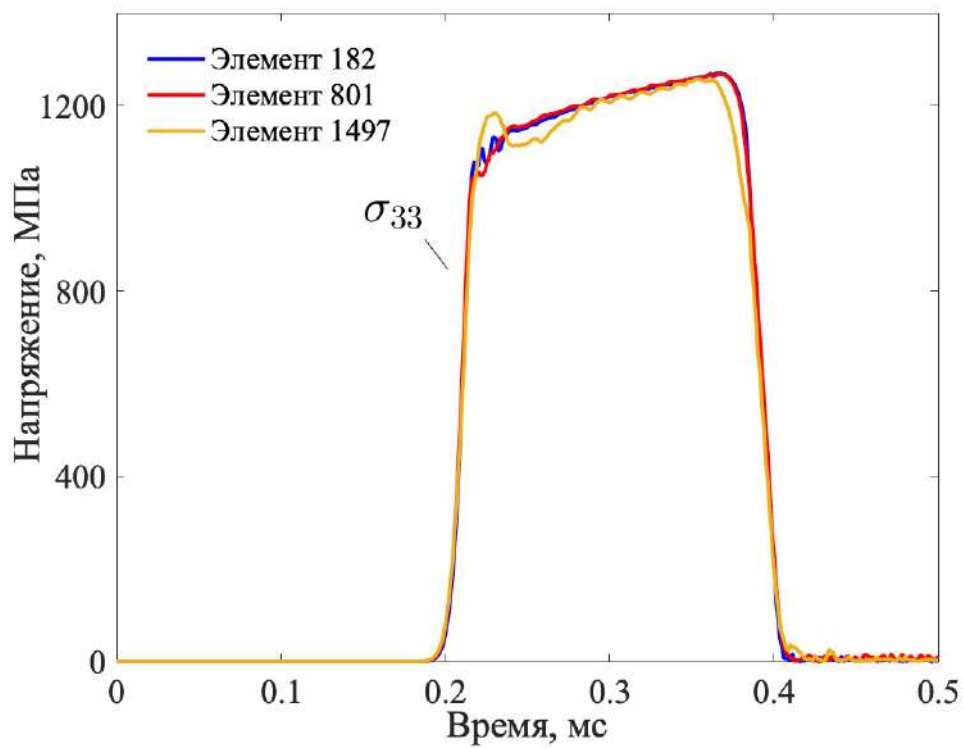


(b)

Рис. 4.19: Распределение напряжения в образце во время нагрузки в момент $t = 0.26$ мкс. (a) и выбранные элементы для дальнейшего анализа (b).



(а)



(б)

Рис. 4.20: История изменения деформации (а) и напряжения (б) трех различных элементов.

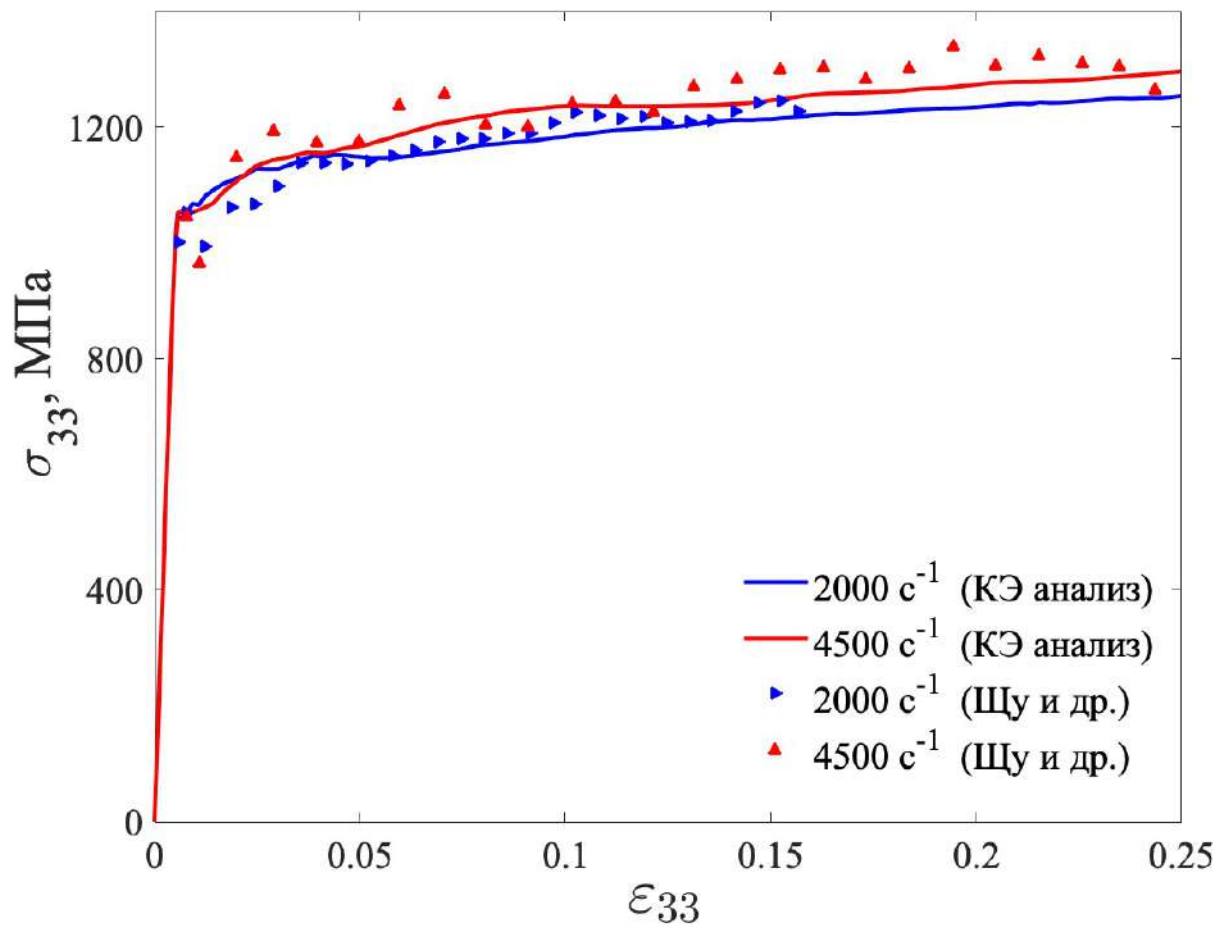


Рис. 4.21: Сравнение диаграмм деформирования при скоростях деформации, равных 2000 s^{-1} и 4500 s^{-1} , полученные численным и экспериментальным путями.

Заключение

В работе изучаются способы моделирования эффектов динамического необратимого деформирования материалов. Эффекты влияния скорости воздействия и термическое разупрочнение ряда металлических материалов, а также отрицательное упрочнение, вызываемое диссипацией энергии, были успешно смоделированы в рамках структурно-временного подхода, основанного на понятии инкубационного времени. Проведен всесторонний анализ модифицированной релаксационной модели по пластичности (модель РП). Разработана конечно-элементная расчетная схема с использованием модели РП.

В ходе решения поставленных задач были выполнены следующие работы и сделаны соответствующие основные выводы:

1. Предложена и исследована концепция модифицированной модели РП. Разработаны упрощенный и инкрементальный варианты модификации модели РП (УРП и ИРП). Вместо эмпирического скоростно-зависимого компонента, в модели РП введена функция релаксации $\gamma(\varepsilon_p(t))$, которая использует динамическую интенсивность напряжения $M_\alpha(\cdot)$ для описания эффектов скорости воздействия. Предложено уравнение поверхности текучести, реализуемое далее для построения модифицированной модели РП. Разработанный подход рассматривает скоростную чувствительность материалов как частный случай проявления их временной чувствительности. Модифицированная модель РП может быть получена из уравнения поверхности текучести в рамках подхода инкубационного времени, в то время как многие другие феноменологические модели в основном получают с помощью прямого эмпирического подхода. В этом одно из основных отличий модифицированной модели РП от других феноменологических моделей.
2. Предложена методика исследования температурно-временного соответствия (ТВС). В его основе лежат зависимости инкубационного времени от тем-

пературы. Введенный в работе коэффициент относительных напряжений (КОН) может использоваться для анализа динамики ТВС в широком диапазоне деформации, скорости деформации и температуры. Для изученных стали HSLA-65 и композита на основе вольфрама при разных скоростях деформации КОН в основном уменьшается монотонно с увеличением температуры. Это означает, что повышение температуры приводит к монотонному уменьшению τ . Некоторые особые случаи немонотонного поведения могут возникать, например, из-за динамического старения деформации, и в этом случае может потребоваться немонотонное соотношение между параметром τ и температурой.

3. Обсуждено несколько возможных вариантов ТВС, приведенных в выражениях (2.31)–(2.37). В данной работе ТВС считается технически приемлемым для прогнозов, если его применение обеспечивает погрешность модели РП, не превышающую 5 %. Показано, что экспоненциальные или степенные феноменологические зависимости, показанные в уравнениях (2.31)–(2.34), являются предпочтительными.
4. Проведено сравнение работоспособности принципа температурно-временного соответствия при неизменном значении параметра α и зависимости параметра α от температуры при неизменном значении параметра τ . Результаты моделирования показывают, что возможности зависимостей, в частности моделей (2.34) и (2.37), практически эквивалентны.
5. Показана, что применяемая во многих работах мультипликативная форма учета скоростной и температурной зависимости $\sigma = f_1(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon})f_2(\varepsilon_p, T)$ не пригодна для моделирования эффекта скорости воздействия и термического разупрочнения в широком диапазоне температур. Эксперименты показывают, что КОН имеет явный характер, зависящий от скорости деформации и температур. Однако мультипликативные модели, получаемые при помощи прямого эмпирического подхода, приводят к температурно-независимому КОН. В таких моделях динамические (скоростные) зависимости обычно строятся путем прямой экстраполяции статических представлений о критических параметрах материала на динамические случаи с использованием коэффициентов или функциональных характеристик в

статических формулах. Тем не менее, они могут быть удобными для инженерных задач, где температура изменяется незначительно.

6. Проведен анализ оценки работоспособности разработанной модели РП на примерах экспериментальных данных для разных металлических материалов, включая алюминиевых сплавов 6082-T6 и 2519A, стали HSLA-65, композита на основе вольфрама 93W-4.9Ni-2.1Fe и титанового сплава Ti-6Al-4V. Произведено сравнение описательной способности модели ИРП и других феноменологических, физически-основанных моделей и модели искусственной нейронной сети (ИНС). Модель ИРП обладает хорошей описательной и прогностической способностью и, в частности, может представить тенденцию немонотонного поведения диаграммы деформирования, в том числе разупрочнения деформационных кривых при ударных нагрузках.
7. Показано на примере композита на основе вольфрама 93W-4.9Ni-2.1Fe, что основное отличие между моделью ИНС и другими исследуемыми моделями заключается в том, что модель ИНС, как черный ящик, изучает закономерности напрямую из имеющихся данных, не объясняя смысл аппроксимированных зависимостей. Её поведение значительно зависит от качества представленных данных, в то время как другие рассматриваемые модели предлагаются (или "обучаются" человеком) на основе анализа "правил" (или физических законов). Эти проанализированные человеком правила могут быть инкорпорированы в математические модели, но их описательные и предсказательные возможности ограничены. Появление новых нетипичных явлений часто требует введения дополнительных компонентов в существующие модели. Выбор моделей должен зависеть от конкретного материала и условий нагружения, а также от желаемого уровня точности и вычислительной сложности.
8. На основе модели ИРП смоделировано отрицательное упрочнение для стали HSLA-65, вызванное быстрой пластической деформацией и адиабатическим повышением температуры во время деформирования, что приводит к уменьшению характерного времени релаксации (или инкубационного времени).

9. Разработана вычислительная схема для конечно-элементного анализа задач динамической пластичности с использованием упрощенного варианта модели РП. Созданы программные модули для расчета диаграмм деформирования разных материалов, определения параметров различных моделей и решения трехмерных задач динамической пластичности. Для верификации расчетной схемы проведено моделирование экспериментов РСГК с помощью МКЭ. Результаты моделирования показывают хорошее согласие с экспериментальными данными.

Приложения

А Интегральный критерий текучести

Предполагая постоянную скорость деформации, то есть $\sigma(t) = E\dot{\epsilon}tH(t)$, где $H(t)$ – функция Хевисайда, можно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 I(t) &= \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \left(\frac{\sigma(s)}{\sigma_y} \right)^\alpha ds = \frac{E^\alpha \dot{\epsilon}^\alpha}{\sigma_y^\alpha \tau} \int_{t-\tau}^t s^\alpha H(s) ds \\
 &= \frac{E^\alpha \dot{\epsilon}^\alpha}{\sigma_y^\alpha \tau} \cdot \frac{s^{\alpha+1} H(s)}{1+\alpha} \Big|_{t-\tau}^t \\
 &= \frac{(E\dot{\epsilon}t)^{\alpha+1} H(t) - (E\dot{\epsilon}t - E\dot{\epsilon}\tau)^{\alpha+1} H(t-\tau)}{(1+\alpha)\sigma_y^\alpha E\dot{\epsilon}\tau} \\
 &= \frac{\sigma(t)^{\alpha+1} H(t) - (\sigma(t) - E\dot{\epsilon}\tau)^{\alpha+1} H(t-\tau)}{(1+\alpha)\sigma_y^\alpha E\dot{\epsilon}\tau}
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Согласно интегральный критерий текучести (2.1), пластический процесс начинается, когда $I(t_y) = 1$. Таким образом, скорость-зависимый предел текучести (или прочности) $\sigma_{dy} = \sigma(t_y)$ может быть получен по формуле (A.5), где $H(\sigma_{dy} - E\dot{\epsilon}\tau) = (E\dot{\epsilon}) \cdot H(t_y - \tau) = H(t_y - \tau)$.

$$\sigma_{dy}^{1+\alpha} - (\sigma_{dy} - E\dot{\epsilon}\tau)^{1+\alpha} H(\sigma_{dy} - E\dot{\epsilon}\tau) = (1+\alpha)(E\dot{\epsilon}\tau)\sigma_y^\alpha \tag{A.5}$$

Рассмотрим случай, когда $t_y = \tau$ или $\sigma_{dy} = E\dot{\epsilon}\tau$. Уравнение (A.5) преобразуется в уравнение (A.6)

$$\sigma_{dy}^{1+\alpha} = \sigma_y^\alpha (1+\alpha)(E\dot{\epsilon}\tau) = (1+\alpha)\sigma_{dy}\sigma_y^\alpha, \tag{A.6}$$

что приводит к $\sigma_{dy} = (1+\alpha)^{1/\alpha}\sigma_y$ или $\dot{\epsilon} = \frac{\sigma_y(1+\alpha)^{1/\alpha}}{E\tau}$. Таким образом, уравнение (A.5) также можно представить в виде (A.7).

$$\begin{cases} \sigma_{dy}^{1+\alpha} - (\sigma_{dy} - E\dot{\epsilon}\tau)^{1+\alpha} = (1+\alpha)(E\dot{\epsilon}\tau)\sigma_y^\alpha, & \dot{\epsilon} \leq \frac{\sigma_y(1+\alpha)^{1/\alpha}}{E\tau}; \\ \sigma_{dy} = ((1+\alpha)(E\dot{\epsilon}\tau)\sigma_y^\alpha)^{\frac{1}{1+\alpha}}, & \dot{\epsilon} > \frac{\sigma_y(1+\alpha)^{1/\alpha}}{E\tau}. \end{cases} \tag{A.7}$$

В Среднее касательное напряжение.

Среднее касательное напряжение $\bar{\sigma}_\tau$, предложенное Новожиловым В. В. в точке M , определяется следующим образом:

$$\bar{\sigma}_\tau = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Omega} \iint \sigma_\tau^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.8})$$

где Ω – площадь сферической поверхности, ограничивающей точку M , $d\Omega$ – площадь бесконечно малой плоскости на поверхности Ω , r – радиус поверхности Ω , σ_τ – касательное напряжение на плоскости $d\Omega$. Для удобства, как площадь поверхности, так и саму поверхность можно обозначать как $d\Omega$ или Ω в зависимости от контекста.

Обозначим единичные ортогональные векторы в трех основных направлениях в рассматриваемой точке M как $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$, а нормальный вектор плоскости $d\Omega$ как \underline{n} с компонентами n_i ($i = 1, 2, 3$). Тогда вектор поверхностных сил \underline{t} на плоскости $d\Omega$ задается уравнением (B.9)

$$\underline{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n} = (\sigma_i \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i) \cdot \underline{n} = \sigma_i n_i \underline{e}_i, \quad (\text{B.9})$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений Коши; σ_i – главное напряжение в направлении \underline{e}_i , и оно считается главным напряжением в точке M при стремлении r к 0. Величина нормальной составляющей напряжения σ_n и касательной составляющей напряжения σ_τ могут быть вычислены следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \underline{t} \cdot \underline{n} = \sigma_i n_i^2, \\ \sigma_\tau &= |\underline{t} - \sigma_n \underline{n}| = \sqrt{(\sigma_i^2 n_i^2) - (\sigma_j n_j^2)^2} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

В сферической системе координат с базисом $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ площадь плоскости $d\Omega$ и сферической поверхности Ω , а также компоненты нормального вектора \underline{n} определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} d\Omega &= r^2 \sin \theta d\varphi d\theta; \\ \Omega &= 4\pi r^2; \\ n_1 &= \sin \theta \sin \varphi, n_2 = \sin \theta \cos \varphi, n_3 = \cos \theta; \\ \theta &\in [0, \pi), \varphi \in [0, 2\pi). \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Графическое представление показано на рисунке (B.1). Таким образом, величина касательной составляющей напряжения может быть вычислена из уравнений

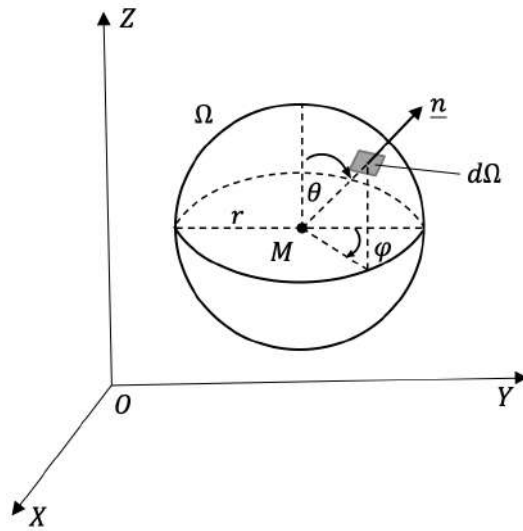


Рис. В.1: Сферическая поверхность Ω , ограничивающая точку M . r – радиус сферы, $d\Omega$ – бесконечно малая плоскость на поверхности Ω с нормальным вектором \underline{n} . θ и φ – полярный и азимутальный угол соответственно.

(В.10) и (В.11) и задается уравнением (В.12).

$$\begin{aligned} \sigma_\tau^2 = & \sigma_1^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \sigma_2^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sigma_3^2 \cos^2 \theta - \\ & - (\sigma_1 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sigma_3 \cos^2 \theta)^2 \end{aligned} \quad (\text{В.12})$$

И интеграл в выражении (В.8) переходит в уравнение (В.13).

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_\tau^2 = & \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left\{ \sigma_1^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \sigma_2^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sigma_3^2 \cos^2 \theta - \right. \\ & \left. - (\sigma_1 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sigma_3 \cos^2 \theta)^2 \right\} \sin \theta d\theta \\ = & \frac{1}{15} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{В.13})$$

Таким образом, интенсивность касательных напряжений T (см. уравнение (2.7)) и среднее касательное напряжение $\bar{\sigma}_\tau$ эквивалентны с точностью до постоянного множителя, и связаны выражением (В.14).

$$T = \sqrt{\frac{2}{15}} \bar{\sigma}_\tau = \sqrt{\frac{2}{15}} \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Omega} \iint \sigma_\tau^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{В.14})$$

Соотношение (В.14) указывает, что интенсивность касательных напряжений не только является инвариантом относительно тензора напряжений, но также описывает "среднее" напряженное состояние в пространстве.

Литература

- [1] Johnson G.R., Cook W.H. A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and high temperatures // Proceedings of the 7th International Symposium on Ballistics. — Vol. 21. — The Hague, The Netherlands, 1983. — P. 541–547.
- [2] Rusinek A., Klepaczko J.R. Shear testing of a sheet steel at wide range of strain rates and a constitutive relation with strain-rate and temperature dependence of the flow stress // International Journal of Plasticity. — 2001. — Vol. 17, no. 1. — P. 87–115.
- [3] A computational determination of the Cowper–Symonds parameters from a single Taylor test / C. Hernandez, A. Maranon, I.A. Ashcroft, J.P. Casas-Rodriguez // Applied Mathematical Modelling. — 2013. — Vol. 37, no. 7. — P. 4698–4708.
- [4] Lin Y.C., Chen X.M., Liu G. A modified Johnson-Cook model for tensile behaviors of typical high-strength alloy steel // Materials Science and Engineering: A. — 2010. — Vol. 527, no. 26. — P. 6980–6986.
- [5] Gambirasio L., Rizzi E. An enhanced Johnson–Cook strength model for splitting strain rate and temperature effects on lower yield stress and plastic flow // Computational Materials Science. — 2016. — Vol. 113. — P. 231–265.
- [6] Nemat-Nasser S., Isaacs J.B. Direct measurement of isothermal flow stress of metals at elevated temperatures and high strain rates with application to Ta and TaW alloys // Acta Materialia. — 1997. — Vol. 45, no. 3. — P. 907–919.
- [7] Zerilli Frank J., Armstrong Ronald W. Dislocation-mechanics-based constitutive relations for material dynamics calculations // Journal of Applied Physics. — 1987. — Vol. 61, no. 5. — P. 1816–1825.

- [8] Gruzdkov A. A., Petrov Yu V. On temperature-time correspondence in high-rate deformation of metals // *Doklady Physics*. — 1999. — Vol. 44, no. 2. — P. 114–116.
- [9] Thermal Effect in Dynamic Yielding and Fracture of Metals and Alloys / A.A. Gruzdkov, E.V. Sitnikova, N.F. Morozov, Yu.V. Petrov // *Mathematics and Mechanics of Solids*. — 2009. — Vol. 14, no. 1-2. — P. 72–87.
- [10] Selyutina N.S. Temperature relaxation model of plasticity for metals under dynamic loading // *Mechanics of Materials*. — 2020. — Vol. 150. — P. 103589.
- [11] Чжао Ш. Программный комплекс для построения диаграммы деформирования металлов под ударным нагружением, расчетных инкрементальной релаксационной моделью по пластичности. — 2023. — Государственная регистрация программы для ЭВМ №023684476, 15.11.2023.
- [12] Yu Tongxi, Xue Pu. Chapter 12 - Introduction to dynamic plasticity // *Introduction to Engineering Plasticity* / Ed. by Tongxi Yu, Pu Xue. — Elsevier, 2022. — P. 327–371.
- [13] Bagher Shemirani Alireza, Naghdabadi R., Ashrafi M.J. Experimental and numerical study on choosing proper pulse shapers for testing concrete specimens by split Hopkinson pressure bar apparatus // *Construction and Building Materials*. — 2016. — Vol. 125. — P. 326–336.
- [14] Nemat-Nasser Sia, Guo Wei-Guo. Thermomechanical response of HSLA-65 steel plates: experiments and modeling // *Mechanics of Materials*. — 2005. — Vol. 37, no. 2. — P. 379–405.
- [15] Roth Christian C., Fras Teresa, Mohr Dirk. Dynamic perforation of lightweight armor: Temperature-dependent plasticity and fracture of aluminum 7020-T6 // *Mechanics of Materials*. — 2020. — Vol. 149. — P. 103537.
- [16] Xu Zejian, Huang Fenglei. Thermomechanical behavior and constitutive modeling of tungsten-based composite over wide temperature and strain rate ranges // *International Journal of Plasticity*. — 2013. — Vol. 40. — P. 163–184.

- [17] Goviazin G.G., Shirizly A., Rittel D. Does plastic anisotropy affect the thermo-mechanical coupling in steel? // International Journal of Engineering Science. — 2023. — Vol. 187. — P. 103852.
- [18] Garcia-Gonzalez D., Zaera R., Arias A. A hyperelastic-thermoviscoplastic constitutive model for semi-crystalline polymers: Application to PEEK under dynamic loading conditions // International Journal of Plasticity. — 2017. — Vol. 88. — P. 27–52.
- [19] Importance of microstructure modeling for additively manufactured metal post-process simulations / Sumair Sunny, Glenn Gleason, Karl Bailey et al. // International Journal of Engineering Science. — 2021. — Vol. 166. — P. 103515.
- [20] Johnson G. R., Holmquist T. J. An improved computational constitutive model for brittle materials // High-pressure Science and technology. — Vol. 309 of American Institute of Physics Conference Series. — 1994. — P. 981–984.
- [21] Peng J. X., Li Y. L., Li D. H. An experimental study on the dynamic constitutive relation of tantalum (In Chinese) // Explosion and Shock Waves. — 2003. — Vol. 23, no. 2. — P. 183–187.
- [22] Shokry Abdallah. A Modified Johnson–Cook Model for Flow Behavior of Alloy 800H at Intermediate Strain Rates and High Temperatures // Journal of Materials Engineering and Performance. — 2017. — Vol. 26, no. 12. — P. 5723–5730.
- [23] A modified Johnson–Cook model for 7N01 aluminum alloy under dynamic condition / Yi-ben Zhang, Song Yao, Xiang Hong, Zhong-gang Wang // Journal of Central South University. — 2017. — Vol. 24, no. 11. — P. 2550–2555.
- [24] Dynamic constitutive model of U75VG rail flash-butt welded joint and its application in wheel-rail transient rolling contact simulation / Jizhong Zhao, Xing Pang, Peilin Fu et al. // Engineering Failure Analysis. — 2022. — Vol. 134. — P. 106078.
- [25] Experimental and numerical investigation on the ballistic resistance of 2024-T351 aluminum alloy plates with various thicknesses struck by blunt projec-

- tiles / Jue Han, Yahui Shi, Qianqian Ma et al. // International Journal of Impact Engineering. — 2022. — Vol. 163. — P. 104182.
- [26] Khan Akhtar S., Liang Riqiang. Behaviors of three BCC metal over a wide range of strain rates and temperatures: experiments and modeling // International Journal of Plasticity. — 1999. — Vol. 15, no. 10. — P. 1089–1109.
- [27] Farrokh Babak, Khan Akhtar S. Grain size, strain rate, and temperature dependence of flow stress in ultra-fine grained and nanocrystalline Cu and Al: Synthesis, experiment, and constitutive modeling // International Journal of Plasticity. — 2009. — Vol. 25, no. 5. — P. 715–732.
- [28] Characterization of hardening behaviors of 4130 Steel, OFHC Copper, Ti6Al4V alloy considering ultra-high strain rates and high temperatures / MingJun Piao, Hoon Huh, Ikjin Lee, Leeju Park // International Journal of Mechanical Sciences. — 2017. — Vol. 131-132. — P. 1117–1129.
- [29] Evaluation of dynamic hardening models for BCC, FCC, and HCP metals at a wide range of strain rates / Hoon Huh, Kwanghyun Ahn, Ji Ho Lim et al. // Journal of Materials Processing Technology. — 2014. — Vol. 214, no. 7. — P. 1326–1340.
- [30] Omer Kaab, Butcher Clifford, Worswick Michael. Characterization and application of a constitutive model for two 7000-series aluminum alloys subjected to hot forming // International Journal of Mechanical Sciences. — 2020. — Vol. 165. — P. 105218.
- [31] Nemat-Nasser Sia, Li Yulong. Flow stress of f.c.c. polycrystals with application to OFHC Cu // Acta Materialia. — 1998. — Vol. 46, no. 2. — P. 565–577.
- [32] Dynamic response of conventional and hot isostatically pressed Ti–6Al–4V alloys: experiments and modeling / Sia Nemat-Nasser, Wei-Guo Guo, Vitali F. Nesterenko et al. // Mechanics of Materials. — 2001. — Vol. 33, no. 8. — P. 425–439.
- [33] Zerilli Frank J., Armstrong Ronald W. Constitutive relations for titanium and Ti-6Al-4V // AIP Conference Proceedings. — 1996. — Vol. 370, no. 1. — P. 315–318.

- [34] Voyiadjis George Z., Abed Farid H. Microstructural based models for bcc and fcc metals with temperature and strain rate dependency // *Mechanics of Materials*. — 2005. — Vol. 37, no. 2. — P. 355–378. — *New Directions in Mechanics and Selected Articles in Micromechanics of Materials*.
- [35] Voyiadjis George Z., Abed Farid H. Effect of dislocation density evolution on the thermomechanical response of metals with different crystal structures at low and high strain rates and temperatures // *Archives of Mechanics*. — 2005. — Vol. 57, no. 4. — P. 299–343.
- [36] Song Yooseob, Yeon Jaeheum, Voyiadjis George Z. Constitutive modeling and numerical simulations for dynamic strain aging in MMFX steel at elevated temperatures // *International Journal of Mechanical Sciences*. — 2021. — Vol. 210. — P. 106743.
- [37] Voyiadjis George Z., Song Yooseob, Rusinek Alexis. Constitutive model for metals with dynamic strain aging // *Mechanics of Materials*. — 2019. — Vol. 129. — P. 352–360.
- [38] Rusinek A., Klepaczko J.R. Shear testing of a sheet steel at wide range of strain rates and a constitutive relation with strain-rate and temperature dependence of the flow stress // *International Journal of Plasticity*. — 2001. — Vol. 17, no. 1. — P. 87–115.
- [39] Thermo-viscoplastic behavior of DP800 steel at quasi-static, intermediate, high and ultra-high strain rates / Bin Jia, Pengwan Chen, Alexis Rusinek, Qiang Zhou // *International Journal of Mechanical Sciences*. — 2022. — Vol. 226. — P. 107408.
- [40] Thermo-viscoplastic behavior and constitutive relations for 304 austenitic stainless steel over a wide range of strain rates covering quasi-static, medium, high and very high regimes / Bin Jia, Yaoyue Zhang, Alexis Rusinek et al. // *International Journal of Impact Engineering*. — 2022. — Vol. 164. — P. 104208.
- [41] Khan Akhtar S., Liu Jian. A deformation mechanism based crystal plasticity model of ultrafine-grained/nanocrystalline FCC polycrystals // *International Journal of Plasticity*. — 2016. — Vol. 86. — P. 56–69.

- [42] Temperature effect on tensile behavior of an interstitial high entropy alloy: Crystal plasticity modeling / Xu Zhang, Xiaochong Lu, Jianfeng Zhao et al. // International Journal of Plasticity. — 2022. — Vol. 150. — P. 103201.
- [43] Crystal plasticity-based impact dynamic constitutive model of magnesium alloy / Qijun Xie, Zhiwu Zhu, Guozheng Kang, Chao Yu // International Journal of Mechanical Sciences. — 2016. — Vol. 119. — P. 107–113.
- [44] Xie Qijun, Zhu Zhiwu, Kang Guozheng. Thermal activation based constitutive model for high-temperature dynamic deformation of AZ31B magnesium alloy // Materials Science and Engineering: A. — 2019. — Vol. 743. — P. 24–31.
- [45] Application of artificial neural networks in micromechanics for polycrystalline metals / Usman Ali, Waqas Muhammad, Abhijit Brahme et al. // International Journal of Plasticity. — 2019. — Vol. 120. — P. 205–219.
- [46] Pantalé Olivier. Development and Implementation of an ANN Based Flow Law for Numerical Simulations of Thermo-Mechanical Processes at High Temperatures in FEM Software // Algorithms. — 2023. — Vol. 16, no. 1.
- [47] Xu Z., Huang F. Artificial neural network modeling of mechanical properties of armor steel under complex loading conditions // Journal of Beijing Institute of Technology (English Edition). — 2012. — Vol. 21. — P. 157–163.
- [48] Gu Yan, Zhang Chuanzeng, Golub Mikhail V. Physics-informed neural networks for analysis of 2D thin-walled structures // Engineering Analysis with Boundary Elements. — 2022. — Vol. 145. — P. 161–172.
- [49] Counterexample-trained neural network model of rate and temperature dependent hardening with dynamic strain aging / Xueyang Li, Christian C. Roth, Colin Bonatti, Dirk Mohr // International Journal of Plasticity. — 2022. — Vol. 151. — P. 103218.
- [50] Jordan Benoit, Gorji Maysam B., Mohr Dirk. Neural network model describing the temperature- and rate-dependent stress-strain response of polypropylene // International Journal of Plasticity. — 2020. — Vol. 135. — P. 102811.

- [51] Cristescu N. A procedure for determining the constitutive equations for materials exhibiting both time-dependent and time-independent plasticity // *International Journal of Solids and Structures*. — 1972. — Vol. 8, no. 4. — P. 511–531.
- [52] Lubliner Jacob. A generalized theory of strain-rate-dependent plastic wave propagation in bars // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. — 1964. — Vol. 12, no. 1. — P. 59–65.
- [53] Cottrell A. H., Bilby B. A. Dislocation Theory of Yielding and Strain Ageing of Iron // *Proceedings of the Physical Society. Section A*. — 1949. — Vol. 62, no. 1. — P. 49–62.
- [54] Campbell J.D. The dynamic yielding of mild steel // *Acta Metallurgica*. — 1953. — Vol. 1, no. 6. — P. 706–710.
- [55] Klepaczko Janusz R. On Fracture Enrgy of Concrete for Short-Time Loading in Tension // *Brittle Matrix Composites 8* / Ed. by A. M. Brandt, V. C. Li, I. H. Marshall. — Woodhead Publishing, 2006. — P. 547–558.
- [56] Stolarski A. Dynamic Strength Criterion for Concrete // *Journal of Engineering Mechanics*. — 2004. — Vol. 130, no. 12. — P. 1428–1435.
- [57] Jankowiak T., Rusinek A., Wood P. Comments on paper: “Glass damage by impact spallation” by A. Nyongue et al., *Materials Science and Engineering A* 407 (2005) 256–264 // *Materials Science and Engineering: A*. — 2013. — Vol. 564. — P. 206–212.
- [58] Tuler Floyd R., Butcher Barry M. A criterion for the time dependence of dynamic fracture // *International Journal of Fracture Mechanics*. — 1968. — Vol. 4, no. 4. — P. 431–437.
- [59] Petrov Yu. V., Utkin A. A. Dependence of the dynamic strength on loading rate // *Soviet materials science : a transl. of Fiziko-khimicheskaya mekhanika materialov* / Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. — 1989. — Vol. 25, no. 2. — P. 153–156.
- [60] Petrov Yu. V., Morozov N. F. On the Modeling of Fracture of Brittle Solids // *Journal of Applied Mechanics*. — 1994. — Vol. 61, no. 3. — P. 710–712.

- [61] Petrov Yu. V. Quantum Analogy in the Mechanics of Fracture of Solids // Phys Solid State. — 1996. — Vol. 38, no. 11. — P. 1846—1850.
- [62] Morozov N. F., Petrov Yu. V. Dynamics of Fracture. — New York, NY : Springer Berlin, Heidelberg, 2000. — P. 98.
- [63] Maximum yield strength under quasi-static and high-rate plastic deformation of metals / E. N. Borodin, A. E. Mayer, Yu. V. Petrov, A. A. Gruzdkov // Physics of the Solid State. — 2014. — Vol. 56, no. 12. — P. 2470–2479.
- [64] A modified incubation time criterion for dynamic fracture of rock considering whole stress history / Xuan Xu, Li Yuan Chi, Jun Yang, Zong-Xian Zhang // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. — 2023. — Vol. 164. — P. 105361.
- [65] Petrov Yu. V. On the incubation stage of fracture and structural transformations in continuous media under pulse energy injection // Mechanics of Solids. — 2007. — Vol. 42, no. 5. — P. 692–699.
- [66] Petrov Yu. V. Incubation time criterion and the pulsed strength of continua: Fracture, cavitation, and electrical breakdown // Doklady Physics. — 2004. — Vol. 49, no. 4. — P. 246–249.
- [67] An analytical approach to dynamic spalling of brittle materials / C. Yan, Z. Ou, Z. Duan, F. Huang // International Journal of Impact Engineering. — 2015. — Vol. 83. — P. 28–36.
- [68] Yan C., Liu R., Ou Z. Analytical Model for Dynamic Yield Strength of Metal // Physical Mesomechanics. — 2019. — Vol. 22, no. 4. — P. 333–339.
- [69] Petrov Yu. V., Borodin E. N. Relaxation mechanism of plastic deformation and its justification using the example of the sharp yield point phenomenon in whiskers // Physics of the Solid State. — 2015. — Vol. 57, no. 2. — P. 353–359.
- [70] Relaxation model for dynamic plastic deformation of materials / Yu.V. Petrov, E.N. Borodin, E. Cadoni, N.S. Selyutina // EPJ Web of Conferences. — 2015. — Vol. 94. — P. 04039.
- [71] The definition of characteristic times of plastic relaxation by dislocation slip and grain boundary sliding in copper and nickel / N. Selyutina, E.N. Borodin,

- Yu. V. Petrov, A.E. Mayer // International Journal of Plasticity. — 2016. — Vol. 82. — P. 97–111.
- [72] Modeling of the thermal softening of metals under impact loads and their temperature–time correspondence / Shixiang Zhao, Yu. V. Petrov, Yuyi Zhang et al. // International Journal of Engineering Science. — 2024. — Vol. 194. — P. 103969.
- [73] Effects of strain rate and stress state on mechanical properties of Ti-6Al-4V alloy / H. Hu, Z. Xu, W. Dou, F. Huang // International Journal of Impact Engineering. — 2020. — Vol. 145. — P. 103689.
- [74] Khan Akhtar S., Sung Suh Yeong, Kazmi Rehan. Quasi-static and dynamic loading responses and constitutive modeling of titanium alloys // International Journal of Plasticity. — 2004. — Vol. 20, no. 12. — P. 2233–2248.
- [75] Abed Farid, Makarem Fadi. Comparisons of Constitutive Models for Steel Over a Wide Range of Temperatures and Strain Rates // Journal of Engineering Materials and Technology. — 2012. — Vol. 134, no. 2.
- [76] A Theory of Networks for Approximation and Learning : Rep. / MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY ; Executor: Tomaso Poggio, Federico Girosi. — USA : 1989.
- [77] A survey on modern trainable activation functions / Andrea Apicella, Francesco Donnarumma, Francesco Isgrò, Roberto Prevete // Neural Networks. — 2021. — Vol. 138. — P. 14–32.
- [78] A privacy-preserving and non-interactive federated learning scheme for regression training with gradient descent / Fengwei Wang, Hui Zhu, Rongxing Lu et al. // Information Sciences. — 2021. — Vol. 552. — P. 183–200.
- [79] Bottou Léon. Stochastic Gradient Descent Tricks // Neural Networks: Tricks of the Trade: Second Edition. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2012. — P. 421–436.
- [80] Schwab R., Ruff V. On the nature of the yield point phenomenon // Acta Materialia. — 2013. — Vol. 61, no. 5. — P. 1798–1808.

- [81] Yoshida F., Kaneda Y., Yamamoto S. A plasticity model describing yield-point phenomena of steels and its application to FE simulation of temper rolling // *International Journal of Plasticity*. — 2008. — Vol. 24, no. 10. — P. 1792–1818. — Special Issue in Honor of Jean-Louis Chaboche.
- [82] A generalized plasticity model incorporating stress state, strain rate and temperature effects / W. Dou, Z. Xu, H. Hu, F. Huang // *International Journal of Impact Engineering*. — 2021. — Vol. 155. — P. 103897.
- [83] Determination of shear behavior and constitutive modeling of the 603 steel over wide temperature and strain rate ranges / Z. Xu, Y. Liu, H. Hu et al. // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. — 2019. — Vol. 129. — P. 184–204.
- [84] Zhao Shixiang, Petrov Yu.V., Volkov G.A. The modified relaxation plasticity model and the non-monotonic stress–strain diagram // *International Journal of Mechanical Sciences*. — 2023. — Vol. 240. — P. 107919.
- [85] Zhao S., Petrov Yu. V., Volkov G. A. Modeling the Nonmonotonic Behavior Flow Curves under Dynamic Loads // *Physical Mesomechanics*. — 2022. — Vol. 25, no. 3. — P. 221–226.
- [86] Selyutina N.S., Petrov Yu.V. Comparative Analysis of Dynamic Plasticity Models // *Reviews on Advanced Materials Science*. — 2018. — Vol. 57, no. 2. — P. 199–211.
- [87] Selyutina N. S., Petrov Y. V. Instabilities of Dynamic Strain Diagrams Predicted by the Relaxation Model of Plasticity // *Journal of Dynamic Behavior of Materials*. — 2022. — Vol. 8, no. 2. — P. 304–315.
- [88] Zadpoor A.A., Sinke J., Benedictus R. 4 - Numerical simulation modeling of tailor welded blank forming // *Tailor Welded Blanks for Advanced Manufacturing* / Ed. by Brad L. Kinsey, Xin Wu. — Woodhead Publishing, 2011. — Woodhead Publishing Series in Welding and Other Joining Technologies. — P. 68–94.
- [89] Dynamic mechanical properties and constitutive equations of 2519A aluminum alloy / W. Liu, Z. He, Y. Chen, S. Tang // *Transactions of Nonferrous Metals Society of China*. — 2014. — Vol. 24, no. 7. — P. 2179–2186.

- [90] Johnston W. G., Gilman J. J. Dislocation Velocities, Dislocation Densities, and Plastic Flow in Lithium Fluoride Crystals // Journal of Applied Physics. — 1959. — Vol. 30, no. 2. — P. 129–144.
- [91] Zhao, Shixiang, Pronina, Yulia. On the stress state of a pressurised pipe with an initial thickness variation, subjected to non-homogeneous internal corrosion // E3S Web Conf. — 2019. — Vol. 121. — P. 01013.
- [92] Zhao Shixiang, Pronina Yulia. On the MATLAB finite element modelling of an elastic plane with a hole under tension // 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA). — 2017. — P. 1–4.
- [93] Чжао Ш. О механохимической коррозии трубы с отклонением по толщине под действием внешнего и внутреннего давления // Вектор науки Тольяттинского государственного университета. — 2020. — № 1. — С. 86–91.
- [94] Чжао Ш. Алгоритм расчета напряженного состояния пластинки с эллиптическим отверстием в MATLAB // Процессы управления и устойчивость. — 2017. — Т. 4, № 1. — С. 251–255.
- [95] Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures, 2nd ed. / T. Belytschko, W. Liu, B. Moran, K. Elkhodary. — Wiley, 2014.
- [96] Zienkiewicz O., Taylor R. The finite element method for solid and structural mechanics. 7th ed. — Butterworth-Heinemann, 2014.
- [97] Zienkiewicz O., Taylor R., J.Z. Zhu. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. 6th ed. — Butterworth-Heinemann, 2005.
- [98] Hilber Hans M., Hughes Thomas J. R., Taylor Robert L. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics // Earthquake Engineering & Structural Dynamics. — 1977. — Vol. 5, no. 3. — P. 283–292.
- [99] Oden J. Tinsley. Finite Elements of Nonlinear Continua. — Dover publications, 1972.

- [100] Ming, Lu, Pantalé, Olivier. An efficient and robust VUMAT implementation of elastoplastic constitutive laws in Abaqus/Explicit finite element code // *Mechanics & Industry*. — 2018. — Vol. 19, no. 3. — P. 308.
- [101] Compressive Viscoplastic Response of 6082-T6 and 7075-T6 Aluminium Alloys Under Wide Range of Strain Rate at Room Temperature: Experiments and Modelling / W. Moćko, J. A. Rodriguez-Martinez, Z. L. Kowalewski, A. Rusinek // *Strain*. — 2012. — Vol. 48, no. 6. — P. 498–509.
- [102] Winzer R., Glinicka A. The Static and Dynamic Compressive Behaviour of Selected Aluminium Alloys // *Engineering Transactions*. — 2014. — Vol. 59, no. 2. — P. 85–100.
- [103] Low Cycle Fatigue Properties of Sc-Modified AA2519-T62 Extrusion / Robert Kosturek, Lucjan Śnieżek, Janusz Torzewski, Marcin Wachowski // *Materials*. — 2020. — Vol. 13, no. 1.
- [104] Temperature-Dependent Material Property Databases for Marine Steels—Part 2: HSLA-65 / Jennifer K. Semple, Daniel H. Bechetti, Wei Zhang, Charles R. Fisher // *Integrating Materials and Manufacturing Innovation*. — 2022. — Vol. 11, no. 1. — P. 13–40.
- [105] Babu Bijish. Physically Based Model for Plasticity and Creep of Ti-6Al-4V. — Lulea, Sweden : Luleå University of Technology, 2008.
- [106] Dynamic response of conventional and hot isostatically pressed Ti-6Al-4V alloys: experiments and modeling / Sia Nemat-Nasser, Wei-Guo Guo, Vitali F. Nesterenko et al. // *Mechanics of Materials*. — 2001. — Vol. 33, no. 8. — P. 425–439.
- [107] Zerilli Frank J, Armstrong Ronald W. Constitutive relations for titanium and Ti-6Al-4V // *Materials Science and Engineering: A*. — 1996. — Vol. 209, no. 1-2. — P. 198–205.
- [108] Finite element analysis and application based on ABAQUS (In Chinese) / Zhuo Zhuang, You Xiaochuan, Jianhui Liao, et al. — Tsinghua University Press, 2009.

- [109] Xu Zejian, Huang Fenglei. Plastic behavior and constitutive modeling of armor steel over wide temperature and strain rate ranges // *Acta Mechanica Solida Sinica*. — 2012. — Vol. 25, no. 6. — P. 598–608.