

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

на правах рукописи

Цыганов Никита Игоревич

**Оптимизация древовидных  
транспортных систем энергетических  
рынков**

Научная специальность 1.2.3. Теоретическая информатика, кибернетика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., профессор  
Васин Александр Алексеевич

Москва - 2024

# Оглавление

Введение . . . . .	5
<b>Глава 1. Алгоритмы оптимизации транспортной системы энергетического рынка . . . . .</b>	<b>17</b>
1.1. Постановка задачи . . . . .	18
1.1.1. Узлы . . . . .	19
1.1.2. Линии . . . . .	20
1.1.3. Общественное благосостояние . . . . .	22
1.1.4. Задача максимизации общественного благосостояния . . . . .	23
1.1.5. Сведение исходной задачи к задаче поиска оптимального множества расширяемых линий . . . . .	24
1.2. NP-трудность задачи . . . . .	25
1.3. Решение вспомогательной задачи . . . . .	27
1.3.1. Точечно-множественные отображения и операции над ними . . . . .	27
1.3.2. Функция предложения . . . . .	29
1.3.3. Функция спроса . . . . .	30
1.3.4. Функции предельных транспортных затрат . . . . .	31
1.3.5. Конкурентное равновесие . . . . .	32
1.3.6. Алгоритм решения вспомогательной задачи . . . . .	34
1.3.7. Оценка сложности алгоритма для случая кусочно-линейных функций . . . . .	40
1.4. Дополнительные и конкурентные линии. Условие инвариантности структуры потока . . . . .	43
1.5. Частные случаи задачи, для которых существуют полиномиальные алгоритмы решения . . . . .	47
1.5.1. «Цепочка» с нулевыми начальными пропускными способностями . . . . .	48
1.5.2. «Цепочка» с монотонными начальными равновесными ценами . . . . .	50
1.6. Решение задачи в случае выполнения условия инвариантности структуры потока . . . . .	53
1.6.1. Рынок типа «цепочка» . . . . .	53
1.6.1.1 Алгоритм . . . . .	56
1.6.1.2 Оценка среднестатистической сложности алгоритма . . . . .	57
1.6.2. Рынок типа «звезда» . . . . .	62

1.6.2.1	Алгоритм . . . . .	65
1.6.2.2	Оценка среднестатистической сложности алгоритма . . . . .	68
1.6.3.	Рынок типа «звезда-цепочка» . . . . .	72
1.6.3.1	Алгоритм . . . . .	74
1.6.3.2	Оценка среднестатистической сложности алгоритма . . . . .	75
1.6.4.	Рынок типа «дерево» . . . . .	78
1.6.5.	Сравнение алгоритмов для различных типов рынков . . . . .	81
	Выводы к первой главе . . . . .	82
<b>Глава 2.</b>	<b>Применение разработанных алгоритмов для оценки перспектив газификации российских регионов . . . . .</b>	<b>83</b>
2.1.	О природном газе . . . . .	84
2.2.	Потребление природного газа в Российской Федерации . . . . .	85
2.3.	Оценка функции транспортных затрат для нового газопровода . . . . .	87
2.3.1.	Магистральные газопроводы . . . . .	87
2.3.2.	Газопроводы распределительных сетей . . . . .	89
2.4.	Оценка функции производственных затрат для газового месторождения . . . . .	91
2.4.1.	Динамическая модель функционирования газовой залежи . . . . .	92
2.4.2.	Упрощенная модель функционирования газовой залежи . . . . .	97
2.4.3.	Оценка функции производственных затрат . . . . .	98
2.5.	Оценка функции спроса на природный газ в негазифицированном узле . . . . .	98
2.5.1.	Обзор потенциальных потребителей газа на негазифицированной территории . . . . .	99
2.5.2.	Математическая модель для оценки функции спроса на природный газ . . . . .	100
2.6.	Анализ перспектив газификации Иркутской области . . . . .	119
2.6.1.	Обзор основных потенциальных потребителей природного газа в регионе . . . . .	121
2.6.2.	Подготовка исходных параметров задачи . . . . .	124
2.6.3.	Результаты расчетов . . . . .	132
	Выводы ко второй главе . . . . .	136
	<b>Заключение . . . . .</b>	<b>137</b>
	<b>Список сокращений и условных обозначений . . . . .</b>	<b>139</b>
	<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>141</b>

Список иллюстраций . . . . .	150
Список таблиц . . . . .	153
Приложения . . . . .	154

## Введение

Данная работа посвящена исследованию оптимизационных математических моделей многоузловых рынков энергоресурсов. Энергетические ресурсы играют важную роль в жизни людей и мировой экономике. Они используются в электроэнергетике, промышленности, транспорте, теплоснабжении, строительстве. В основном такие ресурсы применяются как источник энергии или в химической промышленности, где используются в качестве исходного сырья. Из углеводородов (природного газа, нефти, угля) получают пластмассу, резину, красители, лекарства, взрывчатые вещества, масла и многое другое.

Обычно энергоресурсы добываются в местах, удаленных от потребителей. Углеводороды, как правило, залегают глубоко под землей, крупные места их залегания, пригодные для рентабельной промышленной разработки, называются месторождениями. Чтобы их извлечение было возможным, месторождения предварительно разведывают и обустривают. Для добычи природного газа и нефти бурятся скважины, а для разработки угольных месторождений используются карьеры (открытый способ добычи) или шахты (закрытый способ).

Углеводороды являются невозобновляемыми источниками энергии. Хотя их скопления в недрах земли все еще огромны, и только разведанных запасов хватит как минимум на несколько десятилетий [64–66], в настоящее время большое внимание уделяется возобновляемым источникам энергии (ВИЭ), таким как энергия солнца, воды, ветра, волн, приливов и отливов, биоэнергия. Если гидроэнергия в промышленных масштабах используется еще с конца XIX века, то популярность других ВИЭ начала активно расти сравнительно недавно. За последнее десятилетие значительный подъем продемонстрировали солнечная энергетика и ветроэнергетика. Так, если в 2008 году доли мощностей этих отраслей в электроэнергетике среди всех ВИЭ составляли 1.4% (солнечная энергетика) и 10.5% (ветроэнергетика), то к 2020 году они возросли до 26.8% и 26.2% соответственно [67, 68]. Доля ВИЭ в выработке электроэнергии в 2019 году составила 26%<sup>1</sup> (в 2020 году - 28.4% по сравнению с 61.4% доли углеводородов [69]), а в суммарном конечном потреблении энергии - 11.2% (по сравнению с 8.7% десятилетием ранее).

Основной недостаток ВИЭ - это сильная зависимость от климатических, погодных и временных условий<sup>2</sup>, следствием чего является непостоянность объемов выработки энергии. Этот недостаток может быть устранен при использовании накопителей энергии, сглажива-

---

<sup>1</sup> Без учета традиционного биотоплива.

<sup>2</sup> Эта зависимость в меньшей степени относится к биоэнергии и энергии приливов и отливов.

ющих данные колебания. Несмотря на бурный рост популярности ВИЭ, не ожидается, что они в ближайшие несколько десятилетий смогут догнать невозобновляемые углеводородные источники по объемам выработки, однако, несомненно, ВИЭ обладают преимуществом за счет экологичности и неистощаемости.

Третий вид энергетических ресурсов - это ядерное топливо, использующееся на атомных электростанциях (АЭС), ледоколах и подводных лодках. В основе ядерной энергетики лежит управляемая цепная ядерная реакция, сопровождающаяся выделением энергии. Ключевой проблемой ядерной энергетики является ее безопасность. Риски аварий и террористических атак, которые могут привести к техногенным и экологическим катастрофам в результате взрывов и выбросов радиоактивных веществ в окружающую среду, вызывают острые споры относительно целесообразности использования АЭС. Крупнейшие аварии в истории атомной энергетики - это аварии на Чернобыльской (1986 год, [5]) и Фукусима-1 (2011 год, [6]) АЭС. Вторая проблема - это утилизация радиоактивных отходов.

В связи с перечисленными недостатками некоторые страны придерживаются политики отказа от ядерной энергетики [70]. Так, Германия к 2020 году уменьшила объем выработки электроэнергии на АЭС более чем в два раза по сравнению с десятилетием ранее и в ближайшие годы планирует полностью закрыть все действующие ядерные реакторы, причем замещение энергии происходит в основном за счет ВИЭ. Однако в целом мировая ядерная энергетика продолжает активно развиваться.

Среди достоинств АЭС следует отметить отсутствие выбросов в атмосферу загрязняющих веществ (при безаварийной работе), в том числе и углекислого газа, что позитивно сказывается на снижении «парникового эффекта». Второе преимущество - это высокая энергоемкость используемого топлива (урана и плутония) по сравнению с углеводородами: полное выгорание килограмма урана с обогащением до 4% обеспечивает такое же количество выделяемой энергии, как и сжигание 100 тонн каменного угля [71]. По словам главы «Росатома» Алексея Лихачева, урана для работы нынешнего поколения АЭС хватит на 60 лет, а в перспективе, учитывая новые технологии многократного использования уранового сырья, - на 600 лет [72]. В 2020 году доля ядерной энергетики в выработке электроэнергии составила 10.2% [69].

Область применения энергоресурсов обширна и в конечном итоге охватывает практически все сферы человеческой деятельности. Потребителями энергоресурсов являются электростанции, котельные, промышленные предприятия, транспортные компании, население и многие другие. Для доставки энергоресурсов от мест добычи до потребителей используются транспортные линии. В качестве транспортных линий могут выступать газопроводы, нефте-

провода, автомобильные и железные дороги, водные и воздушные пути. Как правило, узлы производства и потребления энергоресурсов совместно со связывающими их транспортными линиями и промежуточными узлами представляют собой сложную транспортную сеть, называемую энергетическим рынком.

Часто производитель и потребитель энергоресурса находятся на большом расстоянии друг от друга, что делает значительной долю транспортных затрат в окончательной стоимости энергоресурса для потребителя. Способствовать снижению транспортных затрат может строительство новых транспортных линий или модернизация уже существующих. Однако подобные преобразования почти всегда требуют серьезных капитальных вложений. Поэтому **актуальной** задачей для современной мировой экономики является эффективное планирование развития транспортных систем, при котором с учетом различного множества возможных преобразований и получаемых от них экономических выгод достигается оптимума некоторый критерий.

Одним из таких критериев является общественное благосостояние энергетического рынка - суммарная полезность потребления энергоресурса за вычетом суммарных затрат на его добычу, транспортировку и развитие транспортной системы. Также общественное благосостояние может быть эквивалентно определено как суммарный выигрыш (прибыль) всех агентов рынка - производителей, потребителей и владельцев транспортной системы. При максимизации общественного благосостояния в точке оптимума достигается наибольший «экономический эффект», извлекаемый из рынка и затем распределяющийся среди рыночных агентов в зависимости от узловых цен и в соответствии с правилами функционирования рынка.

Критерий общественного благосостояния является наилучшим из возможных критериев для регулируемого рынка в следующем плане. Для любого возможного «эффективного» (или «справедливого») распределения выигрышей среди рыночных агентов, реализуемого при некотором сценарии развития транспортной системы рынка, такого же или лучшего (т.е. выигрыш каждого рыночного агента не уменьшится) распределения можно достичь при оптимальном, с точки зрения максимизации общественного благосостояния, развитии транспортной системы и правильном внешнем регулировании, при котором поддерживается достигнутый оптимум, но в случае необходимости между рыночными агентами происходит перераспределение выигрышей. При регулировании могут применяться такие механизмы, как фиксирование узловых цен на энергоресурс, субсидии, налоги и компенсации.

Также критерий общественного благосостояния тесно связан с понятием совершенной конкуренции, при которой каждый отдельный рыночный агент не в состоянии повлиять на

цену, но обладает полной информацией о рынке и может свободно выбирать партнеров для сделок. Известно, что в условиях совершенной конкуренции на рынке устанавливается цена, балансирующая предложение и спрос на энергоресурс, при этом достигается максимум общественного благосостояния (Эрроу К. Д. и Дебре Ж., 1954, [7]). Однако это утверждение справедливо только в краткосрочной перспективе, при которой транспортная система рынка фиксирована, и рыночные агенты выбирают лишь объемы используемых энергоресурсов (в случае производителя ими являются объемы производства и продажи, потребителя - объемы покупки и потребления, владельцев транспортных линий - объемы покупки, транспортировки и продажи) при заданных узловых ценах.

Понятия общественного благосостояния и совершенной конкуренции являются основополагающими в современной экономической теории. Одной из самых первых работ, заложивших основы этой теории, является опубликованная в 1874 году классическая книга Леона Вальраса «Элементы чистой политической экономии, или теория общественного богатства» [8]. В ней формулируется принцип общего экономического равновесия, построенный на основе двух базовых гипотез - максимума полезности и равенства спроса и предложения. Вальд А., Эрроу К. Д. и Дебре Ж. доказывают существование этого равновесия [7, 9]. Также Дебре Ж. описывает условия, при выполнении которых равновесие является Парето-оптимальным с точки зрения выигрышей рыночных агентов, и условия, при которых, наоборот, любая Парето-оптимальная ситуация является равновесием [10].

В научных работах, посвященных исследованию многоузловых энергетических рынков, преимущественно рассматриваются модели с фиксированной транспортной структурой без возможности модернизации транспортных линий (Крю М. А., Фернандо Ч. С., Клейндорфер П. Р., Давидсон М. Р., Догадушкина Ю. В., Крейнс Е. М., Новикова Н. М., Селезнев А. В., Удальцов Ю. А., Ширяева Л. В., Хоган В., Васин А. А., Васина П. А., Фогельсанг И., Эдоли Э., Фиорензани С., Варгиолу Т., Ву Ф., Харша Н., Злотник А., Сиошанси Р., Рудкевич А. М., Роджер З. Р.-М., Конрадо Б.-С., [11–20]). В этих работах в основном изучаются проблемы, связанные с поиском конкурентного равновесия. Давидсон М. Р., Догадушкина Ю. В., Крейнс Е. М., Новикова Н. М., Селезнев А. В., Удальцов Ю. А., Ширяева Л. В. описывают математическую модель оптимизации функционирования единой энергосистемы России [14]. В данной модели режимы загрузки генерирующего оборудования выбираются согласно ценовым заявкам генерирующих компаний. Рассматриваются следующие задачи, возникающие при принятии управляющих решений: выбора состава включенного генерирующего оборудования, максимизации общественного благосостояния рынка на сутки вперед, минимизации издержек генерирующих компаний балансирующего рынка. Первая задача яв-

ляется частично целочисленной задачей оптимизации. Последние две - задачами линейного программирования.

Росельон Х. рассматривает оптимизационную модель многоузлового рынка электроэнергии [21], который состоит из производителей, потребителей и линий электропередачи. Производители и потребители характеризуются функциями производственных затрат и полезности соответственно, линии - функциями транспортных потерь и пропускными способностями. Ставится задача максимизации общественного благосостояния, являющаяся задачей выпуклого программирования, приводится ее решение. В этой же работе описываются три способа, позволяющие привлечь инвестиции для долгосрочного расширения сети. Джоскоу П. Л. и Тироль Ж. рассматривают многоузловой рынок электроэнергии и изучают влияние на рыночную власть игроков распределения прав на передачу электроэнергии по линиям сети [22]. При этом рассматриваются два типа прав: финансовые и физические.

В работах, затрагивающих проблему развития транспортной системы, в основном рассматривается задача минимизации затрат при заданных объемах потребления и производства (Левит Б. Ю., Лившиц В. Н., Гомес П. В., Сарайва Ж. Т., Чжао Х.-С., Чен Л., Ву Т., Чхве Ж., Тран Т., Аль-Киб А. А., Томас Р., О Х. С., Биллтон Р., Сулеймани К, Мазлум Д., Джабер Р. А., [23–28]). В работе Левита Б. Ю. и Лившица В. Н. рассматриваются задачи оптимального распределения грузопотоков по транспортной сети и выбора наиболее выгодных путей ее развития с точки зрения минимизации транспортных затрат [23], при этом считаются заданными узлы отправления и прибытия и объемы для каждого из перевозимых и взаимозаменяемых видов грузов.

Среди работ, в которых исследуется задача развития транспортных систем энергетических рынков с точки зрения максимизации общественного благосостояния, стоит отметить работы [29–32]. В работах Васина А. А. и Дайловой Е. А. [29,30] рассматривается двухузловой рынок в условиях несовершенной конкуренции, для него ставится задача оптимизации пропускной способности, указываются три возможных равновесия Нэша, для каждого типа равновесия исследуется поведение функции общественного благосостояния. В этих же работах рассматривается двухузловой рынок в условиях совершенной конкуренции с несколькими транспортными линиями, а также многоузловой рынок в условиях совершенной конкуренции без фиксированных транспортных затрат, для которого выводятся некоторые свойства. Отдельно исследуется рынок типа «цепочка» в условиях совершенной и несовершенной конкуренций. Для него доказываются утверждения, позволяющие при выполнении некоторых условий определить направления потоков для транспортных линий.

В работах Васина А. А. и Долматовой М. С. [31, 32] для многоузлового энергетичес-

кого рынка, в котором присутствуют переменные и фиксированные транспортные затраты, вводится условие инвариантности структуры потока (УИСП), при котором направления потоков в линиях постоянны и не зависят от пропускных способностей. Исследуется рынок типа «цепочка» с монотонными начальными равновесными ценами. Для него доказыва­ется справедливость УИСП, супермодулярность функции общественного благосостояния по множеству расширяемых линий, описывается алгоритм решения задачи для случая нулевых начальных пропускных способностей. Для рынка типа «звезда» выписывается критерий выполнения УИСП, доказыва­ется свойство данной транспортной структуры, связанное с понятиями супермодулярности и субмодулярности (свойства супермодулярности и субмодулярности исследуются в работах Хачатурова Р. В. и Черенина В. П. [33–36]), однако алгоритмы решения задачи для произвольных начальных пропускных способностей не предлагаются.

Данная диссертационная работа продолжает начатое в [31, 32] исследование и посвящена задаче оптимизации транспортной системы энергетического рынка одного ресурса с точки зрения максимизации общественного благосостояния. Энергетический рынок состоит из множества узлов и множества связывающих их транспортных линий, транспортная структура рынка соответствует графу типа «дерево». Каждый узел представляет собой локальный рынок со своими производителями и потребителями. Производители узла характеризуются функцией производственных затрат, потребители - функцией полезности потребления. Эти функции зависят от объемов производства и потребления соответственно.

Каждая транспортная линия соединяет два узла и позволяет энергоресурсу перемещаться между ними в любом направлении. Линия характеризуется предельными затратами на передачу энергоресурса, начальной пропускной способностью (в частном случае она может быть равна нулю, в этом случае, считаем, линия еще не построена) и функцией затрат на увеличение пропускной способности (расширение). Последняя состоит из двух компонент: переменной и фиксированной. Переменная компонента зависит от объема расширения. Фиксированные затраты не зависят от объема расширения и взимаются, если линия расширяется.

В случае рынков природного газа или нефти к фиксированным затратам при строительстве магистрального трубопровода (транспортной линии) можно отнести затраты на подготовку проекта строительства, аренду или покупку земли, подготовку трассы пролегания трубопровода, строительство объектов линейной службы эксплуатации трубопровода, оплату труда, фиксированные затраты при строительстве компрессорных станций и другие фиксированные затраты [1].

Переменными в рассматриваемой задаче являются объемы производства в узлах и потоки в транспортных линиях. При этом объемы потребления в узлах выражаются через объ-

емы производства и потоки, а пропускная способность каждой линии равна либо начальной пропускной способности (если величина потока ее не превышает), либо величине потока (в случае превышения величины потока начальной пропускной способности). Задача является статической, т.е. все исходные параметры задачи не меняются с течением времени. Предполагается, что зафиксирован некоторый период времени (например, год), и все объемы, потоки и пропускные способности считаются в отношении этого периода. Поскольку затраты на расширение линии взимаются единовременно, то такие затраты предварительно приводятся к этому же периоду с учетом ставки дисконтирования, уровня инфляции и предполагаемого срока службы линии.

Ключевой особенностью задачи является учет фиксированных затрат при расширении линий, в результате чего задача переходит из класса задач выпуклой оптимизации (Карманов В. Г., 1986, [37]) в класс NP-трудных задач (Гэри М., Джонсон Д., 1982, [38]) и требует разработки специальных алгоритмов решения. Исходная задача обобщает две известные задачи оптимизации. Первая - это задача максимизации общественного благосостояния рынка в условиях совершенной конкуренции (Эрроу К. Д., Дебре Ж., 1954, [7]). Вторая - транспортная задача (Канторович Л. В., Гавурин М. К., Гизевайт Г. М., Пардалос П. М., [39,40]).

Также важной проблемой является разработка способа практического использования рассматриваемой модели для планирования развития реальных энергетических рынков. Хотя сферы применения этой модели в работе никак не ограничиваются, изначально она создавалась для описания функционирования рынков природного газа и нефти. В связи с этим необходимо уметь оценивать исходные параметры модели для таких рынков.

**Цель** данного диссертационного исследования состоит в разработке методов эффективного планирования развития транспортных систем энергетических рынков газа и нефти. Для достижения обозначенной цели поставлены следующие **задачи**:

- 1) описать модель многоузлового энергетического рынка и сформулировать задачу оптимизации его транспортной системы с точки зрения максимизации общественного благосостояния;
- 2) определить класс сложности задачи;
- 3) разработать алгоритмы решения задачи для различных транспортных структур и провести оценку их сложности;
- 4) разработать метод оценки исходных параметров модели для рынка природного газа, в котором потребители не имеют доступа к природному газу, но существует возможность их газификации;
- 5) применить разработанные методы и алгоритмы для оценки перспектив газификации

какого-либо негазифицированного региона Российской Федерации.

**Объектом исследования** является многоузловой энергетический рынок с древовидной транспортной структурой, **предметом исследования** - оптимизационная модель многоузлового энергетического рынка с древовидной транспортной структурой.

**Научная новизна** исследования заключается в следующем:

- 1) доказана NP-трудность рассматриваемой задачи оптимизации транспортной системы энергетического рынка;
- 2) разработан алгоритм решения вспомогательной задачи с фиксированным множеством расширяемых линий, оценена его сложность для случая кусочно-линейных функций;
- 3) разработаны полиномиальные алгоритмы решения исходной задачи для следующих частных случаев:
  - рынка типа «цепочка» с нулевыми начальными пропускными способностями;
  - рынка типа «цепочка» с монотонными начальными равновесными ценами;
- 4) разработаны алгоритмы решения исходной задачи в случае выполнения условия инвариантности структуры потока для следующих транспортных структур: «цепочка», «звезда», «звезда-цепочка»; исследована среднестатистическая сложность этих алгоритмов;
- 5) для рынка природного газа разработаны математические модели и методы для оценки исходных параметров задачи: функций транспортных затрат для газопроводов, функций производственных затрат для газовых месторождений и функций спроса для негазифицированных узлов; получены соответствующие оценки для магистральных и распределительных газопроводов, газовых месторождений и потребителей Иркутской области;
- 6) проведена оценка перспектив газификации Иркутской области, определены оптимальные планы развития газовой сети с точки зрения максимизации общественного благосостояния для различных сценариев учета экологической составляющей.

**Теоретическая значимость.** Доказанные утверждения и разработанные алгоритмы развивают теорию в области математической экономики, методов оптимизации и вычислительных методов.

**Практическая значимость.** Результаты исследования и разработанные алгоритмы могут применяться при планировании развития реальных рынков газа или нефти. Исследуемая оптимизационная модель вместе с соответствующими алгоритмами может быть адаптирована к использованию в других сферах (например, информационных сетях).

При выполнении исследования использовались **методы** из следующих разделов на-

уки: оптимизации, теории алгоритмов, вычислительной математики, анализа данных, математического анализа и дискретной математики. Также применялись различные методы разработки программного обеспечения.

**Достоверность** полученных теоретических результатов обусловлена строгостью доказательств сформулированных математических утверждений и подтверждается проведенными вычислительными экспериментами. Достоверность результатов, полученных с использованием данных из открытых источников, зависит от достоверности самих данных. Автором исследования при отборе данных отдавалось предпочтение официальным источникам.

**Апробация.** Результаты исследования докладывались на следующих математических конференциях и семинарах:

- XVII Байкальская международная школа-семинар «Методы оптимизации и их приложения» (с. Максимиха, Республика Бурятия, 2017);
- II Всероссийская конференция «Социофизика и социоинженерия» (Москва, 2018);
- 5th International Conference on Energy, Sustainability and Climate Change (Греция, 2018);
- IX Московская международная конференция по исследованию операций (Москва, 2018);
- Семинар по математической экономике (руководители: Данилов В. И., Полтерович В. М.) «Энергетические рынки: оптимизация сетей передачи» (ЦЭМИ РАН, Москва, 5 марта 2019);
- 30th European Conference on Operational Research (Дублин, Ирландия, 2019);
- X International Conference «Optimization and Applications» (Черногория, 2019);
- Научная конференция «Тихоновские чтения 2019» (Москва, 2019);
- Ломоносовские чтения 2020. Секция вычислительной математики и кибернетики (Москва, 2020);
- IV Российский экономический конгресс «РЭК-2020» (Москва, 2020);
- Научная конференция «Тихоновские чтения 2021» (Москва, 2021);
- The 9th International Conference on Information Technology and Quantitative Management (China, 2022);
- Семинар по математической экономике (руководители: Данилов В. И., Полтерович В. М.) «Оптимизация транспортных систем энергетических рынков» (ЦЭМИ РАН, Москва, 7 ноября 2023);
- Семинар по экономике энергетики и окружающей среды (руководители: академик РАН В.М. Полтерович, д.э.н. С.Я. Чернавский) «Оптимизация структуры энергетических рынков» (14 марта 2024).

**Публикации.** Основные результаты по теме исследования опубликованы в 10 печатных изданиях: 3 - в журналах, рекомендованных ВАК [41, 43, 44], 7 - в сборниках и тезисах докладов [42, 45–50].

**Основные научные результаты.** По итогам проведенного исследования получены следующие основные научные результаты:

- 1)
  - для многоузлового энергетического рынка одного ресурса типа «звезда» (и более общего случая рынка типа «дерево»), в котором при расширении транспортных линий присутствуют не зависящие от объема расширения фиксированные затраты, задача оптимизации транспортной системы с точки зрения максимизации общественного благосостояния (далее - *исходная задача*) является NP-трудной; см. [43] (личный вклад автора диссертации в доказательство составляет 100%);
- 2)
  - для вспомогательной задачи оптимизации транспортной системы с фиксированным множеством расширяемых линий (далее - *вспомогательная задача*), которая является задачей выпуклого программирования, разработан специальный алгоритм решения; см. [43] (личный вклад автора диссертации в разработку алгоритма составляет 100%);
  - оценена его сложность для случая кусочно-линейных исходных функций: количество вычислительных операций алгоритма не превосходит значения некоторой квадратичной функции от числа узлов в рынке; см. [43] (личный вклад автора диссертации в проведение оценки составляет 100%);
- 3)
  - разработаны алгоритмы решения исходной задачи для различных транспортных структур для случая выполнения условия инвариантности структуры потока, при котором направления перетоков в транспортных линиях постоянны и не зависят от пропускных способностей; разработаны алгоритмы для следующих транспортных структур: «цепочка», «звезда», «звезда-цепочка»; см. [41, 42] («цепочка») [44] («звезда»); личный вклад автора диссертации в непосредственно разработку алгоритмов составляет 100%; теорема о свойстве дополнительных и конкурентных линиях, лежащая в основе алгоритмов, была сформулирована и доказана другими авторами ранее;
  - исследована среднестатистическая сложность этих алгоритмов: для проведенных вычислительных экспериментов со случайным генерированием исходных задач для каждого из трех случаев даже для большого числа узлов (больше 50) исходная задача решается за разумное время, а зависимость среднего числа решаемых вспомогательных задач от числа узлов в рынке аппроксимируется квадратичной

функцией; см. [41, 42] («цепочка») [44] («звезда»); личный вклад автора диссертации в реализацию и оценку алгоритмов составляет 100%;

- 4)
  - для рынка природного газа разработаны методы оценки функций спроса для негазифицированных узлов; см. [45] (личный вклад автора диссертации в разработку моделей составляет не менее 80%, вклад в выведение функций спроса вместе с доказательствами - 100%);
- 5)
  - разработанные алгоритмы и методы применены для оценки перспектив газификации Иркутской области с возможным подключением ТЭЦ и котельных региона к магистральному газопроводу «Сила Сибири»; см. [45] (личный вклад автора диссертации составляет 100%);
  - согласно проведенным расчетам на основе данных о характеристиках ТЭЦ и котельных региона за 2021-2022 годы, газификация приносит положительный эффект только в случае учета экологической составляющей, выражающейся в виде штрафа за сжигание каждой единицы используемого в настоящий момент в регионе угля; см. [45] (личный вклад автора диссертации составляет 100%);
  - проведенные расчеты показали, что разработанные алгоритмы могут применяться при планировании развития реальных энергетических рынков и позволяют решать исходную задачу за разумное время.

**Положения, выносимые на защиту.** По итогам проведенного исследования на защиту выносятся следующие положения:

- 1)
  - для многоузлового энергетического рынка одного ресурса типа «звезда» (и более общего случая рынка типа «дерево»), в котором при расширении транспортных линий присутствуют не зависящие от объема расширения фиксированные затраты, задача оптимизации транспортной системы с точки зрения максимизации общественного благосостояния является NP-трудной;
- 2)
  - для вспомогательной задачи оптимизации транспортной системы с фиксированным множеством расширяемых линий, которая является задачей выпуклого программирования, существует специальный алгоритм решения;
  - для случая кусочно-линейных исходных функций количество вычислительных операций данного алгоритма не превосходит значения некоторой квадратичной функции от числа узлов в рынке;
- 3)
  - существуют алгоритмы решения исходной задачи для различных транспортных структур для случая выполнения условия инвариантности структуры потока, при котором направления перетоков в транспортных линиях постоянны и не зависят

от пропускных способностей;

- для проведенных вычислительных экспериментов со случайным генерированием исходных задач для транспортных структур типа «цепочка», «звезда», «звезда-цепочка» зависимость среднего числа решаемых вспомогательных задач от числа узлов в рынке аппроксимируется квадратичной функцией;
- 4)
- согласно проведенным расчетам на основе данных о характеристиках ТЭЦ и котельных региона за 2021-2022 годы, газификация Иркутской области с возможным подключением ТЭЦ и котельных региона к магистральному газопроводу «Сила Сибири» приносит положительный эффект только в случае учета экологической составляющей, выражающейся в виде штрафа за сжигание каждой единицы используемого в настоящий момент в регионе угля;
  - проведенные расчеты показали, что разработанные алгоритмы могут применяться при планировании развития реальных энергетических рынков и позволяют решать исходную задачу за разумное время.

# Глава 1. Алгоритмы оптимизации транспортной системы энергетического рынка

Данная глава посвящена исследованию оптимизационной модели многоузлового энергетического рынка. Рынок состоит из множества узлов, в которых расположены производители и потребители энергоресурса, а также древовидной транспортной структуры, позволяющей энергоресурсу перемещаться между узлами. Критерием оптимизации является общественное благосостояние - суммарная полезность потребления за вычетом суммарных затрат на производство и транспортировку.

С целью сокращения записи и удобства восприятия на всем протяжении главы вместо термина «энергетический рынок» используется термин «рынок», вместо «энергоресурс» - «товар», а вместо «транспортная линия» - «линия».

В параграфе 1.1. описывается постановка задачи оптимизации транспортной системы энергетического рынка. Формулируется вспомогательная задача максимизации общественного благосостояния при фиксированном множестве расширяемых линий. Показывается, что исходная задача сводится к задаче поиска оптимального множества расширяемых линий.

В параграфе 1.2. доказывается NP-трудность исходной задачи.

Параграф 1.3. посвящен исследованию вспомогательной задачи. В нем вводится понятие конкурентного равновесия, тесно связанное с решением вспомогательной задачи. Предлагается алгоритм решения данной задачи, проводится оценка его сложности для случая кусочно-линейных функций.

В параграфе 1.4. вводится важное условие инвариантности структуры потока, при котором для каждой линии направление перетока постоянно и заранее известно. Там же определяются отношения дополненности и конкурентности для линий. Показывается, как данные отношения могут быть использованы при поиске оптимального множества расширяемых линий.

В параграфе 1.5. рассматриваются некоторые частные случаи задачи, для которых существуют полиномиальные алгоритмы решения, описываются соответствующие алгоритмы и оцениваются их сложности.

В параграфе 1.6. предлагаются алгоритмы решения задачи в случае выполнения условия инвариантности структуры потока для следующих транспортных структур: «цепочка», «звезда», «звезда-цепочка» и «дерево». Для каждого алгоритма проводится вычислитель-

ный эксперимент для оценки среднестатистической сложности, находится аппроксимация среднего числа решаемых вспомогательных задач в зависимости от числа узлов.

### 1.1. Постановка задачи

Рассмотрим модель многоузлового рынка однородного<sup>3</sup> товара, состоящего из множества локальных рынков и сети передачи. Функционирование модели рассматривается в долгосрочной перспективе, однако предполагается, что структура рынка в динамике существенно не меняется. При этом выделяется некоторый базовый промежуток времени (например, год), по отношению к которому измеряются используемые в модели величины, представляющих объем товара (например, объем производства в год, объем потребления в год, объем передачи в год). Для краткости описания этот промежуток далее в данной главе не упоминается, однако подразумевается. Неориентированный<sup>4</sup> граф  $G = (N, L)$  характеризует транспортную структуру рынка и состоит из множества узлов (локальных рынков)  $N$  и множества линий  $L \subseteq \{\{i, j\} \mid i, j \in N\}$ . Считаем, что любая пара узлов связана не более чем одной линией, а граф  $G$  является деревом, т.е. не содержит циклов (рисунок 1). Множество  $L$  может включать в себя как существующие линии, так и потенциальные, которые еще не построены.

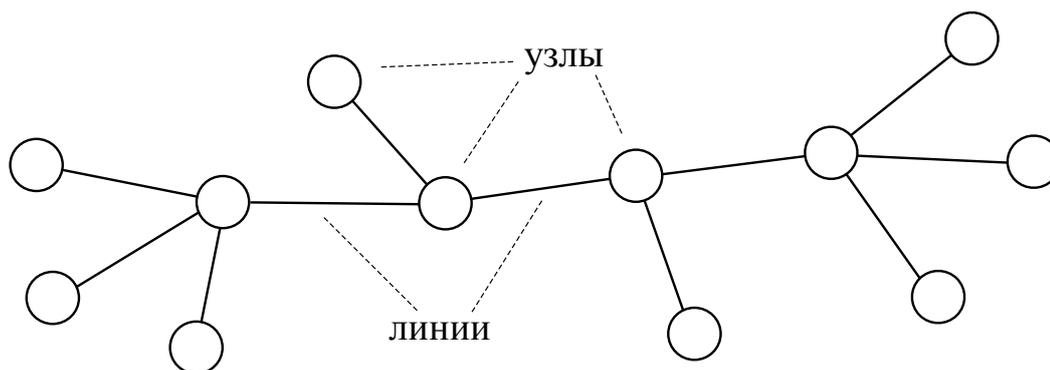


Рис. 1. Пример транспортной структуры рынка типа «дерево»

<sup>3</sup> Т.е. не различающегося по качеству (Васин А. А., Морозов В. В., 2005, [51]).

<sup>4</sup> Требование неориентированности графа введено для удобства описания. Для всех полученных в работе результатов могут быть получены их аналоги для случая ориентированного графа.

### 1.1.1. Узлы

Каждый узел  $i \in N$  представляет собой локальный рынок, на котором могут присутствовать производители и потребители товара.

Производители узла  $i$  характеризуются функцией производственных затрат  $c_i(v_i)$ , зависящей от объема производства  $v_i$  и определенной на множестве  $[0, V_i^{\max}]$ , где максимальный объем производства  $V_i^{\max} \geq 0$  принадлежит расширенной числовой прямой и может равняться  $+\infty$ , если объем производства не ограничен. В частном случае  $V_i^{\max}$  может также равняться нулю, что означает отсутствие возможности производства в данном узле. Обозначим для произвольной функции  $f$  через  $f'_-$  ( $f'_+$ ) левую (соответственно правую) производную. Считаем, что функция  $c_i(v_i)$  непрерывна, не убывает, выпукла,  $c_i(0) = 0$  и  $c'_{i-}(v_i) \rightarrow +\infty$  при  $v_i \rightarrow +\infty$ , если  $V_i^{\max} = +\infty$ . Экономический смысл данных свойств интуитивно понятен. При увеличении объема производства, считаем, что затраты не могут уменьшиться. Свойство выпуклости означает, что предприятия вводят производственные мощности в порядке возрастания предельных затрат, таким образом минимизируя собственные издержки. Последнее свойство говорит о том, что предельные затраты стремятся к бесконечности при увеличении объема выпуска.

Потребители узла  $i$  характеризуются функцией полезности потребления  $U_i(v_i^d)$ , зависящей от объема потребления  $v_i^d \geq 0$ . Считаем, что эта функция непрерывна, не убывает, вогнута, равна константе при достаточно больших  $v_i^d$ ,  $U_i(0) = 0$  и  $U'_{i+}(0) < +\infty$ . Стоит пояснить смысл данных предположений. Если товар не потребляется, то полезность равна нулю, при этом предельная полезность в нуле ограничена. При увеличении объема потребления полезность может только возрасти. Свойство вогнутости означает, что полезность от приобретения очередной единицы товара не больше, чем от приобретения предыдущей единицы. Также считаем, что есть некоторый конечный объем насыщения, при достижении которого дальнейшее увеличение объема потребления уже не приводит к росту полезности. Обозначим его через  $V_i^{d,\max}$ .

### 1.1.2. Линии

Каждая линия  $\{i, j\} \in L$  позволяет товару перемещаться между узлами  $i$  и  $j$  в любом<sup>5</sup> направлении. Считаем, что предельные затраты на передачу товара  $e_{\{i,j\}}^t \geq 0$  постоянны и не зависят от направления перетока, а объем передаваемого товара ограничен начальной пропускной способностью линии  $Q_{\{i,j\}}^0 \geq 0$ , которая может быть увеличена. Затраты на увеличение пропускной способности состоят из двух компонент: фиксированной  $E_{\{i,j\}}^f \geq 0$  и переменной  $E_{\{i,j\}}^v(\Delta Q_{\{i,j\}})$ , зависящей от объема расширения (увеличения пропускной способности) линии.

Наличие фиксированной компоненты обусловлено тем, что при постройке или расширении линии есть затраты, величина которых слабо зависит или не зависит вовсе от объема расширения, а определяется лишь самим фактом расширения. К таким затратам можно отнести затраты на проектирование, аренду земли, подготовку трассы пролегания линии, оплату труда и другие фиксированные затраты.

Считаем, что переменная компонента  $E_{\{i,j\}}^v(\Delta Q_{\{i,j\}})$  непрерывна, не убывает, выпукла, определена на множестве  $[0, \Delta Q_{\{i,j\}}^{\max}]$ , где максимальный объем расширения  $\Delta Q_{\{i,j\}}^{\max} \geq 0$  принадлежит расширенной числовой прямой и может равняться  $+\infty$ , а также что  $E_{\{i,j\}}^v(0) = 0$ .

Стоит отметить, что затраты на расширение линии имеют разовый характер, в то время как производство, передача и потребление товара осуществляются постоянно в процессе функционирования рынка. Данная несогласованность устраняется путем приведения затрат на расширение линии к базовому промежутку времени, в котором считаются объемы производства, передачи и потребления товара. Пусть базовый промежуток равен  $\tau$  лет. Приведение производится с учетом срока службы линии  $T_{\{i,j\}}$ , который также измеряется в годах, и коэффициента  $\delta$  - разницы между процентной ставкой по банковским вкладам и уровнем инфляции (рассматривается непрерывное дисконтирование). Пусть  $E_{\{i,j\}}^{f,r}$  и  $E_{\{i,j\}}^{v,r}(\Delta Q_{\{i,j\}})$  - исходные фиксированные и переменные затраты на расширение линии соответственно, взимание которых происходит единожды в начальный момент времени. Тогда приведенные затраты, которые в дальнейшем используются в модели, находятся следующим образом (Стофт С., 2002, [52]):  $E_{\{i,j\}}^f = k \cdot E_{\{i,j\}}^{f,r}$ ,  $E_{\{i,j\}}^v(\Delta Q_{\{i,j\}}) = k \cdot E_{\{i,j\}}^{v,r}(\Delta Q_{\{i,j\}})$ , где

<sup>5</sup> В случае рассмотрения задачи с ориентированным графом перемещение возможно только в одном направлении.

$$k = \begin{cases} \frac{\delta\tau}{1 - e^{-\delta T_{\{i,j\}}}}, & \delta > 0, \\ \frac{\tau}{T_{\{i,j\}}}, & \delta = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Обозначим через  $q_{ij}$  объем передачи (поток<sup>6</sup>) товара из узла  $i$  в узел  $j$ . Если  $q_{ij} < 0$ , то считаем, что товар передается в обратном направлении, т.е.  $q_{ji} = -q_{ij}$ . Транспортные затраты  $E_{ij}(q_{ij})$  для линии  $\{i, j\}$  складываются из затрат на передачу товара и затрат на расширение линии, если величина потока превышает начальную пропускную способность линии:

$$E_{ij}(q_{ij}) = \begin{cases} e_{\{i,j\}}^t |q_{ij}|, & |q_{ij}| \in [0, Q_{\{i,j\}}^0], \\ e_{\{i,j\}}^t |q_{ij}| + E_{\{i,j\}}^f + E_{\{i,j\}}^v (|q_{ij}| - Q_{\{i,j\}}^0), & |q_{ij}| \in (Q_{\{i,j\}}^0, Q_{\{i,j\}}^{\max}], \end{cases} \quad (1.2)$$

где  $Q_{\{i,j\}}^{\max} = Q_{\{i,j\}}^0 + \Delta Q_{\{i,j\}}^{\max}$ . Функция  $E_{ij}(q_{ij})$  определена на множестве  $|q_{ij}| \leq Q_{\{i,j\}}^{\max}$  и является неотрицательной, четной, причем  $E_{ij}(0) = 0$ . Если  $E_{\{i,j\}}^f > 0$  и  $\Delta Q_{\{i,j\}}^{\max} > 0$ , то она не является выпуклой, поскольку имеет разрыв при  $q_{ij} \in \{-Q_{\{i,j\}}^0, Q_{\{i,j\}}^0\}$  (рисунок 2). Стоит отметить, что функции  $E_{ij}(q_{ij})$  и  $E_{ji}(q_{ji})$  совпадают.

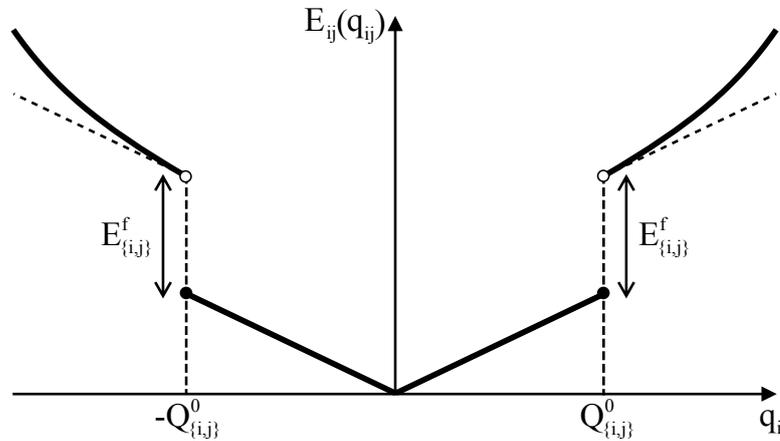


Рис. 2. Пример функции транспортных затрат  $E_{ij}(q_{ij})$  с  $\Delta Q_{\{i,j\}}^{\max} = +\infty$

<sup>6</sup> Стоит напомнить, что поток, также как и объемы производства и потребления, измеряются по отношению к некоторому базовому промежутку времени (например, году).

### 1.1.3. Общественное благосостояние

Обозначим через  $\vec{q} = (q_{ij} \mid \{i, j\} \in L)$  вектор потоков, для которого выполняются условия  $q_{ji} = -q_{ij}$ ,  $\{i, j\} \in L$ , через  $\vec{v} = (v_i \mid i \in N)$  - вектор объемов производства, а через  $Z(i) = \{j \in N \mid \{i, j\} \in L\}$  - множество смежных узлов для узла  $i \in N$ . Для фиксированных векторов  $\vec{q}$  и  $\vec{v}$  определим объемы потребления  $v_i^d(\vec{q}, \vec{v}) = (v_i^d(\vec{q}, \vec{v}) \mid i \in N)$  следующим образом:

$$v_i^d(\vec{q}, \vec{v}) = v_i - \sum_{j \in Z(i)} q_{ij}, \quad i \in N. \quad (1.3)$$

Здесь предполагается, что объем потребления в узле равен объему производства за вычетом суммарного оттока товара из узла. Пронумеруем произвольным образом все узлы из множества  $N$  и определим общественное благосостояние как суммарную полезность потребления за вычетом суммарных производственных и транспортных затрат:

$$W(\vec{q}, \vec{v}) = \sum_{i \in N} U_i \left( v_i - \sum_{j \in Z(i)} q_{ij} \right) - \sum_{i \in N} c_i(v_i) - \sum_{\{i, j\} \in L, i < j} E_{ij}(q_{ij}). \quad (1.4)$$

Общественное благосостояние также может быть представлено в виде суммы выигрышей всех игроков рынка: производителей, потребителей и владельцев линий. Обозначим через  $\vec{p} = (p_i \mid i \in N)$  вектор цен, где  $p_i$  - цена, по которой происходит купля-продажа товара в узле  $i$ . Тогда прибыль производителей  $Pr_i(\vec{q}, \vec{v}, \vec{p})$  и выигрыш потребителей  $CS_i(\vec{q}, \vec{v}, \vec{p})$  узла  $i$  равны следующим величинам:

$$Pr_i(\vec{q}, \vec{v}, \vec{p}) = p_i v_i - c_i(v_i), \quad CS_i(\vec{q}, \vec{v}, \vec{p}) = U_i \left( v_i - \sum_{j \in Z(i)} q_{ij} \right) - p_i \left( v_i - \sum_{j \in Z(i)} q_{ij} \right).$$

Прибыль от функционирования линии  $\{i, j\} \in L$  образуется в результате покупки товара в одном инцидентном ей узле и его продажи во втором узле и равна

$$T_{ij}(\vec{q}, \vec{v}, \vec{p}) = (p_j - p_i)q_{ij} - E_{ij}(q_{ij}).$$

Суммарная прибыль транспортной системы следующая:

$$T(\vec{q}, \vec{v}, \vec{p}) = \sum_{\{i, j\} \in L, i < j} T_{ij}(\vec{q}, \vec{v}, \vec{p}).$$

В итоге альтернативное представление общественного благосостояния имеет следующий вид

для любого вектора цен  $\vec{p}$ :

$$\begin{aligned}
W(\vec{q}, \vec{v}) &= \sum_{i \in N} U_i \left( v_i - \sum_{j \in Z(i)} q_{ij} \right) - \sum_{i \in N} c_i(v_i) - \sum_{\{i,j\} \in L, i < j} E_{ij}(q_{ij}) \\
&\quad + \sum_{i \in N} \left( p_i \left( v_i - \sum_{j \in Z(i)} q_{ij} \right) \right) - \sum_{i \in N} \left( p_i \left( v_i - \sum_{j \in Z(i)} q_{ij} \right) \right) \\
&= \sum_{i \in N} (p_i v_i - c_i(v_i)) + \sum_{i \in N} \left( U_i \left( v_i - \sum_{j \in Z(i)} q_{ij} \right) - p_i \left( v_i - \sum_{j \in Z(i)} q_{ij} \right) \right) \\
&\quad + \sum_{\{i,j\} \in L, i < j} ((p_j - p_i) q_{ij} - E_{ij}(q_{ij})) \\
&= \sum_{i \in N} Pr_i(\vec{q}, \vec{v}, \vec{p}) + \sum_{i \in N} CS_i(\vec{q}, \vec{v}, \vec{p}) + T(\vec{q}, \vec{v}, \vec{p}) \equiv W^a(\vec{q}, \vec{v}, \vec{p}).
\end{aligned}$$

Представления  $W(\vec{q}, \vec{v})$  и  $W^a(\vec{q}, \vec{v}, \vec{p})$  полностью совпадают как функции от  $\vec{q}, \vec{v}$ . Таким образом, при изменении цен происходит лишь перераспределение общественного благосостояния между игроками, само общественное благосостояние остается неизменным.

#### 1.1.4. Задача максимизации общественного благосостояния

Поставим задачу максимизации общественного благосостояния:

$$W(\vec{q}, \vec{v}) \xrightarrow{\vec{q}, \vec{v}} \max. \quad (1.5)$$

Текущая глава посвящена решению задачи (1.5). Основная ее сложность заключается в наличии фиксированных затрат  $E_{\{i,j\}}^f$  в (1.2), из-за чего целевая функция задачи не является вогнутой, т.е. задача не является задачей выпуклого программирования (Карманов В. Г., 1986, [37]).

Отдельного внимания заслуживает вопрос реализации оптимального состояния рынка. Пусть  $(\vec{q}^*, \vec{v}^*)$  - некоторое решение задачи (1.5). Какие существуют механизмы рыночного регулирования, стимулирующие всех игроков рынка действовать в соответствии с найденным решением: производителей выпускать товар в объемах  $\vec{v}^*$ , транспортную систему перепродавать его в объемах  $\vec{q}^*$ , а потребителей покупать в объемах  $\vec{v}^d(\vec{q}^*, \vec{v}^*)$ ? Ведь все игроки, мы считаем, являются рациональными и стремятся максимизировать свой выигрыш. Как будет показано далее, решению  $(\vec{q}^*, \vec{v}^*)$  соответствует вектор равновесных цен, при фиксировании

которых всем игрокам рынка выгодно действовать в соответствии с решением  $(\vec{q}^*, \vec{v}^*)$ , если владелец каждой линии  $\{i, j\} \in L$  в случае ее расширения получает компенсацию в размере  $E_{\{i,j\}}^f$  от игрока, заинтересованного в реализации оптимального состояния. Таким игроком может являться государство. Оно же способно регулировать цены в узлах с помощью ФАС (если речь идет о российском рынке), не позволяя им отклоняться от равновесных, в случае присутствия в узлах крупных игроков, способных влиять на цены.

В случае рассмотрения российского рынка газа или нефти возможности реализации оптимального состояния способствует то обстоятельство, что крупнейшие компании, владеющие магистральными трубопроводами (в случае рынка газа это «Газпром», в случае рынка нефти - «Транснефть»), контролируются государством.

### 1.1.5. Сведение исходной задачи к задаче поиска оптимального множества расширяемых линий

Рассмотрим вспомогательную задачу с фиксированным множеством расширяемых линий  $R \subseteq L$ :

$$W(\vec{q}, \vec{v}, R) \xrightarrow{\vec{q}, \vec{v}} \max, \quad (1.6)$$

где  $W(\vec{q}, \vec{v}, R)$  отличается от  $W(\vec{q}, \vec{v})$  тем, что при расчете  $W(\vec{q}, \vec{v}, R)$  при  $\{i, j\} \in R$  вне зависимости от потока  $q_{ij}$  фиксированные затраты на расширение линии  $E_{\{i,j\}}^f$  всегда включаются в функцию транспортных затрат (1.2), а при  $\{i, j\} \in L \setminus R$ , полагаем,  $Q_{\{i,j\}}^{\max} = Q_{\{i,j\}}^0$  вне зависимости от  $\Delta Q_{\{i,j\}}^{\max}$ . Обозначим через  $\widetilde{W}(R)$  максимальное значение благосостояния в задаче (1.6), а через  $\widetilde{X}(R) = \{(\vec{q}, \vec{v}) \mid W(\vec{q}, \vec{v}, R) = \widetilde{W}(R)\}$  - множество решений данной задачи. Тогда исходная задача (1.5) сводится к задаче поиска оптимального множества расширяемых линий:

$$\widetilde{W}(R) \xrightarrow{R \subseteq L} \max. \quad (1.7)$$

Поэтому если  $L^*$  - решение задачи (1.7), то  $(\vec{q}^*, \vec{v}^*) \in \widetilde{X}(L^*)$  - решение задачи (1.5).

## 1.2. NP-трудность задачи

Докажем, что исходная задача (1.5) является NP-трудной<sup>7</sup>. Рассмотрим частный случай задачи, в котором рынок состоит из множества производящих узлов  $N^s = \{1, \dots, n\}$  и потребляющего узла 0, соединенного со всеми остальными:  $N = N^s \cup \{0\}$ ,  $L = \bigcup_{i \in N^s} \{i, 0\}$ . Каждый производящий узел  $i \in N^s$  характеризуется максимальным объемом производства  $V_i^{\max} = g_i \in \mathbb{N}$ , при этом  $c_i(v_i) \equiv 0$ ,  $U_i(v_i^d) \equiv 0$ . Потребляющий узел не имеет производства ( $V_0^{\max} = 0$ ) и описывается функцией полезности потребления, которая определяется параметром  $K \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  и имеет следующий вид (рисунок 3):

$$U_0(v_0^d) = \begin{cases} (K+1)v_0^d - (v_0^d)^2/2, & v_0^d \in [0, K+1], \\ (K+1)^2/2, & v_0^d \in (K+1, +\infty). \end{cases}$$

Каждая линия  $\{i, 0\} \in L$  характеризуется фиксированными затратами на расширение

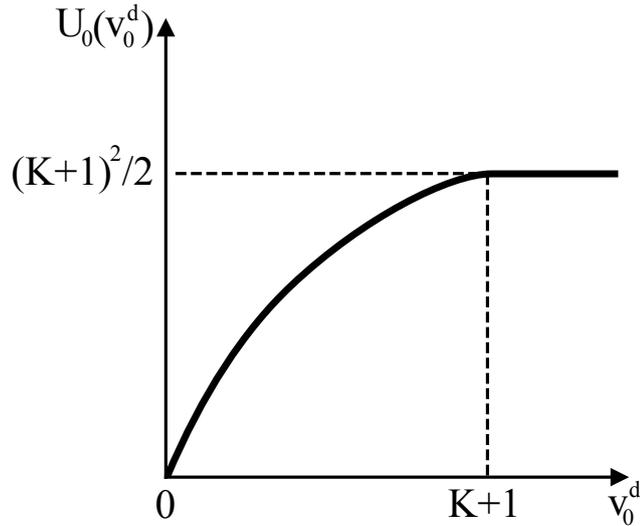


Рис. 3. Функция полезности потребления  $U_0(v_0^d)$

$E_{\{i,0\}}^f = g_i \in \mathbb{N}$ , при этом  $e_{\{i,0\}}^t = 0$ ,  $Q_{\{i,0\}}^0 = 0$ ,  $\Delta Q_{\{i,0\}}^{\max} = +\infty$ ,  $E_{\{i,0\}}^v(\Delta Q_{\{i,0\}}) \equiv 0$ . Тогда для фиксированного множества производящих узлов  $\bar{N} \subseteq N^s$  с расширяемыми инцидентными линиями максимальное значение общественного благосостояния, очевидно, следующее:

$$\widetilde{W}(\bar{N}) = U_0\left(\sum_{i \in \bar{N}} V_i^{\max}\right) - \sum_{i \in \bar{N}} E_{\{i,0\}}^f = U_0\left(\sum_{i \in \bar{N}} g_i\right) - \sum_{i \in \bar{N}} g_i.$$

<sup>7</sup> Задача называется NP-трудной, если к ней полиномиально сводится любая задача из класса NP (Гэри М., Джонсон Д., 1982, [38]). Класс NP состоит из задач разрешимости, которые можно решить на недетерминированной машине Тьюринга за полиномиальное время от длины входных данных.

Здесь для всех расширяемых линий происходит передача максимально возможного объема товара в потребляющий узел. В итоге рассматриваемая задача определяется параметрами  $n, K, g_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) и эквивалентна следующей:

$$\widetilde{W}(\overline{N}) \xrightarrow{\overline{N} \subseteq N} \max. \quad (1.8)$$

Рассмотрим теперь следующую задачу разрешимости<sup>8</sup> с дополнительным параметром  $W \in \mathbb{R}$ : существует ли множество

$$\overline{N} \subseteq N, \text{ для которого } \widetilde{W}(\overline{N}) \geq W? \quad (1.9)$$

Заметим, что задача (1.9) сводится к задаче (1.8) за полиномиальное время от длины входных параметров. Действительно, для решения задачи (1.9) достаточно найти максимальное значение благосостояния  $W^*$  в задаче (1.8), после чего проверить неравенство  $W^* \geq W$ . Докажем NP-полноту<sup>9</sup> задачи (1.9), из чего будет следовать NP-трудность задачи (1.8) (а значит и более общей задачи (1.5)).

**Теорема 1.** *Задача (1.9) является NP-полной.*

**Доказательство.** Задача (1.9) принадлежит классу NP, поскольку она может быть решена за полиномиальное время от длины входных параметров на недетерминированной машине Тьюринга с помощью рассмотрения всех подмножеств  $\overline{N} \subseteq N$  и проверки для каждого из них соответствующего неравенства. Поэтому для доказательства утверждения достаточно свести к задаче (1.9) известную NP-полную задачу «о сумме подмножеств» (Клейнберг Д., Тардош Е., 2006, [53]): существует ли для заданных множества  $S = \{s_1, \dots, s_m\}$  натуральных чисел и натурального числа  $P$  подмножество

$$S' \subseteq S, \text{ для которого } \sum_{s \in S'} s = P? \quad (1.10)$$

Рассмотрим задачу (1.9) со следующими параметрами:  $n = m, K = P, g_i = s_i$  ( $i \in \{1, \dots, m\}$ ),  $W = P^2/2$ . В таком случае

$$\widetilde{W}(\overline{N}) = U_0 \left( \sum_{i \in \overline{N}} s_i \right) - \sum_{i \in \overline{N}} s_i = \varphi \left( \sum_{i \in \overline{N}} s_i \right),$$

<sup>8</sup> Задача разрешимости - это задача с ответом «да» или «нет» (Гэри М., Джонсон Д., 1982, [38]).

<sup>9</sup> Задача разрешимости называется NP-полной, если она принадлежит классу NP и к ней полиномиально сводится любая другая задача из класса NP (Гэри М., Джонсон Д., 1982, [38]).

где

$$\varphi(t) = \begin{cases} Pt - \frac{1}{2}t^2, & t \in [0, P + 1], \\ \frac{1}{2}(P + 1)^2 - t, & t \in (P + 1, +\infty). \end{cases}$$

Заметим, что функция  $\varphi(t)$  вогнута, а ее единственный максимум достигается при  $t = P$ , поэтому  $\max(\varphi(t)) = \varphi(P) = P^2/2$ . А это означает, что неравенство  $\widetilde{W}(\overline{N}) \geq P^2/2$  выполняется в том и только том случае, когда  $\sum_{i \in \overline{N}} s_i = P$ . Следовательно, ответ к задаче (1.9) с данными параметрами положителен тогда и только тогда, когда положителен ответ к задаче (1.10), т.е. искомое сведение получено. ■

**Следствие.** *Задача (1.5) является NP-трудной.*

Полученный результат говорит о том, что в общем случае не существует эффективных<sup>10</sup> методов решения задачи (1.5). Однако для некоторых частных случаев задачи такие методы есть, что будет далее показано.

### 1.3. Решение вспомогательной задачи

#### 1.3.1. Точечно-множественные отображения и операции над ними

Введем некоторые обозначения и операции, используемые далее в работе. Для точечно-множественного отображения  $G(x)$ , определенного на множестве  $X \subseteq \mathbb{R}$ , введем следующие определения.

**Определение 1.** *Точечно-множественное отображение  $G$  называется правильным, если для любого  $x \in X$   $G(x)$  - выпуклое множество, а график отображения  $\{(x, g) \mid x \in X, g \in G(x)\}$  является непрерывным отображением некоторого одномерного выпуклого непустого множества в  $\mathbb{R}^2$ .*

**Определение 2.** *Точечно-множественное отображение  $G$  называется неубывающим (невозрастающим), если для любых  $x_1, x_2 \in X$ ,  $x_1 < x_2$ , и для любых  $g_1 \in G(x_1)$ ,  $g_2 \in G(x_2)$  выполняется неравенство  $g_1 \leq g_2$  ( $g_1 \geq g_2$ ).*

<sup>10</sup> Т.е. решаемых детерминированной машиной Тьюринга за полиномиальное время от длины входных данных (Гэри М., Джонсон Д., 1982, [38]).

**Определение 3.** Точечно-множественное отображение  $G$  называется монотонным, если оно является неубывающим или невозрастающим.

Обозначим через  $P^\uparrow$  ( $P^\downarrow$ ) множество всех неубывающих (невозрастающих) правильных точечно-множественных отображений, а через  $P^m = P^\uparrow \cup P^\downarrow$  - множество всех монотонных правильных точечно-множественных отображений.

Для множеств  $Y, Y_1, Y_2 \subseteq \mathbb{R}$ , и числа  $y \in \mathbb{R}$  введем следующие операции:

- $-Y \equiv \{y \mid -y \in Y\}$ ;
- $Y_1 + Y_2 \equiv \{y \mid y = y_1 + y_2, y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2\}$ ;
- $Y_1 - Y_2 \equiv Y_1 + (-Y_2)$ ;
- $Y + y \equiv y + Y \equiv Y + \{y\}$ ;
- $Y - y \equiv -y + Y \equiv Y - \{y\}$ ;
- $-Y + y \equiv y - Y \equiv (-Y) + \{y\}$ ;
- $-Y - y \equiv -y - Y \equiv (-Y) - \{y\}$ ;
- $\max(Y) \equiv \max_{y \in Y} y, \min(Y) \equiv \min_{y \in Y} y$  (для множества  $Y$ , являющимся точкой или отрезком).

Для  $G(x), G_1(x), G_2(x) \in P^m$  с областями определения  $X, X_1, X_2$  соответственно введем следующие обозначения.

- $G^{-1}$  - точечно-множественное отображение, график которого является отражением графика отображения  $G$  относительно прямой  $g = x$ . Очевидно, что если  $G \in P^\uparrow$  ( $G \in P^\downarrow$ ), то  $G^{-1} \in P^\uparrow$  ( $G^{-1} \in P^\downarrow$ ).
- $-G$  - точечно-множественное отображение, график которого является отражением графика отображения  $G$  относительно прямой  $g = 0$ . При этом если  $G \in P^\uparrow$  ( $G \in P^\downarrow$ ), то  $-G \in P^\downarrow$  ( $-G \in P^\uparrow$ ).
- $G_1 + G_2$  - точечно-множественное отображение с областью определения  $X_1 \cap X_2$ , задающееся следующим образом:  $(G_1 + G_2)(x) = G_1(x) + G_2(x)$  для любого  $x \in X_1 \cap X_2$ . В случае  $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$  выполняется следующее свойство: если  $G_1 \in P^\uparrow, G_2 \in P^\uparrow$  ( $G_1 \in P^\downarrow, G_2 \in P^\downarrow$ ), то  $G_1 + G_2 \in P^\uparrow$  ( $G_1 + G_2 \in P^\downarrow$ ).
- $G_1 - G_2 \equiv G_1 + (-G_2)$ .
- $\int_a^b G(x) dx \equiv \int_a^b \min_m(G(x)) dx$  - обобщение интеграла для точечно-множественного отображения, где  $\min_m(Y) \equiv \{y \in Y \mid |y| \leq |y'| \forall y' \in Y\}$  - минимальное по модулю число из множества  $Y \subseteq \mathbb{R}$ .

Обозначим для произвольной непрерывной функции  $f(x)$ , определенной на выпуклом множестве  $X \subseteq \mathbb{R}$ , через  $f'$  ее субдифференциал<sup>11</sup>. При этом если  $f$  - выпуклая (вогнутая)

<sup>11</sup> Субдифференциал является точечно-множественным отображением и используется вместо производной

функция, то  $f' \in P^\uparrow$  ( $f' \in P^\downarrow$ ).

### 1.3.2. Функция предложения

С функцией производственных затрат  $c_i(v_i)$  связана функция предложения Вальраса (Васин А. А., Морозов В. В., 2005, [51])

$$S_i(p_i) \equiv \text{Arg max}_{v_i \in [0, V_i^{\max}]} (p_i v_i - c_i(v_i)),$$

определяющая оптимальный объем выпуска производителей узла  $i$  с точки зрения максимизации их прибыли при фиксированной цене продажи  $p_i$ . Данная функция является неубывающим правильным точно-множественным отображением (т.е.  $S_i(p_i) \in P^\uparrow$ ), определенным при  $p_i \geq 0$ , причем  $\min(S_i(0)) = 0$ . Таким образом,  $S_i(p_i)$  является точкой либо отрезком для любого  $p_i \geq 0$ .

Из определения функции предложения выводятся следующие соотношения, связывающие функции  $c_i(v_i)$  и  $S_i(p_i)$ :

$$S_i(p_i) = \begin{cases} \{0\}, & V_i^{\max} = 0, \\ \begin{cases} \{0\}, & p_i \in [0, c'_{i+}(0)), \\ (c'_i)^{-1}(p_i), & p_i \in [c'_{i+}(0), c'_{i-}(V_i^{\max})], \\ \{V_i^{\max}\}, & p_i \in (c'_{i-}(V_i^{\max}), +\infty), \end{cases} & V_i^{\max} > 0, \end{cases}$$

$$c_i(v_i) = \int_0^{v_i} S_i^{-1}(u) du.$$

На рисунке 4 приводится пример кусочно-линейной функции производственных затрат  $c_i(v_i)$  вместе с соответствующей ей функцией предложения  $S_i(p_i)$ . Данный пример описывает случай, в котором у производителей узла имеются в наличии три производственные мощности, каждая из которых позволяет при фиксированных предельных затратах произвести некоторое ограниченное количество товара.

---

в тех случаях, когда последняя может не существовать (Васильев Ф. П., 1988, [54]). Для существования субдифференциала достаточно существования односторонних производных.

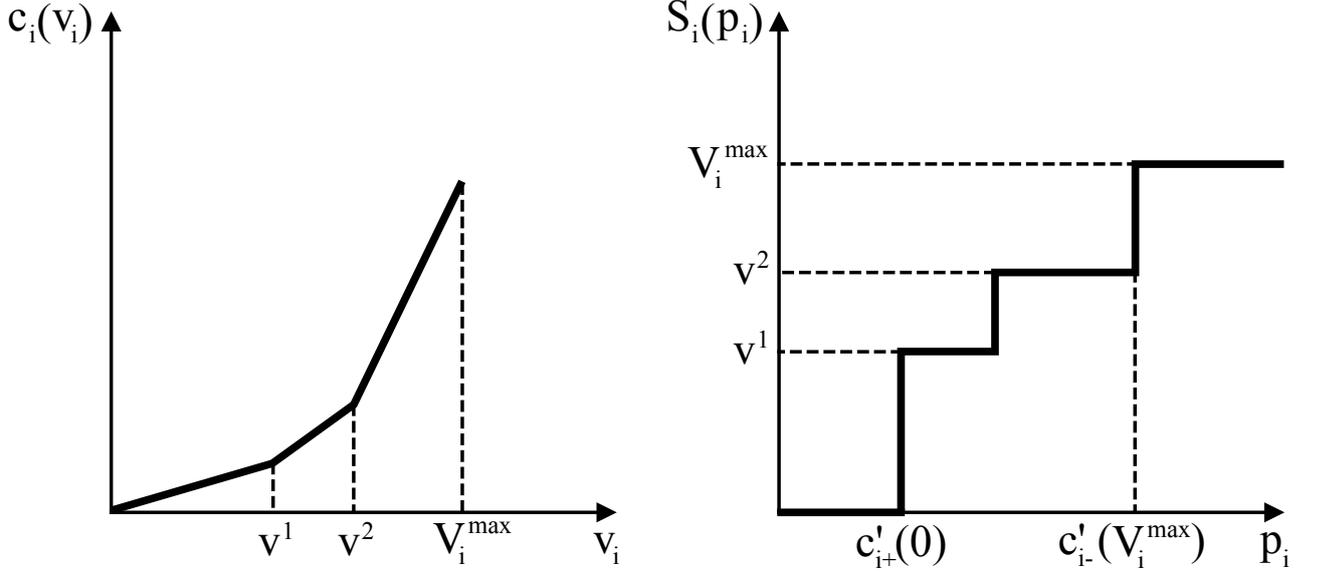


Рис. 4. Пример кусочно-линейной функции производственных затрат  $c_i(v_i)$  (слева) и соответствующей ей функции предложения  $S_i(p_i)$  (справа)

### 1.3.3. Функция спроса

С функцией полезности  $U_i(v_i^d)$  связана функция спроса

$$D_i(p_i) \equiv \text{Arg max}_{v_i^d \in [0, V_i^{d, \max}]} (U_i(v_i^d) - p_i v_i^d),$$

определяющая оптимальный объем покупки для потребителей узла  $i$  с точки зрения максимизации их выигрыша при фиксированной цене на товар  $p_i$ . Данная функция является невозрастающим правильным точно-множественным отображением (т.е.  $D_i(p_i) \in P^\downarrow$ ), определенным при  $p_i \geq 0$  и равным нулю при достаточно больших  $p_i$ , причем  $D_i(0)$  является точкой.

Из определения функции спроса выводятся следующие соотношения, связывающие функции  $U_i(v_i^d)$  и  $D_i(p_i)$ :

$$D_i(p_i) = \begin{cases} \{V_i^{d, \max}\}, & p_i = 0, \\ (U_i')^{-1}(p_i), & p_i \in (0, U_{i+}'(0)], \\ \{0\}, & p_i \in (U_{i+}'(0), +\infty), \end{cases} \quad U_i(v_i^d) = \int_0^{v_i^d} D_i^{-1}(u) du. \quad (1.11)$$

На рисунке 5 приводится пример кусочно-линейной функции полезности потребления  $U_i(v_i^d)$  вместе с соответствующей ей функцией спроса  $D_i(p_i)$ . Данный пример соответствует случаю,

в котором для потребителей узла полезность от приобретения очередной единицы товара не меняется при увеличении объема потребления до достижения объема насыщения  $V_i^{d,max}$ .

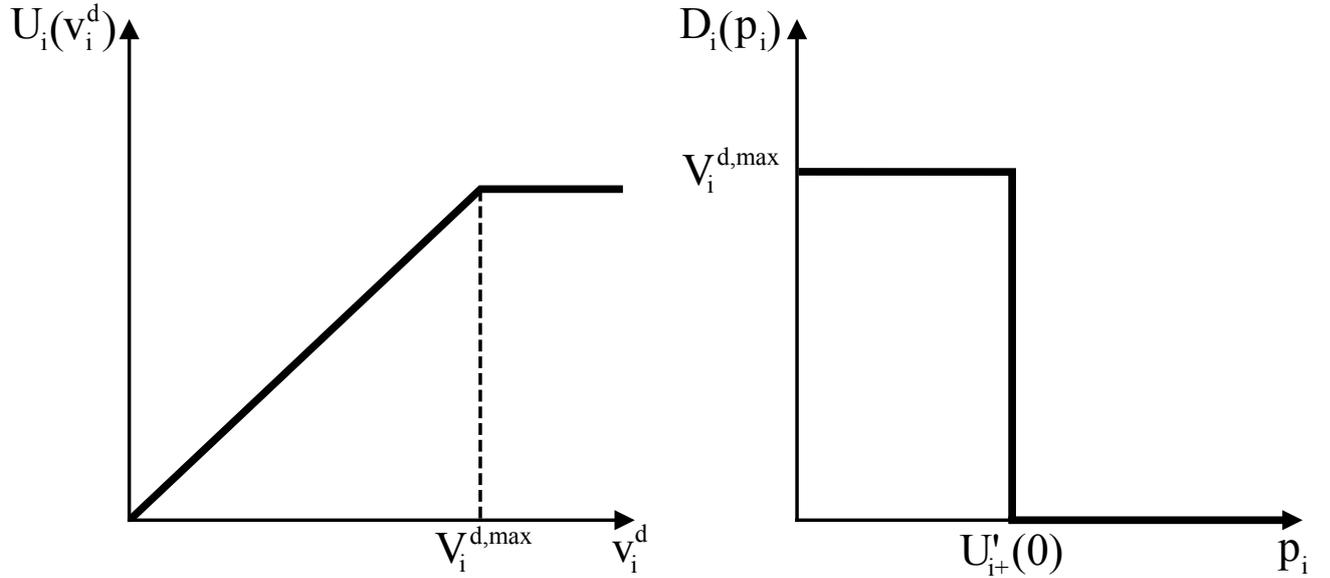


Рис. 5. Пример кусочно-линейной функции полезности потребления  $U_i(v_i^d)$  (слева) и соответствующей ей функции спроса  $D_i(p_i)$  (справа)

#### 1.3.4. Функции предельных транспортных затрат

Введем для каждой линии  $\{i, j\} \in L$  функции предельных транспортных затрат  $e_{ij}^{nex}(q_{ij})$  и  $e_{ij}^{ex}(q_{ij})$ . Первая функция соответствует случаю отсутствия расширения линии, вторая - случаю расширения линии. Функция  $e_{ij}^{nex}(q_{ij})$  определяется следующим образом: если  $Q_{\{i,j\}}^0 = 0$ , то  $e_{ij}^{nex}(q_{ij})$  определена только при  $q_{ij} = 0$  и равна  $(-\infty, +\infty)$  в этой точке; иначе

$$e_{ij}^{nex}(q_{ij}) = \begin{cases} (-\infty, -e_{\{i,j\}}^t], & q_{ij} = -Q_{\{i,j\}}^0, \\ \{-e_{\{i,j\}}^t\}, & q_{ij} \in (-Q_{\{i,j\}}^0, 0), \\ [-e_{\{i,j\}}^t, e_{\{i,j\}}^t], & q_{ij} = 0, \\ \{e_{\{i,j\}}^t\}, & q_{ij} \in (0, Q_{\{i,j\}}^0), \\ [e_{\{i,j\}}^t, +\infty), & q_{ij} = Q_{\{i,j\}}^0. \end{cases}$$

Функция  $e_{ij}^{ex}(q_{ij})$  определяется следующим образом: если  $\Delta Q_{\{i,j\}}^{\max} = 0$ , то  $e_{ij}^{ex}(q_{ij}) \equiv e_{ij}^{nex}(q_{ij})$ ; если  $\Delta Q_{\{i,j\}}^{\max} \neq 0$ ,  $Q_{\{i,j\}}^0 = 0$ , то

$$e_{ij}^{ex}(q_{ij}) = \begin{cases} (-\infty, -e_{\{i,j\}}^t - E_{\{i,j\}-}^v(\Delta Q_{\{i,j\}}^{\max})], & q_{ij} = -Q_{\{i,j\}}^{\max}, \\ -e_{\{i,j\}}^t - E_{\{i,j\}}^v(|q_{ij}| - Q_{\{i,j\}}^0), & q_{ij} \in (-Q_{\{i,j\}}^{\max}, 0), \\ [-e_{\{i,j\}}^t - E_{\{i,j\}+}^v(0), e_{\{i,j\}}^t + E_{\{i,j\}+}^v(0)], & q_{ij} = 0, \\ e_{\{i,j\}}^t + E_{\{i,j\}}^v(|q_{ij}| - Q_{\{i,j\}}^0), & q_{ij} \in (0, Q_{\{i,j\}}^{\max}), \\ [e_{\{i,j\}}^t + E_{\{i,j\}-}^v(\Delta Q_{\{i,j\}}^{\max}), +\infty), & q_{ij} = Q_{\{i,j\}}^{\max}; \end{cases}$$

если  $\Delta Q_{\{i,j\}}^{\max} \neq 0$ ,  $Q_{\{i,j\}}^0 \neq 0$ , то

$$e_{ij}^{ex}(q_{ij}) = \begin{cases} (-\infty, -e_{\{i,j\}}^t - E_{\{i,j\}-}^v(\Delta Q_{\{i,j\}}^{\max})], & q_{ij} = -Q_{\{i,j\}}^{\max}, \\ -e_{\{i,j\}}^t - E_{\{i,j\}}^v(|q_{ij}| - Q_{\{i,j\}}^0), & q_{ij} \in (-Q_{\{i,j\}}^{\max}, -Q_{\{i,j\}}^0), \\ [-e_{\{i,j\}}^t - E_{\{i,j\}+}^v(0), -e_{\{i,j\}}^t], & q_{ij} = -Q_{\{i,j\}}^0, \\ \{-e_{\{i,j\}}^t\}, & q_{ij} \in (-Q_{\{i,j\}}^0, 0), \\ [-e_{\{i,j\}}^t, e_{\{i,j\}}^t], & q_{ij} = 0, \\ \{e_{\{i,j\}}^t\}, & q_{ij} \in (0, Q_{\{i,j\}}^0), \\ [e_{\{i,j\}}^t, e_{\{i,j\}}^t + E_{\{i,j\}+}^v(0)], & q_{ij} = Q_{\{i,j\}}^0, \\ e_{\{i,j\}}^t + E_{\{i,j\}}^v(|q_{ij}| - Q_{\{i,j\}}^0), & q_{ij} \in (Q_{\{i,j\}}^0, Q_{\{i,j\}}^{\max}), \\ [e_{\{i,j\}}^t + E_{\{i,j\}-}^v(\Delta Q_{\{i,j\}}^{\max}), +\infty), & q_{ij} = Q_{\{i,j\}}^{\max}. \end{cases}$$

Каждая из этих функций является неубывающим правильным точечно-множественным отображением (т.е.  $e_{ij}^{nex}(q_{ij}), e_{ij}^{ex}(q_{ij}) \in P^\uparrow$ ) с графиком, проходящим через начало координат и симметричным относительно него (рисунок 6).

### 1.3.5. Конкурентное равновесие

Введем важное понятие конкурентного равновесия, эквивалентное соответствующему определению из [43] (Васин А. А., Григорьева О. М., Цыганов Н. И., 2019).

**Определение 4.** Для фиксированного множества расширяемых линий  $R \subseteq L$  совокупность векторов цен  $\vec{p} = (p_i \mid i \in N)$ , объемов производства  $\vec{v} = (v_i \mid i \in N)$  и потоков

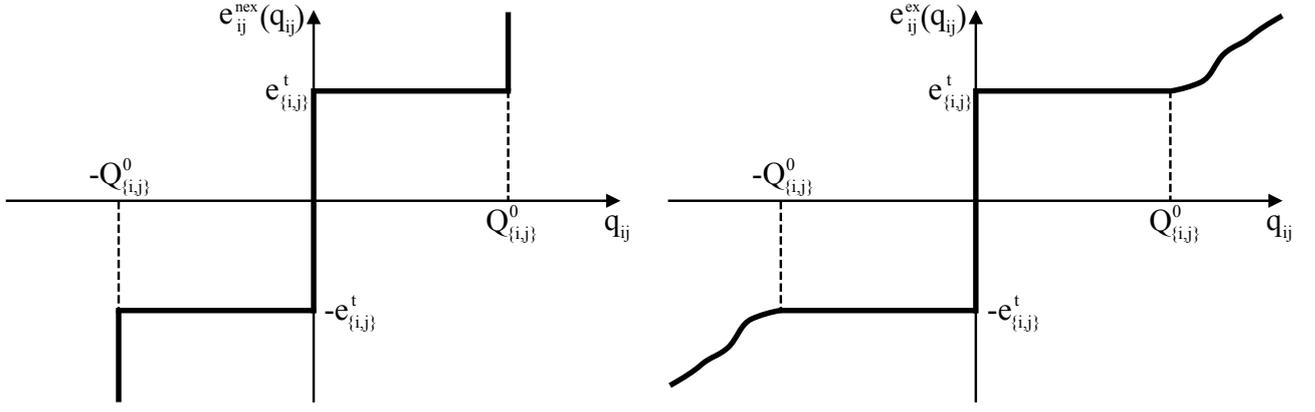


Рис. 6. Пример функций предельных транспортных затрат  $e_{ij}^{nex}(q_{ij})$  (слева) и  $e_{ij}^{ex}(q_{ij})$  (справа) с  $\Delta Q_{\{i,j\}}^{\max} = +\infty$

$\vec{q} = (q_{ij} \mid \{i, j\} \in L)$  называется конкурентным равновесием рынка, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$v_i \in S_i(p_i), v_i^d(\vec{q}, \vec{v}) \in D_i(p_i) \text{ для любого узла } i \in N; \quad (1.12)$$

$$p_j - p_i \in \begin{cases} e_{ij}^{nex}(q_{ij}), & \text{если } \{i, j\} \notin R, \\ e_{ij}^{ex}(q_{ij}), & \text{если } \{i, j\} \in R \end{cases} \text{ для любой линии } \{i, j\} \in L. \quad (1.13)$$

Множество всех троек  $(\vec{p}, \vec{v}, \vec{q})$ , удовлетворяющих (1.12, 1.13), обозначим через  $\tilde{X}^{comp}(R)$ , а соответствующие цены  $\vec{p}$ , объемы производства  $\vec{v}$ , потоки  $\vec{q}$  и объемы потребления  $\vec{v}^d(\vec{q}, \vec{v})$  назовем равновесными.

Первое условие означает, что в каждом узле  $i \in N$  при фиксированной цене  $p_i$  объем производства  $v_i$  максимизирует прибыль производителей, объем потребления  $v_i^d(\vec{q}, \vec{v})$  максимизирует выигрыш потребителей, а цена  $p_i$  балансирует спрос и предложение в узле с учетом входящих и исходящих потоков. Второе условие говорит о том, что для каждой линии  $\{i, j\} \in L$  при фиксированных ценах  $p_i$  и  $p_j$  в инцидентных узлах величина потока  $|q_{ij}|$  из узла с меньшей ценой в узел с большей ценой достигла такого значения, при котором предельные транспортные затраты сравнялись с разницей цен, делая дальнейшее увеличение потока невыгодным для владельца линии  $\{i, j\}$ . Иными словами, конкурентное равновесие - это такое состояние рынка, в котором при фиксированных ценах ни одному из рыночных игроков не выгодно менять свое поведение.

Следующее утверждение, конкретизирующее известную теорему благосостояния (Эрроу К. Д. и Дебре Ж., 1954, [7]) и доказанное в работе [43] (Васин А. А., Григорьева О. М., Цыганов Н. И., 2019), устанавливает связь между конкурентным равновесием и решением

вспомогательной задачи (1.6).

**Теорема 2.** *Задача (1.6) является задачей выпуклого программирования, причем  $(\vec{q}, \vec{v}) \in \tilde{X}(R)$  тогда и только тогда, когда  $\exists \vec{p}: (\vec{p}, \vec{v}, \vec{q}) \in \tilde{X}^{comp}(R)$ .*

Таким образом, для решения вспомогательной задачи (1.6), которая теперь сводится к решению (1.12, 1.13), можно использовать стандартные методы выпуклой оптимизации (Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В., 1985, [55]). В следующем пункте предлагается специальный алгоритм решения данной задачи.

Также из теоремы 2 вытекает следующий важный вывод. Пусть  $L^*$  - найденное согласно (1.7) оптимальное множество расширяемых линий, а  $(\vec{p}^*, \vec{v}^*, \vec{q}^*) \in \tilde{X}^{comp}(L^*)$ . Тогда при стимулировании владельцев линий принять решения «расширять/не расширять» в соответствии с  $L^*$  и неспособности игроков влиять на цены состояние  $(\vec{p}^*, \vec{v}^*, \vec{q}^*)$ , обеспечивающее максимум общественного благосостояния, является устойчивым, т.е. у рациональных игроков отсутствует стимул от него отклоняться. Стимулирование владельцев линий может осуществляться, например, путем компенсации фиксированных затрат  $E_{\{i,j\}}^f$  со стороны игрока, заинтересованного в реализации оптимального состояния. Как ранее уже было отмечено, этим игроком может являться государство.

### 1.3.6. Алгоритм решения вспомогательной задачи

Опишем алгоритм решения вспомогательной задачи (1.6). Основная его идея заключается в переносе агрегированного чистого предложения из всех узлов в некоторый узел  $i_0 \in N$ , вычислении равновесной цены для этого узла и последующем обратном движении, в ходе которого находится конкурентное равновесие  $(\vec{p}, \vec{v}, \vec{q})$ , удовлетворяющее (1.12, 1.13). Согласно теореме 2, найденные векторы потоков  $\vec{q}$  и объемов производства  $\vec{v}$  образуют решение задачи (1.6).

**Алгоритм** состоит из следующих трех шагов.

**Шаг 1. Построение корневого дерева минимальной высоты.** Выберем узел  $i_0 \in N$  таким образом, чтобы корневое дерево, соответствующее графу  $G = (N, L)$ , с корнем  $i_0$  имело минимально возможную высоту  $h$ . Обозначим через  $\sigma(i)$  отображение, ставящее в соответствие произвольному узлу  $i \in N$  его ближайшего предшественника (родителя), при этом считаем, что  $\sigma(i_0) = i_0$ . Разобьем множество всех узлов  $N$  на подмножества  $N_1, \dots, N_{h+1}$  следующим образом:

- $N_1 = \{i \in N \mid \sigma^{-1}(i) = \emptyset\}$  - множество финальных узлов;
- $N_k = \left\{ i \in N \setminus \bigcup_{l=1}^{k-1} N_l \mid \sigma^{-1}(i) \subseteq \bigcup_{l=1}^{k-1} N_l \right\}, k = 2, \dots, h+1.$

При этом  $N_{h+1} = \{i_0\}$ . На рисунках 7 и 8 изображены пример транспортной структуры рынка и соответствующее ей корневое дерево минимальной высоты с  $h = 3$  и  $i_0 = 6$ . Опишем один из способов расчета величин  $h, i_0, \sigma(i), N_k$  по заданным множествам смежных узлов ( $Z(i) \mid i \in N$ ), сложность которого равна  $O(|N|^2)$ . Искомое дерево строится путем последовательного включения узлов, начиная с финальных. Введем следующие величины:  $\widehat{N}$  - множество еще не включенных узлов;  $\widehat{Z}_i$  - множество еще не включенных узлов, смежных узлу  $i$ ;  $\widehat{d}_i$  - число еще не включенных узлов, смежных узлу  $i$ . Для произвольного одноэлементного множества  $A$  обозначим через  $J(A)$  его единственный элемент.

**Подшаг 1.0.** Положим  $\widehat{N} = N, \widehat{Z}_i = Z(i), \widehat{d}_i = |Z(i)|$  для каждого  $i \in N$ .

**Подшаг 1.k, k=1, ... .** Если  $|\widehat{N}| > 2$ , то положим:

- 1)  $N_k = \{i \in \widehat{N} \mid \widehat{d}_i = 1\}, \widehat{N} = \widehat{N} \setminus N_k;$
- 2) для каждого  $i \in N_k: \sigma(i) = J(\widehat{Z}_i), \widehat{Z}_{J(\widehat{Z}_i)} = \widehat{Z}_{J(\widehat{Z}_i)} \setminus \{i\}, \widehat{d}_{J(\widehat{Z}_i)} = \widehat{d}_{J(\widehat{Z}_i)} - 1.$

Если  $|\widehat{N}| \leq 2$ , то положим:

$$\begin{cases} h = k - 1, i_0 = i_1, N_{h+1} = \{i_0\}, \sigma(i_0) = i_0, & \text{если } \widehat{N} = \{i_1\}, \\ N_k = \{i_1\}, \sigma(i_1) = i_2, h = k, i_0 = i_2, N_{h+1} = \{i_0\}, \sigma(i_0) = i_0, & \text{если } \widehat{N} = \{i_1, i_2\}, \end{cases}$$

после чего шаг 1 завершается.

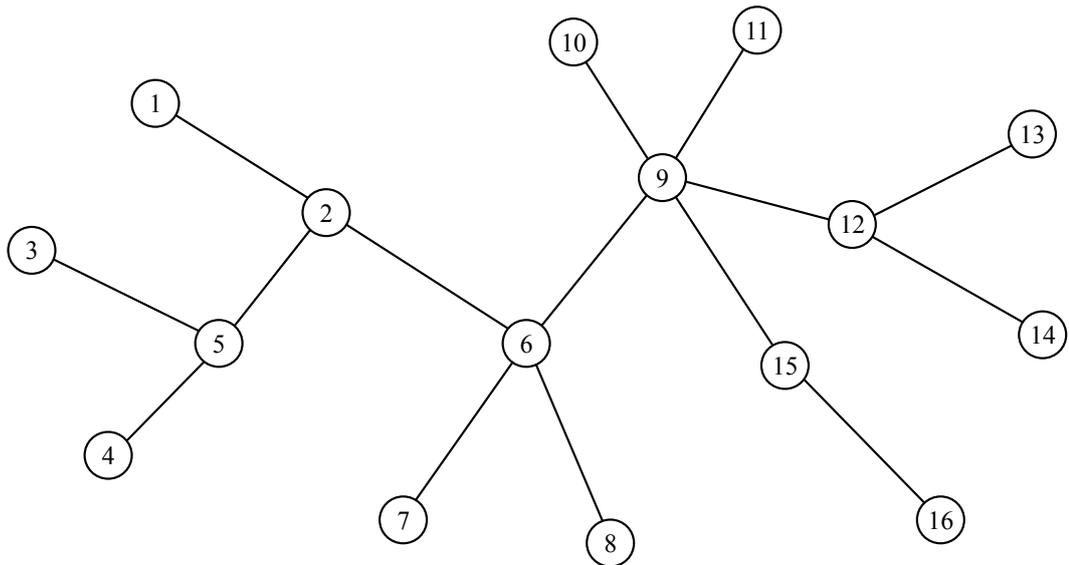


Рис. 7. Пример транспортной структуры рынка

**Шаг 2. Перенос баланса спроса и предложения в корневой узел (прямой ход).** Обозначим через  $\Delta S_i(p_i) = S_i(p_i) - D_i(p_i)$  функцию чистого предложения в узле  $i \in N$ ,

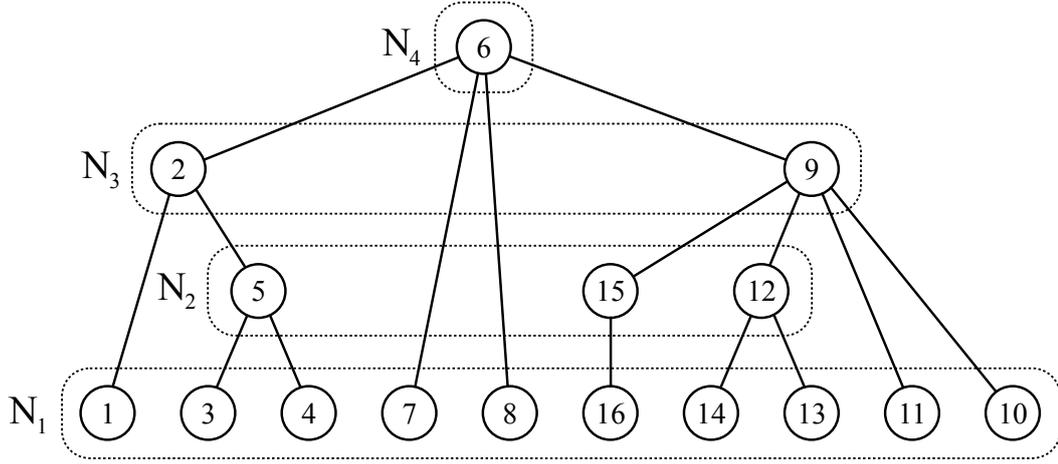


Рис. 8. Корневое дерево минимальной высоты для рынка, изображенного на рисунке 7

показывающую превышение предложения над спросом при фиксированной в узле цене без учета передачи товара между узлами.

Введем следующие две функции:  $\Delta\bar{S}_j(p_j)$  и  $\Delta S_{ij}(p_j)$ . Функция  $\Delta\bar{S}_j(p_j)$  определяет агрегированное чистое предложение в узле  $j \in N$  с учетом передачи товара между этим узлом и последующими узлами, т.е. превышение предложения над спросом для поддерева с корнем  $j$  при фиксированной в данном узле цене. Функция  $\Delta S_{ij}(p_j)$  определяет поток из узла  $i \in N$  в предшествующий узел  $j = \sigma(i)$ , который при фиксированной цене в узле  $j$  балансирует предложение и спрос в поддерева с корневой вершиной  $i$  и в то же время обеспечивает максимум прибыли владельца линии  $\{i, j\}$  при условии, что он не может влиять на цену в узле  $i$ .

На данном шаге последовательно вычисляются функции  $\Delta\bar{S}_j(p_j)$  и  $\Delta S_{j\sigma(j)}(p_{\sigma(j)})$ , начиная от финальных узлов и заканчивая корневым.

**Подшаг 2.k, k=1, ..., h.** Для каждого узла  $j \in N_k$  вычисляются функции  $\Delta\bar{S}_j(p_j)$ ,  $\Delta S_{j\sigma(j)}(p_{\sigma(j)})$  согласно введенным в пункте 1.3.1. операциям:

$$\Delta\bar{S}_j(p_j) = \Delta S_j(p_j) + \sum_{i \in \sigma^{-1}(j)} \Delta S_{ij}(p_j); \quad (1.14)$$

$$\Delta S_{j\sigma(j)}(p_{\sigma(j)}) = \begin{cases} ((\Delta\bar{S}_j)^{-1} + e_{j\sigma(j)}^{nex})^{-1}(p_{\sigma(j)}), & \{j, \sigma(j)\} \notin R, \\ ((\Delta\bar{S}_j)^{-1} + e_{j\sigma(j)}^{ex})^{-1}(p_{\sigma(j)}), & \{j, \sigma(j)\} \in R. \end{cases} \quad (1.15)$$

**Подшаг 2.(h+1).** Вычисляется функция  $\Delta\bar{S}_{i_0}(p_{i_0})$  для корневого узла:

$$\Delta\bar{S}_{i_0}(p_{i_0}) = \Delta S_{i_0}(p_{i_0}) + \sum_{i \in \sigma^{-1}(i_0)} \Delta S_{ii_0}(p_{i_0}). \quad (1.16)$$

**Шаг 3. Вычисление конкурентного равновесия (обратный ход).** На данном шаге последовательно вычисляются равновесные цены  $\tilde{p}_i$ , объемы производства  $\tilde{v}_i$ , объемы потребления  $\tilde{v}_i^d$  и потоки  $\tilde{q}_{ij}$ , начиная от корневого узла и заканчивая финальными. Также вычисляются вспомогательные коэффициенты  $\lambda_j$ , которые используются при неоднозначном определении основных величин с помощью функций  $S_j(p_j)$ ,  $D_j(p_j)$ ,  $\Delta S_{ij}(p_j)$  и обеспечивают выполнение условия (1.12) в данном случае.

**Подшаг 3.1.** Вычисляются следующие величины для корневого узла согласно введенным в пункте 1.3.1. операциям:

- 1)  $\tilde{p}_{i_0} = \min((\Delta \bar{S}_{i_0})^{-1}(0))$  - равновесная цена в корневом узле;
- 2)  $\lambda_{i_0} = \begin{cases} 0, & q^{\min} = q^{\max}, \\ \frac{-q^{\min}}{q^{\max} - q^{\min}}, & q^{\min} < q^{\max} \end{cases}$  - вспомогательный коэффициент для корневого узла, где  $q^{\min} = \min(\Delta \bar{S}_{i_0}(\tilde{p}_{i_0}))$ ,  $q^{\max} = \max(\Delta \bar{S}_{i_0}(\tilde{p}_{i_0}))$ ;
- 3)  $\tilde{v}_{i_0} = (1 - \lambda_{i_0}) \cdot \min(S_{i_0}(\tilde{p}_{i_0})) + \lambda_{i_0} \cdot \max(S_{i_0}(\tilde{p}_{i_0}))$  - равновесный объем производства в корневом узле;
- 4)  $\tilde{v}_{i_0}^d = \lambda_{i_0} \cdot \min(D_{i_0}(\tilde{p}_{i_0})) + (1 - \lambda_{i_0}) \cdot \max(D_{i_0}(\tilde{p}_{i_0}))$  - равновесный объем потребления в корневом узле.

На рисунке 9 приведен пример вычисления и использования вспомогательного коэффициента  $\lambda_{i_0}$  в подшаге 3.1.

**Подшаг 3.m, m=2, ..., h+1.** Рассматривается множество  $N_k$ , где  $k = h - m + 2$ . Для каждого узла  $i \in N_k$  вычисляются следующие величины:

- 1)  $\tilde{q}_{i\sigma(i)} = (1 - \lambda_{\sigma(i)}) \cdot \min(\Delta S_{i\sigma(i)}(\tilde{p}_{\sigma(i)})) + \lambda_{\sigma(i)} \cdot \max(\Delta S_{i\sigma(i)}(\tilde{p}_{\sigma(i)}))$  - равновесный поток из узла  $i$  в узел  $\sigma(i)$ ;
- 2)  $\tilde{p}_i = \begin{cases} \min\left((\Delta \bar{S}_i)^{-1}(\tilde{q}_{i\sigma(i)}) \cap \left(p_{\sigma(i)} - e_{i\sigma(i)}^{nex}(\tilde{q}_{i\sigma(i)})\right)\right), & \{i, \sigma(i)\} \notin R, \\ \min\left((\Delta \bar{S}_i)^{-1}(\tilde{q}_{i\sigma(i)}) \cap \left(p_{\sigma(i)} - e_{i\sigma(i)}^{ex}(\tilde{q}_{i\sigma(i)})\right)\right), & \{i, \sigma(i)\} \in R \end{cases}$  - равновесная цена в узле  $i$ ;
- 3)  $\lambda_i = \begin{cases} 0, & q^{\min} = q^{\max}, \\ \frac{\tilde{q}_{i\sigma(i)} - q^{\min}}{q^{\max} - q^{\min}}, & q^{\min} < q^{\max} \end{cases}$  - вспомогательный коэффициент для узла  $i$ , где  $q^{\min} = \min(\Delta \bar{S}_i(\tilde{p}_i))$ ,  $q^{\max} = \max(\Delta \bar{S}_i(\tilde{p}_i))$ ;
- 4)  $\tilde{v}_i = (1 - \lambda_i) \cdot \min(S_i(\tilde{p}_i)) + \lambda_i \cdot \max(S_i(\tilde{p}_i))$  - равновесный объем производства в узле  $i$ ;
- 5)  $\tilde{v}_i^d = \lambda_i \cdot \min(D_i(\tilde{p}_i)) + (1 - \lambda_i) \cdot \max(D_i(\tilde{p}_i))$  - равновесный объем потребления в узле  $i$ .

Основной объем вычислений приходится на второй шаг алгоритма, где проводятся операции над функциями. Введение требования минимальной высоты для используемого в алгоритме корневого дерева связано с возможностью независимых вычислений функций

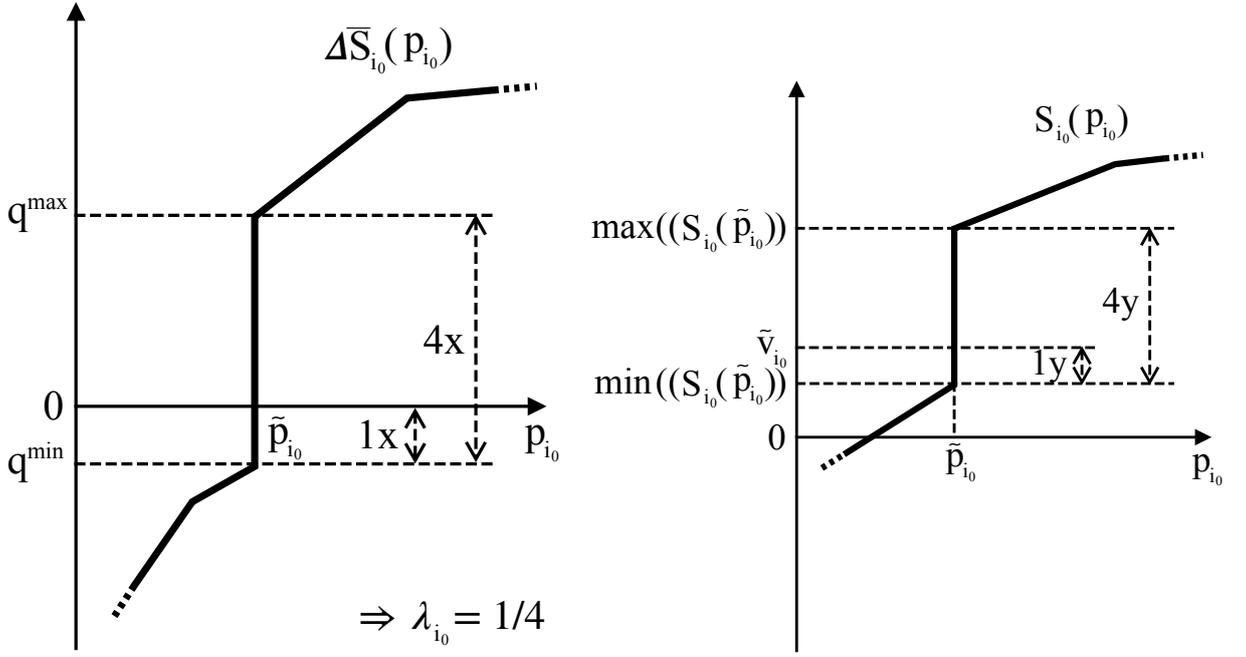


Рис. 9. Пример вычисления вспомогательного коэффициента  $\lambda_{i_0}$  в пункте 2 подшага 3.1 (слева) и его использования для вычисления равновесного объема производства  $\tilde{v}_{i_0}$  в пункте 3 этого же подшага (справа); для приведенных на графиках функций  $\lambda_{i_0} = \frac{-q^{\min}}{q^{\max} - q^{\min}} = 1/4$ , поэтому  $\tilde{v}_{i_0} = 3/4 \cdot \min(S_{i_0}(\tilde{p}_{i_0})) + 1/4 \cdot \max(S_{i_0}(\tilde{p}_{i_0}))$ ;

$\Delta \bar{S}_j(p_j)$ ,  $\Delta S_{j\sigma(j)}(p_{\sigma(j)})$  на втором шаге для узлов  $j$ , принадлежащих одному и тому же множеству  $N_k$ , что при использовании параллельных вычислительных систем позволяет сократить время решения задачи. Для третьего шага справедливы аналогичные рассуждения.

**Теорема 3.** Все вычисления алгоритма корректны<sup>12</sup>. Полученные в результате его работы векторы цен  $\vec{p} = (\tilde{p}_i \mid i \in N)$ , объемов производства  $\vec{v} = (\tilde{v}_i \mid i \in N)$  и потоков  $\vec{q} = (\tilde{q}_{ij} \mid \{i, j\} \in L)$  удовлетворяют следующим соотношениям:  $(\vec{p}, \vec{v}, \vec{q}) \in \tilde{X}^{comp}(R)$ ,  $(\vec{q}, \vec{v}) \in \tilde{X}(R)$ .

Таким образом, алгоритм находит конкурентное равновесие (1.12, 1.13) и решение вспомогательной задачи (1.6).

**Доказательство.** Т.к.  $S_i \in P^\uparrow$ ,  $D_i \in P^\downarrow$  для любого узла  $i \in N$ , то  $\Delta S_i \in P^\uparrow$ , причем  $\Delta S_i(p_i)$  определена при  $p_i \geq 0$ , неотрицательна при достаточно больших  $p_i$ ,  $\Delta S_i(p_i)$  является точкой либо отрезком для любого  $p_i \geq 0$ , а также  $\min(\Delta S_i(0)) \leq 0$ . По индукции доказывается, что все функции вида  $\Delta \bar{S}_i(p_i)$  и  $\Delta S_{i\sigma(i)}(p_{\sigma(i)})$ , вычисленные на втором шаге алгоритма согласно (1.14-1.16), тоже удовлетворяют аналогичным свойствам. При этом учитываются свойства введенных в пункте 1.3.1. операций и функций  $e_{i\sigma(i)}^{nex}(q_{i\sigma(i)})$ ,  $e_{i\sigma(i)}^{ex}(q_{i\sigma(i)})$ .

<sup>12</sup> Под корректностью вычислений понимается отсутствие следующих операций во время работы алгоритма: деление на ноль, нахождение минимума или максимума пустого множества.

Для удобства введем фиктивную переменную  $\tilde{q}_{i_0 i_0} = 0$  для корневого узла. Докажем по индукции, что все вычисления третьего шага алгоритма корректны, а полученные величины удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\tilde{v}_i \in S_i(\tilde{p}_i), \tilde{v}_i^d \in D_i(\tilde{p}_i), \tilde{p}_i \geq 0, \lambda_i \in [0, 1], \tilde{q}_{i\sigma(i)} \in \Delta\bar{S}_i(\tilde{p}_i) \text{ для любого } i \in N; \quad (1.17)$$

$$\tilde{p}_{\sigma(i)} - \tilde{p}_i \in \begin{cases} e_{i\sigma(i)}^{nex}(\tilde{q}_{i\sigma(i)}), & \text{если } \{i, \sigma(i)\} \notin R, \\ e_{i\sigma(i)}^{ex}(\tilde{q}_{i\sigma(i)}), & \text{если } \{i, \sigma(i)\} \in R \end{cases} \text{ для любого } i \in N \setminus \{i_0\}. \quad (1.18)$$

Поскольку для любых  $i \in N$ ,  $p_i \geq 0$  каждое из значений  $\Delta\bar{S}_i(p_i)$ ,  $\Delta S_{i\sigma(i)}(p_{\sigma(i)})$ ,  $S_i(p_i)$ ,  $D_i(p_i)$  определено и является точкой либо отрезком, то применяемые в алгоритме операции  $\min$  и  $\max$  к подобным выражениям корректны.

Рассмотрим подшаг 3.1. Т.к.  $\Delta\bar{S}_{i_0} \in P^\dagger$ ,  $\min(\Delta\bar{S}_{i_0}(0)) \leq 0$  и  $\Delta\bar{S}_{i_0}(p_{i_0})$  неотрицательна при достаточно больших  $p_{i_0}$ , то  $(\Delta\bar{S}_{i_0})^{-1}(0) \cap [0, +\infty) \neq \emptyset$ , поэтому действие 1) данного подшага корректно, причем  $\tilde{p}_{i_0} \geq 0$  и  $0 \in \Delta\bar{S}_{i_0}(\tilde{p}_{i_0})$ . Из последнего свойства следует, что  $\min(\Delta\bar{S}_{i_0}(\tilde{p}_{i_0})) \leq 0$ ,  $\max(\Delta\bar{S}_{i_0}(\tilde{p}_{i_0})) \geq 0$ , а значит  $\lambda_{i_0} \in [0, 1]$ , что, в свою очередь, означает справедливость включений  $\tilde{v}_{i_0} \in S_{i_0}(\tilde{p}_{i_0})$  и  $\tilde{v}_{i_0}^d \in D_{i_0}(\tilde{p}_{i_0})$ .

Пусть соотношения (1.17, 1.18) выполняются для величин, вычисленных на подшагах 3.1, ..., 3.(m-1). Рассмотрим подшаг 3.m. Зафиксируем произвольный узел  $i \in N_{h-m+2}$ . По предположению индукции  $\tilde{p}_{\sigma(i)} \geq 0$ ,  $\lambda_{\sigma(i)} \in [0, 1]$ , поэтому  $\tilde{q}_{i\sigma(i)} \in \Delta S_{i\sigma(i)}(\tilde{p}_{\sigma(i)})$ , что в случае  $\{i, \sigma(i)\} \notin R$  эквивалентно

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{i\sigma(i)} \in ((\Delta\bar{S}_i)^{-1} + e_{i\sigma(i)}^{nex})^{-1}(\tilde{p}_{\sigma(i)}) &\Leftrightarrow \tilde{p}_{\sigma(i)} \in ((\Delta\bar{S}_i)^{-1} + e_{i\sigma(i)}^{nex})(\tilde{q}_{i\sigma(i)}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \tilde{p}_{\sigma(i)} \in (\Delta\bar{S}_i)^{-1}(\tilde{q}_{i\sigma(i)}) + e_{i\sigma(i)}^{nex}(\tilde{q}_{i\sigma(i)}) \Leftrightarrow 0 \in (\Delta\bar{S}_i)^{-1}(\tilde{q}_{i\sigma(i)}) - (\tilde{p}_{\sigma(i)} - e_{i\sigma(i)}^{nex}(\tilde{q}_{i\sigma(i)})) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\Delta\bar{S}_i)^{-1}(\tilde{q}_{i\sigma(i)}) \cap (\tilde{p}_{\sigma(i)} - e_{i\sigma(i)}^{nex}(\tilde{q}_{i\sigma(i)})) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Заметим, что функция  $\Delta\bar{S}_i(p_i)$  не определена при  $p_i < 0$ , поэтому  $(\Delta\bar{S}_i)^{-1}(\tilde{q}_{i\sigma(i)}) \subseteq [0, +\infty)$ , а значит при  $\{i, \sigma(i)\} \notin R$  действие 2) данного подшага корректно, причем  $\tilde{p}_i \geq 0$ . В случае  $\{i, \sigma(i)\} \in R$  ситуация аналогична. Также из данного действия следует выполнение условия (1.18) для узла  $i$  и включения  $\tilde{p}_i \in (\Delta\bar{S}_i)^{-1}(\tilde{q}_{i\sigma(i)})$ . Из последнего следует, что  $\tilde{q}_{i\sigma(i)} \in \Delta\bar{S}_i(\tilde{p}_i) \Leftrightarrow \tilde{p}_i \in [\min(\Delta\bar{S}_i(\tilde{p}_i)), \max(\Delta\bar{S}_i(\tilde{p}_i))]$ , поэтому  $\lambda_i \in [0, 1]$ , что означает справедливость соотношений  $\tilde{v}_i \in S_i(\tilde{p}_i)$  и  $\tilde{v}_i^d \in D_i(\tilde{p}_i)$ . Таким образом, предположение индукции доказано для шага 3.m и свойства (1.17, 1.18) выполняются.

Теперь докажем, что

$$\tilde{v}_i^d = v_i^d(\vec{q}, \vec{v}) \text{ для любого } i \in N. \quad (1.19)$$

Рассмотрим для произвольного узла  $i \in N$  разность  $v_i^d(\vec{q}, \vec{v}) - \tilde{v}_i^d$  и покажем, что она равна нулю. Действительно, обозначив  $q^{\min} = \min(\Delta \bar{S}_i(\tilde{p}_i))$ ,  $q^{\max} = \max(\Delta \bar{S}_i(\tilde{p}_i))$ , получаем:

$$\begin{aligned} v_i^d(\vec{q}, \vec{v}) - \tilde{v}_i^d &= \tilde{v}_i - \sum_{j \in Z(i)} \tilde{q}_{ij} - \tilde{v}_i^d = \tilde{v}_i - \tilde{v}_i^d + \sum_{j \in \sigma^{-1}(i)} \tilde{q}_{ji} - \tilde{q}_{i\sigma(i)} = \\ &= [(1 - \lambda_i) \cdot \min(S_i(\tilde{p}_i)) + \lambda_i \cdot \max(S_i(\tilde{p}_i))] - [\lambda_i \cdot \min(D_i(\tilde{p}_i)) + (1 - \lambda_i) \cdot \max(D_i(\tilde{p}_i))] + \\ &\quad + \sum_{j \in \sigma^{-1}(i)} [(1 - \lambda_i) \cdot \min(\Delta S_{ji}(\tilde{p}_i)) + \lambda_i \cdot \max(\Delta S_{ji}(\tilde{p}_i))] - \tilde{q}_{i\sigma(i)} = \\ &= (1 - \lambda_i) \cdot \left[ \min(S_i(\tilde{p}_i)) + \min(-D_i(\tilde{p}_i)) + \sum_{j \in \sigma^{-1}(i)} \min(\Delta S_{ji}(\tilde{p}_i)) \right] + \\ &\quad + \lambda_i \cdot \left[ \max(S_i(\tilde{p}_i)) + \max(-D_i(\tilde{p}_i)) + \sum_{j \in \sigma^{-1}(i)} \max(\Delta S_{ji}(\tilde{p}_i)) \right] - \tilde{q}_{i\sigma(i)} = \\ &= (1 - \lambda_i) \cdot \min(\Delta \bar{S}_i(\tilde{p}_i)) + \lambda_i \cdot \max(\Delta \bar{S}_i(\tilde{p}_i)) - \tilde{q}_{i\sigma(i)} = (1 - \lambda_i) \cdot q^{\min} + \lambda_i \cdot q^{\max} - \tilde{q}_{i\sigma(i)} = \\ &= \lambda_i \cdot (q^{\max} - q^{\min}) + q^{\min} - \tilde{q}_{i\sigma(i)} = \begin{cases} q^{\min} - \tilde{q}_{i\sigma(i)}, & q^{\min} = q^{\max}, \\ (\tilde{q}_{i\sigma(i)} - q^{\min}) + q^{\min} - \tilde{q}_{i\sigma(i)}, & q^{\min} < q^{\max} \end{cases} = 0. \end{aligned}$$

В данных переходах использовались соотношения (1.3, 1.14, 1.16), очевидные равенства  $\tilde{q}_{ij} = -\tilde{q}_{ji}$ ,  $-\max(D_i(\tilde{p}_i)) = \min(-D_i(\tilde{p}_i))$ ,  $-\min(D_i(\tilde{p}_i)) = \max(-D_i(\tilde{p}_i))$ , а также свойство  $\tilde{q}_{i\sigma(i)} \in \Delta \bar{S}_i(\tilde{p}_i)$ .

Таким образом, условия (1.17-1.19) выполняются. Заметим, что в этом случае полученные величины также удовлетворяют соотношениям (1.12, 1.13), поэтому  $(\vec{p}, \vec{v}, \vec{q}) \in \tilde{X}^{comp}(R)$ . С учетом теоремы 2, справедливо и включение  $(\vec{q}, \vec{v}) \in \tilde{X}(R)$ . ■

### 1.3.7. Оценка сложности алгоритма для случая кусочно-линейных функций

Назовем монотонное правильное точечно-множественное отображение  $G(x)$  с областью определения  $X$  кусочно-линейным, если его график  $Gr(G) = \{(x, g) \mid x \in X, g \in G(x)\}$  представим в виде объединения конечного числа отрезков и лучей. Назовем точку  $A \in Gr(G)$  вершиной кусочно-линейного отображения  $G(x)$ , если не существует отрезка  $[A_1, A_2] \subseteq Gr(G)$ ,

для которого  $A$  является внутренней точкой.

Рассмотрим частный случай задачи с кусочно-линейными функциями  $S_i(p_i)$ ,  $D_i(p_i)$ ,  $e_{ij}^{nex}(q_{ij})$ ,  $e_{ij}^{ex}(q_{ij})$  (или, что то же самое, с кусочно-квадратичными функциями  $c_i(v_i)$ ,  $U_i(v_i^d)$ ,  $E_{\{i,j\}}^v(\Delta Q_{\{i,j\}})$ ) и оценим сложность описанного алгоритма решения вспомогательной задачи для данного случая. Он представляет особый интерес, поскольку любая из исходных функций  $S_i(p_i)$ ,  $D_i(p_i)$ ,  $e_{ij}^{nex}(q_{ij})$ ,  $e_{ij}^{ex}(q_{ij})$  может с необходимой степенью точности быть аппроксимирована некоторой кусочно-линейной функцией, что позволяет приближенно решать вспомогательную задачу (1.6) для произвольных исходных функций.

**Теорема 4.** Пусть каждая из исходных функций  $S_i(p_i)$ ,  $D_i(p_i)$ ,  $e_{ij}^{nex}(q_{ij})$ ,  $e_{ij}^{ex}(q_{ij})$  является кусочно-линейной для любых  $i \in N$ ,  $\{i, j\} \in L$ , причем число вершин каждой такой функции не превосходит некоторого заранее заданного параметра. Тогда сложность разработанного алгоритма решения вспомогательной задачи (1.6) равна  $O(|N|^2)$ .

**Доказательство.** Докажем, что сложность шага 1 равна  $O(|N|^2)$ . Сложность операции  $\tilde{N} = \tilde{N} \setminus N_k$  не превосходит  $O(|N_k| \cdot |N|)$ , поэтому суммарная сложность всех таких операций не превосходит  $O\left(\sum_{k=1}^{h+1} |N_k| \cdot |N|\right) = O(|N|^2)$ . Осталось заметить, что любая другая операция шага 1 обладает сложностью, не превосходящей  $O(|N|)$ , и применяется не более  $|N|$  раз.

Оценим сложность второго шага. По индукции доказывается, что все функции вида  $\Delta S_i(p_i)$ ,  $\Delta \bar{S}_i(p_i)$  и  $\Delta S_{i\sigma(i)}(p_{\sigma(i)})$  также являются кусочно-линейными, как и исходные функции. Это следует из того, что операции обращения, сложения и вычитания, введенные в пункте 1.3.1., не выводят из класса кусочно-линейных функций. Любая неубывающая кусочно-линейная функция  $G(x)$  может быть описана тройкой  $(A^l, (A_1, \dots, A_k), A^r)$ , где  $(A_1, \dots, A_k)$  - упорядоченный по возрастанию набор точек  $A_l \in Gr(G)$  (для любых  $A_l = (x_l, g_l)$ ,  $A_{l+1} = (x_{l+1}, g_{l+1})$  выполняется  $x_l \leq x_{l+1}$ ,  $g_l \leq g_{l+1}$ ), определяющий отрезки  $[A_1, A_2] \subseteq Gr(G)$ , ...,  $[A_{k-1}, A_k] \subseteq Gr(G)$ , а  $A^l$ ,  $A^r$  - точки, задающие направления левого  $[A_1 A^l] \subseteq Gr(G)$  и правого  $[A_k A^r] \subseteq Gr(G)$  лучей. Если же  $A^l = A_1$ , то считаем, что  $[A_1 A^l] = \emptyset$ , т.е. левый луч отсутствует. Аналогично предполагаем для правого луча. Эти отрезки и лучи формируют график функции  $G(x)$ :  $Gr(G) = [A_1 A^l] \cup \bigcup_{l=1}^{k-1} [A_l, A_{l+1}] \cup [A_k A^r]$ . Таким образом, неубывающая кусочно-линейная функция с  $k$  вершинами может быть описана  $k + 2$  точками. Обозначим через  $M$  параметр из условия теоремы, ограничивающий сверху число вершин для любой из исходных функций. Следовательно, любая функция вида  $S_i(p_i)$ ,  $-D_i(p_i)$ ,  $e_{ij}^{nex}(q_{ij})$ ,  $e_{ij}^{ex}(q_{ij})$  однозначно определяется  $M + 2$  точками, которые, считаем, и подаются на вход алгоритму.

Покажем, как для произвольных неубывающих кусочно-линейных функций  $G(x)$ ,  $G_1(x)$ ,  $G_2(x)$ , задающихся наборами точек  $(A^l, (A_1, \dots, A_k), A^r)$ ,  $(A_1^l, (A_{11}, \dots, A_{1k_1}), A_1^r)$ ,

$(A_2^l, (A_{21}, \dots, A_{2k_2}), A_2^r)$  соответственно, вычисляются функции  $G^{-1}$  и  $G_1 + G_2$ , и оценим сложность данных операций. Чтобы найти функцию  $G^{-1}$ , следует каждую точку  $A = (x, g)$  из набора  $(A^l, (A_1, \dots, A_k), A^r)$  заменить точкой  $(g, x)$ , при этом сложность такой операции равна  $O(k)$ , а число точек в наборе функции  $G^{-1}$  совпадает с числом точек в наборе функции  $G$ .

Для расчета функции  $G_1 + G_2$  достаточно сделать один обход наборов  $(A_1^l, (A_{11}, \dots, A_{1k_1}), A_1^r)$  и  $(A_2^l, (A_{21}, \dots, A_{2k_2}), A_2^r)$  слева-направо, одновременно обрабатывая точки обоих наборов в порядке возрастания абсцисс  $x$ , тем самым определяя вершины функции  $G_1 + G_2$  и формируя ее набор. При обработке некоторой точки  $A = (x, g)$  набора одной из исходных функций проверяется, принадлежит ли  $x$  области определения второй исходной функции, после чего, если это условие выполняется, находятся значения  $m_1 = \min(G_1(x))$ ,  $m_2 = \min(G_2(x))$ ,  $M_1 = \max(G_1(x))$ ,  $M_2 = \max(G_2(x))$  (т.к. для нахождения данных величин достаточно использовать последнюю обработанную точку каждого набора и ближайшую к ней точку  $A' = (x', g')$ , для которой  $x' > x$ , то сложность такой операции равна  $O(1)$ ). Тогда  $(G_1 + G_2)(x) = [m_1 + m_2, M_1 + M_2]$ , поэтому в искомый набор добавляются две точки  $(x, m_1 + m_2)$  и  $(x, M_1 + M_2)$ , если  $m_1 + m_2 < M_1 + M_2$ , или же одна точка  $(x, m_1 + m_2)$ , если  $m_1 + m_2 = M_1 + M_2$ . Также при формировании искомого набора необходимо правильно определить крайние точки, задающие направления лучей, что тоже происходит во время единственного обхода. Таким образом, сложность операции суммирования равна  $O(k_1 + k_2)$ , а число точек в искомом наборе, можно заметить, не превышает  $k_1 + k_2 + 6$  или  $k'_1 + k'_2 + 2$ , где  $k'_l = k_l + 2$  - число точек в наборе исходной функции  $G_l(x)$ ,  $l \in \{1, 2\}$ . Далее считаем, что функции на втором шаге алгоритма вычисляются описанным способом.

Согласно сделанным выше выводам, число точек в наборе любой функции  $\Delta S_i(p_i) = S_i(p_i) + (-D_i(p_i))$  не превосходит  $2M + 6$ . Обозначим через  $\Lambda(j)$  множество узлов, входящих в поддерево с корнем  $j \in N$ :  $\Lambda(j) = \{i \in N \mid \exists l \geq 0 : \sigma^l(i) = j\}$ , а через  $\lambda(j) = |\Lambda(j)|$  - число таких узлов. Пусть  $\bar{z}_j, z_{ij}$  - число точек в наборах функций  $\Delta \bar{S}_j(p_j)$  и  $\Delta S_{ij}(p_j)$  соответственно. Докажем по индукции, что

$$\bar{z}_j \leq \lambda(j)(3M + 14) - (M + 6), \quad z_{ij} \leq \lambda(i)(3M + 14) - 2. \quad (1.20)$$

Для произвольного финального узла  $j \in N_1$  предположение индукции выполняется, т.к. в этом случае  $z_j \leq 2M + 6 < 2M + 8 = \lambda(j)(3M + 14) - (M + 6)$ . Пусть (1.20) верно для  $j \in N_1 \cup \dots \cup N_{k-1}$ . Рассмотрим произвольный узел  $j \in N_k$ . С учетом (1.14, 1.15, 1.20) и того,

что при обращении функции число точек в наборе не меняется, следуют оценки

$$z_{ij} \leq \bar{z}_i + (M + 2) + 2 = \lambda(i)(3M + 14) - (M + 6) + (M + 4) = \lambda(i)(3M + 14) - 2, \quad i \in \sigma^{-1}(j);$$

$$\begin{aligned} \bar{z}_j &\leq (2M + 6) + \sum_{i \in \sigma^{-1}(j)} (z_{ij} + 2) \leq (2M + 6) + \sum_{i \in \sigma^{-1}(j)} \lambda(i)(3M + 14) = \\ &= (2M + 6) + (3M + 14) \sum_{i \in \sigma^{-1}(j)} \lambda(i) = (2M + 6) + (3M + 14)(\lambda(j) - 1) = \\ &= \lambda(j)(3M + 14) - (M + 8) < \lambda(j)(3M + 14) - (M + 6). \end{aligned}$$

Таким образом, предположение индукции доказано для узла  $j$ , а значит неравенства (1.20) выполняются, поэтому  $\bar{z}_j = O(\lambda(j) \cdot M)$ ,  $z_{ij} = O(\lambda(i) \cdot M)$ .

Сложность второго шага алгоритма определяется числом операций обращения и суммирования в (1.14-1.16), а также их сложностью. Число операций обращения равно  $2|N| - 2$ , сложения -  $3|N| - 2$  (с учетом операций, применяемых при вычислении функций  $\Delta S_j(p_j)$ ). Из доказанных оценок (1.20) следует, что для любой из указанных операций число точек в наборе результирующей функции не превосходит  $|N|(3M + 14) - (M + 6)$ , а значит сложность второго шага не превышает  $(5|N| - 4) \cdot O(|N|(3M + 14) - (M + 6)) = O(|N|^2)$ .

Сложность каждой из  $O(|N|)$  операций третьего шага не превышает  $O(\log_2(|N|))$ , поэтому сложность этого шага равна  $o(|N|^2)$ . ■

Доказанная квадратичная оценка сложности разработанного алгоритма решения вспомогательной задачи (1.6) позволяет утверждать о его преимуществе перед стандартными итерационными методами<sup>13</sup> выпуклой оптимизации.

#### 1.4. Дополнительные и конкурентные линии. Условие инвариантности структуры потока

Вернемся к исходной задаче (1.5), которая сводится к задаче поиска оптимального множества расширяемых линий (1.7). Введем некоторые дополнительные понятия, которые понадобятся при построении алгоритма решения данной задачи.

<sup>13</sup> Речь идет о таких приближенных методах, как градиентные, Ньютона и квазиньютоновские (Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В., 1985, [55]).

**Определение 5.** Линия  $l$  называется дополнительной (соответственно конкурентной) к линии  $r \neq l$ , если  $\forall M \subseteq L \setminus \{l, r\}$  выполняется неравенство

$$\widetilde{W}((M \cup \{l\}) \cup \{r\}) - \widetilde{W}(M \cup \{l\}) \geq (\leq) \widetilde{W}(M \cup \{r\}) - \widetilde{W}(M).$$

Из определения следует, что отношения дополнительности и конкурентности являются симметричными, т.е. если линия  $l$  дополнительна (конкурентна) к линии  $r$ , то и  $r$  дополнительна (конкурентна) к  $l$ . Пусть  $L_+(l)$  и  $L_-(l)$  - множества дополнительных и конкурентных линий к  $l$  соответственно. Справедливо следующее утверждение (Васин А. А., Григорьева О. М., Цыганов Н. И., 2017, [41]).

**Теорема 5.** Для любой линии  $l \in L$  разность  $\widetilde{W}(L_+ \cup L_- \cup \{l\}) - \widetilde{W}(L_+ \cup L_-)$  не убывает по множеству  $L_+ \subseteq L_+(l)$  и не возрастает по множеству  $L_- \subseteq L_-(l)$ .

Таким образом, если каждая пара линий находится в отношениях дополнительности или конкурентности, и эти отношения установлены, то данная теорема позволяет исключить из рассмотрения некоторые заведомо неоптимальные подмножества  $R \subseteq L$  при решении задачи (1.7).

Обозначим через  $\vec{Q}^0 = (Q_{\{i,j\}}^0 \mid \{i,j\} \in L)$  вектор начальных пропускных способностей. Рассмотрим для произвольного вектора  $\vec{Q} = (Q_{\{i,j\}} \mid \{i,j\} \in L)$ ,  $\vec{Q} \geq \vec{Q}^0$ , исходный рынок с измененными начальными пропускными способностями, равными  $\vec{Q}$ , без возможности увеличения пропускных способностей. Обозначим через  $\tilde{q}(\vec{Q})$  множество всевозможных равновесных потоков  $\vec{q}$ , соответствующих такому рынку. Они определяются из (1.12, 1.13) при  $\vec{Q}^0 = \vec{Q}$  и  $R = \emptyset$ . Аналогичным образом введем множество всевозможных равновесных цен  $\tilde{p}(\vec{Q})$ .

**Определение 6.** Назовем вектором направлений вектор  $\vec{d} = (d_{ij} \mid \{i,j\} \in L)$ , для которого  $d_{ij} \in \{-1, 1\}$ ,  $d_{ij} = -d_{ji}$ ,  $\{i,j\} \in L$ . При этом случай  $d_{ij} = 1$  соответствует направлению от узла  $i$  к узлу  $j$ , а  $d_{ij} = -1$  - противоположному направлению.

**Определение 7.** Рассматриваемая модель рынка удовлетворяет условию инвариантности структуры потока (УИСП), если существует такой вектор направлений  $\vec{d}$ , что для любых  $\vec{Q} \geq \vec{Q}^0$ ,  $\vec{q} \in \tilde{q}(\vec{Q})$  выполняются следующие условия:

$$\text{sgn}(\tilde{q}_{ij}) \in \{0, d_{ij}\}, \quad \{i,j\} \in L,$$

где

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Таким образом, при выполнении УИСП при любых увеличениях пропускных способностей для всех линий направления равновесных потоков сохраняются. Рассмотрим две произвольные линии  $l$  и  $r$ ,  $l \neq r$ . В графе  $G = (N, L)$ , характеризующем транспортную структуру рынка, существует единственный простой путь, начинающийся с  $l$  и заканчивающийся  $r$ .

**Определение 8.** Линия  $l = \{l_1, l_2\}$  называется исходно дополнительной (соответственно исходно конкурентной) к линии  $r = \{r_1, r_2\}$ , если существуют направления  $d_{l_1 l_2}, d_{r_1 r_2} \in \{-1, 1\}$  такие, что при начальных пропускных способностях

- 1) любые равновесные потоки согласуются с данными направлениями:  $\forall \vec{q} \in \tilde{q}(\vec{Q}^0)$  справедливы включения  $\operatorname{sgn}(\tilde{q}_{l_1 l_2}) \in \{0, d_{l_1 l_2}\}$ ,  $\operatorname{sgn}(\tilde{q}_{r_1 r_2}) \in \{0, d_{r_1 r_2}\}$ ;
- 2) эти направления одинаковы (соответственно противоположны) относительно пути, соединяющего линии  $l$  и  $r$ .

Если при начальных пропускных способностях направления равновесных потоков известны, то для каждой линии легко определяются все исходно дополнительные и исходно конкурентные линии (рисунок 10).

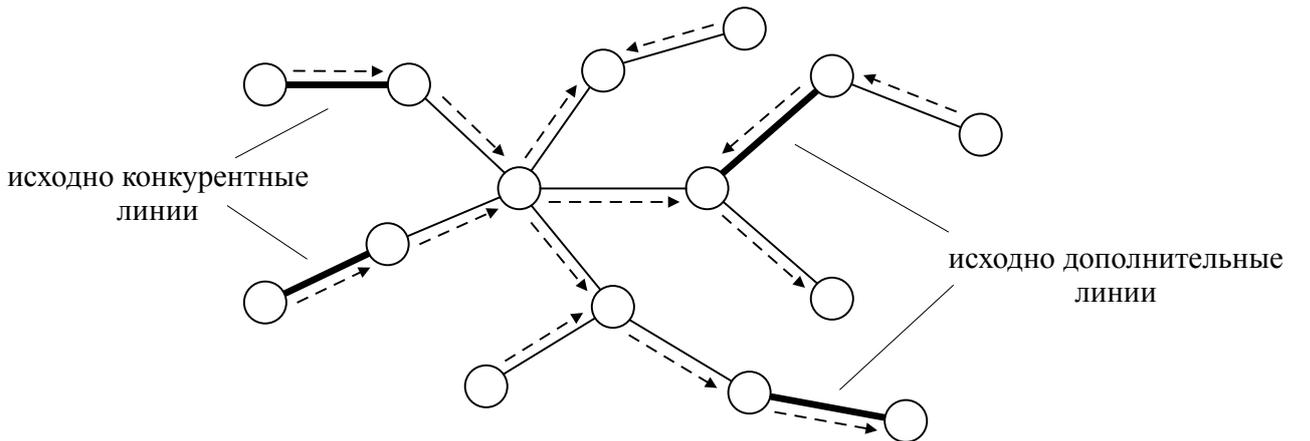


Рис. 10. Исходно дополнительные и исходно конкурентные линии. Стрелками отмечены направления равновесных потоков при начальных пропускных способностях

Обозначим через  $\vec{Q}^\infty$  вектор размерности  $|L|$ , все компоненты которого равны плюс бесконечности. Пусть для каждой линии  $l = \{i, j\} \in L$  однозначно определяется направление  $d_{ij}$  равновесного потока при начальных пропускных способностях, а  $L_+^0(l)$  и  $L_-^0(l)$  -

множества исходно дополнительных и исходно конкурентных линий к  $l$  соответственно. Тогда справедлив следующий критерий выполнения УИСП (Васин А. А., Григорьева О. М., Цыганов Н. И., 2017, [41]).

**Теорема 6.** Рынок удовлетворяет УИСП в том и только том случае, когда для любой линии  $l = \{i, j\} \in L$  и любых равновесных потоков  $\vec{q} \in \tilde{q}(\vec{Q}_{L_+^0(l)}^0 + \vec{Q}_{L_-^0(l)}^\infty)$  выполняется соотношение  $\text{sgn}(\tilde{q}_{ij}) \in \{0, d_{ij}\}$ , где  $\vec{Q}_{L_+^0(l)}^0$  и  $\vec{Q}_{L_-^0(l)}^\infty$  - проекции векторов  $\vec{Q}^0$  и  $\vec{Q}^\infty$  на подпространства  $L_+^0(l)$  и  $L_-^0(l)$  соответственно. При выполнении этого условия  $L_+(l) = L_+^0(l)$ ,  $L_-(l) = L_-^0(l)$  для  $\forall l \in L$ .

Теорема 6 позволяет установить отношения дополнительности и конкурентности для линий. Стоит отметить, что если для некоторой линии  $\{i, j\}$  выполняется неравенство  $e_{\{i,j\}}^t > 0$ , то  $\forall \vec{Q} \geq \vec{Q}^0$ ,  $\vec{q}^1, \vec{q}^2 \in \tilde{q}(\vec{Q})$  справедливо  $\text{sgn}(\tilde{q}_{ij}^1) \cdot \text{sgn}(\tilde{q}_{ij}^2) \geq 0$ , т.е. два различных равновесных потока не могут иметь противоположные направления, что упрощает применение критерия. Определение УИСП и критерий инвариантности эквивалентны описанным в работе [41] (Васин А. А., Григорьева О. М., Цыганов Н. И., 2017).

Пусть для рынка, транспортная структура которого представлена на рисунке 11, выполняется УИСП, а направления равновесных потоков отмечены стрелками.

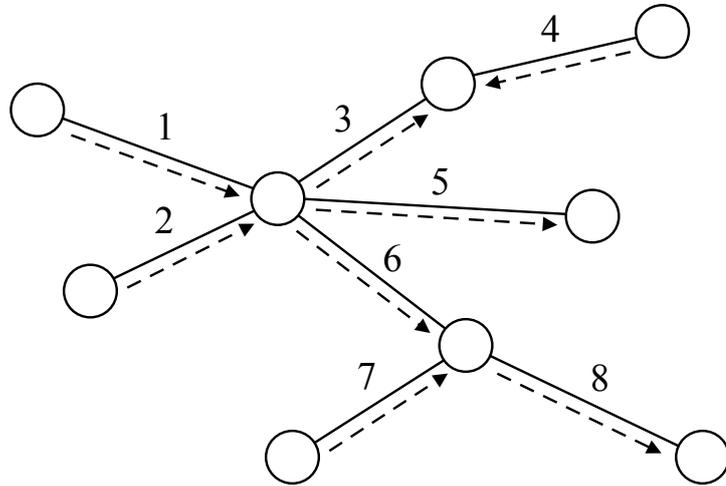


Рис. 11. Пример транспортной структура рынка. Стрелками отмечены направления равновесных потоков

**Пример 1.** Выпишем достаточное условие, при котором расширение линии 1 заведомо оптимально. Найдем множества дополнительных и конкурентных к ней линий с помощью рисунка:

- $L_+(1) = \{3, 5, 6, 8\}$  - множество дополнительных к 1 линий;
- $L_-(1) = \{2, 4, 7\}$  - множество конкурентных к 1 линий.

Согласно теореме 5,  $\forall M \subseteq L \setminus \{1\}$  выполняется неравенство

$$\widetilde{W}(L_-(1) \cup \{1\}) - \widetilde{W}(L_-(1)) \leq \widetilde{W}(M \cup \{1\}) - \widetilde{W}(M),$$

а значит при

$$\widetilde{W}(L_-(1) \cup \{1\}) - \widetilde{W}(L_-(1)) \geq 0 \Leftrightarrow \widetilde{W}(\{2, 4, 7\}) \leq \widetilde{W}(\{1, 2, 4, 7\}) \quad (1.21)$$

$\forall M \subseteq L \setminus \{1\}$  справедливо соотношение

$$\widetilde{W}(M) \leq \widetilde{W}(M \cup \{1\}),$$

т.е. расширение линии 1 заведомо оптимально. В (1.21) рассматриваются значения функции общественного благосостояния при расширении только конкурентных к линии 1 линий. Если в таком «наихудшем» для этой линии случае при ее расширении благосостояние не уменьшится, то значит оно не уменьшится и в любом другом случае. Аналогично выписывается условие, при котором, наоборот, отсутствие расширения линии 1 заведомо оптимально. В нем уже расширяются линии, дополнительные к линии 1 («наилучший» случай), и сравниваются значения благосостояния при расширении и отсутствии расширения линии 1. Это условие имеет следующий вид:

$$\widetilde{W}(\{1, 3, 5, 6, 8\}) \leq \widetilde{W}(\{3, 5, 6, 8\}).$$

### 1.5. Частные случаи задачи, для которых существуют полиномиальные алгоритмы решения

Хотя исходная задача (1.5), как доказано в параграфе 1.2., и является NP-трудной, для некоторых транспортных структур существуют полиномиальные алгоритмы ее решения. Назовем «цепочкой» тип рынка, в котором узлы соединены последовательно и пронумерованы от 1 до  $n = |N|$  (рисунок 12):  $N = \{1, \dots, n\}$ ,  $L = \{\{1, 2\}, \dots, \{n-1, n\}\}$ .

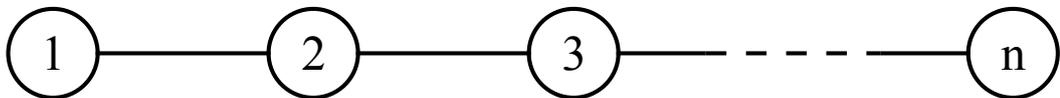


Рис. 12. Рынок типа «цепочка»

В работе Васина А. А. и Долматовой М. С. [31] рассматривается рынок типа «цепочка», в котором начальные пропускные способности  $Q_{\{i,i+1\}}^0$  равны нулю, а начальные равновесные цены  $\tilde{p}_i$  монотонны по  $i$  для  $\forall \vec{p} \in \tilde{p}(\vec{Q}^0)$ . Описывается алгоритм решения задачи для такого рынка. Он сводится к решению не более чем  $\frac{n(n-1)}{2}$  вспомогательных задач (1.6).

В данном параграфе рассматриваются следующие два обобщения рассмотренного в [31] случая:

- 1) рынок типа «цепочка» с нулевыми начальными пропускными способностями;
- 2) рынок типа «цепочка» с монотонными по  $i$  начальными равновесными ценами.

Для каждого случая описывается алгоритм полиномиальной сложности решения задачи поиска оптимального множества расширяемых линий (1.7), к которой сводится исходная задача (1.5). Под сложностью понимается число решаемых вспомогательных задач (1.6).

### 1.5.1. «Цепочка» с нулевыми начальными пропускными способностями

Рассмотрим рынок типа «цепочка», в котором  $Q_l^0 = 0$  для  $\forall l \in L$ . Такой рынок имеет следующую особенность: если некоторая линия  $\{i, i+1\} \in L$  заведомо не расширяется, то исходный рынок разбивается на два изолированных подрынка с узлами  $N_1 = \{1, \dots, i-1\}$ ,  $N_2 = \{i+1, \dots, n\}$  и линиями  $L_1 = \{\{1, 2\}, \dots, \{i-1, i\}\}$ ,  $L_2 = \{\{i+1, i+2\}, \dots, \{n-1, n\}\}$  соответственно, поэтому задача (1.7) для исходного рынка сводится к решению двух аналогичных задач меньшей размерности для подрынков, при этом максимальное благосостояние для исходного рынка равно сумме максимальных благосостояний для подрынков.

Обозначим через  $i_1 \leftrightarrow i_2$  изолированный подрынок с множествами узлов  $\{i_1, \dots, i_2\}$  и линий  $\{\{i_1, i_1+1\}, \dots, \{i_2-1, i_2\}\}$ ,  $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n$ . Введем следующие величины для подрынка  $i_1 \leftrightarrow i_2$ :  $W_{i_1 \leftrightarrow i_2}^*$  - максимальное благосостояние,  $L_{i_1 \leftrightarrow i_2}^*$  - оптимальное множество расширяемых линий.

Алгоритм решения задачи (1.7) для такого рынка состоит в последовательном вычислении значений  $W_{i_1 \leftrightarrow i_2}^*$ ,  $L_{i_1 \leftrightarrow i_2}^*$  в порядке возрастания  $i_2 - i_1$ : сначала рассматриваются подрынки с одним узлом, потом с двумя и т.д. В итоге искомые максимальное благосостояние и оптимальное множество расширяемых линий для исходного рынка равны  $W_{1 \leftrightarrow n}^*$  и  $L_{1 \leftrightarrow n}^*$  соответственно.

**Алгоритм** состоит из следующих шагов.

**Шаг 1.** Для  $\forall i \in N$ :

- 1) вычисляется величина  $W_{i \leftrightarrow i}^*$  (решается вспомогательная задача (1.6) для подрывка  $i \leftrightarrow i$  с  $R = \emptyset$ );
- 2) выполняется присваивание  $L_{i \leftrightarrow i}^* = \emptyset$ .

**Шаг  $k$ ,  $k=2, \dots, n$ .** Для каждого подрывка  $i_1 \leftrightarrow i_2$  такого, что  $i_2 - i_1 = k - 1$ :

- 1) вычисляется максимальное благосостояние  $\overline{W}_{i_1 \leftrightarrow i_2}$  для подрывка  $i_1 \leftrightarrow i_2$  при расширении всех его линий (решается вспомогательная задача (1.6) для этого подрывка с  $R = \overline{L}_{i_1 \leftrightarrow i_2} \equiv \{\{i_1, i_1 + 1\}, \dots, \{i_2 - 1, i_2\}\}$ );
- 2) для каждого узла  $j \in [i_1, i_2 - 1]$  вычисляются максимальное благосостояние  $W_{i_1 \leftrightarrow i_2, j}^*$  и оптимальное множество расширяемых линий  $L_{i_1 \leftrightarrow i_2, j}^*$  для подрывка  $i_1 \leftrightarrow i_2$  при заведомом нерасширении линии  $\{j, j + 1\}$ , в этом случае подрывок  $i_1 \leftrightarrow i_2$  разбивается на два изолированных подрывка  $i_1 \leftrightarrow j$  и  $j + 1 \leftrightarrow i_2$ :

$$W_{i_1 \leftrightarrow i_2, j}^* = W_{i_1 \leftrightarrow j}^* + W_{j+1 \leftrightarrow i_2}^*, \quad L_{i_1 \leftrightarrow i_2, j}^* = L_{i_1 \leftrightarrow j}^* \cup L_{j+1 \leftrightarrow i_2}^*;$$

- 3) для найденных пар

$$A_{i_1 \leftrightarrow i_2} = \{(\overline{W}_{i_1 \leftrightarrow i_2}, \overline{L}_{i_1 \leftrightarrow i_2}), (W_{i_1 \leftrightarrow i_2, i_1}^*, L_{i_1 \leftrightarrow i_2, i_1}^*), \dots, (W_{i_1 \leftrightarrow i_2, i_2-1}^*, L_{i_1 \leftrightarrow i_2, i_2-1}^*)\}$$

выбирается та, для которой благосостояние максимально:

$$W_{i_1 \leftrightarrow i_2}^* = \max_{(W, L') \in A_{i_1 \leftrightarrow i_2}} W, \quad L_{i_1 \leftrightarrow i_2}^* \in \{L' \mid (W_{i_1 \leftrightarrow i_2}^*, L') \in A_{i_1 \leftrightarrow i_2}\}.$$

В итоге  $L^* = L_{1 \leftrightarrow n}^*$  - оптимальное множество расширяемых линий для всего рынка, а  $W^* = W_{1 \leftrightarrow n}^*$  - максимальное общественное благосостояние. Корректность алгоритма следует из того, что при вычислении  $W_{i_1 \leftrightarrow i_2}^*$  рассмотренными  $i_2 - i_1 + 1$  случаями в пунктах 1 и 2 шага  $k$  охватываются все возможные варианты множеств расширяемых линий.

**Теорема 7.** Сложность данного алгоритма с точки зрения числа решаемых вспомогательных задач (1.6) равна  $O(|N|^2)$ .

**Доказательство.** Действительно, число решаемых вспомогательных задач (1.6) совпадает с количеством различных подрывков  $i_1 \leftrightarrow i_2$ ,  $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n$ , и равно  $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ . ■

Сложность остальных операций<sup>14</sup> алгоритма равна  $O(|N|^4)$ . Сложность можно понизить до  $O(|N|^3)$ , если

<sup>14</sup> Без учета операций, необходимых для решения вспомогательных задач.

- 1) устранить вычисление множества  $L_{i_1 \leftrightarrow i_2, j}^*$  в пункте 2 шага  $k$  ( $k=2, \dots, n$ ) для фиксированных  $i_1, i_2, j$ ;
- 2) добавить сохранение узла  $j$  в пункте 2 шага  $k$  ( $k=2, \dots, n$ ) в качестве второго элемента пары вместо  $L_{i_1 \leftrightarrow i_2, j}^*$ ;
- 3) в пункте 3 шага  $k$  ( $k=2, \dots, n$ ) после нахождения  $W_{i_1 \leftrightarrow i_2}^*$  добавить вычисление множества  $L_{i_1 \leftrightarrow i_2}^*$  с использованием сохраненного узла выбранной пары.

### 1.5.2. «Цепочка» с монотонными начальными равновесными ценами

Рассмотрим рынок типа «цепочка», в котором начальные равновесные цены  $\tilde{p}_i$  монотонны по  $i$  для  $\forall \vec{p} \in \tilde{p}(\vec{Q}^0)$ . Согласно диссертации Долматовой М. С. [32], для него выполняется УИСП, причем все равновесные потоки однонаправленны (рисунок 13) и идут в сторону увеличения равновесной цены, а значит любые две линии  $l, r \in L, l \neq r$ , являются взаимно дополнительными.



Рис. 13. Рынок типа «цепочка» с однонаправленными потоками

Без ограничения общности считаем, что равновесные потоки направлены от узла 1 к узлу  $n$ . Для фиксированного множества расширяемых линий  $R \subseteq L$  назовем линию  $\{i, i+1\} \in L \setminus R$  насыщенной, если любой равновесный поток  $\tilde{q}_{i, i+1}$  из узла  $i$  в узел  $i+1$  совпадает с начальной пропускной способностью  $Q_{\{i, i+1\}}^0$ , т.е. ограничение на величину потока является активным. Обозначим через  $L^{full}(R)$  множество всех насыщенных линий. Данный рынок удовлетворяет следующему свойству: если  $l \in L^{full}(R)$ , то  $l \in L^{full}(R')$  для любого  $R', R \subseteq R' \subseteq L \setminus \{l\}$ . Таким образом, свойство насыщенности сохраняется при расширении других линий.

Из этого свойства следует, что если для некоторого множества заведомо расширяемых линий  $R$  заведомо не расширяемая линия  $\{i, i+1\}$  принадлежит  $L^{full}(R)$ , то данная линия является заведомо насыщенной, а значит вне зависимости от конкретного множества расширяемых линий для любых равновесных потоков  $\vec{q}$  выполняется условие  $\tilde{q}_{i, i+1} = Q_{\{i, i+1\}}^0$ , поэтому исходный рынок разбивается на два псевдоизолированных подрынка с узлами  $N_1 = \{1, \dots, i-1\}$ ,  $N_2 = \{i+1, \dots, n\}$  и линиями  $L_1 = \{\{1, 2\}, \dots, \{i-1, i\}\}$ ,  $L_2 = \{\{i+1, i+2\}, \dots, \{n-1, n\}\}$  соответственно, что позволяет свести задачу (1.7) для

исходного рынка к решению двух аналогичных задач меньшей размерности для подрынков с учетом граничного условия  $q_{i,i+1} = Q_{\{i,i+1\}}^0$ , при этом максимальное благосостояние для исходного рынка равно сумме максимальных благосостояний для подрынков за вычетом транспортных затрат для граничной линии  $E_{i,i+1}(Q_{\{i,i+1\}}^0)$ .

Для удобства введем фиктивные линии  $\{0, 1\}$ ,  $\{n, n + 1\}$  с начальными пропускными способностями  $Q_{\{0,1\}}^0 = Q_{\{n,n+1\}}^0 = 0$ , а также фиктивные потоки  $q_{0,1} = q_{n,n+1} = 0$ . Обозначим через  $i_1 \rightarrow i_2$ ,  $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n$ , псевдоизолированный подрынок с множествами узлов  $\{i_1, \dots, i_2\}$  и внутренних линий  $\{\{i_1, i_1 + 1\}, \dots, \{i_2 - 1, i_2\}\}$ , для которого граничные линии  $\{i_1 - 1, i_1\}$  и  $\{i_2, i_2 + 1\}$  являются заведомо насыщенными с потоками  $Q_{\{i_1-1,i_1\}}^0$  и  $Q_{\{i_2,i_2+1\}}^0$  соответственно (рисунок 14).

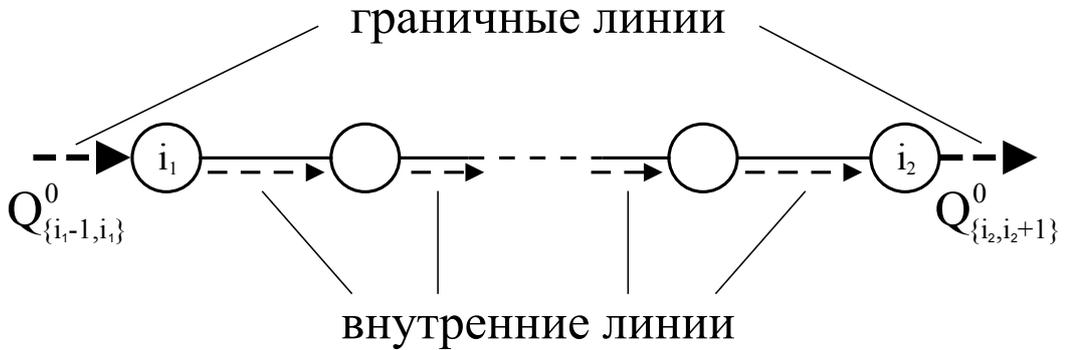


Рис. 14. Псевдоизолированный подрынок  $i_1 \rightarrow i_2$

Введем следующие величины для подрынка  $i_1 \rightarrow i_2$ :  $W_{i_1 \rightarrow i_2}^*$  - максимальное благосостояние (без учета транспортных затрат для граничных линий),  $L_{i_1 \rightarrow i_2}^*$  - оптимальное множество расширяемых внутренних линий.

Алгоритм поиска оптимального множества расширяемых линий (т.е. решения задачи (1.7)) для данного рынка состоит в последовательном вычислении значений  $W_{i_1 \rightarrow i_2}^*$ ,  $L_{i_1 \rightarrow i_2}^*$  в порядке возрастания  $i_2 - i_1$ : сначала рассматриваются подрынки с одним узлом, потом с двумя и т.д. В итоге искомые максимальное благосостояние и оптимальное множество расширяемых линий для исходного рынка равны  $W_{1 \rightarrow n}^*$  и  $L_{1 \rightarrow n}^*$  соответственно.

Обозначим для подрынка  $i_1 \rightarrow i_2$  через  $L_{i_1 \rightarrow i_2} = \{\{i_1, i_1 + 1\}, \dots, \{i_2 - 1, i_2\}\}$  множество внутренних линий, а через  $L_{i_1 \rightarrow i_2}^{full}(R)$  и  $\widetilde{W}_{i_1 \rightarrow i_2}(R)$  - множество всех насыщенных внутренних линий и максимальное благосостояние соответственно для фиксированного множества расширяемых линий  $R \subseteq L_{i_1 \rightarrow i_2}$ . Стоит отметить, что если для некоторого множества заведомо расширяемых линий  $R \subseteq L_{i_1 \rightarrow i_2}$  выполняется условие  $L_{i_1 \rightarrow i_2}^{full}(R) = \emptyset$ , то  $R$  - оптимальное множество расширяемых внутренних линий. Это очевидно, т.к. при отсутствии насыщенных линий нет необходимости в расширении.

**Алгоритм** состоит из следующих шагов.

**Шаг 1.** Для  $\forall i \in N$ :

- 1) вычисляется величина  $W_{i \rightarrow i}^*$  (решается вспомогательная задача (1.6) для подрывка  $i \rightarrow i$  с  $R = \emptyset$  и граничными условиями  $q_{i-1,i} = Q_{\{i-1,i\}}^0$ ,  $q_{i,i+1} = Q_{\{i,i+1\}}^0$ );
- 2) выполняется присваивание  $L_{i \rightarrow i}^* = \emptyset$ .

**Шаг k, k=2, ..., n.** Для каждого подрывка  $i_1 \rightarrow i_2$  такого, что  $i_2 - i_1 = k - 1$ :

- 1) выполняются присваивания  $R_{i_1 \rightarrow i_2} = \emptyset$ ,  $A_{i_1 \rightarrow i_2} = \emptyset$  (переменная  $R_{i_1 \rightarrow i_2}$  определяет множество заведомо расширяемых внутренних линий,  $A_{i_1 \rightarrow i_2}$  - множество пар вида  $(W, L')$ , где  $W = \widetilde{W}_{i_1 \rightarrow i_2}(L')$ ,  $L' \subseteq L_{i_1 \rightarrow i_2}$ );
- 2) вычисляются множество насыщенных линий  $L_{i_1 \rightarrow i_2}^{full}(R_{i_1 \rightarrow i_2})$  и благосостояние  $\widetilde{W}_{i_1 \rightarrow i_2}(R_{i_1 \rightarrow i_2})$  (решается вспомогательная задача (1.6) для подрывка  $i_1 \rightarrow i_2$  с  $R = R_{i_1 \rightarrow i_2}$  и граничными условиями  $q_{i_1-1,i_1} = Q_{\{i_1-1,i_1\}}^0$ ,  $q_{i_2,i_2+1} = Q_{\{i_2,i_2+1\}}^0$ );
- 3) если  $L_{i_1 \rightarrow i_2}^{full}(R_{i_1 \rightarrow i_2}) \neq \emptyset$ , то произвольно выбирается насыщенная линия  $\{j, j+1\} \in L_{i_1 \rightarrow i_2}^{full}(R_{i_1 \rightarrow i_2})$ , после чего последовательно рассматриваются два случая:
  - 3.1) линия  $\{j, j+1\}$  не расширяется: в этом случае подрывок  $i_1 \rightarrow i_2$  разбивается на  $i_1 \rightarrow j$  и  $j+1 \rightarrow i_2$ , поэтому в  $A_{i_1 \rightarrow i_2}$  добавляется пара  $(W_{i_1 \rightarrow j}^* - E_{j,j+1}(Q_{\{j,j+1\}}^0) + W_{j+1 \rightarrow i_2}^*, L_{i_1 \rightarrow j}^* \cup L_{j+1 \rightarrow i_2}^*)$ ;
  - 3.2) линия  $\{j, j+1\}$  расширяется: в множество  $R_{i_1 \rightarrow i_2}$  добавляется линия  $\{j, j+1\}$ ; происходит возврат к п. 2;
 если  $L_{i_1 \rightarrow i_2}^{full}(R_{i_1 \rightarrow i_2}) = \emptyset$ , то в  $A_{i_1 \rightarrow i_2}$  добавляется пара  $(\widetilde{W}_{i_1 \rightarrow i_2}(R_{i_1 \rightarrow i_2}), R_{i_1 \rightarrow i_2})$ ;
- 4) для найденных пар  $A_{i_1 \rightarrow i_2}$  выбирается та, для которой благосостояние максимально:

$$W_{i_1 \rightarrow i_2}^* = \max_{(W,L') \in A_{i_1 \rightarrow i_2}} W, L_{i_1 \rightarrow i_2}^* \in \{L' \mid (W_{i_1 \rightarrow i_2}^*, L') \in A_{i_1 \rightarrow i_2}\}.$$

В итоге  $L^* = L_{1 \rightarrow n}^*$  - оптимальное множество расширяемых линий для всего рынка, а  $W^* = W_{1 \rightarrow n}^*$  - максимальное общественное благосостояние. Корректность алгоритма следует из описанных выше свойств данного типа рынка.

**Теорема 8.** Сложность данного алгоритма с точки зрения числа решаемых вспомогательных задач (1.6) равна  $O(|N|^3)$ .

**Доказательство.** Действительно, число рассмотренных подрывков  $i_1 \rightarrow i_2$ ,  $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n$ , равно  $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ , причем для каждого подрывка  $i_1 \rightarrow i_2$  решается не более  $i_2 - i_1 + 1 \leq |N|$  вспомогательных задач (1.6). ■

Сложность остальных операций<sup>15</sup> алгоритма равна  $O(|N|^4)$ .

<sup>15</sup> Без учета операций, необходимых для решения вспомогательных задач.

## 1.6. Решение задачи в случае выполнения условия инвариантности структуры потока

В данном параграфе рассматриваются рынки, для которых выполняется УИСП, т.е. сохраняются направления равновесных потоков. В таких рынках любая пара линий находится в отношениях дополнительности или конкурентности, которые могут быть установлены исходя из известных направлений. Рассмотрение данного случая требует особого внимания, поскольку на практике часто для действующих и потенциальных линий потоки имеют заранее известные направления и идут от производящих узлов (например, месторождений газа или нефти) к потребляющим (промышленным центрам, городам и др.).

Ниже для различных транспортных структур описываются алгоритмы решения задачи поиска оптимального множества расширяемых линий (1.7). Идея всех представленных алгоритмов основана на применении теоремы 5. Данные алгоритмы не являются полиномиальными, поэтому для оценки их эффективности используется такой показатель, как средне-статистическая сложность - усредненное число решаемых вспомогательных задач (1.6) для набора случайно сгенерированных исходных задач. Считаем, что для каждой линии  $l \in L$  известны направление равновесного потока и множества дополнительных  $L_+(l)$  и конкурентных  $L_-(l)$  линий.

### 1.6.1. Рынок типа «цепочка»

Рассмотрим рынок типа «цепочка» с множествами узлов  $N = \{1, \dots, n\}$  и линий  $L = \{\{1, 2\}, \dots, \{n-1, n\}\}$ . Разобьем множество линий на два подмножества:  $L_1$  с направлениями потоков от узла 1 и  $L_2$  с направлениями потоков к узлу 1 (рисунок 15). В этом случае две произвольные линии являются взаимно дополнительными, если они принадлежат одному и тому же подмножеству, и взаимно конкурентными в противном случае.

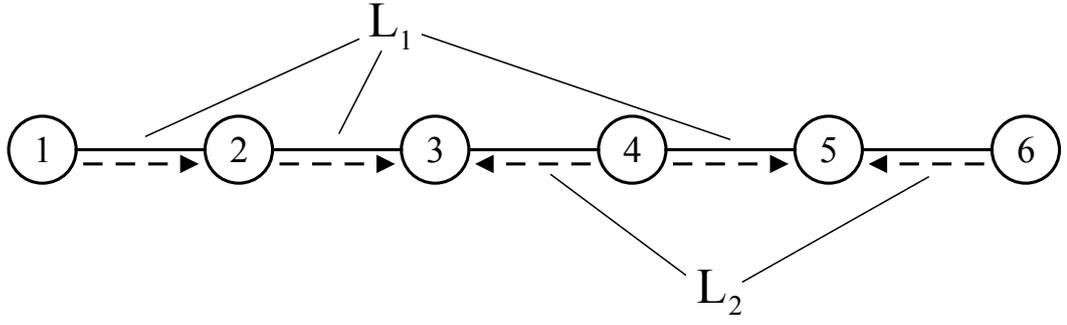


Рис. 15. Пример рынка типа «цепочка» с  $L_1 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$ ,  $L_2 = \{\{3, 4\}, \{5, 6\}\}$

Перейдем к построению алгоритма поиска оптимального множества расширяемых линий  $L^*$ . Для любого  $R \subseteq L$  обозначим  $L_1(R) = L_1 \cap R$ ,  $L_2(R) = L_2 \cap R$ . Тогда искомое множество  $L^*$  представимо в виде объединения множеств  $L_1^* = L_1(L^*)$  и  $L_2^* = L_2(L^*)$ . Алгоритм работает с нижней  $L_1^{\min}$  и верхней  $L_1^{\max}$  оценками множества  $L_1^*$ , а также с нижней  $L_2^{\min}$  и верхней  $L_2^{\max}$  оценками множества  $L_2^*$  и основан на последовательном применении шагов двух типов. На шагах первого типа производятся попытки расширения множества  $L_1^{\min}$  и сужения множества  $L_2^{\max}$ . На шагах второго типа производятся попытки сужения множества  $L_1^{\max}$  и расширения множества  $L_2^{\min}$ . Назовем линию включенной, если она принадлежит одной из текущих нижних оценок, и исключенной, если она не принадлежит ни одной из текущих верхних оценок. Назовем линию определенной, если она является включенной или исключенной. Если для текущих оценок для шага первого типа количество определяемых на нем линий не больше, чем для шага второго типа, то выполняется шаг первого типа. Иначе выполняется шаг второго типа. В итоге оптимальное множество  $L^*$  ищется в виде  $L_1^* \cup L_2^*$ , где  $L_1^{\min} \subseteq L_1^* \subseteq L_1^{\max}$ ,  $L_2^{\min} \subseteq L_2^* \subseteq L_2^{\max}$ .

Справедливость следующего утверждения вытекает из теоремы 5.

**Теорема 9.** Пусть  $L_1^{\min}$  и  $L_1^{\max}$  - текущие нижняя и верхняя оценки множества  $L_1^*$ , а  $L_2^{\min}$  и  $L_2^{\max}$  - текущие нижняя и верхняя оценки множества  $L_2^*$ . Пусть  $S_1 \subseteq L_1^{\max} \setminus L_1^{\min}$ ,  $S_2 \subseteq L_2^{\max} \setminus L_2^{\min}$ ,  $S = S_1 \cup S_2$ .

1) Если выполняется неравенство

$$\widetilde{W}((L_1^{\min} \cup S_1) \cup (L_2^{\max} \setminus S_2)) \geq \widetilde{W}(L_1^{\min} \cup L_2^{\max})$$

и для каждого непустого множества  $R \subset S$

$$\widetilde{W}((L_1^{\min} \cup L_1(R)) \cup (L_2^{\max} \setminus L_2(R))) < \widetilde{W}(L_1^{\min} \cup L_2^{\max}),$$

то к нижней оценке  $L_1^{\min}$  может быть добавлено множество  $S_1$ , а из верхней оценки  $L_2^{\max}$  может быть вычтено множество  $S_2$ :  $L_{1,r}^{\min} = L_1^{\min} \cup S_1$ ,  $L_{2,r}^{\max} = L_2^{\max} \setminus S_2$ , где  $L_{1,r}^{\min}$ ,  $L_{2,r}^{\max}$  - скорректированные оценки.

2) Если выполняется неравенство

$$\widetilde{W}((L_1^{\max} \setminus S_1) \cup (L_2^{\min} \cup S_2)) \geq \widetilde{W}(L_1^{\max} \cup L_2^{\min})$$

и для каждого непустого множества  $R \subset S$

$$\widetilde{W}((L_1^{\max} \setminus L_1(R)) \cup (L_2^{\min} \cup L_2(R))) < \widetilde{W}(L_1^{\max} \cup L_2^{\min}),$$

то из верхней оценки  $L_1^{\max}$  может быть вычтено множество  $S_1$ , а к нижней оценке  $L_2^{\min}$  может быть добавлено множество  $S_2$ :  $L_{1,r}^{\max} = L_1^{\max} \setminus S_1$ ,  $L_{2,r}^{\min} = L_2^{\min} \cup S_2$ , где  $L_{1,r}^{\max}$ ,  $L_{2,r}^{\min}$  - скорректированные оценки.

**Доказательство.** Докажем пункт 1. Пункт 2 доказывается аналогично. Пусть выполняются указанные неравенства. Достаточно показать, что для любых  $S'_1 \subseteq L_1^{\max} \setminus L_1^{\min}$ ,  $S'_2 \subseteq L_2^{\max} \setminus L_2^{\min}$  верно соотношение

$$\widetilde{W}(((L_1^{\min} \cup S'_1) \cup S_1) \cup ((L_2^{\max} \setminus S'_2) \setminus S_2)) \geq \widetilde{W}((L_1^{\min} \cup S'_1) \cup (L_2^{\max} \setminus S'_2)). \quad (1.22)$$

Обозначим  $S''_1 = S'_1 \setminus S_1$ ,  $S''_2 = S'_2 \setminus S_2$ . Занумеруем элементы следующих множеств:  $S_1 \setminus S'_1 = \{l_1^1, \dots, l_1^{m_1}\}$ ,  $S_2 \setminus S'_2 = \{l_2^1, \dots, l_2^{m_2}\}$ . Рассмотрим разность выражений из (1.22):

$$\begin{aligned} & \widetilde{W}(((L_1^{\min} \cup S'_1) \cup S_1) \cup ((L_2^{\max} \setminus S'_2) \setminus S_2)) - \widetilde{W}((L_1^{\min} \cup S'_1) \cup (L_2^{\max} \setminus S'_2)) = \\ & = \widetilde{W}(((L_1^{\min} \cup S_1) \cup S''_1) \cup ((L_2^{\max} \setminus S_2) \setminus S''_2)) - \\ & - \widetilde{W}(((L_1^{\min} \cup (S_1 \cap S'_1)) \cup S''_1) \cup ((L_2^{\max} \setminus (S_2 \cap S'_2)) \setminus S''_2)) = \\ & = \widetilde{W}(((L_1^{\min} \cup S_1) \cup S''_1) \cup ((L_2^{\max} \setminus S_2) \setminus S''_2)) \pm \\ & \pm \sum_{k=1}^{m_1} \widetilde{W}(((L_1^{\min} \cup (S_1 \setminus \{l_1^1, \dots, l_1^k\})) \cup S''_1) \cup ((L_2^{\max} \setminus S_2) \setminus S''_2)) \pm \\ & \pm \sum_{k=1}^{m_2-1} \widetilde{W}(((L_1^{\min} \cup (S_1 \cap S'_1)) \cup S''_1) \cup ((L_2^{\max} \setminus (S_2 \setminus \{l_2^1, \dots, l_2^k\})) \setminus S''_2)) \pm \\ & - \widetilde{W}(((L_1^{\min} \cup (S_1 \cap S'_1)) \cup S''_1) \cup ((L_2^{\max} \setminus (S_2 \cap S'_2)) \setminus S''_2)). \end{aligned}$$

Перегруппировав слагаемые в последнем выражении, применив теорему 5  $m_1 + m_2$  раз и

проведя сокращения, можно доказать, что последнее выражение не меньше, чем

$$\widetilde{W}((L_1^{\min} \cup S_1) \cup (L_2^{\max} \setminus S_2)) - \widetilde{W}((L_1^{\min} \cup (S_1 \cap S'_1)) \cup (L_2^{\max} \setminus (S_2 \cap S'_2))) \geq 0,$$

из чего следует справедливость (1.22). В последнем переходе учитываются вложения  $S_1 \cap S'_1 \subseteq S_1$ ,  $S_2 \cap S'_2 \subseteq S_2$  и исходные неравенства. ■

### 1.6.1.1. Алгоритм

Опишем **алгоритм** поиска оптимального множества расширяемых линий. В нем используются следующие переменные:  $L_1^{\min}$ ,  $L_1^{\max}$ ,  $L_2^{\min}$ ,  $L_2^{\max}$  - текущие нижние и верхние оценки для множеств  $L_1^*$  и  $L_2^*$ ;  $k_1$  и  $k_2$  - количества определяемых линий для шагов первого и второго типа соответственно;  $\bar{L}$  - множество еще не определенных линий;  $T \in \{1, 2\}$  - тип текущего шага;  $s$  - номер шага.

- 1) Выполняются присваивания:  $\bar{L} = L$ ,  $L_1^{\min} = L_2^{\min} = \emptyset$ ,  $L_1^{\max} = L_1$ ,  $L_2^{\max} = L_2$ ,  $k_1 = k_2 = 1$ ,  $s = 1$ .
- 2) Выполняется присваивание  $T = \begin{cases} 1, & k_1 \leq k_2, \\ 2, & k_1 > k_2. \end{cases}$
- 3) Если  $s = n - 1$ , то оптимальное множество выбирается согласно

$$L^* \in \underset{R \in \{L_1^{\min} \cup L_2^{\max}, L_1^{\max} \cup L_2^{\min}\}}{\text{Arg max}} \widetilde{W}(R),$$

после чего алгоритм завершает работу.

- 4) Если  $T = 1$ , то:

- 4.1) последовательно рассматриваются все множества  $S$ , для которых  $S \subseteq \bar{L}$ ,  $|S| = k_1$ ; для каждого такого множества проверяется неравенство

$$\widetilde{W}((L_1^{\min} \cup L_1(S)) \cup (L_2^{\max} \setminus L_2(S))) \geq \widetilde{W}(L_1^{\min} \cup L_2^{\max}),$$

в случае успеха без рассмотрения оставшихся множеств выполняются присваивания  $L_1^{\min} = L_1^{\min} \cup L_1(S)$ ,  $L_2^{\max} = L_2^{\max} \setminus L_2(S)$ ,  $\bar{L} = \bar{L} \setminus S$ ,  $k_1 = 1$ ,  $s = s + 1$ , затем происходит возврат к пункту 2;

- 4.2) выполняются присваивания  $k_1 = k_1 + 1$ ,  $s = s + 1$ , после чего происходит возврат

к пункту 2.

Если  $T = 2$ , то:

- 4.1) последовательно рассматриваются все множества  $S$ , для которых  $S \subseteq \bar{L}$ ,  $|S| = k_2$ ; для каждого такого множества проверяется неравенство

$$\widetilde{W}((L_1^{\max} \setminus L_1(S)) \cup (L_2^{\min} \cup L_2(S))) \geq \widetilde{W}(L_1^{\max} \cup L_2^{\min}),$$

в случае успеха без рассмотрения оставшихся множеств выполняются присваивания  $L_1^{\max} = L_1^{\max} \setminus L_1(S)$ ,  $L_2^{\min} = L_2^{\min} \cup L_2(S)$ ,  $\bar{L} = \bar{L} \setminus S$ ,  $k_2 = 1$ ,  $s = s + 1$ , затем происходит возврат к пункту 2;

- 4.2) выполняются присваивания  $k_2 = k_2 + 1$ ,  $s = s + 1$ , после чего происходит возврат к пункту 2.

Заметим, что если для рассматриваемого множества  $S$  выполняется неравенство  $\widetilde{W}((L_1^{\min} \cup L_1(S)) \cup (L_2^{\max} \setminus L_2(S))) \geq \widetilde{W}(L_1^{\min} \cup L_2^{\max})$ , то, согласно теореме 9, к нижней оценке  $L_1^{\min}$  может быть добавлено множество  $L_1(S)$ , а из верхней оценки  $L_2^{\max}$  может быть вычтено множество  $L_2(S)$ . Действительно, каждое непустое множество  $R \subset S$  уже было рассмотрено на предыдущих шагах и удовлетворяет неравенству  $\widetilde{W}((L_1^{\min} \cup L_1(R)) \cup (L_2^{\max} \setminus L_2(R))) < \widetilde{W}(L_1^{\min} \cup L_2^{\max})$  (иначе множество  $L_1(R)$  было бы уже добавлено к нижней оценке  $L_1^{\min}$ , а множество  $L_2(R)$  уже было бы вычтено из верхней оценки  $L_2^{\max}$ ). Для шагов второго типа верны аналогичные рассуждения. Из этого следует корректность алгоритма.

### 1.6.1.2. Оценка среднестатистической сложности алгоритма

Описанный алгоритм позволяет сильно сократить число решаемых вспомогательных задач (1.6) при решении задачи (1.7). Для оценки зависимости числа решаемых вспомогательных задач от количества узлов  $n$  был проведен вычислительный эксперимент, в ходе которого случайным образом генерировался набор исходных задач для разного числа узлов, после чего каждая задача решалась разработанным алгоритмом.

Опишем модель рынка, используемую в эксперименте. Узлы характеризуются кусочно-

линейными функциями предложения и спроса следующих видов:

$$S_i(p_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}c_i \cdot p_i, & p_i \leq 2\frac{d_i^f}{c_i}, \\ -d_i^f + c_i \cdot p_i, & p_i > 2\frac{d_i^f}{c_i}, \end{cases} \quad D_i(p_i) = \begin{cases} d_i^f - \frac{1}{2}c_i \cdot p_i, & p_i \leq 2\frac{d_i^f}{c_i}, \\ 0, & p_i > 2\frac{d_i^f}{c_i}. \end{cases} \quad (1.23)$$

Этим функциям соответствуют линейные функции чистого предложения  $\Delta S_i(p_i) \equiv S_i(p_i) - D_i(p_i) = -d_i^f + c_i \cdot p_i$ ,  $i \in N$ . Для каждой линии  $l \in L$  функция переменных затрат на увеличение пропускной способности квадратична и характеризуется параметром  $e_l^q$ :

$$E_l^v(\Delta Q_l) = e_l^q \cdot \Delta Q_l^2. \quad (1.24)$$

Обозначим через  $p_i^0$  равновесную цену в узле  $i \in N$  в случае его изолированности (при нулевых пропускных способностях), а через  $\Delta p_i^0$  - разницу между равновесными ценами для изолированных узлов  $i$  и  $i + 1$ :  $\Delta p_i^0 = p_{i+1}^0 - p_i^0$ ,  $\{i, i + 1\} \in L$ . Пусть  $p_{\min}^0 = \min_{i \in N} p_i^0$ . Тогда исходный рынок однозначно определяется следующими параметрами:  $n$ ,  $p_{\min}^0$ ,  $d_i^f$  ( $i \in N$ ),  $\Delta p_i^0$  ( $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ ),  $Q_l^0$ ,  $e_l^t$ ,  $e_l^q$ ,  $E_l^f$  ( $l \in L$ ). При этом равновесные цены  $p_i^0$ ,  $i \in N$ , находятся из системы

$$\begin{cases} p_{i+1}^0 - p_i^0 = \Delta p_i^0, & \{i, i + 1\} \in L, \\ \min_{i \in N} p_i^0 = p_{\min}^0, \end{cases}$$

а  $c_i = \frac{d_i^f}{p_i^0}$ ,  $i \in N$  (считаем, что  $p_{\min}^0 > 0$ ,  $d_i^f > 0 \forall i \in N$ ).

В ходе проведенного эксперимента параметры  $p_{\min}^0$ ,  $d_i^f$ ,  $|\Delta p_i^0|$ ,  $e_l^t$ ,  $e_l^q$ ,  $E_l^f$ , характеризующие задачу, генерировались случайно в соответствии с равномерным распределением (таблица 1), начальные пропускные способности  $Q_l^0$  брались равными 0, а для любой линии  $\{i, i + 1\} \in L$  знак  $\Delta p_{i+1}^0$  совпадал со знаком  $\Delta p_i^0$  с вероятностью 0.9, при этом  $\Delta p_1^0 > 0$ .

Таблица 1. Параметры вероятностных распределений величин  $p_{\min}^0$ ,  $d_i^f$ ,  $|\Delta p_i^0|$ ,  $e_l^t$ ,  $e_l^q$ ,  $E_l^f$  для рынка типа «цепочка»

Параметр модели	Минимальное значение	Максимальное значение
$p_{\min}^0$	0 (не включая 0)	10
$d_i^f$	10	20
$ \Delta p_i^0 $	0 (не включая 0)	10
$e_l^t$	0	4
$e_l^q$	0	4
$E_l^f$	0	4

Чтобы рынок удовлетворял УИСП, в эксперименте для каждой линии  $\{i, i + 1\} \in L$  использовались модифицированные функции предельных транспортных затрат  $e_{i,i+1}^{nex,m}(q_{i,i+1})$  и  $e_{i,i+1}^{ex,m}(q_{i,i+1})$ . Если  $\text{sgn}(\Delta p_i^0) > 0$ , то

$$e_{i,i+1}^{nex,m}(q_{i,i+1}) = \begin{cases} (-\infty, \max(e_{i,i+1}^{nex}(0))], & q_{i,i+1} = 0, \\ e_{i,i+1}^{nex}(q_{i,i+1}), & q_{i,i+1} > 0; \end{cases} \quad (1.25)$$

$$e_{i,i+1}^{ex,m}(q_{i,i+1}) = \begin{cases} (-\infty, \max(e_{i,i+1}^{ex}(0))], & q_{i,i+1} = 0, \\ e_{i,i+1}^{ex}(q_{i,i+1}), & q_{i,i+1} > 0. \end{cases} \quad (1.26)$$

Если же  $\text{sgn}(\Delta p_i^0) < 0$ , то

$$e_{i,i+1}^{nex,m}(q_{i,i+1}) = \begin{cases} e_{i,i+1}^{nex}(q_{i,i+1}), & q_{i,i+1} < 0, \\ [\min(e_{i,i+1}^{nex}(0)), +\infty), & q_{i,i+1} = 0; \end{cases} \quad (1.27)$$

$$e_{i,i+1}^{ex,m}(q_{i,i+1}) = \begin{cases} e_{i,i+1}^{ex}(q_{i,i+1}), & q_{i,i+1} < 0, \\ [\min(e_{i,i+1}^{ex}(0)), +\infty), & q_{i,i+1} = 0. \end{cases} \quad (1.28)$$

Модифицированные функции (1.25-1.28) обладают ограниченными областями определения, не позволяя потоку идти в неправильную сторону. Стоит отметить, что данная модификация никак не нарушает справедливость полученных ранее результатов и корректность разработанных алгоритмов.

Число узлов  $n$  менялось от 1 до 65. Для каждого  $n$  генерировалась 1 000 задач, каждая из которых решалась описанным алгоритмом. На рисунке 16 представлена полученная зависимость числа решаемых вспомогательных задач (1.6) от количества узлов  $n$ .

## число решаемых вспомогательных задач

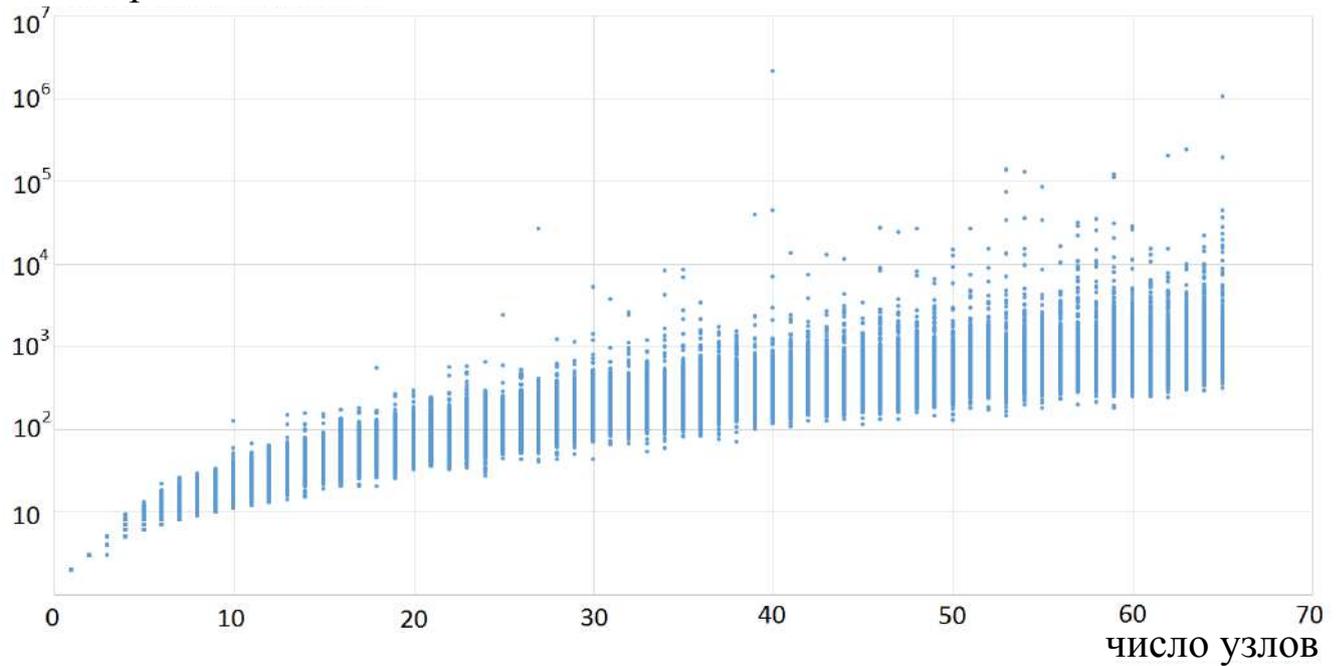


Рис. 16. Результаты численного эксперимента для рынка типа «цепочка». Каждой точке соответствует решенная задача

Обозначим среднее число решаемых вспомогательных задач через  $y_{av}$ . Получившаяся зависимость  $y_{av}$  от  $n$  представлена на рисунке 17. Методом наименьших квадратов получена следующая аппроксимация среднего числа решаемых вспомогательных задач:  $\bar{y}_{av}(n) = 0.251n^2 + 1.771$  (рисунок 18). Соответствующий коэффициент детерминации  $R^2$  равен 0.6357.

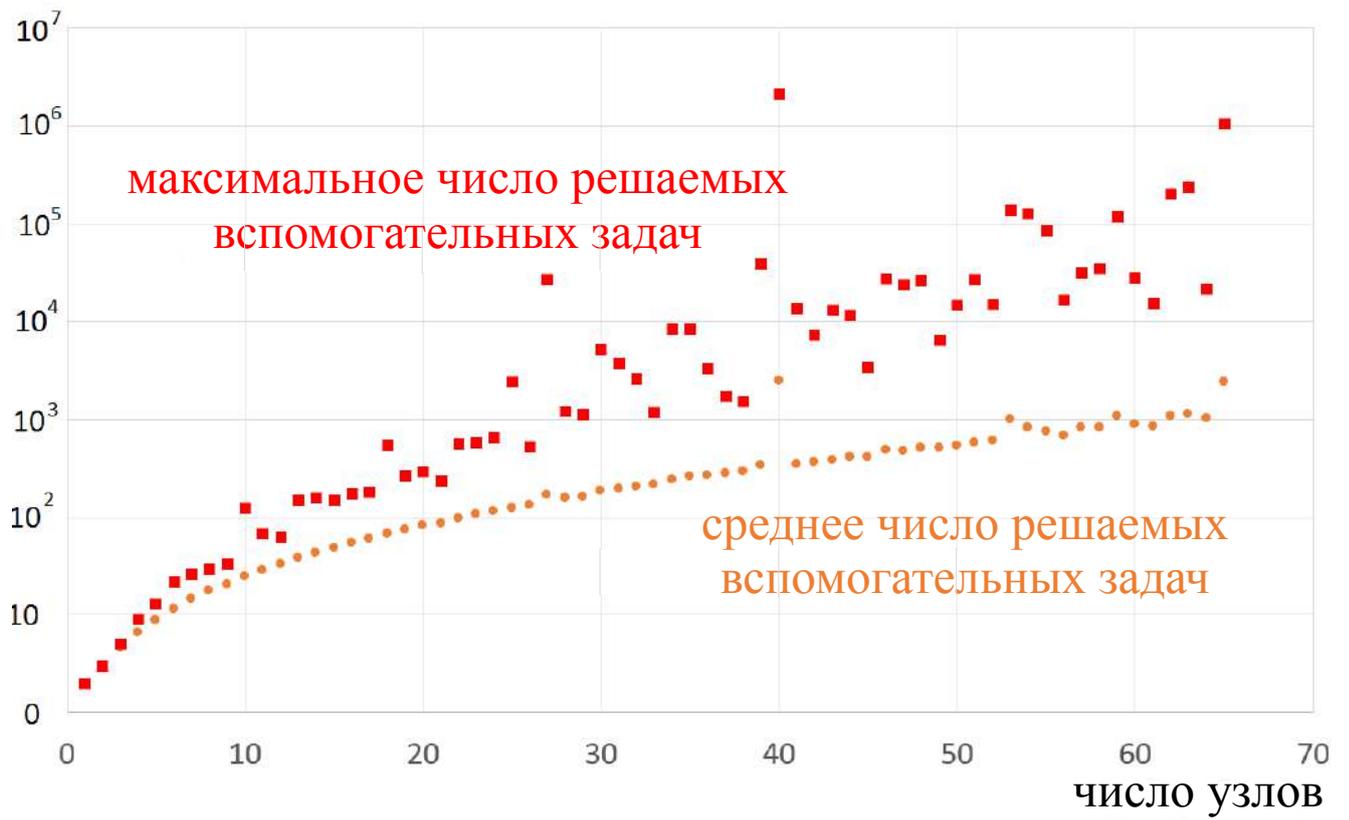


Рис. 17. Средние (снизу) и максимальные (сверху) числа решаемых вспомогательных задач для рынка типа «цепочка»

### среднее число решаемых вспомогательных задач

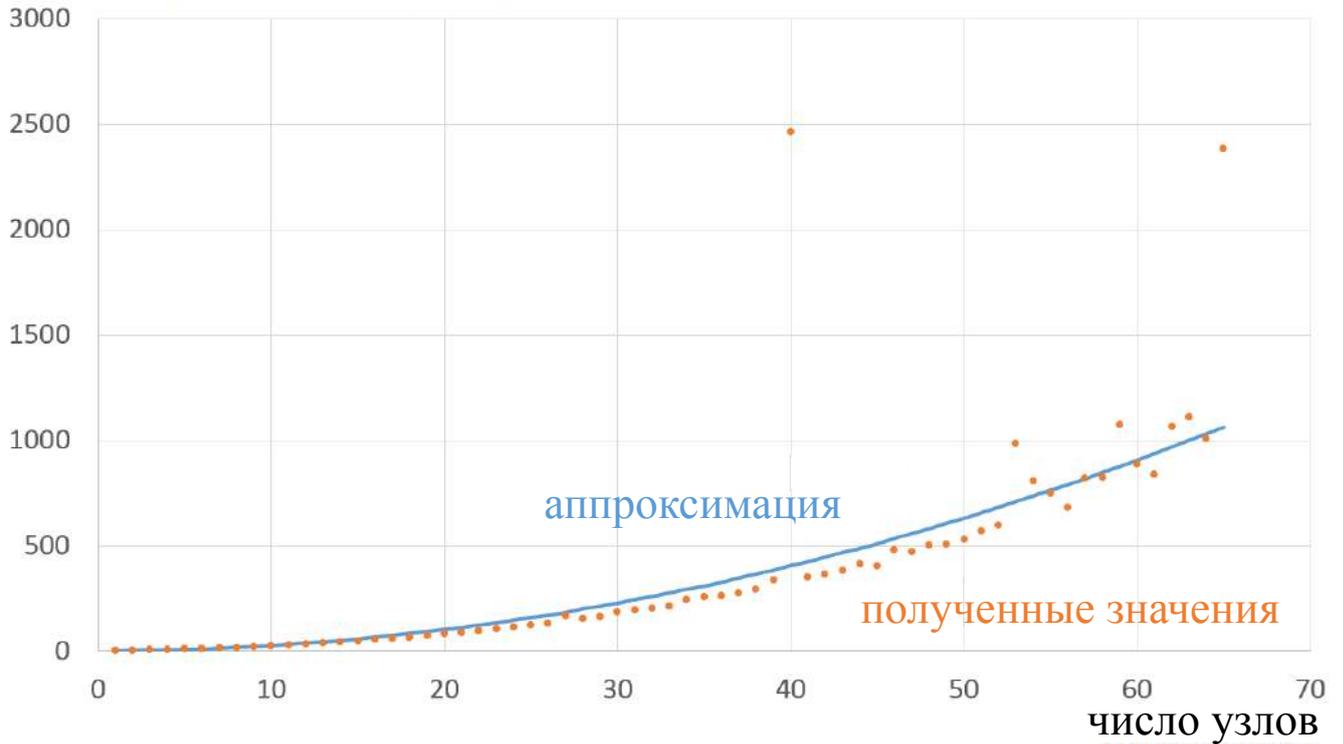


Рис. 18. Аппроксимация среднего числа решаемых вспомогательных задач для рынка типа «цепочка»

Таким образом, для проведенного вычислительного эксперимента среднее число решаемых вспомогательных задач (1.6) хорошо аппроксимируется квадратичной функцией, зависящей от числа узлов. Это говорит о том, что исходная задача (1.5) для данного типа рынка может решаться за разумное время, хотя она, как было ранее доказано, является NP-трудной в общем случае.

#### 1.6.2. Рынок типа «звезда»

Рассмотрим рынок типа «звезда», который состоит из центрального узла 0 и множества смежных ему узлов. Разобьем множество линий  $L$  на подмножества  $L_1$  с направлениями к центральному узлу и  $L_2$  с направлениями от центрального узла (рисунок 19). В этом случае две произвольные линии являются взаимно дополнительными, если они принадлежат разным подмножествам, и взаимно конкурентными в противном случае. Обозначим через  $N_1 = \{i \in N \mid \{i, 0\} \in L_1\}$  множество производящих узлов, а через  $N_2 = \{i \in N \mid \{0, i\} \in L_2\}$  - множество потребляющих узлов.

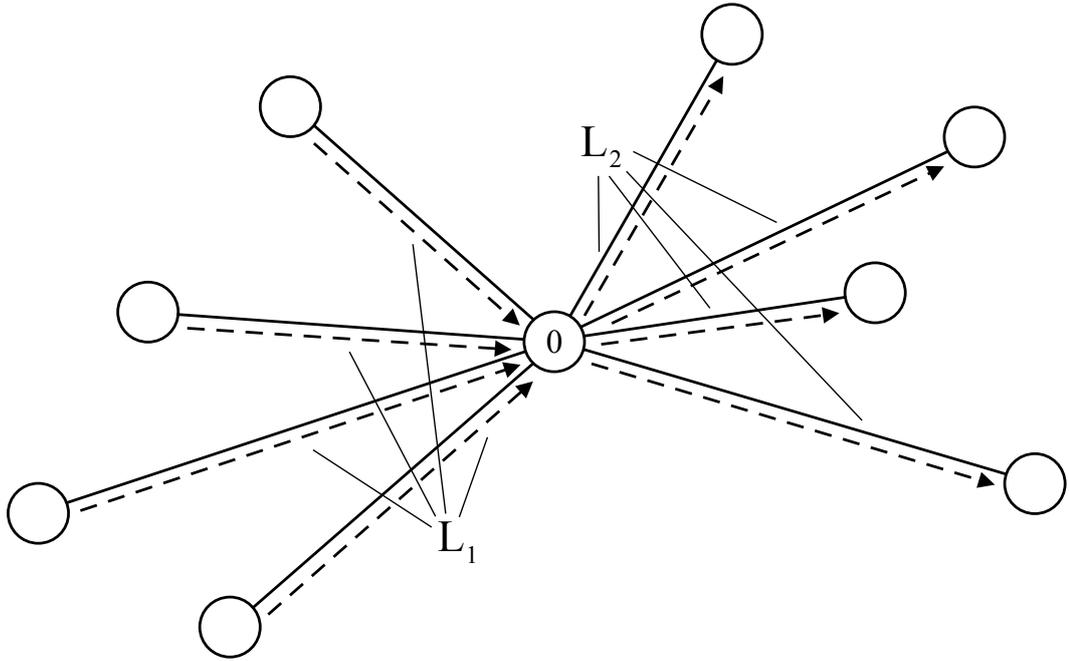


Рис. 19. Пример рынка типа «звезда»

Перейдем к построению алгоритма поиска оптимального множества расширяемых линий  $L^*$ . Алгоритм работает с нижней  $L^{\min}$  и верхней  $L^{\max}$  оценками множества  $L^*$ . Также как и для рынка типа «цепочка», производятся попытки расширения нижних и сужения верхних оценок. Назовем линию включенной, если она принадлежит текущей нижней оценке, и исключенной, если она не принадлежит текущей верхней оценке. Назовем линию определенной, если она является включенной или исключенной. В итоге оптимальное множество  $L^*$  удовлетворяет условию  $L^{\min} \subseteq L^* \subseteq L^{\max}$ .

**Теорема 10.** Пусть  $L^{\min}$  и  $L^{\max}$  - текущие нижняя и верхняя оценки, а  $l \in L^{\max} \setminus L^{\min}$  - некоторая еще не определенная линия.

1) Если выполняется неравенство

$$\widetilde{W}(L^{\min} \cup (L_-(l) \cap L^{\max}) \cup \{l\}) \geq \widetilde{W}(L^{\min} \cup (L_-(l) \cap L^{\max})), \quad (1.29)$$

то к нижней оценке  $L^{\min}$  может быть добавлена линия  $l$ :  $L_r^{\min} = L^{\min} \cup \{l\}$ , где  $L_r^{\min}$  - скорректированная нижняя оценка.

2) Если выполняется неравенство

$$\widetilde{W}(L^{\min} \cup (L_+(l) \cap L^{\max})) \geq \widetilde{W}(L^{\min} \cup (L_+(l) \cap L^{\max}) \cup \{l\}), \quad (1.30)$$

то из верхней оценки  $L^{\max}$  может быть исключена линия  $l$ :  $L_r^{\max} = L_1^{\max} \setminus \{l\}$ , где

$L_r^{\max}$  - скорректированная верхняя оценка.

**Доказательство.** Докажем пункт 1. Пункт 2 доказывается аналогично. Пусть выполняется указанное неравенство. Достаточно показать, что для любого  $S \subseteq L^{\max} \setminus L^{\min}$  верно соотношение

$$\widetilde{W}(L^{\min} \cup S \cup \{l\}) \geq \widetilde{W}(L^{\min} \cup S). \quad (1.31)$$

Если  $l \in S$ , то (1.31), очевидно, выполняется. Пусть  $l \notin S$ . Разобьем множество  $S$  на подмножества  $S_+ = L_+(l) \cap S$  и  $S_- = L_-(l) \cap S$ , тогда  $S = S_1 \cup S_2$ . Рассмотрим разность выражений из (1.31):

$$\begin{aligned} \widetilde{W}(L^{\min} \cup S \cup \{l\}) - \widetilde{W}(L^{\min} \cup S) &= \widetilde{W}(L^{\min} \cup S_- \cup S_+ \cup \{l\}) - \widetilde{W}(L^{\min} \cup S_- \cup S_+) \geq \\ &\geq \widetilde{W}(L^{\min} \cup (L_-(l) \cap L^{\max}) \cup \{l\}) - \widetilde{W}(L^{\min} \cup (L_-(l) \cap L^{\max})) \geq 0. \end{aligned}$$

Здесь использовались вложения  $S_+ \subseteq L_+(l)$ ,  $S_- \subseteq L_-(l)$ ,  $S_- \subseteq L^{\max}$ , теорема 5 и исходное неравенство. ■

**Определение 9.** Пусть  $L^{\min}$  и  $L^{\max}$  - текущие нижняя и верхняя оценки, а  $(l, r)$  - некоторая пара еще не определенных линий:  $l, r \in L^{\max} \setminus L^{\min}$ ,  $l \neq r$ .

Определим через  $l \Rightarrow r$  импликацию «если  $l$  содержится в оптимальном множестве  $L^*$ , то  $r$  также содержится в  $L^*$ », а через  $\setminus l \Rightarrow \setminus r$  - импликацию «если  $l$  не содержится в оптимальном множестве  $L^*$ , то  $r$  также не содержится в  $L^*$ ». Еще две импликации,  $l \Rightarrow \setminus r$  и  $\setminus l \Rightarrow r$ , определяются аналогично.

Справедливость импликаций устанавливает следующая теорема.

**Теорема 11.** Пусть  $L^{\min}$  и  $L^{\max}$  - текущие нижняя и верхняя оценки. Для любой пары еще не определенных линий  $(l, r)$ ,  $l, r \in L^{\max} \setminus L^{\min}$ ,  $l \neq r$ ,

1) импликация  $l \Rightarrow r$  выполняется, если

$$\widetilde{W}(L^{\min} \cup (L_-(r) \cap L^{\max}) \cup \{l, r\}) > \widetilde{W}(L^{\min} \cup (L_-(r) \cap L^{\max}) \cup \{l\}); \quad (1.32)$$

2) импликация  $\setminus l \Rightarrow \setminus r$  выполняется, если

$$\widetilde{W}(L^{\min} \cup (L_+(r) \cap L^{\max} \setminus \{l\})) > \widetilde{W}(L^{\min} \cup (L_+(r) \cap L^{\max} \setminus \{l\}) \cup \{r\}); \quad (1.33)$$

3) импликация  $l \Rightarrow \setminus r$  выполняется, если

$$\widetilde{W}(L^{\min} \cup (L_+(r) \cap L^{\max} \cup \{l\})) > \widetilde{W}(L^{\min} \cup (L_+(r) \cap L^{\max} \cup \{l, r\})); \quad (1.34)$$

4) импликация  $\setminus l \Rightarrow r$  выполняется, если

$$\widetilde{W}(L^{\min} \cup (L_-(r) \cap L^{\max} \setminus \{l\}) \cup \{r\}) > \widetilde{W}(L^{\min} \cup (L_-(r) \cap L^{\max} \setminus \{l\})). \quad (1.35)$$

Доказательство этого утверждения основано на применении теоремы 5 и аналогично доказательству теоремы 10.

### 1.6.2.1. Алгоритм

Опишем **алгоритм** поиска оптимального множества расширяемых линий. В нем используются следующие переменные:  $L^{\min}$ ,  $L^{\max}$  - текущие нижняя и верхняя оценки оптимального множества  $L^*$ ;  $\bar{L}$  - множество еще не определенных линий.

**Шаг А. Инициализация переменных.** Выполняются присваивания:  $L^{\min} = \emptyset$ ,  $L^{\max} = L$ ,  $\bar{L} = L$ .

**Шаг В1. Включение и исключение неопределенных линий.** Для каждой неопределенной линии  $l \in \bar{L}$  проверяются неравенства (1.29), (1.30). В случае выполнения одного из них:

- 1) корректируются текущие оценки  $L^{\min}$ ,  $L^{\max}$  согласно теореме 10 (если выполняются оба неравенства, то корректировка осуществляется согласно одному из двух возможных вариантов);
- 2) выполняется присваивание  $\bar{L} = \bar{L} \setminus \{l\}$ ;
- 3) данный шаг повторяется с начала.

**Шаг В2. Проверка на завершение.** Если  $L^{\min} = L^{\max}$ , то оптимальное множество равно  $L^{\min}$ , алгоритм завершает работу.

**Шаг С. Построение множества импликаций.**

- 1) Для текущих оценок  $L^{\min}$ ,  $L^{\max}$  вычисляется множество справедливых импликаций  $I$  согласно теореме 11, для чего для каждой пары неопределенных линий  $(l, r) \in \bar{L} \times \bar{L}$ ,  $l \neq r$ , проверяются импликации  $l \Rightarrow r$ ,  $\setminus l \Rightarrow \setminus r$  (если  $l$  и  $r$  взаимно дополнительные) или  $l \Rightarrow \setminus r$ ,  $\setminus l \Rightarrow r$  (если  $l$  и  $r$  взаимно конкурентны). При этом в множество  $I$  помимо самих

справедливых импликаций добавляются эквивалентные им импликации. Например, для  $l \Rightarrow r$  такой является  $\setminus r \Rightarrow \setminus l$ .

- 2) Вычисляется множество  $\bar{I}$  - транзитивное замыкание множества  $I$ , куда дополнительно включаются все импликации, следующие из  $I$ . Например, если  $I = \{1 \Rightarrow 3, \setminus 3 \Rightarrow \setminus 1, 3 \Rightarrow \setminus 5, 5 \Rightarrow \setminus 3\}$ , то  $\bar{I} = I \cup \{1 \Rightarrow \setminus 5, 5 \Rightarrow \setminus 1\}$ .

Стоит отметить, что для пары  $(l, r)$  нет смысла проверять неравенства (1.32, 1.33), если  $l$  и  $r$  взаимно конкурентны, и (1.34, 1.35), если  $l$  и  $r$  взаимно дополнительные, поскольку они заведомо не выполняются (в противном случае линия  $r$  уже была бы определена на шаге В1).

#### Шаг D. Разбиение задачи на две подзадачи.

- 1) Для каждой неопределенной линии  $l \in \bar{L}$  последовательно вычисляются следующие величины:

- 1.1)  $F_{in}^{in}(l)$  и  $F_{in}^{ex}(l)$  - множества заведомо расширяемых и заведомо не расширяемых линий при расширении линии  $l$ :

$$F_{in}^{in}(l) = \{r \in \bar{L} \mid (l \Rightarrow r) \in \bar{I}\} \cup \{l\}, \quad F_{in}^{ex}(l) = \{r \in \bar{L} \mid (l \Rightarrow \setminus r) \in \bar{I}\};$$

при этом если  $F_{in}^{in}(l) \cap F_{in}^{ex}(l) \neq \emptyset$ , то получается противоречие, т.е. отсутствие расширения линии  $l$  заведомо оптимально;

- 1.2)  $F_{ex}^{in}(l)$  и  $F_{ex}^{ex}(l)$  - множества заведомо расширяемых и заведомо не расширяемых линий при отсутствии расширения линии  $l$ :

$$F_{ex}^{in}(l) = \{r \in \bar{L} \mid (\setminus l \Rightarrow r) \in \bar{I}\}, \quad F_{ex}^{ex}(l) = \{r \in \bar{L} \mid (\setminus l \Rightarrow \setminus r) \in \bar{I}\} \cup \{l\};$$

при этом если  $F_{ex}^{in}(l) \cap F_{ex}^{ex}(l) \neq \emptyset$ , то получается противоречие, т.е. расширение линии  $l$  заведомо оптимально;

- 1.3)  $F_{in}(l) = F_{in}^{in}(l) \cup F_{in}^{ex}(l)$ ,  $F_{ex}(l) = F_{ex}^{in}(l) \cup F_{ex}^{ex}(l)$  - множества заведомо определяемых линий при расширении и отсутствии расширения линии  $l$ ;

- 1.4)  $c_{in}(l)$  и  $c_{ex}(l)$  - переборные сложности для измененных задач с расширением и отсутствием расширения линии  $l$ :

$$c_{in}(l) = \begin{cases} 2^{|\bar{L} \setminus F_{in}(l)|}, & F_{in}^{in}(l) \cap F_{in}^{ex}(l) = \emptyset, \\ 0, & F_{in}^{in}(l) \cap F_{in}^{ex}(l) \neq \emptyset, \end{cases}$$

$$c_{ex}(l) = \begin{cases} 2^{|\bar{L} \setminus F_{ex}(l)|}, & F_{ex}^{in}(l) \cap F_{ex}^{ex}(l) = \emptyset, \\ 0, & F_{ex}^{in}(l) \cap F_{ex}^{ex}(l) \neq \emptyset. \end{cases}$$

- 2) Находится неопределенная линия  $l^*$ , для которой суммарная переборная сложность двух измененных задач с расширением и отсутствием расширения этой линии минимальна:

$$l^* \in \text{Arg min}_{l \in \bar{L}} (c_{in}(l) + c_{ex}(l)).$$

- 3) Рассматриваются следующие два случая:

- 3.1) линия  $l^*$  расширяется, при этом к текущей нижней оценке добавляется множество  $F_{in}^{in}(l^*)$ , а из текущей верхней оценки вычитается множество  $F_{in}^{ex}(l^*)$ :

$$L^{\min} = L^{\min} \cup F_{in}^{in}(l^*), \quad L^{\max} = L^{\max} \setminus F_{in}^{ex}(l^*), \quad \bar{L} = \bar{L} \setminus F_{in}(l^*),$$

затем для скорректированных оценок запускается алгоритм, начиная с шага В1; пусть  $L_{in}^*$  - найденное оптимальное множество;

- 3.2) линия  $l^*$  не расширяется, при этом к текущей нижней оценке добавляется множество  $F_{ex}^{in}(l^*)$ , а из текущей верхней оценки вычитается множество  $F_{ex}^{ex}(l^*)$ :

$$L^{\min} = L^{\min} \cup F_{ex}^{in}(l^*), \quad L^{\max} = L^{\max} \setminus F_{ex}^{ex}(l^*), \quad \bar{L} = \bar{L} \setminus F_{ex}(l^*),$$

затем для скорректированных оценок запускается алгоритм, начиная с шага В1; пусть  $L_{ex}^*$  - найденное оптимальное множество.

- 4) Оптимальное множество расширяемых линий выбирается согласно

$$L^* \in \text{Arg max}_{R \in \{L_{in}^*, L_{ex}^*\}} \widetilde{W}(R).$$

Пункты 3 и 4 шага D выполняются в описанном виде, если  $F_{in}^{in}(l^*) \cap F_{in}^{ex}(l^*) = \emptyset$  и  $F_{ex}^{in}(l^*) \cap F_{ex}^{ex}(l^*) = \emptyset$ . Если же одно из этих соотношений неверно, то соответствующий случай не может быть оптимальным и не должен рассматриваться, а значит оптимальное множество расширяемых линий совпадает с найденным оптимальным множеством для единственного рассмотренного случая.

Корректность алгоритма следует из теорем 10-11. Выгода от использования множества импликаций и разбиения задачи на две подзадачи с использованием выбранной линии  $l^*$ , а не просто произвольной линии, особенно проявляется в случае присутствия на рын-

ке небольшого числа крупных производящих или потребляющих узлов, поскольку включение/исключение инцидентных им линий с бóльшей вероятностью позволит определить некоторые линии, в отличие от включения/исключения других линий. В целом смысл построения импликаций заключается в возможности заглянуть «на шаг вперед» ради выбора наилучшей линии для разбиения на подзадачи ценой решения  $O(|\bar{L}|^2)$  вспомогательных задач. Однако возможно и такое, что ни одна импликация не будет выполняться. Поэтому для улучшения качества алгоритма имеет смысл изначально экспертным способом отсортировать линии в порядке убывания их «значимости» и в случае неоднозначного выбора использовать для разбиения линию с бóльшим значением данного параметра.

### 1.6.2.2. Оценка среднестатистической сложности алгоритма

Для оценки среднестатистической сложности описанного алгоритма был проведен вычислительный эксперимент, аналогичный эксперименту для рынка типа «цепочка», с кусочно-линейными функциями предложения и спроса (1.23) и квадратичными функциями переменных затрат на увеличение пропускной способности (1.24).

Обозначим через  $p_i^0$  равновесную цену в узле  $i \in N$  в случае его изолированности (при нулевых пропускных способностях), а через  $\Delta p_i^0$  - разницу между равновесными ценами для изолированных узлов 0 и  $i$ :  $\Delta p_i^0 = p_0^0 - p_i^0$ ,  $i \in N \setminus \{0\}$ . Пусть  $p_{\min}^0 = \min_{i \in N} p_i^0$ . В итоге исходный рынок однозначно определяется следующими параметрами:  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $p_{\min}^0$ ,  $d_i^f$  ( $i \in N$ ),  $\Delta p_i^0$ ,  $Q_{\{i,0\}}^0$ ,  $e_{\{i,0\}}^t$ ,  $e_{\{i,0\}}^q$ ,  $E_{\{i,0\}}^f$  ( $i \in N \setminus \{0\}$ ). При этом равновесные цены  $p_i^0$ ,  $i \in N$ , находятся из системы

$$\begin{cases} p_0^0 - p_i^0 = \Delta p_i^0, & i \in N \setminus \{0\}, \\ \min_{i \in N} p_i^0 = p_{\min}^0, \end{cases}$$

а  $c_i = \frac{d_i^f}{p_i^0}$ ,  $i \in N$  (считаем, что  $p_{\min}^0 > 0$ ,  $d_i^f > 0 \forall i \in N$ ).

В ходе эксперимента параметры  $p_{\min}^0$ ,  $d_i^f$ ,  $|\Delta p_i^0|$ ,  $e_l^t$ ,  $e_l^q$ ,  $E_l^f$ , характеризующие задачу, генерировались случайно в соответствии с равномерным распределением (таблица 2), начальные пропускные способности  $Q_{\{i,0\}}^0$  брались равными 0, а для любого  $i \in N \setminus \{0\}$

$$\Delta p_i^0 = \begin{cases} |\Delta p_i^0|, & i \in N_1, \\ -|\Delta p_i^0|, & i \in N_2. \end{cases}$$

Таблица 2. Параметры вероятностных распределений величин  $p_{\min}^0$ ,  $d_i^f$ ,  $|\Delta p_i^0|$ ,  $e_i^t$ ,  $e_i^q$ ,  $E_i^f$  для рынка типа «звезда»

Параметр модели	Минимальное значение	Максимальное значение
$p_{\min}^0$	0 (не включая 0)	10
$d_i^f$	10	20
$ \Delta p_i^0 $	0	10
$e_i^t$	0	4
$e_i^q$	0	4
$E_i^f$	0	4

Чтобы рынок удовлетворял УИСП, в эксперименте для каждой линии  $\{i, 0\} \in L$  использовались модифицированные функции предельных транспортных затрат  $e_{i0}^{nex,m}(q_{i0})$  и  $e_{i0}^{ex,m}(q_{i0})$ : для  $i \in N_1$  вид модификации аналогичен (1.25, 1.26), а для  $i \in N_2$  - аналогичен (1.27, 1.28).

Число узлов  $|N|$  менялось от 3 до 51, причем число производящих узлов совпадало с числом потребляющих. Для каждого  $|N|$  генерировалось 100 задач, которые решались описанным алгоритмом. На рисунке 20 представлена зависимость числа решаемых вспомогательных задач (1.6) от количества узлов  $|N|$ .

### число решаемых вспомогательных задач

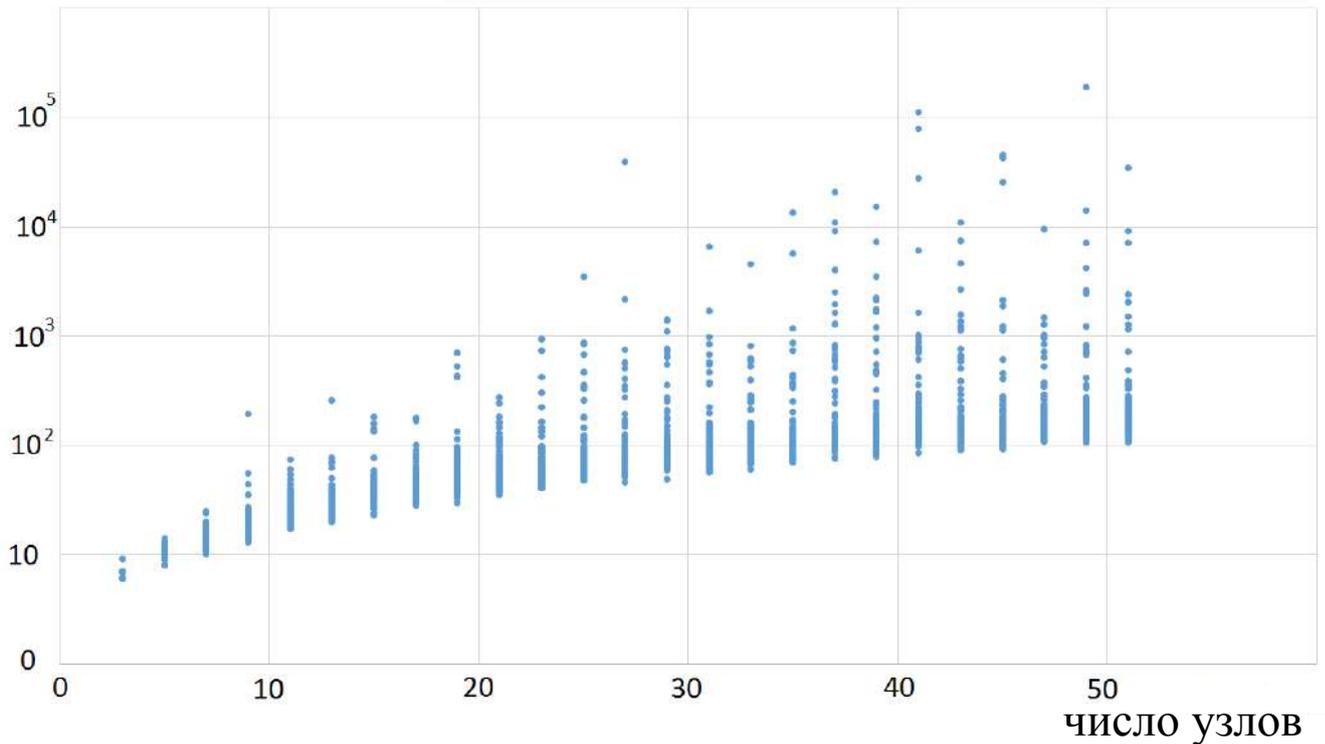


Рис. 20. Результаты численного эксперимента для рынка типа «звезда». Каждой точке соответствует решенная задача

Обозначим среднее число решаемых вспомогательных задач через  $y_{av}$ . Получившаяся зависимость  $y_{av}$  от  $|N|$  представлена на рисунке 21. Методом наименьших квадратов была получена следующая аппроксимация среднего числа решаемых вспомогательных задач:  $\bar{y}_{av}(|N|) = 0.842 |N|^2 - 14.776 |N| + 54.187$  (рисунок 22). Соответствующий коэффициент детерминации  $R^2$  равен 0.496.

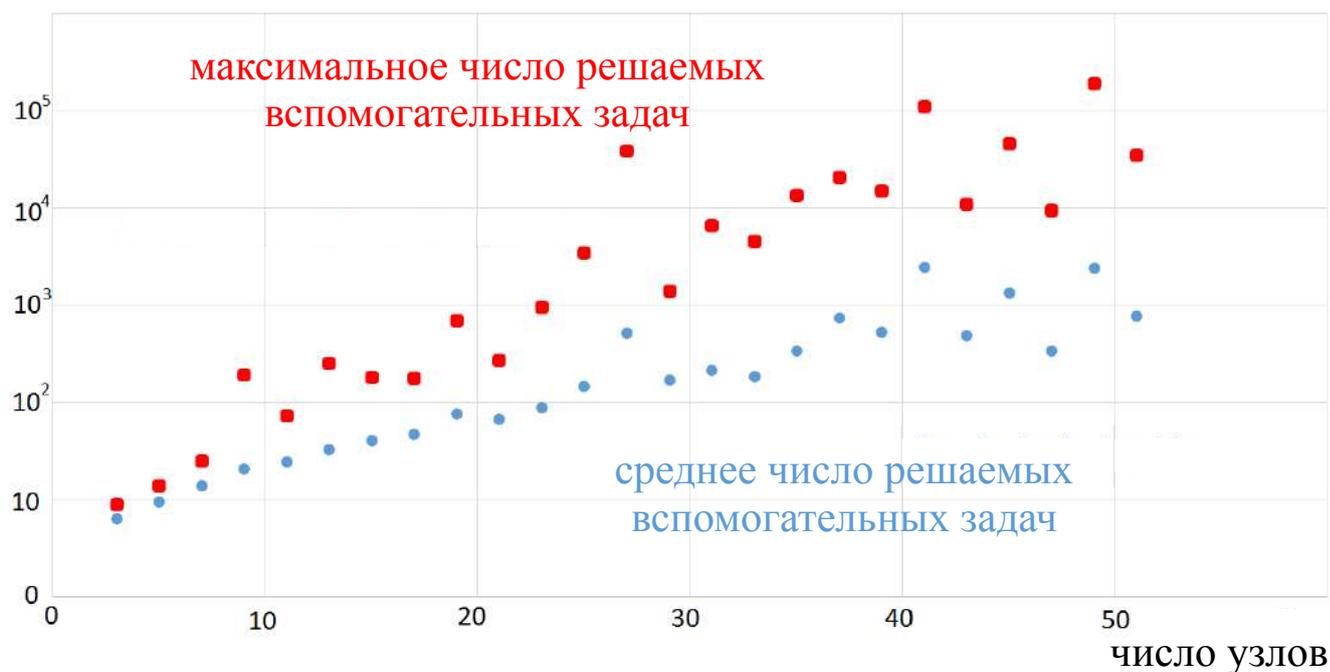


Рис. 21. Средние (снизу) и максимальные (сверху) числа решаемых вспомогательных задач для рынка типа «звезда»

### среднее число решаемых вспомогательных задач

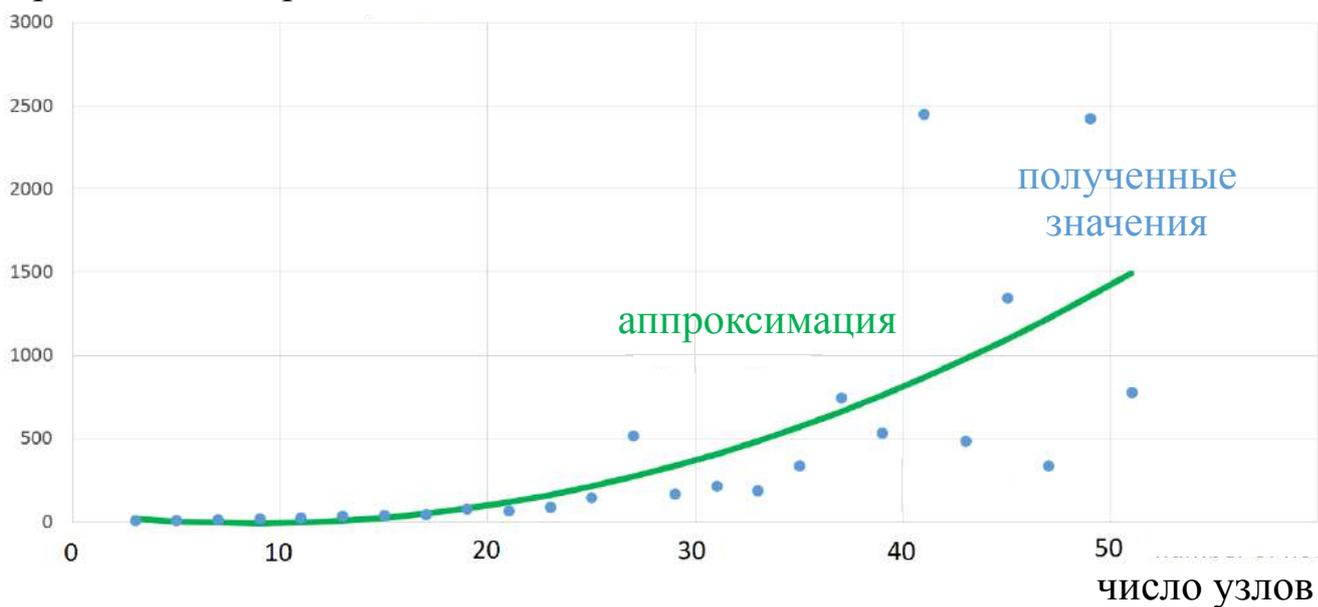


Рис. 22. Аппроксимация среднего числа решаемых вспомогательных задач для рынка типа «звезда»

Таким образом, среднее число решаемых вспомогательных задач (1.6) уже не так хорошо аппроксимируется квадратичной функцией, как для рынка типа «цепочка», что можно объяснить меньшим числом сгенерированных задач (100 задач для каждого числа узлов вме-

сто 1 000). Однако из рисунков видно, что исходная задача (1.5) для данного типа рынка также может решаться за разумное время.

### 1.6.3. Рынок типа «звезда-цепочка»

Теперь рассмотрим рынок типа «звезда-цепочка», который является обобщением рынков из пунктов 1.6.1. и 1.6.2. (рисунок 23). Этот рынок получается из рынка типа «звезда» присоединением к центральному узлу 0 рынка типа «цепочка». Разобьем множество линий  $L$  на подмножества  $L^s = \{\{0, i\} \in L \mid \text{deg}(i) = 1\}$  линий части «звезда» и  $L^c = L \setminus L^s$  линий части «цепочка». Здесь  $\text{deg}(i)$  - степень<sup>16</sup> узла  $i$ .

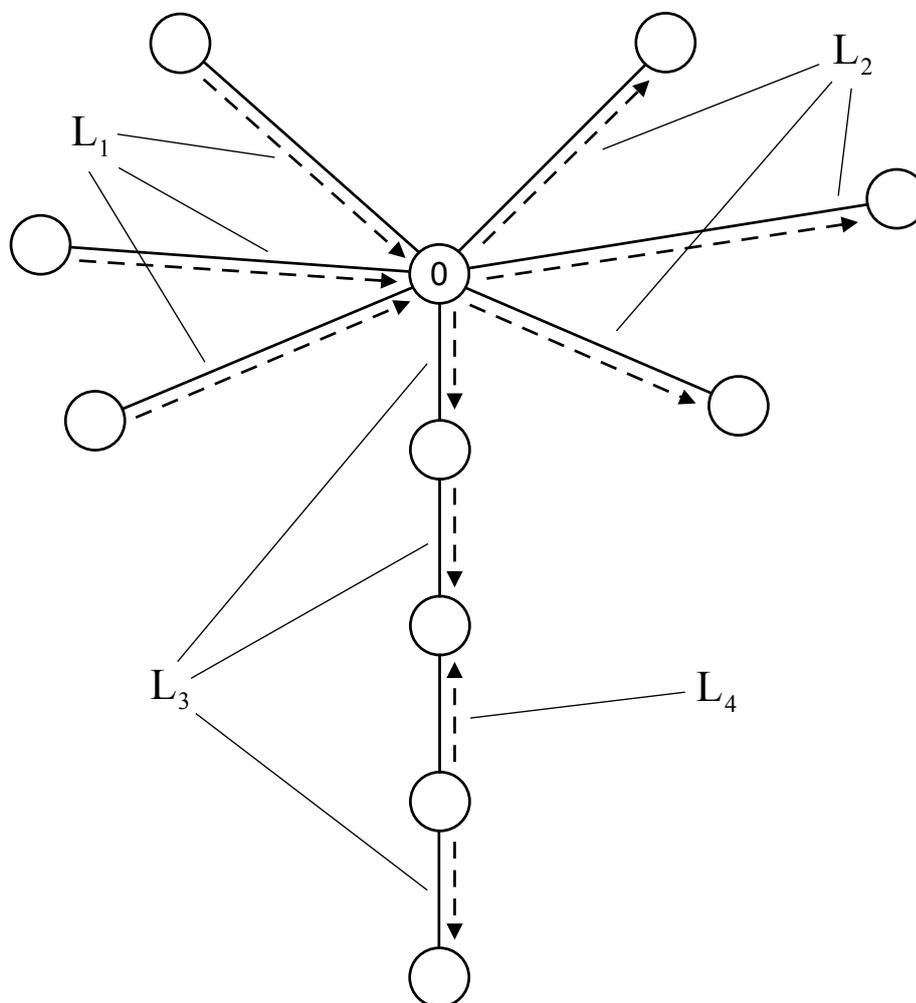


Рис. 23. Пример рынка типа «звезда-цепочка»

Линии части «звезда» разобьем на подмножества  $L_1$  с направлениями к центрально-

<sup>16</sup> Степень узла - это число инцидентных ему линий.

му узлу (экспортирующие) и  $L_2$  с направлениями от центрального узла (импортирующие). Линии части «цепочка», в свою очередь, разобьем на подмножества  $L_3$  с направлениями от центрального узла и  $L_4$  с направлениями к центральному узлу. Отношение двух произвольных линий  $l$  и  $r$ ,  $l \neq r$ , определяется согласно таблице 3.

Таблица 3. Отношение двух произвольных линий  $l$  и  $r$  для рынка типа «звезда-цепочка»,  $l \neq r$

	$r \in L_1$	$r \in L_2$	$r \in L_3$	$r \in L_4$
$l \in L_1$	конкурентны	дополнительны	дополнительны	конкурентны
$l \in L_2$	дополнительны	конкурентны	конкурентны	дополнительны
$l \in L_3$	дополнительны	конкурентны	дополнительны	конкурентны
$l \in L_4$	конкурентны	дополнительны	конкурентны	дополнительны

Алгоритм поиска оптимального множества расширяемых линий  $L^*$  работает с нижней  $L^{\min}$  и верхней  $L^{\max}$  оценками множества  $L^*$  и практически полностью совпадает с соответствующим алгоритмом для рынка типа «звезда». Отличие заключается лишь в одном дополнительном шаге, на котором производятся попытки определения нескольких линий из части «цепочка». Стоит отметить, что теоремы 10 и 11 остаются верны для данного типа рынка. Для любого  $R \subseteq L$  обозначим  $L_k(R) = L_k \cap R$ ,  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

**Теорема 12.** Пусть  $L^{\min}$  и  $L^{\max}$  - текущие нижняя и верхняя оценки. Обозначим  $L_k^{\min} = L_k(L^{\min})$ ,  $L_k^{\max} = L_k(L^{\max})$ ,  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Пусть  $S_3 \subseteq L_3^{\max} \setminus L_3^{\min}$ ,  $S_4 \subseteq L_4^{\max} \setminus L_4^{\min}$ ,  $S = S_3 \cup S_4$  - некоторые множества неопределенных линий из части «цепочка».

1) Если выполняется неравенство

$$\widetilde{W} \left( (L_1^{\min} \cup L_3^{\min} \cup S_3) \cup (L_2^{\max} \cup L_4^{\max} \setminus S_4) \right) \geq \widetilde{W} \left( (L_1^{\min} \cup L_3^{\min}) \cup (L_2^{\max} \cup L_4^{\max}) \right)$$

и для каждого непустого множества  $R \subset S$

$$\begin{aligned} \widetilde{W} \left( (L_1^{\min} \cup L_3^{\min} \cup L_3(R)) \cup (L_2^{\max} \cup L_4^{\max} \setminus L_4(R)) \right) < \\ < \widetilde{W} \left( (L_1^{\min} \cup L_3^{\min}) \cup (L_2^{\max} \cup L_4^{\max}) \right), \end{aligned} \quad (1.36)$$

то к нижней оценке  $L^{\min}$  может быть добавлено множество  $S_3$ , а из верхней оценки  $L^{\max}$  может быть вычтено множество  $S_4$ :  $L_r^{\min} = L^{\min} \cup S_3$ ,  $L_r^{\max} = L^{\max} \setminus S_4$ , где  $L_r^{\min}$ ,  $L_r^{\max}$  - скорректированные оценки.

2) Если выполняется неравенство

$$\widetilde{W}((L_1^{\max} \cup L_3^{\max} \setminus S_3) \cup (L_2^{\min} \cup L_4^{\min} \cup S_4)) \geq \widetilde{W}((L_1^{\max} \cup L_3^{\max}) \cup (L_2^{\min} \cup L_4^{\min}))$$

и для каждого непустого множества  $R \subset S$

$$\begin{aligned} \widetilde{W}((L_1^{\max} \cup L_3^{\max} \setminus L_3(R)) \cup (L_2^{\min} \cup L_4^{\min} \cup L_4(R))) < \\ < \widetilde{W}((L_1^{\max} \cup L_3^{\max}) \cup (L_2^{\min} \cup L_4^{\min})), \end{aligned} \quad (1.37)$$

то из верхней оценки  $L^{\max}$  может быть вычтено множество  $S_3$ , а к нижней оценке  $L^{\min}$  может быть добавлено множество  $S_4$ :  $L_r^{\max} = L^{\max} \setminus S_3$ ,  $L_r^{\min} = L^{\min} \cup S_4$ , где  $L_r^{\max}$ ,  $L_r^{\min}$  - скорректированные оценки.

Доказательство этого утверждения основано на применении теоремы 5 и аналогично доказательству теоремы 9.

### 1.6.3.1. Алгоритм

Пусть  $M$  - некоторое максимальное число одновременно определяемых линий, которое является параметром алгоритма. **Алгоритм** поиска оптимального множества расширяемых линий для данного типа рынка получается из алгоритма для рынка типа «звезда» добавлением следующего шага между шагами В1 и В2.

**Шаг В1.2. Включение и исключение нескольких неопределенных линий из части «цепочка».** Рассматриваются всевозможные подмножества  $S$  множества  $(L_3(L^{\max}) \setminus L_3(L^{\min})) \cup (L_4(L^{\max}) \setminus L_4(L^{\min}))$ , для которых выполняется  $2 \leq |S| \leq M$ , в порядке увеличения  $|S|$ : сначала рассматриваются пары линий, затем тройки и т.д. Для каждого такого  $S$ :

- 1) вычисляются величины  $S_3 = L_3(S)$ ,  $S_4 = L_4(S)$ ,  $L_k^{\min} = L_k(L^{\min})$ ,  $L_k^{\max} = L_k(L^{\max})$ ,  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ ;
- 2) проверяется неравенство

$$\widetilde{W}((L_1^{\min} \cup L_3^{\min} \cup S_3) \cup (L_2^{\max} \cup L_4^{\max} \setminus S_4)) \geq \widetilde{W}((L_1^{\min} \cup L_3^{\min}) \cup (L_2^{\max} \cup L_4^{\max})),$$

в случае успеха без рассмотрения оставшихся подмножеств выполняются присваивания

$L^{\min} = L^{\min} \cup S_3$ ,  $L^{\max} = L^{\max} \setminus S_4$ ,  $\bar{L} = \bar{L} \setminus S$ , после чего происходит возврат к шагу B1;

3) проверяется неравенство

$$\widetilde{W} \left( (L_1^{\max} \cup L_3^{\max} \setminus S_3) \cup (L_2^{\min} \cup L_4^{\min} \cup S_4) \right) \geq \widetilde{W} \left( (L_1^{\max} \cup L_3^{\max}) \cup (L_2^{\min} \cup L_4^{\min}) \right),$$

в случае успеха без рассмотрения оставшихся подмножеств выполняются присваивания  $L^{\max} = L^{\max} \setminus S_3$ ,  $L^{\min} = L^{\min} \cup S_4$ ,  $\bar{L} = \bar{L} \setminus S$ , после чего происходит возврат к шагу B1.

Заметим, что при рассмотрении множества  $S$  на шаге B1.2 алгоритма для любого непустого  $R \subset S$  неравенства (1.36, 1.37) выполняются, поскольку иначе линии из множества  $R$  были бы уже определены (т.к. множество  $R$  было рассмотрено до  $S$  ранее на данном шаге), а в этом случае множество  $S$  не рассматривалось бы. Это означает, что данный шаг корректен.

### 1.6.3.2. Оценка среднестатистической сложности алгоритма

Для оценки среднестатистической сложности описанного алгоритма был проведен вычислительный эксперимент, аналогичный экспериментам в пунктах 1.6.1. и 1.6.2., с кусочно-линейными функциями предложения и спроса (1.23) и квадратичными функциями переменных затрат на увеличение пропускной способности (1.24).

Обозначим через  $p_i^0$  равновесную цену в узле  $i \in N$  в случае его изолированности (при нулевых пропускных способностях), а через  $\Delta p_{ij}^0$  - разницу между равновесными ценами для изолированных узлов  $i$  и  $j$ :  $\Delta p_{ij}^0 = p_j^0 - p_i^0$ ,  $\{i, j\} \in L$ . Пусть  $p_{\min}^0 = \min_{i \in N} p_i^0$ . В итоге исходный рынок однозначно определяется следующими параметрами:  $L_1 \cup L_2$ ,  $L_3 \cup L_4$ ,  $p_{\min}^0$ ,  $c_i$  ( $i \in N$ ),  $\Delta p_{ij}^0$ ,  $Q_{\{i,j\}}^0$ ,  $e_{\{i,j\}}^t$ ,  $e_{\{i,j\}}^q$ ,  $E_{\{i,j\}}^f$  ( $\{i, j\} \in L$ ). При этом величины  $p_i^0$ ,  $i \in N$ , находятся из системы

$$\begin{cases} p_j^0 - p_i^0 = \Delta p_{ij}^0, & \{i, j\} \in L, \\ \min_{i \in N} p_i^0 = p_{\min}^0, \end{cases}$$

а  $d_i^f = c_i \cdot p_i^0$ ,  $i \in N$  (считаем, что  $p_{\min}^0 > 0$ ,  $c_i > 0 \forall i \in N$ ). Чтобы не привязываться к одному способу генерирования параметров, в данном эксперименте было решено немного изменить этот способ, случайно выбирая коэффициенты  $c_i$  вместо  $d_i^f$  (это допустимо, поскольку целью проведения вычислительных экспериментов не является сравнение среднестатистических эффективностей для разных типов рынков).

В ходе эксперимента параметры  $p_{\min}^0$ ,  $c_i$ ,  $|\Delta p_{ij}^0|$ ,  $e_{\{i,j\}}^t$ ,  $e_{\{i,j\}}^q$ ,  $E_{\{i,j\}}^f$  генерировались слу-

чайно в соответствии с равномерным распределением (таблица 4), начальные пропускные способности  $Q_{\{i,j\}}^0$  брались равными 0, число линий части «звезда» совпадало с числом линий части «цепочка» ( $|L_1| + |L_2| = |L_3| + |L_4|$ ), в части «звезда» число экспортирующих линий совпадало с числом импортирующих ( $|L_1| = |L_2|$ ), для каждой линии части «цепочка» направление выбиралось случайно с вероятностями  $(1/2, 1/2)$ , а для любого  $\{i, j\} \in L$  знак  $\Delta p_{ij}^0$  соответствовал выбранным направлениям:

$$\Delta p_{ij}^0 = \begin{cases} |\Delta p_{ij}^0|, & \text{направление от узла } i \text{ к узлу } j, \\ -|\Delta p_{ij}^0|, & \text{направление от узла } j \text{ к узлу } i. \end{cases}$$

Таблица 4. Параметры вероятностных распределений величин  $p_{\min}^0$ ,  $c_i$ ,  $|\Delta p_{ij}^0|$ ,  $e_{\{i,j\}}^t$ ,  $e_{\{i,j\}}^q$ ,  $E_{\{i,j\}}^f$  для рынка типа «звезда-цепочка»

Параметр модели	Минимальное значение	Максимальное значение
$p_{\min}^0$	0 (не включая 0)	10
$c_i$	1	5
$ \Delta p_{ij}^0 $	0	10
$e_{\{i,j\}}^t$	0	4
$e_{\{i,j\}}^q$	0	4
$E_{\{i,j\}}^f$	0	4

Чтобы рынок удовлетворял УИСП, в эксперименте для каждой линии  $\{i, j\} \in L$  использовались модифицированные функции предельных транспортных затрат  $e_{ij}^{nex,m}(q_{ij})$  и  $e_{ij}^{ex,m}(q_{ij})$ : в случае выбранного направления от узла  $i$  к узлу  $j$  вид модификации аналогичен (1.25, 1.26), в противном случае - аналогичен (1.27, 1.28).

Число узлов  $|N|$  менялось от 5 до 73. Для каждого  $|N|$  генерировалось 10 000 задач, которые решались описанным алгоритмом с  $M = 10$ . Обозначим среднее число решаемых вспомогательных задач через  $y_{av}$ . Получившаяся зависимость  $y_{av}$  от  $|N|$  представлена на рисунке 24. Методом наименьших квадратов была получена следующая аппроксимация среднего числа решаемых вспомогательных задач:  $\bar{y}_{av}(|N|) = 0.0175 |N|^2 + 3.4262 |N| - 3.3184$  (рисунок 25). Соответствующий коэффициент детерминации  $R^2$  равен 0.9998.

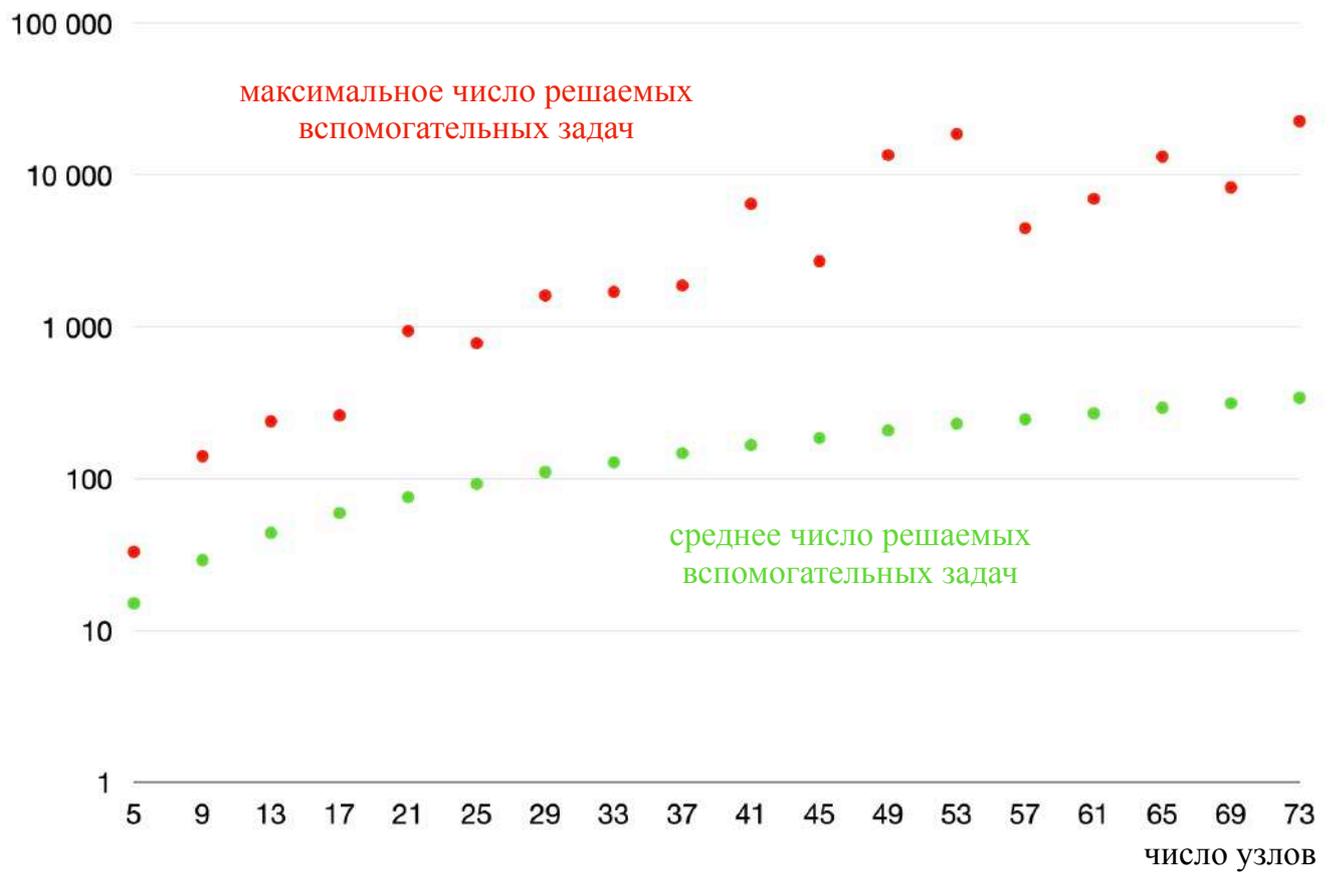


Рис. 24. Средние (снизу) и максимальные (сверху) числа решаемых вспомогательных задач для рынка типа «звезда-цепочка»

среднее число решаемых вспомогательных задач

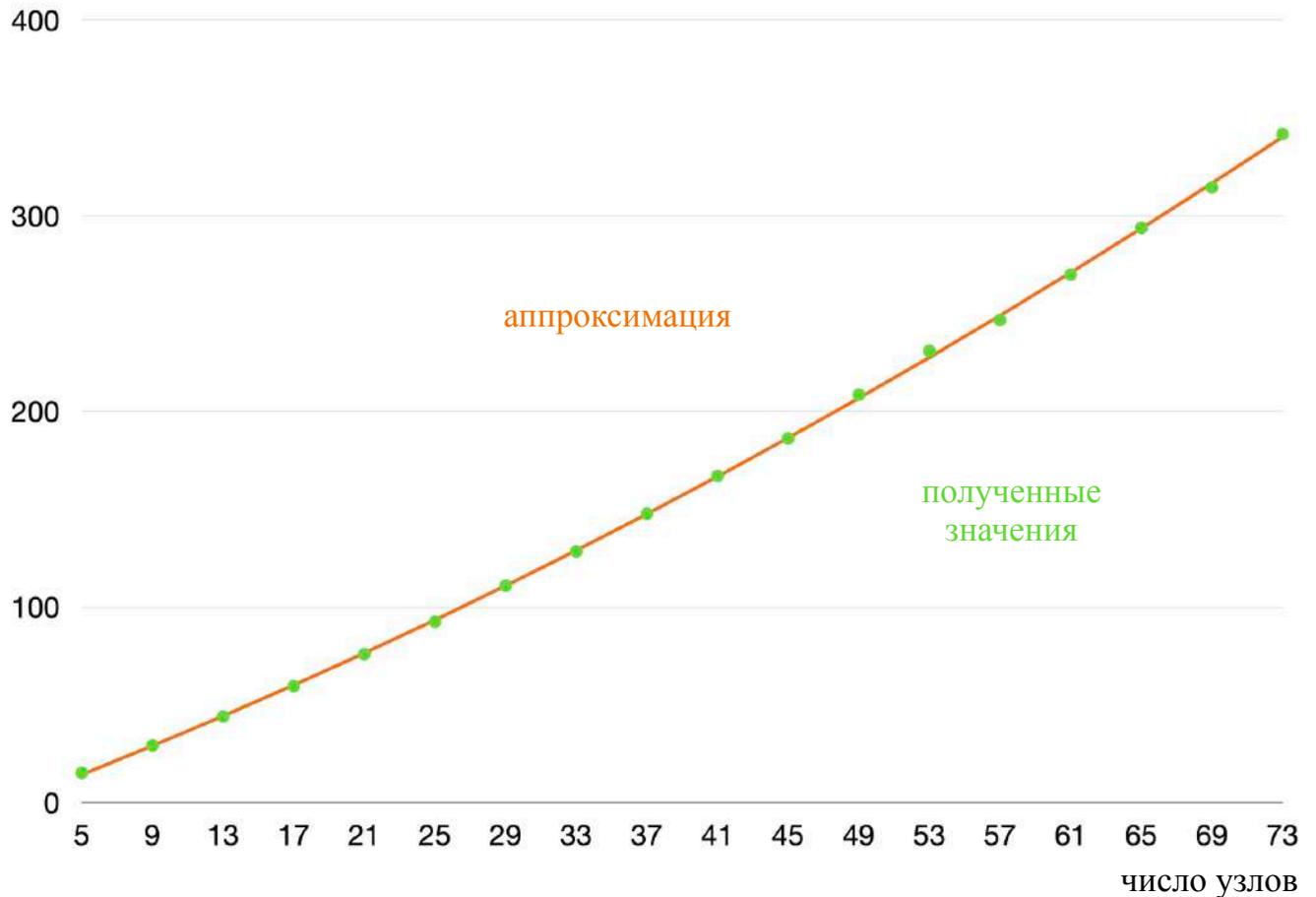


Рис. 25. Аппроксимация среднего числа решаемых вспомогательных задач для рынка типа «звезда-цепочка»

Из рисунков видно, что среднее число решаемых вспомогательных задач (1.6) очень хорошо аппроксимируется полученной квадратичной функцией. Такую высокую точность по сравнению с аппроксимациями из пунктов 1.6.1. и 1.6.2. можно объяснить, во-первых, бóльшим числом сгенерированных задач (10 000 задач для каждого числа узлов вместо 1 000 и 100 соответственно), во-вторых, немного измененным экспериментом.

#### 1.6.4. Рынок типа «дерево»

В магистерской диссертации Силаева И. И. [56] рассматривается рынок общего вида «дерево», для которого описывается алгоритм поиска оптимального множества расширяемых линий  $L^{*17}$ . Этот алгоритм является обобщением алгоритма для рынка типа «звезда» (см.

<sup>17</sup> Результаты, описанные в этом пункте, не принадлежат автору данной работы и приводятся для полноты изложения.

пункт 1.6.2). Для рынка типа «дерево» остаются верны теоремы 10 и 11.

Разобьем множество всех линий  $L$  на минимальное число непересекающихся подмножеств  $L_1, \dots, L_K$  таким образом, чтобы

- 1) каждое подмножество  $L_k$  вместе с инцидентными узлами образовывали рынок типа «цепочка» (т.е. связный рынок, в котором степень каждого узла не превосходит 2);
- 2) для любых двух различных подмножеств  $L_{k_1}$  и  $L_{k_2}$ ,  $k_1 \neq k_2$ , соответствующие подрынки могли пересекаться только концевыми узлами.

На рисунке 26 показан пример такого разбиения. Разобьем каждое множество  $L_k$ ,  $k \in \{1, \dots, K\}$ , на два подмножества  $L_k^1, L_k^2$  в соответствии с направлениями равновесных потоков (направления равновесных потоков совпадают, если линии принадлежат одному и тому же подмножеству, и противоположны в противном случае). Для любых  $m \in \{1, 2\}$  и  $k \in \{1, \dots, K\}$  множество  $L_k^m$  обладает следующим свойством:  $\forall l, r \in L_k^m, l \neq r$ , справедливы равенства  $L_+(l) \cup \{l\} = L_+(r) \cup \{r\}$ ,  $L_-(l) = L_-(r)$ . Обозначим через  $L_-(L_k^1), L_-(L_k^2)$  множества конкурентных линий для линий из множеств  $L_k^1$  и  $L_k^2$  соответственно. Для любых  $k \in \{1, \dots, K\}$ ,  $R \subseteq L$  обозначим  $L_k^1(R) = L_k^1 \cap R$ ,  $L_k^2(R) = L_k^2 \cap R$ .

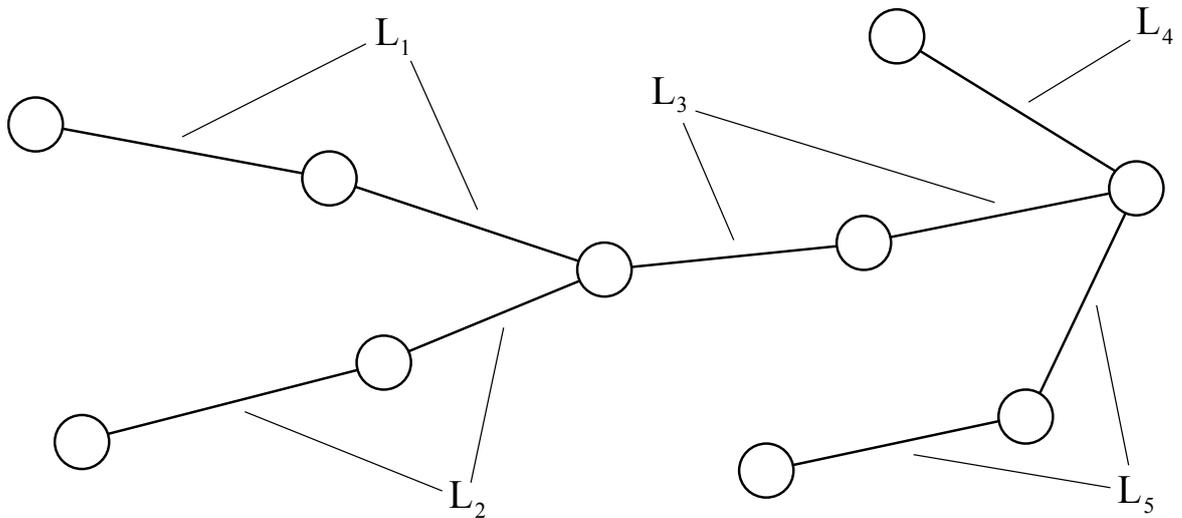


Рис. 26. Пример рынка типа «дерево»

В отличие от рынка типа «звезда-цепочка», рынок типа «дерево» может содержать несколько частей «цепочка», для каждой из которых может быть применен аналог теоремы 12, позволяющий одновременно определять несколько линий при выполнении соответствующих неравенств. Приведем соответствующее утверждение.

**Теорема 13.** Пусть  $L^{\min}$  и  $L^{\max}$  - текущие нижняя и верхняя оценки, а  $k \in \{1, \dots, K\}$ . Пусть  $S_k^1 \subseteq (L^{\max} \setminus L^{\min}) \cap L_k^1$ ,  $S_k^2 \subseteq (L^{\max} \setminus L^{\min}) \cap L_k^2$ ,  $S_k = S_k^1 \cup S_k^2$  - некоторые множества неопределенных линий, входящих в  $L_k$ .

1) Если выполняется неравенство

$$\widetilde{W}((L^{\min} \cup S_k^1) \cup (L_-(L_k^1) \cap L^{\max} \setminus S_k^2)) \geq \widetilde{W}(L^{\min} \cup (L_-(L_k^1) \cap L^{\max})) \quad (1.38)$$

и для каждого непустого множества  $R \subset S_k$

$$\begin{aligned} \widetilde{W}((L^{\min} \cup L_k^1(R)) \cup (L_-(L_k^1) \cap L^{\max} \setminus L_k^2(R))) < \\ < \widetilde{W}(L^{\min} \cup (L_-(L_k^1) \cap L^{\max})), \end{aligned}$$

то к нижней оценке  $L^{\min}$  может быть добавлено множество  $S_k^1$ , а из верхней оценки  $L^{\max}$  может быть вычтено множество  $S_k^2$ :  $L_r^{\min} = L^{\min} \cup S_k^1$ ,  $L_r^{\max} = L^{\max} \setminus S_k^2$ , где  $L_r^{\min}$ ,  $L_r^{\max}$  - скорректированные оценки.

2) Если выполняется неравенство

$$\widetilde{W}((L^{\min} \cup S_k^2) \cup (L_-(L_k^2) \cap L^{\max} \setminus S_k^1)) \geq \widetilde{W}(L^{\min} \cup (L_-(L_k^2) \cap L^{\max})) \quad (1.39)$$

и для каждого непустого множества  $R \subset S_k$

$$\begin{aligned} \widetilde{W}((L^{\min} \cup L_k^2(R)) \cup (L_-(L_k^2) \cap L^{\max} \setminus L_k^1(R))) < \\ < \widetilde{W}(L^{\min} \cup (L_-(L_k^2) \cap L^{\max})), \end{aligned}$$

то из верхней оценки  $L^{\max}$  может быть вычтено множество  $S_k^1$ , а к нижней оценке  $L^{\min}$  может быть добавлено множество  $S_k^2$ :  $L_r^{\max} = L^{\max} \setminus S_k^1$ ,  $L_r^{\min} = L^{\min} \cup S_k^2$ , где  $L_r^{\max}$ ,  $L_r^{\min}$  - скорректированные оценки.

Пусть  $M$  - некоторое максимальное число одновременно определяемых линий, которое является параметром алгоритма. **Алгоритм** поиска оптимального множества расширяемых линий для данного типа рынка получается из алгоритма для рынка типа «звезда» добавлением следующего шага между шагами В1 и В2.

**Шаг В1.2. Включение и исключение нескольких неопределенных линий из одной части «цепочка».** Рассматриваются всевозможные множества неопределенных линий  $S \subseteq L^{\max} \setminus L^{\min}$  такие, что  $2 \leq |S| \leq M$  и  $\exists k \in \{1, \dots, K\}$ :  $S \subseteq L_k$ , в порядке увеличения  $|S|$ : сначала рассматриваются пары линий, затем тройки и т.д. Для каждого такого  $S$  и соответствующего  $k$ :

1) вычисляются величины  $S_k^1 = L_k^1(S)$ ,  $S_k^2 = L_k^2(S)$ ;

- 2) проверяется неравенство (1.38), в случае успеха без рассмотрения оставшихся подмножеств выполняются присваивания  $L^{\min} = L^{\min} \cup S_k^1$ ,  $L^{\max} = L^{\max} \setminus S_k^2$ ,  $\bar{L} = \bar{L} \setminus S$ , после чего происходит возврат к шагу B1;
- 3) проверяется неравенство (1.39), в случае успеха без рассмотрения оставшихся подмножеств выполняются присваивания  $L^{\max} = L^{\max} \setminus S_k^1$ ,  $L^{\min} = L^{\min} \cup S_k^2$ ,  $\bar{L} = \bar{L} \setminus S$ , после чего происходит возврат к шагу B1.

Корректность данного шага поясняется так же, как и для рынка типа «звезда-цепочка». Для оценки среднестатистической сложности описанного алгоритма был проведен вычислительный эксперимент, аналогичный эксперименту в пункте 1.6.3. Для каждого числа узлов генерировалась 1 000 задач. В результате эксперимента была получена следующая линейная аппроксимация среднего числа решаемых вспомогательных задач в зависимости от числа узлов в рынке:  $\bar{y}_{av}(|N|) = 3.6127 |N| - 4.3794$ . Соответствующий коэффициент детерминации  $R^2$  равен 0.9999.

### 1.6.5. Сравнение алгоритмов для различных типов рынков

Если сравнивать рассмотренные типы рынков в плане возможностей алгоритмов, то важно отметить следующую особенность рынков, которые содержат в себе части «цепочка». Для каждой «цепочки» множество принадлежащих ей линий разбивается на 2 класса в соответствии с направлениями равновесных потоков, а любая линия вне этой «цепочки» является дополнительной для всех линий одного из данных классов и конкурентной для всех линий другого класса. Именно эти свойства объясняют наличие для таких рынков теорем 9, 12 и 13, позволяющих одновременно определять несколько линий. Заметим, что для рынка типа «звезда» аналога данных теорем не существует. Таким образом, при применении разработанных алгоритмов для оптимизации рынков с частями «цепочка» есть преимущество в виде дополнительной возможности определения нескольких линий с помощью указанных теорем. Однако, разумеется, это вовсе не означает, что число решаемых вспомогательных задач для таких рынков всегда меньше, поскольку в конечном счете на число решаемых вспомогательных задач (1.6) сильно влияют характеристики узлов и линий, а не только транспортная структура рынка.

## Выводы к первой главе

В данной главе была исследована задача оптимизации транспортной системы многоузлового энергетического рынка однородного товара с точки зрения максимизации общественного благосостояния, доказана ее NP-трудность. Показано, что исходная задача сводится к задаче поиска оптимального множества расширяемых линий, в качестве подзадачи к которой выступает вспомогательная задача с фиксированным множеством расширяемых линий.

Введено понятие конкурентного равновесия. Показано, как оно связано с решением вспомогательной задачи. Для решения последней разработан алгоритм, сложность которого для случая кусочно-линейных исходных функций квадратично зависит от числа узлов в рынке.

Рассмотрены два частных случая рынка типа «цепочка»: с нулевыми начальными пропускными способностями и с монотонными начальными равновесными ценами. Для них разработаны полиномиальные алгоритмы решения исходной задачи. Они обладают квадратичной и кубической сложностями соответственно.

Отдельно рассмотрены рынки типов «цепочка», «звезда», «звезда-цепочка» в случае выполнения условия инвариантности структуры потока. Для них разработаны алгоритмы решения исходной задачи. В основе этих алгоритмов лежит использование свойств функции общественного благосостояния, позволяющих находить линии, расширение (или, наоборот, отсутствие расширения) которых заведомо оптимально. Были проведены вычислительные эксперименты для оценки среднестатистической сложности этих алгоритмов. Они показали, что для каждого рассмотренного типа рынка среднее число решаемых вспомогательных задач неплохо аппроксимируется квадратичной функцией, зависящей от числа узлов в рынке. Также приведены алгоритм и результаты аналогичных вычислительных экспериментов для рынка типа «дерево», полученные в другом исследовании.

Исходя из результатов проведенных экспериментов можно сделать вывод о том, что разработанные алгоритмы позволяют решать исходную задачу (1.5) за приемлемое время даже для рынков с большим числом узлов, что на начальном этапе исследования этой задачи было совсем не очевидно, поскольку она является NP-трудной в общем случае.

## Глава 2. Применение разработанных алгоритмов для оценки перспектив газификации российских регионов

В данной главе рассматриваются вопросы, связанные с практическим использованием модели и алгоритмов, описанных в первой главе. Чтобы предложенная модель могла применяться для планирования развития транспортных систем реальных энергетических рынков, необходимо уметь оценивать исходные параметры модели для таких рынков - функции производственных затрат, полезности потребления и транспортных затрат. Также необходимо уметь определять перспективные транспортные линии и учитывать в модели возможность их строительства.

В целом способ решения вышеупомянутых проблем зависит от вида используемого энергоресурса и специфики рынка. В этой главе рассматривается российский рынок природного газа, однако предлагаемые модели и методы могут быть адаптированы и для других рынков.

В параграфе 2.1. описываются основные сферы применения природного газа, в параграфе 2.2. приводится структура потребления природного газа в Российской Федерации.

Параграф 2.3. посвящен проблеме оценивания функции транспортных затрат для нового газопровода. Рассматриваются газопроводы двух типов: магистральные и распределительные. Для каждого типа выводится оценка функции транспортных затрат, зависящая от пропускной способности и длины газопровода.

В параграфе 2.4. рассматривается задача моделирования функции производственных затрат для газового месторождения. Приводится обзор одной известной модели, описывающей динамику добычи природного газа из газовой залежи в зависимости от скорости ввода добывающих скважин и выбранного технологического режима их эксплуатации. Показывается, как на основе данных параметров вычисляются суммарные затраты на функционирование газовой залежи. Также предлагается упрощенная модель для оценки функции производственных затрат, выводится соответствующая оценка.

Параграф 2.5. посвящен задаче прогнозирования спроса на природный газ в узле, являющемся произвольным негазифицированным субъектом либо муниципальным образованием Российской Федерации. Проводится разделение основных потенциальных потребителей газа на несколько групп. Для каждой группы описывается математическая модель для оценки

соответствующей компоненты функции спроса<sup>18</sup>.

В последнем параграфе 2.6. разработанные алгоритмы и методы применяются для оценки перспектив газификации Иркутской области. Рассматривается возможность подключения ТЭЦ и котельных региона к магистральному газопроводу «Сила Сибири», при этом определяется оптимальный план развития газовой сети с точки зрения максимизации общественного благосостояния. Для расчетов используются реальные данные из официальных источников: публикуемые на сайте федеральной службы государственной статистики база данных показателей муниципальных образований [73], база данных социально-экономического положения субъектов РФ [74], а также указы губернатора Иркутской области об утверждении схем и программ развития электроэнергетики [2–4].

## 2.1. О природном газе

Природный газ является одним из самых экономически значимых энергоресурсов в России и на планете. Преимущество природного газа перед другими видами органического топлива заключается в низкой себестоимости и экологичности, а его разведанных запасов в России, согласно заявлению министра энергетики Александра Новака, хватит более чем на 100 лет [65]. При этом Россия является мировым лидером по запасам природного газа (на 2019 год ее доля составляла 19%, [66]).

Основное применение природного газа связано с энергетикой [75]. Он может использоваться непосредственно в качестве источника энергии или же преобразовываться в другие виды энергии. Основные сферы применения природного газа в качестве непосредственного источника энергии - это промышленное производство, транспортировка и бытовое потребление. Что касается преобразования в другие виды энергии, то в России природный газ является основным топливом для тепловых электростанций, теплоэлектроцентралей и котельных. Использование альтернативного топлива (преимущественно угля) в целом связано с отсутствием доступа к трубопроводному газу в конкретных районах страны.

Также природный газ широко используется в качестве сырья для переработки в другие виды топлива и при производстве химической и другой нетопливной продукции. Помимо метана, являющегося основным составляющим природного газа (80-90%) и использующего-

---

<sup>18</sup> Хотя исходными параметрами модели, описывающими потребителей, являются не функции спроса, а функции полезности потребления, для данных функций существует взаимно-однозначное соответствие (1.11).

ся в качестве топлива, в него входят ценные примеси: пентан, гексан, бутан, пропан, этан, азот и гелий. Эти элементы разделяются на специально для этого созданных газоперерабатывающих заводах, одним из крупнейших среди которых в России является Амурский ГПЗ, запущенный в 2021 году [76]. Возможности применения полученных веществ обширны: от производства пластмассы и красок до создания деталей для аппаратов МРТ и жидкокристаллических экранов.

Стоит отметить, что все большую популярность приобретает использование метана вместо бензина в качестве автомобильного топлива из-за его низкой цены (в перерасчете на стоимость топлива на километр пути метан в 2-3 раза дешевле), что говорит о росте потенциала природного газа. Средний годовой рост мирового потребления природного газа в 2008-2019 годах составил около 2.5% [66].

## 2.2. Потребление природного газа в Российской Федерации

Согласно официальным данным [75], в 2019<sup>19</sup> году объем потребления российского природного газа составил 851.9 млн тонн, среди которых 254.6 млн тонн пришелся на экспорт, остальное - внутреннее потребление. Структура внутреннего потребления природного газа представлена на рисунке 27.



Рис. 27. Структура внутреннего потребления природного газа в Российской Федерации за 2019 год

Из рисунка видно, что более 90% природного газа расходуется на преобразование в другие виды энергии (прежде всего в электрическую и тепловую), конечное потребление в качестве топлива или энергии и производство химической и другой нетопливной продукции. Также около 6% потребляемого газа перерабатывается в другие виды топлива и около 2%

<sup>19</sup> На момент выполнения исследования данные за более поздние года отсутствовали.

используется в качестве материала на нетопливные нужды. Потери газа составляют менее 1.5%.

Из общего объема конечного потребления природного газа в качестве топлива или энергии можно выделить следующие основные составляющие (рисунок 28): отпуск населению (43.2%), промышленное производство (31%), транспортировка и хранение (18.8%), строительство (2.5%).

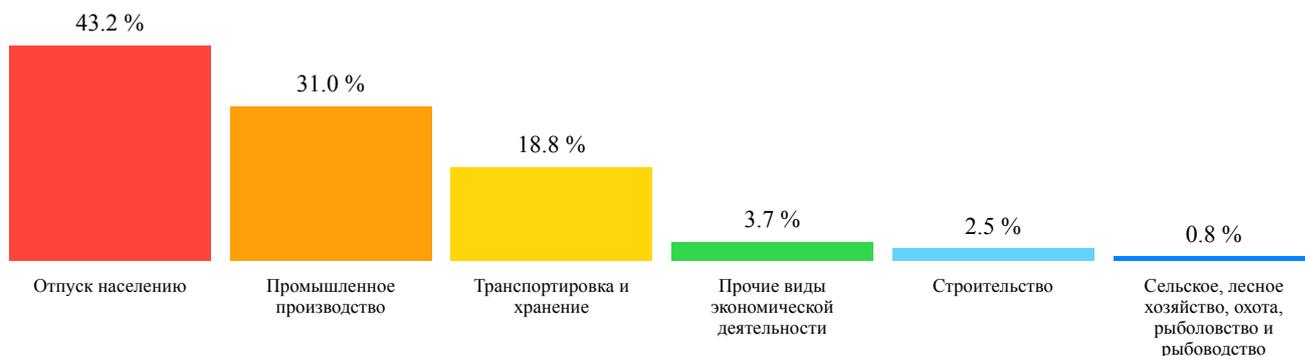


Рис. 28. Структура конечного потребления природного газа в качестве топлива или энергии с делением по видам экономической деятельности в Российской Федерации за 2019 год

В промышленном производстве 71.8% природного газа потребляется обрабатывающими производствами, 27.3% - при добыче полезных ископаемых (в основном сырой нефти, природного газа и металлических руд), менее 1 % - другими отраслями (рисунок 29).

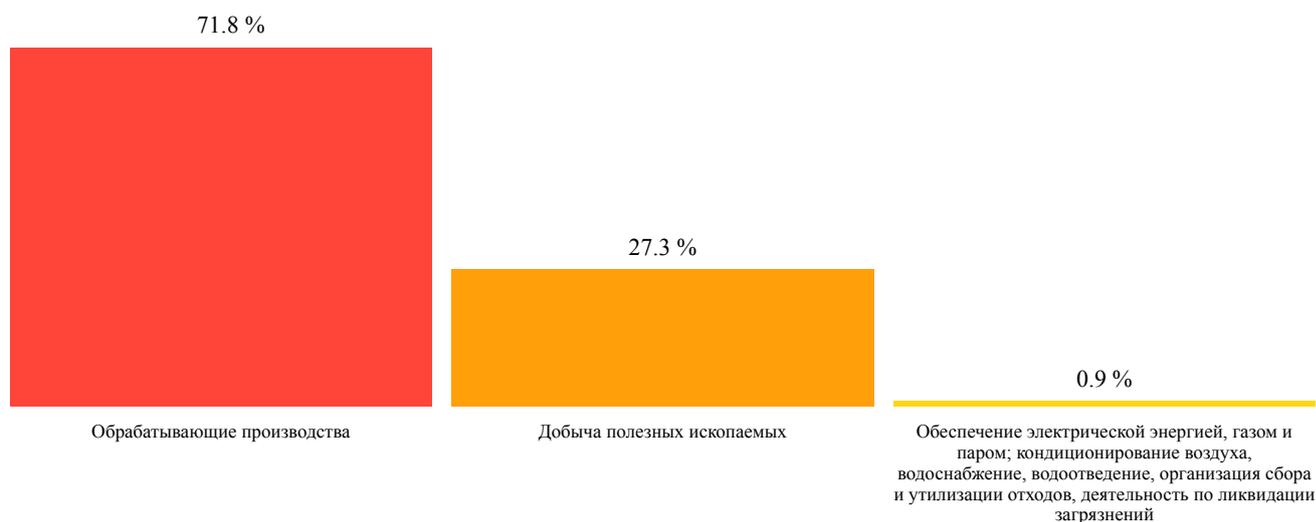


Рис. 29. Структура потребления природного газа промышленным производством в Российской Федерации за 2019 год

## 2.3. Оценка функции транспортных затрат для нового газопровода

Далее в данной главе для удобства объем природного газа и энергия измеряются в тоннах условного топлива (т.у.т.). Условное топливо является стандартной единицей учета теплотворной способности топлива. Считается, что при полном сгорании 1 кг условного топлива выделяется 29.3 МДж (7 000 ккал) тепла. Для перевода объема природного газа в эквивалентную массу условного топлива используется коэффициент  $k_{g \rightarrow c.f.} = 1.154 \times 10^{-3}$  т.у.т./м<sup>3</sup>, а для перевода массы условного топлива в энергию - коэффициент  $k_{c.f. \rightarrow j} = 29.3 \times 10^9$  (Дж/т.у.т.).

### 2.3.1. Магистральные газопроводы

Магистральный газопровод используется для транспортировки больших объемов природного газа на значительные расстояния. Он состоит из труб большого диаметра, в которых поддерживается высокое давление благодаря компрессорным станциям, расположенным на пути пролегания газопровода. Согласно своду правил [1], утвержденному министерством строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации и устанавливающему основные требования к производству и приемке строительного монтажа работ при строительстве и реконструкции линейной части магистральных трубопроводов, основные затраты при строительстве магистрального газопровода можно разделить на 5 категорий:

- затраты на приобретение и доставку труб;
- затраты на проведение внетрассовых работ (строительство подъездных дорог, линий электропередач, систем энергообеспечения и жилых городков строителей; подготовка строительных площадок и мест хранения оборудования; сооружение мостов по маршруту доставки строительной техники и грузов; другие работы);
- затраты на проведение вдольтрассовых работ за вычетом затрат на приобретение и доставку труб (расчистка строительной полосы от лесорастительности, осушение строительной полосы, устройство переездов через водные преграды, строительство переходов под автомобильными и железными дорогами, срезка крутых продольных склонов, строительство подводных и тоннельных переходов, защита территории строительной полосы от неблагоприятных природных явлений, земляные работы, укладка и сварка

труб, контроль качества и др.);

- затраты на строительство компрессорных станций;
- другие затраты (на проектирование, аренду или покупку земли и др.).

Существенную долю всех затрат составляют фиксированные затраты, не зависящие от итоговой пропускной способности газопровода. К таким затратам можно отнести затраты на проектирование, аренду или покупку земли, бóльшую часть затрат на проведение внетрассовых и вдольтрассовых работ, а также фиксированные затраты при строительстве компрессорных станций. Считаем, что остальные затраты пропорциональны пропускной способности, а также что все указанные затраты пропорциональны длине газопровода. Затраты на функционирование газопровода можно считать пропорциональными его пропускной способности и длине.

При построении оценки функции транспортных затрат пренебрежем влиянием таких факторов, как географическое положение территории прокладки газопровода, ее рельеф, среднегодовая температура, перепад высот, размеры пересекаемых трассой водных участков и т.д. В этом случае функция транспортных затрат магистрального газопровода зависит только от его пропускной способности и длины и имеет следующий вид:

$$\bar{E}^m(q, l) = \begin{cases} 0, & |q| = 0, \\ (e^{m,f} + e^{m,l} \cdot |q|) \cdot l, & |q| > 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь  $|q|$  - объем передаваемого природного газа (т.у.т./год),  $l$  - длина газопровода (км). Величина  $\bar{E}^m(q, l)$  является оценкой суммарных транспортных затрат (руб./год), в которых учитываются затраты на передачу природного газа и приведенные капитальные затраты на постройку газопровода. Приведение капитальных затрат осуществляется к годовому периоду времени с учетом предполагаемого срока службы газопровода, процентной ставки по банковским вкладам и уровня инфляции (см. пункт 1.1.2. и (1.1)). Предполагается, что пропускная способность газопровода пропорциональна передаваемому объему  $|q|$  и превосходит его, создавая резерв, учитывающий годовую неравномерность потребления.

Параметры  $e^{m,f}$  и  $e^{m,l}$  следует задавать экспертно, поскольку имеющиеся в открытом доступе данные, связанные со стоимостью строительства отдельных магистральных газопроводов Российской Федерации, весьма общие и сильно различаются для различных проектов. Для данного исследования используются открытые данные о газопроводе «Сила Сибири» [77, 78]. На 27 апреля 2018 года стоимость проекта составила 1.1 трлн руб., плани-

руемый объем передачи -  $42^{20}$  млрд  $\text{м}^3$  (48.47 млн т.у.т.) в год, протяженность газопровода - 2963.5 км. Таким образом, стоимость строительства километра газопровода составила 371 млн руб. на указанную дату. При предположении о доле фиксированных затрат в 25%, сроке службы газопровода в 50 лет и равенстве ожидаемых процентных ставок по банковским вкладам уровням инфляции получаем, что в ценах на начало 2022 года приведенные к годовому периоду затраты на строительство километра газопровода состоят из фиксированной компоненты, равной 2.25 млн руб., и переменной компоненты, равной 0.139 руб. за каждую тонну условного топлива в пропускной способности.

Для оценки затрат на передачу газа примем во внимание заявление представителя «Газпрома» [79], согласно которому себестоимость прокачки 1 тыс.  $\text{м}^3$  природного газа независимых производителей на 100 км в 2017 году составляла 69,2 руб. Таким образом, в ценах на начало 2022 года транспортировка 1 т.у.т. природного газа на 1 км стоит 0.739 руб.

В итоге получаются следующие оценки параметров:  $e^{m,f} = 2.25 \times 10^6$  (руб./(\text{км} \times \text{год})),  $e^{m,l} = 0.878$  (руб./(\text{т.у.т.} \times \text{км})), при этом функция транспортных затрат для магистрального газопровода в ценах на начало 2022 года принимает вид

$$\bar{E}^m(q, l) = \begin{cases} 0, & |q| = 0, \\ (2.25 \times 10^6 + 0.878 \cdot |q|) \cdot l, & |q| > 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

### 2.3.2. Газопроводы распределительных сетей

Газопроводы распределительных сетей (далее - распределительные газопроводы) предназначены для транспортировки природного газа от газораспределительных станций к конечному потребителю. Такие газопроводы имеют небольшую длину и малый диаметр, а давление в газораспределительных станциях снижается до уровня, необходимого для снабжения потребителей. По сравнению с магистральными, распределительные газопроводы менее эффективны, а при их постройке требования значительно ниже, поэтому затраты на строительство и функционирование для этих двух типов газопроводов сильно различаются.

Построим оценку функции транспортных затрат для распределительного газопровода

<sup>20</sup> С учетом потребления газа Амурским ГПЗ.

в виде, аналогичном оценке для магистрального газопровода:

$$\bar{E}^{d,1}(q, l) = \begin{cases} 0, & |q| = 0, \\ (e^{d,f} + e^{d,l} \cdot |q|) \cdot l, & |q| > 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Параметры  $e^{d,f}$  и  $e^{d,l}$  следует задавать экспертно. Для оценки параметров  $e^{d,f}$  и  $e^{d,l}$  учтем данные с официального сайта единого оператора газификации РФ [80], согласно которым в соответствии с программой подключения «Социальная газификация» примерная стоимость строительно-монтажных работ для подземной прокладки километра распределительного газопровода с ограничением на пропускную способность до 7 м<sup>3</sup>/час в Иркутской области составляет 1.134<sup>21</sup> млн руб. Данные по другим областям также имеются. При предположении о доле фиксированных затрат в 25%<sup>22</sup>, сроке службы распределительного газопровода в 30 лет, равенстве ожидаемых процентных ставок по банковским вкладам уровням инфляции и пренебрежении затратами на функционирование газопровода получаем, что в ценах на начало 2022 года оценка функции транспортных затрат для распределительного газопровода в Иркутской области имеет следующий вид:

$$\bar{E}^{d,1}(q, l) = \begin{cases} 0, & |q| = 0, \\ (8.595 \times 10^3 + 364.4 \cdot |q|) \cdot l, & |q| > 0. \end{cases}$$

Таким образом,  $e^{d,f} = 8.595 \times 10^3$  (руб./((км×год))),  $e^{d,l} = 364.4$  (руб./((т.у.т.×км))).

Также построим оценку функции транспортных затрат для распределительного газопровода без фиксированной компоненты:

$$\bar{E}^{d,2}(q, l) = e^d \cdot |q| \cdot l. \quad (2.4)$$

Эта оценка в дальнейшем может использоваться вместо оценки  $\bar{E}^{d,1}(q, l)$  в случаях, когда согласно специфике модели функция транспортных затрат должна быть выпуклой (функции  $\bar{E}^m(q, l)$  и  $\bar{E}^{d,1}(q, l)$  не являются выпуклыми по  $q$  из-за наличия фиксированных компонент  $e^{m,f}$  и  $e^{d,f}$  соответственно). Подразумевается, что точность этой оценки хуже<sup>23</sup>, чем оценки  $\bar{E}^{d,1}(q, l)$ . Для Иркутской области она принимает следующий вид:

<sup>21</sup> На май 2022 года.

<sup>22</sup> Значение доли фиксированных затрат в 25% выделено лишь в качестве примера, данное значение следует задавать экспертно. Полученная ниже на основе данного значения оценка функции транспортных затрат не используется при анализе перспектив газификации Иркутской области.

<sup>23</sup> При правильном проведении оценок, в ходе которого учитывается диапазон варьирования переменной  $q$ , погрешность оценки  $\bar{E}^{d,2}(q, l)$  относительно оценки  $\bar{E}^{d,1}(q, l)$  не превосходит величины  $e^{d,f} \cdot l$ .

$$\bar{E}^{d,2}(q, l) = 485.8 \cdot |q| \cdot l,$$

т.е.  $e^d = 485.8$  (руб./((т.у.т.×км))).

Стоит отметить, что все полученные оценки функции транспортных затрат являются в некотором плане завышенными, поскольку в них включается прибыль компаний-подрядчиков, занимающихся строительством газопровода. Эту прибыль имеет смысл также учитывать в функции общественного благосостояния, для чего параметры оценок рекомендуется задавать экспертно. Для целей данного исследования полученные оценки считаются приемлемыми.

## 2.4. Оценка функции производственных затрат для газового месторождения

Разработка месторождения природного газа является сложным технологическим процессом, который включает в себя следующие основные этапы: разведка, оценка объемов газовых запасов, подготовка к промышленной добыче, промышленная добыча, ликвидация. Проведение каждого из этих этапов требует значительных экономических вложений, величина которых сильно зависит от характеристик конкретного месторождения.

Самыми продолжительными и затратными являются этапы подготовки к промышленной добыче и самой промышленной добычи, в течение которых происходит строительство скважин и извлечение запасов природного газа из недр земли. В физической основе принципа извлечения газа лежит разница (депрессия) между давлениями в газоносном пласте и на забое добывающей скважины, вызывающая движение газа из пласта к забою скважины и дальнейшее его поднятие на поверхность земли.

Стоит отметить, что процесс разработки месторождения является непростым (Юшков И. Р., Хижняк Г. П., Илюшин П. Ю., 2013, [57]; Минханов И. Ф., Долгих С. А., Варфоломеев М. А., 2019, [58]). Так, помимо добывающих скважин, выполняющих основную функцию извлечения газа, есть нагнетательные скважины, разведочные, наблюдательные, контрольные, оценочные и резервные, при этом по форме и наклону скважины делятся на вертикальные, наклонно-направленные, горизонтальные, многоствольные, многозабойные. Системы размещения скважин на площади газоносности также различаются: квадратные,

треугольные, кольцевые и т.д.

Среди режимов функционирования газоносных пластов стоит отметить два основных: газовый и водонапорный [57]. При газовом режиме приток газа к забоям добывающих скважин происходит только за счет его упругого расширения, поэтому объем порового пространства, занятого газом, практически не меняется. При водонапорном режиме на приток газа к забоям скважин дополнительно оказывают влияние подземные воды, окружающие залежь и вытесняющие газ, тем самым замедляя темп снижения пластового давления и поддерживая дебит (скорость добычи газа) на высоком уровне.

Также при разработке газового месторождения могут использоваться различные методы увеличения дебита, такие как гидравлический разрыв пласта или кислотная обработка (Дейк Л. П., 2009, [59]). В случае газоконденсатного месторождения иногда применяется периодическая обратная закачка сухого газа (сайклинг-процесс), в результате которой пластовое давление поддерживается на высоком уровне выше давления точки росы, что не позволяет газу конденсироваться.

#### **2.4.1. Динамическая модель функционирования газовой залежи**

Определим залежь как подземное скопление природного газа, все части которого гидродинамически связаны, т.е. разработка в одной части залежи проявляется в изменении пластового давления во всей залежи. Данная гидродинамическая связь может распространяться на десятки километров и больше, поддерживаясь подземными водами (Закиров С. Н., Лапук Б. Б., 1974, [60]).

При моделировании процесса разработки газовой залежи часто применяют метод «средней скважины», при котором считается, что все добывающие скважины обладают одинаковыми характеристиками, средними по залежи: средней глубиной, средней длиной шлейфа, средними допустимыми дебитом и депрессией, средним коэффициентом фильтрационных сопротивлений и т.д. Пластовое давление также полагается равным среднему по залежи.

При моделировании газовой залежи необходимо учитывать следующие базовые уравнения [60]:

- 1) материального баланса для газовой залежи;
- 2) технологического режима эксплуатации добывающей скважины;
- 3) притока газа к забою скважины;

4) связи числа газовых скважин, добычи и дебита скважин.

Данные уравнения лежат в основе Системы перспективного планирования добычи газа для группы газовых месторождений (СПДГ), активно применявшейся для проведения расчетов по многим группам газовых месторождений в СССР (Маргулов Р. Д., Хачатуров В. Р., Федосеев А. В., 1992, [61]). Ниже подробно описывается каждое из этих уравнений.

#### Уравнение материального баланса для газовой залежи

$$\frac{p(t)}{z(p(t))} = \frac{p_0 \cdot V(t)}{z(p_0) \cdot V_0} \quad (2.5)$$

описывает связь между средним пластовым давлением  $p(t)$  и оставшимся запасом газа в залежи  $V(t)$ . Здесь  $t$  - время;  $z(p)$  - коэффициент сверхсжимаемости, учитывающий неидеальность природного газа;  $p_0$  и  $V_0$  - начальные значения пластового давления и запаса газа соответственно. Стоит отметить, что уравнение (2.5) не учитывает вытеснение газа водой, которое возникает при водонапорном режиме. Считаем, что залежь функционирует в газовом режиме.

С оставшимся запасом газа  $V(t)$  связаны предельная добыча  $Q(t)$  и суммарная добыча  $Q_{tot}(t)$ :

$$Q_{tot}(t) = V_0 - V(t),$$

$$Q(t) = Q_{tot}'(t), \quad Q_{tot}(t) = \int_0^t Q(t) dt. \quad (2.6)$$

**Уравнения технологического режима эксплуатации добывающей скважины** могут быть различными, т.к. технологический режим устанавливается с учетом действия ограничивающих геологических, технических, технологических, экологических и других факторов. В целом выбирается такой технологический режим, при котором обеспечивается максимально возможный дебит при соблюдении ограничивающих факторов. Можно отметить следующие основные технологические режимы: постоянной депрессии на пласт, постоянного дебита, постоянного градиента давления, постоянного забойного давления, постоянного устьевого давления, постоянной скорости потока. Часто используется режим постоянного дебита:

$$q(t) = q_0,$$

где  $q(t)$  - дебит скважины,  $q_0$  - начальный дебит. Предполагается, что технологический режим одинаковый для всех добывающих скважин, а сами скважины идентичны.

### Уравнение притока газа к забою скважины

$$p^2(t) - p_{wf}^2(t) = A \cdot q(t) + B \cdot q^2(t) \quad (2.7)$$

связывает дебит скважины  $q(t)$ , пластовое давление  $p(t)$  и забойное давление  $p_{wf}(t)$ . Здесь  $A$  и  $B$  - коэффициенты фильтрационных сопротивлений, зависящие от состава газа, свойств пористой среды и других параметров.

**Уравнение связи числа газовых скважин, добычи и дебита скважин.** Последнее уравнение связывает число добывающих скважин  $N(t)$ , предельную добычу  $Q(t)$  и дебит  $q(t)$ :

$$N(t) = Q(t)/q(t). \quad (2.8)$$

Здесь предполагается, что  $N(t)$  - вещественное число. Такое упрощение допустимо, поскольку для крупных залежей к периоду постоянной добычи число скважин может достигать нескольких десятков или даже сотен.

При разработке газовой залежи выделяют три этапа: нарастающей, постоянной и падающей добычи [57, 61]. На этапе нарастающей добычи производится строительство эксплуатирующихся скважин, обустройство промысла и выход на постоянный уровень добычи. На конец данного этапа суммарная добыча газа составляет 20-25% от исходных запасов. На этапе постоянной добычи предельная добыча поддерживается на постоянном уровне за счет ввода новых скважин и увеличения мощностей дожимных компрессорных станций (ДКС). Этап заканчивается, когда дальнейшее разбуривание залежи и увеличение мощностей ДКС становится экономически нецелесообразным. За первые два этапа отбираются основные запасы залежи (около 60%). На этапе падающей добычи фонд скважин обычно остается неизменным, при этом пластовое давление сильно падает. Третий этап заканчивается, когда добыча становится нерентабельной. Неизвлеченными остаются примерно 10-15% исходных запасов.

В случае использования режима постоянного дебита для расчета основных технологических показателей первых двух этапов обычно используется следующая схема [61]: сначала по заданной предельной добыче  $Q(t)$  и дебиту скважины  $q_0$  вычисляется необходимое число скважин  $N(t)$  с помощью (2.8), затем с помощью (2.5-2.6) находится пластовое давление  $p(t)$ , после чего находится забойное давление  $p_{wf}(t)$  согласно (2.7), которое в дальнейшем используется для определения требуемых мощностей ДКС.

На этапе падающей добычи число добывающих скважин обычно постоянно, поэтому предельная добыча уменьшается пропорционально дебиту. Но так как сведения о коэффи-

циентах фильтрационных сопротивлений  $A$  и  $B$  и режиме эксплуатации на последнем этапе разработки весьма неточны или вовсе заранее не известны, в СПДГ для расчета предельной добычи на данном этапе вместо (2.5-2.8) предлагается использовать следующую эмпирическую формулу:

$$Q(t) = \bar{Q} \cdot e^{-\frac{\bar{Q}}{\bar{V}}(t-\bar{t})}, \quad (2.9)$$

где  $\bar{Q}$  - предельная добыча на втором этапе,  $\bar{t}$  - время окончания второго этапа,  $\bar{V} = V(\bar{t})$  - оставшийся запас газа в залежи на конец второго этапа. Формула (2.9) используется, пока оставшийся запас газа не достигнет величины  $\bar{V}$ , после чего добыча прекращается. Считается, что  $\bar{V} = \bar{\beta} \cdot V_0$ ,  $\bar{V} = \bar{\bar{\beta}} \cdot V_0$ , где  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\bar{\beta}}$  - заданные параметры. Параметр  $\bar{\beta}$  на самом деле зависит от предельной добычи на втором этапе  $\bar{Q}$ : чем выше  $\bar{Q}$ , тем меньше  $\bar{\beta}$ . Однако для упрощения модели эта зависимость не учитывается.

В работе [61] предлагается агрегированная модель залежи, для чего вводятся следующие дополнительные предположения:

- эксплуатация скважин происходит в режиме постоянного дебита;
- этап падающей добычи наступает в момент  $\bar{t}$ :  $V(\bar{t}) = \bar{V}$ ;
- на этапе падающей добычи предельная добыча меняется согласно (2.9);
- ввод ДКС не учитывается.

В результате поведение газовой залежи описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{N} = n, \\ \dot{V} = -q \cdot N, \\ \dot{q} = \begin{cases} 0, & V > \bar{V}, \\ -\frac{q_0}{\bar{V}} \cdot q \cdot N, & V \leq \bar{V}, \end{cases} \\ N(0) = 0, V(0) = V_0, q(0) = q_0. \end{cases}$$

Здесь скорость ввода скважин  $n(t) \geq 0$  является управлением, причем для него должно выполняться следующее ограничение:

$$n(t) = 0 \text{ при } V(t) \leq \bar{V}.$$

Остальные величины рассчитываются согласно следующим соотношениям:

$$\frac{p(t)}{z(p(t))} = \frac{p_0}{z(p_0)} \cdot \frac{V(t)}{V_0},$$

$$Q(t) = \begin{cases} q(t) \cdot N(t), & V > \bar{V}, \\ 0, & V \leq \bar{V}, \end{cases}$$

$$p_{wf}(t) = \sqrt{p^2(t) - A \cdot q(t) - B \cdot q^2(t)}.$$

Таким образом, предельная добыча  $Q(t)$  зависит от скорости ввода скважин  $n(t)$ :

$$Q(t) \equiv \hat{Q}(n(\cdot), t). \quad (2.10)$$

В (2.10)  $n(\cdot)$  рассматривается как функция-параметр. Варьируя функцию  $n(\cdot)$ , можно получить различные динамики добычи. На управление можно наложить дополнительные ограничения, связанные с различными техническими причинами (например, ограничение на скорость ввода скважин:  $n(t) \leq n_{\max}$ ).

Также в работе [61] предусматривается строительство резервных скважин, куда, помимо самих резервных скважин, можно отнести наблюдательные и другие не добывающие скважины. Предполагается, что резерв скважин создается равномерно в течение периода постоянной добычи. В данной работе же считаем, что строительство резервных скважин происходит одновременно с добывающими, причем скорость ввода резервных скважин  $n_p(t)$  пропорциональна скорости ввода добывающих скважин и описывается коэффициентом резерва  $k_p$ :

$$n_p(t) = k_p \cdot n(t).$$

Коэффициент резерва можно принять равным 10-20%. Обозначим через  $c_I$  капитальные вложения в строительство одной скважины, а через  $c_e$  - затраты на добычу единицы объема газа. При этом считаем, что затраты на строительство взимаются непрерывно, а предельные затраты на добычу не зависят от пластового давления, технологического режима эксплуатации скважин и других величин (в частности, от текущих мощностей ДКС). В итоге получается следующая функция предельных затрат на функционирование газовой залежи:

$$c(n(\cdot), t) = c_I \cdot (1 + k_p) \cdot n(t) + c_e \cdot Q(n(\cdot), t).$$

С учетом коэффициента  $\delta$  - разницы между процентной ставкой по банковским вкладам и

уровнем инфляции, полные затраты, приведенные к начальному моменту времени, равны следующей величине:

$$C(n(\cdot)) = \int_0^{+\infty} [c_I \cdot (1 + k_p) \cdot n(t) + c_e \cdot Q(n(\cdot), t)] e^{-\delta t} dt.$$

#### 2.4.2. Упрощенная модель функционирования газовой залежи

Теперь рассмотрим упрощенную модель функционирования газовой залежи. Введем следующие предположения:

- начальные запасы природного газа в залежи велики настолько, что на рассматриваемом интервале планирования снижения запасов газа и пластового давления в залежи считаются несущественными;
- все вводимые скважины обладают одинаковыми характеристиками, число скважин можно считать вещественным, строительство скважин происходит мгновенно.

Введем следующие параметры:

- $q_0$  - начальный дебит скважины (т.у.т./год);
- $c_e$  - затраты на добычу единицы объема газа (руб./т.у.т.);
- $c_I$  - приведенные капитальные вложения в строительство одной скважины (руб./год); приведение осуществляется к годовому периоду времени с учетом предполагаемого срока службы скважины, процентной ставки по банковским вкладам и уровня инфляции (аналогично пункту 1.1.2. и (1.1));
- $k_p > 0$  - коэффициент резерва при строительстве скважин.

В таком случае дебит каждой скважины не меняется с течением времени, а функция производственных затрат для газовой залежи линейная и имеет следующий вид:

$$\bar{c}(v) = \left( (1 + k_p) \cdot \frac{c_I}{q_0} + c_e \right) \cdot v,$$

где  $v \geq 0$  - ежегодный постоянный объем добычи природного газа (т.у.т./год). Единица измерения величины  $\bar{c}(v)$  - руб./год.

### 2.4.3. Оценка функции производственных затрат

Построим оценку функции производственных затрат для газового месторождения согласно упрощенной модели. Предположим, что месторождение состоит из одной большой залежи. Согласно [81], на 1 июня 2016 года себестоимость добычи 1 000 м<sup>3</sup> природного газа у компании «Газпром» составляла 20 долларов (1 320 руб. по курсу на эту же дату). Таким образом, в ценах на начало 2022 года себестоимость добычи 1 т.у.т. природного газа равна примерно 1 467 руб.

Для оценки капитальных затрат на постройку скважин используем данные о строительстве Чаяндинского месторождения (Якутия). Согласно официальным источникам [77, 82], проектная годовая производительность месторождения составляет 25 млрд м<sup>3</sup> природного газа, а на 27 апреля 2018 года расходы на обустройство месторождения оценивались в 450 млрд руб. (543.3 млрд руб. в ценах на начало 2022 года). При предположении о сроке службы скважины в 30 лет и равенстве ожидаемых процентных ставок по банковским вкладам уровням инфляции получаем следующую оценку приведенных к годовому периоду производственных затрат в ценах на начало 2022 года:

$$\bar{c}(v) = 2\,095 \cdot v, \quad (2.11)$$

т.е. предельные производственные затраты равны 2 095 руб./т.у.т.

## 2.5. Оценка функции спроса на природный газ в негазифицированном узле

В данном параграфе предлагается метод оценивания функции спроса на газ в узле, являющемся произвольным негазифицированным субъектом либо муниципальным образованием (МО) Российской Федерации. В качестве узлов также могут выступать более мелкие единицы, такие как теплоэлектростанции, котельные, группы котельных и т.д. В основе рассматриваемого метода лежит разбиение основных потребителей газа на несколько групп, для каждой из которых проводится независимая оценка функции спроса. При этом не учитыва-

ются долгосрочные изменения спроса на газ, связанные с возможной реструктуризацией<sup>24</sup> рынка электроэнергии в узле в целом.

### **2.5.1. Обзор потенциальных потребителей газа на негазифицированной территории**

При газификации территории самые экономически-значимые преобразования - это замещение газом других используемых на территории экономически менее выгодных энергетических ресурсов и развитие химической промышленности, использующей газ в качестве сырья. Выделим среди основных потенциальных преобразований следующие компоненты:

- перевод на газовое топливо тепловых электростанций (ТЭС) и теплоэлектроцентралей (ТЭЦ);
- перевод на газовое топливо тепловых котельных;
- перевод на газовое топливо предприятий;
- подключение к газоснабжению сельского населения;
- подключение к газоснабжению городского населения (не учитывается в модели);
- развитие химической промышленности (не учитывается в модели).

Преобразования из этого списка подразумевают осуществление капитальных вложений для следующих целей:

- прокладка газовых линий до места потребления;
- переход на новое оборудование (либо модернизация существующего), способное работать с новым видом топлива, если газ используется в качестве источника энергии;
- строительство и развитие химических предприятий, если газ используется в качестве сырья.

Если газ используется в качестве источника энергии, то осуществляется полный или частичный переход на газ, а использовавшееся до этого топливо с необходимым оборудованием может оставаться в качестве резервного. Ожидаемая экономическая выгода таких преобразований основана на снижении топливных затрат. При оценке экономической выгоды можно также учитывать экологическую составляющую, связанную с изменением объема загрязнения окружающей среды при переходе на новый вид топлива.

Компоненты, связанные с подключением к газоснабжению городского населения и разви-

<sup>24</sup> Данная реструктуризация может быть следствием газификации узла.

тием химической промышленности, решено исключить из рассмотрения при оценке функции спроса на природный газ по следующим причинам. Подключение к газоснабжению городского населения сопряжено с существенными проблемами. Основная проблема состоит в том, что в действительности для имеющихся на негазифицированной территории многоэтажных домов изначально не предусматривалась возможность их подключения к трубопроводному газу. Поэтому для подготовки домов к подключению необходимы существенные капитальные вложения для подведения газовых труб к квартирам, модернизации системы вентиляции и других необходимых преобразований, которые зачастую экономически нецелесообразны.

Вторая проблема связана с безопасностью. Как известно, газ взрывоопасен и представляет серьезную угрозу для жильцов многоквартирных домов. Все помнят печальные известия из СМИ о взрывах в жилых домах, в результате которых происходило обрушение целых подъездов, при этом человеческие жертвы измерялись в десятках людей. Поэтому в настоящее время существует тенденция отхода от газовых плит в многоквартирных домах, новостройки в основном возводятся без подключения к газу даже в газифицированных районах.

Что касается химической промышленности, то в настоящее время в России действуют около 15 крупных газоперерабатывающих предприятий, суммарно обеспечивающих более 90% всей переработки. Решения о строительстве подобных предприятий и их местоположении обычно принимаются на самом высоком уровне, при этом спрос на конечную продукцию таких предприятий зачастую не определяется потребностями конкретного региона, поэтому данную компоненту спроса на газ заранее сложно оценить.

### 2.5.2. Математическая модель для оценки функции спроса на природный газ

В общем виде спрос на природный газ в узле  $i \in N$  представим в виде функции  $D_i(p_i, p_1^1, \dots, p_i^K)$ , где  $p_i$  - цена на природный газ в данном узле, а  $p_i^1, \dots, p_i^K$  - цены на другие источники энергии. Далее описывается несколько упрощенная модель потребления, в которой спрос на природный газ зависит лишь от цены на него.

Построим математическую модель потребления на основе введенных в пункте 2.5.1. компонент преобразований, при этом не учитывая компонент, связанных с подключением к газу городского населения и развитием химической промышленности. Разобьем суммарный спрос в узле  $i \in N$  в соответствии с данными компонентами, в этом случае функция спроса

$D_i(p_i)$  представляется в виде суммы функций спроса для различных компонент узла:

- $D_i^{TPS}(p_i)$  - для ТЭС и ТЭЦ;
- $D_i^B(p_i)$  - для тепловых котельных;
- $D_i^{Ind}(p_i)$  - для предприятий;
- $D_i^{Vil}(p_i)$  - для сельского населения.

**Котлоагрегаты.** Обозначим через  $R$  множество всех альтернативных природному газу видов топлива, а через  $A$  - множество типов котлоагрегатов, которые используются потребителями и позволяют преобразовывать топливо в тепловую энергию. Каждый тип  $a \in A$  задается следующими параметрами:

- $r_a \in R$  - вид топлива, который использует котлоагрегат;
- $V_a^{\max}$  - мощность (т.у.т./год), т.е. максимальный объем выработки полезной тепловой энергии в случае максимальной загрузки; в случае котлоагрегатов для ТЭС и ТЭЦ под мощностью понимается максимально возможное годовое количество передаваемого рабочему пару энергии;
- $\eta_a \in [0, 1]$  - КПД котлоагрегата, который равен отношению вырабатываемой полезной тепловой энергии к исходной энергии топлива.

**ТЭС и ТЭЦ.** В данном пункте для краткости будем называть ТЭС и ТЭЦ станциями. Крупные станции стоит выделять в отдельные узлы или помещать в центр узла, а оценивать транспортные затраты для подходящих к ним участков газопровода следует с помощью функции  $\bar{E}^m(q, l)$  согласно (2.1). Мелкие станции можно либо также выделять в отдельные узлы (в этом случае для оценки транспортных затрат для подводного участка к этой станции, если станция не является промежуточным узлом между крупными узлами, используется функция  $\bar{E}^{d,1}(q, l)$  (см. (2.3))), либо учитывать в качестве одной из компонент узла. В последнем случае станция соединяется с «центром» узла участком газопровода, а для оценки соответствующих транспортных затрат используется функция  $\bar{E}^{d,2}(q, l)$  (см. (2.4)). Под центром узла понимается географическая точка, в которой соединяются участки газопроводов, связывающие узел со смежными узлами, а также откуда выходит газораспределительная сеть рассматриваемого узла. При учете станции в качестве одной из компонент узла снижается точность оценок, однако при этом также понижается переборная сложность исходной задачи оптимизации. Пусть  $TPS_i$  - множество действующих станций в узле  $i \in N$ .

*Общая модель.* Пусть станция  $s \in TPS_i$  характеризуется следующими параметрами:

- $d_s$  - текущая суммарная теплопроизводительность котлоагрегатов станции (т.у.т./год);
- $\zeta_s \geq 1$  - коэффициент резерва станции, равный отношению максимально возможной дневной теплопроизводительности станции к среднедневной; этот коэффициент учиты-

вает неравномерность в объемах выработки станции, связанную с влиянием на объемы потребления погодных и временных условий, а также других факторов;

- $n_{s,a}$  - число имеющихся в наличии котлоагрегатов типа  $a \in A$ ;
- $c_{s,r}$  - затраты на добычу и доставку единицы топлива  $r \in R$  на станцию, (руб./т.у.т.); сюда также включаются все затраты, связанные с подготовкой топлива: транспортировка, обработка, хранение;
- $c_s^{g,b}$  - приведенные капитальные затраты на увеличение мощности газовых котлоагрегатов на единицу  $((\text{руб./год})/(\text{т.у.т./год}) = \text{руб./т.у.т.})$ ;
- $\eta_s^g \in [0, 1]$  - КПД газового котлоагрегата, который равен отношению вырабатываемой полезной тепловой энергии к исходной энергии топлива;
- $l_s$  - расстояние от центра узла до станции (км); если станция выделена в отдельный узел, то это значение равно нулю.

Приведение капитальных затрат осуществляется к годовому периоду времени с учетом предполагаемого срока службы станции, процентной ставки по банковским вкладам и уровня инфляции (см. пункт 1.1.2. и (1.1)).

Обозначим через  $c_s^g$  внутренние затраты на использование единицы природного газа (руб./т.у.т.), куда входят: затраты на транспортировку единицы газа от центра узла до станции, предельные приведенные капитальные затраты на прокладку соответствующего подводного участка газопровода, предельные приведенные капитальные затраты на подготовку котлоагрегатов с учетом резервирования:

$$c_s^g = e^d \cdot l_s + \zeta_s \cdot c_s^{g,b}.$$

Обозначим через  $a_1, \dots, a_n$  имеющиеся в наличии у станции типы котлоагрегатов, отсортированные в порядке увеличения затрат на производство единицы тепла  $c_i = \frac{c_{s,ra_i}}{\eta_{a_i}}$  (руб./т.у.т.). Через  $V_i = \frac{n_{s,a_i} \cdot V_{a_i}^{\max}}{\zeta_s}$  (т.у.т./год) обозначим максимальный объем выработки тепловой энергии с помощью имеющихся у станции котлоагрегатов типа  $a_i$  с учетом резервирования. Рассмотрим задачу минимизации затрат на поддержание суммарной теплопроизводительности котлоагрегатов станции  $d_s$ . Пусть функция спроса  $D_s(p_i)$  определяет зависимость оптимального с точки зрения данной задачи объема потребляемого станцией  $s$  природного газа (т.у.т./год) от узловой цены  $p_i$  на природный газ (руб./т.у.т.).

Обозначим

$$\widehat{D}_s(\widehat{p}) \equiv \max(0, \overline{D}_s(\widehat{p})), \quad (2.12)$$

где

$$\bar{D}_s(\hat{p}) = \begin{cases} d_s, & \hat{p} \in [0, c_1), \\ [d_s - V_1, d_s], & \hat{p} = c_1, \\ d_s - V_1, & \hat{p} \in (c_1, c_2), \\ [d_s - (V_1 + V_2), d_s - V_1], & \hat{p} = c_2, \\ \dots \\ [d_s - \sum_{i=1}^n V_i, d_s - \sum_{i=1}^{n-1} V_i], & \hat{p} = c_n, \\ d_s - \sum_{i=1}^n V_i, & \hat{p} \in (c_n, +\infty). \end{cases} \quad (2.13)$$

**Теорема 14.** *Функция спроса  $D_s(p_i)$  на природный газ со стороны станции  $s$  узла  $i$  вычисляется следующим образом:*

$$D_s(p_i) = \frac{1}{\eta_s^g} \cdot \hat{D}_s \left( \frac{p_i + c_s^g}{\eta_s^g} \right). \quad (2.14)$$

**Доказательство.** Согласно теореме о благосостоянии [7], оптимальные объемы выработки котлоагрегатов равны объемам, соответствующим конкурентному равновесию в модели с единой ценой на вырабатываемую тепловую энергию, потребителем с фиксированным объемом потребления  $d_s$  и производителем, который может распоряжаться соответствующими котлоагрегатами. Данные котлоагрегаты вместе с объемом потребляемого тепла  $d_s$  формируют кусочно-постоянную функцию остаточного спроса на тепловую энергию (2.12), где  $\hat{p}$  - цена на вырабатываемую тепловую энергию (руб./т.у.т.).

Без использования природного газа равновесная цена  $\tilde{p}$  равна минимальной цене  $\hat{p}$ , удовлетворяющей условию  $\hat{D}_s(\hat{p}) = 0$ . Выгода от использования газа равна  $\int_{\frac{p_i + c_s^g}{\eta_s^g}}^{+\infty} \hat{D}_s(\hat{p}) d\hat{p}$ , где  $p_i$  - цена природного газа в узле  $i$  (руб./т.у.т.). Здесь величина  $\frac{p_i + c_s^g}{\eta_s^g}$  равна затратам на производство тепловой энергии с использованием природного газа (руб./т.у.т.). Таким образом, оптимальный объем вырабатываемой тепловой энергии с помощью природного газа равен  $\hat{D}_s \left( \frac{p_i + c_s^g}{\eta_s^g} \right)$ , а зависимость  $D_s(p_i)$  оптимального объема потребляемого природного газа (т.у.т./год) от узловой цены  $p_i$  является кусочно-постоянной функцией и находится с помощью соотношения (2.14). ■

Вид графика функции  $\hat{D}_s(\hat{p})$  показан на рисунке 30. Функция  $D_s(p_i)$  получается из функции  $\hat{D}_s(\hat{p})$  последовательным применением следующих операций:

- 1) сдвиг графика функции влево на  $c_s^g$ ;

2) растяжение графика функции вдоль оси абсцисс в  $\eta_s^g$  раз;

3) сужение графика функции вдоль оси ординат в  $\eta_s^g$  раз.

Суммарный спрос в узле  $i$ , формируемый всеми станциями, равен

$$D_i^{TPS}(p_i) = \sum_{s \in TPS_i} D_s(p_i).$$

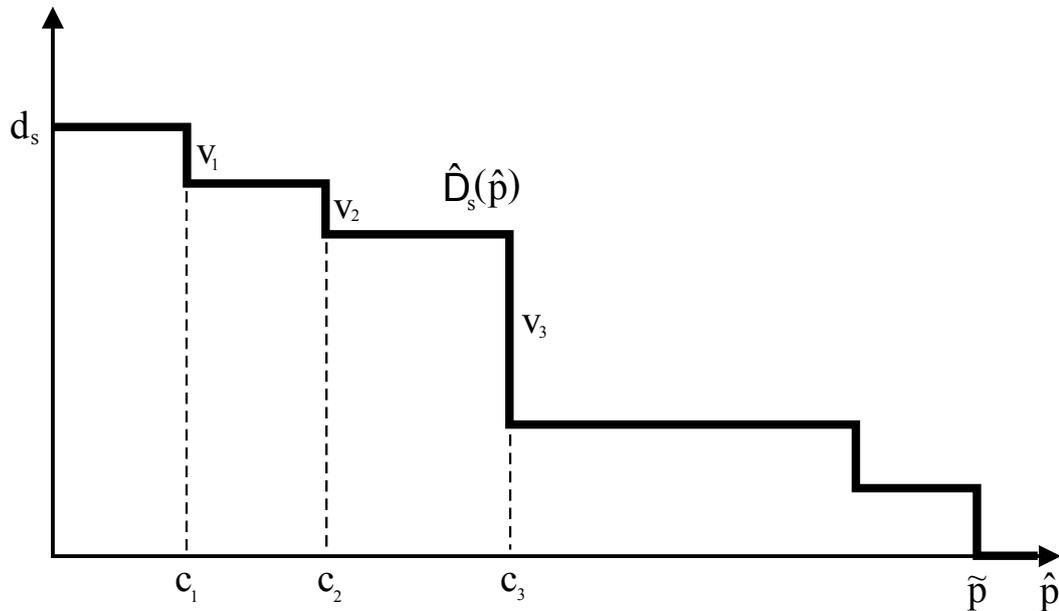


Рис. 30. Вид функции остаточного спроса  $\hat{D}_s(\hat{p})$  для ТЭС и ТЭЦ

*Упрощенная модель.* Теперь рассмотрим упрощенную модель. Предположим, что станция выделена в отдельный узел, и на ней используется только один вид топлива. Введем следующие параметры, характеризующие станцию  $s$ :

- $v_s$  - годовой расход топлива на станции (т.у.т./год);
- $c_s$  - затраты на добычу и доставку единицы используемого вида топлива на станцию (аналогично общей модели, руб./т.у.т.).

Предположим, что при переходе на природный газ используются те же самые котлоагрегаты с небольшой модернизацией, при этом сохраняются КПД котлоагрегатов, а капитальные затраты на модернизацию незначительны и поэтому не учитываются. Процесс перевода котлов, работающих на твердом топливе, на природный газ описан, например, в [62].

Для такой упрощенной модели переход на природный газ становится выгоден, если затраты на покупку единицы газа меньше, чем затраты на добычу и доставку единицы используемого в настоящий момент топлива. Таким образом, функция спроса на природный

газ для станции  $s$  имеет следующий вид:

$$D_s(p_i) = \begin{cases} v_s, & p_i \in [0, c_s), \\ [0, v_s], & p_i = c_s, \\ 0, & p_i \in (c_s, +\infty), \end{cases} \quad (2.15)$$

где  $p_i$  - цена на природный газ в узле  $i$  (руб./т.у.т.). Так как станция выделена в отдельный узел, то суммарный спрос  $D_i^{TPS}(p_i)$ , формируемый всеми станциями, совпадает с  $D_s(p_i)$ .

**Тепловые котельные.** Процесс перевода котельных на природный газ в целом аналогичен процессу перевода ТЭС и ТЭЦ. Единственное существенное отличие заключается в том, что мощности котлоагрегатов котельных, как правило, намного меньше аналогичных мощностей для ТЭС и ТЭЦ. Обозначим через  $B_i$  множество действующих котельных в узле  $i \in N$ .

*Общая модель.* В общем случае параметры, характеризующие котельную, аналогичны параметрам, характеризующим ТЭС или ТЭЦ, поэтому спрос на газ со стороны тепловой котельной определяется аналогично предыдущему пункту. Обозначим функцию спроса котельной  $b \in B_i$  через  $D_b(p_i)$ . Суммарный спрос в узле  $i$ , формируемый всеми котельными, равен

$$D_i^B(p_i) = \sum_{b \in B_i} D_b(p_i).$$

*Упрощенная модель.* Теперь рассмотрим упрощенную модель. Пусть рассматриваемый узел  $i$  является населенным пунктом либо муниципальным образованием, характеризующимся следующими параметрами:

- $v_i^b$  - суммарный расход топлива котельными (т.у.т./год);
- $c_i^b$  - средние затраты на добычу и доставку в котельную единицы используемого вида топлива (руб./т.у.т.);
- $S_i^b$  - площадь территории узла (км<sup>2</sup>).

Сделаем следующие предположения:

- котельные характеризуются примерно одинаковыми расходами топлива, КПД котлоагрегатов и затратами на добычу, доставку и подготовку единицы топлива;
- при переводе котельных на природный газ используются те же самые котлоагрегаты с небольшой модернизацией, при этом сохраняются КПД котлоагрегатов, а капитальные затраты на модернизацию незначительны и поэтому не учитываются.

Для оценки функции спроса  $D_i^B(p_i)$  необходимо учесть транспортные затраты, связан-

ные с постройкой и функционированием газораспределительной сети, соединяющей центр узла с котельными. Для оценки транспортных затрат используем формулу (2.4).

**Узел в форме круга.** Рассмотрим идеализированный случай, в котором территория узла имеет форму круга, центр узла совпадает с центром круга, а бесконечное число котельных рассредоточено равномерно по территории узла<sup>25</sup>.

**Теорема 15.** *Функция спроса  $D_i^B(p_i)$  на природный газ со стороны котельных узла  $i$  для данного идеализированного случая вычисляется следующим образом. Если  $c_i^b < e^d \sqrt{\frac{S_i^b}{\pi}}$ , то*

$$D_i^B(p_i) = \begin{cases} \frac{\pi \cdot v_i^b}{S_i^b \cdot e^{d^2}} (c_i^b - p_i)^2, & p_i \in [0, c_i^b], \\ 0, & p_i \in (c_i^b, +\infty). \end{cases} \quad (2.16)$$

Если  $c_i^b \geq e^d \sqrt{\frac{S_i^b}{\pi}}$ , то

$$D_i^B(p_i) = \begin{cases} v_i^b, & p_i \in \left[0, c_i^b - e^d \sqrt{\frac{S_i^b}{\pi}}\right], \\ \frac{\pi \cdot v_i^b}{S_i^b \cdot e^{d^2}} (c_i^b - p_i)^2, & p_i \in \left(c_i^b - e^d \sqrt{\frac{S_i^b}{\pi}}, c_i^b\right], \\ 0, & p_i \in (c_i^b, +\infty). \end{cases} \quad (2.17)$$

**Доказательство.** Радиус круга, представляющего собой территорию узла, равен  $\sqrt{\frac{S_i^b}{\pi}}$ . Для котельных, расположенных на расстоянии  $r \in [0, \sqrt{\frac{S_i^b}{\pi}}]$  от центра узла, предельные затраты на выработку тепла для имеющегося топлива равны  $c_i^b$ , а в случае использования природного газа -  $(p_i + e^d \cdot r)$ , где  $p_i$  - цена на природный газ в узле  $i$  (руб./т.у.т.). Из этого следует, что переход на газ выгоден, если  $r \leq \frac{c_i^b - p_i}{e^d}$ . Рассмотрим полосу котельных бесконечно малой ширины  $\Delta r$ , расположенную на расстоянии  $r$  от центра узла (рисунок 31). Ее площадь равна  $2\pi \cdot r \cdot \Delta r$ , а значит расход топлива котельными этой полосы составляет  $v_i^b \cdot \frac{2\pi \cdot r \cdot \Delta r}{S_i^b}$  (т.у.т./год). Таким образом, спрос на природный газ со стороны котельных узла вычисляется

<sup>25</sup> Данное предположение является сильно упрощающим, но допустимо с учетом отсутствия фиксированной компоненты в используемой оценке функции транспортных затрат для газопроводов (2.4) (оценка функции спроса на газ для равномерно рассредоточенных котельных на области небольшой площади с суммарным расходом топлива  $v$  аппроксимируется оценкой функции спроса на газ для одной котельной с расходом топлива  $v$ , расположенной в центре данной области).

следующим образом:

$$D_i^B(p_i) = \int_0^{\min\left(\max\left(\frac{c_i^b - p_i}{e^d}, 0\right), \sqrt{\frac{S_i^b}{\pi}}\right)} v_i^b \cdot \frac{2\pi \cdot r}{S_i^b} dr = \frac{\pi \cdot v_i^b}{S_i^b} \left( \min\left(\max\left(\frac{c_i^b - p_i}{e^d}, 0\right), \sqrt{\frac{S_i^b}{\pi}}\right) \right)^2.$$

Из последнего соотношения следует справедливость (2.16, 2.17). ■

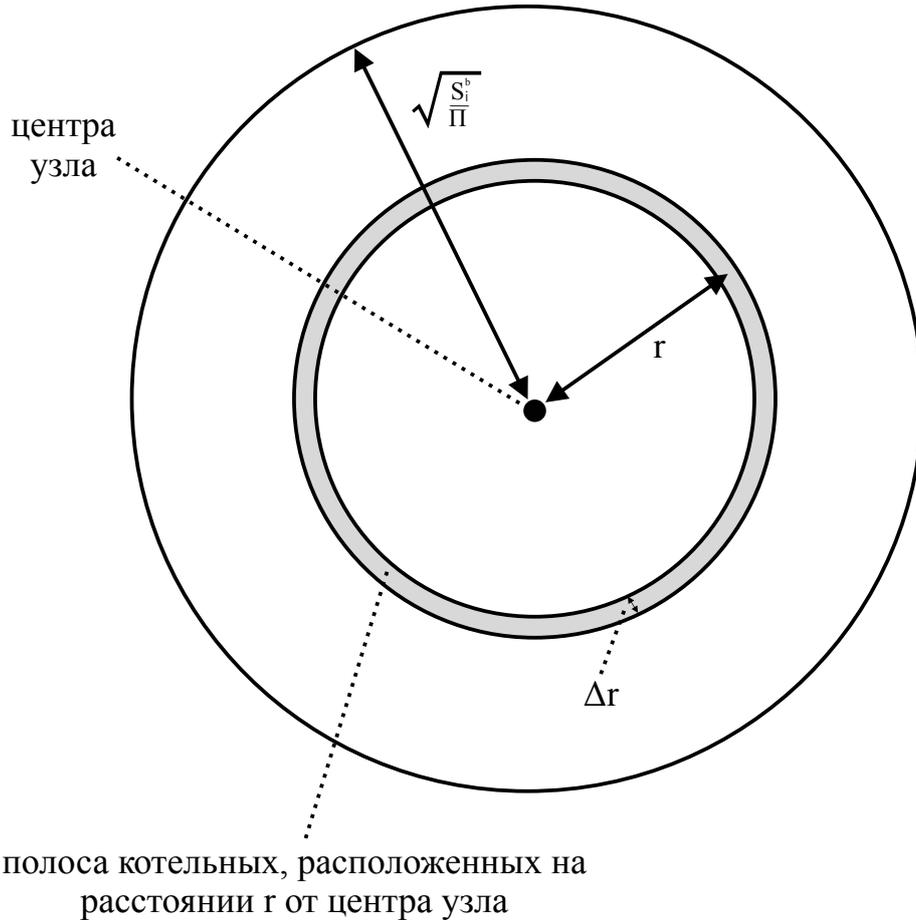


Рис. 31. Территория узла в форме круга с бесконечным числом котельных, рассредоточенных равномерно по территории узла

Полученные оценки (2.16, 2.17) также могут применяться для произвольной формы территории узла и любого количества котельных в качестве упрощения.

**Узел в форме прямоугольника.** Теперь рассмотрим случай, в котором территория узла имеет форму прямоугольника длины  $w$  и ширины  $S_i^b/w$ . Предположим, что центр узла совпадает с центром прямоугольника, а бесконечное число котельных рассредоточено равномерно по территории узла, аналогично случаю узла в форме круга. Обозначим

$$R(p_i) \equiv \frac{c_i^b - p_i}{e^d}.$$

**Теорема 16.** Функция спроса  $D_i^B(p_i)$  на природный газ со стороны котельных узла  $i$  для данного случая вычисляется следующим образом. Если  $R(p_i) \leq 0$ , то  $D_i^B(p_i) = 0$ . Иначе возможны следующие случаи.

1. Если  $(w/2)^2 + \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2 \leq R(p_i)^2$ , то

$$D_i^B(p_i) = v_i^b. \quad (2.18)$$

2. Если  $w/2 \geq R(p_i)$ ,  $\frac{S_i^b}{2w} \geq R(p_i)$ , то

$$D_i^B(p_i) = \frac{\pi \cdot v_i^b \cdot R(p_i)^2}{S_i^b}. \quad (2.19)$$

3. Если  $w/2 \leq R(p_i)$ ,  $\frac{S_i^b}{2w} \geq R(p_i)$ , то

$$D_i^B(p_i) = \frac{v_i^b}{S_i^b} \cdot \left[ w \cdot \sqrt{R(p_i)^2 - \frac{w^2}{4}} + 2 \cdot R(p_i)^2 \cdot \arcsin\left(\frac{w}{2 \cdot R(p_i)}\right) \right]. \quad (2.20)$$

4. Если  $(w/2)^2 + \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2 \geq R(p_i)^2$ ,  $w/2 \leq R(p_i)$ ,  $\frac{S_i^b}{2w} \leq R(p_i)$ , то

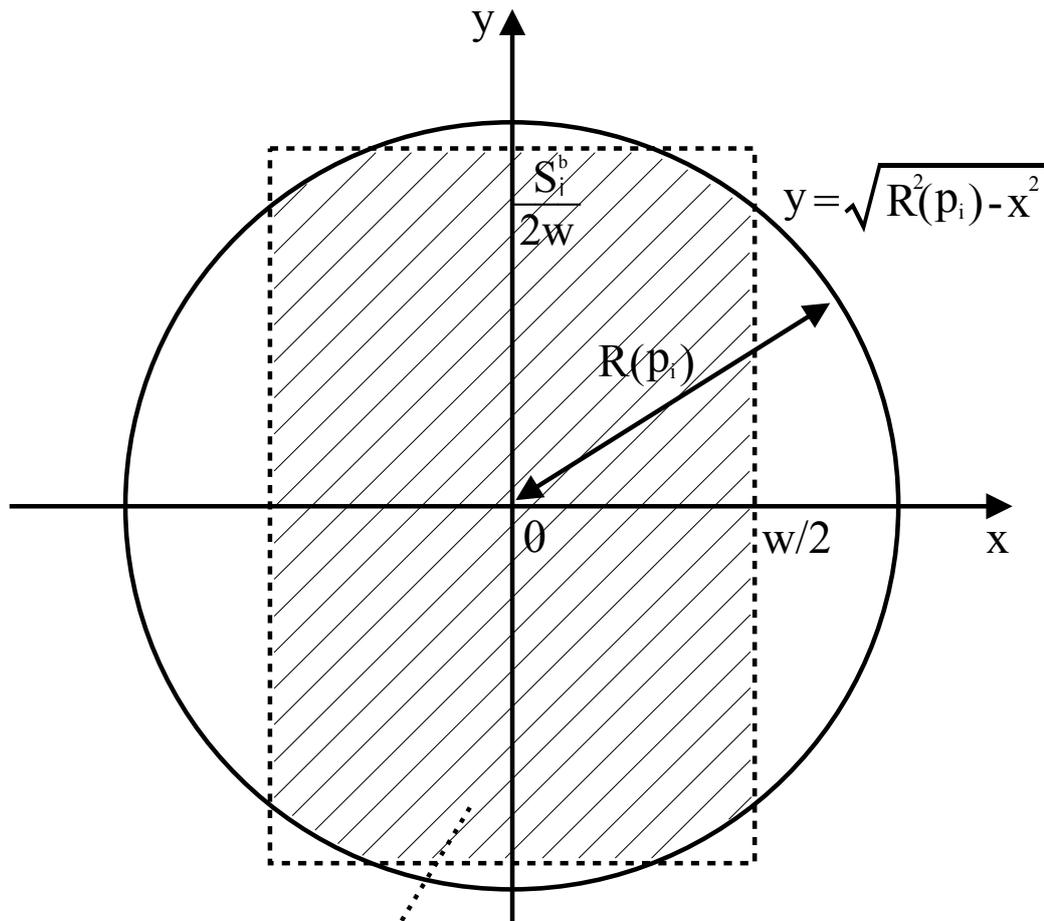
$$D_i^B(p_i) = \frac{v_i^b}{w} \cdot \sqrt{R(p_i)^2 - \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2} + \frac{v_i^b}{S_i^b} \cdot \left[ w \cdot \sqrt{R(p_i)^2 - \frac{w^2}{4}} + 2 \cdot R(p_i)^2 \cdot \arcsin\left(\frac{w}{2 \cdot R(p_i)}\right) \right] - \frac{2 \cdot v_i^b \cdot R(p_i)^2}{S_i^b} \cdot \arccos\left(\frac{S_i^b}{2 \cdot w \cdot R(p_i)}\right). \quad (2.21)$$

5. Если  $w/2 \geq R(p_i)$ ,  $\frac{S_i^b}{2w} \leq R(p_i)$ , то

$$D_i^B(p_i) = \frac{v_i^b}{w} \cdot \sqrt{R(p_i)^2 - \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2} + \frac{2 \cdot v_i^b \cdot R(p_i)^2}{S_i^b} \cdot \arcsin\left(\frac{S_i^b}{2 \cdot w \cdot R(p_i)}\right). \quad (2.22)$$

**Доказательство.** Аналогично случаю узла в форме круга показывается, что перевод произвольной котельной узла на газ выгоден, если расстояние от нее до центра узла не превышает  $\frac{c_i^b - p_i}{e^d}$ , где  $p_i$  - цена на природный газ в узле  $i$  (руб./т.у.т.). Таким образом, пересечение круга радиуса  $R(p_i) \equiv \frac{c_i^b - p_i}{e^d}$  с центром в центре узла и прямоугольника длины  $w$  и ширины  $S_i^b/w$  с центром в центре узла определяет область для тех котельных, которым выгоден переход на газ. На рисунке 32 показана данная область на системе координат с началом координат в центре узла. Часть границы данного круга, принадлежащая первой четверти координатной

плоскости, описывается соотношением  $y = \sqrt{R(p_i)^2 - x^2}$ .



область котельных, которым  
выгоден переход на газ

Рис. 32. Территория узла в форме прямоугольника с бесконечным числом котельных, рас-средоточенных равномерно по территории узла

Рассмотрим прямоугольную область котельных бесконечно малых ширины  $\Delta x$  и длины  $\Delta y$ , принадлежащую узлу. Ее площадь равна  $\Delta x \cdot \Delta y$ , а значит расход топлива котельными этой области составляет  $v_i^b \cdot \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{S_i^b}$  (т.у.т./год). Таким образом, спрос на природный газ со стороны котельных узла вычисляется следующим образом:

$$D_i^B(p_i) = 4 \cdot \int_0^{\min(w/2, R(p_i))} \left[ \int_0^{\min\left(\frac{S_i^b}{2w}, \sqrt{R(p_i)^2 - x^2}\right)} \frac{v_i^b \cdot dy}{S_i^b} \right] dx$$

$$= \frac{4 \cdot v_i^b}{S_i^b} \cdot \int_0^{\min(w/2, R(p_i))} \min\left(\frac{S_i^b}{2w}, \sqrt{R(p_i)^2 - x^2}\right) dx.$$

Рассмотрим пять случаев взаимного расположения прямоугольника, характеризующего территорию узла, и круга, определяющего область для тех котельных, которым выгоден переход на газ (рисунок 33).

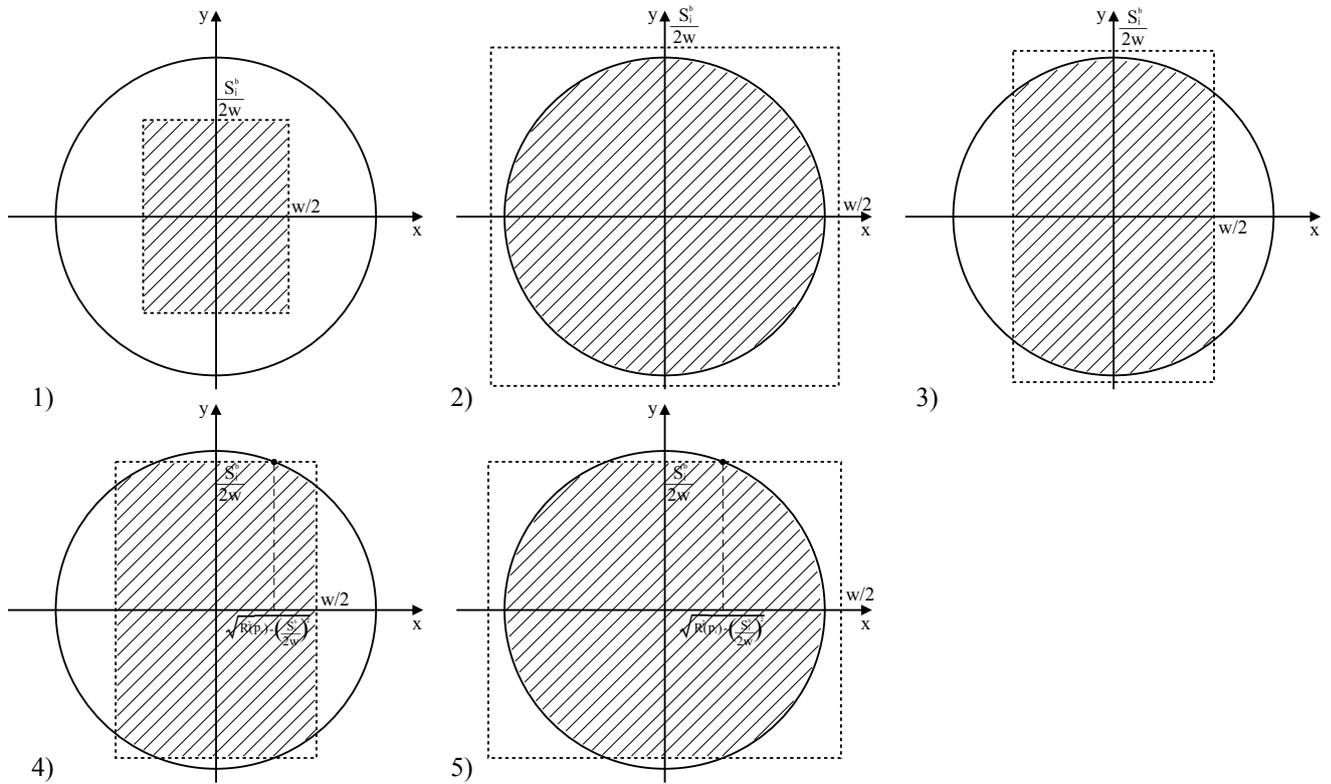


Рис. 33. Различные случаи взаимного расположения прямоугольника, характеризующего территорию узла, и круга, определяющего область для тех котельных, которым выгоден переход на газ: 1)  $(w/2)^2 + \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2 \leq R(p_i)^2$ ; 2)  $w/2 \geq R(p_i), \frac{S_i^b}{2w} \geq R(p_i)$ ; 3)  $w/2 \leq R(p_i), \frac{S_i^b}{2w} \geq R(p_i)$ ; 4)  $(w/2)^2 + \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2 \geq R(p_i)^2, w/2 \leq R(p_i), \frac{S_i^b}{2w} \leq R(p_i)$ ; 5)  $w/2 \geq R(p_i), \frac{S_i^b}{2w} \leq R(p_i)$

**1 случай:**  $(w/2)^2 + \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2 \leq R(p_i)^2$ . В данном случае прямоугольник целиком принадлежит кругу и  $D_i^B(p_i) = \frac{4 \cdot v_i^b}{S_i^b} \cdot \int_0^{w/2} \frac{S_i^b \cdot dx}{2w} = \frac{4 \cdot v_i^b}{S_i^b} \cdot \frac{S_i^b}{2w} \cdot w/2 = v_i^b$ , то есть всем котельным выгоден переход на газ.

**2 случай:**  $w/2 \geq R(p_i)$ ,  $\frac{S_i^b}{2w} \geq R(p_i)$ . В данном случае

$$\begin{aligned}
 D_i^B(p_i) &= \frac{4 \cdot v_i^b}{S_i^b} \cdot \int_0^{R(p_i)} \sqrt{R(p_i)^2 - x^2} \cdot dx \\
 &= \frac{4 \cdot v_i^b}{S_i^b} \cdot \left[ \frac{x}{2} \cdot \sqrt{R(p_i)^2 - x^2} + \frac{R(p_i)^2}{2} \cdot \arcsin \left( \frac{x}{R(p_i)} \right) \right] \Big|_{x=0}^{R(p_i)} \\
 &= \frac{4 \cdot v_i^b}{S_i^b} \cdot \left[ \frac{R(p_i)^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\pi \cdot v_i^b \cdot R(p_i)^2}{S_i^b}.
 \end{aligned}$$

**3 случай:**  $w/2 \leq R(p_i)$ ,  $\frac{S_i^b}{2w} \geq R(p_i)$ . В данном случае

$$\begin{aligned}
 D_i^B(p_i) &= \frac{4 \cdot v_i^b}{S_i^b} \cdot \int_0^{w/2} \sqrt{R(p_i)^2 - x^2} \cdot dx \\
 &= \frac{4 \cdot v_i^b}{S_i^b} \cdot \left[ \frac{x}{2} \cdot \sqrt{R(p_i)^2 - x^2} + \frac{R(p_i)^2}{2} \cdot \arcsin \left( \frac{x}{R(p_i)} \right) \right] \Big|_{x=0}^{w/2} \\
 &= \frac{4 \cdot v_i^b}{S_i^b} \cdot \left[ \frac{w}{4} \cdot \sqrt{R(p_i)^2 - \frac{w^2}{4}} + \frac{R(p_i)^2}{2} \cdot \arcsin \left( \frac{w}{2 \cdot R(p_i)} \right) \right] \\
 &= \frac{v_i^b}{S_i^b} \cdot \left[ w \cdot \sqrt{R(p_i)^2 - \frac{w^2}{4}} + 2 \cdot R(p_i)^2 \cdot \arcsin \left( \frac{w}{2 \cdot R(p_i)} \right) \right].
 \end{aligned}$$

**4 случай:**  $(w/2)^2 + \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2 \geq R(p_i)^2$ ,  $w/2 \leq R(p_i)$ ,  $\frac{S_i^b}{2w} \leq R(p_i)$ . В данном случае

$$\begin{aligned}
D_i^B(p_i) &= \frac{4 \cdot v_i^b}{S_i^b} \cdot \left[ \int_0^{\sqrt{R(p_i)^2 - \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2}} \frac{S_i^b}{2w} \cdot dx + \int_{\sqrt{R(p_i)^2 - \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2}}^{w/2} \sqrt{R(p_i)^2 - x^2} \cdot dx \right] \\
&= \frac{2 \cdot v_i^b}{w} \cdot \sqrt{R(p_i)^2 - \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2} \\
&\quad + \frac{4 \cdot v_i^b}{S_i^b} \cdot \left[ \frac{x}{2} \cdot \sqrt{R(p_i)^2 - x^2} + \frac{R(p_i)^2}{2} \cdot \arcsin\left(\frac{x}{R(p_i)}\right) \right] \Big|_{x=\sqrt{R(p_i)^2 - \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2}}^{w/2} \\
&= \frac{2 \cdot v_i^b}{w} \cdot \sqrt{R(p_i)^2 - \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2} \\
&\quad + \frac{2 \cdot v_i^b}{S_i^b} \cdot \left[ x \cdot \sqrt{R(p_i)^2 - x^2} + R(p_i)^2 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{R(p_i)}\right) \right] \Big|_{x=\sqrt{R(p_i)^2 - \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2}}^{w/2} = \frac{2 \cdot v_i^b}{w} \cdot \sqrt{R(p_i)^2 - \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2} \\
&\quad + \frac{v_i^b}{S_i^b} \cdot \left[ w \cdot \sqrt{R(p_i)^2 - \frac{w^2}{4}} + 2 \cdot R(p_i)^2 \cdot \arcsin\left(\frac{w}{2 \cdot R(p_i)}\right) \right] \\
&\quad - \frac{2 \cdot v_i^b}{S_i^b} \cdot \left[ \sqrt{R(p_i)^2 - \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2} \cdot \frac{S_i^b}{2w} + R(p_i)^2 \cdot \arcsin\left(\frac{\sqrt{R(p_i)^2 - \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2}}{R(p_i)}\right) \right] \\
&= \frac{v_i^b}{w} \cdot \sqrt{R(p_i)^2 - \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2} + \frac{v_i^b}{S_i^b} \cdot \left[ w \cdot \sqrt{R(p_i)^2 - \frac{w^2}{4}} + 2 \cdot R(p_i)^2 \cdot \arcsin\left(\frac{w}{2 \cdot R(p_i)}\right) \right] \\
&\quad - \frac{2 \cdot v_i^b \cdot R(p_i)^2}{S_i^b} \cdot \arccos\left(\frac{S_i^b}{2 \cdot w \cdot R(p_i)}\right).
\end{aligned}$$

**5 случай:**  $w/2 \geq R(p_i)$ ,  $\frac{S_i^b}{2w} \leq R(p_i)$ . В данном случае

$$\begin{aligned}
D_i^B(p_i) &= \frac{4 \cdot v_i^b}{S_i^b} \cdot \left[ \int_0^{\sqrt{R(p_i)^2 - \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2}} \frac{S_i^b}{2w} \cdot dx + \int_{\sqrt{R(p_i)^2 - \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2}}^{R(p_i)} \sqrt{R(p_i)^2 - x^2} \cdot dx \right] \\
&= \frac{2 \cdot v_i^b}{w} \cdot \sqrt{R(p_i)^2 - \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2} \\
&+ \frac{4 \cdot v_i^b}{S_i^b} \cdot \left[ \frac{x}{2} \cdot \sqrt{R(p_i)^2 - x^2} + \frac{R(p_i)^2}{2} \cdot \arcsin\left(\frac{x}{R(p_i)}\right) \right] \Bigg|_{x=\sqrt{R(p_i)^2 - \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2}}^{R(p_i)} \\
&= \frac{2 \cdot v_i^b}{w} \cdot \sqrt{R(p_i)^2 - \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2} \\
&+ \frac{2 \cdot v_i^b}{S_i^b} \cdot \left[ x \cdot \sqrt{R(p_i)^2 - x^2} + R(p_i)^2 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{R(p_i)}\right) \right] \Bigg|_{x=\sqrt{R(p_i)^2 - \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2}}^{R(p_i)} \\
&= \frac{2 \cdot v_i^b}{w} \cdot \sqrt{R(p_i)^2 - \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2} + \frac{\pi \cdot v_i^b \cdot R(p_i)^2}{S_i^b} \\
&- \frac{2 \cdot v_i^b}{S_i^b} \cdot \left[ \sqrt{R(p_i)^2 - \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2} \cdot \frac{S_i^b}{2w} + R(p_i)^2 \cdot \arcsin\left(\frac{\sqrt{R(p_i)^2 - \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2}}{R(p_i)}\right) \right] \\
&= \frac{v_i^b}{w} \cdot \sqrt{R(p_i)^2 - \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2} + \frac{\pi \cdot v_i^b \cdot R(p_i)^2}{S_i^b} - \frac{2 \cdot v_i^b \cdot R(p_i)^2}{S_i^b} \cdot \arcsin\left(\frac{\sqrt{R(p_i)^2 - \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2}}{R(p_i)}\right) \\
&= \frac{v_i^b}{w} \cdot \sqrt{R(p_i)^2 - \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2} + \frac{2 \cdot v_i^b \cdot R(p_i)^2}{S_i^b} \cdot \arccos\left(\frac{\sqrt{R(p_i)^2 - \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2}}{R(p_i)}\right) \\
&= \frac{v_i^b}{w} \cdot \sqrt{R(p_i)^2 - \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2} + \frac{2 \cdot v_i^b \cdot R(p_i)^2}{S_i^b} \cdot \arcsin\left(\frac{S_i^b}{2 \cdot w \cdot R(p_i)}\right).
\end{aligned}$$

Из рассмотренных случаев следует справедливость (2.18-2.22). ■

**Предприятия.** Крупные предприятия с большим потреблением топлива стоит выделять в отдельные узлы или помещать в центр узла. Средние и мелкие предприятия можно учитывать либо в виде отдельного узла, либо в виде одной из компонент узла (аналогично случаю ТЭС и ТЭЦ). Пусть  $Ind_i$  - множество предприятий в узле  $i \in N$ , которым требуется тепловая энергия для производства собственных товаров.

*Общая модель.* Пусть предприятие  $m \in Ind_i$  характеризуется следующими параметрами:

- $p_m$  - внешняя цена на производимый предприятием товар (руб./ед.);
- $v_m$  - объем потребляемой тепловой энергии, обеспечивающий выпуск единицы товара (т.у.т./ед.);
- $c_m$  - нетепловые затраты при производстве единицы товара (руб./ед.);
- $V_m^{\max}$  - мощность, т.е. максимальный объем выпуска (ед./год);
- $n_{m,a}, c_{m,r}, c_m^{g,b}, \eta_m^g, l_m$  - аналогично ТЭС и ТЭЦ.

Обозначим через  $c_m^g$  внутренние затраты на использование единицы природного газа (руб./т.у.т.), куда входят: затраты на транспортировку единицы газа от центра узла до станции, предельные приведенные капитальные затраты на прокладку соответствующего подводного участка газопровода, предельные приведенные капитальные затраты на подготовку котлоагрегатов:

$$c_m^g = e^d \cdot l_m + c_m^{g,b}.$$

Рассмотрим задачу максимизации прибыли предприятия  $m$ . Предположим, что  $c_m < p_m$  (в противном случае производить товар не выгодно ни при какой узловой цене на газ, т.е. спрос на газ отсутствует). Как и для случая ТЭС и ТЭЦ, упорядочим имеющиеся в распоряжении предприятия котлоагрегаты  $a_1, \dots, a_n$  по неубыванию затрат на производство единицы тепла  $c_i \equiv \frac{c_{m,r a_i}}{\eta_{a_i}}$  (руб./т.у.т.). Обозначим через  $V_i \equiv n_{m,a_i} \cdot V_{a_i}^{\max}$  (т.у.т./год) максимальный объем выработки тепловой энергии с помощью имеющихся у предприятия котлоагрегатов типа  $a_i$ . Пусть функция спроса  $D_m(p_i)$  определяет зависимость оптимального с точки зрения данной задачи объема потребляемого предприятием  $m$  природного газа (т.у.т./год) от узловой цены  $p_i$  на природный газ (руб./т.у.т.).

Обозначим

$$\widehat{D}_m(\widehat{p}) \equiv \begin{cases} \overline{D}_m(\widehat{p}), & \text{если } \overline{D}_m(\widehat{p}) \geq 0 \text{ и } \widehat{p} \leq \frac{p_m - c_m}{v_m}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2.23)$$

где  $\overline{D}_m(\widehat{p})$  определяется аналогично (2.13) с заменой  $d_s$  на  $v_m \cdot V_m^{\max}$  (рисунок 34).

**Теорема 17.** *Функция спроса  $D_m(p_i)$  на природный газ со стороны предприятия  $m$  узла  $i$  вычисляется следующим образом:*

$$D_m(p_i) = \frac{1}{\eta_m^g} \cdot \widehat{D}_m \left( \frac{p_i + c_m^g}{\eta_m^g} \right).$$

**Доказательство.** Доказательство данной теоремы в целом аналогично доказательству тео-

ремы 14. Необходимо лишь учесть, что

- 1) кусочно-постоянная функция остаточного спроса на тепловую энергию для данного случая имеет вид (2.23);
- 2) величина  $\frac{p_m - c_m}{v_m}$  (руб./т.у.т.) равна цене на тепловую энергию, при которой предприятию становится невыгодно производить товар;
- 3) величина  $v_m \cdot V_m^{\max}$  (т.у.т./год) равна объему тепловой энергии, необходимому для полной загрузки производства.

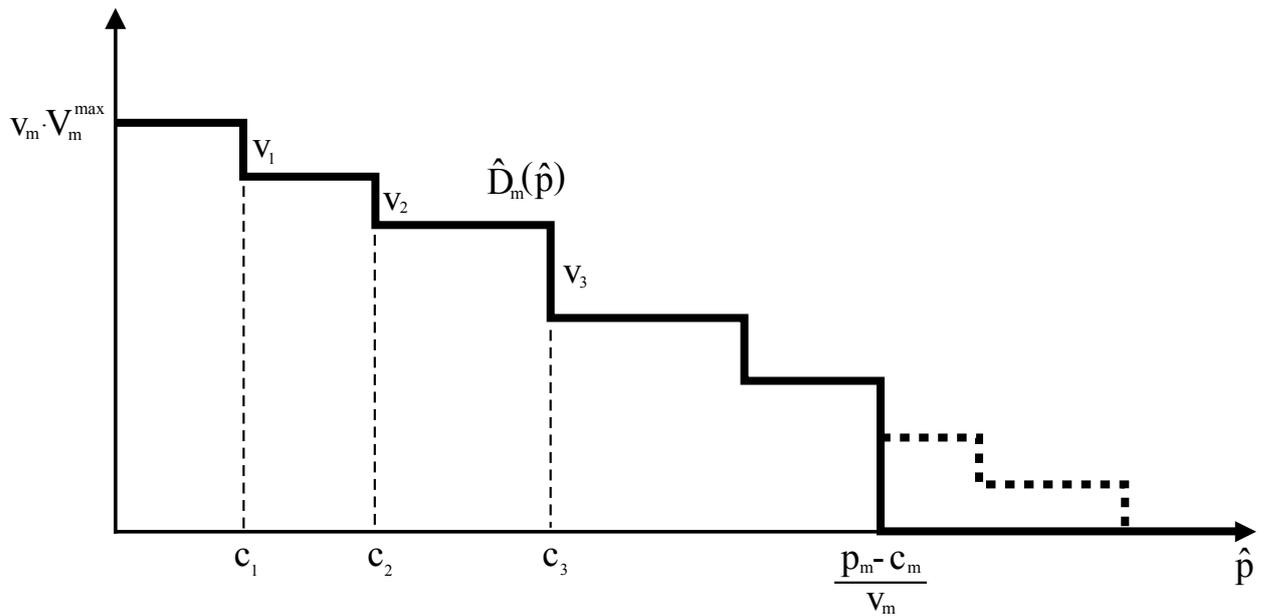


Рис. 34. Вид функции остаточного спроса  $\hat{D}_m(\hat{p})$  для предприятий

Суммарный спрос в узле  $i$ , формируемый всеми предприятиями, равен

$$D_i^{Ind}(p_i) = \sum_{m \in Ind_i} D_m(p_i).$$

*Упрощенная модель.* Упрощенная модель для оценки спроса для предприятия полностью идентична аналогичной модели для ТЭС и ТЭЦ. Считаем, что предприятие  $m \in Ind_i$  выделено в отдельный узел и задается параметрами  $v_m$  и  $c_m$  - годовым расходом топлива (т.у.т./год) и затратами на добычу и доставку единицы используемого вида топлива (руб./т.у.т.) соответственно. Функция спроса на природный газ для предприятия  $m$  имеет

следующий вид:

$$D_m(p_i) = \begin{cases} v_m, & p_i \in [0, c_m), \\ [0, v_m], & p_i = c_m, \\ 0, & p_i \in (c_m, +\infty), \end{cases}$$

где  $p_i$  - цена на природный газ в узле  $i$  (руб./т.у.т.). Суммарный спрос  $D_i^{Ind}(p_i)$ , формируемый всеми предприятиями узла, совпадает с  $D_m(p_i)$ .

**Сельское население.** Сельские населенные пункты следует выделять в отдельные узлы. Считаем, что для каждого населенного пункта есть возможность подключения жилых домов к газу для целей отопления и приготовления пищи, причем все жилые дома обладают примерно одинаковыми характеристиками и рассредоточены равномерно по территории узла. В случае газификации жилой дом (в котором, по предположению, проживает одна семья численностью  $h^{Vil}$  человек) снабжается газовым котлом, характеристики которого общие для всех узлов:  $C^{Vil,br}$  (руб./год) - приведенная к годовому периоду стоимость (приведение осуществляется аналогично пункту 1.1.2.),  $\eta^{Vil,br}$  - КПД. При газификации населенного пункта, считаем, строится распределительная сеть внутри населенного пункта, при этом каждый жилой дом соединяется газопроводом с центром узла<sup>26</sup>.

Считаем, что сельское населения узла  $i \in N$  характеризуется следующими параметрами:

- $v_i^{Vil}$  - текущий суммарный конечный объем потребляемой населенным пунктом тепловой энергии (т.у.т./год);
- $\eta_i^{Vil}$  - средний КПД имеющегося оборудования для сжигания топлива;
- $c_i^{Vil}$  - средние текущие предельные затраты на добычу и доставку необходимого для выработки тепловой энергии топлива (руб./т.у.т.);
- $S_i^{Vil}$  - площадь территории узла (км<sup>2</sup>).
- $G_i^{Vil}$  - численность населения.

Для оценки транспортных затрат при строительстве и функционировании распределительной сети используем формулу (2.4).

**Узел в форме круга.** Рассмотрим идеализированный случай, как и в упрощенной модели для оценки спроса со стороны котельных, в котором территория узла имеет форму круга, центр узла совпадает с географическим центром круга, а бесконечное число жилых

<sup>26</sup> Предположение о соединении каждого жилого дома с центром узла газопроводом является сильно упрощающим, но допустимо с учетом отсутствия фиксированной компоненты в используемой оценке функции транспортных затрат для газопроводов (2.4) (оценка транспортных затрат при прокладке  $K$  газопроводов для  $K$  жилых домов, расположенных недалеко друг от друга, аппроксимируется оценкой транспортных затрат при прокладке одного общего газопровода, использующегося всеми данными домами).

домов рассредоточено равномерно по всей территории узла.

Обозначим

$$\bar{c}_i^{Vil} = \eta^{Vil,br} \left( \frac{c_i^{Vil}}{\eta_i^{Vil}} - c_i^{Vil,br} \right), \quad (2.24)$$

где

$$c_i^{Vil,br} = \frac{C^{Vil,br} \cdot G_i^{Vil}}{v_i^{Vil} \cdot h^{Vil}}. \quad (2.25)$$

**Теорема 18.** *Функция спроса  $D_i^{Vil}(p_i)$  на природный газ со стороны сельского населения узла  $i$  для данного идеализованного случая вычисляется следующим образом.*

Если  $\frac{c_i^{Vil}}{\eta_i^{Vil}} < c_i^{Vil,br}$ , то

$$D_i^{Vil}(p_i) = 0. \quad (2.26)$$

Если  $0 \leq \bar{c}_i^{Vil} < e^d \sqrt{\frac{S_i^{Vil}}{\pi}}$ , то

$$D_i^{Vil}(p_i) = \frac{1}{\eta^{Vil,br}} \cdot \begin{cases} \frac{\pi \cdot v_i^{Vil}}{S_i^{Vil} \cdot e^{d^2}} (\bar{c}_i^{Vil} - p_i)^2, & p_i \in [0, \bar{c}_i^{Vil}], \\ 0, & p_i \in (\bar{c}_i^{Vil}, +\infty). \end{cases} \quad (2.27)$$

Если  $\bar{c}_i^{Vil} \geq e^d \sqrt{\frac{S_i^{Vil}}{\pi}}$ , то

$$D_i^{Vil}(p_i) = \frac{1}{\eta^{Vil,br}} \cdot \begin{cases} v_i^{Vil}, & p_i \in \left[ 0, \bar{c}_i^{Vil} - e^d \sqrt{\frac{S_i^{Vil}}{\pi}} \right], \\ \frac{\pi \cdot v_i^{Vil}}{S_i^{Vil} \cdot e^{d^2}} (\bar{c}_i^{Vil} - p_i)^2, & p_i \in \left( \bar{c}_i^{Vil} - e^d \sqrt{\frac{S_i^{Vil}}{\pi}}, \bar{c}_i^{Vil} \right], \\ 0, & p_i \in (\bar{c}_i^{Vil}, +\infty). \end{cases} \quad (2.28)$$

**Доказательство.** Число жилых домов в узле равно  $\frac{G_i^{Vil}}{h^{Vil}}$ , поэтому при полной газификации населенного пункта приведенные суммарные затраты на покупку газовых котлов равны  $\frac{C^{Vil,br} \cdot G_i^{Vil}}{h^{Vil}}$  (руб./год), а стоимость газового котла в перерасчете на единицу вырабатываемого тепла выражается величиной (2.25).

При применении рассуждений, аналогичных используемым при оценке спроса для тепловых котельных, с учетом стоимости газовых котлов и численности населения, выводится следующая формула для оценки функции спроса на природный газ со стороны сельского

населения узла:

$$D_i^{Vil}(p_i) = \frac{1}{\eta^{Vil,br}} \cdot \frac{\pi \cdot v_i^{Vil}}{S_i^{Vil}} \left( \min \left( \max \left( \frac{\eta^{Vil,br} \left( \frac{c_i^{Vil}}{\eta_i^{Vil}} - c_i^{Vil,br} \right) - p_i}{e^d}, 0 \right), \sqrt{\frac{S_i^{Vil}}{\pi}} \right) \right)^2.$$

Из последнего соотношения следует справедливость (2.26-2.28). ■

Полученные оценки (2.26-2.28) также могут применяться для произвольной формы территории узла и любой численности населения в качестве упрощения.

**Узел в форме прямоугольника.** Теперь рассмотрим случай, в котором территория узла имеет форму прямоугольника длины  $w$  и ширины  $S_i^b/w$ . Предположим, что центр узла совпадает с центром прямоугольника, а бесконечное число котельных рассредоточено равномерно по территории узла, аналогично случаю узла в форме круга. Обозначим

$$R(p_i) \equiv \frac{\bar{c}_i^{Vil} - p_i}{e^d},$$

где  $\bar{c}_i^{Vil}$  определяется аналогично (2.24).

**Теорема 19.** *Функция спроса  $D_i^{Vil}(p_i)$  на природный газ со стороны сельского населения узла  $i$  для данного случая вычисляется следующим образом. Если  $R(p_i) \leq 0$ , то  $D_i^{Vil}(p_i) = 0$ .*

*Иначе возможны следующие случаи.*

1. Если  $(w/2)^2 + \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2 \leq R(p_i)^2$ , то

$$D_i^{Vil}(p_i) = \frac{v_i^b}{\eta^{Vil,br}}. \quad (2.29)$$

2. Если  $w/2 \geq R(p_i)$ ,  $\frac{S_i^b}{2w} \geq R(p_i)$ , то

$$D_i^{Vil}(p_i) = \frac{\pi \cdot v_i^b \cdot R(p_i)^2}{\eta^{Vil,br} \cdot S_i^b}. \quad (2.30)$$

3. Если  $w/2 \leq R(p_i)$ ,  $\frac{S_i^b}{2w} \geq R(p_i)$ , то

$$D_i^{Vil}(p_i) = \frac{v_i^b}{\eta^{Vil,br} \cdot S_i^b} \cdot \left[ w \cdot \sqrt{R(p_i)^2 - \frac{w^2}{4}} + 2 \cdot R(p_i)^2 \cdot \arcsin \left( \frac{w}{2 \cdot R(p_i)} \right) \right]. \quad (2.31)$$

4. Если  $(w/2)^2 + \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2 \geq R(p_i)^2$ ,  $w/2 \leq R(p_i)$ ,  $\frac{S_i^b}{2w} \leq R(p_i)$ , то

$$D_i^{Vil}(p_i) = \frac{v_i^b}{\eta^{Vil,br} \cdot w} \cdot \sqrt{R(p_i)^2 - \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2} + \frac{v_i^b}{\eta^{Vil,br} \cdot S_i^b} \cdot \left[ w \cdot \sqrt{R(p_i)^2 - \frac{w^2}{4}} + 2 \cdot R(p_i)^2 \cdot \arcsin\left(\frac{w}{2 \cdot R(p_i)}\right) \right] - \frac{2 \cdot v_i^b \cdot R(p_i)^2}{\eta^{Vil,br} \cdot S_i^b} \cdot \arccos\left(\frac{S_i^b}{2 \cdot w \cdot R(p_i)}\right). \quad (2.32)$$

5. Если  $w/2 \geq R(p_i)$ ,  $\frac{S_i^b}{2w} \leq R(p_i)$ , то

$$D_i^{Vil}(p_i) = \frac{v_i^b}{\eta^{Vil,br} \cdot w} \cdot \sqrt{R(p_i)^2 - \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2} + \frac{2 \cdot v_i^b \cdot R(p_i)^2}{\eta^{Vil,br} \cdot S_i^b} \cdot \arcsin\left(\frac{S_i^b}{2 \cdot w \cdot R(p_i)}\right). \quad (2.33)$$

Доказательство теоремы основано на применении рассуждений, аналогичных используемым в доказательствах теорем 16 и 18.

Стоит отметить, что в данной модели не предполагается наличие в сельских населенных пунктах централизованного отопления. Если же оно есть, то соответствующий централизованным котельным спрос следует считать согласно описанной в пункте «тепловые котельные» модели. При этом при расчете спроса, относящегося к индивидуально отопляемым домам, следует скорректировать описанные выше параметры  $v_i^{Vil}$  и  $G_i^{Vil}$ , убрав из рассмотрения часть населения, использующую централизованное отопление.

**Суммарный спрос и полезность потребления.** Функция спроса на газ в рассматриваемом узле равна сумме полученных компонент:

$$D_i(p_i) = D_i^{TPS}(p_i) + D_i^B(p_i) + D_i^{Ind}(p_i) + D_i^{Vil}(p_i).$$

Функция полезности потребления  $U_i(v_i^d)$  связана с суммарной функцией спроса  $D_i(p_i)$  соотношениями (1.11).

## 2.6. Анализ перспектив газификации Иркутской области

Несмотря на очевидные преимущества природного газа по сравнению с другими углеводородами, многие регионы России все еще не газифицированы. Стремительное развитие

отечественного газового сектора в последнее десятилетие, полученный опыт при реализации таких масштабных газотранспортных проектов, как «Сила Сибири» и «Северный поток - 2», а также отказ некоторых западных стран от российского газа дают основание рассматривать возможность подключения к трубопроводному газу новых регионов и городов нашей страны. В связи с этим актуальной становится задача выявления наиболее перспективных схем развития газотранспортной сети России. Для решения этой задачи необходимо уметь оценивать экономический потенциал газификации конкретных районов страны. В этом параграфе оцениваются перспективы газификации Иркутской области. Большая часть используемых в нем данных взята из указов губернатора Иркутской области об утверждении схем и программ развития электроэнергетики [2–4].

Иркутская область расположена на территории 767.9 тыс. км<sup>2</sup> с населением 2 357<sup>27</sup> тыс. чел. Население характеризуется низкой плотностью (3.07 чел./км<sup>2</sup> при средней по стране 8.58 чел./км<sup>2</sup>) и крайне неравномерным размещением. Наиболее густо заселены южная и юго-западная части области по берегам р. Ангары и вдоль Транссибирской железной дороги. Городское население составляет 73%.

Водные ресурсы, среди которых стоит выделить крупные реки - Лену, Ангару, Нижнюю Тунгуску, а также озеро Байкал, обеспечивают регион пресной водой, рыбой, гидроэнергией и являются важнейшей транспортной составляющей (на долю водного транспорта приходится около 10% грузооборота области). Наиболее развитые виды экономической деятельности - металлургия, горнодобывающая и нефтехимическая промышленность, лесопромышленный комплекс и транспорт. Сельское хозяйство и сфера обслуживания развиты слабо.

Основным топливом в Сибирском федеральном округе является уголь. Это связано, во-первых, с развитостью угольной добычи в регионе, а во-вторых, с отсутствием доступа к трубопроводному газу. На территории Иркутской области находится Ковыктинское газоконденсатное месторождение - крупнейшее по запасам газа на востоке России (1.8 трлн м<sup>3</sup>, [84]). Данное месторождение вместе с Чаяндинским (Якутия) образуют ресурсную базу для поставок газа в Китай по газопроводу «Сила Сибири». Вывод месторождения на проектную мощность планируется в 2033 году.

Иркутская область только в 2021 году вошла в программу газификации регионов России [85]. На Петербургском международном экономическом форуме в июне 2022 года губернатор Иркутской области Игорь Кобзев и председатель правления ПАО «Газпром» Алексей Миллер подписали актуализированную программу развития газоснабжения и газификации Иркутской области на 2021-2025 годы [86].

---

<sup>27</sup> На 1 января 2022 года, [83].

### 2.6.1. Обзор основных потенциальных потребителей природного газа в регионе

**ТЭС и ТЭЦ.** Централизованное производство электроэнергии в области осуществляется 4 гидроэлектростанциями и 14 теплоэлектроцентралями, при этом на долю ГЭС приходится 69.7% мощностей, на долю ТЭЦ - 30.3%. Суммарная мощность всех электростанций составляет 13 065.8 МВт. Все ТЭЦ области используют паровые котлы и турбоагрегаты, при этом 99% используемого топлива - это твердое топливо (в основном уголь). Также в области присутствуют около 40 мелких электростанций, снабжающих изолированные от централизованной энергосистемы (ЦЭ) населенные пункты. Их суммарная мощность равна 19.1 МВт.

При переводе ТЭЦ с твердого топлива на природный газ необходимо обеспечить сохранение следующих трех параметров паровых котлов: паропроизводительность, выходное давления пара и выходная температура пара. В этом случае модернизации подлежит только та часть оборудования ТЭЦ, которая отвечает за выработку пара. Следует отдельно отметить, что также возможно использование угольных котлоагрегатов с незначительной модернизацией. В последнем случае КПД котлоагрегатов, считаем, не меняется.

За 2021 год ГЭС и ТЭЦ Иркутской области выработали 65 040 млн кВт·ч, из которых 11 650 млн кВт·ч выработано на ТЭЦ (17.9%). За этот же год электропотребление в ЦЭ Иркутской области составило 59 256.2 млн кВт·ч. Помимо электроэнергии, на ТЭЦ за 2021 год выработано 25.25 млн Гкал тепловой энергии (68.9% от суммарной выработки в области без учета электробойлерных установок и индивидуальных отопительных печей).

В качестве топлива на ТЭЦ в 2021 году потреблено около 7 829.1<sup>28</sup> тыс. т.у.т. угля и прочего твердого топлива (дрова, щепа), остальное (около 1%) - жидкое топливо и газ. При предположении о сохранении КПД котельного оборудования, для полной замены на газ угля и прочего твердого топлива на ТЭЦ потребуется 6.78 млрд м<sup>3</sup> газа в год. Подробные данные о всех ТЭЦ Иркутской области приведены в таблице 5.

---

<sup>28</sup> Эта величина приблизительная, т.к. для 2 из 14 ТЭЦ данные за 2021 год отсутствовали, для них использовались данные за предыдущие года.

Таблица 5. Показатели ТЭЦ Иркутской области за 2021 год

Название	Координаты	Расход угля и прочего твердого топлива, т.у.т. ( $v_s$ )	Выработано электроэнергии, млн кВт·ч	Отпуск тепла, Гкал	Установленная электрическая мощность, МВт	Установленная тепловая мощность, Гкал/ч
Ново-Зиминская ТЭЦ (НЗТЭЦ)	54.032, 102.032	564 022	1 086.30	1 570 277	260	818.7
Ново-Иркутская ТЭЦ (НИТЭЦ)	52.247, 104.204	1 286 090	2 615.16	5 141 745	708	1 729.1
Участок ТИиТС Иркутской ТЭЦ-6 (ТЭЦ-7)	56.306, 101.725	216 998	65.35	1 356 475	12	300.8
Шелеховский участок Ново-Иркутской ТЭЦ (ТЭЦ-5)	52.182, 104.093	119 824	88.82	632 154	18	346.7
Иркутская ТЭЦ-6	56.122, 101.602	517 992	646.92	2 291 939	270	1 442.6
Иркутская ТЭЦ-9	52.532, 103.936	1 404 918	1 790.02	6 159 389	540	2398.6
Иркутская ТЭЦ-10	52.461, 103.978	1 164 752	2 991.47	325 176	1 110	563.0
Иркутская ТЭЦ-11	52.782, 103.603	340 706	543.43	948 676	320.3	1 056.9
Иркутская ТЭЦ-12	53.124, 103.134	67 588	51.80	363 545	12	217.5
Иркутская ТЭЦ-16	56.570, 104.141	97 072	77.23	530 208	18	322.5
Усть-Илимская ТЭЦ	58.049, 102.806	438 623	779.40	1 810 627	515	1 015.0
ТЭЦ ООО «Тепло-снабжение» (Байкальская ТЭЦ)	51.515, 104.182	51 247	59.13	н/д	24	282.8
ТЭЦ АО «Группа Илим» в г. Братск	56.111, 101.457	919 729 (оценка)	500.80	н/д	101	н/д
ТЭЦ АО «Группа Илим» в г. Усть-Илимск	58.043, 102.805	639 520 (оценка)	348.88	н/д	44.4	н/д
<b>Итого</b>		<b>7 829 081</b>	<b>11 644.71</b>	<b>21 130 211</b>	<b>3 952.7</b>	<b>10 494.2</b>

**Тепловые котельные.** В Иркутской области на начало 2021 года в выработке тепловой энергии, помимо ТЭЦ, участвуют 991 котельная и большое количество теплоутилизационных установок (ТУУ) и индивидуальных отопительных печей (ИОП). Из суммарной выработанной за 2021 год (без учета электробойлерных установок и ИОП) 36.66 млн Гкал тепловой энергии котельными и ТУУ выработано 11.41 млн Гкал (31.1%).

Котельными Иркутской области за 2019<sup>29</sup> год потреблено 1 137.2 тыс. т.у.т. угля, 112.0 тыс. т.у.т. жидкого топлива, 21.0 тыс. т.у.т. электроэнергии, 7.5 тыс. т.у.т. газа и 82.0 тыс. т.у.т. прочего твердого топлива. Для полной замены угля и прочего твердого топлива в котельных на природный газ потребуется 1.06 млрд м<sup>3</sup> газа в год. Подробные данные о котельных приведены в таблице 6.

<sup>29</sup> На момент выполнения исследования данные о расходе топлива котельными Иркутской области за более поздние года отсутствовали.

Таблица 6. Показатели котельных Иркутской области за 2019 год

Название муниципального образования	Координаты	Площадь муниципального образования, км <sup>2</sup> (2020, $S_i^b$ )	Количество котельных, шт. (2019)	Расход угля, т (2019)	Расход прочего твердого топлива, т (2019)	Расход угля и прочего твердого топлива, т.у.т. (оценка, 2019, $v_i^b$ )
г. Братск	56.152, 101.634	432	7	96 508	1 499	59 063
г. Зима	53.921, 102.049	53	11	31 024	0	18 859
г. Иркутск	52.290, 104.281	277	34	401 378	0	243 987
г. Свирск	53.067, 103.342	39	4	45 474	0	27 642
г. Тулун	54.557, 100.578	134	24	108 399	0	65 893
г. Усть-Илимск	57.959, 102.735	227	3	0	0	0
г. Черемхово	53.137, 103.090	119	19	12 170	0	7 398
Ангарский р-н	52.349, 103.695	1 149	3	0	0	0
Балаганский р-н	54.668, 102.888	6 347	21	3 899	1 927	2 883
Бодайбинский р-н	58.522, 115.853	92 171	22	77 418	0	47 060
Братский р-н	55.720, 101.761	30 838	56	96 127	12 985	61 888
Жигаловский р-н	54.945, 105.364	21 818	14	3 114	2 774	2 631
Заларинский р-н	53.281, 101.570	7 617	30	35 659	0	21 676
Зиминский р-н	53.760, 101.539	7 019	27	11 427	0	6 946
Иркутский р-н	52.172, 104.897	11 688	36	33 221	1 251	20 527
Казачинско-Ленский р-н	55.781, 107.836	33 276	11	40 069	2 497	25 021
Катангский р-н	60.832, 107.434	139 163	8	0	0	0
Качугский р-н	54.109, 106.627	31 395	42	3 837	20 326	7 741
Киренский р-н	57.978, 109.212	43 905	18	10 285	52 940	20 339
Куйтунский р-н	54.529, 101.600	11 147	44	11 795	2 608	7 864
Мамско-Чуйский р-н	58.106, 112.291	43 134	9	27 027	0	16 429
Нижнеилимский р-н	56.865, 103.759	18 879	26	16 651	105 205	38 115
Нижнеудинский р-н	54.589, 99.106	49 564	79	92 715	11 028	59 294
Ольхонский р-н	53.091, 107.194	15 895	13	5 500	1 200	3 663
Слюдянский р-н	51.657, 103.718	6 301	21	149 802	0	91 061
Тайшетский р-н	55.553, 97.814	27 725	63	203 194	0	123 516
Тулунский р-н	54.178, 100.275	13 870	38	12 421	1 060	7 833
Усольский р-н	52.416, 103.215	6 252	37	33 099	244	20 185
Усть-Илимский р-н	57.593, 101.640	36 596	13	23 753	20 485	19 889
Усть-Кутский р-н	56.950, 105.911	34 604	21	152 743	57 173	108 061
Усть-Удинский р-н	55.135, 103.890	20 110	18	6 435	3 550	4 856
Черемховский р-н	52.772, 102.282	9 926	23	40 995	1 040	25 196
Чунский р-н	56.765, 99.702	28 036	31	47 845	8 377	31 313
Шелеховский р-н	52.029, 103.848	2 014	16	6 464	0	3 929
Аларский р-н	53.318, 102.759	2 651	36	9 921	0	6 030
Баяндаевский р-н	53.138, 105.571	3 756	20	3 358	0	2 041
Боханский р-н	53.151, 103.920	3 678	32	4 900	0	2 979
Нукутский р-н	53.751, 102.881	2 473	22	4 082	0	2 481
Осинский р-н	53.603, 104.042	4 402	18	1 300	0	790
Эхирит-Булагатский р-н	52.922, 104.919	5 153	25	6 777	0	4 120
<b>Итого</b>			<b>995</b>	<b>1 870 785</b>	<b>308 169</b>	<b>1 219 200</b>

**Остальное потребление.** За 2020<sup>30</sup> год потребление угля и прочего твердого топлива в Иркутской области без учета потребления ТЭЦ и котельными составило всего 603<sup>31</sup> тыс. т.у.т., при этом в имеющихся данных отсутствует детализация потребления по различным населенным пунктам и предприятиям. Поэтому при построении оценки функции спроса на природный газ для Иркутской области решено не учитывать потенциальное потребление предприятиями и сельским населением.

### 2.6.2. Подготовка исходных параметров задачи

Для оценки перспектив газификации Иркутской области построим модель рынка природного газа, состоящего из производителей, потребителей и транспортной системы. Считаем, что ожидаемые процентные ставки по банковским вкладам равны уровням инфляции. Расчет ведем в ценах на начало 2022 года.

В качестве производящих узлов используем два газовых месторождения, являющиеся ресурсной базой для газопровода «Сила Сибири»: Ковыктинское и Чаяндинское (таблица 7). Оценим функцию производственных затрат соотношением (2.11), т.е. считаем, что предельные производственные затраты постоянны и равны 2 095 руб./т.у.т.

Таблица 7. Производящие узлы рынка природного газа Иркутской области

Номер узла	Производитель	Координаты (приблизительное местоположение)
1	Ковыктинское месторождение	55.385, 106.124
2	Чаяндинское месторождение	59.826, 110.919

В качестве потребителей рассмотрим 14 ТЭЦ и 40 муниципальных образований области. Для последних учтем спрос со стороны котельных. Функции спроса на природный газ зададим согласно формулам (2.15) и (2.16, 2.17), используя полученную в пункте 2.3.2. оценку для предельных транспортных затрат для газопроводов распределительных сетей  $e^d = 485.8$  (руб./((т.у.т.×км))) и информацию из таблиц 5 и 6. Для оценки затрат на добычу и доставку единицы используемого вида топлива (параметры  $c_s$  и  $c_i^b$ ) учтем данные из [87], согласно которым в 2011 году стоимость поставки угля для ТЭЦ Иркутской области составляла 347-1 042 руб. за тонну, при этом цены различались для разных марок угля и разных

<sup>30</sup> На момент выполнения исследования данные за более поздние года отсутствовали.

<sup>31</sup> Эта величина приблизительная, поскольку в данных о потреблении ресурсов в [2] присутствуют значительные статистические расхождения.

месторождений. В ценах на начало 2022 года стоимость поставки угля составляла бы 1 140-3 425 руб./т.у.т. Таким образом, средние затраты<sup>32</sup> на добычу и доставку единицы угля без учета наценки производителя можно взять равными 1 500-2 500 руб./т.у.т.

Также стоит учесть экологическую составляющую, связанную с тем, что уровень загрязнения окружающей среды при использовании угля значительно превышает аналогичные показатели для природного газа, который считается экологичным видом топлива. Учетом эту составляющую, добавив штрафной модификатор в параметры  $c_s$  и  $c_i^b$ . Рассмотрим 7 вариантов значений данных параметров: 1 500, 2 000, 2 500, 3 000, 3 500, 5 000, 7 000 (руб./т.у.т.).

Для оценки штрафного модификатора можно использовать величину используемого во многих странах углеродного налога. Данный налог взимается при выбрасывании в атмосферу диоксида углерода ( $CO_2$ ) и пропорционален объему выброса. Ставка данного налога может сильно варьироваться для разных стран. Например, на 1 апреля 2022 г. во Франции ставка налога составляла 45 евро за тонну  $CO_2$  [88]. Известно, что для выработки одного и того же объема тепловой энергии при сжигании угля в атмосферу выбрасывается больше  $CO_2$ , чем при сжигании природного газа. Согласно [63], данная разница составляет 1 171 кг.  $CO_2$  на т.у.т. вырабатываемого тепла. А значит при ставке налога 45 евро за тонну  $CO_2$  данной разнице соответствует налог 52.7 евро или 4486 руб. (согласно курсу валют на 1 января 2022 г.), что при учете затрат на добычу и доставку единицы угля соответствует сценариям 6-7. Однако необходимо иметь в виду, что сжигание угля также приводит к выбросу в атмосферу и других загрязняющих веществ, помимо диоксида углерода. Данные выбросы также могут быть учтены в штрафном модификаторе.

Все потребляющие узлы разобьем на три категории в соответствии с суммарным расходом топлива:

- расход более 100 000 т.у.т./год (категория 1);
- расход в пределах 20 000-100 000 т.у.т./год (категория 2);
- расход менее 20 000 т.у.т./год (категория 3).

Данные по потребляющим узлам представлены в таблицах 8 и 9.

<sup>32</sup> При оценке средних затрат не учитывалось влияние удаленности потребляющего узла от места добычи угля, таким образом средние затраты на приобретение т.у.т. угля полагались одинаковыми для всех узлов.

Таблица 8. Потребляющие узлы рынка природного газа Иркутской области (ТЭЦ)

Номер узла	Потребитель	Координаты	$v_s$ (расход топлива на станции, т.у.т./год)	Категория
3	Ново-Зиминская ТЭЦ (НЗТЭЦ)	54.032, 102.032	564 022	1
4	Ново-Иркутская ТЭЦ (НИТЭЦ)	52.247, 104.204	1 286 090	1
5	Участок ТИиТС Иркутской ТЭЦ-6 (ТЭЦ-7)	56.306, 101.725	216 998	1
6	Шелеховский участок Ново-Иркутской ТЭЦ (ТЭЦ-5)	52.182, 104.093	119 824	1
7	Иркутская ТЭЦ-6	56.122, 101.602	517 992	1
8	Иркутская ТЭЦ-9	52.532, 103.936	1 404 918	1
9	Иркутская ТЭЦ-10	52.461, 103.978	1 164 752	1
10	Иркутская ТЭЦ-11	52.782, 103.603	340 706	1
11	Иркутская ТЭЦ-12	53.124, 103.134	67 588	2
12	Иркутская ТЭЦ-16	56.570, 104.141	97 072	2
13	Усть-Илимская ТЭЦ	58.049, 102.806	438 623	1
14	ТЭЦ ООО «Теплоснабжение» (Байкальская ТЭЦ)	51.515, 104.182	51 247	2
15	ТЭЦ АО «Группа Илим» в г. Братск	56.111, 101.457	919 729 (оценка)	1
16	ТЭЦ АО «Группа Илим» в г. Усть-Илимск	58.043, 102.805	639 520 (оценка)	1
<b>Итого</b>			<b>7 829 081</b>	

Таблица 9. Потребляющие узлы рынка природного газа Иркутской области (котельные)

Номер узла	Потребитель	Координаты	$e^d \sqrt{\frac{S_i^b}{\pi}} \left( \frac{\text{руб.}}{\text{т.у.т.}} \right)$	$\frac{\pi \cdot v_i^b}{S_i^b \cdot e^{d^2}} \left( \frac{\text{т.у.т.}^3}{\text{руб.}^2 \times \text{год}} \right)$	$v_i^b$ (суммарный расход топлива котельными, т.у.т./год)	Категория
17	г. Братск	56.152, 101.634	5 699	$1.818 \times 10^{-3}$	59 063	2
18	г. Зима	53.921, 102.049	1 993	$4.750 \times 10^{-3}$	18 859	3
19	г. Иркутск	52.290, 104.281	4 565	$1.171 \times 10^{-2}$	243 987	1
20	г. Свирск	53.067, 103.342	1 703	$9.528 \times 10^{-3}$	27 642	2
21	г. Тулун	54.557, 100.578	3 167	$6.569 \times 10^{-3}$	65 893	2
22	г. Усть-Илимск	57.959, 102.735	4 127	0	0	3
23	г. Черемхово	53.137, 103.090	2 985	$8.303 \times 10^{-4}$	7 398	3
24	Ангарский р-н	52.349, 103.695	9 289	0	0	3
25	Балаганский р-н	54.668, 102.888	21 836	$6.046 \times 10^{-6}$	2 883	3
26	Бодайбинский р-н	58.522, 115.853	83 211	$6.797 \times 10^{-6}$	47 060	2
27	Братский р-н	55.720, 101.761	48 131	$2.672 \times 10^{-5}$	61 888	2
28	Жигаловский р-н	54.945, 105.364	40 484	$1.605 \times 10^{-6}$	2 631	3
29	Заларинский р-н	53.281, 101.570	23 921	$3.788 \times 10^{-5}$	21 676	2
30	Зиминский р-н	53.760, 101.539	22 963	$1.317 \times 10^{-5}$	6 946	3
31	Иркутский р-н	52.172, 104.897	29 632	$2.338 \times 10^{-5}$	20 527	2
32	Казачинско-Ленский р-н	55.781, 107.836	49 997	$1.001 \times 10^{-5}$	25 021	2
33	Катангский р-н	60.832, 107.434	102 246	0	0	3
34	Качугский р-н	54.109, 106.627	48 564	$3.282 \times 10^{-6}$	7 741	3
35	Киренский р-н	57.978, 109.212	57 430	$6.167 \times 10^{-6}$	20 339	2
36	Куйтунский р-н	54.529, 101.600	28 938	$9.391 \times 10^{-6}$	7 864	3
37	Мамско-Чуйский р-н	58.106, 112.291	56 924	$5.070 \times 10^{-6}$	16 429	3
38	Нижеилимский р-н	56.865, 103.759	37 659	$2.688 \times 10^{-5}$	38 115	2
39	Нижеудинский р-н	54.589, 99.106	61 019	$1.592 \times 10^{-5}$	59 294	2
40	Ольхонский р-н	53.091, 107.194	34 555	$3.067 \times 10^{-6}$	3 663	3
41	Слюдянский р-н	51.657, 103.718	21 757	$1.924 \times 10^{-4}$	91 061	2
42	Тайшетский р-н	55.553, 97.814	45 637	$5.930 \times 10^{-5}$	123 516	1
43	Тулунский р-н	54.178, 100.275	32 279	$7.517 \times 10^{-6}$	7 833	3
44	Усольский р-н	52.416, 103.215	21 671	$4.298 \times 10^{-5}$	20 185	2
45	Усть-Илимский р-н	57.593, 101.640	52 432	$7.235 \times 10^{-6}$	19 889	3
46	Усть-Кутский р-н	56.950, 105.911	50 986	$4.157 \times 10^{-5}$	108 061	1
47	Усть-Удинский р-н	55.135, 103.890	38 868	$3.215 \times 10^{-6}$	4 856	3
48	Черемховский р-н	52.772, 102.282	27 306	$3.379 \times 10^{-5}$	25 196	2
49	Чунский р-н	56.765, 99.702	45 892	$1.487 \times 10^{-5}$	31 313	2
50	Шелеховский р-н	52.029, 103.848	12 299	$2.597 \times 10^{-5}$	3 929	3
51	Аларский р-н	53.318, 102.759	14 112	$3.028 \times 10^{-5}$	6 030	3
52	Баяндаевский р-н	53.138, 105.571	16 798	$7.234 \times 10^{-6}$	2 041	3
53	Боханский р-н	53.151, 103.920	16 622	$1.078 \times 10^{-5}$	2 979	3
54	Нукутский р-н	53.751, 102.881	13 631	$1.336 \times 10^{-5}$	2 481	3
55	Осинский р-н	53.603, 104.042	18 185	$2.390 \times 10^{-6}$	790	3
56	Эхирит-Булагатский р-н	52.922, 104.919	19 675	$1.064 \times 10^{-5}$	4 120	3
<b>Итого</b>					<b>1 219 200</b>	

Построим транспортную систему рынка с использованием участка газопровода «Сила Сибири», проходящего через Ковыктинское и Чаяндинское месторождения. Считаем, что данный участок обладает достаточным резервом пропускной способности, а стоимость транспортировки 1 т.у.т. природного газа на 1 км по нему составляет 0.739 руб. (см. пункт 2.3.1.).

Объединим все производящие и потребляющие узлы в единую древовидную сеть в три этапа. Сначала соединим с производящими узлами потребляющие узлы первой категории, при этом последовательно присоединяя ближайший изолированный потребляющий узел к сети. После этого проведем аналогичную процедуру для потребляющих узлов второй и третьей категорий. Полученная схема транспортной системы состоит из 6 существующих и 76 потенциальных линий и представлена на рисунках 35-40. Узлы под номерами 57-83 являются промежуточными.

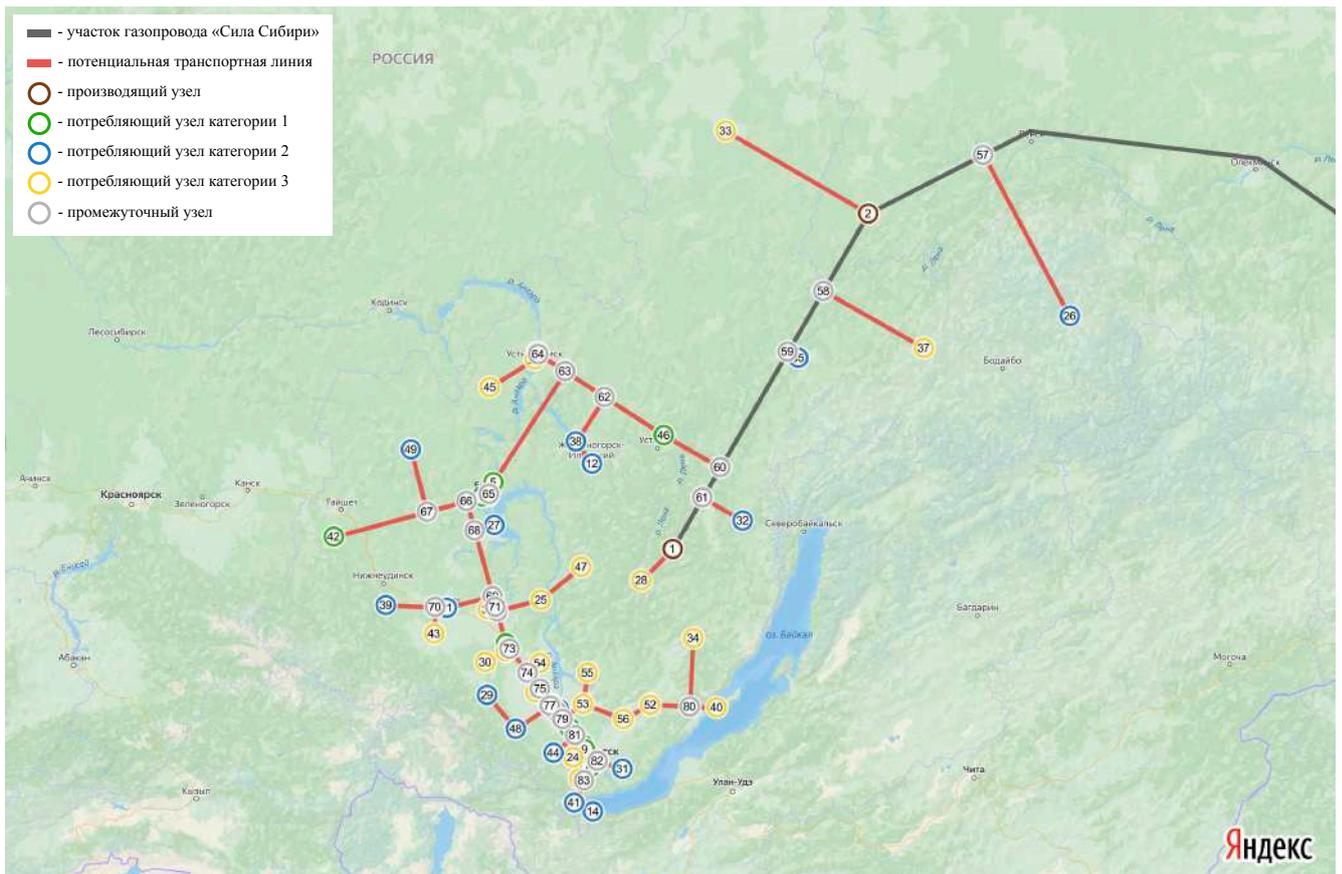


Рис. 35. Схема транспортной системы рынка природного газа Иркутской области (полная)

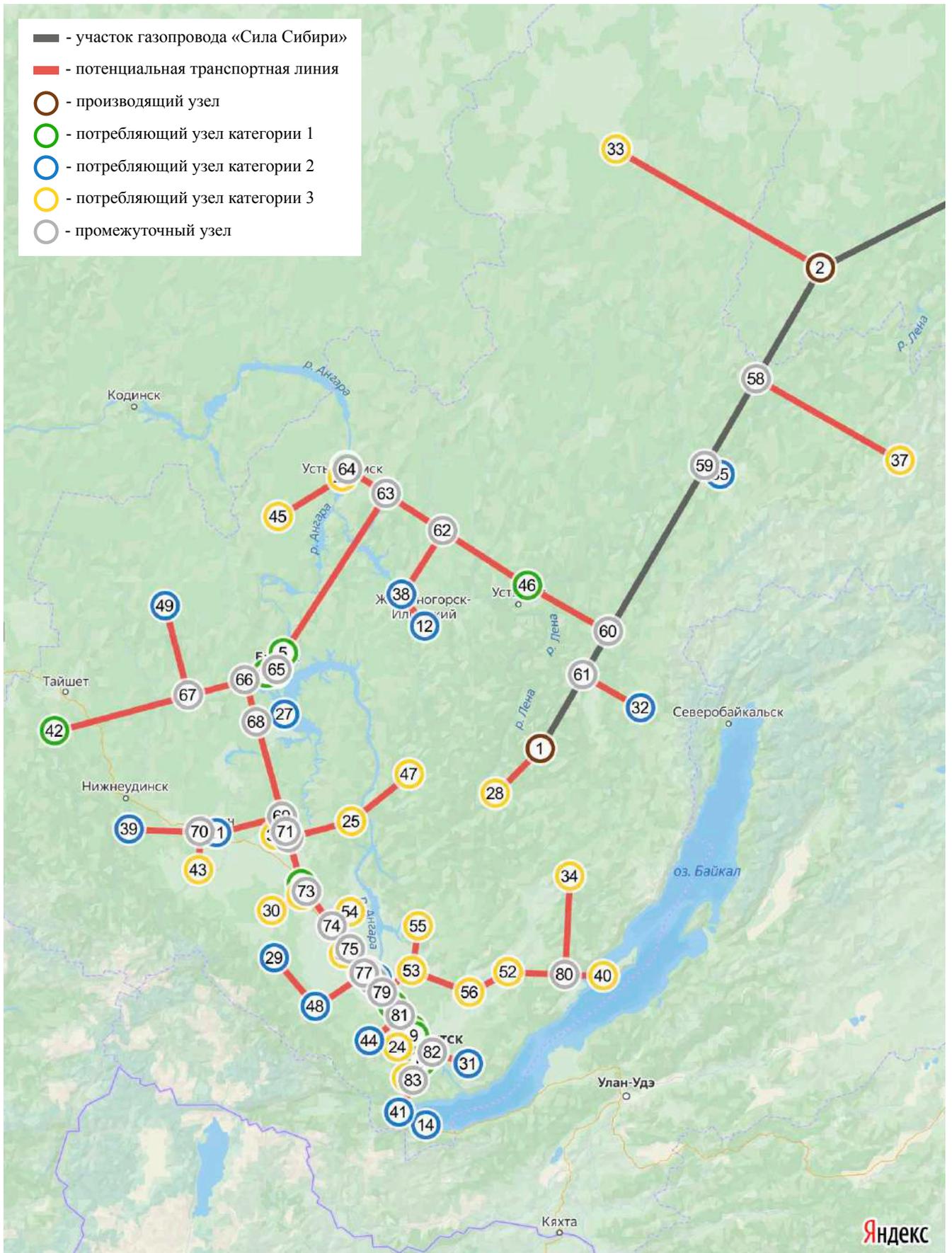


Рис. 36. Схема транспортной системы рынка природного газа Иркутской области (увеличенная)

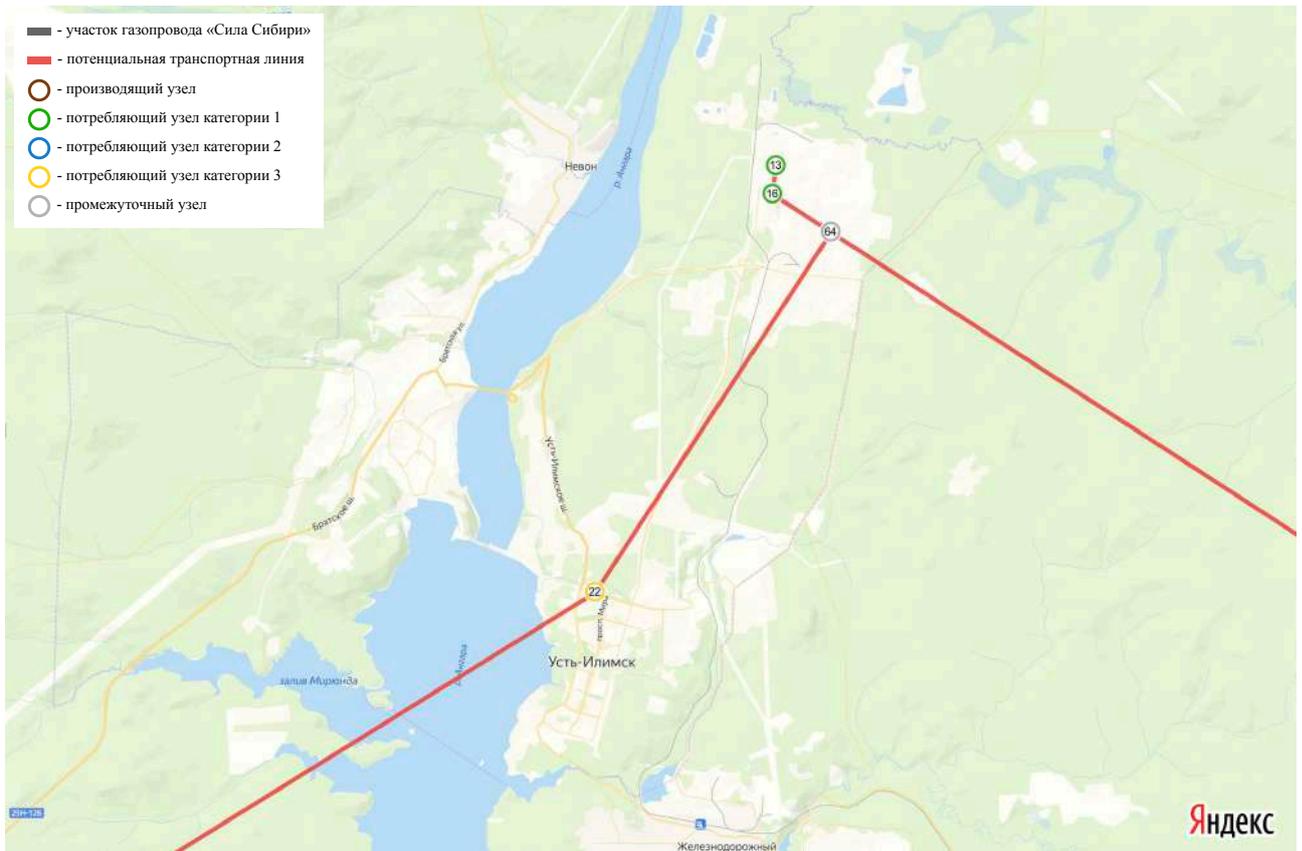


Рис. 37. Схема транспортной системы рынка природного газа Иркутской области (Усть-Илимск)

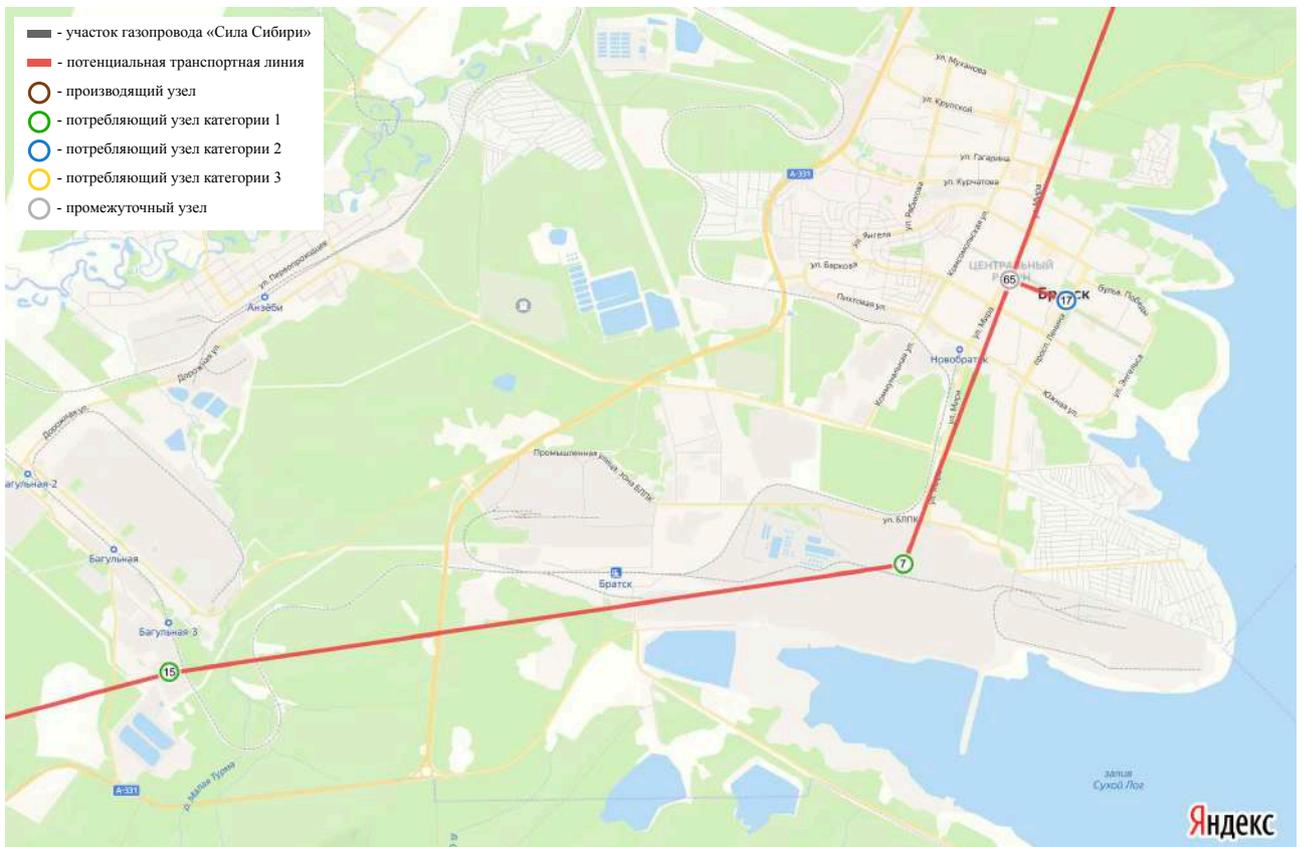


Рис. 38. Схема транспортной системы рынка природного газа Иркутской области (Братск)

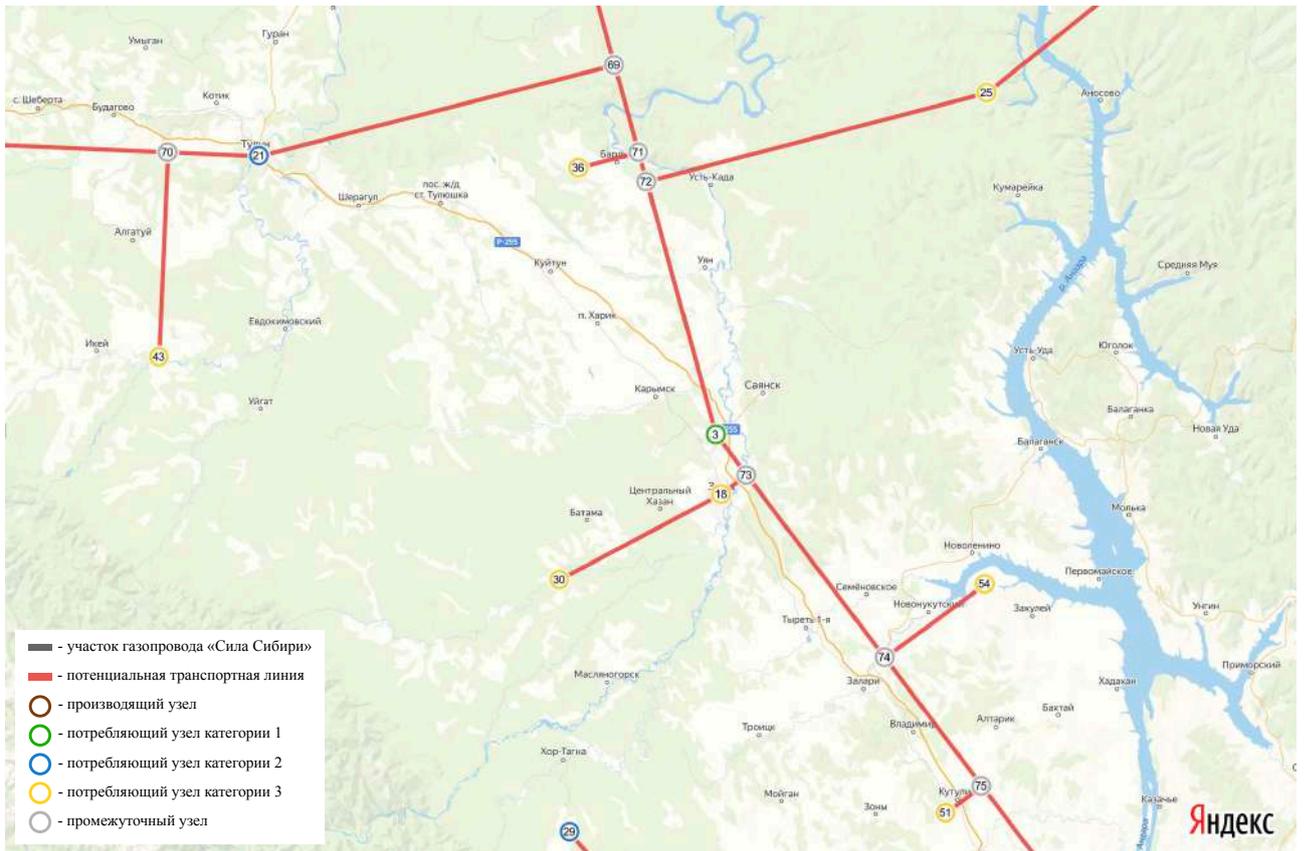


Рис. 39. Схема транспортной системы рынка природного газа Иркутской области (Тулун)

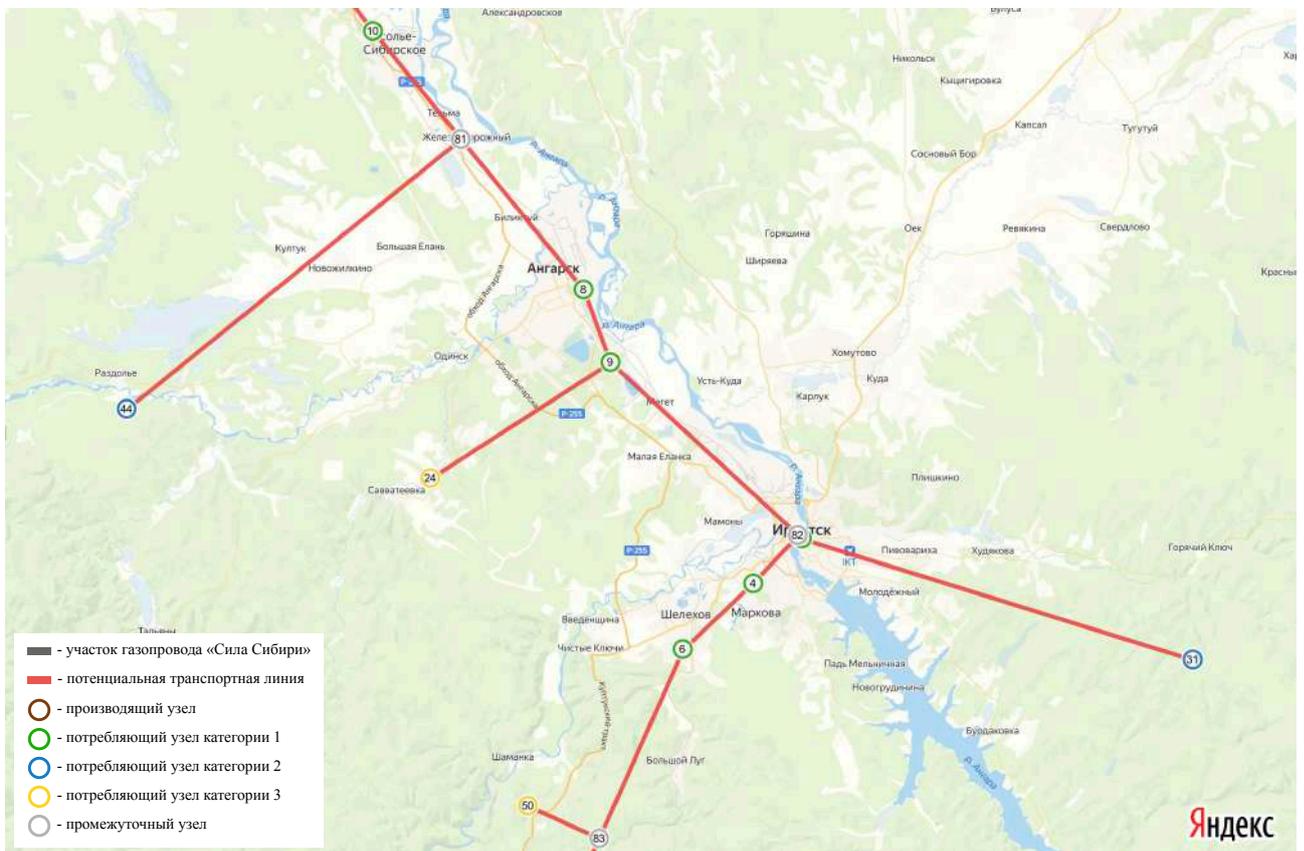


Рис. 40. Схема транспортной системы рынка природного газа Иркутской области (Иркутск)

В качестве функций транспортных затрат для потенциальных линий используем оценку (2.2), при этом считая, что длина каждой линии на 25% больше кратчайшего расстояния между инцидентными ей узлами. Подробные описания линий представлены в Приложениях (таблицы 11, 12).

### 2.6.3. Результаты расчетов

В данном параграфе описываются результаты применения разработанных алгоритмов, описанных в первой главе работы, для оптимизации построенной модели энергетического рынка природного газа Иркутской области. Для 7 сценариев с различными значениями затрат на добычу и доставку единицы используемого вида топлива с учетом экологической составляющей (параметры  $c_s$  и  $c_i^b$ ) основные результаты вычислений представлены в таблице 10. Подробные результаты представлены в Приложениях (таблицы 13-15).

Таблица 10. Основные результаты оптимизации транспортной системы рынка природного газа Иркутской области для различных сценариев

	Сценарий 1	Сценарий 2	Сценарий 3	Сценарий 4	Сценарий 5	Сценарий 6	Сценарий 7
Затраты на добычу и доставку единицы используемого вида топлива с учетом экологической составляющей, руб./т.у.т.	1 500	2 000	2 500	3 000	3 500	5 000	7 000
Экономический эффект, млн руб./год				0	656.4	11 841.7	27 599.3
Число расширяемых линий				0	10	33	38
Суммарная длина расширяемых линий, км				0	686.5	1 348.5	1 511.4
Суммарный поток по всем линиям, млн (т.у.т.×км)/год				0	1 944.7	8 829.5	9 115.8
Число узлов с положительным потреблением				0	6	16	20
Суммарное потребление природного газа, тыс. т.у.т./год				0	2 732.9	7 750.4	8 023.5
Число решаемых вспомогательных задач			305	1 169	71 285	27 667	15 659

Как видно из таблицы, при небольших затратах на добычу и доставку единицы используемого вида топлива (сценарии 1-4) газификация Иркутской области нецелесообразна. При затратах от 3 500 руб./т.у.т. газификация приносит положительный ежегодный эффект,

который равен 656.4 млн руб., 11.8 млрд руб. и 27.6 млрд руб. для сценариев 5, 6 и 7 соответственно. Однако данные три сценария реализуются только при учете экологической составляющей.

На рисунках 41, 42 представлена схема транспортной системы, состоящая только из линий, расширение которых оптимально для сценария 7. Для данного сценария оптимальный план развития транспортной системы подразумевает соединение с Ковыктинским месторождением всех ТЭЦ, кроме Байкальской, городов Братск, Зима, Иркутск, Свирск, Черемхово, а также Нижнеилимского и Усть-Кутского районов. При этом на ТЭЦ осуществляется полный переход на природный газ, а города и районы газифицируются частично.

Полученные оценки являются довольно грубыми из-за многочисленных упрощений и предположений, которые пришлось сделать в том числе из-за отсутствия доступа к актуальным детализированным данным. Поэтому результаты проведенного анализа перспектив газификации Иркутской области не стоит воспринимать как некую рекомендацию, скорее как пример использования разработанных алгоритмов и методов.

Стоит также обратить внимание на число решаемых вспомогательных задач, которое напрямую влияет на время решения исходной задачи<sup>33</sup>. Это число наибольшее для сценария 5 ( $71\,285 \approx 2^{16}$ ). В случае полного перебора всевозможных множеств расширяемых линий это число равнялось бы  $2^{76} \approx 10^{23}$  (76 - число потенциальных транспортных линий). Таким образом, проведенные расчеты показали, что разработанные алгоритмы могут применяться для планирования развития реальных энергетических рынков с большим числом узлов и находить оптимальный план развития транспортной системы, максимизирующий общественное благосостояние, за разумное время<sup>34</sup>.

---

<sup>33</sup> Как было доказано в пункте 1.3.7., при выполнении определенных условий сложность алгоритма решения вспомогательной задачи пропорциональна квадрату от числа узлов в рынке.

<sup>34</sup> На персональном компьютере автора исследования сценарий 5 был просчитан за 6.5 секунд.

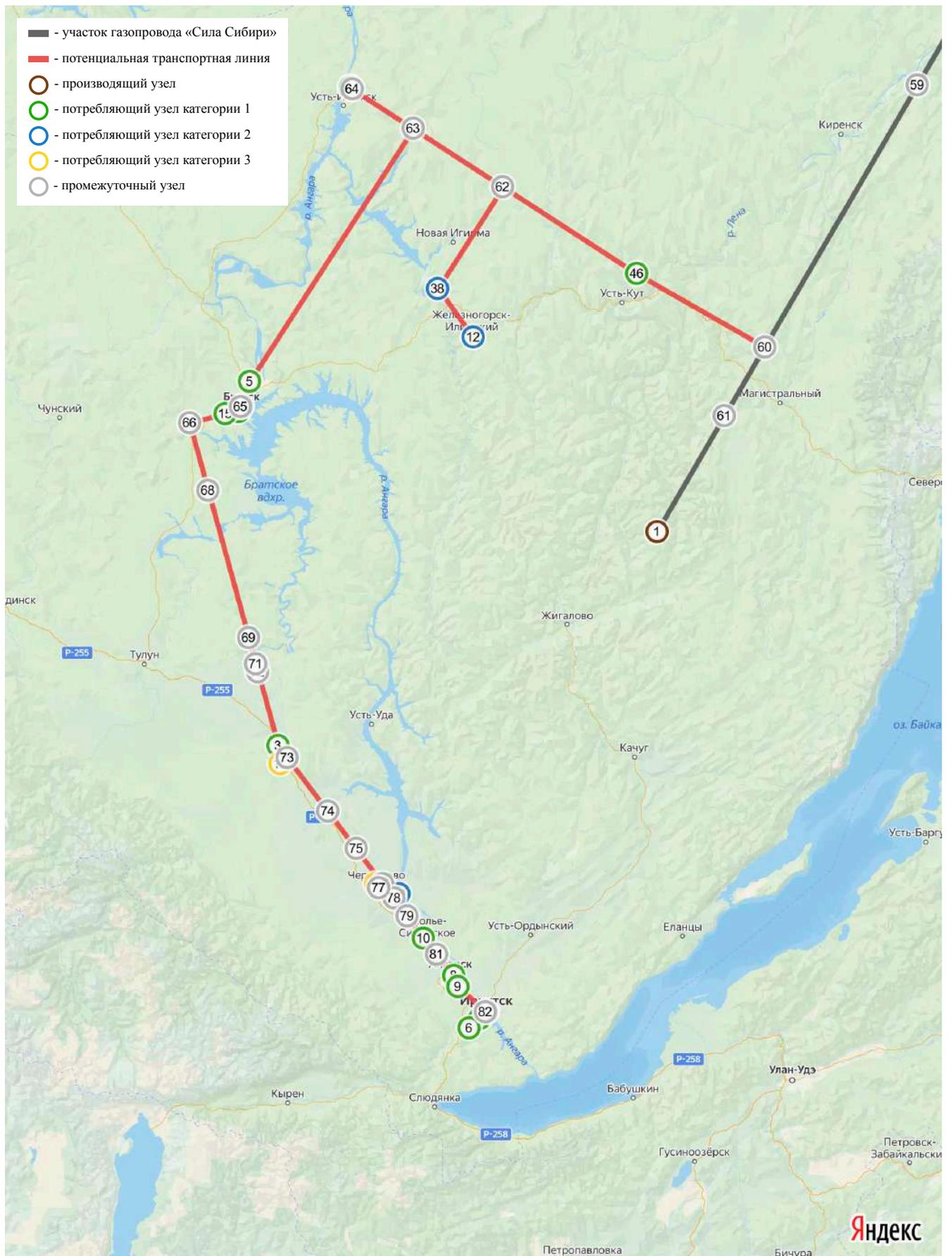


Рис. 41. Оптимальное множество расширяемых линий для рынка природного газа Иркутской области для сценария 7 (полная; из исходной схемы удалены нерасширяемые линии)



Рис. 42. Оптимальное множество расширяемых линий для рынка природного газа Иркутской области для сценария 7 (Иркутск; из исходной схемы удалены нерасширяемые линии)

## Выводы ко второй главе

В данной главе были предложены методы оценки исходных параметров для исследуемой в работе модели энергетического рынка. Такими параметрами являются функции производственных затрат, спроса и транспортных затрат. Хотя эти методы разработаны для рынка природного газа, они также могут быть адаптированы и для других рынков.

Были рассмотрены газопроводы двух типов: магистральные и распределительные. Для каждого типа выведена оценка функции транспортных затрат при строительстве нового газопровода. Эта оценка зависит от пропускной способности и длины газопровода.

Для газового месторождения исследована задача моделирования функции производственных затрат. Предложено вычислять производственные затраты согласно одной из двух моделей. Первая модель активно применялась для проведения расчетов по многим группам газовых месторождений в СССР. Вторая модель - упрощенная, в ней считается, что предельные производственные затраты постоянны. Для последней выведена соответствующая оценка.

Для оценки функции спроса в узле, являющемся произвольным негазифицированным субъектом либо муниципальным образованием Российской Федерации, разработан метод, в основе которого лежит разделение основных потребителей газа на несколько групп и оценка для каждой группы соответствующей компоненты функции спроса.

Разработанные алгоритмы и методы были применены для оценки перспектив газификации Иркутской области. Была рассмотрена возможность подключения ТЭЦ и котельных региона к магистральному газопроводу «Сила Сибири». Согласно проведенным расчетам на основе данных о характеристиках ТЭЦ и котельных региона за 2021-2022 годы, газификация приносит положительный эффект только в случае учета экологической составляющей, выражающейся в виде штрафа за сжигание каждой единицы используемого в настоящий момент в области угля. Также проведенные расчеты показали, что разработанные в первой главе работы алгоритмы позволяют решать исходную задачу максимизации общественного благосостояния за разумное время даже для большого числа узлов, что позволяет использовать эти алгоритмы для планирования развития реальных энергетических рынков.

## Заключение

В ходе проведенного исследования получены следующие основные научные результаты:

- 1) ● для многоузлового энергетического рынка одного ресурса типа «звезда» (и более общего случая рынка типа «дерево»), в котором при расширении транспортных линий присутствуют не зависящие от объема расширения фиксированные затраты, исходная задача оптимизации транспортной системы с точки зрения максимизации общественного благосостояния является NP-трудной;
- 2) ● для вспомогательной задачи оптимизации транспортной системы с фиксированным множеством расширяемых линий, которая является задачей выпуклого программирования, разработан специальный алгоритм решения;  
● оценена его сложность для случая кусочно-линейных исходных функций: количество вычислительных операций алгоритма не превосходит значения некоторой квадратичной функции от числа узлов в рынке;
- 3) ● разработаны алгоритмы решения исходной задачи для различных транспортных структур для случая выполнения условия инвариантности структуры потока, при котором направления перетоков в транспортных линиях постоянны и не зависят от пропускных способностей; разработаны алгоритмы для следующих транспортных структур: «цепочка», «звезда», «звезда-цепочка»;  
● исследована среднестатистическая сложность этих алгоритмов: для проведенных вычислительных экспериментов со случайным генерированием исходных задач для каждого из трех случаев даже для большого числа узлов (больше 50) исходная задача решается за разумное время, а зависимость среднего числа решаемых вспомогательных задач от числа узлов в рынке аппроксимируется квадратичной функцией;
- 4) ● для рынка природного газа разработаны методы оценки функций спроса для негазифицированных узлов;
- 5) ● разработанные алгоритмы и методы применены для оценки перспектив газификации Иркутской области с возможным подключением ТЭЦ и котельных региона к магистральному газопроводу «Сила Сибири»;  
● согласно проведенным расчетам на основе данных о характеристиках ТЭЦ и котельных региона за 2021-2022 годы, газификация приносит положительный эф-

фект только в случае учета экологической составляющей, выражающейся в виде штрафа за сжигание каждой единицы используемого в настоящий момент в области угля;

- проведенные расчеты показали, что разработанные алгоритмы могут применяться при планировании развития реальных энергетических рынков и позволяют решать исходную задачу за разумное время.

Таким образом, в ходе исследования разработаны методы эффективного планирования развития транспортных систем энергетических рынков, а также на примере Иркутской области показано, как с помощью этих методов можно оценивать перспективы газификации конкретных регионов Российской Федерации. Полученные результаты соответствуют цели исследования и могут применяться при планировании развития реальных газотранспортных или нефтетранспортных энергетических систем.

## Список сокращений и условных обозначений

- АН СССР - Академия наук СССР;
- АО - акционерное общество;
- АЭС - атомная электростанция;
- ВАК - Высшая аттестационная комиссия;
- ВИЭ - возобновляемые источники энергии;
- Гкал - гигакалория;
- ГПЗ - газоперерабатывающий завод;
- ГЭС - гидроэлектростанция;
- г. - город;
- Дж - джоуль;
- ДКС - дожимная компрессорная станция;
- др. - другие;
- ед. - единица;
- изд-во - издательство;
- ИОП - индивидуальная отопительная печь;
- ИПУ РАН - Институт проблем управления Российской академии наук;
- кВт - киловатт;
- кг - килограмм;
- ккал - килокалория;
- км - километр;
- км<sup>2</sup> - квадратный километр;
- КПД - коэффициент полезного действия;
- МВт - мегаватт;
- МДж - мегаджоуль;
- млн - миллион;
- млрд - миллиард;
- МО - муниципальное образование;
- МРТ - магнитно-резонансная томография;
- м<sup>3</sup> - кубометр;
- М. - Москва;
- НЗТЭЦ - Ново-Зиминская ТЭЦ;
- НИТЭЦ - Ново-Иркутская ТЭЦ;
- ООО - общество с ограниченной ответственностью;
- руб. - рубль;
- РФ - Российская Федерация;
- РЭК - Российский экономический конгресс;
- р-н - район;
- СМИ - средства массовой информации;
- см. - смотрите;
- СПДГ - Система перспективного планирования добычи газа;
- СССР - Союз Советских Социалистических Республик;
- с. - страница;
- т - тонна;
- трлн - триллион;
- ТУУ - теплоутилизационная установка;
- тыс. - тысяча;
- ТЭК - топливно-энергетический комплекс;
- ТЭС - тепловая электростанция;
- ТЭЦ - теплоэлектроцентраль;
- т. - том;
- т.д. - так далее;
- т.е. - то есть;
- т.к. - так как;
- т.у.т. - тонна условного топлива;

- УИСП - условие инвариантности структуры потока;
- ФАС - Федеральная антимонопольная служба;
- ЦЭ - централизованная энергосистема;
- ЦЭМИ РАН - Центральный экономико-математический институт Российской академии наук;
- ч - час;
- чел. - человек;
- шт. - штука;
- IEEE - Institute of Electrical and Electronics Engineers (Институт инженеров электротехники и электроники);
- NP - non-deterministic polynomial (недетерминированный полиномиальный);
- n. - number (номер);
- p. - page (страница);
- USA - United States of America (Соединенные Штаты Америки);
- vol. - volume (объем);
- N<sup>o</sup> - номер.

## Список литературы

### Нормативные акты

- [1] Свод правил (СП) от 18.02.2014 N 86.13330.2014 «Магистральные трубопроводы (пересмотр актуализированного СНиП III-42-80\* «Магистральные трубопроводы» (СП 86.13330.2012))» с изм., утв. Приказом Минстроя России от 14 декабря 2017 г. N 1664/пр «Об утверждении Изменения N 2 к СП 86.13330.2014 «СНиП III-42-80\* Магистральные трубопроводы»».
- [2] Указ Губернатора Иркутской области от 28.04.2022 № 71-уг «Об утверждении схемы и программы развития электроэнергетики Иркутской области на 2023-2027 годы» - [Электронный ресурс]. URL: <http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/3800202204290009> (дата обращения 01.05.2022).
- [3] Указ Губернатора Иркутской области от 29.04.2021 № 128-уг «Об утверждении схемы и программы развития электроэнергетики Иркутской области на 2022-2026 годы» - [Электронный ресурс]. URL: <http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/3800202105110005> (дата обращения 01.05.2022).
- [4] Указ Губернатора Иркутской области от 29.04.2020 № 124-уг «Об утверждении схемы и программы развития электроэнергетики Иркутской области на 2021-2025 годы» - [Электронный ресурс]. URL: <http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/3800202004300007> (дата обращения 01.05.2022).

### Научные публикации

- [5] Израэль, Ю. А. Чернобыль: радиоактивное загрязнение природных сред: монография / Ю. А. Израэль, С. М. Вакуловский, В. А. Ветров и др. Ленинград: Гидрометеоиздат, 1990. 223 с.
- [6] The Fukushima Daiichi Accident: report by the Director General of International Atomic Energy Agency. Vienna, Austria. 2015. 222 p.
- [7] Arrow, K. J. Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy / K. J. Arrow, G. Debreu // N.Y.: Econometrica. 1954. Vol. 22. P. 265–290.

- [8] Walras, L. Les éléments d'économie politique pure ou Théorie de la richesse sociale. Lausanne, 1874.
- [9] Wald, A. Uber einige Gleichungssysteme der mathematischen Okonomie // Zeitschrift fur Nationalokonomie. Vol. 7. 1936. P. 637–670, translated as «On Some Systems of Equations of Mathematical Economics» // N.Y.: Econometrica. Vol. 19. October, 1951. P. 368–403.
- [10] Debreu, G. Valuation Equilibrium and Pareto Optimum // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA. 1954. Vol. 40. N. 7. P. 588–592.
- [11] Crew, M. A. The Theory of Peak-Load Pricing: A Survey / M. A. Crew, C. Fernando, P. R. Kleindorfer // Journal of Regulatory Economics. 1995. Vol. 8. P. 215–248.
- [12] Давидсон, М. Р. Математическая модель конкурентного оптового рынка электроэнергии в России / М. Р. Давидсон, Ю. В. Догадушкина, Е. М. Крейнес и др. // М.: Известия Академии Наук. Теория и системы управления. 2004. № 3. С. 72–83.
- [13] Математическая модель управления энергосистемой в условиях конкурентного оптового рынка электроэнергии и мощности в России / М. Р. Давидсон [и др.] // М.: Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. Т. 2. С. 84–94.
- [14] Davidson, M. R. Mathematical Model of Power System Management in Conditions of a Competitive Wholesale Electric Power (Capacity) Market in Russia / M. R. Davidson, Y. V. Dogadushkina, E. M. Kreines, N. M. Novikova, A. V. Seleznev, Y. A. Udaltsov, L. V. Shiryaeva // M.: Journal of Computer and Systems Sciences International. 2009. N. 48. P. 243–253.
- [15] Hogan, W. Competitive electricity market design: a wholesale primer: tech. rep. / W. Hogan. Massachusetts: Harvard Electricity Policy Group. 1998.
- [16] Vasin, A. A. Electricity Markets Analysis and Design / A. A. Vasin, P. A. Vasina. Working Paper 2006/053: tech. rep. / Moscow New Economic School. 2006.
- [17] Vogelsang, I. Price Regulation for Independent Transmission Companies / I. Vogelsang // Journal of Regulatory Economics. 2001. Vol. 20. N. 2. P. 141–165.
- [18] Edoli, E. Optimization Methods for Gas and Power Markets: Theory and Cases / E. Edoli, S. Fiorenzani, T. Vargiolu. Palgrave Macmillan, Basingstoke. 2016. XVII. 192.

- [19] Wu, F. Adaptive convex relaxations for gas pipeline network optimization / F. Wu, N. Harsha, A. Zlotnik, R. Sioshansi, A. M. Rudkevich // IEEE Conference Proceedings. 2017. Vol. 2017. P. 4710–4716.
- [20] Roger, Z. R.-M. Optimization problems in natural gas transportation systems: a state-of-the-art review / Z. R.-M. Roger, B.-S. Conrado // Appl. Energy, 147(1). 2015. P. 536–555.
- [21] Rosellon, J. Different Approaches Towards Electricity Transmission Expansion / J. Rosellon // Review of Network Economics. 2003. Vol. 2. №. 3. P. 238–269.
- [22] Joskow, P. L. Transmission Rights and Market Power on Electric Power Networks / P. L. Joskow, J. Tirole // RAND Journal of Economics. 2000. Vol. 31. P. 450–487.
- [23] Левит, Б. Ю. Нелинейные сетевые транспортные задачи / Б. Ю. Левит, В. Н. Лившиц, М., 1972. 144 с.
- [24] Gomes, P. V. Hybrid genetic algorithm for multi-objective transmission expansion planning / P. V. Gomes, J. T. Saraiva // IEEE International Energy Conference (ENERGYCON). Belgium, 2016. April 4–8.
- [25] Zhao, H.-S. Optimal computation of the transmission system expansion planning using the branch and bound method / H.-S. Zhao, L. Chen, T. Wu // Asia-Pacific Power and Energy Engineering Conference. 2009.
- [26] Choi, J. A method for transmission system expansion planning considering probabilistic reliability criteria. / J. Choi, T. Tran, A. A. El-Keib, R. Thomas, H. S. Oh, R. Billinton // IEEE Trans. Power Syst. 2005. 20(3). P. 1606–1615.
- [27] Soleimani, K. Considering FACTS in optimal transmission expansion planning engineering / K. Soleimani, J. Mazloun // Technol. Appl. Sci. Res. 7(5). 2017. P. 1987–1995.
- [28] Jabr, R. A. Optimization of AC transmission system planning / R. A. Jabr // IEEE Trans. Power Syst. 28(3). 2013. P. 2779–2787.
- [29] Васин, А. А. Двухузловой рынок в условиях несовершенной конкуренции / А. А. Васин, Е. А. Дайлова. МТИП. 6:3 (2014). С. 3–31.
- [30] Дайлова, Е. А. Теоретико-игровые модели форвардных и сетевых рынков однородного товара: дис. ... канд. физ-мат. наук: 01.01.09; защищена: 23.12.2014; утверждена: 17.10.2014 / Екатерина Александровна Дайлова. М., 2014. 116 с.

- [31] Vasin, A. Optimization of transmission capacities for multinodal markets / A. Vasin, M. Dolmatova // *Procedia Computer Science*. 91, 2016. P. 238–244.
- [32] Долматова, М. С. Теоретико-игровые модели и задачи оптимизации энергетических рынков: дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.09; защищена: 26.06.2017; утверждена: 05.04.2017 / Марина Станиславовна Долматова. М., 2017. 95 с.
- [33] Хачатуров, Р. В. Алгоритмы максимизации супермодулярных функций и их применения для оптимизации группирования областей в регионе / Р. В. Хачатуров // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 39:1 (1999). С. 33–44; *Comput. Math. Math. Phys.* 39:1 (1999). P. 29–39.
- [34] Хачатуров, Р.В. Основные свойства решеток куба, алгоритмы их построения и возможности применения в дискретной оптимизации / Р.В. Хачатуров // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2015. Т. 55. № 1. С. 121–134.
- [35] Черенин, В. П. Решение некоторых комбинаторных задач оптимального планирования методом последовательных расчетов / В. П. Черенин // *Научно-методические материалы экономико-математического семинара ЛЭММ АН СССР*. М., 1962. Т 2.
- [36] Хачатуров, В. Р. Математические методы регионального программирования / В. Р. Хачатуров. М., 1989. 297 с.
- [37] Карманов, В. Г. Математическое программирование / В. Г. Карманов. М.: Наука, 1986.
- [38] Гэри, М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон. М.: Мир, 1982.
- [39] Канторович, Л. В. Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков / Л. В. Канторович, М. К. Гавурин // *Сб. ст. Проблемы повышения эффективности работы транспорта*. АН СССР. 1949. С. 110–138.
- [40] Guisewite, G. M. Minimum concave-cost network flow problems: applications, complexity, and algorithms / G. M. Guisewite, P. M. Pardalos // *Ann. Oper. Res.* 25(1). 1990. P. 75–99.
- [41] Васин, А. А. Оптимизация транспортной системы энергетического рынка / А. А. Васин, О. М. Григорьева, Н. И. Цыганов // *Доклады Академии наук*. 2017. Т. 475. № 4. С. 377–381.

- [42] Vasin, A. A. Optimization of Transmission Systems for Chain-Type Markets / A. A. Vasin, N. I. Tsyganov // Сборник «Communications in Computer and Information Science, серия Optimization and Applications. OPTIMA 2018», Springer International Publishing Cham, 2019. Vol. 974, P. 482–493.
- [43] Vasin, A. A. A model for optimization of transport infrastructure for some homogeneous goods markets / A. A. Vasin, O. M. Grigoryeva, N. I. Tsyganov // Journal of Global Optimization. 2020. Vol. 76. № 3. P. 499–518.
- [44] Vasin, A. A. Energy markets: Optimization of transmission networks / A. A. Vasin, O. M. Grigoryeva, N. I. Tsyganov // International Journal of Public Administration. 2019. Vol. 42. № 15. P. 1311–1322.
- [45] Tsyganov, N. I. Methods for assessing the prospects of gasification of the country's regions / N. I. Tsyganov, A. A. Vasin // Procedia computer science. 2022. Vol. 214. P. 883–891.
- [46] Цыганов, Н. И. Оптимизация транспортной системы для рынков типа «цепочка» / Н. И. Цыганов // Сб. тезисов «Социофизика и социоинженерия 2018». Труды Второй Всероссийской междисциплинарной конференции, 23–25 мая 2018 г., М.: ИПУ РАН. С. 373–374.
- [47] Vasin, A. A. Energy markets: optimization of transportation system / A. A. Vasin, O. M. Grigoryeva, N. I. Tsyganov // Сборник «IX Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2018)». М.: ООО «МАКС Пресс», 22–27 октября 2018 г. Т. 1, С. 183–190.
- [48] Цыганов, Н. И. Оптимизация транспортной сети для энергетического рынка типа «звезда» / Н. И. Цыганов // Сборник «Тихоновские чтения»: научная конференция: тезисы докладов. М.: ООО «МаксПресс». 2019. С. 69.
- [49] Васин, А. А. Алгоритмы оптимизации сети передачи некоторых энергетических рынков / А. А. Васин, Н. И. Цыганов // Сборник «Ломоносовские чтения-2020». Тезисы. Секция «Вычислительной математики и кибернетики», Серия «Секция Вычислительной математики и кибернетики». М.: Изд-во Моск. ун-та (М.), С. 43–45.
- [50] Цыганов, Н. И. Алгоритмы оптимизации транспортной структуры энергетического рынка типа «дерево» / Н. И. Цыганов, И. И. Силаев // Сборник «Тихоновские чтения»: научная конференция: тезисы докладов. М.: ООО «МаксПресс». 2021. С. 109.

- [51] Васин, А. А. Теория игр и модели математической экономики / А. А. Васин, В. В. Морозов. М.: ООО «МаксПресс», 2005.
- [52] Stoft, S. Power System Economics: Designing Markets for Electricity / S. Stoft. N. Y.: Wiley, 2002.
- [53] Kleinberg, J. Algorithm Design / J. Kleinberg, E. Tardos. L.: Pearson Education. 2006.
- [54] Васильев, Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. М.: Наука, 1988.
- [55] Сухарев, А. Г. Курс методов оптимизации / А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров. М.: Наука, 1985.
- [56] Силаев, И. И. Методы оптимизации транспортной структуры энергетического рынка типа «дерево»: выпускная квалификационная работа (магистерская диссертация) / Иван Игоревич Силаев. МГУ им. М. В. Ломоносова. Факультет вычислительной математики и кибернетики. Кафедра исследования операций. Научный руководитель: А. А. Васин. М., 2022. 32 с.
- [57] Юшков, И. Р. Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений : учеб.-метод. пособие / И. Р. Юшков, Г. П. Хижняк, П. Ю. Илюшин. Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2013. 177 с.
- [58] Минханов, И. Ф. Разработка нефтяных и газовых месторождений: учеб.-метод. пособие / И. Ф. Минханов, С. А. Долгих, М. А. Варфоломеев. Казань: КФУ, 2019. 96 с.
- [59] Дейк, Л. П. Основы разработки нефтяных и газовых месторождений - Fundamentals of Reservoir Engineering / Л. П. Дейк; под ред. Э. М. Симкина; пер. с англ. Б. Л. Фалалеев. М.: «Премиум Инжиниринг», 2009. 572 с.
- [60] Закиров, С. Н. Проектирование и разработка газовых месторождений / С. Н. Закиров, Б. Б. Лапук. М.: Недра. 1974. 376 с.
- [61] Маргулов, Р. Д. Системный анализ в перспективном планировании добычи газа / Р. Д. Маргулов, В. Р. Хачатуров, А. В. Федосеев. М.: Недра, 1992. 287 с.
- [62] Брюханов, О. Н. Газифицированные котельные агрегаты: Учебник / О. Н. Брюханов, В. А. Кузнецов. М.: ИНФРА-М, 2005. 392 с.

[63] Salovaar, J. Coal to natural gas fuel switching and CO2 emissions reduction // Harvard College. 2011. 93 p.

### Электронные ресурсы

[64] Глава Минприроды рассказал, когда в России закончатся нефть и газ // РБК. Бизнес. 11.05.2021. - [Электронный ресурс]. URL: <https://www.rbc.ru/business/11/05/2021/609971fe9a7947e065f63cd4> (дата обращения 01.05.2022).

[65] Новак оценил запасы газа и нефти в России // РИА Новости. 27.02.2019. - [Электронный ресурс]. URL: <https://ria.ru/20190227/1551393861.html> (дата обращения 01.05.2022).

[66] ТЭК России - 2019: стат. сборник // Аналитический центр при правительстве РФ. Вып. июнь. 2020. 62 с. - [Электронный ресурс]. URL: [https://ac.gov.ru/uploads/2-Publications/ТЕК\\_annual/ТЕК.2019.pdf](https://ac.gov.ru/uploads/2-Publications/ТЕК_annual/ТЕК.2019.pdf) (дата обращения 01.05.2022).

[67] Renewables 2021 // Global status report. 2021. 371 p. - [Электронный ресурс]. URL: <https://www.enerdata.net/about-us/case-study/renewable-global-status-ren21-2021.pdf> (дата обращения 01.05.2022).

[68] Renewables 2011 // Global status report. 2021. 116 p. - [Электронный ресурс]. URL: [https://www.ren21.net/Portals/0/documents/Resources/GSR2011\\_FINAL.pdf](https://www.ren21.net/Portals/0/documents/Resources/GSR2011_FINAL.pdf) (дата обращения 01.05.2022).

[69] World energy outlook 2021 // International energy agency. 2021. 386 p. - [Электронный ресурс]. URL: <https://iea.blob.core.windows.net/assets/88dec0c7-3a11-4d3b-99dc-8323ebfb388b/WorldEnergyOutlook2021.pdf> (дата обращения 01.05.2022).

[70] World nuclear performance report 2021 // World nuclear association. 2021. 68 p. - [Электронный ресурс]. URL: <https://www.world-nuclear.org/getmedia/891c0cd8-2beb-4acf-bb4b-552da1696695/world-nuclear-performance-report-2021.pdf.aspx> (дата обращения 01.05.2022).

[71] Преимущества атомной энергетики // Росатом. Об атомной отрасли. - [Электронный ресурс]. URL: <https://www.rosatom.ru/about-nuclear-industry/preimushchestva-atomnoy-energetiki/> (дата обращения 01.05.2022).

[72] Глава Росатома рассказал о мировых запасах урана для АЭС // Агентство экономической информации «Прайм». Энергетика. 11.11.2021. - [Электронный ресурс]. URL: <https://1prime.ru/energy/20211111/835194106.html> (дата обращения 01.05.2022).

- [73] База данных показателей муниципальных образований. Федеральная служба государственной статистики. - [Электронный ресурс]. URL: <https://www.gks.ru/dbscripts/munst/> (дата обращения 01.05.2022).
- [74] Социально-экономическое положение субъектов Российской Федерации. Федеральная служба государственной статистики. - [Электронный ресурс]. URL: [https://rosstat.gov.ru/storage/mediabank/sep\\_region1.htm](https://rosstat.gov.ru/storage/mediabank/sep_region1.htm) (дата обращения 01.05.2022).
- [75] Баланс энергоресурсов за 2019 г. - [Электронный ресурс]. URL: [https://rosstat.gov.ru/storage/mediabank/2EuHouQF/en\\_balans2019.htm](https://rosstat.gov.ru/storage/mediabank/2EuHouQF/en_balans2019.htm) (дата обращения 01.05.2022).
- [76] Путин принял участие в церемонии запуска первой линии Амурского ГПЗ // РБК. Бизнес. 09.06.2021. - [Электронный ресурс]. URL: <https://www.rbc.ru/rbcfreenews/60c0a7c89a7947613db96bd3> (дата обращения 01.05.2022).
- [77] Стоимость строительства газопровода «Сила Сибири» превысила 1 трлн руб. // РБК. Бизнес. 27.04.2018. - [Электронный ресурс]. URL: <https://www.rbc.ru/business/27/04/2018/5ae344799a794785d0b58ea9?> (дата обращения 01.05.2022).
- [78] Газопровод «Сила Сибири» - крупнейшая система транспортировки газа на Востоке России. - [Электронный ресурс]. URL: <https://www.gazprom.ru/projects/power-of-siberia/> (дата обращения 01.05.2022).
- [79] «Газпром» предложил повысить тариф на прокачку газа конкурентов // РБК. 28.06.2017. - [Электронный ресурс]. URL: <https://quote.rbc.ru/news/article/5ae098132ae5961b67a1b2a8?> (дата обращения 01.05.2022).
- [80] Официальный портал Единого оператора газификации РФ. - [Электронный ресурс]. URL: <https://connectgas.ru> (дата обращения 01.05.2022).
- [81] Стала известна реальная цена за кубометр газа: официальные данные // Южный федеральный. 01.06.2016. - [Электронный ресурс]. URL: <https://u-f.ru/News/economics/u28/2016/06/01/101063?> (дата обращения 01.05.2022).

- [82] Чаяндинское месторождение - ресурсная база для газопровода «Сила Сибири». - [Электронный ресурс]. URL: <https://www.gazprom.ru/projects/chayandinskoye/> (дата обращения 01.05.2022).
- [83] Оценка численности постоянного населения на 1 января 2022 г. и в среднем за 2021 г. (человек). Федеральная служба государственной статистики. - [Электронный ресурс]. URL: [https://rosstat.gov.ru/storage/mediabank/Popul\\_Comp2022\\_site.xls](https://rosstat.gov.ru/storage/mediabank/Popul_Comp2022_site.xls) (дата обращения 01.05.2022).
- [84] «Сила Сибири»: стратегический проект. Инфографика. 2 декабря 2019 г. - [Электронный ресурс]. URL: <https://www.gazprom.ru/press/media/2019/962535/> (дата обращения 01.05.2022).
- [85] Программа газификации регионов России 2021–2025. - [Электронный ресурс]. URL: <https://www.gazprommap.ru/program/> (дата обращения 01.05.2022).
- [86] Игорь Кобзев и Алексей Миллер подписали обновленную программу развития газоснабжения Иркутской области // НИА "Байкал". 20.06.2022. - [Электронный ресурс]. URL: <http://www.38rus.com/more/87066> (дата обращения 22.06.2022).
- [87] 19,7 млн тонн угля поставит за 1,5 года Востсибуголь для Иркутскэнерго // Байкал24. 30.11.2010. - [Электронный ресурс]. URL: <https://baikal24.ru/text/30-11-2010/197/> (дата обращения 01.05.2022).
- [88] Carbon Taxes in Europe - [Электронный ресурс]. URL: <https://taxfoundation.org/data/all/eu/carbon-taxes-in-europe-2022/> (дата обращения 04.11.2023).

## Список иллюстраций

1.	Пример транспортной структуры рынка типа «дерево» . . . . .	18
2.	Пример функции транспортных затрат $E_{ij}(q_{ij})$ с $\Delta Q_{\{i,j\}}^{\max} = +\infty$ . . . . .	21
3.	Функция полезности потребления $U_0(v_0^d)$ . . . . .	25
4.	Пример кусочно-линейной функции производственных затрат $c_i(v_i)$ (слева) и соответствующей ей функции предложения $S_i(p_i)$ (справа) . . . . .	30
5.	Пример кусочно-линейной функции полезности потребления $U_i(v_i^d)$ (слева) и соответствующей ей функции спроса $D_i(p_i)$ (справа) . . . . .	31
6.	Пример функций предельных транспортных затрат $e_{ij}^{nex}(q_{ij})$ (слева) и $e_{ij}^{ex}(q_{ij})$ (справа) с $\Delta Q_{\{i,j\}}^{\max} = +\infty$ . . . . .	33
7.	Пример транспортной структуры рынка . . . . .	35
8.	Корневое дерево минимальной высоты для рынка, изображенного на рисунке 7 . . . . .	36
9.	Пример вычисления вспомогательного коэффициента $\lambda_{i_0}$ в пункте 2 подшага 3.1 (слева) и его использования для вычисления равновесного объема производства $\tilde{v}_{i_0}$ в пункте 3 этого же подшага (справа); для приведенных на графиках функций $\lambda_{i_0} = \frac{-q^{\min}}{q^{\max} - q^{\min}} = 1/4$ , поэтому $\tilde{v}_{i_0} = 3/4 \cdot \min(S_{i_0}(\tilde{p}_{i_0})) + 1/4 \cdot \max(S_{i_0}(\tilde{p}_{i_0}))$ ; . . . . .	38
10.	Исходно дополнительные и исходно конкурентные линии. Стрелками отмечены направления равновесных потоков при начальных пропускных способностях . . . . .	45
11.	Пример транспортной структура рынка. Стрелками отмечены направления равновесных потоков . . . . .	46
12.	Рынок типа «цепочка» . . . . .	47
13.	Рынок типа «цепочка» с однонаправленными потоками . . . . .	50
14.	Псевдоизолированный подрынок $i_1 \rightarrow i_2$ . . . . .	51
15.	Пример рынка типа «цепочка» с $L_1 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$ , $L_2 = \{\{3, 4\}, \{5, 6\}\}$ . . . . .	54
16.	Результаты численного эксперимента для рынка типа «цепочка». Каждой точке соответствует решенная задача . . . . .	60
17.	Средние (снизу) и максимальные (сверху) числа решаемых вспомогательных задач для рынка типа «цепочка» . . . . .	61
18.	Аппроксимация среднего числа решаемых вспомогательных задач для рынка типа «цепочка» . . . . .	62
19.	Пример рынка типа «звезда» . . . . .	63

20.	Результаты численного эксперимента для рынка типа «звезда». Каждой точке соответствует решенная задача . . . . .	70
21.	Средние (снизу) и максимальные (сверху) числа решаемых вспомогательных задач для рынка типа «звезда» . . . . .	71
22.	Аппроксимация среднего числа решаемых вспомогательных задач для рынка типа «звезда» . . . . .	71
23.	Пример рынка типа «звезда-цепочка» . . . . .	72
24.	Средние (снизу) и максимальные (сверху) числа решаемых вспомогательных задач для рынка типа «звезда-цепочка» . . . . .	77
25.	Аппроксимация среднего числа решаемых вспомогательных задач для рынка типа «звезда-цепочка» . . . . .	78
26.	Пример рынка типа «дерево» . . . . .	79
27.	Структура внутреннего потребления природного газа в Российской Федерации за 2019 год . . . . .	85
28.	Структура конечного потребления природного газа в качестве топлива или энергии с делением по видам экономической деятельности в Российской Федерации за 2019 год . . . . .	86
29.	Структура потребления природного газа промышленным производством в Российской Федерации за 2019 год . . . . .	86
30.	Вид функции остаточного спроса $\widehat{D}_s(\widehat{p})$ для ТЭС и ТЭЦ . . . . .	104
31.	Территория узла в форме круга с бесконечным числом котельных, рассредоточенных равномерно по территории узла . . . . .	107
32.	Территория узла в форме прямоугольника с бесконечным числом котельных, рассредоточенных равномерно по территории узла . . . . .	109
33.	Различные случаи взаимного расположения прямоугольника, характеризующего территорию узла, и круга, определяющего область для тех котельных, которым выгоден переход на газ: 1) $(w/2)^2 + \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2 \leq R(p_i)^2$ ; 2) $w/2 \geq R(p_i)$ , $\frac{S_i^b}{2w} \geq R(p_i)$ ; 3) $w/2 \leq R(p_i)$ , $\frac{S_i^b}{2w} \geq R(p_i)$ ; 4) $(w/2)^2 + \left(\frac{S_i^b}{2w}\right)^2 \geq R(p_i)^2$ , $w/2 \leq R(p_i)$ , $\frac{S_i^b}{2w} \leq R(p_i)$ ; 5) $w/2 \geq R(p_i)$ , $\frac{S_i^b}{2w} \leq R(p_i)$ . . . . .	110
34.	Вид функции остаточного спроса $\widehat{D}_m(\widehat{p})$ для предприятий . . . . .	115
35.	Схема транспортной системы рынка природного газа Иркутской области (полная) . . . . .	128

36. Схема транспортной системы рынка природного газа Иркутской области (увеличенная) . . . . . 129
37. Схема транспортной системы рынка природного газа Иркутской области (Усть-Илимск) . . . . . 130
38. Схема транспортной системы рынка природного газа Иркутской области (Братск) . . . . . 130
39. Схема транспортной системы рынка природного газа Иркутской области (Тулун) 131
40. Схема транспортной системы рынка природного газа Иркутской области (Иркутск) . . . . . 131
41. Оптимальное множество расширяемых линий для рынка природного газа Иркутской области для сценария 7 (полная; из исходной схемы удалены нерасширяемые линии) . . . . . 134
42. Оптимальное множество расширяемых линий для рынка природного газа Иркутской области для сценария 7 (Иркутск; из исходной схемы удалены нерасширяемые линии) . . . . . 135

## Список таблиц

1.	Параметры вероятностных распределений величин $p_{\min}^0$ , $d_i^f$ , $ \Delta p_i^0 $ , $e_i^t$ , $e_i^q$ , $E_i^f$ для рынка типа «цепочка» . . . . .	58
2.	Параметры вероятностных распределений величин $p_{\min}^0$ , $d_i^f$ , $ \Delta p_i^0 $ , $e_i^t$ , $e_i^q$ , $E_i^f$ для рынка типа «звезда» . . . . .	69
3.	Отношение двух произвольных линий $l$ и $r$ для рынка типа «звезда-цепочка», $l \neq r$ . . . . .	73
4.	Параметры вероятностных распределений величин $p_{\min}^0$ , $c_i$ , $ \Delta p_{ij}^0 $ , $e_{\{i,j\}}^t$ , $e_{\{i,j\}}^q$ , $E_{\{i,j\}}^f$ для рынка типа «звезда-цепочка» . . . . .	76
5.	Показатели ТЭЦ Иркутской области за 2021 год . . . . .	122
6.	Показатели котельных Иркутской области за 2019 год . . . . .	123
7.	Производящие узлы рынка природного газа Иркутской области . . . . .	124
8.	Потребляющие узлы рынка природного газа Иркутской области (ТЭЦ) . . . . .	126
9.	Потребляющие узлы рынка природного газа Иркутской области (котельные) . . . . .	127
10.	Основные результаты оптимизации транспортной системы рынка природного газа Иркутской области для различных сценариев . . . . .	132
11.	Характеристики транспортных линий рынка природного газа Иркутской области (часть 1) . . . . .	154
12.	Характеристики транспортных линий рынка природного газа Иркутской области (часть 2) . . . . .	155
13.	Результаты оптимизации транспортной системы рынка природного газа Иркутской области для различных сценариев (объемы производства, тыс. т.у.т./год) . . . . .	156
14.	Результаты оптимизации транспортной системы рынка природного газа Иркутской области для различных сценариев (объемы потребления, тыс. т.у.т./год) . . . . .	156
15.	Результаты оптимизации транспортной системы рынка природного газа Иркутской области для различных сценариев (потoki, тыс. т.у.т./год) . . . . .	157

## Приложения

Таблица 11. Характеристики транспортных линий рынка природного газа Иркутской области (часть 1)

Номер линии	Номер начального узла	Номер конечного узла	Кратчайшее расстояние между узлами, км	<i>l</i> (длина линии, км)
1	1	61	92	115
2	61	60	53	66
3	60	59	199	249
4	59	58	102	128
5	58	2	125	156
6	2	57	176	220
7	57	26	256	320
8	2	33	223	279
9	58	37	167	209
10	59	35	18	23
11	61	32	71	89
12	1	28	69	86
13	60	46	97	121
14	46	62	105	131
15	62	38	79	99
16	38	12	40	50
17	62	63	69	86
18	63	64	47	59
19	64	16	1.6	2
20	16	13	0.683	0.854
21	64	22	10	13
22	22	45	77	96
23	63	5	198	248
24	5	65	18	23
25	65	17	0.736	0.92
26	65	7	3.7	4.625
27	7	15	9.1	11
28	15	66	25	31
29	66	67	63	79
30	67	49	99	124
31	67	42	149	186
32	66	68	48	60
33	68	27	32	40
34	68	69	106	133
35	69	21	75	94
36	21	70	19	24

Таблица 12. Характеристики транспортных линий рынка природного газа Иркутской области (часть 2)

Номер линии	Номер начального узла	Номер конечного узла	Кратчайшее расстояние между узлами, км	<i>l</i> (длина линии, км)
37	70	43	42	53
38	70	39	78	98
39	69	71	19	24
40	71	36	13	16
41	71	72	6.3	7.875
42	72	25	72	90
43	25	47	83	104
44	72	3	54	65
45	3	73	11	14
46	73	18	6.6	8.24
47	18	30	38	48
48	73	74	48	60
49	74	54	26	33
50	74	75	34	43
51	75	51	9.4	12
52	75	76	32	40
53	76	11	2.4	3
54	11	77	1.6	2
55	77	23	2.9	3.625
56	77	48	68	85
57	48	29	74	93
58	76	78	13	16
59	78	20	5.3	6.625
60	78	79	16	20
61	79	53	42	53
62	53	55	51	64
63	53	56	72	90
64	56	52	50	63
65	52	80	65	81
66	80	40	44	55
67	80	34	111	139
68	79	10	20	25
69	10	81	15	19
70	81	44	46	58
71	81	8	21	26
72	8	9	8.4	11
73	9	24	23	29
74	9	82	27	34
75	82	19	0.603	0.754
76	19	31	44	55
77	82	4	7.1	8.875
78	4	6	10	13
79	6	83	22	28
80	83	50	8.5	11
81	83	41	41	51
82	41	14	36	45

Таблица 13. Результаты оптимизации транспортной системы рынка природного газа Иркутской области для различных сценариев (объемы производства, тыс. т.у.т./год)

Номер узла	Производитель	Сценарий 1	Сценарий 2	Сценарий 3	Сценарий 4	Сценарий 5	Сценарий 6	Сценарий 7	
1	Ковыктинское месторождение	0				2 732.9	7 750.4	8 023.5	
2	Чаяндинское месторождение								0

Таблица 14. Результаты оптимизации транспортной системы рынка природного газа Иркутской области для различных сценариев (объемы потребления, тыс. т.у.т./год)

Номер узла	Потребитель	Сценарий 1	Сценарий 2	Сценарий 3	Сценарий 4	Сценарий 5	Сценарий 6	Сценарий 7	
3	Ново-Зиминская ТЭЦ (НЗТЭЦ)						0	564.0	
4	Ново-Иркутская ТЭЦ (НИТЭЦ)						0	1 286.0	
5	Участок ТИиТС Иркутской ТЭЦ-6 (ТЭЦ-7)					0		217.0	
6	Шелеховский участок Ново-Иркутской ТЭЦ (ТЭЦ-5)						0	119.8	
7	Иркутская ТЭЦ-6					0		518.0	
8	Иркутская ТЭЦ-9						0	1 404.9	
9	Иркутская ТЭЦ-10						0	1 164.8	
10	Иркутская ТЭЦ-11						0	340.7	
11	Иркутская ТЭЦ-12						0	67.6	
12	Иркутская ТЭЦ-16							0	97.0
13	Усть-Илимская ТЭЦ					0		438.6	
14	ТЭЦ ООО «Теплоснабжение» (Байкальская ТЭЦ)								0
15	ТЭЦ АО «Группа Илим» в г. Братск						0		919.7
16	ТЭЦ АО «Группа Илим» в г. Усть-Илимск						0		639.5
17	г. Братск						0	9.1	32.6
18	г. Зима							0	18.9
19	г. Иркутск						0	32.7	157.7
20	г. Свирск						0		27.6
21 – 22	г. Тулун, г. Усть-Илимск								0
23	г. Черемхово							0	7.4
24 – 37	Ангарский р-н, Балаганский р-н, Бодайбинский р-н, Братский р-н, Жигаловский р-н, Заларинский р-н, Зиминский р-н, Иркутский р-н, Казачинско-Ленский р-н, Катангский р-н, Качугский р-н, Киренский р-н, Куйтунский р-н, Мамско-Чуйский р-н								0
38	Нижнеилимский р-н							0	0.535
39 – 45	Нижнеудинский р-н, Ольхонский р-н, Слюдянский р-н, Тайшетский р-н, Тулунский р-н, Усольский р-н, Усть-Илимский р-н								0
46	Усть-Кутский р-н					0	0.056	0.295	0.905
47 – 56	Усть-Удинский р-н, Черемховский р-н, Чунский р-н, Шелеховский р-н, Аларский р-н, Баяндаевский р-н, Боханский р-н, Нукутский р-н, Осинский р-н, Эхи-рит-Булагатский р-н								0
<b>Итого</b>						<b>0</b>	<b>2 732.9</b>	<b>7 750.4</b>	<b>8 023.5</b>

Таблица 15. Результаты оптимизации транспортной системы рынка природного газа Иркутской области для различных сценариев (поток, тыс. т.у.т./год)

Линия	Сценарий 1	Сценарий 2	Сценарий 3	Сценарий 4	Сценарий 5	Сценарий 6	Сценарий 7
1 (1 → 61), 2 (61 → 60), 13 (60 → 46)				0	2 732.9	7 750.4	8 023.5
3 (60 → 59), 4 (59 → 58), 5 (58 → 2), 6 (2 → 57), 7 (57 → 26), 8 (2 → 33), 9 (58 → 37), 10 (59 → 35), 11 (61 → 32), 12 (1 → 28)							0
14 (46 → 62)				0	2 732.9	7 750.1	8 022.6
15 (62 → 38)						0	97.6
16 (38 → 12)						0	97.0
17 (62 → 63)				0	2 732.9	7 750.1	7 925.0
18 (63 → 64), 19 (64 → 16)				0			1 078.1
20 (16 → 13)				0			438.6
21 (64 → 22), 22 (22 → 45)							0
23 (63 → 5)				0	1 654.7	6 672.0	6 846.9
24 (5 → 65)				0	1 437.7	6 455.0	6 629.9
25 (65 → 17)					0	9.0	32.6
26 (65 → 7)				0	1 437.7	6 445.9	6 597.2
27 (7 → 15)				0	919.7	5 927.9	6 079.2
28 (15 → 66), 32 (66 → 68), 34 (68 → 69), 39 (69 → 71), 41 (71 → 72), 44 (72 → 3)					0	5 008.2	5 159.5
29 (66 → 67), 30 (67 → 49), 31 (67 → 42), 33 (68 → 27), 35 (69 → 21), 36 (21 → 70), 37 (70 → 43), 38 (70 → 39), 40 (71 → 36), 42 (72 → 25), 43 (25 → 47)							0
45 (3 → 73)					0	4 444.2	4 595.5
46 (73 → 18)						0	18.9
47 (18 → 30)							0
48 (73 → 74), 50 (74 → 75), 52 (75 → 76)					0	4 444.2	4 576.6
49 (74 → 54), 51 (75 → 51)							0
53 (76 → 11)					0	67.6	75.0
54 (11 → 77), 55 (77 → 23)						0	7.4
56 (77 → 48), 57 (48 → 29)							0
58 (76 → 78)					0	4 376.6	4 501.7
59 (78 → 20)					0	27.6	27.6
60 (78 → 79), 68 (79 → 10)					0	4 348.9	4 474.0
61 (79 → 53), 62 (53 → 55), 63 (53 → 56), 64 (56 → 52), 65 (52 → 80), 66 (80 → 40), 67 (80 → 34)							0
69 (10 → 81), 71 (81 → 8)					0	4 008.2	4 133.3
70 (81 → 44)							0
72 (8 → 9)					0	2 603.3	2 728.4
73 (9 → 24)							0
74 (9 → 82)					0	1 438.6	1 563.6
75 (82 → 19)					0	32.7	157.7
76 (19 → 31)							0
77 (82 → 4)					0		1 405.9
78 (4 → 6)					0		119.8
79 (6 → 83), 80 (83 → 50), 81 (83 → 41), 82 (41 → 14)							0