

Институт проблем машиноведения Российской академии наук

На правах рукописи

**Смирнов Алексей Сергеевич**

**Динамика, управление движением  
и оптимизация режимов гашения колебаний  
пространственного двойного маятника**

Научная специальность

1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
кандидат физико-математических наук  
Смольников Борис Александрович

Санкт-Петербург

2024

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1. Обзор исследований двойного маятника</b>	<b>15</b>
1.1. Исторические исследования двойного маятника . . . . .	15
1.2. Основные направления современных исследований двойного маятника . . . . .	20
1.3. Выводы по первой главе . . . . .	22
<b>2. Уравнения движения пространственного двойного маятника и анализ его малых колебаний</b>	<b>23</b>
2.1. Расчетная схема пространственного двойного маятника . . . . .	23
2.2. Уравнения движения пространственного двойного маятника . . . . .	24
2.3. Частные варианты плоского и ортогонального двойного маятника . . . . .	28
2.4. Определение частот и форм малых колебаний пространственного двойного маятника . . . . .	31
2.5. Диссипативная модель пространственного двойного маятника . . . . .	38
2.6. Выводы по второй главе . . . . .	46
<b>3. Построение и анализ нелинейных форм колебаний пространственного двойного маятника</b>	<b>47</b>
3.1. Постановка задачи о нахождении нелинейных форм колебаний . . . . .	47
3.2. Нелинейные формы колебаний ортогонального двойного маятника . . . . .	49
3.3. Нелинейные формы колебаний плоского двойного маятника . . . . .	58
3.4. Нелинейные формы колебаний в общем случае пространственного двойного маятника . . . . .	77
3.5. Выводы по третьей главе . . . . .	85

<b>4. Коллинеарное управление формами колебаний пространственного двойного маятника</b>	<b>86</b>
4.1. Принципы формирования рациональных управляющих воздействий . . . . .	86
4.2. Формирование управляющих воздействий по принципу коллинеарного управления . . . . .	89
4.3. Анализ линейной и нелинейной управляемых моделей при постоянном коэффициенте усиления . . . . .	93
4.4. Коллинеарное управление с переменным коэффициентом усиления . . . . .	104
4.5. Коллинеарное управление при наличии диссипативных сил . . .	115
4.6. Выводы по четвертой главе . . . . .	121
<b>5. Оптимизация режимов гашения колебаний пространственного двойного маятника</b>	<b>122</b>
5.1. Постановка задачи оптимизации пассивного и активного гашения колебаний и формирование критериев оптимизации . .	122
5.2. Оптимизация вязкого демпфирования колебаний . . . . .	125
5.3. Оптимизация коллинеарного гашения колебаний . . . . .	135
5.4. Сопоставление оптимальных параметров пассивного и активного гашения колебаний . . . . .	139
5.5. Оптимизация коллинеарного гашения колебаний при наличии вязкого демпфирования . . . . .	141
5.6. Выводы по пятой главе . . . . .	151
<b>Заключение</b>	<b>153</b>
<b>Список литературы</b>	<b>156</b>

# Введение

## Актуальность темы исследования

Математический маятник и его разновидности являются ключевыми моделями аналитической механики в течение уже более четырех столетий, начиная с юношеских экспериментальных открытий и последующих фундаментальных работ выдающегося ученого Г. Галилея, а также многих его последователей, представляя не только теоретический интерес, но и важное практическое значение для приложений. Среди множества маятниковых систем большое внимание привлекают двойной маятник, представляющий собой два шарнирно соединенных математических или физических маятника, а также его многочисленные модификации, которые являются крайне популярными объектами исследования не только в области теории колебаний систем с несколькими степенями свободы, но и в целом ряде смежных дисциплин.

Исследованию динамического поведения подобных систем в самых разнообразных условиях посвящен обширный пласт как отечественных, так и зарубежных публикаций, количество которых непрерывно возрастает с каждым годом. Столь серьезное внимание к двойному маятнику связано, прежде всего, с его практическими применениями. Начавшийся в середине прошлого века подъем интереса к вопросам биомеханики, сопровождающийся активным конструированием манипуляторов и других антропоморфных устройств, получил существенное развитие и пробудил интерес к созданию многозвенных маятниковых конструкций, снабженных силовыми приводами и контурами управления, а также к разработке различного рода андроидов, предназначенных заменить человека при работе в опасных условиях. Разумеется, основной интерес здесь представляет именно двойной маятник как наиболее простой многозвенный маятник, на примере которого можно качественно и

количественно описать динамику различных робототехнических конструкций, и, кроме того, выявить ряд новых положений в теоретическом отношении и оценить возможность их применения в инженерном деле.

Особое внимание на этом пути привлекают пространственные двухзвенники с цилиндрическими шарнирами, оси которых не являются коллинеарными друг другу. В таком случае конфигурации системы будут иметь более сложный вид, чем для плоского двойного маятника, и это обстоятельство также находит определенное применение на практике. Тем не менее, подобные системы исследованы далеко не достаточным образом по сравнению с плоскими вариантами двухзвенных конструкций. В первую очередь, при их анализе встают вопросы об изучении их малых и больших колебаний, имеющих периодический характер и пригодных для практического использования, а также о разгонных и тормозных режимах их движения, которые обладают эффективными свойствами и опять же диктуются нуждами практики. Это приводит к необходимости тщательного исследования таких важных проблем, как построение нелинейных форм колебаний, формирование рациональных управляющих воздействий, поиск оптимальных параметров пассивного и активного гашения колебаний, а также целого спектра сопутствующих задач.

Резюмируя сказанное, можно утверждать, что изучение движений пространственного двойного маятника в различных условиях его функционирования является **актуальной** задачей, которая **заслуживает самого серьезного внимания**, что и послужило поводом для написания данной диссертационной работы.

## Методика исследований

В работе используются методы аналитической механики, теории механических колебаний, теории управления механическими системами, оптимизации механических систем, а также приближенные асимптотические методы нелинейной механики. Кроме того, в работе осуществляется численное интегрирование уравнений движения в программной среде **MATLAB**, причем для этой цели применяется универсальный решатель **ode45**, который предназначен для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и основанный на реализации численного метода Рунге-Кутты 4-5 порядка точности.

## Цели и задачи работы

**Целью** настоящей диссертационной работы является исследование динамического поведения пространственного двойного маятника с идентичными параметрами его грузов и звеньев, шарнирные оси которого не коллинеарны друг другу. Оно заключается в изучении консервативных, диссипативных и управляемых моделей этой системы в линейной и нелинейной постановках, а также в решении задачи о нахождении оптимальных параметров пассивного и активного гашения ее колебаний.

В ходе данной работы были поставлены и детально рассмотрены следующие **задачи**:

1) Построить математическую модель колебаний пространственного двойного маятника и рассмотреть его частные варианты плоского и ортогонального двойного маятника. Исследовать частоты и формы его малых колебаний в зависимости от угла между шарнирными осями. Установить качественно и количественно влияние диссипативных сил вязкого трения в шарнирных сочленениях на его динамическое поведение.

2) Исследовать вопрос о нелинейных формах колебаний пространственного двойного маятника и его частных вариантов с помощью асимптотических методов нелинейной механики. Дать их наглядную графическую интерпретацию. Сопоставить аналитические выражения с результатами, полученными при помощи численного интегрирования уравнений движения.

3) Сформировать различные варианты управляющих воздействий, которые позволят разгонять пространственный двойной маятник по каждой из его форм колебаний в отдельности с малых до достаточно больших отклонений. Выявить постепенный дрейф формы колебаний и продемонстрировать его графически на основе численных результатов. Учесть влияние диссипативных эффектов и определить возможные режимы движения системы.

4) Определить наилучшие параметры пассивного и активного гашения пространственного двойного маятника в отдельности по различным критериям, характеризующим эффективность процессов затухания движений системы. Рассмотреть совместный учет двух вариантов подавления колебаний и определить оптимальные параметры активного гашения при заданных параметрах пассивного гашения. Сопоставить все полученные результаты.

## Научная новизна

Диссертационная работа содержит ряд новых результатов, проясняющих особенности поведения пространственного двойного маятника в различных режимах его движения. В представленном исследовании впервые построено наиболее подробное аналитическое решение для задачи о малых колебаниях пространственного двойного маятника при отсутствии и наличии вязкого трения в шарнирах, осуществлено аналитическое и численное исследование его нелинейных форм колебаний, изучены его авторезонансные разгонные режимы под действием коллинеарного управления с постоянным и переменным коэффициентом усиления, а также осуществлен совместный учет диссипативных и управляющих воздействий и определены оптимальные параметры пассивного и активного гашения на основе критериев, характеризующих эффективность процессов затухания движений системы.

## Теоретическая и практическая значимость работы

Исследование движений пространственного двойного маятника представляет собой значительный теоретический интерес и вносит определенный вклад в один из важнейших для приложений и бурно развивающихся разделов механики – динамику маятниковых конструкций. Рассмотренные математические модели и приведенные аналитические и численные решения представляют основу для изучения характера движения более сложных маятников, имеющих несколько степеней свободы, а также множества смежных вопросов. Полученные результаты могут найти определенное практическое применение в области робототехники и биомеханики, а именно при разработке, конструировании и анализе динамического поведения разнообразных устройств: двухзвенных манипуляторов, элементов сложных многозвенных систем, многочисленных андроидов и прочих мобильных роботов. Кроме того, представленные в работе задачи и их подробные решения также интересны и в качестве наглядных примеров прикладной механики маятниковых систем в педагогической и инженерной практике.

## Достоверность результатов

Достоверность полученных в работе результатов обеспечивается использованием существующих точных и приближенных математических методов исследования линейных и нелинейных колебаний механических систем при отсутствии и наличии диссипативных эффектов и управляющих воздействий, а также путем сопоставления аналитических выражений с результатами, найденными при помощи численного интегрирования уравнений движения. Помимо этого, для частных вариантов плоского и ортогонального двойного маятника осуществляется сравнение полученных выражений с ранее известными формулами из литературы.

## Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, 5 глав и заключения. Объем диссертации составляет 171 страницу с 67 рисунками. Список литературы содержит 156 наименований. Во **введении** представлена актуальность темы исследования и сформулированы цели и задачи работы. **Глава 1** посвящена истории исследований двойного маятника, а также обсуждению современных направлений его анализа. В **главе 2** выводятся уравнения движения пространственного двойного маятника, рассматриваются его частные варианты плоского и ортогонального двойного маятника и исследуются его малые колебания, в том числе и при наличии вязкого трения в шарнирных сочленениях. В **главе 3** с помощью асимптотических методов строятся и детально изучаются нелинейные формы колебаний пространственного двойного маятника и его частных вариантов, причем осуществляется их сравнение с результатами численного интегрирования. **Глава 4** посвящена аналитическому и численному исследованию управляемых движений пространственного двойного маятника и его частных вариантов под действием коллинеарного управления, которое позволяет осуществлять разгон системы по каждой из ее форм колебаний в отдельности с плавным переходом из линейной зоны в нелинейную и может иметь как постоянный, так и переменный коэффициент усиления, а также учитывается возможность наличия вязкого трения и изучаются режимы движения системы под действием диссипативных и управляющих воздействий.

В **главе 5** решаются вопросы оптимального подбора параметров пассивного и активного гашения колебаний пространственного двойного маятника в отдельности и при их совместном действии по различным критериям оптимизации, которые характеризуют эффективность процессов затухания его движений, а также осуществляется сопоставление результатов. В **заключении** подводятся итоги проведенного исследования и делаются основные выводы по работе.

## Список публикаций автора по теме диссертации

По теме диссертации автором опубликовано 17 научных работ в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК; и в изданиях, индексируемых в базе данных РИНЦ и международных базах цитирования Web of Science и Scopus:

1) **Смирнов А. С.**, Смольников Б. А. Управление процессом раскачивания качелей // Неделя науки СПбПУ. Материалы научного форума с международным участием. Институт прикладной математики и механики. 2016. С. 106–109.

2) **Смирнов А. С.**, Смольников Б. А. Оптимальное гашение свободных колебаний в линейных механических системах // Машиностроение и инженерное образование. 2017. № 3 (52). С. 8–15.

3) **Смирнов А. С.**, Смольников Б. А. Управление резонансными колебаниями нелинейных механических систем на основе принципов биодинамики // Машиностроение и инженерное образование. 2017. № 4 (53). С. 11–19.

4) **Смирнов А. С.**, Смольников Б. А. Управление резонансными колебаниями в нелинейных механических системах // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2016-2017. СПб: изд-во С.-Петербургского ун-та. 2018. С. 23–39.

5) Леонтьев В. А., **Смирнов А. С.**, Смольников Б. А. Оптимальное демпфирование колебаний двухзвенного манипулятора // Робототехника и техническая кибернетика. 2018. № 2 (19). С. 52–59.

6) Леонтьев В. А., **Смирнов А. С.**, Смольников Б. А. Коллинеарное управление колебаниями диссипативного двойного маятника // Робототехника и техническая кибернетика. 2019. Т. 7. № 1. С. 65–70.

7) **Смирнов А. С.**, Смольников Б. А. История исследований двойного маятника // История науки и техники. 2020. № 12. С. 3–12.

8) **Smirnov A. S.**, Smolnikov B. A. Oscillations of Double Mathematical Pendulum with Noncollinear Joints // Advances in Mechanical Engineering. Selected Contributions from the Conference "Modern Engineering: Science and Education", St. Petersburg, Russia, June 2020. 2021. Pp. 185–193.

9) **Smirnov A. S.**, Smolnikov B. A. Nonlinear oscillation modes of double pendulum // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. International Conference of Young Scientists and Students "Topical Problems of Mechanical Engineering" (ToPME 2020) 2nd–4th December 2020, Moscow, Russia. 2021. Vol. 1129, 012042.

10) **Смирнов А. С.**, Смольников Б. А. Коллинеарное управление движением однозвенного манипулятора с переменным усилением // Молодежь и наука: Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований. Материалы IV Всероссийской научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Комсомольск-на-Амуре, 12-16 апреля 2021 г. Ч. 2. 2021. С. 70–73.

11) **Smirnov A. S.**, Smolnikov B. A. Nonlinear oscillation modes of spatial double pendulum // Journal of Physics: Conference Series. The International Scientific Conference on Mechanics "The Ninth Polyakhov's Reading" (ISCM) 9–12 March 2021, St. Petersburg, Russian Federation. 2021. Vol. 1959, 012046.

12) **Smirnov A. S.**, Smolnikov B. A. Collinear control of oscillation modes of spatial double pendulum with variable gain // Cybernetics and physics. 2021. Vol. 10. Is.2. Pp. 90–96.

13) **Smirnov A. S.**, Smolnikov B. A. Dissipative Model of Double Mathematical Pendulum with Noncollinear Joints // Advances in Mechanical Engineering. Selected Contributions from the Conference "Modern Engineering: Science and Education", St. Petersburg, Russia, June 2021. 2022. Pp. 38–47.

14) **Смирнов А. С.**, Смольников Б. А. История механического резонанса – от первоначальных исследований до авторезонанса // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23. Вып. 1. С. 269–292.

15) **Смирнов А. С.**, Смольников Б. А. Оптимизация режимов гашения колебаний пространственного двойного маятника. I. Постановка задачи // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Аст-

рономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2. С. 357–365.

*Переводная версия:* **Smirnov A. S.**, Smolnikov B. A. Optimization of Oscillation Damping Modes of a Spatial Double Pendulum: 1. Formulation of the Problem. Vestnik St. Petersburg University, Mathematics. 2022. Vol. 55. No. 2. Pp. 243–248.

16) **Смирнов А. С.**, Смольников Б. А. Оптимизация режимов гашения колебаний пространственного двойного маятника. II. Решение задачи и анализ результатов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 1. С. 121–138.

*Переводная версия:* **Smirnov A. S.**, Smolnikov B. A. Optimization of Oscillation Damping Modes of a Spatial Double Pendulum: 2. Solution of the Problem and Analysis of the Results. Vestnik St. Petersburg University, Mathematics. 2023. Vol. 56. No. 1. Pp. 93–106.

17) **Смирнов А. С.**, Смольников Б. А. Нелинейный авторезонанс в задачах управления колебаниями многомерных механических систем // XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: сборник тезисов докладов в 4 т., 21–25 августа 2023 г., Санкт-Петербург, Россия. Т. 1. Общая и прикладная механика. 2023. С. 214–216.

## Апробация работы

Отдельные части диссертационной работы были представлены на следующих научных семинарах и конференциях:

1) На семинарах кафедры (Высшей школы) «Механика и процессы управления» СПбПУ Петра Великого (Санкт-Петербург, 2016, 2020);

2) На конференции «Неделя науки СПбПУ» с международным участием (Санкт-Петербург, 2016);

3) На городском семинаре «Компьютерные методы в механике сплошной среды» (Санкт-Петербург, 2016, 2024);

4) На семинаре лаборатории «Управление сложными системами» ИПМаш РАН (Санкт-Петербург, 2017);

5) На Международной научно-практической конференции «Современное машиностроение: Наука и образование MMESE» (Санкт-Петербург, 2020, 2021);

6) На семинаре по истории математики ПОМИ РАН (Санкт-Петербург, 2020, 2021);

7) На заседаниях секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Доме ученых им. М. Горького РАН (Санкт-Петербург, 2020, 2021);

8) На XXXII Международной инновационной конференции молодых ученых и студентов по современным проблемам машиноведения МИКМУС (Москва, 2020);

9) На Международной научной конференции по механике «IX Поляховские чтения» (Санкт-Петербург, 2021);

10) На IV Всероссийской национальной научной конференции молодых ученых «Молодежь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований» (Комсомольск-на-Амуре, 2021);

11) На XIII Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Санкт-Петербург, 2023).

## Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность своему учителю и научному руководителю диссертационной работы, кандидату физико-математических наук, старшему научному сотруднику Института проблем машиноведения Российской академии наук (ИПМаш РАН) **Борису Александровичу Смольникову** за постоянное внимание к работе, поддержку и напутствия на всех этапах ее написания. Кроме того, автор хочет выразить благодарность своему коллеге, наставнику и соавтору научных работ, кандидату физико-математических наук, старшему научному сотруднику Центрального научно-исследовательского и опытно-конструкторского института робототехники и технической кибернетики (ЦНИИ РТК) **Виктору Анатольевичу Леонтьеву** за оценку трудов, ценные замечания и помощь в улучшении текста работы.

## Основные научные результаты

1) Найдены зависимости частот и форм малых колебаний пространственного двойного маятника с идентичными параметрами грузов и звеньев от угла между шарнирными осями, а также продемонстрировано, что при идентичных диссипативных коэффициентах силы вязкого трения в шарнирах не

искажают форм колебаний консервативной модели, лишь убавляя их амплитуды, причем определены все характеристики диссипативного процесса. Результаты опубликованы в работах: [144] (с. 188–191), [141] (с. 40–43).

2) Установлено, что нелинейные формы колебаний пространственного двойного маятника и его частного варианта плоского двойного маятника заметно усложняются по сравнению с традиционными линейными формами колебаний при увеличении уровня энергии системы, и определены ключевые величины, отражающие динамическое поведение системы при движении по нелинейной форме, от амплитуды и угла между шарнирными осями. Результаты опубликованы в работах: [142] (с. 3–9), [143] (с. 2–8).

3) Показано, что коллинеарное управление при постоянном коэффициенте усиления не искажает форм малых колебаний исходной консервативной модели пространственного двойного маятника и его плоского варианта и позволяет осуществлять разгон системы по каждой из них в отдельности с постепенным переходом из линейной зоны в нелинейную вплоть до достаточно больших отклонений, а при переменном коэффициенте усиления позволяет добиться плавного выхода системы на установившийся режим нелинейных периодических колебаний с заданным уровнем энергии. Результаты опубликованы в работах: [73] (с. 14–18), [140] (с. 92–95).

4) Поставлена и решена задача о нахождении наилучших значений параметров гашения колебаний пространственного двойного маятника в соответствии с двумя критериями оптимизации, характеризующими эффективность процессов затухания движений системы, и определены зависимости оптимальных значений параметров активного гашения от заданных параметров пассивного гашения и угла между шарнирными осями по этим критериям. Результаты опубликованы в работах: [68] (с. 11–14), [69] (с. 358–362), [70] (с. 128–134).

Личное участие автора в получении всех представленных результатов: конкретные постановки задач, их подробное решение и детальный обзор всех найденных аналитических и численных результатов. С соавторами научных работ, опубликованных по теме диссертации, соискателем обсуждались методы исследования и полученные результаты.

## Положения, выносимые на защиту

1) Рассмотрена расчетная схема пространственного двойного математического маятника с идентичными параметрами грузов и звеньев, у которого шарнирные оси не коллинеарны друг другу. Выведены нелинейные уравнения движения системы и изучена линейная модель ее малых колебаний. Произведен учет сил вязкого трения в шарнирных сочленениях и установлено их влияние на характер затухания движений системы.

2) На основе асимптотических методов нелинейной механики построены и проанализированы нелинейные формы колебаний пространственного двойного маятника в первом приближении и его частных вариантов плоского и ортогонального двойного маятника в первом и втором приближениях. Полученные аналитические решения сопоставлены с результатами численного интегрирования уравнений движения.

3) Рассмотрено управляемое движение пространственного двойного маятника и его частных вариантов под действием шарнирных моментов, сформированных по принципу коллинеарного управления с постоянным коэффициентом усиления. Предложена модификация коллинеарного закона, которая содержит переменный коэффициент усиления, связанный с текущей энергией системы. В рамках линейной управляемой модели при постоянном коэффициенте усиления рассмотрен учет вязкого трения и дана классификация возможных режимов движения такой системы.

4) Исследованы вопросы оптимального гашения колебаний пространственного двойного маятника под действием диссипативных и управляющих воздействий, при этом были приняты два критерия оптимизации: максимизация степени устойчивости системы и минимизация интегрального энерго-временного показателя. Дано сопоставление оптимальных параметров гашения, найденных по указанным критериям.

# 1. Обзор исследований двойного маятника

## 1.1. Исторические исследования двойного маятника

Задача о двойном маятнике имеет длинную и богатую историю. Поэтому представляет интерес обратиться сначала к историческим исследованиям двойного маятника [64]. История двойного маятника отсчитывается от первой половины XVIII века, и она связана с именами выдающихся ученых того времени – А. Клеро, Д. Бернулли и Л. Эйлера.

Впервые двойной маятник в 1735 г. описал А. Клеро [25]. Он сделал доклад в Парижской академии наук, после чего опубликовал статью «*Решение некоторых проблем динамики*» [99], вышедшую в 1736 г. К ее созданию Клеро подтолкнули обсуждения с А. Фонтеном, опубликовавшим в 1734 г. статью [106], где шла речь об определении кривой, описываемой вершиной угла, стороны которого скользят по некоторой заданной кривой. В предисловии Клеро к своему труду [99] имеется фраза «"Дискуссия о трактрисе" между г. Фонтеном и мной, длившаяся на протяжении нескольких ассамблей, побудила меня к исследованиям, которые я предлагаю» [87]. Работа Клеро была посвящена решению семи задач о движении связки двух точек в горизонтальной или вертикальной плоскостях. Предполагается, что траектория одной из точек или центра тяжести системы считается заданной (прямая, окружность или произвольная плоская кривая), а задача состоит в определении траектории другой точки или обеих точек, когда величины и направления их начальных скоростей заданы. При этом Клеро для решения этих задач использовал

как традиционные геометрические приемы, так и методы дифференциального исчисления. Ссылаясь на Д. Бернулли, Клеро положил в основу решения своих задач принцип сохранения живых сил, на тот момент еще подвергавшийся сомнению и впоследствии канонизированный Лагранжем под названием «теоремы об изменении кинетической энергии». Следует подчеркнуть, что труд Клеро был исторически первой работой подобного рода. Важным отличием работы Клеро от работ его предшественников является то, что он изучал уже движение не просто двух взаимосвязанных точек, а поведение одной точки, на которую наложены заданные геометрические связи [87]. Этот подход был важен для создания основ механики несвободного движения точки, системы точек и твердого тела, которые впоследствии были заложены в работах Ж. Даламбера.

Следующим свой вклад в анализ двойного маятника внес сам Д. Бернулли, опубликовавший в 1738 г. статью «*Теорема о колебаниях тел, подвешенных вертикально на упругой нити и на цепи*» [92]. В ней впервые дается полная теория малых качаний двойного гравитационного маятника [25]: определяются его формы колебаний при идентичных математических маятниках, а также рассматривается общий случай различных масс грузов и различных длин звеньев. В дальнейшем Бернулли опубликовал еще ряд статей по этой теме, наиболее значимой из которых была статья 1774 г. «*Специальное физико-механическое рассуждение о взаимных составных движениях. Легко наблюдаемые исследования двойного маятника в подтверждение принципа сосуществования простых колебаний*» [91]. Интерес в этой статье представляет обсуждение возможности появления в системе внутренних резонансов, когда частоты колебаний соотносятся как целые числа, в результате чего определяются условия на параметры системы, при которых они реализуются. Показано, что если при равных длинах обоих маятников массы первого и второго грузов соотносятся как  $16 : 9$ , то будет иметь место резонанс  $1 : 2$ , а если эти массы соотносятся как  $9 : 16$ , то будет иметь место резонанс  $1 : 3$ .

Наконец, замыкает тройку исторических исследований Л. Эйлер, опубликовавший в 1741 г. статью «*О колебаниях гибкой проволоки, на которой подвешено произвольное количество малых грузов*» [105]. В ней автор анализирует не только задачу о двойном маятнике (чертеж из этой работы представлен на рис. 1.1), для которого также приводятся выражения для форм

колебаний, но и обобщает эту задачу на случай любого числа грузов, тем самым приходя к расчетной схеме многосвязного математического маятника.

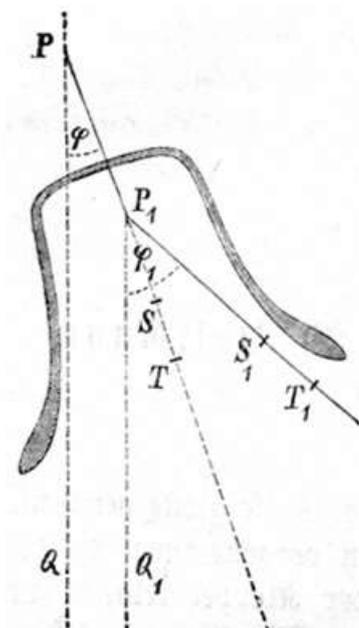
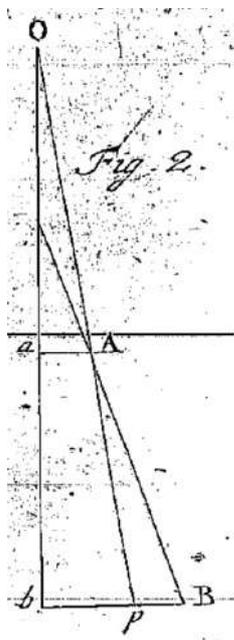


Рис. 1.1. Чертеж из статьи Эйлера      Рис. 1.2. Кельнский колокол и его язык: реальная конструкция и ее расчетная схема из статьи Вельтмана

Задача о двойном маятнике впервые получила серьезное практическое применение, которое было связано с решением проблемы «немого» Кёльнского колокола, лишь во второй половине XIX в. В 1875 г. на колокольне Кёльнского собора (Германская империя) наблюдался интересный случай: полый внутри колокол (*Kaiserglocke* – императорский колокол) и шарнирно подвешенный к нему язык колебались как одно целое (рис. 1.2). Поэтому язык не ударял о колокол, и он тем самым не издавал никаких звуков. Это удивительное явление было строго объяснено В. Вельтманом в статье «О движении колокола» [151], где он трактовал систему как двойной маятник: колокол играл роль первого, а его язык – второго маятника. На рис. 1.2 представлена также расчетная схема системы в отклоненном положении из упомянутой работы. Для решения этой задачи были использованы уравнения Лагранжа второго рода и рассмотрен вопрос о том, когда два дифференциальных уравнения движения допускают частное решение, при котором и колокол, и его язык все время отклоняются на одинаковый угол. В результате было получено условие на параметры системы, когда язык не смещается относительно колокола. С

достаточной для практики точностью этому условию можно дать простую физическую интерпретацию: колокол движется как единое тело и потому не может звучать, если в состоянии покоя центр качаний колокола совпадает с центром качаний его языка. Так, приведенная длина колокола Кёльнского собора равна 328.2 см, приведенная длина его языка равна 262.9 см, а расстояние между точками подвеса языка и колокола составляет 66.7 см. Поэтому центр качаний языка отстоял от оси подвеса колокола на расстоянии  $262.9+66.7=329.6$  см, т. е. почти совпадал с центром качаний колокола [25]. Этим и объясняется практически полное отсутствие относительных движений языка, который совершал настолько малые колебания по отношению к колоколу, что ему не удавалось произвести удара, хотя язык и был достаточно длинен для того, чтобы достать до стенок колокола [121]. Колокол стал звонить только после того, как была увеличена длина его языка. Следует подчеркнуть, что при выводе упомянутого условия использовалась глобальная нелинейная модель системы, а не линеаризованная. Наконец, в статье [151] имеется таблица, в которой представлены данные по всем колоколам Кёльнского собора и демонстрируется, что все колокола, кроме *Kaiserglocke*, не испытывали проблем со звучанием, поскольку их параметры слишком сильно отклонялись от полученного соотношения. Данная задача является весьма поучительной не только для проектировщиков колоколов, но и для широкого круга инженеров, а потому она вошла в ряд канонических книг по механике – как зарубежных [115, 117], так и отечественных [26].

Следующее важное применение двойного маятника обнаружилось в первой половине XX в., когда он в 1923 г. был предложен В. П. Ветчинкиным и Н. Г. Ченцовым для экспериментального определения моментов инерции твердых тел по методу качаний в работе «*Плоский маятник о двух степенях свободы и определение при помощи его высоты центра тяжести и момента инерции твердого тела*» [15]. В результате была разработана соответствующая теория, которая также была рассмотрена Л. Г. Лойцянским и А. И. Лурье [43]. Этот метод получил широкое практическое применение для определения моментов инерции самолетов, и в ЦАГИ был сконструирован и построен специальный подвес ПЭ1, позволяющий качать самолет на бифилярном подвесе как двойной маятник [25]. Впоследствии эта конструкция была улучшена и был построен подвес ПЭ2. Эти эксперименты были деталь-

но описаны Ю. А. Победоносцевым в статьях [57, 58]. Следует отметить, что этот метод использовался и за рубежом [112]. В [25] детально представлен путь вывода формулы для момента инерции. Чтобы определить момент инерции тела относительно главной центральной оси, его подвешивают на двух стержнях (или двух тесьмах) равной длины, расположенных симметрично относительно центра тяжести (или его предполагаемого местонахождения). Следует также иметь в виду, что при равновесии системы горизонтальные отрезки, соединяющие верхние и нижние концы стержней, должны быть параллельны заданной оси (рис. 1.3). Для нахождения момента инерции следует определить периоды обоих главных колебаний, методом подбора начальных условий добившись качаний самолета только по одной из форм его колебаний.

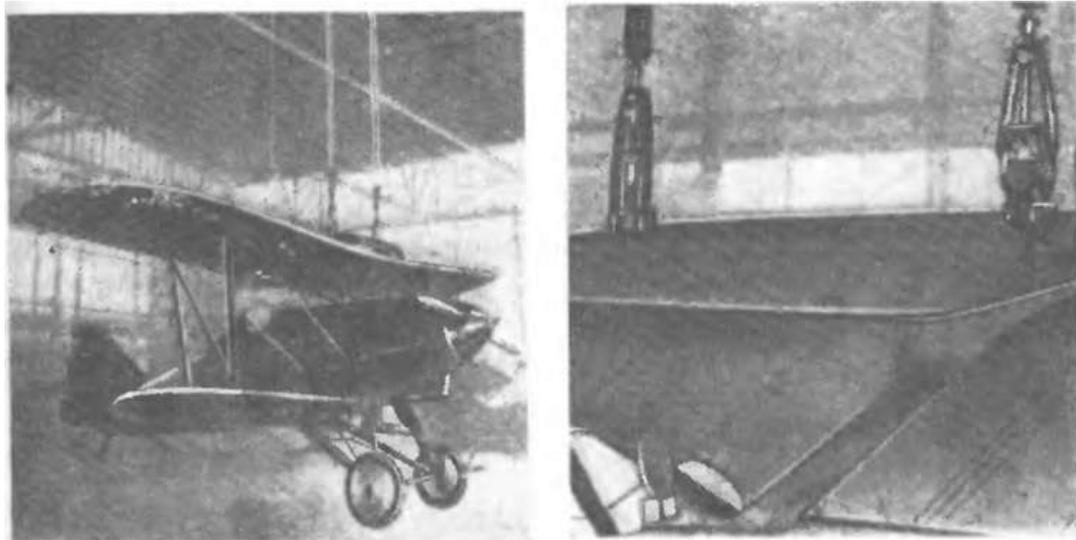


Рис. 1.3. Подвешивание самолета (подвес ПЭ1 ЦАГИ)

В результате схема двойного маятника и расчет ее колебаний в различных постановках вошла как в зарубежную [95, 119, 147], так и многочисленную отечественную [7, 28, 34, 48, 86] инженерную, научную и учебную литературу. Приведенные в этих трудах результаты относятся к анализу малых колебаний двойного математического или двойного физического маятника в рамках линейной модели и определению частот и форм его малых колебаний, а также рассмотрению различных частных или предельных случаев.

## 1.2. Основные направления современных исследований двойного маятника

В последние несколько десятилетий наметилось резкое возрастание интереса к механике двойного маятника и его разновидностей. Как уже говорилось ранее во введении, это связано в первую очередь с его применением в робототехнике в качестве простейшей модели двухзвенного манипулятора, который должен совершать рабочие движения как с малыми, так и с весьма большими амплитудами, и в качестве элемента сложных многозвенных конструкций, а также в задачах биодинамики, поскольку двойной маятник может имитировать конечности живых организмов [74, 75, 77]. При этом движения двойного маятника исследуются не только аналитическим или численным путем, но и в результате экспериментов. На рис. 1.4 приведены различные конструкции двойного математического и двойного физического маятника, созданные в качестве демонстрационных установок и заимствованные из работ [90, 133], а также из видеозаписей натуральных экспериментов, находящихся в открытом доступе.

Выделим основные направления современных исследований гравитационного двойного маятника, относящиеся к последним трем десятилетиям, и сопроводим их ссылками на соответствующие статьи и книги, в которых встречаются новые задачи подобного рода. Разумеется, представленное ниже деление в целом является условным, поскольку некоторые публикации можно отнести к нескольким направлениям.

1. Анализ вынужденных колебаний и управляемых движений двойного маятника в различных условиях его функционирования, в том числе вопросы оптимального управления его движением и оптимального подавления его колебаний [3, 8, 36, 83, 88, 120, 123, 155].

2. Динамика, стабилизация и управление обращенным двойным маятником и его модификациями [2, 44, 55, 59, 60, 94, 107, 114, 134, 154].

3. Динамика двойного маятника с вибрирующей точкой подвеса [13, 19, 56, 84, 97, 116, 139].

4. Устойчивость положений равновесия, динамика и управление движением пространственных модификаций двойного маятника [1, 50, 85, 90, 124].

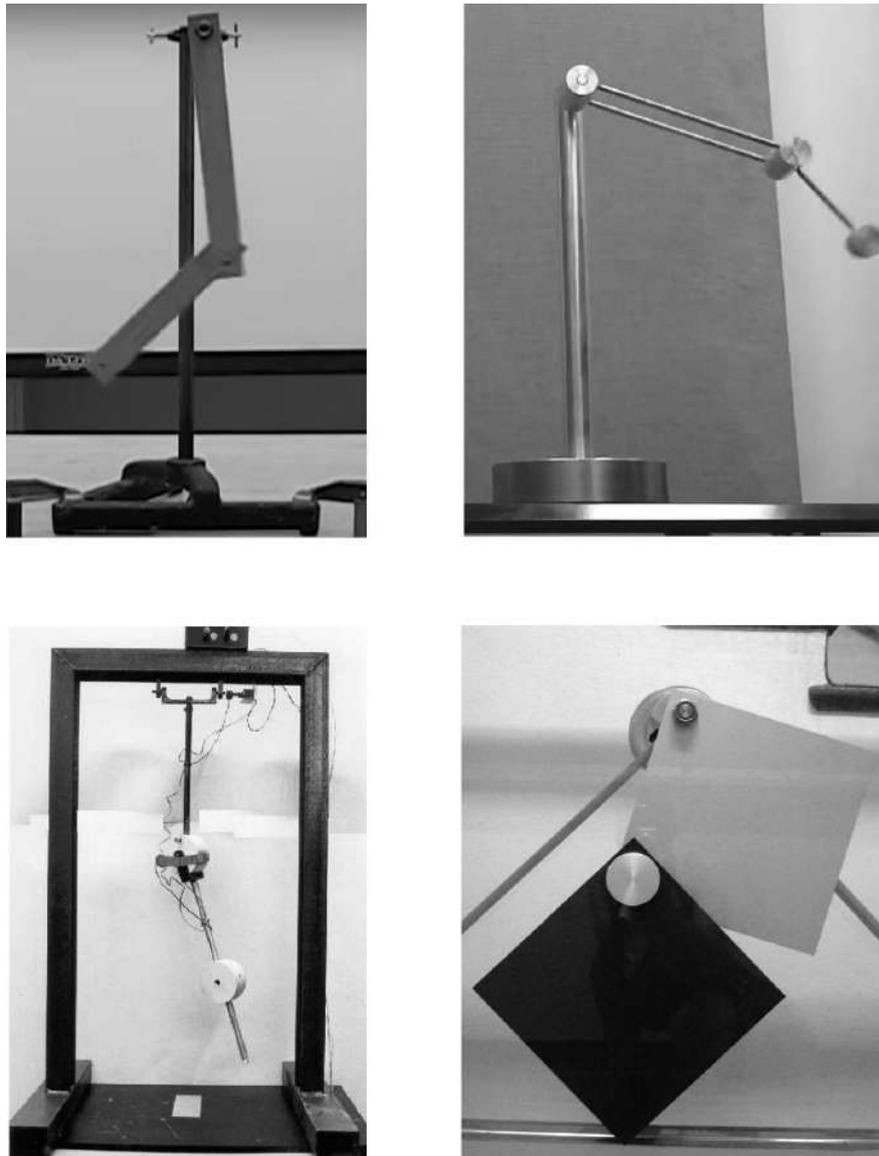


Рис. 1.4. Различные конструкции двойного маятника

5. Численное и экспериментальное исследование различных задач о двойном маятнике, компьютерное моделирование двойного маятника в пакетах прикладных программ с наглядной визуализацией его динамического поведения [30, 33, 89, 93, 98, 100, 103, 104, 111, 129, 152, 156].

6. Аналитическое исследование движений двойного маятника при больших отклонениях [38, 39, 113, 118, 128, 133, 146].

7. Анализ хаотического поведения двойного маятника [49, 52, 101, 122, 125, 132, 138, 145].

Резюмируя сказанное, можно заключить, что во многих отношениях двойной маятник является достаточно хорошо изученным объектом. Как можно видеть, значительное количество публикаций посвящено численному инте-

грированию уравнений движения двойного маятника, которые предварительно записываются в удобной для этой цели форме (лагранжевой или гамильтоновой), и последующему установлению различных особенностей его поведения. При этом наиболее часто рассматривается плоский вариант двойного маятника, что существенно облегчает все построения и рассуждения.

### 1.3. Выводы по первой главе

Представленный детальный литературный обзор публикаций, посвященных механике двойного маятника, позволяет выявить некоторые области, в рамках которых исследования данного объекта могут быть продолжены. В первую очередь, большой интерес представляет как раз механика пространственных вариантов двойного маятника, движения которых могут иметь более разнообразный характер и будут охватывать более широкое множество конфигураций, нежели плоский двойной маятник. Тем не менее, необходимо подчеркнуть, что и для самого плоского двухзвенника еще имеется ряд вопросов, требующих серьезного обсуждения и тщательного исследования. Что же касается пространственных вариантов двойного маятника, то одним из них является двойной маятник, шарнирные оси которого не коллинеарны друг другу. Естественно, что диапазон применимости этих маятников оказывается гораздо большим, и они широко используются на практике, поскольку подобная неколлинеарность свойственна многим реальным конструкциям манипуляторов. Вследствие этого и возникают вопросы исследования консервативных, диссипативных и управляемых моделей упомянутых систем в линейной или нелинейной постановке, а также вопросы оптимального гашения их колебательных движений, которые имеют серьезное теоретическое и прикладное значение и должны решаться при помощи разумного сочетания аналитических и численных методов. Именно к этому направлению и относится настоящая диссертационная работа.

## 2. Уравнения движения пространственного двойного маятника и анализ его малых колебаний

### 2.1. Расчетная схема пространственного двойного маятника

Обратимся к изучению расчетной схемы двойного маятника, состоящего из двух шарнирно соединенных одинаковых математических маятников, каждый из которых имеет длину  $l$  и содержит концевой груз массой  $m$  [144]. Такая идентичность в дальнейшем позволит построить аналитические решения всех поставленных задач и провести их исчерпывающее исследование. Будем полагать, что в главном положении равновесия, когда оба звена лежат на одной вертикали, а шарнирные углы их поворота равны нулю, оси обоих шарниров горизонтальны и образуют между собой некоторый угол  $\alpha$ , т. е. не коллинеарны друг другу (рис. 2.1). Не умаляя общности, можно считать этот угол острым при соответствующем его отсчете. В результате двойной маятник становится пространственным, вследствие чего геометрия и кинематика данной системы оказываются значительно сложнее, чем для обычного плоского двойного маятника.

На рис. 2.2 представлено отклоненное положение рассматриваемого двойного маятника. В качестве обобщенных координат будем принимать шар-

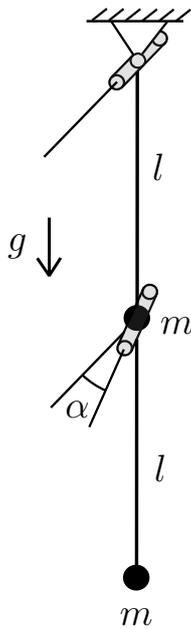


Рис. 2.1. Равновесное положение

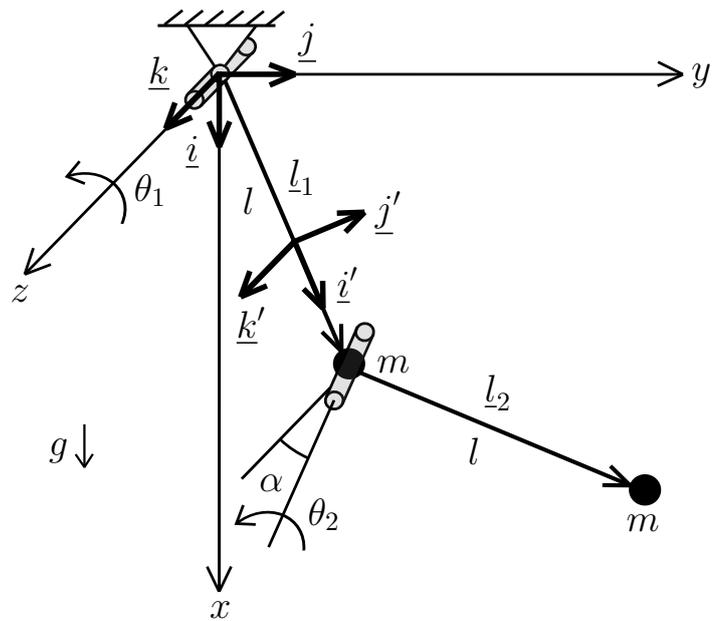


Рис. 2.2. Отклоненное положение

нирные углы поворота  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Для удобства дальнейших действий введем прямоугольную декартову систему координат  $xuz$  и связанный с ней неподвижный ортогональный базис  $\underline{i}\underline{j}\underline{k}$  так, что в состоянии главного равновесия первое звено направлено по орту  $\underline{i}$ . Кроме того, введем подвижный ортогональный базис  $\underline{i}'\underline{j}'\underline{k}'$ , связанный с первым звеном так, что орт  $\underline{i}'$  направлен вдоль оси этого звена от входного (первого) шарнира к выходному (второму), повернутому на угол  $\alpha$  относительно входного шарнира.

## 2.2. Уравнения движения пространственного двойного маятника

С целью вывода уравнений движения пространственного двойного маятника перейдем к составлению выражений для его кинетической и потенциальной энергий. Ясно, что кинетическая и потенциальная энергии первого груза определяются легко и не вызывают затруднений, поскольку его скорость есть  $v_1 = l\dot{\theta}_1$ , а вертикальная координата дается выражением  $x_1 = l \cos \theta_1$ . Основной трудностью здесь является нахождение скорости и вертикальной координаты второго концевой груза, который совершает сложное пространственное движение, определяемое углами  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  и  $\alpha$ . Наиболее идейно простым

способом нахождения скорости этого груза является координатный метод, в ходе которого необходимо определить декартовы координаты этого груза в неподвижном базисе, а далее найти отвечающие им проекции скорости на координатные оси.

Для этого обратимся к получению выражения для радиус-вектора  $\underline{r}_2$  второго груза. Сначала найдем векторы  $\underline{l}_1$  и  $\underline{l}_2$ , имеющие длину и направление звеньев, в базисе  $\underline{i}'\underline{j}'\underline{k}'$ , в котором они имеют наиболее простые представления. Выражение для  $\underline{l}_1$  очевидно, тогда как для определения  $\underline{l}_2$  необходимо прибегнуть к рис. 2.3, где представлена система координат  $x'y'z'$ , которой отвечает базис  $\underline{i}'\underline{j}'\underline{k}'$ . В результате несложно получить, что

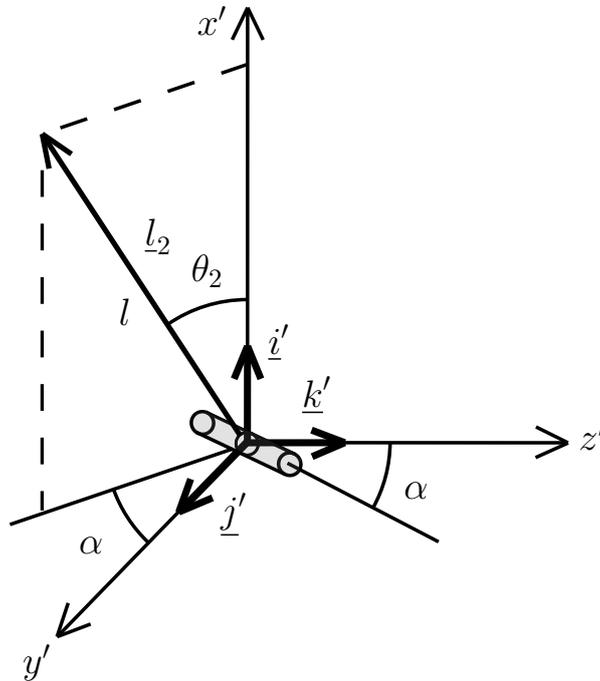


Рис. 2.3. К вычислению вектора  $\underline{l}_2$

$$\underline{l}_1 = l\underline{i}', \quad \underline{l}_2 = l(\cos \theta_2 \underline{i}' + \cos \alpha \sin \theta_2 \underline{j}' - \sin \alpha \sin \theta_2 \underline{k}'). \quad (2.2.1)$$

Суммируя эти векторы, получим искомый вектор  $\underline{r}_2$ :

$$\underline{r}_2 = \underline{l}_1 + \underline{l}_2 = l [(1 + \cos \theta_2) \underline{i}' + \cos \alpha \sin \theta_2 \underline{j}' - \sin \alpha \sin \theta_2 \underline{k}']. \quad (2.2.2)$$

Если теперь учесть соотношения связи между ортами базисов  $\underline{i}'\underline{j}'\underline{k}'$  и  $\underline{i}\underline{j}\underline{k}$

$$\underline{i}' = \cos \theta_1 \underline{i} + \sin \theta_1 \underline{j}, \quad \underline{j}' = -\sin \theta_1 \underline{i} + \cos \theta_1 \underline{j}, \quad \underline{k}' = \underline{k}, \quad (2.2.3)$$

то можно получить выражение для  $\underline{r}_2$  и в неподвижном базисе  $\underline{ijk}$ :

$$\underline{r}_2 = l \left[ ((1 + \cos \theta_2) \cos \theta_1 - \cos \alpha \sin \theta_2 \sin \theta_1) \underline{i} + \right. \\ \left. + ((1 + \cos \theta_2) \sin \theta_1 + \cos \alpha \sin \theta_2 \cos \theta_1) \underline{j} - \sin \alpha \sin \theta_2 \underline{k} \right]. \quad (2.2.4)$$

Из этого выражения определяются декартовы координаты второго груза в системе координат  $xyz$ :

$$\begin{cases} x_2 = l [(1 + \cos \theta_2) \cos \theta_1 - \cos \alpha \sin \theta_2 \sin \theta_1] \\ y_2 = l [(1 + \cos \theta_2) \sin \theta_1 + \cos \alpha \sin \theta_2 \cos \theta_1] \\ z_2 = -l \sin \alpha \sin \theta_2 \end{cases}. \quad (2.2.5)$$

Дифференцируя эти выражения по времени, находим проекции скорости второго груза на координатные оси:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = l \left[ -(1 + \cos \theta_2) \sin \theta_1 - \cos \alpha \sin \theta_2 \cos \theta_1 \right] \dot{\theta}_1 - \\ \quad - (\sin \theta_2 \cos \theta_1 + \cos \alpha \cos \theta_2 \sin \theta_1) \dot{\theta}_2 \\ \dot{y}_2 = l \left[ ((1 + \cos \theta_2) \cos \theta_1 - \cos \alpha \sin \theta_2 \sin \theta_1) \dot{\theta}_1 + \right. \\ \quad \left. + (-\sin \theta_2 \sin \theta_1 + \cos \alpha \cos \theta_2 \cos \theta_1) \dot{\theta}_2 \right] \\ \dot{z}_2 = -l \sin \alpha \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 \end{cases}. \quad (2.2.6)$$

В результате можно определить и искомую скорость второго груза:

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2 = l^2 \left[ (1 + \cos^2 \alpha + 2 \cos \theta_2 + \sin^2 \alpha \cos^2 \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + \right. \\ \left. + 2 \cos \alpha (1 + \cos \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2 \right]. \quad (2.2.7)$$

Следовательно, кинетическая энергия системы будет иметь вид:

$$T = \frac{1}{2} m (v_1^2 + v_2^2) = \frac{1}{2} m l^2 \left[ (2 + \cos^2 \alpha + 2 \cos \theta_2 + \sin^2 \alpha \cos^2 \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + \right. \\ \left. + 2 \cos \alpha (1 + \cos \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2 \right] = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (2.2.8)$$

Здесь  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2]^T$  – столбец обобщенных координат, а матрица  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$  кинетической энергии определяется выражением:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = m l^2 \begin{bmatrix} 2 + \cos^2 \alpha + 2 \cos \theta_2 + \sin^2 \alpha \cos^2 \theta_2 & \cos \alpha (1 + \cos \theta_2) \\ \cos \alpha (1 + \cos \theta_2) & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.2.9)$$

причем она является симметричной:  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ . Потенциальная энергия рассматриваемой системы имеет вид:

$$\begin{aligned} \Pi &= mg(3l - x_1 - x_2) = \\ &= mgl [3 - (2 + \cos \theta_2) \cos \theta_1 + \cos \alpha \sin \theta_2 \sin \theta_1] = \Pi(\boldsymbol{\theta}), \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

где добавлена аддитивная постоянная так, чтобы было  $\Pi = 0$  в положении равновесия  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = 0$ . Это сделано для удобства разложения  $\Pi$  в ряд Тейлора при дальнейшем исследовании малых колебаний.

Подставляя выражения (2.2.8) и (2.2.10) в уравнения Лагранжа второго рода в матричной форме [45]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\theta}} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\theta}}, \quad (2.2.11)$$

получим после ряда преобразований уравнения движения двойного пространственного маятника в универсальной матричной форме:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) = 0, \quad (2.2.12)$$

где матрица  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$  имеет представление (2.2.9), а столбцы  $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$  и  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})$  определяются выражениями:

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = ml^2 \sin \theta_2 \begin{bmatrix} - \left( 2 (1 + \sin^2 \alpha \cos \theta_2) \dot{\theta}_1 + \cos \alpha \dot{\theta}_2 \right) \dot{\theta}_2 \\ (1 + \sin^2 \alpha \cos \theta_2) \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}, \quad (2.2.13)$$

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) = mgl \begin{bmatrix} (2 + \cos \theta_2) \sin \theta_1 + \cos \alpha \sin \theta_2 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_2 \cos \theta_1 + \cos \alpha \cos \theta_2 \sin \theta_1 \end{bmatrix}.$$

В силу консервативности рассматриваемой системы имеет место интеграл энергии  $T + \Pi = E = \text{const}$ , или в явном виде:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} ml^2 \left[ (2 + \cos^2 \alpha + 2 \cos \theta_2 + \sin^2 \alpha \cos^2 \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + 2 \cos \alpha (1 + \cos \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \right. \\ &\quad \left. + \dot{\theta}_2^2 \right] + mgl [3 - (2 + \cos \theta_2) \cos \theta_1 + \cos \alpha \sin \theta_2 \sin \theta_1] = \text{const}. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Этот интеграл понадобится впоследствии для контроля корректности выражений, которые будут получены при анализе нелинейных форм колебаний пространственного двойного маятника.

Нелинейная математическая модель (2.2.12) является основой для всех последующих исследований в настоящей работе. Как известно, уравнения Лагранжа могут быть разрешены относительно обобщенных ускорений, поскольку матрица  $\mathbf{A}$  является невырожденной [48]. Поэтому для численного интегрирования нелинейного матричного уравнения (2.2.12) удобно представить его в следующем виде:

$$\ddot{\theta} = -\mathbf{A}^{-1}(\theta) [\mathbf{V}(\theta, \dot{\theta}) + \mathbf{C}(\theta)]. \quad (2.2.15)$$

### 2.3. Частные варианты плоского и ортогонального двойного маятника

Рассмотрим два интересных частных случая, на которые следует обратить особое внимание. Результаты, полученные для этих случаев, в дальнейшем помогут контролировать корректность общих формул, в которых будет иметь место зависимость от угла  $\alpha$ .

**1. Плоский двойной маятник.** В случае, когда  $\alpha = 0$ , т. е. двойной маятник является плоским (рис. 2.4), выражения для энергий (2.2.8) и (2.2.10) принимают более простой вид [126]:

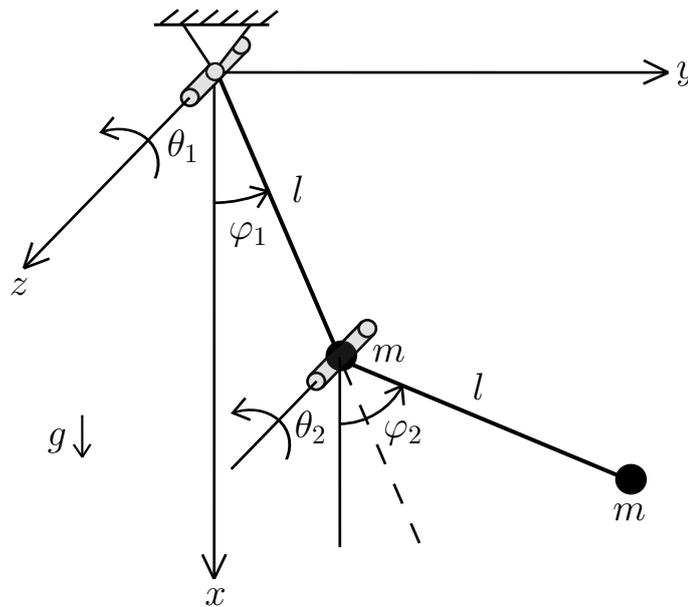


Рис. 2.4. Плоский двойной маятник

$$T = \frac{1}{2}ml^2 \left[ (3 + 2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + 2(1 + \cos \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2 \right], \quad (2.3.1)$$

$$\Pi = mgl [3 - (2 + \cos \theta_2) \cos \theta_1 + \sin \theta_2 \sin \theta_1]. \quad (2.3.2)$$

Тогда уравнения движения имеют вид (2.2.12), где согласно (2.2.9) и (2.2.13)

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = ml^2 \begin{bmatrix} 3 + 2 \cos \theta_2 & 1 + \cos \theta_2 \\ 1 + \cos \theta_2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = ml^2 \sin \theta_2 \begin{bmatrix} -(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) = mgl \begin{bmatrix} 2 \sin \theta_1 + \sin (\theta_1 + \theta_2) \\ \sin (\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}. \quad (2.3.3)$$

Подчеркнем, что уравнения движения плоского двойного маятника примут еще более простую форму, если ввести другую пару обобщенных координат  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , приняв  $\varphi_1 = \theta_1$  и  $\varphi_2 = \theta_1 + \theta_2$ . Эти новые координаты представляют абсолютные углы отклонения звеньев маятника от вертикали (рис. 2.4). В результате из (2.3.1) получим выражение для кинетической энергии [22]:

$$T = \frac{1}{2} ml^2 [2\dot{\varphi}_1^2 + 2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2] = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\varphi}}^T \mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}) \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \quad (2.3.4)$$

где  $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1, \varphi_2]^T$ , а симметричная матрица  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi})$  теперь имеет вид:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}) = ml^2 \begin{bmatrix} 2 & \cos (\varphi_2 - \varphi_1) \\ \cos (\varphi_2 - \varphi_1) & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.3.5)$$

Потенциальная энергия согласно (2.3.2) тогда будет определяться формулой:

$$\Pi = mgl (3 - 2 \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2). \quad (2.3.6)$$

Вновь используя уравнения Лагранжа второго рода в матричной форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{\varphi}}} - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\varphi}}, \quad (2.3.7)$$

после преобразований придем к записи, аналогичной (2.2.12), а именно:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}) \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}) + \mathbf{C}(\boldsymbol{\varphi}) = 0, \quad (2.3.8)$$

где столбцы  $\mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}})$  и  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\varphi})$  теперь определяются выражениями:

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}) = ml^2 \sin (\varphi_2 - \varphi_1) \begin{bmatrix} -\dot{\varphi}_2^2 \\ \dot{\varphi}_1^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(\boldsymbol{\varphi}) = mgl \begin{bmatrix} 2 \sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_2 \end{bmatrix}. \quad (2.3.9)$$

Видно, что эта запись оказывается более предпочтительной при исследовании свободных движений плоского двойного маятника. Именно этим обеспечивается преимущество углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  перед межзвенными углами  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , в которых уравнения движения имеют более сложную форму. Запишем также интеграл энергии для этого случая на основе выражений (2.3.4) и (2.3.6):

$$E = \frac{1}{2}ml^2[2\dot{\varphi}_1^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \dot{\varphi}_2^2] + mgl(3 - 2\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2) = \text{const}. \quad (2.3.10)$$

Для численного интегрирования матричного уравнения (2.3.8) следует разрешить его относительно столбца обобщенных ускорений по аналогии с (2.2.15):

$$\ddot{\varphi} = -\mathbf{A}^{-1}(\varphi) [\mathbf{B}(\varphi, \dot{\varphi}) + \mathbf{C}(\varphi)]. \quad (2.3.11)$$

**2. Ортогональный двойной маятник.** Рассмотрим теперь другой частный случай, когда  $\alpha = \pi/2$ . Такой двойной маятник будем далее называть ортогональным, подчеркивая тем самым, что в данном варианте шарнирные оси обоих маятников перпендикулярны (рис. 2.5) [50]. В этом случае выра-

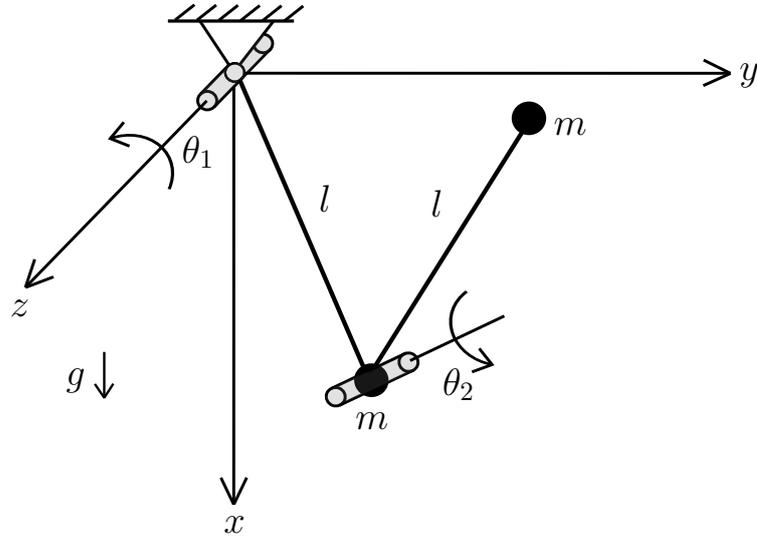


Рис. 2.5. Ортогональный двойной маятник

жения (2.2.9) и (2.2.13) также существенно упрощаются, приобретая вид:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = ml^2 \begin{bmatrix} 2 + 2\cos\theta_2 + \cos^2\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \mathbf{A}, \quad (2.3.12)$$

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = ml^2 \sin\theta_2 \begin{bmatrix} -2(1 + \cos\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ (1 + \cos\theta_2)\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) = mgl \begin{bmatrix} (2 + \cos\theta_2)\sin\theta_1 \\ \sin\theta_2 \cos\theta_1 \end{bmatrix}. \quad (2.3.13)$$

## 2.4. Определение частот и форм малых колебаний пространственного двойного маятника

Перейдем теперь к анализу линейной модели пространственного двойного маятника. С этой целью линеаризуем нелинейное уравнение движения (2.2.12) вблизи положения устойчивого равновесия  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = 0$  и получим традиционное линейное матричное уравнение:

$$\mathbf{A}_0 \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\theta} = 0, \quad (2.4.1)$$

где постоянные симметричные матрицы инерционных  $\mathbf{A}_0$  и квазиупругих  $\mathbf{C}_0$  коэффициентов имеют вид:

$$\mathbf{A}_0 = ml^2 \begin{bmatrix} 5 & 2 \cos \alpha \\ 2 \cos \alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_0 = mgl \begin{bmatrix} 3 & \cos \alpha \\ \cos \alpha & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.4.2)$$

Уравнению (2.4.1) отвечают следующие квадратичные аппроксимации кинетической и потенциальной энергий:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} ml^2 \left( 5\dot{\theta}_1^2 + 4 \cos \alpha \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2 \right) = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{A}_0 \dot{\boldsymbol{\theta}}, \\ \Pi &= \frac{1}{2} mgl \left( 3\theta_1^2 + 2 \cos \alpha \theta_1 \theta_2 + \theta_2^2 \right) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\theta}. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

**1. Определение частот колебаний.** Будем разыскивать решение матричного уравнения (2.4.1) в виде одночастотных гармонических колебаний:

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Theta} \cos(k_0 t + \psi_0), \quad (2.4.4)$$

где  $\boldsymbol{\Theta}$  – неизвестный столбец амплитуд колебаний обобщенных координат,  $k_0$  – частота колебаний,  $\psi_0$  – начальная фаза колебаний. Подставляя решение (2.4.4) в уравнение (2.4.1), получаем матричное алгебраическое уравнение относительно столбца  $\boldsymbol{\Theta}$ :

$$(\mathbf{C}_0 - k_0^2 \mathbf{A}_0) \boldsymbol{\Theta} = 0. \quad (2.4.5)$$

Это уравнение имеет нетривиальное решение лишь в том случае, когда определитель матрицы  $\mathbf{C}_0 - k_0^2 \mathbf{A}_0$  равен нулю:

$$\det(\mathbf{C}_0 - k_0^2 \mathbf{A}_0) = 0. \quad (2.4.6)$$

Раскрывая этот определитель с учетом представлений (2.4.2), приходим к частотному уравнению, которое является биквадратным относительно искомой частоты  $k_0$ :

$$(1 + 4 \sin^2 \alpha)k_0^4 - 4(1 + \sin^2 \alpha)\frac{g}{l}k_0^2 + (2 + \sin^2 \alpha)\frac{g^2}{l^2} = 0. \quad (2.4.7)$$

Для удобства дальнейших действий введем обозначения:  $k = \sqrt{g/l}$  – частота малых колебаний обычного математического маятника длиной  $l$ ,  $p_0 = k_0/k$  – безразмерная частота колебаний пространственного двойного маятника. Тогда уравнение (2.4.7) приведет к виду:

$$(1 + 4 \sin^2 \alpha)p_0^4 - 4(1 + \sin^2 \alpha)p_0^2 + 2 + \sin^2 \alpha = 0. \quad (2.4.8)$$

Разрешая это уравнение относительно  $p_0$ , находим безразмерные частоты:

$$p_{s0} = \sqrt{\frac{2(1 + \sin^2 \alpha) \pm \sqrt{2 - \sin^2 \alpha}}{1 + 4 \sin^2 \alpha}}, \quad s = 1, 2. \quad (2.4.9)$$

Истинные же частоты  $k_{s0}$  получаются умножением безразмерных частот на  $k$ . Подчеркнем, что здесь и далее нижний знак отвечает первой частоте (при  $s = 1$ ), а верхний знак – второй частоте (при  $s = 2$ ). Отметим также, что здесь для удобства частоты снабжены индексом «0», чтобы в дальнейшем не путать их с частотами диссипативной и управляемой систем, а также с частотами нелинейной системы.

Проанализируем зависимости безразмерных частот от угла  $\alpha$  (2.4.9). Легко видеть, что для плоского двойного маятника, которому отвечает значение  $\alpha = 0$ , отсюда получаются широко известные результаты [14]:

$$p_{10} = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 0.7654, \quad p_{20} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \approx 1.8478. \quad (2.4.10)$$

Для ортогонального двойного маятника при  $\alpha = \pi/2$  имеем:

$$p_{10} = \sqrt{\frac{3}{5}} \approx 0.7746, \quad p_{20} = 1. \quad (2.4.11)$$

Нетрудно понять, что первая из этих частот отвечает движению двухзвенника как единого звена с закрепленными на нем двумя грузами массы  $m$  на расстояниях  $l$  и  $2l$  от неподвижного шарнира, а другая частота отвечает движению второго звена как обычного маятника при неподвижном первом.

Можно получить и приближенные зависимости для частот колебаний вблизи крайних значений  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi/2$ . Так, раскладывая (2.4.9) в ряд Тейлора по  $\alpha$  вблизи точки  $\alpha = 0$  и удерживая лишь одну поправку, находим:

$$p_{10} = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \left( 1 + \frac{5\sqrt{2} - 7}{8} \alpha^2 \right), \quad p_{20} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \left( 1 - \frac{5\sqrt{2} + 7}{8} \alpha^2 \right). \quad (2.4.12)$$

Видно, что коэффициент при  $\alpha^2$  в скобке для частоты  $p_{10}$  равен 0.0089, тогда как для частоты  $p_{20}$  он равен  $(-1.7589)$ . Поэтому первая частота при увеличении  $\alpha$  от 0 незначительно увеличивается, тогда как вторая частота начинает сильно уменьшаться. Аналогично можно получить приближенные формулы и вблизи  $\alpha = \pi/2$ , если разложить выражения (2.4.9) в ряд по степеням малого параметра  $\varepsilon = \pi/2 - \alpha$ , удержав по-прежнему одну поправку:

$$p_{10} = \sqrt{\frac{3}{5}} \left( 1 - \frac{1}{60} \varepsilon^2 \right), \quad p_{20} = 1 + \frac{1}{4} \varepsilon^2. \quad (2.4.13)$$

Видно, что при уменьшении  $\alpha$  от  $\pi/2$  первая частота лишь незначительно снижается, тогда как вторая частота увеличивается в большей степени.

Графики зависимости безразмерных частот колебаний  $p_{s0}$  от угла  $\alpha$  представлены на рис. 2.6. Видно, что первая частота практически не зависит от  $\alpha$ . В самом деле, наибольшее ее значение (при  $\alpha = \pi/2$ ) отличается от наименьшего (при  $\alpha = 0$ ) всего на 1.2%. Вторая же частота зависит от  $\alpha$  гораздо более существенно.

**2. Определение форм колебаний.** Найдем теперь собственные формы колебаний, соответствующие найденным частотам  $p_{s0}$ . В рассматриваемом случае они определяются соотношением компонент столбца  $\Theta = [\Theta_1, \Theta_2]^T$ , т. е. соотношением амплитуд колебаний  $\Theta_2$  и  $\Theta_1$  углов поворота  $\theta_2$  и  $\theta_1$  в шарнирах маятника. Поэтому будем характеризовать формы колебаний отношением  $\beta_{s0} = \Theta_{2s}/\Theta_{1s}$ . Эту величину можно найти из любого из двух скалярных уравнений, отвечающих матричному уравнению (2.4.5), например, второго как более простого, т. к. эти уравнения при подстановке в них частот становятся линейно зависимыми в силу (2.4.6). В результате после ряда преобразований получим:

$$\beta_{s0} = -\frac{\cos \alpha (1 - 2p_{s0}^2)}{1 - p_{s0}^2} = -\frac{3 \pm 2\sqrt{2 - \sin^2 \alpha}}{\cos 2\alpha \pm \sqrt{2 - \sin^2 \alpha}} \cos \alpha, \quad s = 1, 2. \quad (2.4.14)$$

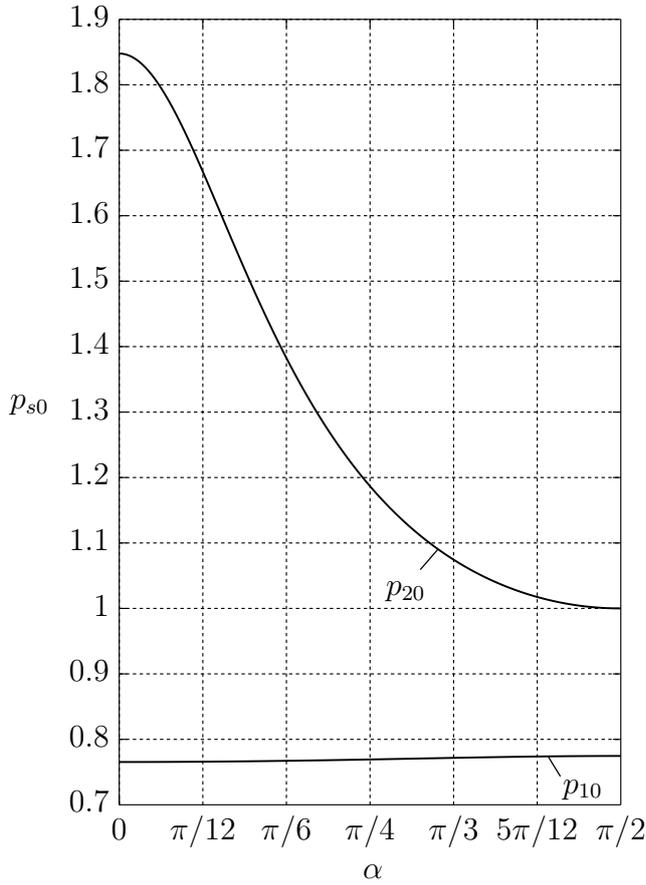


Рис. 2.6. Графики зависимости частот  $p_{10}$  и  $p_{20}$  от угла  $\alpha$

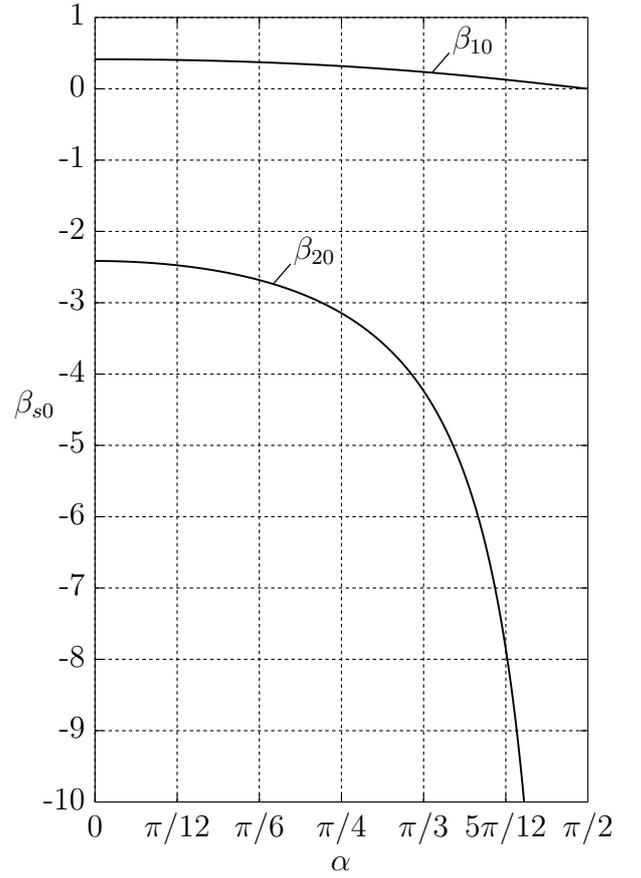


Рис. 2.7. Графики зависимости величин  $\beta_{10}$  и  $\beta_{20}$  от угла  $\alpha$

Конечно, формы колебаний  $\Theta_{(s)}$  определяются с точностью до постоянного множителя. Поэтому для дальнейших действий будет необходимо задать какое-либо значение  $\Theta_{1s}$ , например,  $\Theta_{1s} = 1$ . Тогда значение  $\Theta_{2s}$  будет равно  $\beta_{s0}$ , и формы колебаний можно записать в виде:  $\Theta_{(s)} = [1, \beta_{s0}]^T$ .

Вновь рассмотрим сначала частные случаи. Для плоского двойного маятника, когда  $\alpha = 0$ , находим согласно (2.4.14):

$$\beta_{10} = \sqrt{2} - 1 \approx 0.4142, \quad \beta_{20} = -1 - \sqrt{2} \approx -2.4142. \quad (2.4.15)$$

Если же мы будем рассматривать формы колебаний, принимая в качестве обобщенных координат абсолютные углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , то следует ввести уже другое соотношение:  $\mu_{s0} = \Phi_{2s}/\Phi_{1s} = \Theta_{2s}/\Theta_{1s} + 1 = \beta_{s0} + 1$ , поскольку  $\varphi_1 = \theta_1$ ,  $\varphi_2 = \theta_1 + \theta_2$ . Тогда для величин  $\mu_{s0}$  получим значения:

$$\mu_{10} = \sqrt{2} \approx 1.4142, \quad \mu_{20} = -\sqrt{2} \approx -1.4142. \quad (2.4.16)$$

Полагая для простоты, что для каждой из форм колебаний  $\Phi_{1s} = 1$ , получим  $\Phi_{2s} = \mp\sqrt{2}$ , так что формы колебаний в рассматриваемом случае можно

представить в виде следующих столбцов:

$$\Phi_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \Phi_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}. \quad (2.4.17)$$

Что же касается случая  $\alpha = \pi/2$ , отвечающего ортогональному двойному маятнику, то для него находим следующие отношения  $\beta_{s0} = \Theta_{2s}/\Theta_{1s}$  согласно (2.4.14):

$$\beta_{10} = 0, \quad \beta_{20} = -\infty, \quad (2.4.18)$$

причем во втором случае мы имеем неопределенность вида  $0/0$ , которая несложно раскрывается, например, по правилу Лопиталья. Формулы (2.4.18) означают, что в этом случае можно принять формы колебаний в виде:  $\Theta_{(1)} = [1, 0]^T$  и  $\Theta_{(2)} = [0, 1]^T$ , поэтому колебания по каждой из степеней свободы здесь являются не связанными друг с другом. Этот факт можно понять и из матриц (2.4.2), каждая из которых при  $\alpha = \pi/2$  становится диагональной.

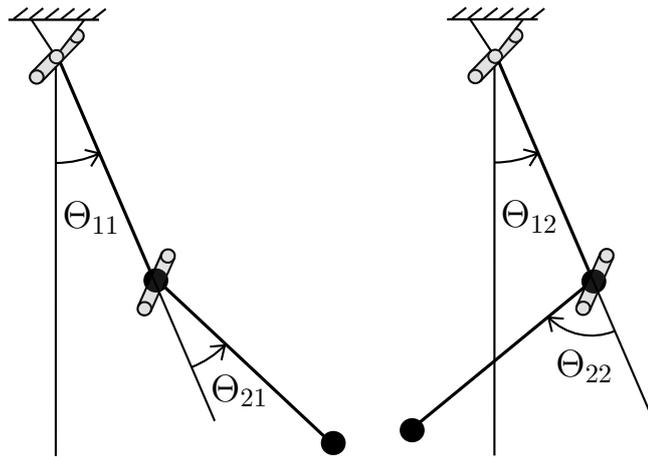


Рис. 2.8. Формы колебаний пространственного двойного маятника

Получим также приближенные формулы для величин  $\beta_{s0}$  вблизи значений  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi/2$ . Раскладывая (2.4.14) в ряд Тейлора по  $\alpha$  вблизи точки  $\alpha = 0$  и удерживая лишь одну поправку, находим:

$$\beta_{s0} = \left(-1 \mp \sqrt{2}\right) \left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{4}\alpha^2\right). \quad (2.4.19)$$

Для получения аналогичных формул вблизи точки  $\alpha = \pi/2$  вновь положим  $\varepsilon = \pi/2 - \alpha$  и получим следующие приближенные выражения:

$$\beta_{10} = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \beta_{20} = -\frac{2}{\varepsilon}. \quad (2.4.20)$$

Графики зависимости величин  $\beta_{s0}$  от угла  $\alpha$  представлены на рис. 2.7. Учитывая, что при любом значении  $\alpha$  в диапазоне от 0 до  $\pi/2$  имеем  $\beta_{10} > 0$ , а  $\beta_{20} < 0$ , можно схематично представить формы колебаний пространственного двойного маятника на рис. 2.8.

### 3. Условия ортогональности и нормировочные коэффициенты.

Отметим, что найденные формы колебаний удовлетворяют условиям ортогональности [147]:

$$\Theta_{(1)}^T \mathbf{A}_0 \Theta_{(2)} = 0, \quad \Theta_{(1)}^T \mathbf{C}_0 \Theta_{(2)} = 0. \quad (2.4.21)$$

Кроме того, нам также понадобятся нормировочные коэффициенты  $N_s$ , которые определяются формулами:

$$\Theta_{(s)}^T \mathbf{A}_0 \Theta_{(s)} = N_s, \quad \Theta_{(s)}^T \mathbf{C}_0 \Theta_{(s)} = N_s k_{s0}^2. \quad (2.4.22)$$

В рассматриваемом случае имеем:

$$N_s = ml^2 (5 + 4 \cos \alpha \beta_{s0} + \beta_{s0}^2). \quad (2.4.23)$$

Для дальнейших расчетов удобно также ввести безразмерные нормировочные коэффициенты  $H_s = N_s/ml^2$ :

$$H_s = 5 + 4 \cos \alpha \beta_{s0} + \beta_{s0}^2. \quad (2.4.24)$$

Отметим, что при исследовании плоского двойного маятника удобнее ввести нормировочные коэффициенты для форм, записанных в абсолютных углах. В этом случае согласно (2.3.5) и (2.3.9) постоянные матрицы инерционных и квазиупругих коэффициентов определяются выражениями:

$$\mathbf{A}_0 = ml^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_0 = mgl \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.4.25)$$

С учетом этих выражений легко проверить непосредственно, что записанные ранее формы колебаний (2.4.17) также удовлетворяют условиям ортогональности:

$$\Phi_{(1)}^T \mathbf{A}_0 \Phi_{(2)} = 0, \quad \Phi_{(1)}^T \mathbf{C}_0 \Phi_{(2)} = 0, \quad (2.4.26)$$

а нормировочные коэффициенты для этих форм в исходном и безразмерном вариантах будут равны

$$N_s = \Phi_{(s)}^T \mathbf{A}_0 \Phi_{(s)} = 2(2 \mp \sqrt{2})ml^2, \quad H_s = 2(2 \mp \sqrt{2}). \quad (2.4.27)$$

**4. Построение общего решения.** Общее решение задачи о малых свободных колебаниях пространственного двойного маятника может быть записано в виде суперпозиции двух форм колебаний:

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Theta}_{(1)} a_1 \cos \psi_1 + \boldsymbol{\Theta}_{(2)} a_2 \cos \psi_2, \quad (2.4.28)$$

где полные фазы  $\psi_1$  и  $\psi_2$  определяются формулами

$$\psi_1 = k_{10}t + \psi_{10}, \quad \psi_2 = k_{20}t + \psi_{20}, \quad (2.4.29)$$

причем  $\psi_{10}$ ,  $\psi_{20}$  – начальные значения этих фаз, а  $a_1$  и  $a_2$  – величины, характеризующие амплитуды каждой из форм колебаний в решении (2.4.28), и они определяются по заданным столбцам начальных условий  $\boldsymbol{\theta}_0$ ,  $\dot{\boldsymbol{\theta}}_0$  при  $t = 0$ . Из (2.4.28) видно, что в общем случае колебания двойного маятника имеют двухчастотный характер, т. е. не являются строго периодическими. Однако если подбирать начальные условия специальным образом, то можно добиться колебаний системы только по одной из форм. Чтобы более детально обсудить этот вопрос, запишем систему для определения неизвестных констант интегрирования:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{\Theta}_{(1)} a_1 \cos \psi_{10} + \boldsymbol{\Theta}_{(2)} a_2 \cos \psi_{20} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_0 = -\boldsymbol{\Theta}_{(1)} a_1 k_{10} \sin \psi_{10} - \boldsymbol{\Theta}_{(2)} a_2 k_{20} \sin \psi_{20} \end{cases}. \quad (2.4.30)$$

Умножая каждое из этих уравнений на  $\boldsymbol{\Theta}_{(1)}^T \mathbf{A}_0$  слева и принимая во внимание первое условие ортогональности (2.4.21), находим:

$$C_1 = a_1 \cos \psi_{10} = \frac{\boldsymbol{\Theta}_{(1)}^T \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\theta}_0}{N_1}, \quad D_1 = -a_1 \sin \psi_{10} = \frac{\boldsymbol{\Theta}_{(1)}^T \mathbf{A}_0 \dot{\boldsymbol{\theta}}_0}{N_1 k_{10}}. \quad (2.4.31)$$

Аналогично, если умножить каждое из уравнений (2.4.30) на  $\boldsymbol{\Theta}_{(2)}^T \mathbf{A}_0$  слева, то можно получить еще два соотношения:

$$C_2 = a_2 \cos \psi_{20} = \frac{\boldsymbol{\Theta}_{(2)}^T \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\theta}_0}{N_2}, \quad D_2 = -a_2 \sin \psi_{20} = \frac{\boldsymbol{\Theta}_{(2)}^T \mathbf{A}_0 \dot{\boldsymbol{\theta}}_0}{N_2 k_{20}}. \quad (2.4.32)$$

Следует подчеркнуть, что находить сами константы  $\psi_{10}$ ,  $\psi_{20}$ ,  $a_1$  и  $a_2$  не имеет смысла, поскольку выражение (2.4.28) с учетом (2.4.29), (2.4.31) и (2.4.32) может быть переписано в виде:

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Theta}_{(1)} (C_1 \cos k_{10}t + D_1 \sin k_{10}t) + \boldsymbol{\Theta}_{(2)} (C_2 \cos k_{20}t + D_2 \sin k_{20}t), \quad (2.4.33)$$

поэтому достаточно знать лишь  $C_1$ ,  $D_1$ ,  $C_2$  и  $D_2$  согласно (2.4.31) и (2.4.32). Теперь нетрудно понять, что для того, чтобы движение двойного маятника было одночастотным, т. е. представляло собой только одну форму, например, первую, следует задавать начальные условия в виде:

$$\boldsymbol{\theta}_0 = \mu \boldsymbol{\Theta}_{(1)}, \quad \dot{\boldsymbol{\theta}}_0 = \eta \boldsymbol{\Theta}_{(1)}, \quad (2.4.34)$$

т. е. пропорционально этой форме, где  $\mu$  и  $\eta$  – произвольные постоянные величины. В самом деле, в этом случае согласно (2.4.32) будем иметь  $C_2 = 0$ ,  $D_2 = 0$ . Аналогично, для возбуждения только второй формы следует задавать начальные условия движения в виде:

$$\boldsymbol{\theta}_0 = \mu \boldsymbol{\Theta}_{(2)}, \quad \dot{\boldsymbol{\theta}}_0 = \eta \boldsymbol{\Theta}_{(2)}. \quad (2.4.35)$$

## 2.5. Диссипативная модель пространственного двойного маятника

Выше была рассмотрена консервативная модель пространственного двойного маятника и проанализированы его малые колебания. Вместе с тем ясно, что в любой реальной системе неизбежно присутствуют силы сопротивления, возникающие естественным образом (трение в шарнирных сочленениях, сопротивление со стороны окружающей среды и т. д.), которые необходимо учитывать для построения более адекватной модели этой системы. Кроме того, диссипативные силы могут специально вводиться в систему при помощи элементов трения (демпферов колебаний). Различные диссипативные модели плоского двойного маятника при наличии вязкого, сухого и квадратичного трения имеются в работах [18, 45, 115, 136].

Обратимся к изучению простейшей диссипативной модели пространственного двойного маятника, полагая, что оба его шарнира испытывают вязкое трение с одним и тем же диссипативным коэффициентом  $b$  [141]. Как известно, для учета сил трения строится диссипативная функция Рэля, которая в рассматриваемом случае имеет вид [32]:

$$R = \frac{1}{2}b(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{B}_0 \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad \mathbf{B}_0 = b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.5.1)$$

где матрица диссипативных коэффициентов  $\mathbf{B}_0$  является диагональной. Используя уравнения Лагранжа второго рода для диссипативной системы в матричной форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\theta}} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\theta}} - \frac{\partial R}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} \quad (2.5.2)$$

и имея в виду дальнейшее исследование линейной модели рассматриваемого диссипативного процесса, подставим в (2.5.2) сразу квадратичные аппроксимации кинетической и потенциальной энергий (2.4.3), а также диссипативную функцию (2.5.1). В результате можно прийти к матричному уравнению в классическом виде [10]:

$$\mathbf{A}_0 \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{B}_0 \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\theta} = 0, \quad (2.5.3)$$

где постоянные матрицы инерционных  $\mathbf{A}_0$  и квазиупругих  $\mathbf{C}_0$  коэффициентов имеют представления (2.4.2). Будем разыскивать решение уравнения (2.5.3) в виде

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Theta} e^{\lambda t}. \quad (2.5.4)$$

Подставляя (2.5.4) в (2.5.3), приходим к алгебраическому матричному уравнению относительно неизвестного столбца  $\boldsymbol{\Theta}$ :

$$(\mathbf{A}_0 \lambda^2 + \mathbf{B}_0 \lambda + \mathbf{C}_0) \boldsymbol{\Theta} = 0, \quad (2.5.5)$$

для которого условие существования нетривиального решения имеет вид:

$$\det (\mathbf{A}_0 \lambda^2 + \mathbf{B}_0 \lambda + \mathbf{C}_0) = 0. \quad (2.5.6)$$

Чтобы решить это характеристическое уравнение, проанализируем структуру матриц  $\mathbf{A}_0$ ,  $\mathbf{B}_0$  и  $\mathbf{C}_0$ . Нетрудно установить, что при любом значении угла  $\alpha$  между ними существует простая линейная связь:

$$\mathbf{A}_0 + \frac{1}{2n} \mathbf{B}_0 = \frac{2}{k^2} \mathbf{C}_0, \quad 2n = \frac{b}{ml^2}, \quad (2.5.7)$$

где для удобства введена величина  $n$ , которая имеет смысл фактора затухания малых колебаний обычного математического маятника длины  $l$  с концевым грузом массы  $m$ , в шарнире которого действует вязкое трение с коэффициентом  $b$ . Исключая при помощи (2.5.7) матрицу  $\mathbf{B}_0$  из (2.5.6), получим следующее уравнение:

$$\det \left[ \mathbf{A}_0 (\lambda^2 - 2n\lambda) + \mathbf{C}_0 \left( 1 + \frac{4n}{k^2} \lambda \right) \right] = 0. \quad (2.5.8)$$

Сопоставляя его с частотным уравнением консервативной системы (2.4.6), которому удовлетворяют частоты свободных колебаний  $k_{s0}$  без учета диссипативных сил, устанавливаем, что корни характеристического уравнения  $\lambda$  определяются из следующих двух уравнений:

$$\lambda^2 - 2n\lambda = -k_{s0}^2 \left( 1 + \frac{4n}{k^2} \lambda \right), \quad s = 1, 2. \quad (2.5.9)$$

Из этих рассуждений также вытекает, что формы колебаний диссипативной системы, определяемые из (2.5.5) с учетом (2.5.7) и (2.5.9), останутся точно такими же, как и в консервативной системе, т. е. будут совпадать с ранее найденными столбцами  $\Theta_{(s)}$  [10].

Хорошо известно, что в общем случае учет диссипативных сил в многомерной механической системе искажает формы ее свободных колебаний, которые имели место при отсутствии трения [147]. При этом, если диссипативные силы довольно велики, что имеет место при введении в систему демпферов, то они могут существенно исказить формы колебаний [78]. Однако в некоторых случаях демпфирования, которые и представляют особый интерес, оказывается, что введение в систему как малых, так и больших диссипативных сил не нарушает форм ее консервативных колебаний [16, 61]. Это обстоятельство позволит гасить колебания систем по ее собственным, т. е. естественным движениям, не искажая их общего характера, а лишь убавляя амплитуды каждой из форм. В частности, если движение системы представляет лишь одну форму колебаний, то и следует плавно гасить лишь эту форму, не усложняя ее структуру. Как известно, подобный эффект имеет место лишь при т. н. «пропорциональном демпфировании», которое и имеет место в нашем случае, поскольку матрица  $\mathbf{B}_0$  есть линейная комбинация матриц  $\mathbf{A}_0$  и  $\mathbf{C}_0$  согласно (2.5.7). Это замечательное свойство пространственного двойного маятника с идентичными геометрическими, инерционными и диссипативными параметрами при любом значении угла  $\alpha$  позволяет получить наиболее простые аналитические выражения и качественно проанализировать движения пространственного двойного маятника при наличии вязкого трения, а также детально исследовать многие дополнительные вопросы. Отметим, что при слишком большом трении затухание какой-либо части решения может носить уже апериодический характер, вследствие чего отвечающий ей столбец  $\Theta_{(s)}$  более корректно называть не формой колебаний, а формой движения.

Подчеркнем, что и для произвольного пространственного двойного маятника, имеющего различные массы концевых грузов и различные длины звеньев, надлежащим подбором двух диссипативных коэффициентов шарнирного вязкого трения можно обеспечить независимость форм колебаний от демпфирования. В самом деле, условие «пропорционального демпфирования»  $\mathbf{B}_0 = \gamma_A \mathbf{A}_0 + \gamma_C \mathbf{C}_0$  в скалярной форме дает систему трех уравнений для нахождения четырех величин – двух диссипативных коэффициентов и двух неопределенных параметров  $\gamma_A$ ,  $\gamma_C$ , поэтому она является недоопределенной. В результате получается не одно решение, а их семейство, которое позволяет выбрать диссипативные коэффициенты для обеспечения желаемого условия, как это показано в [141]. Тем не менее, для более сложных многозвенных конструкций дело обстоит совершенно иначе. Так, например, для трехзвенного маятника мы можем распоряжаться значениями диссипативных коэффициентов в каждом из трех шарниров и имеем еще два неопределенных параметра  $\gamma_A$  и  $\gamma_C$ , тогда как условие «пропорционального демпфирования» даст уже шесть скалярных уравнений. Поэтому в данной ситуации мы получим переопределенную систему, которая в общем случае является несовместной. Аналогичный вывод можно сделать и для систем с большим числом степеней свободы, так что из всех многозвенников лишь двухзвенник при произвольных параметрах его звеньев и грузов может обладать свойством независимости форм колебаний от демпфирования.

Возвращаясь теперь к уравнениям (2.5.9) для исходной схемы пространственного двойного маятника с идентичными геометрическими, инерционными и диссипативными параметрами, преобразуем их к виду:

$$\lambda^2 + 2n_s \lambda + k_{s0}^2 = 0, \quad s = 1, 2, \quad (2.5.10)$$

где введены следующие обозначения:

$$n_s = (2p_{s0}^2 - 1)n = \frac{3 \pm 2\sqrt{2 - \sin^2 \alpha}}{1 + 4\sin^2 \alpha} n. \quad (2.5.11)$$

Решения уравнений (2.5.10), очевидно, имеют вид:

$$\lambda_{1,2} = -n_1 \pm ik_1, \quad \lambda_{3,4} = -n_2 \pm ik_2, \quad (2.5.12)$$

где приняты еще обозначения:

$$k_s = \sqrt{k_{s0}^2 - n_s^2}. \quad (2.5.13)$$

Обратим внимание на то, что величины  $k_s$  могут быть как вещественными, так и мнимыми. В случае, когда эти величины вещественны, они, очевидно, представляют собой частоты свободных колебаний пространственного двойного маятника с учетом вязкого трения в шарнирах, а величины  $n_s$  тогда представляют факторы затухания каждой из форм колебаний. В противном случае по форме  $\Theta_{(s)}$  будет иметь место уже аperiодическое затухание. Чтобы оценить характер колебательного затухания форм, введем безразмерные коэффициенты  $\eta_s = n_s/n$  и запишем их выражения:

$$\eta_s = 2p_{s0}^2 - 1 = \frac{3 \pm 2\sqrt{2 - \sin^2 \alpha}}{1 + 4\sin^2 \alpha}, \quad s = 1, 2. \quad (2.5.14)$$

Отсюда видно, что  $\eta_2 < \eta_1$ , поэтому формы колебаний гасятся совершенно не однотипно, и вторая форма всегда затухает гораздо быстрее, чем первая. Графики зависимости величин  $\eta_1$  и  $\eta_2$  от угла  $\alpha$  представлены на рис. 2.9. Видно, что  $\eta_1$  незначительно увеличивается с возрастанием угла  $\alpha$ , тогда как  $\eta_2$  при этом убывает, изменяясь гораздо более существенно.

Запишем выражения для безразмерных частот колебаний  $p_s = k_s/k$ :

$$\begin{aligned} p_s &= \sqrt{p_{s0}^2 - (2p_{s0}^2 - 1)^2 \nu^2} = \\ &= \sqrt{\frac{2(1 + \sin^2 \alpha) \pm \sqrt{2 - \sin^2 \alpha}}{1 + 4\sin^2 \alpha} - \left(\frac{3 \pm 2\sqrt{2 - \sin^2 \alpha}}{1 + 4\sin^2 \alpha}\right)^2} \nu^2, \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

где  $\nu = n/k$  – безразмерный фактор затухания обычного математического маятника, который можно также назвать безразмерным диссипативным коэффициентом. Из (2.5.15) видно, что величины  $p_s$  являются вещественными, если соответственно выполняются условия:

$$p_s \in R \Rightarrow \nu < \nu_{s0} = \frac{p_{s0}}{2p_{s0}^2 - 1} = \sqrt{\frac{(1 + 4\sin^2 \alpha) \left[2(1 + \sin^2 \alpha) \pm \sqrt{2 - \sin^2 \alpha}\right]}{\left(3 \pm 2\sqrt{2 - \sin^2 \alpha}\right)^2}}. \quad (2.5.16)$$

Нетрудно показать, что  $\nu_{20} < \nu_{10}$ . В самом деле, поскольку  $p_{20} > p_{10}$ , то имеет место следующая несложная цепочка соотношений:

$$\nu_{20} = \frac{p_{20}}{2p_{20}^2 - 1} = \frac{1}{p_{20}} \frac{1}{2 - 1/p_{20}^2} < \frac{1}{p_{10}} \frac{1}{2 - 1/p_{10}^2} = \frac{p_{10}}{2p_{10}^2 - 1} = \nu_{10}. \quad (2.5.17)$$

Следовательно, при увеличении  $\nu$  вторая частота первой обратится в нуль.

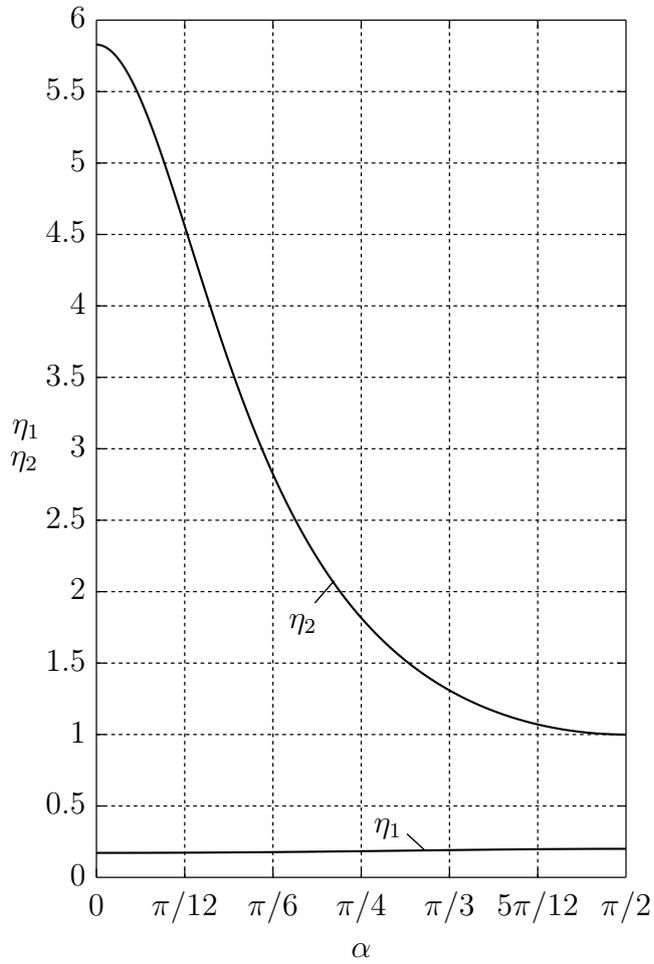


Рис. 2.9. Графики зависимости величин  $\eta_1$  и  $\eta_2$  от угла  $\alpha$

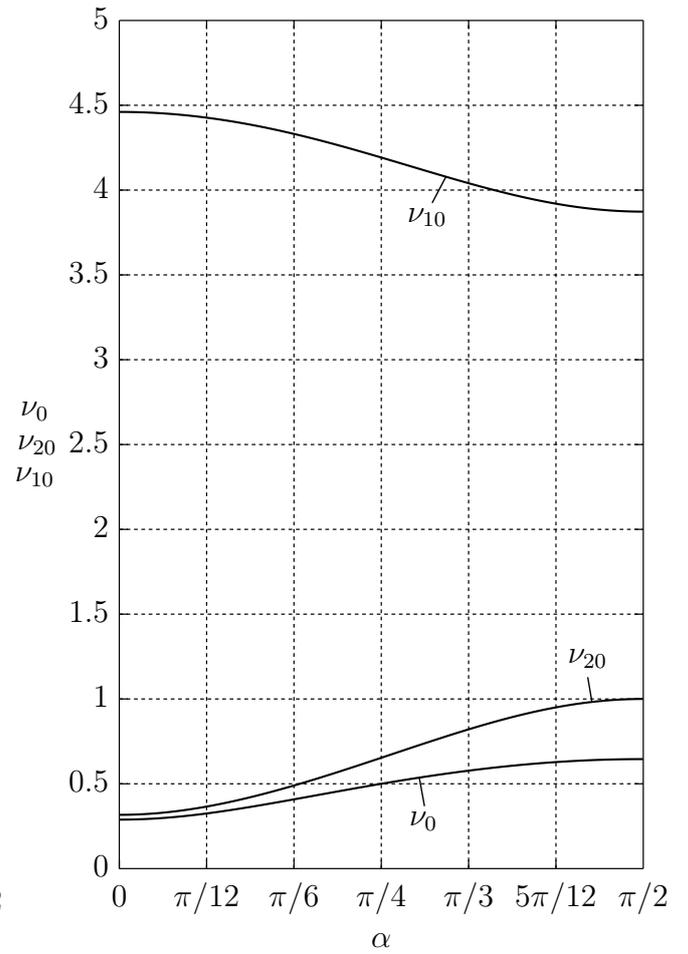


Рис. 2.10. Графики зависимости величин  $\nu_{10}$ ,  $\nu_{20}$  и  $\nu_0$  от угла  $\alpha$

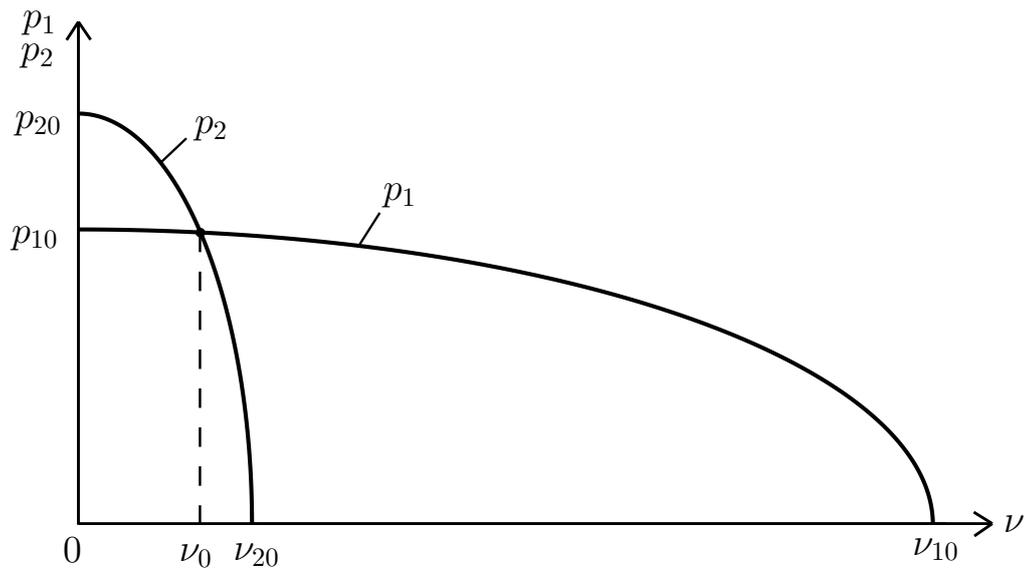


Рис. 2.11. Графики зависимости частот колебаний  $p_1$  и  $p_2$  с учетом вязкого трения от параметра  $\nu$

Это означает, что начиная с некоторого значения  $\nu$ , которое мы обозначим как  $\nu_0$ , вторая частота станет меньше первой. Чтобы определить это значение, приравняем частоты  $p_1$  и  $p_2$  согласно (2.5.15), в результате чего получим следующее уравнение:

$$\sqrt{p_{10}^2 - (2p_{10}^2 - 1)^2\nu_0^2} = \sqrt{p_{20}^2 - (2p_{20}^2 - 1)^2\nu_0^2}. \quad (2.5.18)$$

Разрешая это уравнение относительно  $\nu_0$ , находим:

$$\nu_0 = \frac{1}{2\sqrt{p_{10}^2 + p_{20}^2 - 1}} = \frac{\sqrt{1 + 4\sin^2\alpha}}{2\sqrt{3}}. \quad (2.5.19)$$

На рис. 2.10 приведены графики зависимости значений  $\nu_{10}$ ,  $\nu_{20}$  и  $\nu_0$  от угла  $\alpha$ . Эти графики совместно с зависимостями, представленными на рис. 2.9, наглядно иллюстрируют изменение основных величин, характеризующих диссипативную модель пространственного двойного маятника, с увеличением угла между шарнирными осями. Графики зависимости величин  $p_1$  и  $p_2$  от  $\nu$  качественно представлены на рис. 2.11, где отчетливо виден случай совпадения частот  $p_1 = p_2$ , который можно назвать диссипативным внутренним резонансом, и он может представлять определенный теоретический и практический интерес. Эти рассуждения подчеркивают тот факт, что вместо терминов «первая частота» (т. е. низшая) и «вторая частота» (т. е. высшая) иногда предпочтительнее использовать термины «первая форма» и «вторая форма».

Рассмотрим теперь частные случаи и выпишем для них конкретные значения всех ключевых параметров. Так, для плоского двойного маятника ( $\alpha = 0$ ) из (2.5.14) имеем:

$$\eta_1 = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0.1716, \quad \eta_2 = 3 + 2\sqrt{2} \approx 5.828, \quad (2.5.20)$$

откуда видно, что  $\eta_2/\eta_1 = 17 + 12\sqrt{2} \approx 33.97$ , т. е. фактор затухания по второй форме намного больше, чем по первой. Поэтому вторая форма очень быстро исчезает, после чего имеет место медленное затухание по первой форме. Из формул (2.5.15) находим при  $\alpha = 0$  выражения для безразмерных частот [42]:

$$p_1 = \sqrt{2 - \sqrt{2} - (17 - 12\sqrt{2})\nu^2}, \quad p_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2} - (17 + 12\sqrt{2})\nu^2}, \quad (2.5.21)$$

а из формул (2.5.16) и (2.5.19) определяем также значения

$$\nu_{10} = \sqrt{10 + 7\sqrt{2}} \approx 4.4609, \quad \nu_{20} = \sqrt{10 - 7\sqrt{2}} \approx 0.3170, \quad \nu_0 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0.2887. \quad (2.5.22)$$

В другом частном случае ортогонального двойного маятника ( $\alpha = \pi/2$ ) из (2.5.14) находим:

$$\eta_1 = \frac{1}{5} = 0.2, \quad \eta_2 = 1, \quad (2.5.23)$$

откуда вытекает, что  $\eta_2/\eta_1 = 5$ , т. е. это отношение на порядок меньше, чем было при  $\alpha = 0$ . Из (2.5.15) находим при  $\alpha = \pi/2$  выражения:

$$p_1 = \sqrt{\frac{3}{5} - \frac{1}{25}\nu^2}, \quad p_2 = \sqrt{1 - \nu^2}, \quad (2.5.24)$$

а из формул (2.5.16) и (2.5.19) определяем также значения

$$\nu_{10} = \sqrt{15} \approx 3.873, \quad \nu_{20} = 1, \quad \nu_0 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \approx 0.6455. \quad (2.5.25)$$

Возвращаясь теперь к матричному уравнению движения (2.5.3), составим его общее решение в комплексной форме:

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Theta}_{(1)}e^{-n_1t} (A_1e^{ik_1t} + B_1e^{-ik_1t}) + \boldsymbol{\Theta}_{(2)}e^{-n_2t} (A_2e^{ik_2t} + B_2e^{-ik_2t}). \quad (2.5.26)$$

Следовательно, столбец обобщенных скоростей будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\theta}} = & \boldsymbol{\Theta}_{(1)}e^{-n_1t} [A_1(ik_1 - n_1)e^{ik_1t} - B_1(ik_1 + n_1)e^{-ik_1t}] + \\ & + \boldsymbol{\Theta}_{(2)}e^{-n_2t} [A_2(ik_2 - n_2)e^{ik_2t} - B_2(ik_2 + n_2)e^{-ik_2t}]. \end{aligned} \quad (2.5.27)$$

Комплексные константы интегрирования  $A_s$  и  $B_s$ ,  $s = 1, 2$  из условия вещественности  $\boldsymbol{\theta}$  должны удовлетворять соотношению  $B_s = \overline{A_s}$ , и они определяются из начальных условий и  $\boldsymbol{\theta}_0$ ,  $\dot{\boldsymbol{\theta}}_0$  по аналогии с тем, как это делалось ранее для консервативной системы. В результате можно получить, что:

$$A_s = \frac{(n_s + ik_s)\boldsymbol{\Theta}_{(s)}^T \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{\Theta}_{(s)}^T \mathbf{A}_0 \dot{\boldsymbol{\theta}}_0}{2ik_s N_s}, \quad B_s = \frac{-(n_s - ik_s)\boldsymbol{\Theta}_{(s)}^T \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\theta}_0 - \boldsymbol{\Theta}_{(s)}^T \mathbf{A}_0 \dot{\boldsymbol{\theta}}_0}{2ik_s N_s}. \quad (2.5.28)$$

Нетрудно понять, что если начальные условия приняты в виде (2.4.34), то с учетом (2.4.21) из (2.5.28) имеем  $A_2 = 0$ ,  $B_2 = 0$ , т. е. затухание движений будет осуществляться только по первой форме. По аналогии, при выполнении условий (2.4.35) будет иметь место затухание только по второй форме.

Отметим, что полученное решение (2.5.26) с учетом (2.5.28) справедливо для любого значения коэффициента  $\nu$  – как в случае вещественных значений  $k_s$ , так и в случае, когда какое-либо из них является чисто мнимой величиной, а также для тех вариантов, когда эти значения по отдельности становятся равными нулю. Подчеркнем, что в последнем случае, когда  $s$ -тая частота

оказывается равной нулю, характеристическое уравнение будет иметь кратные корни. Поэтому мы будем иметь предельно-апериодическое движение по  $s$ -той форме, и приведенное выше решение следует понимать в предельном смысле, т. е. при  $k_s \rightarrow 0$ . В самом деле, выражение  $A_s e^{ik_s t} + B_s e^{-ik_s t}$  с учетом (2.5.28) будет представлять собой при  $k_s \rightarrow 0$  (т. е.  $n_s \rightarrow k_{s0}$ ) неопределенность вида  $0/0$ , которая легко раскрывается:

$$A_s e^{ik_s t} + B_s e^{-ik_s t} \rightarrow \frac{1}{N_s} \left[ \Theta_{(s)}^T \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\theta}_0 + \left( k_{s0} \Theta_{(s)}^T \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\theta}_0 + \Theta_{(s)}^T \mathbf{A}_0 \dot{\boldsymbol{\theta}}_0 \right) t \right]. \quad (2.5.29)$$

Поэтому в данном случае в той части решения, которая отвечает форме  $\Theta_{(s)}$ , будут присутствовать составляющие, содержащие функции  $e^{-k_{s0} t}$  и  $t e^{-k_{s0} t}$ , как это хорошо известно из математического анализа.

## 2.6. Выводы по второй главе

В настоящей главе была построена математическая модель колебаний пространственного двойного маятника, у которого оси цилиндрических шарниров не коллинеарны друг другу. Данная конструкция представляет собой простейшую схему пространственного двухзвенного манипулятора. Были исследованы малые колебания такого маятника в консервативной постановке и определены частоты и формы его колебаний в зависимости от угла между шарнирными осями. Кроме того, рассмотрена задача о малых колебаниях системы при наличии вязкого трения в шарнирных сочленениях. Показано, что при идентичных параметрах грузов, звеньев и трения в шарнирах диссипативные силы не искажают форм колебаний консервативной модели, а лишь убавляют их амплитуды. Поэтому данный пример наглядно демонстрирует свойство сохранения собственных форм консервативных колебаний при введении диссипации. Это обстоятельство позволяет гасить колебания системы по ее естественным движениям – собственным формам, не искажая и не усложняя их качественного характера. Выявленное свойство диссипативного двойного маятника позволило получить наиболее представительные и достаточно несложные аналитические выражения для всех ключевых величин процесса демпфирования. Полученные результаты были наглядно проиллюстрированы графическими зависимостями.

# 3. Построение и анализ нелинейных форм колебаний пространственного двойного маятника

## 3.1. Постановка задачи о нахождении нелинейных форм колебаний

Исследованию нелинейных колебаний разнообразных маятниковых конструкций посвящена обширная библиография – в частности, в отношении двойного маятника можно выделить работы [38, 103, 104, 128, 129, 156]. Как уже говорилось ранее, подавляющее большинство публикаций посвящено численному исследованию поведения двойного маятника на основе лагранжевой или гамильтоновой формы записи уравнений его движения. Конечно, такой путь приводит к количественной оценке характеристик движения, но не позволяет детально выявить их основные качественные особенности, которые наиболее наглядно демонстрируются на основе аналитических зависимостей. Более того, естественным образом возникает вопрос о том, как такой маятник плавно переходит из зоны малых (т. е. линейных) колебаний в нелинейную зону. Ясно, что из всех возможных режимов движения нелинейных систем наибольшую ценность представляют именно регулярные режимы, обладающие периодичностью, поскольку именно их целесообразно использовать на практике для достижения конкретных целей [142]. Нахождение таких режимов тесно

связано с известной проблемой отыскания нелинейных форм колебаний многомерных механических систем, которая в последнее время привлекает большое количество специалистов как в теоретическом, так и в практическом отношении [46,82,130,135,137,148–150]. При этом в качестве объектов исследования зачастую принимаются именно маятниковые системы [37,47,111,118]. Под нелинейной формой колебаний подразумевается одночастотное движение по всем степеням свободы в нелинейной системе, и она является естественным развитием понятия линейной формы колебаний. Отметим, что основными характеристиками линейной формы являются частота и соотношение амплитуд колебаний, однако при исследовании нелинейной формы в силу ее негармонического характера недостаточно помимо частоты знать только соотношение амплитуд, хотя оно и является важной характеристикой нелинейной формы. Для полного ее описания необходимо указать конкретную зависимость всех обобщенных координат от времени [143].

Существует множество различных способов построения решений нелинейных систем, отвечающих нелинейным формам колебаний [153]. Наиболее часто используется вариант, основанный на применении специально разработанных для этой цели асимптотических методов нелинейной механики [11]. Следует подчеркнуть, что двойной маятник является системой с двумя степенями свободы, для которой построение приближенных аналитических решений в нелинейной зоне оказывается значительно более сложным делом, чем для систем с одной степенью свободы, где не идет речи о построении форм колебаний. Именно с этим и связано то, что в большинстве работ по динамике двойного маятника его нелинейные колебания исследуются лишь при помощи численных методов. Поэтому основной интерес представляет аналитическое исследование периодических движений рассматриваемой системы, которое позволит отчетливо продемонстрировать дрейф частот и форм колебаний при постепенном увеличении амплитуд колебаний звеньев. Настоящая глава посвящена построению нелинейных форм колебаний пространственно-двойного маятника в первом приближении, причем для его частных вариантов двойного плоского и ортогонального маятников удастся построить приближенное решение не только в первом, но и во втором приближении [72].

## 3.2. Нелинейные формы колебаний ортогонального двойного маятника

Обратимся сначала к исследованию нелинейных форм колебаний ортогонального двойного маятника, когда  $\alpha = \pi/2$ , т. к. в этом случае они находятся наиболее просто. Для этого вернемся к нелинейному матричному уравнению движения (2.2.12) и представлениям (2.3.12) и (2.3.13). Легко видеть, что указанное уравнение допускает два частных режима движения:

$$\ddot{\theta}_1 + k_{10}^2 \sin \theta_1 = 0, \quad \theta_2 \equiv 0, \quad k_{10} = \sqrt{\frac{3}{5}}k, \quad (3.2.1)$$

$$\ddot{\theta}_2 + k_{20}^2 \sin \theta_2 = 0, \quad \theta_1 \equiv 0, \quad k_{20} = k. \quad (3.2.2)$$

Эти уравнения показывают, что в случае ортогонального двойного маятника и в рамках нелинейной модели одна обобщенная координата может колебательно изменяться, в то время, как другая координата равна нулю. При этом каждое из уравнений (3.2.1) и (3.2.2) представляет собой уравнение колебаний обычного математического маятника. Поэтому вопрос о нелинейных формах колебаний в этой ситуации решается путем исследования данных дифференциальных уравнений второго порядка по отдельности. Рассмотрим, например, первое из них. Методика построения приближенных асимптотических решений для обычного маятника хорошо известна, и она изложена в [11]. Для этого следует переписать уравнение (3.2.1) так, чтобы в левой части были линейные слагаемые, отвечающие малым колебаниям, а все остальное перенести в правую часть. Тогда мы приходим к исследованию уравнения:

$$\ddot{\theta}_1 + k_{10}^2 \theta_1 = Q(\theta_1), \quad Q(\theta_1) = k_{10}^2 (\theta_1 - \sin \theta_1). \quad (3.2.3)$$

Функцию  $Q(\theta_1)$  можно интерпретировать как возмущающую силу, которая возбуждает колебания в линейной системе. Для построения первых двух приближений к решению достаточно разложить функцию  $Q(\theta_1)$  в ряд Тейлора и удержать в этом разложении два нелинейных слагаемых, одно из которых имеет третий порядок малости, а другое – пятый:

$$Q = Q^{(I)} + Q^{(II)}, \quad Q^{(I)} = k_{10}^2 \frac{\theta_1^3}{6}, \quad Q^{(II)} = -k_{10}^2 \frac{\theta_1^5}{120}. \quad (3.2.4)$$

**1. Построение первого приближения.** Будем искать решение уравнения (3.2.3) в исходном приближении в таком же виде, как и в линейной модели, а именно:

$$\theta_1 = a \cos \psi, \quad (3.2.5)$$

где по-прежнему  $a = \text{const}$ , но полная фаза  $\psi$  (или частота) уже зависит некоторым образом от  $a$ . Нетрудно понять, что поправка к частоте колебаний будет иметь второй порядок малости по  $a$ :

$$\dot{\psi} = k_{10} \left( 1 + \rho^{(I)} a^2 \right) = k_1^{(I)}(a). \quad (3.2.6)$$

Величину  $a$  можно трактовать здесь как малый параметр. Для определения значения  $\rho^{(I)}$  используем уравнение гармонического баланса [11]:

$$\int_0^{2\pi} (\ddot{\theta}_1 + k_{10}^2 \theta_1 - Q) \cos \psi d\psi = 0. \quad (3.2.7)$$

Это уравнение должно быть выполнено с необходимой точностью. В первом приближении необходимо, чтобы оно было выполнено с точностью до слагаемых третьего порядка малости по  $a$ . Обращаясь к формуле (3.2.5), вычислим с точностью до третьего порядка малости  $\dot{\theta}_1$  и  $\ddot{\theta}_1$  с учетом (3.2.6):

$$\dot{\theta}_1 = -ak_{10} \sin \psi \left( 1 + \rho^{(I)} a^2 \right), \quad \ddot{\theta}_1 = -ak_{10}^2 \cos \psi \left( 1 + 2\rho^{(I)} a^2 \right). \quad (3.2.8)$$

Для определения возмущающей силы с той же точностью достаточно подставить выражение (3.2.5) в  $Q^{(I)}$ , в результате чего получим:

$$Q = \left( U^{(I)} \cos \psi + V^{(I)} \cos 3\psi \right) k_{10}^2 a^3, \quad U^{(I)} = \frac{1}{8}, \quad V^{(I)} = \frac{1}{24}. \quad (3.2.9)$$

Подставляя теперь (3.2.5), (3.2.8) и (3.2.9) в уравнение (3.2.7), получаем простое выражение для  $\rho^{(I)}$ :

$$\rho^{(I)} = -\frac{U^{(I)}}{2} = -\frac{1}{16}. \quad (3.2.10)$$

Тогда выражение для частоты колебаний в первом приближении примет следующий вид:

$$k_1^{(I)}(a) = k_{10} \left( 1 - \frac{a^2}{16} \right) = k_{10}(1 - 0.0625a^2). \quad (3.2.11)$$

Теперь мы имеем возможность уточнить решение, а именно, построить его с точностью до третьего порядка малости. Ясно, что гармоника  $\cos \psi$  уже сбалансирована, а гармоника  $\cos 3\psi$  пока остается несбалансированной. Рассмотрим колебания, которые она возбуждает в невозмущенной системе, т. е. найдем частное решение  $\tilde{\theta}_1^{(I)}$  следующего уравнения:

$$\ddot{\theta}_1 + k_{10}^2 \theta_1 = V^{(I)} k_{10}^2 a^3 \cos 3\psi, \quad (3.2.12)$$

которое, очевидно, имеет вид:

$$\tilde{\theta}_1^{(I)}(a, \psi) = \frac{V^{(I)} k_{10}^2 a^3}{k_{10}^2 - 9k_1^2(a)} \cos 3\psi. \quad (3.2.13)$$

Чтобы удержать в этом выражении лишь слагаемые третьего порядка малости, достаточно подставить вместо  $k_1(a)$  постоянное значение  $k_{10}$ . Складывая (3.2.13) с выражением (3.2.5), находим решение с указанной точностью [96]:

$$\theta_1^{(I)} = a \cos \psi + \tilde{\theta}_1^{(I)} = a \cos \psi - \frac{a^3}{192} \cos 3\psi. \quad (3.2.14)$$

Полагая  $\psi = 0$ , можно найти отсюда амплитуду колебаний  $A$  в зависимости от параметра  $a$ , играющего в представлении (3.2.14) роль амплитуды первой гармоники:

$$A = a - \frac{a^3}{192}. \quad (3.2.15)$$

Для контроля корректности полученных выражений целесообразно вычислить полную механическую энергию  $E$  и убедиться в том, что при ее вычислении с необходимой точностью она остается неизменной во времени. Выражение для полной энергии имеет вид (2.2.14), а в случае  $\alpha = \pi/2$  и при условии  $\theta_2 \equiv 0$  оно примет простую форму:

$$E = \frac{5}{2} ml^2 \dot{\theta}_1^2 + 3mgl(1 - \cos \theta_1) = \frac{5}{2} ml^2 \left[ \dot{\theta}_1^2 + 2k_{10}^2(1 - \cos \theta_1) \right]. \quad (3.2.16)$$

Следовательно, с точностью до слагаемых четвертого порядка малости получим следующее выражение:

$$E = \frac{5}{2} ml^2 \left[ \dot{\theta}_1^2 + k_{10}^2 \left( \theta_1^2 - \frac{\theta_1^4}{12} \right) \right]. \quad (3.2.17)$$

Вычислим также  $\dot{\theta}_1$ , дифференцируя выражение (3.2.14) с учетом (3.2.11) и удерживая слагаемые не выше третьего порядка малости по  $a$ :

$$\dot{\theta}_1^{(I)} = k_{10} \left[ - \left( a - \frac{a^3}{16} \right) \sin \psi + \frac{a^3}{64} \sin 3\psi \right]. \quad (3.2.18)$$

Подставляя выражения (3.2.14) и (3.2.18) в формулу (3.2.17), получаем с точностью до четвертого порядка по  $a$  следующее выражение:

$$E^{(I)} = E_0 \left( 1 - \frac{3}{32} a^2 \right), \quad E_0 = \frac{3}{2} m g l a^2, \quad (3.2.19)$$

где  $E_0$  – полная энергия системы в рамках линейной модели. Видно, что энергия  $E^{(I)}$  зависит согласно (3.2.19) только от  $a$  и не зависит от  $\psi$ , что лишний раз подтверждает правильность полученных выражений.

**2. Построение второго приближения.** Полученные выражения теперь могут быть использованы для построения второго приближения. В этом случае уравнение гармонического баланса должно быть выполнено с точностью до пятого порядка малости по  $a$ . Введем еще одну поправку  $\rho^{(II)}$  к частоте, которая должна иметь четвертый порядок малости:

$$\dot{\psi} = k_{10} \left( 1 + \rho^{(I)} a^2 + \rho^{(II)} a^4 \right) = k_1^{(II)}(a). \quad (3.2.20)$$

Принимая во внимание условия ортогональности тригонометрических функций, можно переписать уравнение гармонического баланса (3.2.7) в следующем виде:

$$\int_0^{2\pi} \left( \frac{d^2 x}{dt^2} + k_{10}^2 x - Q \right) \cos \psi d\psi = 0, \quad (3.2.21)$$

где  $x = a \cos \psi$ . Вычислим теперь с точностью до пятого порядка малости выражение:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k_{10}^2 x = \left[ -2\rho^{(I)} a^3 - \left( \rho^{(I)^2} + 2\rho^{(II)} \right) a^5 \right] k_{10}^2 \cos \psi. \quad (3.2.22)$$

Вычислим также  $Q$  с точностью до величин пятого порядка малости:

$$Q = \left[ \left( U^{(I)} a^3 + U^{(II)} a^5 \right) \cos \psi + \left( V^{(I)} a^3 + V^{(II)} a^5 \right) \cos 3\psi + W^{(II)} a^5 \cos 5\psi \right] k_{10}^2, \quad (3.2.23)$$

где сохраняются прежние обозначения для  $U^{(I)}$  и  $V^{(I)}$  согласно (3.2.9), а также сделаны новые обозначения:

$$U^{(II)} = -\frac{3}{512}, \quad V^{(II)} = -\frac{1}{256}, \quad W^{(II)} = -\frac{3}{2560}. \quad (3.2.24)$$

В результате мы вновь приходим к соотношению (3.2.10) для  $\rho^{(I)}$ , как этого и следовало ожидать, а также находим:

$$\rho^{(II)} = -\frac{\rho_1^{(I)^2}}{2} - \frac{U^{(II)}}{2} = \frac{1}{1024}. \quad (3.2.25)$$

Поэтому частота колебаний во втором приближении определяется формулой:

$$k_1^{(\text{II})}(a) = k_{10} \left( 1 - \frac{a^2}{16} + \frac{a^4}{1024} \right) \approx k_{10}(1 - 0.0625a^2 + 0.00098a^4). \quad (3.2.26)$$

По аналогии можно теперь получить решение с точностью до пятого порядка малости. Для этого получим частное решение  $\tilde{\theta}_1^{(\text{II})}$  уравнения

$$\ddot{\theta}_1 + k_{10}^2 \theta_1 = \left[ \left( V^{(\text{I})} a^3 + V^{(\text{II})} a^5 \right) \cos 3\psi + W^{(\text{II})} a^5 \cos 5\psi \right] k_{10}^2, \quad (3.2.27)$$

которое имеет следующий вид:

$$\tilde{\theta}_1^{(\text{II})}(a, \psi) = \frac{(V^{(\text{I})} a^3 + V^{(\text{II})} a^5) k_{10}^2}{k_{10}^2 - 9k_1^2(a)} \cos 3\psi + \frac{W^{(\text{II})} k_{10}^2 a^5}{k_{10}^2 - 25k_1^2(a)} \cos 5\psi. \quad (3.2.28)$$

Чтобы удержать в этом выражении слагаемые не выше пятого порядка малости по  $a$ , достаточно в первой из дробей вместо  $k_1(a)$  подставить формулу (3.2.11), а во второй – постоянное значение  $k_{10}$ . Складывая полученное выражение с выражением (3.2.5), находим решение с необходимой точностью:

$$\theta_1^{(\text{II})}(a, \psi) = a \cos \psi + \tilde{\theta}_1^{(\text{II})} = a \cos \psi - \left( \frac{a^3}{192} + \frac{a^5}{4096} \right) \cos 3\psi + \frac{a^5}{20480} \cos 5\psi. \quad (3.2.29)$$

Отсюда можно найти амплитуду колебаний  $A$  в зависимости от параметра  $a$  в рассматриваемом приближении:

$$A = a - \frac{a^3}{192} - \frac{a^5}{5120}. \quad (3.2.30)$$

Остается вычислить полную энергию с требуемой точностью. Для этого запишем выражение (3.2.16) с точностью до слагаемых шестого порядка малости:

$$E = \frac{5}{2} ml^2 \left[ \dot{\theta}_1^2 + k_{10}^2 \left( \theta_1^2 - \frac{\theta_1^4}{12} + \frac{\theta_1^6}{360} \right) \right]. \quad (3.2.31)$$

Вычислим  $\dot{\theta}_1$ , дифференцируя выражение (3.2.29) с учетом (3.2.26) и удерживая слагаемые не выше пятого порядка малости по  $a$ :

$$\dot{\theta}_1^{(\text{II})} = k_{10} \left[ - \left( a - \frac{a^3}{16} + \frac{a^5}{1024} \right) \sin \psi + \left( \frac{a^3}{64} - \frac{a^5}{4096} \right) \sin 3\psi - \frac{a^5}{4096} \sin 5\psi \right]. \quad (3.2.32)$$

Подставляя выражения (3.2.29) и (3.2.32) в формулу (3.2.31), получаем с точностью до шестого порядка по  $a$  следующее выражение:

$$E^{(\text{II})} = E_0 \left( 1 - \frac{9}{96} a^2 + \frac{17}{4096} a^4 \right), \quad E_0 = \frac{3}{2} mgl a^2, \quad (3.2.33)$$

которое и в этом приближении зависит только от  $a$  и не зависит от  $\psi$ .

Отметим, что эта задача имеет точное решение, и частота колебаний  $k_1$  в зависимости от амплитуды колебаний  $A$  определяется формулой [48]:

$$k_1 = \frac{\pi k_{10}}{2K(\kappa)}, \quad \kappa = \sin \frac{A}{2}, \quad (3.2.34)$$

где  $K(\kappa)$  – полный эллиптический интеграл I рода с модулем  $\kappa$ .

**Обсуждение результатов.** Исследуем теперь зависимость частоты  $k_1$  от амплитуды колебаний  $A$  в различных приближениях. Так, в рамках линейной модели, которую также можно назвать нулевым приближением, частота равна  $k_{10}$ , и она не зависит от амплитуды колебаний, которая равна  $a$ . В первом приближении частота имеет вид (3.2.11), а амплитуда – (3.2.15), а во втором приближении частота определяется формулой (3.2.26), тогда как амплитуда – выражением (3.2.30). В обоих случаях мы имеем параметрическую зависимость частоты от амплитуды посредством промежуточного параметра  $a$ , причем каждое последующее приближение учитывает очередную поправку как в выражении для частоты, так и в выражении для амплитуды.

Зависимость безразмерной частоты  $k_1/k_{10}$  от амплитуды колебаний  $A$  (которая для наглядности представлена в градусах) в двух приближениях приведена на рис. 3.1, где также отображена точная зависимость согласно (3.2.34). Легко видеть, что приближенные асимптотические формулы очень хорошо соотносятся с точными значениями, при этом каждое следующее приближение уточняет результаты. Несомненным достоинством построенных приближенных выражений является то, что они дают адекватные результаты не только при достаточно малых амплитудах, а в весьма широком их диапазоне. Для определенности подчеркнем, что мы здесь не будем рассматривать колебания системы с сильно большими амплитудами, а ограничим указанный диапазон значениями, не превышающими  $\pi/2$  и представленными на рис. 3.1.

Следует также подчеркнуть, что если разложить выражение (3.2.34) в ряд Тейлора, то полученный результат будет находиться в полном соответствии с асимптотическими формулами. В самом деле, из (3.2.34) имеем следующее разложение с точностью до четвертого порядка малости по амплитуде  $A$ :

$$k_1 = k_{10} \left( 1 - \frac{1}{16} A^2 + \frac{1}{3072} A^4 \right). \quad (3.2.35)$$

Остается показать, что формула (3.2.26) с той же точностью с учетом (3.2.30) перейдет в (3.2.35). Для этого получим обратную зависимость по отношению

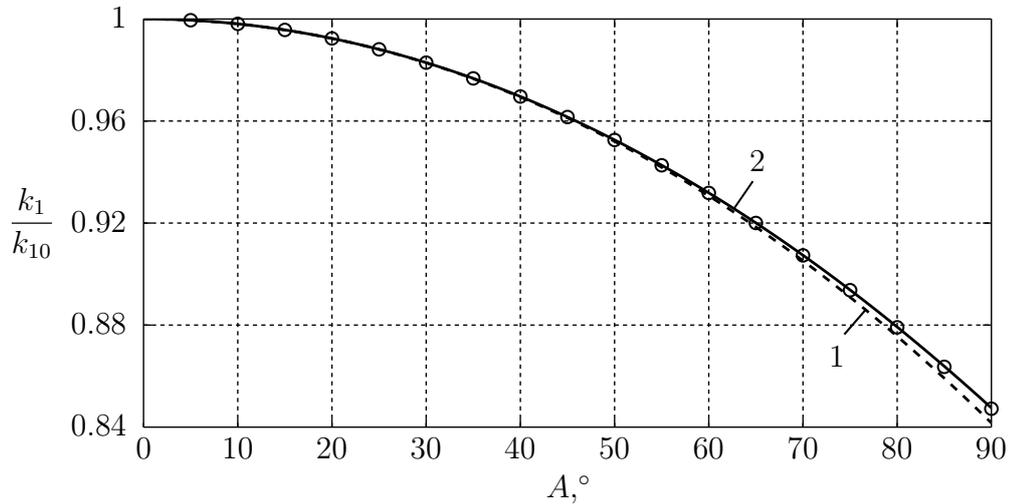


Рис. 3.1. Зависимость безразмерной частоты  $k_1/k_{10}$  от амплитуды  $A$ :  
1 – первое приближение, 2 – второе приближение,  $\circ$  – точные значения

к (3.2.30), т. е. выразим  $a$  через  $A$  с той же точностью. Разыскивая  $a$  в виде  $a = A + \mu^{(I)}A^3 + \mu^{(II)}A^5$  и подставляя это выражение в (3.2.30), приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $A$ , откуда найдем:

$$\mu^{(I)} = \frac{1}{192}, \quad \mu^{(II)} = \frac{17}{61440}, \quad a = A + \frac{1}{192}A^3 + \frac{17}{61440}A^5. \quad (3.2.36)$$

Подставляя это выражение в (3.2.26) и удерживая слагаемые не выше четвертого порядка малости по  $A$ , мы приходим в точности к формуле (3.2.35). Видно, что для этой цели достаточно было получить выражение (3.2.36) лишь с одной кубической поправкой, однако если необходимо, например, исключить  $a$  через  $A$  в формуле (3.2.29) с сохранением слагаемых не выше пятого порядка малости, то потребовалось бы полное выражение (3.2.36).

Перейдем теперь к наглядной графической иллюстрации полученных результатов. С этой целью уместно построить фазовый портрет системы на фазовой плоскости  $(\theta_1, \dot{\theta}_1/k_{10})$ , где деление обобщенной скорости на  $k_{10}$  осуществляется для того, чтобы по обеим осям откладывались безразмерные величины. Будем строить фазовые траектории по формулам второго приближения (3.2.29) и (3.2.32), трактуя при этом величину  $\psi$  как промежуточный параметр, и сопоставлять их с фазовыми траекториями, полученные в точном решении. Осуществлять это соответствие необходимо таким образом, чтобы фазовая траектория в приближенном решении отвечала фазовой траектории в точном решении, обладающая тем же самым уровнем энергии. Для дальнейших действий удобно ввести безразмерную энергию  $\varepsilon = E/(mgl)$ .

Следовательно, во втором приближении из формулы (3.2.33) будем иметь:

$$\varepsilon = \frac{E}{mgl} = \frac{3}{2}a^2 \left( 1 - \frac{3}{32}a^2 + \frac{17}{4096}a^4 \right). \quad (3.2.37)$$

Варьируя параметр  $a$ , мы будем варьировать и значение  $\varepsilon$ , т. е. получать фазовые траектории с различным уровнем энергии. В то же время, фазовые траектории в точном решении при тех же самых значениях  $\varepsilon$  можно определить из выражения (3.2.16), разрешив его относительно  $\dot{\theta}_1/k_{10}$ :

$$\frac{\dot{\theta}_1}{k_{10}} = \pm \sqrt{\frac{2\varepsilon}{3} - 4 \sin^2 \frac{\theta_1}{2}}. \quad (3.2.38)$$

Отметим, что фазовый портрет для точного решения можно построить и при помощи самого этого решения, которое имеет вид [48]:

$$\theta_1 = 2 \arcsin [\kappa \operatorname{sn} (k_{10}t + \vartheta, \kappa)], \quad \dot{\theta}_1 = 2\kappa k_{10} \operatorname{cn} (k_{10}t + \vartheta, \kappa), \quad (3.2.39)$$

где  $\operatorname{sn}$  и  $\operatorname{cn}$  – эллиптические функции Якоби,  $\kappa = \sin A/2 = \sqrt{\varepsilon/6}$ , а  $\vartheta$  – константа интегрирования. В этом случае время  $t$  выступает в качестве параметра. Нетрудно видеть, что формулы (3.2.39) тождественно удовлетворяют уравнению (3.2.38), что лишний раз подтверждает их справедливость.

Фазовый портрет системы на плоскости  $(\theta_1, \dot{\theta}_1/k_{10})$  представлен на рис. 3.2, причем для единообразия графического изложения результатов принято, что сплошные линии соответствуют асимптотическим формулам второго приближения, а кружки представляют собой точные значения. При этом необходимо отметить, что на каждой из фазовых траекторий кружкам отвечают значения, взятые через одинаковые промежутки времени. Видно, что имеется адекватное соответствие между приближенными и точными результатами, причем в принятом диапазоне амплитуд их различие совершенно не проявляется. Кроме того, можно наблюдать, что форма фазовых траекторий с увеличением уровня энергии постепенно искажается и становится все более отличной от круговой, которая свойственна линейной модели, что также подчеркивает нелинейный характер рассматриваемой задачи.

Помимо этого, построим графики зависимости угла  $\theta_1$  и безразмерной угловой скорости  $\dot{\theta}_1/k_{10}$  во втором приближении от фазового угла  $\psi$  на одном периоде колебаний, т. е. при изменении  $\psi$  от 0 до  $2\pi$ , которые соответствуют фазовой траектории с наибольшим уровнем энергии из приведенных выше

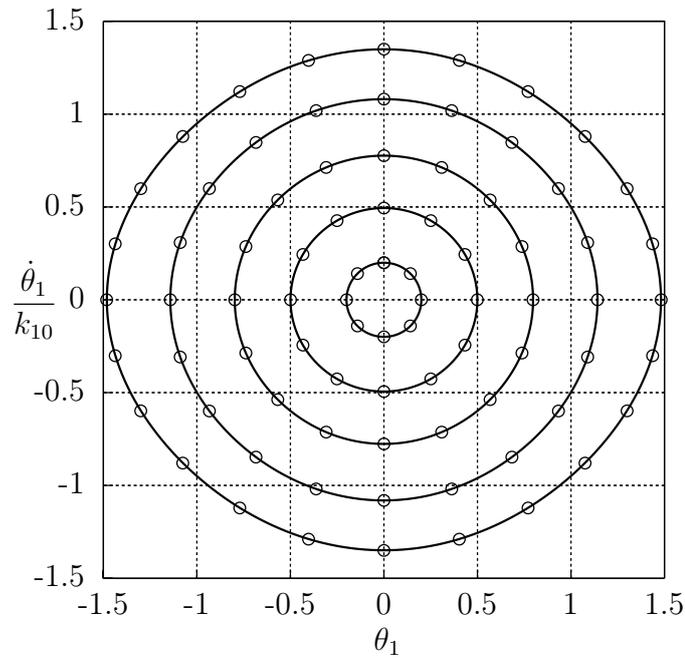


Рис. 3.2. Фазовый портрет: сплошные линии – формулы второго приближения,  $\circ$  – точные значения

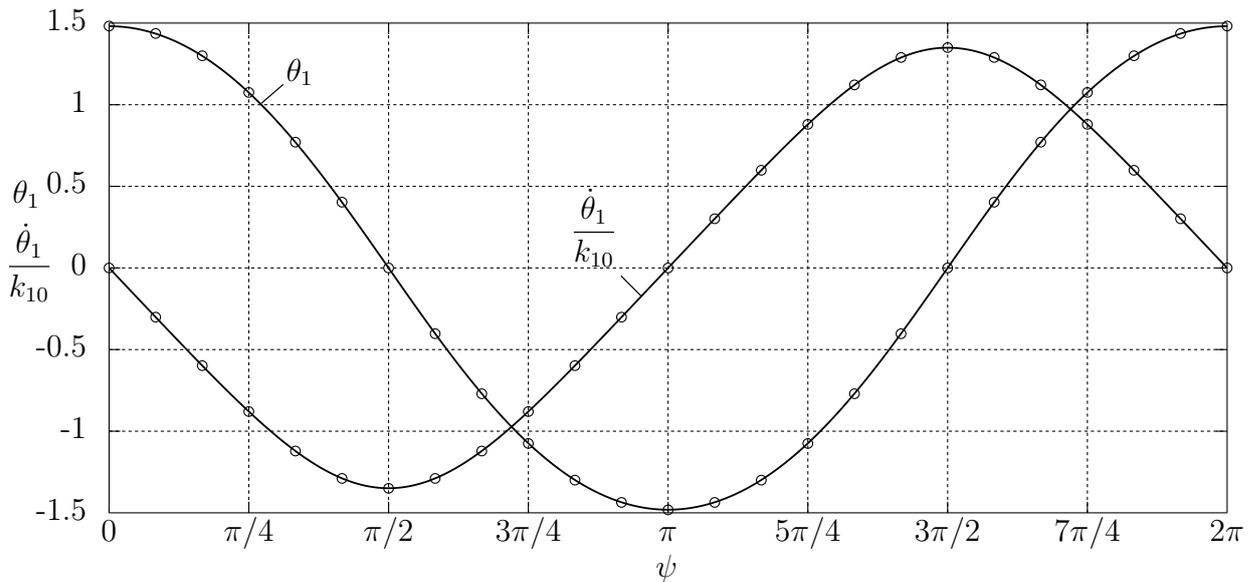


Рис. 3.3. Графики зависимости величин  $\theta_1$  и  $\dot{\theta}_1/k_{10}$  от  $\psi$ : сплошные линии – формулы второго приближения,  $\circ$  – точные значения

на фазовом портрете на рис. 3.2. Для более наглядного сравнения поведения этих графиков с аналогичными точными зависимостями целесообразно ввести для точного решения по аналогии величину  $\psi = k_1 t$ , где  $k_1$  определяется по формуле (3.2.34). Это масштабирование приводит к тому, что введенная величина  $\psi$  в точном решении также оказывается лежащей в пределах от 0 до

2 $\pi$ . Поэтому сопоставление результатов будет осуществляться не в одни и те же моменты времени, а по достижении системой определенной части периода колебаний. Это действие позволяет исключить из рассмотрения имеющее место рассогласование частот колебаний в приближенном и точном решениях и соотносить именно характер колебательного движения. При этом положим в формуле (3.2.39)  $\vartheta = K(\kappa)$ , чтобы при  $t = 0$  было  $\theta_1 = 2 \arcsin \kappa = A$ , а  $\dot{\theta}_1 = 0$ . Указанные зависимости приведены на рис. 3.3, который также демонстрирует отличное соответствие между приближенными и точными результатами. Отметим еще раз, что представленные зависимости имеют несколько более сложную структуру, чем при гармонических колебаниях, которые обладают чисто синусоидальным характером и проявляются при малых амплитудах.

Остается подчеркнуть, что численное интегрирование матричного уравнения (2.2.15) при задании надлежащих начальных условий для движения по первой нелинейной форме колебаний с принятыми уровнями энергии будет давать для угла  $\theta_1$  аналогичные результаты, что и точное решение (3.2.39).

### 3.3. Нелинейные формы колебаний плоского двойного маятника

Перейдем теперь к задаче о построении приближенных асимптотических формул для первой и второй нелинейных форм колебаний плоского двойного маятника, когда  $\alpha = 0$ . Как уже говорилось ранее в главе 2, для исследования свободных движений этой системы удобнее принимать в качестве обобщенных координат не шарнирные углы поворота  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , а абсолютные углы отклонения звеньев  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  от вертикали, т. к. в этом случае уравнения движения принимают наиболее компактный вид. Это обстоятельство позволяет существенно проще построить приближенное аналитическое решение, развивая методику, использованную в предыдущем параграфе, причем удастся без особых трудностей построить не только первое, но и второе приближение.

Обратимся к уравнению (2.3.8) с учетом (2.3.5) и (2.3.9) и перепишем его так, чтобы в его левой части были линейные слагаемые, соответствующие малым колебаниям, а все остальное перенесем в правую часть [17, 21]:

$$\mathbf{A}_0 \ddot{\varphi} + \mathbf{C}_0 \varphi = \tilde{\mathbf{A}}(\varphi) \ddot{\varphi} + \tilde{\mathbf{B}}(\varphi, \dot{\varphi}) + \tilde{\mathbf{C}}(\varphi) = \mathbf{Q}(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}). \quad (3.3.1)$$

Здесь постоянные матрицы  $\mathbf{A}_0$  и  $\mathbf{C}_0$  имеют представления (3.3.2), а также сделаны следующие обозначения:

$$\tilde{\mathbf{A}}(\varphi) = \mathbf{A}_0 - \mathbf{A}(\varphi), \quad \tilde{\mathbf{B}}(\varphi, \dot{\varphi}) = -\mathbf{B}(\varphi, \dot{\varphi}), \quad \tilde{\mathbf{C}}(\varphi) = \mathbf{C}_0\varphi - \mathbf{C}(\varphi). \quad (3.3.2)$$

Столбец  $\mathbf{Q}$  в уравнении (3.3.1), трактуемый как столбец возмущающих сил, действующих в линейной системе, тогда имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} = ml^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_2^2 \\ -\dot{\varphi}_1^2 \end{bmatrix} + mgl \begin{bmatrix} 2(\varphi_1 - \sin \varphi_1) \\ \varphi_2 - \sin \varphi_2 \end{bmatrix} + \\ + ml^2 (1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_1)) \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Разложим тригонометрические функции, входящие в выражение (3.3.3), в ряды Тейлора с точностью, достаточной для построения первых двух приближений к решению. В результате получим следующее представление:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{(\text{I})} + \mathbf{Q}^{(\text{II})}, \quad (3.3.4)$$

где столбец  $\mathbf{Q}^{(\text{I})}$  содержит слагаемые третьего порядка малости по обобщенным координатам, скоростям и ускорениям, а  $\mathbf{Q}^{(\text{II})}$  – пятого порядка:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{(\text{I})} &= ml^2(\varphi_2 - \varphi_1) \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_2^2 \\ -\dot{\varphi}_1^2 \end{bmatrix} + \frac{mgl}{6} \begin{bmatrix} 2\varphi_1^3 \\ \varphi_2^3 \end{bmatrix} + \frac{ml^2}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)^2 \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Q}^{(\text{II})} &= -\frac{ml^2}{6}(\varphi_2 - \varphi_1)^3 \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_2^2 \\ -\dot{\varphi}_1^2 \end{bmatrix} - \frac{mgl}{120} \begin{bmatrix} 2\varphi_1^5 \\ \varphi_2^5 \end{bmatrix} - \frac{ml^2}{24}(\varphi_2 - \varphi_1)^4 \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

**1. Построение первого приближения.** В качестве исходного приближения к решению уравнения (3.3.1) примем такое же выражение, как и при колебаниях на одной из форм в линейной системе (2.4.17):

$$\varphi = \Phi_{(s)} a \cos \psi, \quad (3.3.6)$$

где  $a = \text{const}$  (для краткости индекс «s» у  $a$  и  $\psi$  здесь и далее опущен как малозначительный), а частота колебаний зависит от  $a$  следующим образом:

$$\dot{\psi} = k_{s0}(1 + \rho_s^{(\text{I})}a^2) = k_s^{(\text{I})}(a), \quad k_{s0} = \sqrt{2 \pm \sqrt{2}k}. \quad (3.3.7)$$

Здесь введена первая поправка, которая, как и для обычного математического маятника, будет пропорциональна  $a^2$ . Отметим, что величина  $a$  с учетом (2.4.17) играет роль амплитуды колебаний угла  $\varphi_1$  в исходном приближении.

Коэффициент  $\rho_s^{(I)}$  в формуле (3.3.7) может быть найден из уравнения гармонического баланса по данной форме  $\Phi_{(s)}$  [11, 63]:

$$\int_0^{2\pi} \Phi_{(s)}^T (\mathbf{A}_0 \ddot{\varphi} + \mathbf{C}_0 \varphi - \mathbf{Q}) \cos \psi d\psi = 0. \quad (3.3.8)$$

Опираясь на выражения (3.3.6) и (3.3.7), вычислим столбцы обобщенных скоростей  $\dot{\varphi}$  и ускорений  $\ddot{\varphi}$  с точностью до величин третьего порядка малости:

$$\dot{\varphi} = -\Phi_{(s)} a \sin \psi k_{s0} \left(1 + \rho_s^{(I)} a^2\right), \quad \ddot{\varphi} = -\Phi_{(s)} a \cos \psi k_{s0}^2 \left(1 + 2\rho_s^{(I)} a^2\right), \quad (3.3.9)$$

а также возмущающие силы с той же точностью:

$$\mathbf{Q} = \left( \mathbf{U}_s^{(I)} \cos \psi + \mathbf{V}_s^{(I)} \cos 3\psi \right) mgl a^3, \quad (3.3.10)$$

где столбцы  $\mathbf{U}_s^{(I)}$  и  $\mathbf{V}_s^{(I)}$  имеют следующие представления:

$$\mathbf{U}_s^{(I)} = \begin{bmatrix} \frac{14 \pm 9\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{22 \mp 17\sqrt{2}}{8} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_s^{(I)} = \begin{bmatrix} \frac{46 \pm 33\sqrt{2}}{12} \\ -\frac{54 \mp 41\sqrt{2}}{24} \end{bmatrix}. \quad (3.3.11)$$

Подставим полученные выражения в уравнение гармонического баланса (3.3.8), учитывая, что формы колебаний  $\Phi_{(s)}$  удовлетворяют уравнению

$$(\mathbf{C}_0 - k_{s0}^2 \mathbf{A}_0) \Phi_{(s)} = 0, \quad (3.3.12)$$

а также используя обозначение (2.4.27) для нормировочных коэффициентов, приходим к следующему выражению для  $\rho_s^{(I)}$ :

$$\rho_s^{(I)} = -\frac{mgl}{2N_s k_{s0}^2} \Phi_{(s)}^T \mathbf{U}_s^{(I)} = -\frac{1}{2H_s p_{s0}^2} \Phi_{(s)}^T \mathbf{U}_s^{(I)} = -\frac{31 \pm 20\sqrt{2}}{32}. \quad (3.3.13)$$

Подставляя теперь (3.3.13) в (3.3.7), получаем выражение для частоты колебаний в первом приближении:

$$k_s^{(I)}(a) = k_{s0} \left( 1 - \frac{31 \pm 20\sqrt{2}}{32} a^2 \right). \quad (3.3.14)$$

Таким образом, при движении по каждой из нелинейных форм колебаний частоты в первом приближении определяются следующими выражениями:

$$k_1^{(I)}(a) \approx k_{10}(1 - 0.0849a^2), \quad k_2^{(I)}(a) \approx k_{20}(1 - 1.8526a^2), \quad (3.3.15)$$

откуда видно, что вторая частота изменяется более существенно с увеличением величины  $a$ , чем первая частота.

Теперь можно получить решение с точностью до величин третьего порядка малости. Для его построения выясним отдельно, какие вынужденные колебания  $\tilde{\varphi}$  возбуждает гармоническая сила  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 \cos \omega t$  в невозмущенной (т. е. линейной) системе, а именно, определим частное решение уравнения:

$$\mathbf{A}_0 \ddot{\varphi} + \mathbf{C}_0 \varphi = \mathbf{Q}_0 \cos \omega t. \quad (3.3.16)$$

Для решения этого уравнения введем в рассмотрение модальную матрицу  $\mathbf{U} = [\Phi_{(1)} | \Phi_{(2)}]$ , т. е. матрицу собственных форм колебаний. Далее перейдем к главным координатам  $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2]^T$  посредством соотношения:

$$\varphi = \mathbf{U} \boldsymbol{\xi} = \Phi_{(1)} \xi_1 + \Phi_{(2)} \xi_2. \quad (3.3.17)$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.3.16) и домножая его слева на  $\mathbf{U}^T$ , учитывая при этом условия ортогональности (2.4.26) собственных форм, приходим к матричному уравнению:

$$\tilde{\mathbf{A}}_0 \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \tilde{\mathbf{C}}_0 \boldsymbol{\xi} = \tilde{\mathbf{Q}}_0 \cos \omega t, \quad (3.3.18)$$

где введены следующие величины:

$$\tilde{\mathbf{A}}_0 = \mathbf{U}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{U} = \text{diag}(N_s), \quad \tilde{\mathbf{C}}_0 = \mathbf{U}^T \mathbf{C}_0 \mathbf{U} = \text{diag}(N_s k_{s0}^2), \quad \tilde{\mathbf{Q}}_0 = \mathbf{U}^T \mathbf{Q}_0. \quad (3.3.19)$$

Поскольку матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}_0$  и  $\tilde{\mathbf{C}}_0$  являются диагональными, то (3.3.18) распадается на два независимых скалярных уравнения, фактически описывающих движение линейного осциллятора при наличии внешней гармонической силы:

$$\ddot{\xi}_s + k_{s0}^2 \xi_s = \frac{\Phi_{(s)}^T \mathbf{Q}_0}{N_s} \cos \omega t. \quad (3.3.20)$$

Решение каждого из этих уравнений, отвечающее правой части, имеет вид:

$$\xi_s = \frac{\Phi_{(s)}^T \mathbf{Q}_0}{N_s (k_{s0}^2 - \omega^2)} \cos \omega t. \quad (3.3.21)$$

Возвращаясь к исходным обобщенным координатам согласно (3.3.17), находим окончательно:

$$\tilde{\varphi} = \left[ \Phi_{(1)} \frac{\Phi_{(1)}^T \mathbf{Q}_0}{N_1 (k_{10}^2 - \omega^2)} + \Phi_{(2)} \frac{\Phi_{(2)}^T \mathbf{Q}_0}{N_2 (k_{20}^2 - \omega^2)} \right] \cos \omega t. \quad (3.3.22)$$

Пользуясь полученным выражением, нетрудно понять, какое вынужденное колебание возбуждает каждая из гармонических составляющих выражения (3.3.10). Отметим, что при построении решения по первой форме у первой гармоники следует учесть в выражении (3.3.22) только второе слагаемое, поскольку эта гармоника уже сбалансирована по первой форме. Напротив, при построении решения по второй форме следует учесть только первое слагаемое [11]. Суммируя теперь решения, отвечающие каждой гармонике выражения (3.3.10), получаем т. н. «регуляризованное колебание», возбуждаемое в невозмущенной системе обобщенными силами  $\mathbf{Q}^{(I)}(\Phi_{(s)}a \cos \psi, \dots)$ , в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^{(I)}(a, \psi) = & \Phi_{(n)} \frac{\Phi_{(n)}^T \mathbf{U}_s^{(I)} mgl a^3}{N_n (k_{n0}^2 - k_s^2(a))} \cos \psi + \\ & + \left[ \Phi_{(1)} \frac{\Phi_{(1)}^T \mathbf{V}_s^{(I)} mgl a^3}{N_1 (k_{10}^2 - 9k_s^2(a))} + \Phi_{(2)} \frac{\Phi_{(2)}^T \mathbf{V}_s^{(I)} mgl a^3}{N_2 (k_{20}^2 - 9k_s^2(a))} \right] \cos 3\psi. \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

где введен дополнительный индекс  $n$ , причем  $n = 1$  при  $s = 2$  и наоборот  $n = 2$  при  $s = 1$ . Ясно, что для удержания в этом выражении лишь слагаемых третьего порядка малости достаточно подставить вместо  $k_s(a)$  постоянное значение  $k_{s0}$ . Складывая (3.3.23) с выражением (3.3.6), можно получить решение с точностью до третьего порядка малости в виде:

$$\varphi = \Phi_{(s)} a \cos \psi + \tilde{\varphi}^{(I)}(a, \psi) = \left( \Phi_{(s)} a + \mathbf{u}_s^{(I)} a^3 \right) \cos \psi + \mathbf{v}_s^{(I)} a^3 \cos 3\psi, \quad (3.3.24)$$

где столбцы  $\mathbf{u}_s^{(I)}$  и  $\mathbf{v}_s^{(I)}$  имеют следующий вид:

$$\mathbf{u}_s^{(I)} = \begin{bmatrix} \frac{\pm\sqrt{2} + 1}{32} \\ \frac{2 \pm \sqrt{2}}{32} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_s^{(I)} = \begin{bmatrix} \frac{\mp 552\sqrt{2} - 437}{2688} \\ \frac{\pm 781\sqrt{2} + 576}{2688} \end{bmatrix}. \quad (3.3.25)$$

Выражение (3.3.24) совместно с (3.3.14) описывает движение плоского двойного маятника по каждой из нелинейных форм в первом приближении. Отметим, что необходимо знать обе формы малых колебаний  $\Phi_{(1)}$  и  $\Phi_{(2)}$  для построения в отдельности каждой из нелинейных форм колебаний.

Вычислим теперь столбец обобщенных скоростей, отвечающий выражению (3.3.24), с учетом формулы (3.3.14) с необходимой точностью:

$$\dot{\varphi} = -k_{s0} \left[ \left( \Phi_{(s)} a + \tilde{\mathbf{u}}_s^{(I)} a^3 \right) \sin \psi + \tilde{\mathbf{v}}_s^{(I)} a^3 \sin 3\psi \right], \quad (3.3.26)$$

где столбцы  $\tilde{\mathbf{u}}_s^{(I)} = \mathbf{u}_s^{(I)} + \rho_s^{(I)} \Phi_{(s)}$  и  $\tilde{\mathbf{v}}_s^{(I)} = 3\mathbf{v}_s^{(I)}$  имеют вид:

$$\tilde{\mathbf{u}}_s^{(I)} = \begin{bmatrix} \frac{\mp 19\sqrt{2} - 30}{32} \\ \frac{21 \pm 16\sqrt{2}}{16} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{v}}_s^{(I)} = \begin{bmatrix} \frac{\mp 552\sqrt{2} - 437}{896} \\ \frac{\pm 781\sqrt{2} + 576}{896} \end{bmatrix}. \quad (3.3.27)$$

Теперь можно вычислить полную механическую энергию системы согласно (2.3.10) с точностью до величин четвертого порядка малости и убедиться в том, что при заданном значении  $a$  она является величиной постоянной, т. е. не зависит от  $\psi$ . Раскладывая входящие в формулу (2.3.10) тригонометрические функции в ряды, получим с необходимой точностью:

$$E = \frac{1}{2}ml^2 \left[ 2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \left( 1 - \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{2} \right) \right] + \frac{1}{2}mgl \left( 2\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \frac{\varphi_1^4}{6} - \frac{\varphi_2^4}{12} \right). \quad (3.3.28)$$

Подставляя сюда формулы (3.3.24) и (3.3.26), получим искомое выражение для полной энергии с точностью до четвертого порядка по  $a$  в виде:

$$E^{(I)} = E_0 \left( 1 + \frac{\mp 20\sqrt{2} - 37}{64} a^2 \right), \quad E_0 = \frac{1}{2}N_s k_{s0}^2 a^2 = 2mgl a^2, \quad (3.3.29)$$

где  $E_0$  – полная энергия в рамках линейной модели. Легко видеть, что выражение (3.3.29) действительно не зависит от  $\psi$ , а зависит только от  $a$ , что лишний раз подтверждает правильность выполненных расчетов.

Возвращаясь к формуле (3.3.24) и полагая в ней  $\psi = 0$ , можно определить амплитуды колебаний звеньев  $A_{1s}$  и  $A_{2s}$  в зависимости от параметра  $a$ :

$$A_{1s}^{(I)}(a) = a + \frac{\mp 468\sqrt{2} - 353}{2688} a^3, \quad A_{2s}^{(I)}(a) = \mp \sqrt{2}a + \frac{\pm 865\sqrt{2} + 744}{2688} a^3. \quad (3.3.30)$$

Интересно оценить, как изменяется отношение амплитуд колебаний звеньев  $\mu_s(a) = A_{2s}/A_{1s}$  при движении по нелинейной форме при постепенном увеличении величины  $a$ . Составим выражение для  $\mu_s$  посредством (3.3.30), а затем разложим его в ряд по  $a$ , удерживая лишь одну поправку:

$$\mu_s^{(I)}(a) = \mu_{s0} \left( 1 - \frac{16 \mp 3\sqrt{2}}{84} a^2 \right). \quad (3.3.31)$$

Здесь  $\mu_{s0} = \mp \sqrt{2}$  – соотношение амплитуд колебаний в линейной модели согласно (2.4.16). Выражение (3.3.31) уже дает определенное представление об

изменении формы колебаний и показывает, что при увеличении  $a$  в относительно небольшом диапазоне соотношение между амплитудами при движении как по первой, так и по второй форме начинает падать:

$$\mu_1^{(I)}(a) \approx \mu_{10}(1 - 0.2410a^2), \quad \mu_2^{(I)}(a) \approx \mu_{20}(1 - 0.1399a^2). \quad (3.3.32)$$

**2. Построение второго приближения.** Перейдем теперь к построению второго приближения [72]. В этом приближении следует внести в выражение для частоты колебаний поправку, имеющую четвертый порядок малости:

$$k_s^{(II)}(a) = k_{s0} \left( 1 + \rho_s^{(I)} a^2 + \rho_s^{(II)} a^4 \right). \quad (3.3.33)$$

Принимая во внимание условия ортогональности (2.4.26), можно переписать уравнение гармонического баланса (3.3.8) в виде:

$$\int_0^{2\pi} \left[ N_s \left( \frac{d^2 x}{dt^2} + k_{s0}^2 x \right) - \Phi_{(s)}^T \mathbf{Q} \right] \cos \psi d\psi = 0, \quad (3.3.34)$$

где обозначено  $x = a \cos \psi$ . Вычислим с точностью до величин пятого порядка малости выражение:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k_{s0}^2 x = \left[ -2\rho_s^{(I)} a^3 - \left( \rho_s^{(I)^2} + 2\rho_s^{(II)} \right) a^5 \right] k_{s0}^2 \cos \psi, \quad (3.3.35)$$

а также столбец  $\mathbf{Q}$  с той же точностью:

$$\mathbf{Q} = \left[ \left( \mathbf{U}_s^{(I)} a^3 + \mathbf{U}_s^{(II)} a^5 \right) \cos \psi + \left( \mathbf{V}_s^{(I)} a^3 + \mathbf{V}_s^{(II)} a^5 \right) \cos 3\psi + \right. \\ \left. + \mathbf{W}_s^{(II)} a^5 \cos 5\psi \right] mgl, \quad (3.3.36)$$

где столбцы  $\mathbf{U}_s^{(II)}$ ,  $\mathbf{V}_s^{(II)}$  и  $\mathbf{W}_s^{(II)}$  имеют вид

$$\mathbf{U}_s^{(II)} = \begin{bmatrix} \frac{\mp 43915\sqrt{2} - 61938}{3584} \\ \frac{106634 \pm 76131\sqrt{2}}{7168} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_s^{(II)} = \begin{bmatrix} \frac{\mp 40077\sqrt{2} - 56722}{1792} \\ \frac{74698 \pm 52845\sqrt{2}}{3584} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{W}_s^{(II)} = \begin{bmatrix} \frac{\mp 201035\sqrt{2} - 279322}{17920} \\ \frac{354770 \pm 252083\sqrt{2}}{35840} \end{bmatrix}, \quad (3.3.37)$$

а для столбцов  $\mathbf{U}_s^{(I)}$  и  $\mathbf{V}_s^{(I)}$  сохраняются прежние обозначения (3.3.11). Тогда из уравнения (3.3.34) получаем для  $\rho_s^{(I)}$  те же значения (3.3.13), что и ранее, как этого и следовало ожидать, а также выражение для  $\rho_s^{(II)}$ :

$$\rho_s^{(II)} = -\frac{[\rho_s^{(I)}]^2}{2} - \frac{ml^2}{2N_s} \Phi_{(s)}^T \mathbf{U}_s^{(II)} = \frac{113415 \pm 79872\sqrt{2}}{28672}. \quad (3.3.38)$$

Таким образом, частота колебаний во втором приближении  $k_s^{(II)}(a)$  при движении по нелинейной форме определяется выражением:

$$k_s^{(II)}(a) = k_{s0} \left( 1 - \frac{31 \pm 20\sqrt{2}}{32} a^2 + \frac{113415 \pm 79872\sqrt{2}}{28672} a^4 \right), \quad (3.3.39)$$

или в более наглядной форме:

$$k_1^{(II)}(a) = k_{10}(1 - 0.0849a^2 + 0.01604a^4), \quad k_2^{(II)}(a) = k_{20}(1 - 1.8526a^2 + 7.8952a^4). \quad (3.3.40)$$

Получим теперь решение с точностью до пятого порядка малости. Для этого определим, какое вынужденное колебание возбуждает  $\mathbf{Q}$  из (3.3.36) в невозмущенной системе:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^{(II)}(a, \psi) = & \Phi_{(n)}^T \frac{\left( \mathbf{U}_s^{(I)} a^3 + \mathbf{U}_s^{(II)} a^5 \right)}{N_n(k_{n0}^2 - k_s^2(a))} mgl \cos \psi + \\ & + \left[ \Phi_{(1)}^T \frac{\left( \mathbf{V}_s^{(I)} a^3 + \mathbf{V}_s^{(II)} a^5 \right)}{N_1(k_{10}^2 - 9k_s^2(a))} + \Phi_{(2)}^T \frac{\left( \mathbf{V}_s^{(I)} a^3 + \mathbf{V}_s^{(II)} a^5 \right)}{N_2(k_{20}^2 - 9k_s^2(a))} \right] mgl \cos 3\psi + \\ & + \left[ \Phi_{(1)}^T \frac{\mathbf{W}_s^{(II)} a^5}{N_1(k_{10}^2 - 25k_s^2(a))} + \Phi_{(2)}^T \frac{\mathbf{W}_s^{(II)} a^5}{N_2(k_{20}^2 - 25k_s^2(a))} \right] mgl \cos 5\psi. \end{aligned} \quad (3.3.41)$$

Здесь, как и прежде,  $n = 1$  при  $s = 2$  и напротив  $n = 2$  при  $s = 1$ . Для удержания слагаемых не выше пятого порядка малости по  $a$  достаточно подставить в первые три дроби этой формулы вместо  $k_s(a)$  выражение (3.3.14), а в оставшихся двух заменить  $k_s(a)$  постоянным значением  $k_{s0}$ . Складывая выражение (3.3.41) с (3.3.6), получим с необходимой точностью:

$$\begin{aligned} \varphi = & \Phi_{(s)} a \cos \psi + \tilde{\varphi}^{(II)}(a, \psi) = \\ = & \left( \Phi_{(s)} a + \mathbf{u}_s^{(I)} a^3 + \mathbf{u}_s^{(II)} a^5 \right) \cos \psi + \left( \mathbf{v}_s^{(I)} a^3 + \mathbf{v}_s^{(II)} a^5 \right) \cos 3\psi + \mathbf{w}_s^{(II)} a^5 \cos 5\psi, \end{aligned} \quad (3.3.42)$$

где столбцы  $\mathbf{u}_s^{(\text{II})}$ ,  $\mathbf{v}_s^{(\text{II})}$  и  $\mathbf{w}_s^{(\text{II})}$  имеют представления:

$$\mathbf{u}_s^{(\text{II})} = \begin{bmatrix} \frac{\mp 1375\sqrt{2} + 233}{28672} \\ \frac{\pm 233\sqrt{2} - 2750}{28672} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_s^{(\text{II})} = \begin{bmatrix} \frac{812575 \pm 535236\sqrt{2}}{802816} \\ \frac{-1148584 \mp 756783\sqrt{2}}{802816} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{w}_s^{(\text{II})} = \begin{bmatrix} \frac{\pm 2255280\sqrt{2} + 2911491}{9748480} \\ \frac{\mp 3111099\sqrt{2} - 4066960}{9748480} \end{bmatrix}, \quad (3.3.43)$$

а столбцы  $\mathbf{u}_s^{(\text{I})}$  и  $\mathbf{v}_s^{(\text{I})}$  определяются прежними формулами (3.3.25). Выражение (3.3.42) совместно с (3.3.39) описывает движение плоского двойного маятника по каждой из нелинейных форм во втором приближении. Вычислим теперь столбец обобщенных скоростей с той же точностью:

$$\dot{\varphi} = -k_{s0} \left[ \left( \Phi_{(s)} a + \tilde{\mathbf{u}}_s^{(\text{I})} a^3 + \tilde{\mathbf{u}}_s^{(\text{II})} a^5 \right) \sin \psi + \right. \\ \left. + \left( \tilde{\mathbf{v}}_s^{(\text{I})} a^3 + \tilde{\mathbf{v}}_s^{(\text{II})} a^5 \right) \sin 3\psi + \tilde{\mathbf{w}}_s^{(\text{II})} a^5 \sin 5\psi \right], \quad (3.3.44)$$

где столбцы  $\tilde{\mathbf{u}}_s^{(\text{I})}$  и  $\tilde{\mathbf{v}}_s^{(\text{I})}$  сохраняют прежние представления (3.3.27), а столбцы  $\tilde{\mathbf{u}}_s^{(\text{II})} = \mathbf{u}_s^{(\text{II})} + \rho_s^{(\text{I})} \mathbf{u}_s^{(\text{I})} + \rho_s^{(\text{II})} \Phi_{(s)}$ ,  $\tilde{\mathbf{v}}_s^{(\text{II})} = 3 \left( \mathbf{v}_s^{(\text{II})} + \rho_s^{(\text{I})} \mathbf{v}_s^{(\text{I})} \right)$  и  $\tilde{\mathbf{w}}_s^{(\text{II})} = 5\mathbf{w}_s^{(\text{II})}$  имеют следующий вид:

$$\tilde{\mathbf{u}}_s^{(\text{II})} = \begin{bmatrix} \frac{111660 \pm 77069\sqrt{2}}{28672} \\ \frac{\mp 57585\sqrt{2} - 82675}{14336} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{v}}_s^{(\text{II})} = \begin{bmatrix} \frac{3435281 \pm 2329564\sqrt{2}}{802816} \\ \frac{\mp 3270817\sqrt{2} - 4820440}{802816} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_s^{(\text{II})} = \begin{bmatrix} \frac{\pm 2255280\sqrt{2} + 2911491}{1949696} \\ \frac{\mp 3111099\sqrt{2} - 4066960}{1949696} \end{bmatrix}. \quad (3.3.45)$$

Для проверки полученных результатов запишем полную механическую энергию системы с точностью до слагаемых шестого порядка малости. Вновь обращаясь к формуле (2.3.10) и раскладывая входящие в нее тригонометрические функции ряды с удержанием необходимого количества членов, получим

следующее выражение:

$$E = \frac{1}{2}ml^2 \left[ 2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \left( 1 - \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{2} + \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)^4}{24} \right) \right] + \quad (3.3.46)$$

$$+ \frac{1}{2}mgl \left( 2\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \frac{\varphi_1^4}{6} - \frac{\varphi_2^4}{12} + \frac{\varphi_1^6}{180} + \frac{\varphi_2^6}{360} \right).$$

Подставляя в него формулы (3.3.42) и (3.3.44), получим окончательно:

$$E^{(\text{II})} = E_0 \left( 1 + \frac{\mp 20\sqrt{2} - 37}{64}a^2 + \frac{2262801 \pm 1577160\sqrt{2}}{802816}a^4 \right), \quad E_0 = 2mgl a^2. \quad (3.3.47)$$

Видно, что полная энергия и в этом приближении не зависит от  $\psi$ , что является показателем корректности построенного решения.

Обращаясь к формуле (3.3.42), определим амплитуды колебаний звеньев маятника в зависимости от параметра  $a$  во втором приближении:

$$A_{1s}^{(\text{II})}(a) = a + \frac{\mp 468\sqrt{2} - 353}{2688}a^3 + \frac{22500963 \pm 14502380\sqrt{2}}{17059840}a^5, \quad (3.3.48)$$

$$A_{2s}^{(\text{II})}(a) = \sqrt{2}a + \frac{\pm 865\sqrt{2} + 744}{2688}a^3 + \frac{-33160840 \mp 21387427\sqrt{2}}{17059840}a^5.$$

Записывая выражение для отношения этих амплитуд и раскладывая его в ряд с удержанием теперь уже двух поправочных слагаемых, получим:

$$\mu_s^{(\text{II})}(a) = \mu_{s0} \left( 1 - \frac{16 \mp 3\sqrt{2}}{84}a^2 + \frac{\pm 895665\sqrt{2} - 747064}{9596000}a^4 \right), \quad (3.3.49)$$

или в более наглядной форме:

$$\mu_1^{(\text{II})}(a) = \mu_{10}(1 - 0.2410a^2 - 0.2099a^4), \quad \mu_2^{(\text{II})}(a) = \mu_{20}(1 - 0.1399a^2 + 0.0542a^4). \quad (3.3.50)$$

Формула (3.3.49) уточняет выражение (3.3.31), полученное в первом приближении, и дает определенное представление о первой форме колебаний в более широком диапазоне изменения параметра  $a$ .

Отметим закономерность, которая прослеживается при построении формул в первом и втором приближении при движении по нелинейным формам колебаний: видно, что все отличия между первой и второй формами во всех выражениях заключаются лишь в знаке перед величиной  $\sqrt{2}$ .

**Обсуждение результатов.** Перейдем теперь к анализу полученных результатов. Сначала проанализируем формулы, полученные для первой нелинейной формы колебаний. Построим графики зависимости частоты колебаний при движении системы по первой форме в первом (3.3.14) и во втором приближении (3.3.39), отнесенной к частоте линейной модели (т. е.  $k_1/k_{10}$ ), от амплитуды колебаний первого звена  $A_{11}$  в рамках тех же приближений согласно (3.3.30) и (3.3.48) соответственно. Как и для ортогонального двойного маятника, здесь в каждом из случаев мы имеем параметрическую зависимость частоты от этой амплитуды посредством промежуточного параметра  $a$ , а каждое следующее приближение учитывает новую поправку и в выражении для частоты, и в выражении для амплитуды. Однако в отличие от ортогонального двойного маятника, исследование нелинейных форм колебаний которого сводилось к анализу обычного математического маятника, допускающего точное аналитическое решение, в случае плоского двойного маятника такое общеизвестное решение для нелинейных форм колебаний отсутствует. Поэтому приближенные аналитические результаты целесообразно сопоставлять с соответствующими численными результатами, полученными с помощью численного интегрирования матричного уравнения движения (2.3.11). Для этого следует для каждой конкретной амплитуды колебаний первого звена  $A_{11}$  численно подобрать такую амплитуду колебаний второго звена  $A_{21}$ , задавая их в качестве начальных условий движения (начальные угловые скорости звеньев при этом полагаем равными нулю), чтобы движение двойного маятника было периодическим (а точнее, наиболее близким к периодическому) с частотой в районе первой частоты колебаний линейной модели  $k_{10}$  (чтобы не попасть во вторую форму). В результате для каждой амплитуды  $A_{11}$  можно определить и частоту колебаний  $k_1$ , с которой и следует сопоставлять приближенные аналитические результаты, и привести зависимость отвечающей ей безразмерной частоты  $k_1/k_{10}$  от  $A_{11}$ . Все упомянутые зависимости приведены на рис. 3.4. По нему видно, что аналитические и численные результаты очень хорошо соотносятся друг с другом, при этом каждое следующее приближение уточняет результаты. Видно также, что с увеличением амплитуды частота колебаний меняется в довольно небольшом диапазоне. Таким образом, анализируя построенные графики, можно убедиться в том, что полученные выше формулы дают асимптотически правильные результаты.

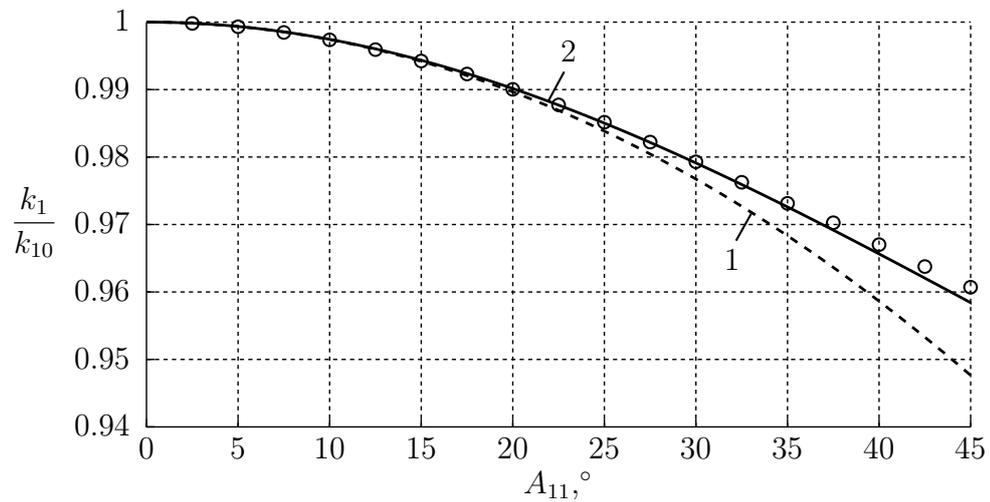


Рис. 3.4. Зависимость безразмерной частоты  $k_1/k_{10}$  от амплитуды  $A_{11}$ : 1 – первое приближение, 2 – второе приближение,  $\circ$  – численное решение

Теперь обратимся к выражению для соотношения амплитуд в первом (3.3.31) и втором (3.3.49) приближениях и построим зависимость  $\mu_1/\mu_{10}$  от амплитуды колебаний первого звена  $A_{11}$  согласно (3.3.30) и (3.3.48). При этом также сопоставим результаты с численными. По рис. 3.5 видно, что каждое следующее приближение уточняет результаты, т. е. полученные формулы и в этом случае дают асимптотически корректные результаты. Видно также, что соотношение амплитуд падает с их увеличением, изменяясь более существенно, чем частота колебаний.

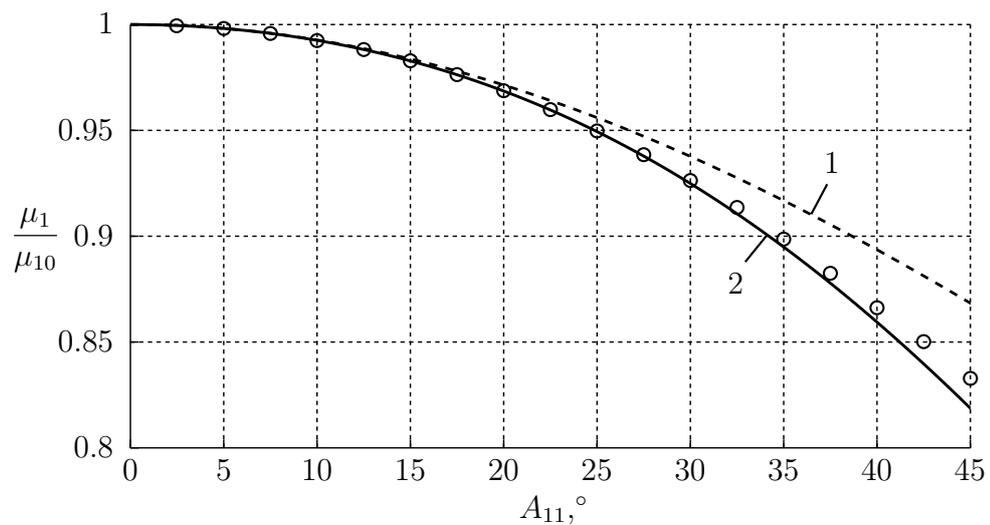


Рис. 3.5. Зависимость величины  $\mu_1/\mu_{10}$  от амплитуды  $A_{11}$ : 1 – первое приближение, 2 – второе приближение,  $\circ$  – численное решение

Следует подчеркнуть, что для возбуждения колебаний по первой нелинейной форме при достаточно больших амплитудах совершенно нельзя пользоваться линейной моделью, т. к. она уже будет давать некорректные результаты, а необходимо пользоваться полученными асимптотическими выражениями. Например, если необходимо возбудить колебания системы по первой форме с амплитудой колебаний первого звена  $A_{11} = 45^\circ$ , то из полученных формул при помощи варьирования параметра  $a$  нетрудно определить, какой для этого должна быть амплитуда колебаний второго звена  $A_{21}$ . Так, при использовании линейной модели должно быть  $A_{21} = 63.6^\circ$ , в первом приближении  $A_{21} = 55.8^\circ$ , а во втором приближении  $A_{21} = 52.6^\circ$ . Значение же, полученное с помощью численного интегрирования, будет  $A_{21} = 53^\circ$ , и, как видно, оно весьма мало отличается от второго приближения, имеет ощутимые отличия от первого приближения и совсем сильно различается со значением из линейной модели.

Чтобы наглядно проиллюстрировать процесс дрейфа первой формы колебаний при переходе от линейной зоны к нелинейной, обратимся к построению фазового портрета системы при движении по этой форме. Ясно, что фазовое пространство в рассматриваемой задаче является четырехмерным. Поэтому удобно построить фазовый портрет для каждой обобщенной координаты в отдельности, т. е. в виде проекций на плоскости  $(\varphi_1, \dot{\varphi}_1/k_{10})$  и  $(\varphi_2, \dot{\varphi}_2/k_{10})$ , где деление обобщенных скоростей на величину  $k_{10}$  осуществляется из соображений размерности [142]. Будем строить фазовый портрет по формулам второго приближения и сопоставлять его с результатами, полученными с помощью численного интегрирования. Конечно, здесь соответствие аналитических и численных результатов должно производиться из условия равенства отвечающих им уровней энергии. Для численного решения проще всего задавать начальные значения  $\varphi_{10}$  и  $\varphi_{20}$  углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , предоставляя систему самой себе, как это делалось выше при исследовании частоты колебаний и соотношения амплитуд колебаний. Эти значения должны быть выбраны так, чтобы они отвечали периодическому движению по первой форме, и, как уже было сказано выше, чтобы отвечающая им численная фазовая траектория соответствовала тому же самому уровню энергии, что и фазовая траектория из приближенного аналитического решения. Для удобства введем безразмерную энергию  $\varepsilon = E/(mgl)$ . С одной стороны, для заданных начальных условий в

численном решении она определяется согласно (2.3.10) выражением:

$$\varepsilon = 3 - 2 \cos \varphi_{10} - \cos \varphi_{20}. \quad (3.3.51)$$

С другой стороны, выражение для безразмерной энергии во втором приближении согласно (3.3.47) будет:

$$\varepsilon = 2a^2 \left( 1 + \frac{20\sqrt{2} - 37}{64} a^2 + \frac{2262801 - 1577160\sqrt{2}}{802816} a^4 \right). \quad (3.3.52)$$

Изменяя параметр  $a$ , тем самым мы будем варьировать и значение  $\varepsilon$ , т. е. получать фазовые траектории с различным уровнем энергии. На рис. 3.6 и 3.7 представлены фазовые портреты на плоскостях  $(\varphi_1, \dot{\varphi}_1/k_{10})$  и  $(\varphi_2, \dot{\varphi}_1/k_{10})$ . Сплошными линиями изображены фазовые траектории, отвечающие асимп-

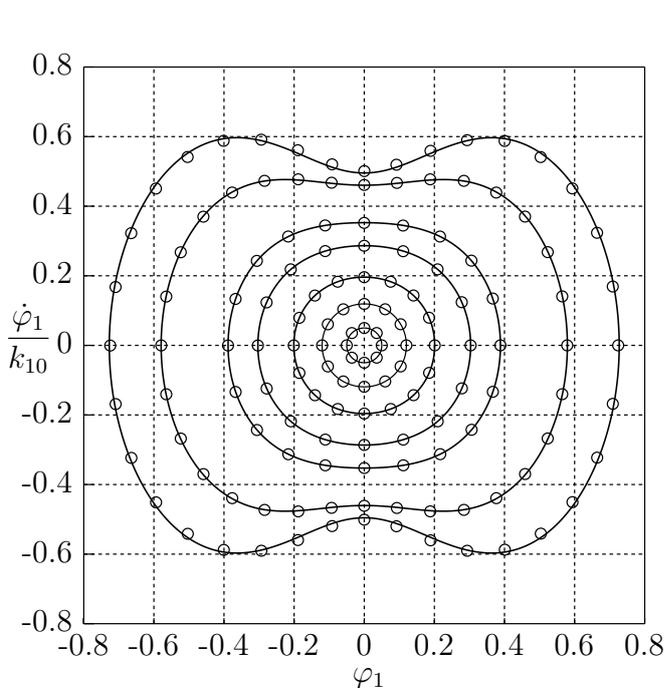


Рис. 3.6. Фазовый портрет для координаты  $\varphi_1$ : сплошные линии – приближенные аналитические результаты,  $\circ$  – численное решение

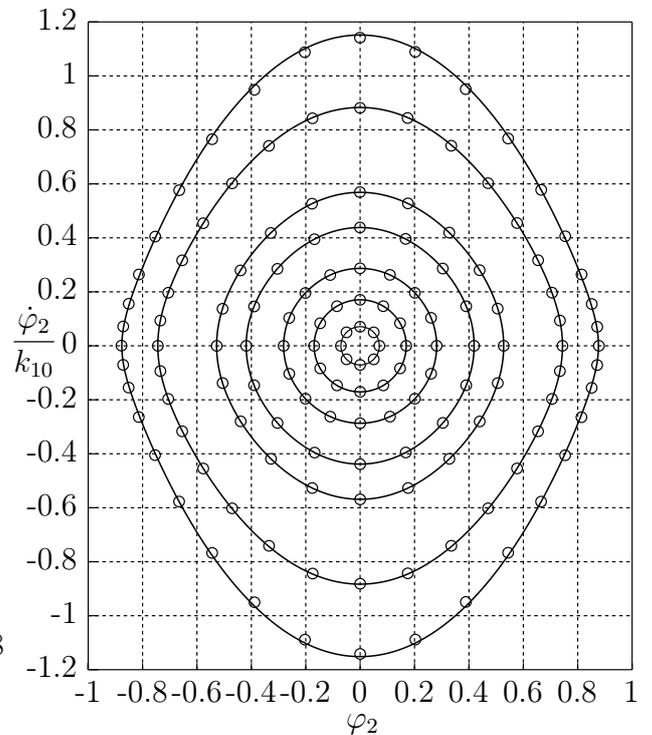


Рис. 3.7. Фазовый портрет для координаты  $\varphi_2$ : сплошные линии – приближенные аналитические результаты,  $\circ$  – численное решение

тотическим формулам второго приближения, а кружками нанесены значения, полученные в результате численного интегрирования и взятые через равные промежутки времени. Видно очень хорошее соответствие аналитических и численных результатов, а также отчетливо наблюдается процесс дрейфа

формы колебаний с увеличением безразмерного уровня энергии  $\varepsilon$ . Так, при малых  $\varepsilon$  фазовые траектории представляют собой concentric окружности, что соответствует движению по линейной форме колебаний, тогда как с увеличением  $\varepsilon$  окружности постепенно начинают искажаться и превращаться в другие, более сложные по характеру фазовые траектории.

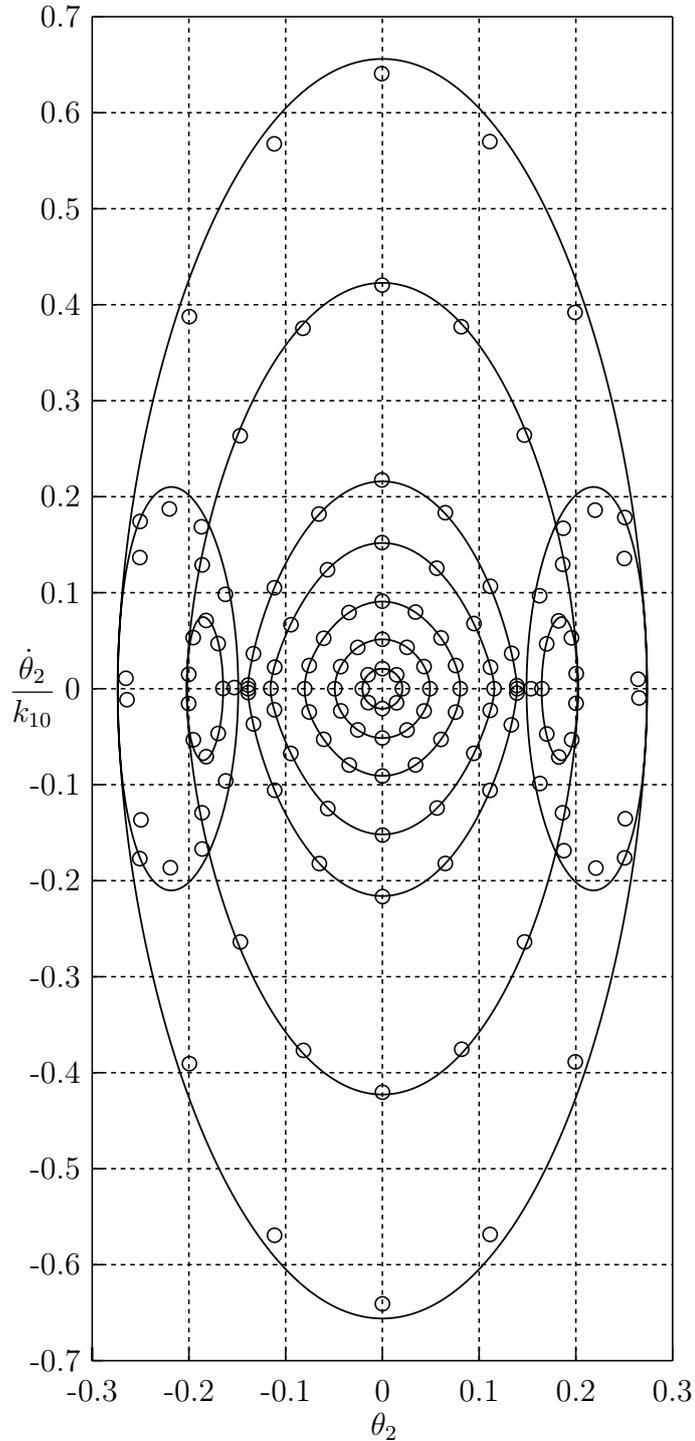


Рис. 3.8. Фазовый портрет для координаты  $\theta_2$ : сплошные линии – приближенные аналитические результаты,  $\circ$  – численное решение

Кроме того, представляет интерес построить также фазовый портрет для межзвенного угла  $\theta_2 = \varphi_2 - \varphi_1$ , который может быть принят в качестве второй обобщенной координаты вместо абсолютного угла  $\varphi_2$ , т. е. на плоскости  $(\theta_2, \dot{\theta}_2/k_{10})$ , для тех же самых уровней энергии. Он изображен на рис. 3.8 и имеет весьма нетривиальный вид. По нему видно, что с увеличением  $\varepsilon$  фазовые траектории существенно усложняют свой характер и приобретают своеобразные «петли». При этом с увеличением уровня энергии кружки располагаются на фазовых траекториях все более неравномерно. Видно также, что при увеличении уровня энергии здесь начинают проявляться более ощутимые различия между аналитическими и численными результатами, чем на рис. 3.6 и 3.7. Отметим, что пересечение фазовых траекторий с различными уровнями энергии на рис. 3.8 вовсе не противоречит положению о том, что фазовые траектории не должны пересекать друг друга, т. к. на упомянутом рисунке представлены лишь проекции фазовых траекторий на плоскость  $(\theta_2, \dot{\theta}_2/k_{10})$ , тогда как в реальности фазовое пространство является четырехмерным, и в нем уже никаких пересечений фазовых траекторий наблюдаться не будет. При этом уровни энергии, отвечающие построенным траекториям, выбирались таким образом, чтобы все фазовые портреты были наиболее доступными для восприятия.

Для большей наглядности на рис. 3.9 представлены графики зависимости абсолютных углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  и межзвенного угла  $\theta_2$  от фазового угла  $\psi$  при его изменении от 0 до  $2\pi$ , соответствующем одному периоду колебаний, которые отвечают фазовой траектории с самым большим уровнем энергии из тех, что были построены на рис. 3.6–3.8. При этом для численного решения также вводится величина  $\psi = k_1 t$ , где  $k_1$  – частота, полученная в ходе этого решения, а аналитические результаты отвечают формулам второго приближения. Также, как и ранее, аналитические зависимости представлены сплошными линиями, а численные – кружками. Эти графики лишней раз отчетливо демонстрируют нетривиальный характер движений плоского двойного маятника по первой нелинейной форме, при этом также наблюдается хорошее соответствие численных и аналитических результатов. На рис. 3.10 представлены аналогичные графики, но для соответствующих угловых скоростей. Следует отметить, что для приведенного случая угол  $\theta_2$ , а также угловые скорости  $\dot{\varphi}_1/k_{10}$  и  $\dot{\theta}_2/k_{10}$  существенно отличаются от синусоидальных функций и име-

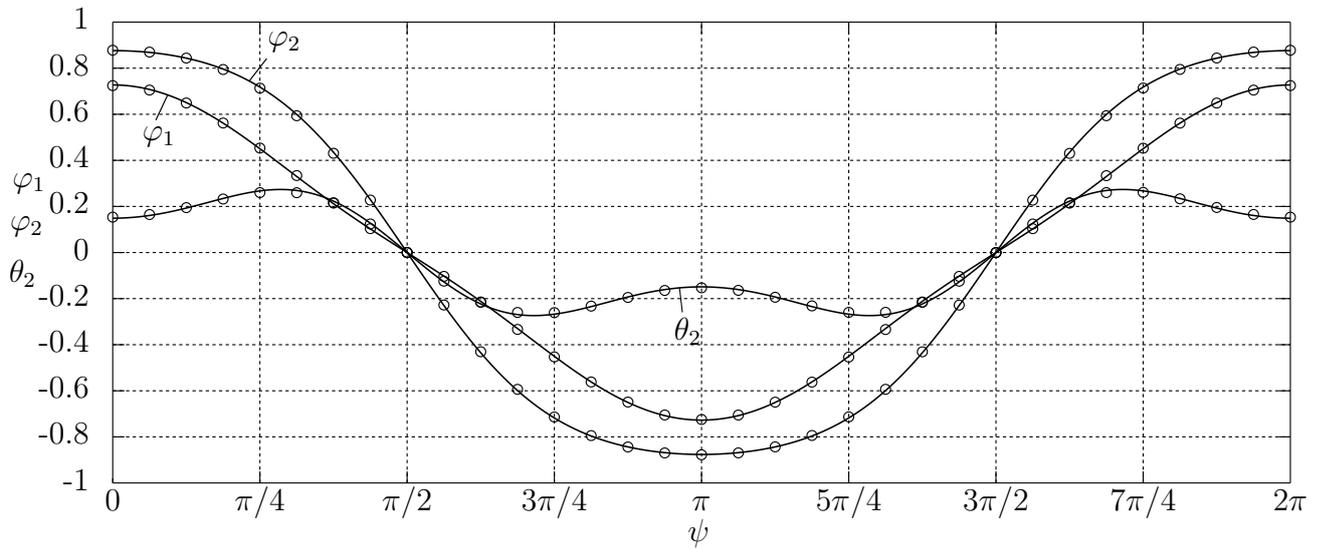


Рис. 3.9. Графики зависимости  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\theta_2$  от  $\psi$ : сплошные линии – приближенные аналитические результаты,  $\circ$  – численное решение

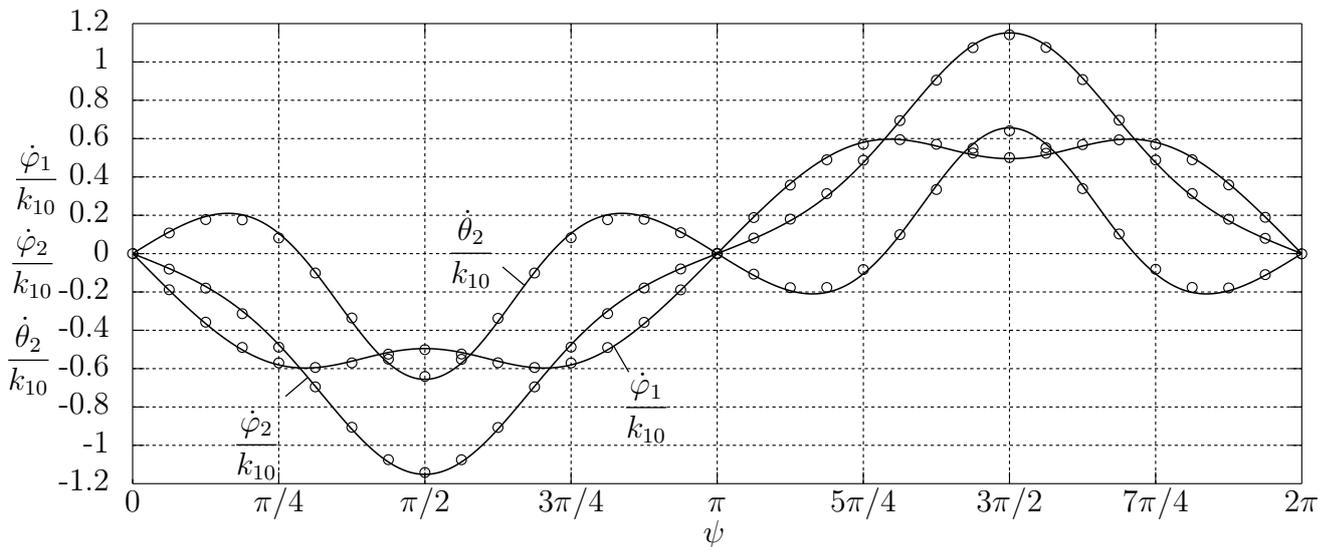


Рис. 3.10. Графики зависимости  $\dot{\varphi}_1/k_{10}$ ,  $\dot{\varphi}_2/k_{10}$  и  $\dot{\theta}_2/k_{10}$  от  $\psi$ : сплошные линии – приближенные аналитические результаты,  $\circ$  – численное решение

ют на периоде колебаний шесть экстремумов, а не два, как это имеет место при малых колебаниях. В то же время, углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , а также угловая скорость  $\dot{\varphi}_2/k_{10}$  имеют на периоде колебаний два экстремума, как и при малых колебаниях, однако их вид тоже значительно отличается от синусоидальных функций, тем самым отчетливо отражая влияние нелинейных факторов.

Из этих рассуждений можно также сделать вывод, что если в качестве обобщенных координат принимать углы  $\varphi_1$  и  $\theta_2$ , то соотношение их значений, достигаемых при  $\psi = 0$  и принимаемых за амплитуды колебаний, будет адекватной характеристикой нелинейной формы колебаний лишь при доста-

точно небольших отклонениях, поскольку с их увеличением максимальное значение угла  $\theta_2$  будет достигаться уже вовсе не при  $\psi = 0$ . В этом случае подобное соотношение уже будет лишено смысла. Это обстоятельство лишний раз подчеркивает, что для описания нелинейной формы необходимо знать конкретную зависимость обобщенных координат от времени (или фазового угла) и соответствующую частоту колебаний. Именно эти выражения и были получены выше, и они позволили описать первую нелинейную форму колебаний, т. е. основной тон, представляющий главное практическое значение. При этом пределы применимости асимптотических формул второго приближения оказываются достаточно широкими, что обеспечивает их важное значение при исследовании периодических режимов движения плоского двойного маятника.

Перейдем теперь к краткому обсуждению результатов, отвечающих второй нелинейной форме колебаний. Как и прежде для первой формы, рассмотрим зависимость второй частоты, отнесенной к соответствующей линейной частоте:  $k_2/k_{20}$ , от амплитуды первого звена  $A_{12}$  по тем же самым формулам, в которых содержатся первые два приближения. Также построим зависимость  $\mu_2/\mu_{20}$  от амплитуды колебаний первого звена  $A_{12}$  в двух приближениях. В каждом из случаев также нанесем и результаты, полученные с помощью численного интегрирования. Указанные зависимости представлены на рис. 3.11 и 3.12 соответственно.

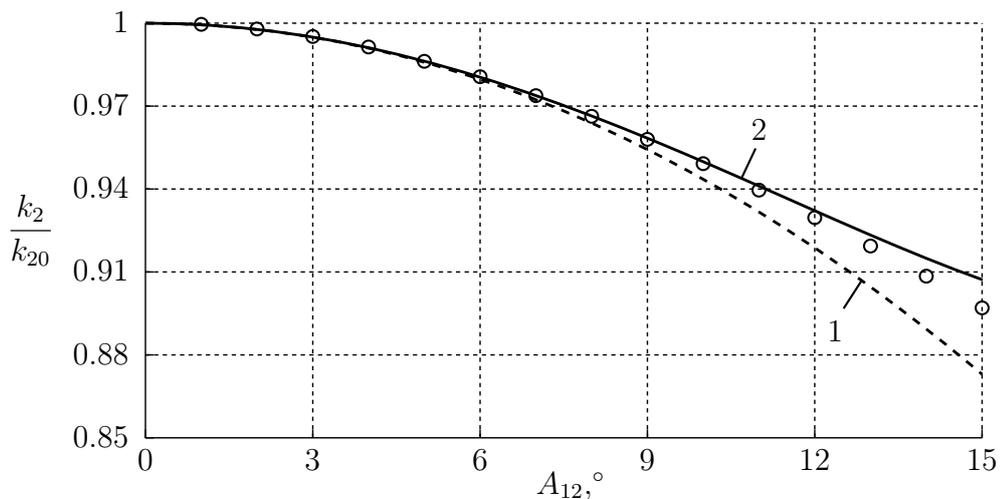


Рис. 3.11. Зависимость безразмерной частоты  $k_2/k_{20}$  от амплитуды  $A_{12}$ : 1 – первое приближение, 2 – второе приближение,  $\circ$  – численное решение

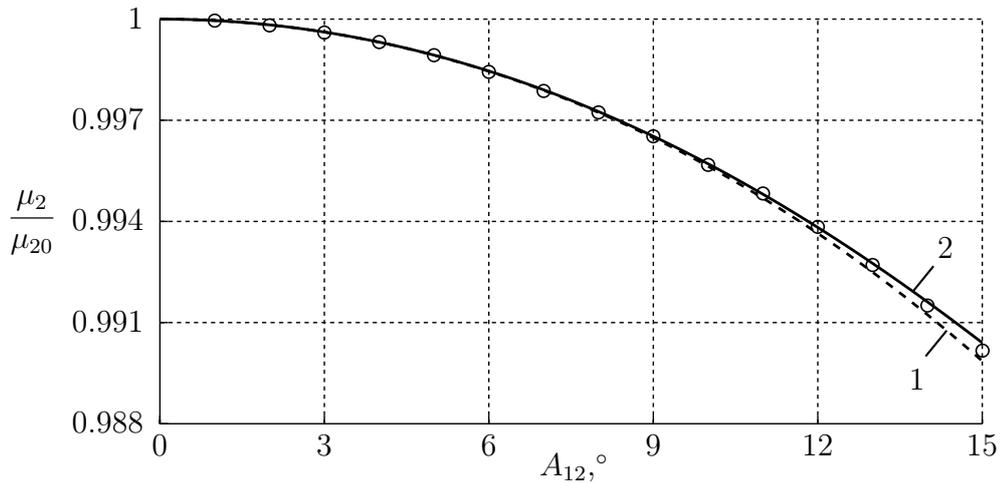


Рис. 3.12. Зависимость величины  $\mu_2/\mu_{20}$  от амплитуды  $A_{12}$ :

1 – первое приближение, 2 – второе приближение, o – численное решение

По рис. 3.11 видно, что каждое следующее приближение уточняет результаты для частоты, хотя и является приемлемым в достаточно узком диапазоне амплитуд. При этом вторая частота колебаний уже при небольших амплитудах сильно изменяется, в отличие от первой частоты. Это следует и из формул (3.3.40), где для второй частоты стоят весьма существенные числовые коэффициенты по сравнению с выражением для первой частоты. В частности, это говорит и о том, что область применимости линейной теории при исследовании движений системы по второй форме колебаний существенно меньше, чем по первой форме, и она ограничивается для обоих углов лишь несколькими градусами. Формально это объясняется тем, что при колебаниях по первой форме, когда  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  в исходном приближении колеблются в фазе, и при колебаниях по второй форме, когда  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  колеблются в противофазе, разложение нелинейных слагаемых (3.3.5) изучаемых уравнений (3.3.1) в ряды будет адекватно описывать поведение системы в различных диапазонах изменения амплитуд колебаний. Что же касается соотношения амплитуд, то оно в рассматриваемом диапазоне не претерпевает практически никаких изменений. Однако даже в таком узком диапазоне наглядно демонстрируется достоверная асимптотика полученных результатов. Таким образом, несмотря на то, частота колебаний сильно зависит от амплитуды, т. е. данная область уже является нелинейной, соотношение амплитуд и характер соответствующей формы колебаний в целом в рассматриваемом диапазоне амплитуд еще будут практически не отличимы от линейного варианта.

### 3.4. Нелинейные формы колебаний в общем случае пространственного двойного маятника

Обратимся к исследованию нелинейных форм колебаний в общем случае пространственного двойного маятника, используя уже отработанную методику и строя лишь одно приближение в силу достаточной громоздкости последующих выкладок [143]. С этой целью перепишем нелинейное матричное уравнение движения (2.2.12) в следующем виде:

$$\mathbf{A}_0 \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\theta} = \tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}) \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \tilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \tilde{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}), \quad (3.4.1)$$

где матрицы  $\mathbf{A}_0$  и  $\mathbf{C}_0$  определяются по формулам (2.4.2), а также сделаны обозначения:

$$\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{A}_0 - \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}), \quad \tilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = -\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}), \quad \tilde{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\theta} - \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}). \quad (3.4.2)$$

Для построения первого приближения достаточно удержать кубическую нелинейность в выражении для  $\mathbf{Q}$ . В свою очередь, это означает, что следует использовать следующие аппроксимации для матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}$  и столбцов  $\tilde{\mathbf{B}}$  и  $\tilde{\mathbf{C}}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{2} ml^2 \theta_2^2 \begin{bmatrix} 2(1 + \sin^2 \alpha) & \cos \alpha \\ \cos \alpha & 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) &= ml^2 \theta_2 \begin{bmatrix} \left( 2(1 + \sin^2 \alpha) \dot{\theta}_1 + \cos \alpha \dot{\theta}_2 \right) \dot{\theta}_2 \\ -(1 + \sin^2 \alpha) \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{6} mgl \begin{bmatrix} 3\theta_1(\theta_1^2 + \theta_2^2) + \cos \alpha \theta_2(3\theta_1^2 + \theta_2^2) \\ \theta_2(3\theta_1^2 + \theta_2^2) + \cos \alpha \theta_1(\theta_1^2 + 3\theta_2^2) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

так что столбец  $\mathbf{Q}$  будет содержать нелинейные слагаемые третьего порядка малости по  $\boldsymbol{\theta}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  и  $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$ . Отметим, что в силу построения лишь первого приближения его номер будет везде далее опускаться. В качестве исходного приближения принимаем следующее выражение:

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Theta}_{(s)} a \cos \psi, \quad (3.4.4)$$

где  $a = \text{const}$ , а частота колебаний зависит от  $a$  следующим образом:

$$\dot{\psi} = k_{s0}(1 + \rho_s a^2) = k_s(a), \quad (3.4.5)$$

причем формы малых колебаний здесь принимаются в виде  $\Theta_{(s)} = [1, \beta_{s0}]^T$  с учетом выражения (2.4.14). Поэтому величина  $a$  согласно (3.4.4) будет представлять собой амплитуду колебаний угла  $\theta_1$  в исходном приближении. Поправочный коэффициент  $\rho_s$  в выражении для частоты  $k_s$  теперь будет зависеть от угла  $\alpha$ , и установление этой зависимости и является одной из главных задач. Как и прежде, его следует определить из уравнения гармонического баланса по данной форме колебаний  $\Theta_{(s)}$ :

$$\int_0^{2\pi} \Theta_{(s)}^T \left( \mathbf{A}_0 \ddot{\theta} + \mathbf{C}_0 \theta - \mathbf{Q} \right) \cos \psi d\psi = 0. \quad (3.4.6)$$

Вычислим согласно (3.4.4) столбец  $\ddot{\theta}$  с точностью до слагаемых третьего порядка малости с учетом (3.4.5), а также столбец нелинейных слагаемых  $\mathbf{Q}$  с той же точностью:

$$\ddot{\theta} = -\Theta_{(s)} a \cos \psi k_{s0}^2 (1 + 2\rho_s a^2), \quad \mathbf{Q} = mgl (\mathbf{U}_s \cos \psi + \mathbf{V}_s \cos 3\psi) a^3, \quad (3.4.7)$$

где столбцы  $\mathbf{U}_s$  и  $\mathbf{V}_s$  имеют следующие представления:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_s = \frac{1}{8} \left\{ \begin{aligned} & \begin{bmatrix} 3 \\ \beta_{s0}^3 \end{bmatrix} + (3 - 2p_{s0}^2(1 + \sin^2 \alpha)) \beta_{s0} \begin{bmatrix} \beta_{s0} \\ 1 \end{bmatrix} + \\ & + \cos \alpha \begin{bmatrix} 3\beta_{s0} \\ 1 \end{bmatrix} + \cos \alpha (1 - p_{s0}^2) \beta_{s0}^2 \begin{bmatrix} \beta_{s0} \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}, \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_s = \frac{1}{24} \left\{ \begin{aligned} & \begin{bmatrix} 3 \\ \beta_{s0}^3 \end{bmatrix} + 3\beta_{s0} \begin{bmatrix} \beta_{s0} \\ 1 \end{bmatrix} + 6(1 + \sin^2 \alpha) p_{s0}^2 \beta_{s0} \begin{bmatrix} -3\beta_{s0} \\ 1 \end{bmatrix} + \\ & + \cos \alpha \begin{bmatrix} 3\beta_{s0} \\ 1 \end{bmatrix} + \cos \alpha \beta_{s0}^2 \begin{bmatrix} \beta_{s0} \\ 3 \end{bmatrix} - 3 \cos \alpha p_{s0}^2 \beta_{s0}^2 \begin{bmatrix} 3\beta_{s0} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Подставляя теперь (3.4.8) и (3.4.9) в (3.4.6) и принимая во внимание, что  $(\mathbf{C}_0 - k_{s0}^2 \mathbf{A}_0) \Theta_{(s)} = 0$ , получим после преобразований:

$$\rho_s = -\frac{mgl}{2N_s k_{s0}^2} \Theta_{(s)}^T \mathbf{U}_s = -\frac{1}{2H_s p_{s0}^2} \Theta_{(s)}^T \mathbf{U}_s, \quad (3.4.10)$$

где величины  $N_s$  и  $H_s$  определяются по формулам (2.4.23) и (2.4.24) соответственно. Нетрудно вычислить и выражение  $\Theta_{(s)}^T \mathbf{U}_s$ , стоящее в (3.4.10),

используя формулу (3.4.8):

$$\begin{aligned} \Theta_{(s)}^T \mathbf{U}_s = \frac{1}{8} [3 + 4 \cos \alpha \beta_{s0} + 2 (3 - 2p_{s0}^2 (1 + \sin^2 \alpha)) \beta_{s0}^2 + \\ + 4 \cos \alpha (1 - p_{s0}^2) \beta_{s0}^3 + \beta_{s0}^4]. \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

Таким образом, зависимость (3.4.10) с учетом (2.4.14), (2.4.24) и (3.4.11) определяет зависимость поправочного коэффициента  $\rho_s$  от угла  $\alpha$ .

Остается построить решение с точностью до третьего порядка малости. Для этого определим поправку  $\tilde{\theta}(a, \psi)$  вследствие наличия величины  $\mathbf{Q}$  в уравнении (3.4.1). По аналогии с формулой (3.3.23) нетрудно понять, какое колебание возбуждает сила  $\mathbf{Q}$  в невозмущенной системе с точностью до слагаемых третьего порядка малости:

$$\tilde{\theta}(a, \psi) = (\mathbf{u}_s \cos \psi + \mathbf{v}_s \cos 3\psi) a^3, \quad (3.4.12)$$

где столбцы  $\mathbf{u}_s = [u_{1s}, u_{2s}]^T$  и  $\mathbf{v}_s = [v_{1s}, v_{2s}]^T$  имеют следующий вид:

$$\mathbf{u}_s = \Theta_{(n)} \frac{\Theta_{(n)}^T \mathbf{U}_s}{H_n(p_{n0}^2 - p_{s0}^2)}, \quad \mathbf{v}_s = \Theta_{(1)} \frac{\Theta_{(1)}^T \mathbf{V}_s}{H_1(p_{10}^2 - 9p_{s0}^2)} + \Theta_{(2)} \frac{\Theta_{(2)}^T \mathbf{V}_s}{H_2(p_{20}^2 - 9p_{s0}^2)}, \quad (3.4.13)$$

причем здесь  $n = 1$  при  $s = 2$  и напротив  $n = 2$  при  $s = 1$ . Как и ранее, здесь выписано «регуляризованное колебание», которое учитывает, что при построении решения по заданной форме колебаний  $\Theta_{(s)}$  сама она уже сбалансирована в силу (3.4.6). Поэтому в выражении для  $\mathbf{u}_s$  удерживается только слагаемое, отвечающее другой форме колебаний. Кроме того, следует подчеркнуть, что частоты малых колебаний различаются в максимальной степени при  $\alpha = 0$ , когда  $p_{20}/p_{10} = \sqrt{2} + 1 \approx 2.4142$ , и это отношение уменьшается до значения  $p_{20}/p_{10} = \sqrt{5/3} \approx 1.2910$  с увеличением  $\alpha$  от 0 до  $\pi/2$ . Следовательно, знаменатели дробей в формуле (3.4.13) для  $\mathbf{v}_s$  не могут обращаться в нуль, что обеспечивает корректность построенного решения для рассматриваемого двойного маятника с неколлинеарными шарнирами. Суммируя выражения (3.4.12) и (3.4.4), получим решение с желаемой точностью:

$$\theta = \Theta_{(s)} a \cos \psi + \tilde{\theta}(a, \psi) = (\Theta_{(s)} a + \mathbf{u}_s a^3) \cos \psi + \mathbf{v}_s a^3 \cos 3\psi, \quad (3.4.14)$$

которое описывает движение системы по нелинейной форме колебаний. Следовательно, выражение для столбца обобщенных скоростей  $\dot{\theta}$  с учетом (3.4.5)

тогда будет иметь вид:

$$\dot{\theta} = -k_{s0} [(\Theta_{(s)}a + \tilde{\mathbf{u}}_s a^3) \sin \psi + \tilde{\mathbf{v}}_s a^3 \sin 3\psi], \quad (3.4.15)$$

где сделаны следующие обозначения:  $\tilde{\mathbf{u}}_s = \mathbf{u}_s + \rho_s \Theta_{(s)}$  и  $\tilde{\mathbf{v}}_s = 3\mathbf{v}_s$ .

Чтобы убедиться в корректности полученного решения, следует проверить постоянство полной механической энергии системы с необходимой точностью. Учитывая, что точные выражения для кинетической и потенциальной энергий соответственно есть (2.2.8) и (2.2.10), разложим входящие в них тригонометрические функции в ряды Тейлора, в результате чего получим:

$$E = \frac{1}{2}ml^2 \left[ (5 - (1 + \sin^2 \alpha)\theta_2^2) \dot{\theta}_1^2 + \cos \alpha (4 - \theta_2^2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2 \right] + \quad (3.4.16)$$

$$+ \frac{1}{2}mgl \left[ 3\theta_1^2 - \frac{\theta_1^4}{4} + \theta_2^2 - \frac{\theta_2^4}{12} - \frac{\theta_1^2 \theta_2^2}{2} + 2 \cos \alpha \theta_1 \theta_2 \left( 1 - \frac{\theta_1^2}{6} - \frac{\theta_2^2}{6} \right) \right].$$

Принимая во внимание формулы (3.4.14) и (3.4.15), можно получить выражение для полной энергии с точностью до слагаемых четвертого порядка малости по  $a$ :

$$E = E_{s0}(1 + \delta_s a^2), \quad E_{s0} = \frac{1}{2}mglH_s p_{s0}^2 a^2, \quad (3.4.17)$$

которое не зависит от  $\psi$ . Это обстоятельство можно проверить с использованием вычислительных процедур в любой компьютерной программе, поскольку аналитические вычисления здесь оказываются слишком трудоемкими. Отметим, что  $E_{s0}$  в (3.4.17) представляет полную механическую энергию в линейной модели, а зависимость коэффициента  $\delta_s$  от угла  $\alpha$  также может быть получена с помощью численных процедур.

**Обсуждение результатов.** Рассмотрим далее детально первую нелинейную форму колебаний, представляющую, как уже говорилось выше, основное практическое значение. Построим зависимость поправочного коэффициента  $\rho_1$  от угла  $\alpha$ . Она представлена на рис. 3.13. Нетрудно проверить полученные результаты в частных случаях  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi/2$ , которые были рассмотрены выше. При  $\alpha = 0$  имеем согласно (3.4.10)  $\rho_1 = -(31 - 20\sqrt{2})/32 \approx -0.0849$ , что согласуется с выражением (3.3.13), а при  $\alpha = \pi/2$  получаем  $\rho_1 = -1/16 = -0.0625$ , как это и должно быть исходя из формулы (3.2.10). Данные значения хорошо просматриваются на рис. 3.13.

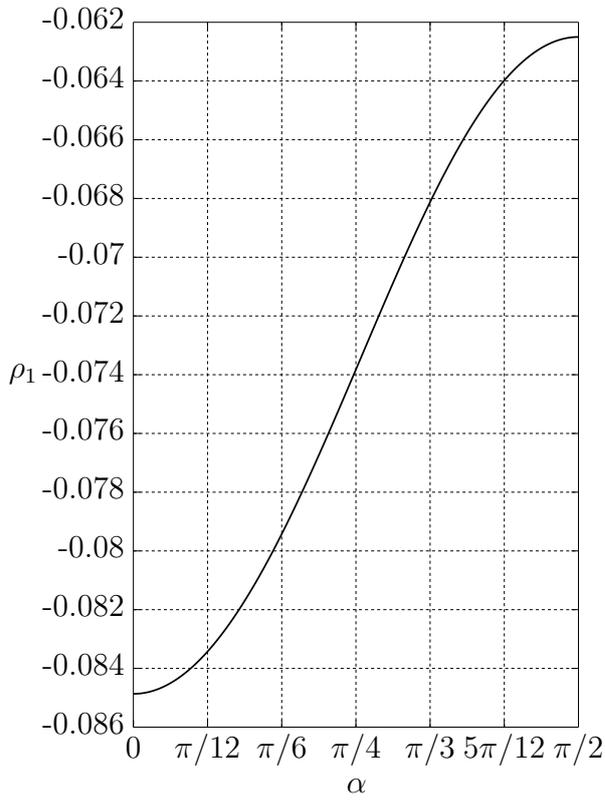


Рис. 3.13. График зависимости величины  $\rho_1$  от угла  $\alpha$

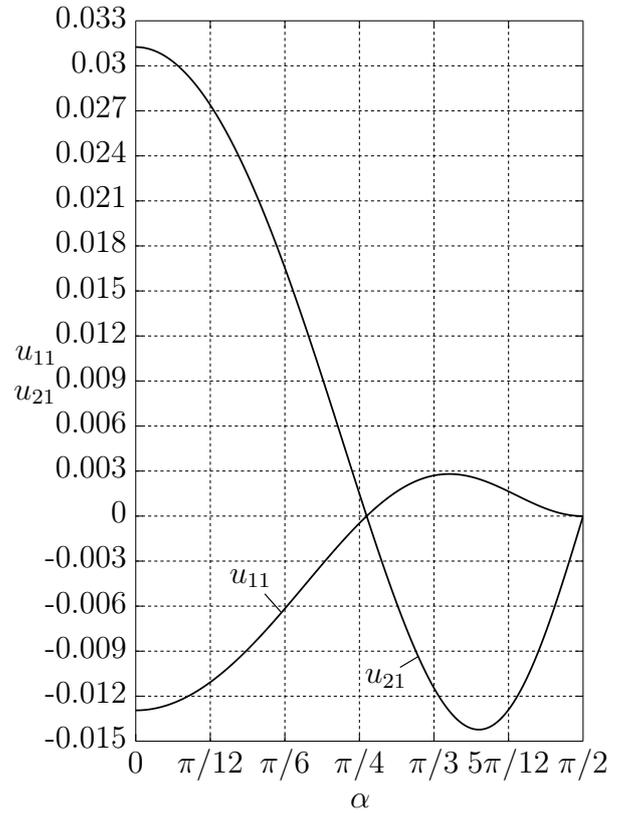


Рис. 3.14. Графики зависимости величин  $u_{11}$  и  $u_{21}$  от угла  $\alpha$

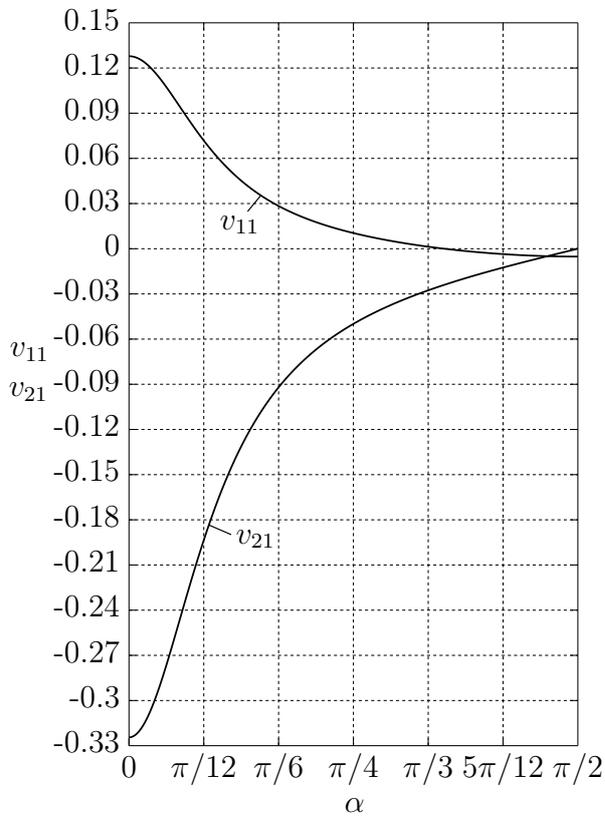


Рис. 3.15. Графики зависимости величин  $v_{11}$  и  $v_{21}$  от угла  $\alpha$

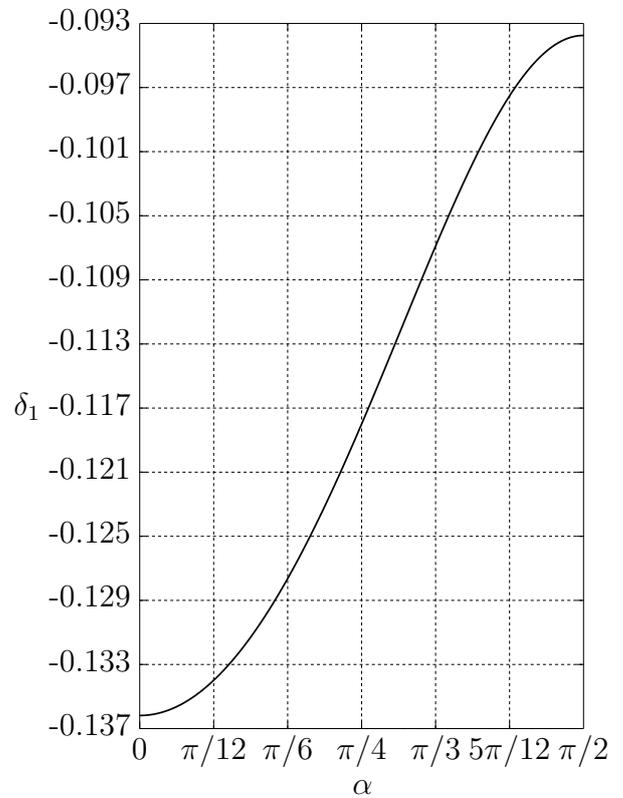


Рис. 3.16. График зависимости величины  $\delta_1$  от угла  $\alpha$

Обсудим теперь зависимости элементов столбцов  $\mathbf{u}_1 = [u_{11}, u_{21}]^T$  и  $\mathbf{v}_1 = [v_{11}, v_{21}]^T$ , которые характеризуют поправочные слагаемые в формуле (3.4.14), от угла  $\alpha$ . Они представлены графически на рис. 3.14 и 3.15 соответственно. В случае  $\alpha = 0$  находим из (3.4.13) значения:  $u_{11} = (1 - \sqrt{2})/32 \approx -0.0129$ ,  $u_{21} = 1/32 = 0.03125$ ,  $v_{11} = (552\sqrt{2} - 437)/2688 \approx 0.1278$  и, наконец,  $v_{21} = (1013 - 1333\sqrt{2})/2688 \approx -0.3245$ . Для проверки этих результатов следует сопоставить их полученными ранее значениями. Напомним, что при исследовании варианта  $\alpha = 0$  мы принимали в качестве обобщенных координат абсолютные углы отклонения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  звеньев маятника от вертикали. Как указывалось выше, эти углы связаны с углами поворота в шарнирах соотношениями  $\varphi_1 = \theta_1$ ,  $\varphi_2 = \theta_1 + \theta_2$ , и это следует принимать во внимание при вычислении величин  $u_{11}$ ,  $u_{21}$ ,  $v_{11}$ ,  $v_{21}$  из формулы (3.4.14) для случая плоского двойного маятника. Обращаясь к формулам (3.3.24) и (3.3.25), нетрудно проверить, что указанные значения действительно принимают при  $\alpha = 0$  те самые значения, что были выписаны выше. Что же касается случая  $\alpha = \pi/2$ , то для него из (3.4.13) находим:  $u_{11} = u_{21} = v_{21} = 0$  и  $v_{11} = -1/192 \approx -0.005208$ , что полностью согласуется с формулой (3.2.14). Все эти значения легко видеть на рис. 3.14 и 3.15. Отметим также, что условия  $u_{11} = 0$  и  $u_{21} = 0$  имеют место одновременно в том случае, когда выполнено условие  $\Theta_{(2)}^T \mathbf{U}_1 = 0$ , т. е. при  $\alpha = 0.8108$ .

Зависимость коэффициента  $\delta_1$  в выражении для полной энергии от угла  $\alpha$  приведена на рис. 3.16. В частности, мы имеем  $\delta_1 = (20\sqrt{2} - 37)/64 \approx -0.1362$  при  $\alpha = 0$  и  $\delta_1 = -3/32 = -0.09375$  при  $\alpha = \pi/2$ , и эти значения полностью согласуются с формулами (3.3.29) и (3.2.19).

Далее представим фазовый портрет при движении системы по первой нелинейной форме, например, при  $\alpha = \pi/6$ , рассматривая движение изображающей точки в проекции на плоскости  $(\theta_1, \dot{\theta}_1/k_{10})$  и  $(\theta_2, \dot{\theta}_2/k_{10})$ . Ограничимся здесь демонстрацией плавного перехода от линейной формы к нелинейной, строя фазовые траектории с не очень большим уровнем энергии. Для построения этих траекторий следует использовать формулы (3.4.14) и (3.4.15). Кроме того, сравним качественно и количественно полученное решение с численным, построенным с помощью численного интегрирования. Для численного определения нелинейной формы, как обычно, можно задавать начальные значения  $\theta_{10}$  и  $\theta_{20}$  углов  $\theta_1$  и  $\theta_2$  без задания начальных скоростей, и эти значения

должны быть выбраны так, чтобы они отвечали периодическому движению, частота которого должна быть близка к линейному значению  $k_{10}$ . Наконец, фазовые траектории в аналитическом и численном решении должны соответствовать одному и тому же уровню энергии. Вновь вводя безразмерную энергию  $\varepsilon = E/(mgl)$ , устанавливаем, что для заданных начальных условий в численном решении она определяется выражением:

$$\varepsilon = 3 - (2 + \cos \theta_{20}) \cos \theta_{10} + \cos \alpha \sin \theta_{20} \sin \theta_{10}, \quad (3.4.18)$$

которое следует из (2.2.10), и, в то же время, в приближенном аналитическом решении согласно (3.4.17) она имеет вид:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} H_1 p_{10}^2 (1 + \delta_1 a^2) = 1.8924 a^2 (1 - 0.1276 a^2), \quad (3.4.19)$$

где выписаны конкретные значения коэффициентов, отвечающие  $\alpha = \pi/6$ . Фазовые портреты представлены на рис. 3.17 и 3.18. Здесь сплошные линии соответствуют приближенным аналитическим результатам, а кружки – результатам численного интегрирования, причем они отвечают значениям, взятым через равные промежутки времени. Видно, что имеется хорошее соответствие между численными и аналитическими результатами. Кроме того, форма фазовых траекторий с увеличением уровня энергии становится все более и более отличной от круговой. Это можно особенно хорошо увидеть по рис. 3.18, хотя значения  $\theta_2$  и  $\dot{\theta}_2/k_{10}$  являются здесь достаточно малыми. Тем не менее, влияние нелинейности здесь оказывается весьма существенным.

Наконец, для большей наглядности построим графики зависимости величин углов  $\theta_1$  и  $\theta_2$  и безразмерных угловых скоростей  $\dot{\theta}_1/k_{10}$  и  $\dot{\theta}_2/k_{10}$ , где  $k_{10}/k = p_{10} = 0.7672$  при  $\alpha = \pi/6$ , от фазового угла  $\psi$  при его изменении от 0 до  $2\pi$ , которые соответствуют траектории с наибольшим уровнем энергии из тех, что были приведены выше. Чтобы перейти от времени  $t$  к аналогичной величине в численном решении по формуле  $\psi = k_1 t$ , необходимо знать частоту нелинейных колебаний в этом решении:  $k_1/k = 0.7415$ . Отметим, что в приближенном аналитическом решении согласно формуле (3.4.5) это значение равно  $k_1/k = 0.7405$ , т. е. практически не отличается от численного. Указанные зависимости приведены на рис. 3.19, и они наглядно отражают процесс движения системы по первой нелинейной форме, демонстрируя адекватное соответствие между аналитическими и численными результатами. Видно, что

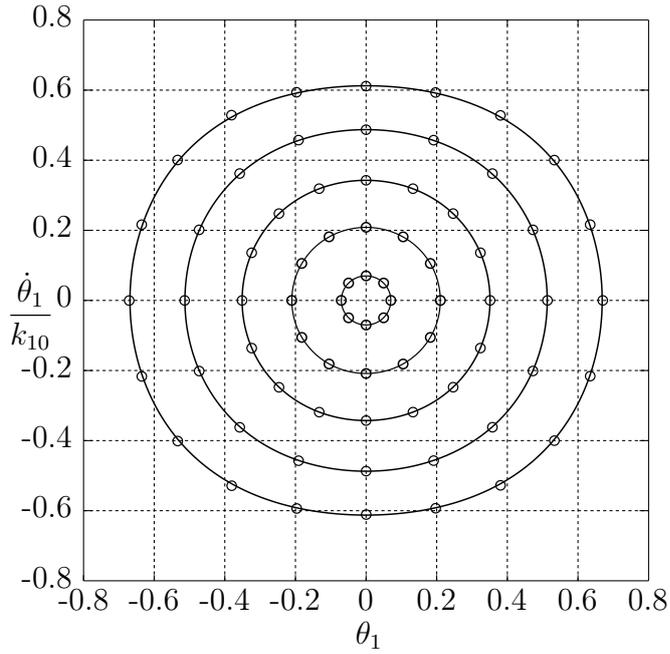


Рис. 3.17. Фазовый портрет для координаты  $\theta_1$ : сплошные линии – приближенные аналитические результаты,  $\circ$  – численное решение

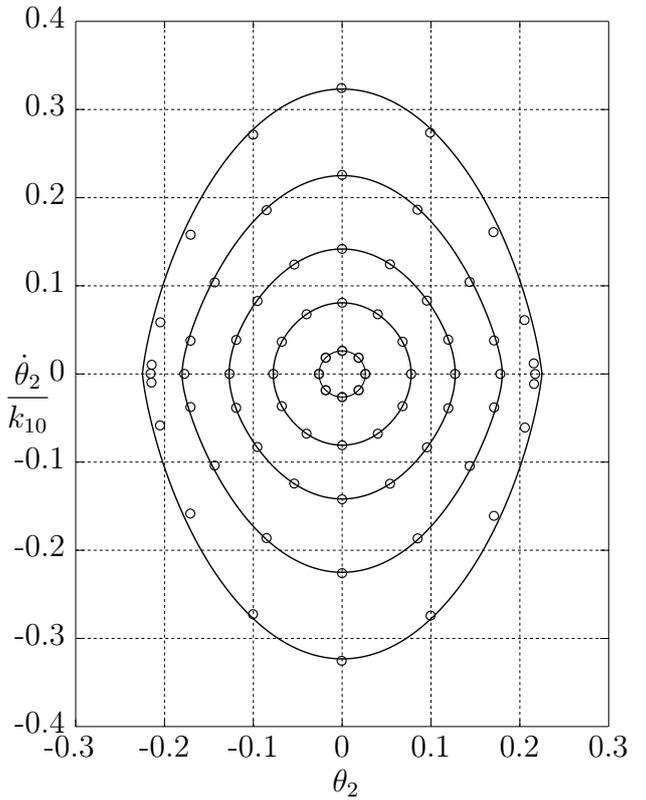


Рис. 3.18. Фазовый портрет для координаты  $\theta_2$ : сплошные линии – приближенные аналитические результаты,  $\circ$  – численное решение

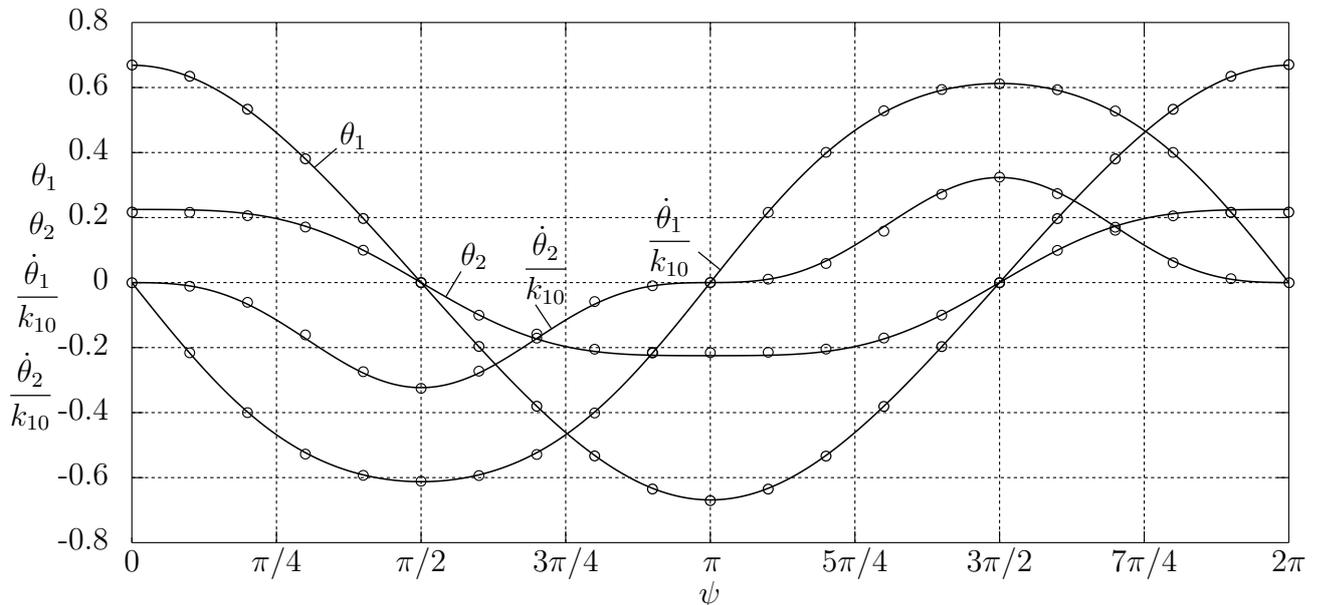


Рис. 3.19. Графики зависимости  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\dot{\theta}_1/k_{10}$  и  $\dot{\theta}_2/k_{10}$  от  $\psi$ : сплошные линии – приближенные аналитические результаты,  $\circ$  – численное решение

приведенные зависимости также имеют намного более сложную структуру, чем при движении системы по линейной форме колебаний.

### 3.5. Выводы по третьей главе

Построенные в настоящей главе приближенные аналитические решения для частот и форм колебаний двойного маятника с неколлинеарными шарнирами позволяют с единых позиций рассматривать плавный переход от его линейной модели к нелинейной и наоборот. Для общего случая решение было получено только в первом приближении, тогда как для частных вариантов ортогонального и плоского двойного маятника удалось построить решение в двух приближениях. Эти приближения демонстрируют, что при учете нелинейных эффектов движение системы по форме колебаний является периодическим и представляет собой сумму нескольких гармонических составляющих. При этом первое приближение описывается достаточно компактными выражениями и дает качественно корректную картину изменения ключевых параметров нелинейной формы, тогда как второе приближение, являясь более громоздким по своей структуре, позволяет получить более точные результаты в количественном отношении. Несомненным достоинством всех приведенных выражений является их удобное формульное представление и адекватное соответствие результатам численного интегрирования, а также наглядная графическая интерпретация частот колебаний, соотношения амплитуд колебаний, фазовых портретов, обобщенных координат и безразмерных обобщенных скоростей на одном периоде колебаний.

Полученные результаты могут оказаться необходимыми при разработке и конструировании разнообразных устройств современной робототехники, в первую очередь, пространственных манипуляторов, которые могут совершать колебания с достаточно большими амплитудами. Кроме того, существенная ценность этих результатов заключается в том, что они важны для дальнейших исследований, и в первую очередь, для задач адекватного управления рабочими движениями подобных манипуляторов. Это связано с тем, что в данном случае необходимо предусматривать переходные разгонные режимы от их малых колебаний по какой-либо форме к большим, где резко возрастает роль нелинейных слагаемых в общей картине поведения, и для этого необходимо иметь развернутое представление о качественном и количественном характере этих движений.

# 4. Коллинеарное управление формами колебаний пространственного двойного маятника

## 4.1. Принципы формирования рациональных управляющих воздействий

Управление колебаниями маятниковых конструкций является одним из основных направлений современной теории управления, и этому вопросу посвящено большое количество публикаций. При этом особый интерес представляют управляемые процессы в маятниковых системах с несколькими степенями свободы. Это связано с тем, что в данном случае для достижения тех или иных целей необходимо уделять более пристальное внимание к формированию управляющих воздействий, чем при исследовании систем с одной степенью свободы. В частности, значительное число работ посвящено управлению движениями двойного маятника и его модификациями [3, 88, 94, 120].

Ясно, что одной из важнейших задач является указание принципов формирования достаточно простого закона управления, который позволил бы подобным механическим системам раскачиваться по каждой из ее форм колебаний в отдельности с постепенным переходом из линейной области в нелинейную. Именно такой путь следует признать рациональным, поскольку при его реализации вся подводимая в систему энергия будет направляться на раз-

вите только одной формы колебаний без возбуждения других форм. В этом случае важно также обеспечить постепенный переход системы к желаемому режиму ее функционирования, который обычно соответствует некоторому заданному уровню энергии и представляет собой регулярное периодическое движение с достаточно большой амплитудой. Как уже говорилось ранее, эти движения являются наиболее ценными из всех возможных режимов движения нелинейных систем, поскольку они рекомендуются для практического использования в работе манипуляторов и других робототехнических устройств. В этой связи основной целью данной главы является построение и изучение закона управления, обладающего указанными свойствами.

Как уже было отмечено, частоты колебаний нелинейных систем начинают дрейфовать при увеличении амплитуд колебаний, при этом также постепенно начинают изменяться и формы колебаний. Поэтому традиционные методы раскачивания системы, т. е. организации ее резонансных колебаний, связанные с гармоническим возбуждением в виде заданной программы во времени с наперед заданной частотой и широко используемые в линейных системах, оказываются здесь непригодными, поскольку при этом будет нарушено главное условие возникновения резонансного процесса – действие внешней силы в «такт» с собственными колебаниями системы. Это означает, что для организации истинно резонансных эффектов в нелинейных системах необходимо создавать управляющие воздействия в соответствии с состоянием системы, т. е. когда частота возбуждения не предписывается извне, а подается на привод возбуждения в виде сигнала контура обратной связи [65]. Такой управляемый резонансный режим хорошо известен для систем с одной степенью свободы, и его исследования начинаются с фундаментального труда [4], где для него было предложено наименование «авторезонанс». Этот управляемый режим обеспечивает то обстоятельство, что частота и фаза сигнала обратной связи будут точно соответствовать текущей частоте и фазе колебаний системы, ввиду чего ей будет передаваться вся поступающая в систему энергия. Однако термин «авторезонанс» долгие годы оставался практически незамеченным, и интерес к этому понятию начал постепенно возрастать лишь в последние несколько десятилетий [5, 32]. Например, работы [109, 110] посвящены резонансу с обратной связью. Главной трудностью при практической реализации авторезонанса является необходимость использовать контур обратной связи

для того, чтобы формировать требуемый закон управления приводом.

Известно, что для систем с одной степенью свободы формирование авторезонансного закона управления можно осуществить множеством различных способов, в каждом из которых будет происходить монотонное нарастание полной энергии системы [108]. Что касается многомерных нелинейных систем, то в этом случае организация такого разгонного режима оказывается намного более сложной. Резонанс с обратной связью в указанных системах изучается, например, в [102]. В данной ситуации трудности возникают именно из-за того, что подобные механические системы имеют несколько колебательных степеней свободы, т. е. несколько собственных частот и форм колебаний. Как уже говорилось выше, для разгона системы в этом случае следует не просто наращивать энергию системы, но и иметь возможность осуществлять разгон системы по одной из форм ее свободных колебаний в отдельности. В противном случае подводимая в систему энергия пойдет на возбуждение сразу всех форм, что приведет к резкому снижению резонансных свойств управления и качества процессов разгона. Это означает, что требуемое управление не должно нарушать формы малых колебаний системы и допускать постепенный переход каждой из форм колебаний в соответствующую нелинейную форму, раскачивая при этом систему с малых амплитуд до достаточно больших. Отметим, что сохранение топологической структуры формы нелинейных колебаний приобретает чрезвычайно важное значение для беговых форм движения живых организмов при амплитудах раскачивания конечностей, достигающих вплоть до достаточно больших значений. Поэтому требуемое управление будет иметь чрезвычайно важную роль в задачах биомеханики и робототехники, где переход от шаговых к беговым амплитудам возможен только в режиме авторезонанса, причем и при ходьбе, и при беге движение остается одночастотным, хотя его частота постепенно изменяется, а вместе с ней происходит и плавное изменение формы колебаний. Следовательно, построенные указанным образом управляющие воздействия будут иметь большое практическое значение и смогут найти применение при беге андроидов, где создание нелинейного резонансного режима играет первостепенную роль [81], так что их формирование и анализ представляется весьма актуальной задачей.

## 4.2. Формирование управляющих воздействий по принципу коллинеарного управления

Перейдем к исследованию управляемых движений пространственного двойного маятника. Будем полагать, что в обоих его шарнирах установлены датчики, которые могут считывать информацию о переменных состояния, т. е. значениях  $\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2$ , отвечающих текущей конфигурации системы. На основе данных значений и формируются по принципу обратной связи управляющие моменты, действующие в шарнирах маятника. Запишем нелинейное матричное уравнение управляемого движения системы, добавляя в правую часть уравнения (2.2.11) столбец управляющих воздействий  $\mathbf{Q}$ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\theta}} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \mathbf{Q}. \quad (4.2.1)$$

Чтобы разобраться, как именно следует формировать закон управления по принципу обратной связи, установим сначала энергетическое соотношение, домножив уравнение (4.2.1) на строку  $\dot{\boldsymbol{\theta}}^T$  слева. Полученное при этом равенство можно преобразовать, учитывая, что согласно (2.2.8) и (2.2.10) имеем  $T = T(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$ ,  $\Pi = \Pi(\boldsymbol{\theta})$ , и, кроме того, принимая во внимание выражения:

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} \right) = \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} + \ddot{\boldsymbol{\theta}}^T \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}}, \quad \frac{dT}{dt} = \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \ddot{\boldsymbol{\theta}}^T \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}}, \quad \frac{d\Pi}{dt} = \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\theta}}. \quad (4.2.2)$$

В результате получим следующее соотношение:

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} - T + \Pi \right) = \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{Q}. \quad (4.2.3)$$

Поскольку  $T$  есть квадратичная форма обобщенных скоростей, то

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}^T \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} = \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}} = 2T, \quad (4.2.4)$$

после чего из (4.2.3) окончательно приходим к простому энергетическому соотношению:

$$\dot{E} = \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{Q}, \quad (4.2.5)$$

где  $E = T + \Pi$  – полная механическая энергия системы. Отсюда следует очевидный вывод, что для нарастания энергии необходимо выбирать столбец

управляющих воздействий  $\mathbf{Q}$  таким образом, чтобы было выполнено условие

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{Q} \geq 0. \quad (4.2.6)$$

Казалось бы, наиболее простой путь состоит здесь в том, чтобы выбрать столбец управляющих воздействий пропорционально столбцу угловых скоростей, т. е. в виде

$$\mathbf{Q} = \gamma \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad (4.2.7)$$

где  $\gamma$  – коэффициент усиления, который в простейшем варианте является постоянной величиной. Ясно, что в таком случае энергетическое соотношение (4.2.6) примет вид:

$$\dot{E} = \gamma \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \dot{\boldsymbol{\theta}} = \gamma \|\dot{\boldsymbol{\theta}}\|^2 \geq 0, \quad (4.2.8)$$

где  $\|\dot{\boldsymbol{\theta}}\| = \sqrt{\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2}$  – норма столбца  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ , и это соотношение будет выполнено при любом положительном значении  $\gamma$ . Легко понять, что при таком формировании закона управления оно будет имитировать диссипативные силы вязкого трения в шарнирах маятника, взятые с противоположными знаками. На основании анализа диссипативной модели рассматриваемого пространственного двойного маятника, проведенного в главе 2, можно заключить, что в этом случае в рамках линейной модели при значениях  $\gamma$ , обеспечивающих колебательный характер движения, вторая форма будет нарастать гораздо быстрее, чем первая. Это означает, что если начальные условия движения будут заданы не точно соответствующими первой форме, то возбудится также и вторая форма, которая нарушит плавное нарастание первой формы и со временем начнет доминировать. Отметим, что подобное поведение будет свойственно и другим механическим системам, если вместо диссипативных сил вязкого трения в шарнирных сочленениях организовать аналогичные управляющие воздействия. В самом деле, обычно в колебательных системах со многими степенями свободы наличие трения в шарнирных сочленениях приводит к быстрому исчезновению высших форм колебаний [11], так что в случае управляемого процесса, организованного указанным образом, мы будем иметь противоположный эффект. Более того, как уже также упоминалось в главе 2, в рассматриваемой задаче диссипативные силы не нарушают собственных форм колебаний системы, однако в общем случае эти силы могут существенно их исказить. В то же время, крайне желательно сформировать

такое управление, которое можно бы рекомендовать к применению для широкого класса механических систем. Эти обстоятельства не позволяют рекомендовать закон управления (4.2.7) для практического использования, а потому вопрос о конструировании управления, которое не нарушало бы формы консервативных колебаний и позволяло бы равноправно раскачивать каждую их, становится более серьезным, чем это казалось на первый взгляд.

Чтобы сформировать управление, обладающее требуемыми резонансными свойствами, которые позволили бы передавать всю подводимую энергию на возбуждение только одной формы колебаний для произвольной колебательной механической системы, обратимся к физическим соображениям. Они подсказывают, что целесообразно прикладывать управляющие воздействия в «унисон» с силами инерции, возникающими при разгоне системы, при этом не изменяя их общего характера. Такой управляемый режим движения носит название *коллинеарного управления* [76]. В многомерной механической системе условие коллинеарности означает пропорциональность столбца управляющих воздействий  $\mathbf{Q}$  столбцу обобщенных импульсов системы  $\mathbf{K} = \partial T / \partial \dot{\boldsymbol{\theta}}$ :

$$\mathbf{Q} = \gamma \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}}, \quad (4.2.9)$$

где  $\gamma$  – коэффициент усиления, который в простейшем случае является постоянной величиной. Из структуры управления (4.2.9) видно, что оно является кинетическим, т. е. учитывает собственные динамические свойства системы [51]. Первоначально эта идея была применена к задаче о разгоне свободного твердого тела до определенного уровня угловой скорости посредством внешнего крутящего момента (например, при помощи газореактивных двигателей, укрепленных на корпусе несущего тела), построенного по принципу коллинеарного управления. Учитывая, что для твердого тела обобщенный импульс есть непосредственно вектор кинетического момента, то крутящий момент здесь формируется пропорционально кинетическому моменту [51]. Данный режим оказался крайне полезным, и, кроме того, оптимальным по таким критериям, как расход рабочего вещества или быстроедействие. Поэтому впоследствии он был использован для управления движением различных манипуляторов, где также продемонстрировал свою эффективность [76]. Все это побудило использовать данный метод для авторезонансного возбуждения и в многомерных колебательных системах, которые функционируют в

различных силовых полях. Выражение (4.2.5) с учетом (4.2.9) приводится к следующему виду:

$$\dot{E} = \gamma \dot{\theta}^T \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = 2\gamma T, \quad (4.2.10)$$

и поскольку кинетическая энергия есть положительно определенная квадратичная форма обобщенных скоростей, то при  $\gamma > 0$  имеет место разгон системы, а при  $\gamma < 0$  – ее торможение, как этого и следовало ожидать из физических соображений. Отметим, что при  $\gamma = \text{const} > 0$  коллинеарное управление можно трактовать и как диссипативные воздействия, взятые с обратным знаком, для которых диссипативная функция определяется выражением  $R = \gamma T$ . Ясно, что в этой аналогии речь идет уже о внешнем вязком трении, действующем на грузы маятника, причем в нашей задаче диссипативные коэффициенты будут равны  $b = \gamma m$ . Следует отметить еще одну важную особенность управления (4.2.9) – как и уравнения Лагранжа второго рода, оно будет иметь одинаковую формульную запись при любом выборе обобщенных координат. Поэтому, например, для исследования управляемого движения плоского двойного двойного можно принять  $\varphi$  в качестве столбца обобщенных координат, чтобы уравнения имели наиболее простую форму, и тогда столбец управляющих воздействий будет иметь вид  $\mathbf{Q} = \gamma \partial T / \partial \dot{\varphi}$ , где кинетическая энергия  $T$ , естественно, должна выражена через  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$  в виде (2.3.4) [41, 72, 73]. Следует иметь в виду, что при таком выборе столбец  $\mathbf{Q}$  уже не будет столбцом управляющих моментов в шарнирах, а будет просто столбцом обобщенных сил, отвечающих выбранным обобщенным координатам, но полученные уравнения будут описывать тот же самый управляемый процесс.

Уравнения движения пространственного двойного маятника при наличии коллинеарного управления можно получить, добавляя в правую часть (2.2.11) столбец (4.2.9). В результате придем к следующему к матричному уравнению управляемого движения системы:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})(\ddot{\boldsymbol{\theta}} - \gamma \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) = 0, \quad (4.2.11)$$

которое и является основным предметом дальнейшего исследования. Далее необходимо показать, что именно это управление удовлетворяет всем требованиям, которые были предъявлены выше, к чему мы и переходим.

### 4.3. Анализ линейной и нелинейной управляемых моделей при постоянном коэффициенте усиления

Прежде, чем непосредственно исследовать нелинейное уравнение (4.2.11), рассмотрим детально отвечающую ему линейную модель, полагая  $\gamma = \text{const}$ . Линеаризуя данное уравнение, получим следующее матричное уравнение:

$$\mathbf{A}_0(\ddot{\boldsymbol{\theta}} - \gamma\dot{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{C}_0\boldsymbol{\theta} = 0. \quad (4.3.1)$$

Разыскивая его решение в виде (2.5.4), приходим к линейному матричному уравнению относительно неизвестного столбца  $\boldsymbol{\Theta}$ :

$$[(\lambda^2 - \gamma\lambda)\mathbf{A}_0 + \mathbf{C}_0] \boldsymbol{\Theta} = 0, \quad (4.3.2)$$

для которого условие существования нетривиального решения имеет вид:

$$\det [(\lambda^2 - \gamma\lambda)\mathbf{A}_0 + \mathbf{C}_0] = 0. \quad (4.3.3)$$

Сопоставляя (4.3.3) с (2.4.6), можно установить, что решения характеристического уравнения (4.3.3) удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\lambda^2 - 2\delta\lambda + k_{s0}^2 = 0, \quad \delta = \frac{\gamma}{2}, \quad s = 1, 2. \quad (4.3.4)$$

Отсюда также следует важнейший вывод, что формы колебаний управляемой системы в рамках линейной модели остаются такими же, как и в исходной консервативной системе, т. е. не искажаются управляющими воздействиями. Это подтверждает сказанное ранее относительно ценности коллинеарного управления. Решая уравнения (4.3.4), находим корни характеристического уравнения (4.3.3) для рассматриваемой задачи:

$$\lambda_{1,2} = \delta \pm ik_1, \quad \lambda_{3,4} = \delta \pm ik_2, \quad (4.3.5)$$

где введены обозначения:

$$k_s = \sqrt{k_{s0}^2 - \delta^2}, \quad (4.3.6)$$

причем в зависимости от  $\delta$  величины  $k_s$  могут быть как вещественными, так и мнимыми. В случае, когда эти величины вещественны, они представляют собой частоты колебаний пространственного двойного маятника с учетом

коллинеарного управления, а в противном случае по форме  $\Theta_{(s)}$  будет иметь место уже аperiodическое движение. Как и для случая действия диссипативных сил, запишем выражения для безразмерных частот колебаний  $p_s = k_s/k$ :

$$p_s = \sqrt{p_{s0}^2 - \sigma^2}, \quad (4.3.7)$$

где  $\sigma = \delta/k$  – безразмерный управляющий коэффициент, причем  $\sigma > 0$  отвечает разгону системы, а  $\sigma < 0$  – ее торможению. Из (4.3.7) видно, что величины  $p_1$  и  $p_2$  являются вещественными, если соответственно выполняются условия:

$$p_s \in R \Rightarrow |\sigma| < \sigma_{s0} = p_{s0}. \quad (4.3.8)$$

Отсюда вытекает, что  $\sigma_{10} < \sigma_{20}$ , поэтому при увеличении  $|\sigma|$  сначала обратится в нуль первая частота, оставаясь согласно (4.3.7) всегда меньше второй. Графики зависимости величин  $p_1$  и  $p_2$  от  $|\sigma|$  представлены на рис. 4.1.

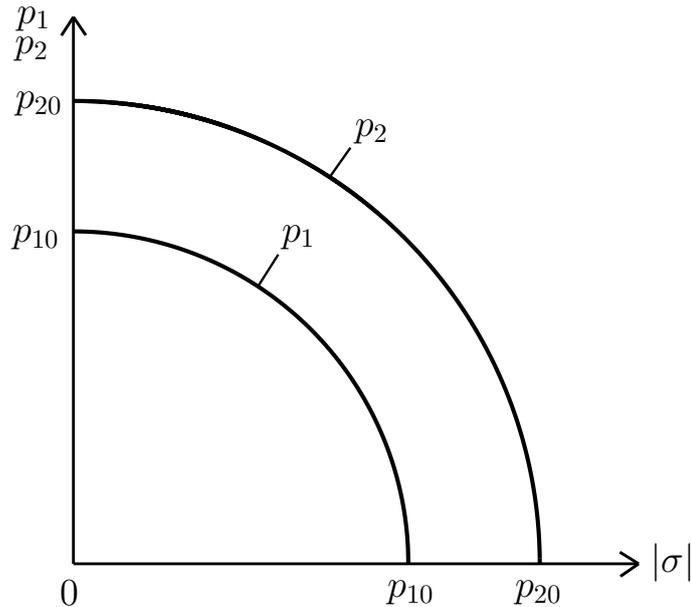


Рис. 4.1. Частоты колебаний пространственного двойного маятника с учетом коллинеарного управления

Таким образом, решение уравнения (4.3.1) можно записать в виде:

$$\theta = e^{\delta t} [\Theta_{(1)} (A_1 e^{ik_1 t} + B_1 e^{-ik_1 t}) + \Theta_{(2)} (A_2 e^{ik_2 t} + B_2 e^{-ik_2 t})], \quad (4.3.9)$$

где  $A_s$  и  $B_s$ ,  $s = 1, 2$  – комплексные константы интегрирования, причем как и в рассмотренном ранее случае диссипативной системы, из вещественности

$\theta$  следует, что  $B_s = \bar{A}_s$ . Эти константы определяются по аналогии с (2.5.28) и имеют следующие представления:

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{(-\delta + ik_s)\Theta_{(s)}^T \mathbf{A}_0 \theta_0 + \Theta_{(s)}^T \mathbf{A}_0 \dot{\theta}_0}{2ik_s N_s}, \\ B_s &= \frac{(\delta + ik_s)\Theta_{(s)}^T \mathbf{A}_0 \theta_0 - \Theta_{(s)}^T \mathbf{A}_0 \dot{\theta}_0}{2ik_s N_s}. \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

Очевидно, что все высказанные выше выводы относительно линейной модели коллинеарного управления носят общий характер и остаются справедливыми для произвольной колебательной механической системы, исходное линеаризованное уравнение которой описывается уравнением вида (2.4.1) [73].

Таким образом, коллинеарное управление при  $\delta > 0$  в линейной модели не нарушает форм колебаний исходной консервативной системы, а лишь усиливает их амплитуды. Поэтому при его помощи можно по отдельности раскачивать пространственный двойной маятник как по первой, так и по второй форме его колебаний, задавая соответствующие начальные условия. Наиболее важным для приложений представляется случай  $\delta \ll k_{10}$ , когда разгон системы осуществляется в не слишком быстром темпе, а частоты колебаний практически не отличаются от консервативного варианта. Именно эта ситуация и представляет основной практический интерес, когда малыми управляющими воздействиями можно раскачать систему до достаточно больших амплитуд. В этом случае все корни характеристического уравнения являются комплексно-сопряженными и имеют одинаковую вещественную часть  $\delta$ . Это означает, что амплитуды колебаний каждой из форм будут наращиваться по экспоненциальному закону абсолютно однотипно, а потому даже если начальные условия не будут заданы строго по одной из форм колебаний, то появившаяся в решении другая форма не сможет доминировать над основной формой и не внесет никакого заметного вклада в процесс разгона. Это обстоятельство также следует отнести к достоинствам коллинеарного управления.

Тем не менее, ясно, что при увеличении отклонений постепенно будет сказываться наличие нелинейных факторов, присутствующих в уравнении (4.2.11), и линейная теория уже не будет давать приемлемых результатов. При этом будет происходить плавный переход из линейной области в нелинейную по выбранной форме колебаний. Следует подчеркнуть, что этот процесс уже целиком зависит от особенностей системы и характера ее нелинейности.

Чтобы проиллюстрировать управляемые процессы при переходе из линейной области в нелинейную, приспособим уравнение (4.2.11) для численного интегрирования, разрешив его относительно столбца обобщенных ускорений:

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \gamma \dot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \left[ \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) \right]. \quad (4.3.11)$$

Естественно предположить, что если задать малые начальные условия, отвечающие линейной форме колебаний, то с течением времени можно будет наблюдать, как дрейфует частота и эволюционирует соответствующая форма колебаний с увеличением амплитуд колебаний. Например, для простоты можно положить, что при  $t = 0$  начальные условия задаются в виде:  $\boldsymbol{\theta}_0 = a_0 \boldsymbol{\Theta}_{(s)}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\theta}}_0 = 0$ , где величина  $a_0$  является достаточно малой. Отметим, что при выбранном законе управления будет происходить неограниченное наращивание полной механической энергии системы. Однако, как правило, конечной целью такого управления является выход системы на некоторый желаемый уровень энергии  $E_*$ , при котором амплитуды колебаний еще не слишком велики, а сами колебания имеют еще регулярный характер, близкий к периодическому, и пригодны для использования в конкретных практических целях. Нетрудно понять, что для обеспечения этого условия следует отключить управление при достижении заданного не столь высокого уровня энергии  $E_*$ , вследствие чего произойдет переход в требуемый консервативный режим движения.

Рассмотрим процессы разгона пространственного двойного маятника по первой и второй формам колебаний, начиная с малых отклонений, и сопоставим итоговые консервативные режимы с движением по нелинейным формам колебаний, которые были получены и проанализированы в главе 3.

**1. Ортогональный двойной маятник** ( $\alpha = \pi/2$ ). Как и ранее при исследовании нелинейных форм колебаний в консервативном варианте, обратимся сначала к исследованию ортогонального двойного маятника. Легко видеть, что в этом случае матричное уравнение движения (4.2.11) с учетом представлений (2.3.12) и (2.3.13) допускает два частных режима движения:

$$\ddot{\theta}_1 + k_{10}^2 \sin \theta_1 = \gamma \dot{\theta}_1, \quad \theta_2 \equiv 0, \quad k_{10} = \sqrt{\frac{3}{5}}k, \quad (4.3.12)$$

$$\ddot{\theta}_2 + k_{20}^2 \sin \theta_2 = \gamma \dot{\theta}_2, \quad \theta_1 \equiv 0, \quad k_{20} = k, \quad (4.3.13)$$

каждый из которых отвечает процессу управляемого движения обычного математического маятника при наличии управления, пропорционального углу-

вой скорости, которое фактически и представляет вязкое трение, взятое с противоположным знаком [71]. Видно, что в указанных режимах одна обобщенная координата может колебательно нарастать, в то время, как вторая обобщенная координата тождественно равна нулю, и эти режимы, очевидно, и соответствуют разгону по первой или второй формам колебаний ортогонального двойного маятника. Обращаясь, например, к уравнению (4.3.12), проинтегрируем его при помощи численных методов, задавая малые начальные условия. При этом будем полагать, что управление отключается при достижении энергией значения, соответствующего той фазовой траектории на фазовом портрете с рис. 3.2, которая обладает наибольшим уровнем энергии среди всех представленных на нем траекторий. Ясно, что в этом случае конечный консервативный режим в рассматриваемой простейшей задаче будет находиться в соответствии с зависимостями, приведенными на рис. 3.3. Поведение угла  $\theta_1$  и безразмерной угловой скорости  $\dot{\theta}_1/k_{10}$ , характеризующих управляемый процесс, приведено на рис. 4.2, причем по оси абсцисс здесь и на последующих графиках откладывается безразмерное время  $\tau = kt$ . Эти гра-

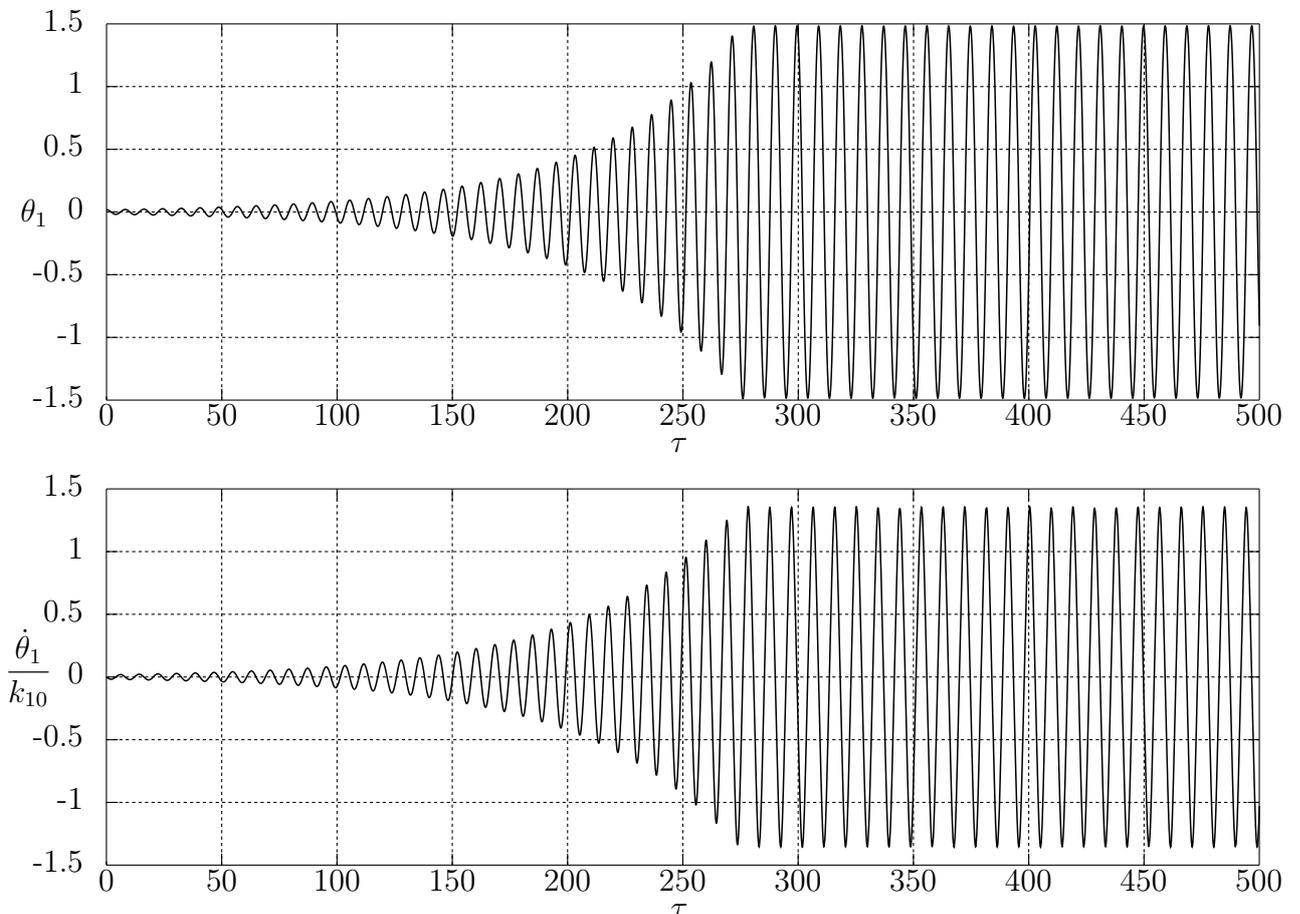


Рис. 4.2. Разгон ортогонального двойного маятника ( $\alpha = \pi/2$ )

фики отчетливо иллюстрируют разгон ортогонального двойного маятника по первой форме колебаний вплоть до значительных амплитуд, имея довольно ясный характер. Отметим, что те же зависимости можно получить и путем численного интегрирования матричного уравнения (4.3.11) при задании соответствующих начальных условий, в чем легко убедиться непосредственно.

**2. Плоский двойной маятник ( $\alpha = 0$ ).** Перейдем теперь к случаю плоского двойного маятника [72, 73]. Для этого обратимся к матричному

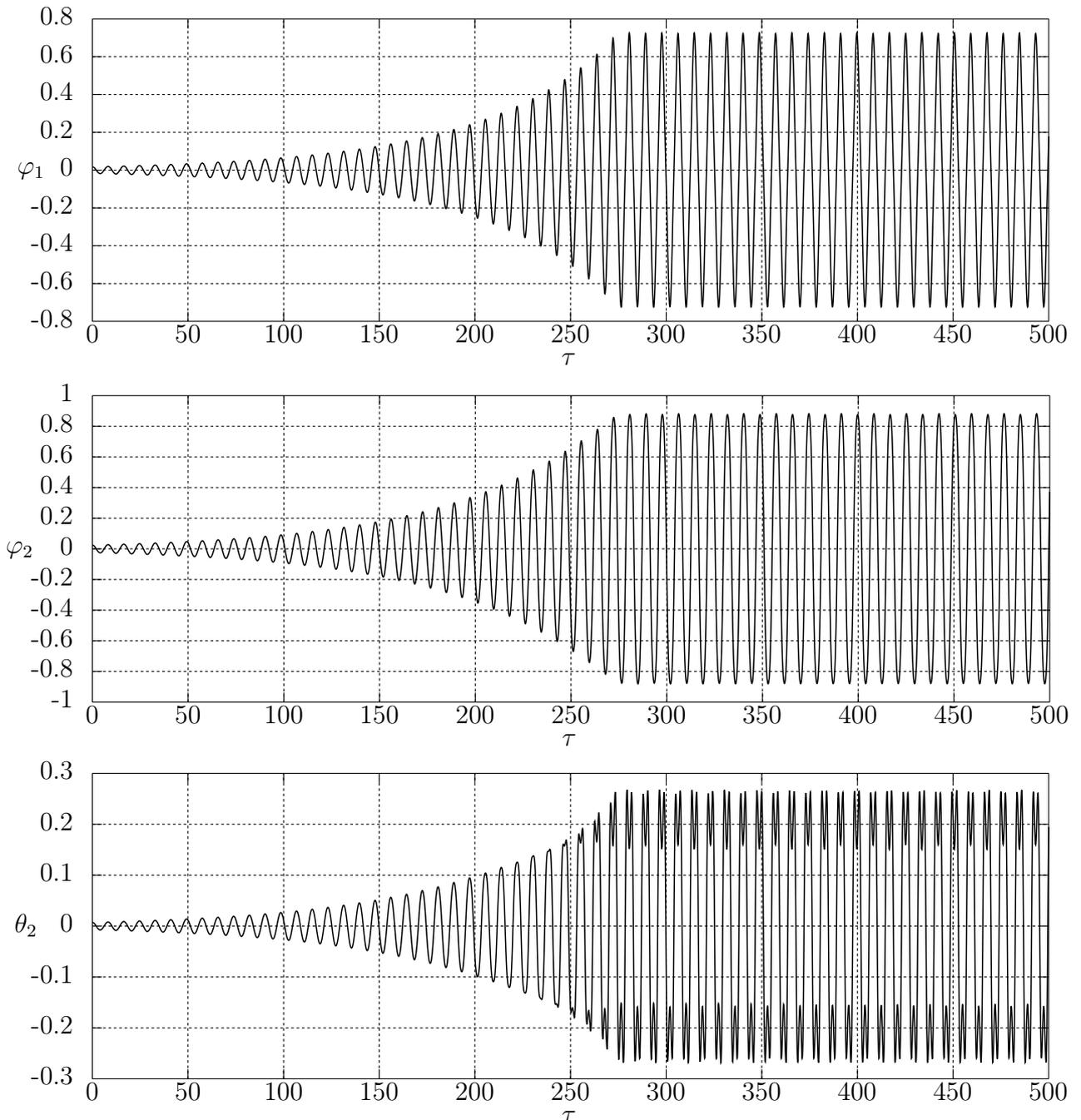


Рис. 4.3. Разгон плоского двойного маятника ( $\alpha = 0$ ) по первой форме колебаний: углы  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\theta_2$

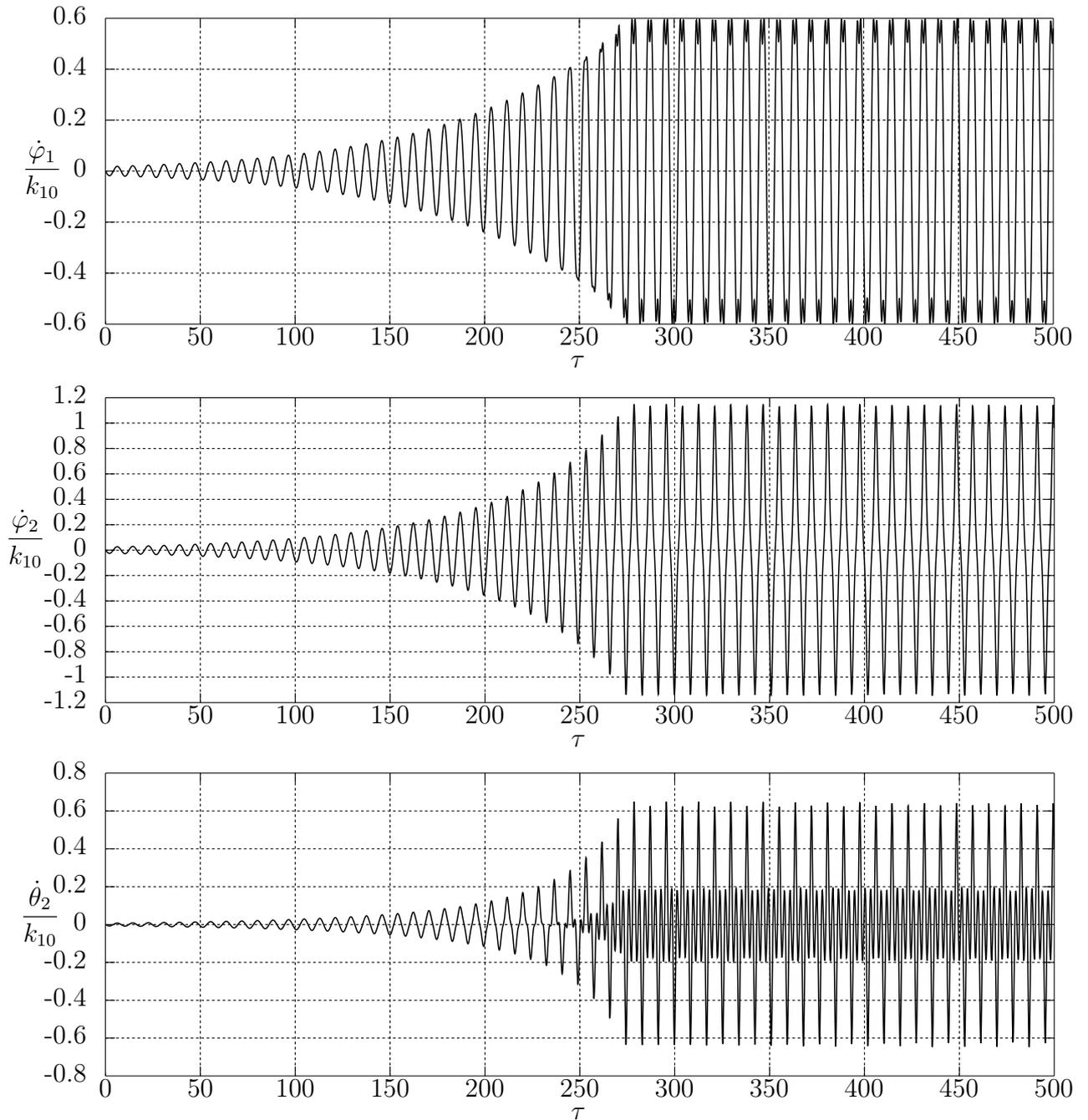


Рис. 4.4. Разгон плоского двойного маятника ( $\alpha = 0$ ) по первой форме колебаний: безразмерные угловые скорости  $\dot{\varphi}_1/k_{10}$ ,  $\dot{\varphi}_2/k_{10}$  и  $\dot{\theta}_2/k_{10}$

уравнению (4.3.11) и осуществим его численное интегрирование, задавая сначала малые начальные условия по первой форме колебаний. При этом будем полагать, что желаемый уровень энергии отвечает той фазовой траектории на фазовых портретах с рис. 3.6–3.8, которая обладает наибольшим уровнем энергии среди всех приведенных на них траекторий. В этом случае можно ожидать, что конечный консервативный режим будет находиться в соответствии с зависимостями, приведенными рис. 3.9 и 3.10. Картина, полученная в

результате численного исследования, изображена на рис. 4.3 и 4.4, где представлены соответственно графики зависимости углов  $\varphi_1 = \theta_1$ ,  $\varphi_2 = \theta_1 + \theta_2$  и  $\theta_2$  и безразмерных угловых скоростей  $\dot{\varphi}_1/k_{10}$ ,  $\dot{\varphi}_2/k_{10}$  и  $\dot{\theta}_2/k_{10}$  от безразмерного времени  $\tau$ . Видно, что процесс разгона плавно переводит линейную форму в нелинейную и выводит колебания на желаемый уровень энергии, причем конечный режим отвечает практически периодическому движению. Тем не менее, имеют место некоторые искажения, которые наиболее четко прослеживаются по графикам зависимости  $\theta_2$ ,  $\dot{\varphi}_1/k_{10}$  и  $\dot{\theta}_2/k_{10}$  от  $\tau$ , и они связаны с наличием у этих зависимостей более двух экстремумов на одном периоде колебаний, что подробно обсуждалось в главе 3. Нетрудно понять, что упомянутые искажения происходят вследствие достаточно интенсивного нарастания амплитуд при постоянном и даже очень малом коэффициенте усиления  $\gamma$  и резкого отключения управления при выходе на желаемый уровень энергии. Естественно, это сказывается на качестве управляемого процесса и не позволяет получить совершенно «чистые» нелинейные формы колебаний при столь высоком уровне достигнутой энергии и при столь сложной геометрии нелинейной формы колебаний при больших амплитудах колебаний. В дальнейшем будет рассмотрена модификация коллинеарного закона управления с регулируемым коэффициентом усиления  $\gamma$  в зависимости от уровня энергии, которая позволит получить существенно более плавные процессы разгона без видимых искажений конечной нелинейной формы.

Для полноты проиллюстрируем и разгон плоского двойного маятника по второй форме колебаний. Отвечающая ему картина приведена на рис. 4.5 и 4.6, где построены зависимости углов  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\theta_2$ , а также безразмерных угловых скоростей  $\dot{\varphi}_1/k_{20}$ ,  $\dot{\varphi}_2/k_{20}$  и  $\dot{\theta}_2/k_{20}$  от безразмерного времени  $\tau$ . Нетрудно видеть, что при разгоне системы по второй форме уже отсутствуют упомянутые выше эффекты, касающиеся наличия более двух экстремумов у каких-либо обобщенных координат или безразмерных обобщенных скоростей на одном периоде. Поэтому на выходе можно наблюдать консервативный режим, практически не отличающийся от периодического и не имеющий никаких заметных искажений. Это обстоятельство позволяет и в настоящей главе далее не обсуждать вторую форму колебаний, уделяя все внимание именно первой форме, которая представляет основное значение на практике и имеет достаточное количество нетривиальных особенностей.

Таким образом, разгон плоского двойного маятника по каждой из форм колебаний при помощи коллинеарного управления позволяет с увеличением отклонений звеньев маятника постепенно переводить линейную форму колебаний в нелинейную, а отключение управления в обоих случаях даже при достаточно большом уровне энергии переводит систему в нелинейный консервативный режим, который оказывается достаточно близким к периодическому и характеризуется весьма существенными амплитудами колебаний.

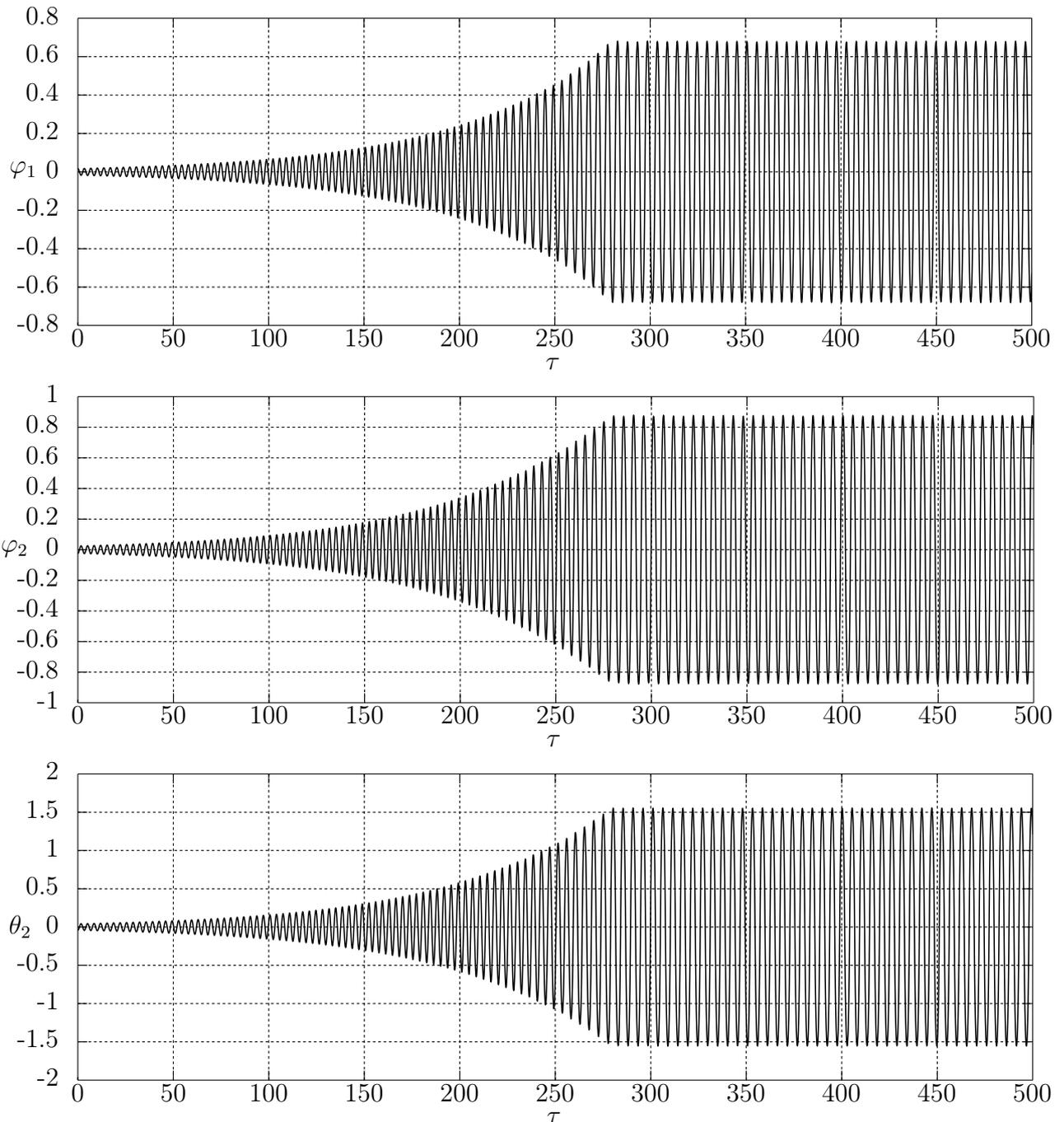


Рис. 4.5. Разгон плоского двойного маятника ( $\alpha = 0$ ) по второй форме колебаний: углы  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\theta_2$

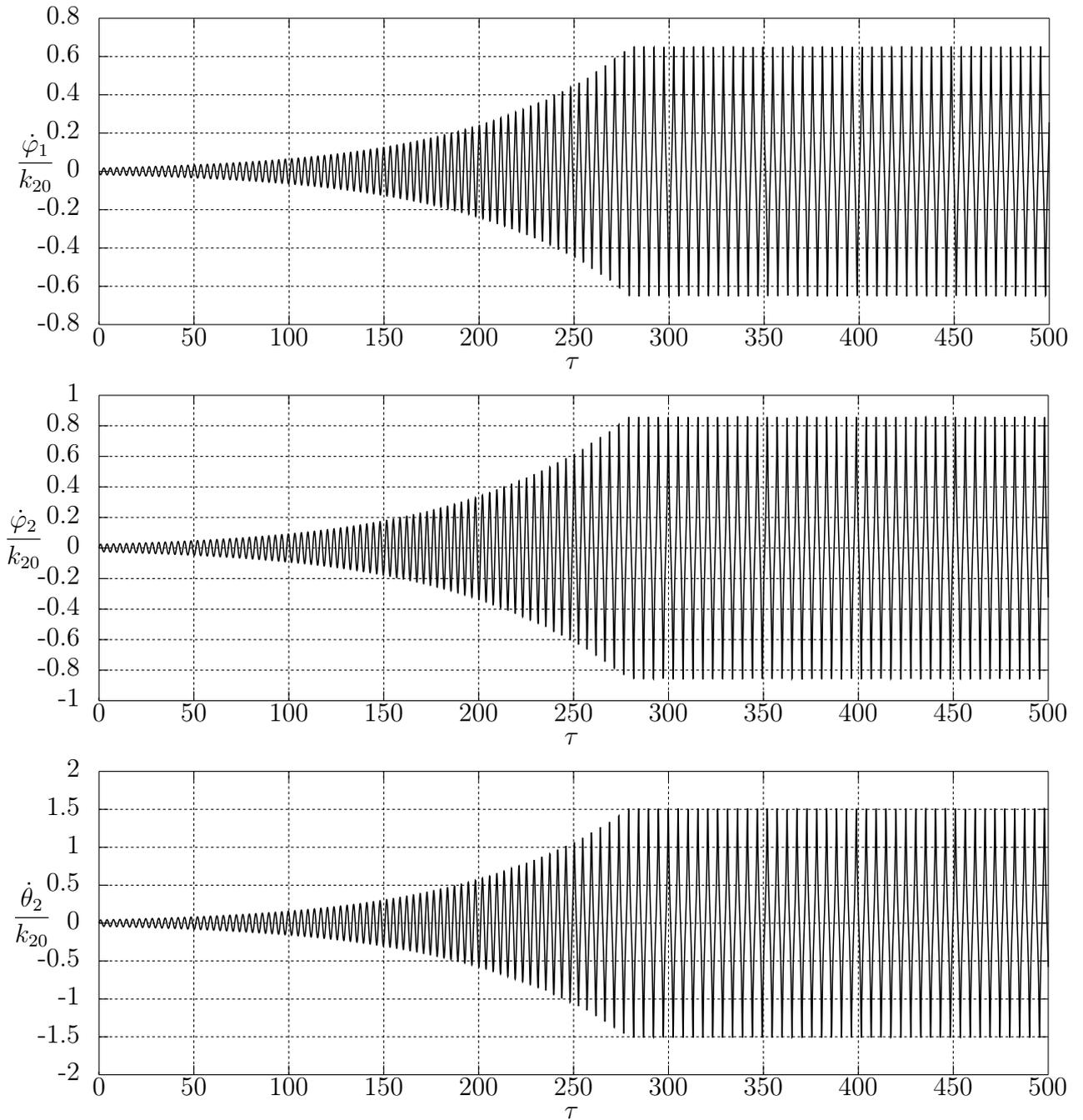


Рис. 4.6. Разгон плоского двойного маятника ( $\alpha = 0$ ) по второй форме колебаний: безразмерные угловые скорости  $\dot{\varphi}_1/k_{20}$ ,  $\dot{\varphi}_2/k_{20}$  и  $\dot{\theta}_2/k_{20}$

**3. Пространственный двойной маятник.** Наконец, рассмотрим процесс управляемого движения по первой форме колебаний для общего варианта пространственного двойного маятника. Примем для определенности, как и ранее в главе 3,  $\alpha = \pi/6$ . Будем считать, что желаемый уровень энергии отвечает той фазовой траектории на фазовых портретах с рис. 3.17–3.18, которая обладает наибольшим уровнем энергии среди всех приведенных на них траекторий. Поэтому можно предполагать, что конечный консерватив-

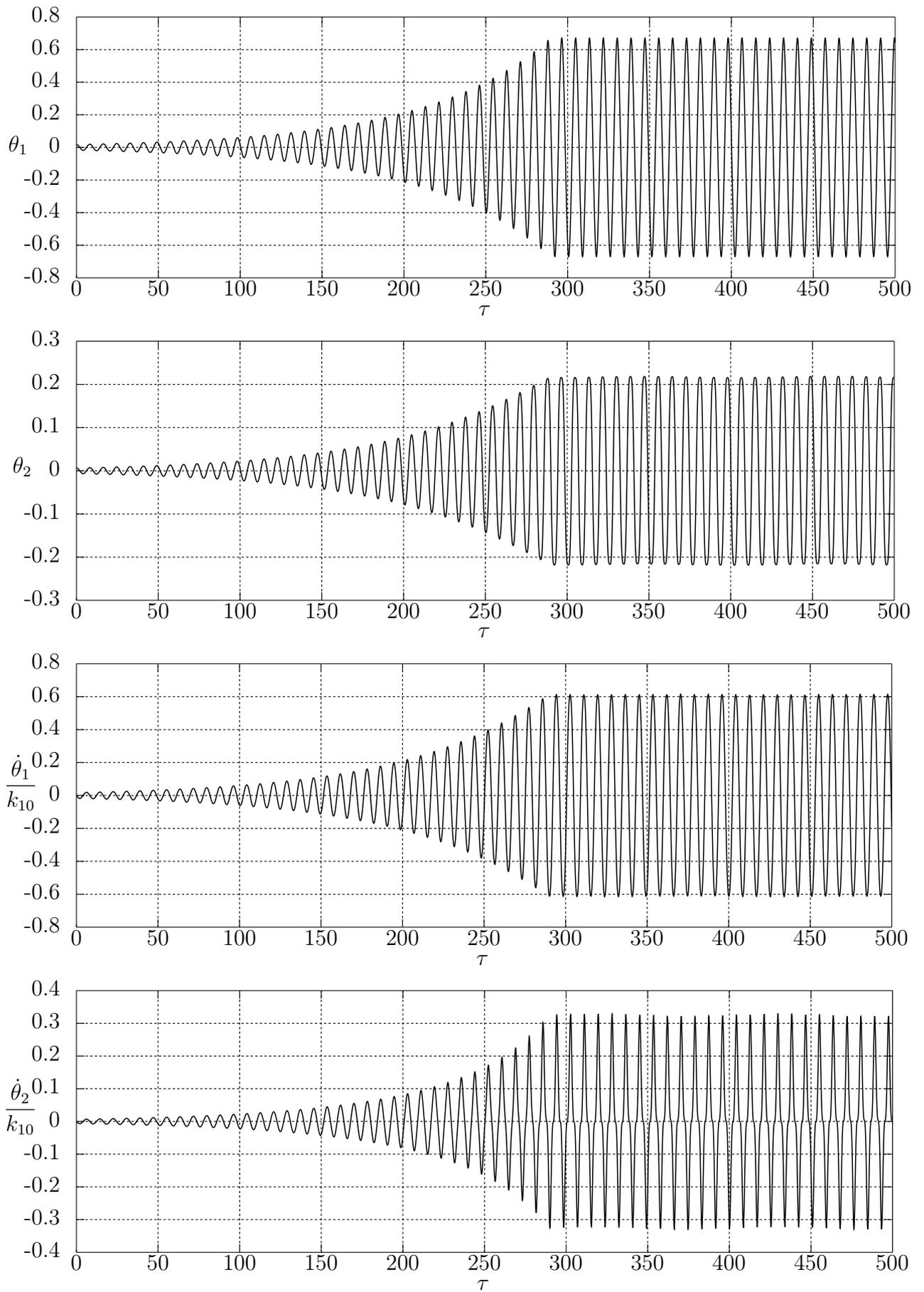


Рис. 4.7. Разгон пространственного двойного маятника ( $\alpha = \pi/6$ )

ный режим будет находиться в согласии с зависимостями, приведенными на рис. 3.19. Осуществляя численное интегрирование матричного уравнения (4.3.11), приходим к графикам на рис. 4.7, где изображены углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , а также безразмерные угловые скорости  $\dot{\theta}_1/k_{10}$  и  $\dot{\theta}_2/k_{10}$  в зависимости от безразмерного времени  $\tau$ . Эти графики также наглядно демонстрируют дрейф формы колебаний при постепенном переходе из линейной зоны в нелинейную посредством коллинеарного управления и выход колебаний на нелинейный консервативный режим, что в очередной раз подчеркивает целесообразность формирования управляющих воздействий подобным образом.

#### 4.4. Коллинеарное управление с переменным коэффициентом усиления

Как уже говорилось выше, коллинеарное управление с постоянным коэффициентом усиления  $\gamma$  даже при довольно малых его значениях приводит к весьма интенсивному наращиванию энергии с течением времени, которое резко прекращается при достижении желаемого значения  $E_*$ . В этой связи естественным образом возникает вопрос, каким образом необходимо модифицировать зависимость (4.2.9), чтобы добиться плавного выхода системы на установившийся режим с желаемым уровнем энергии  $E_*$  [140]? Ясно, что для этого следует постепенно понижать коэффициент усиления  $\gamma$  при приближении энергии к этому значению, т. е. формировать его в виде функции переменных состояния:  $\gamma = \gamma(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$ . Нетрудно понять, что эту зависимость можно выбирать различными способами, однако наиболее предпочтительным представляется вариант, аналогичный изложенному в [108]:

$$\gamma(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \gamma_0 \frac{E_* - E(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})}{mgl}, \quad (4.4.1)$$

где множитель  $mgl$  в знаменателе вводится из соображений размерности, так что постоянный коэффициент  $\gamma_0$  будет иметь ту же размерность, что и  $\gamma$ . Видно, что  $\gamma$  постепенно уменьшается до нуля при приближении энергии к значению  $E_*$ , поэтому в данной ситуации переход к установившемуся колебательному режиму будет являться плавным. Полагая, что функция (4.4.1) изменяется достаточно медленно, можно предположить, что это изме-

нение практически не будет сказываться на главном свойстве коллинеарного управления – сохранении форм колебаний исходной консервативной модели. Отметим еще раз, что это обстоятельство является решающим, поскольку основной задачей управляющего воздействия является именно развитие той или иной формы колебаний системы. В рассматриваемом случае уравнение управляемого движения сохраняет вид (4.2.11), где теперь  $\gamma$  определяется выражением (4.4.1), а полная энергия  $E(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$  – соотношением (2.2.14).

**1. Ортогональный двойной маятник ( $\alpha = \pi/2$ ).** Рассмотрим сначала разгон ортогонального маятника по первой форме колебаний, задавая коэффициент усиления в виде (4.4.1). Ясно, что в этой ситуации коэффициент усиления с учетом формулы (3.2.16) будет определяться выражением:

$$\gamma(\theta_1, \dot{\theta}_1) = \gamma_0 \left[ \varepsilon_* - \frac{3}{2} \left( \frac{\dot{\theta}_1^2}{k_{10}^2} + 2(1 - \cos \theta_1) \right) \right], \quad (4.4.2)$$

где обозначено  $\varepsilon_* = E_*/(mgl)$  – безразмерный уровень энергии, отвечающий желаемой энергии  $E_*$ . Что же касается уравнения управляемого движения,

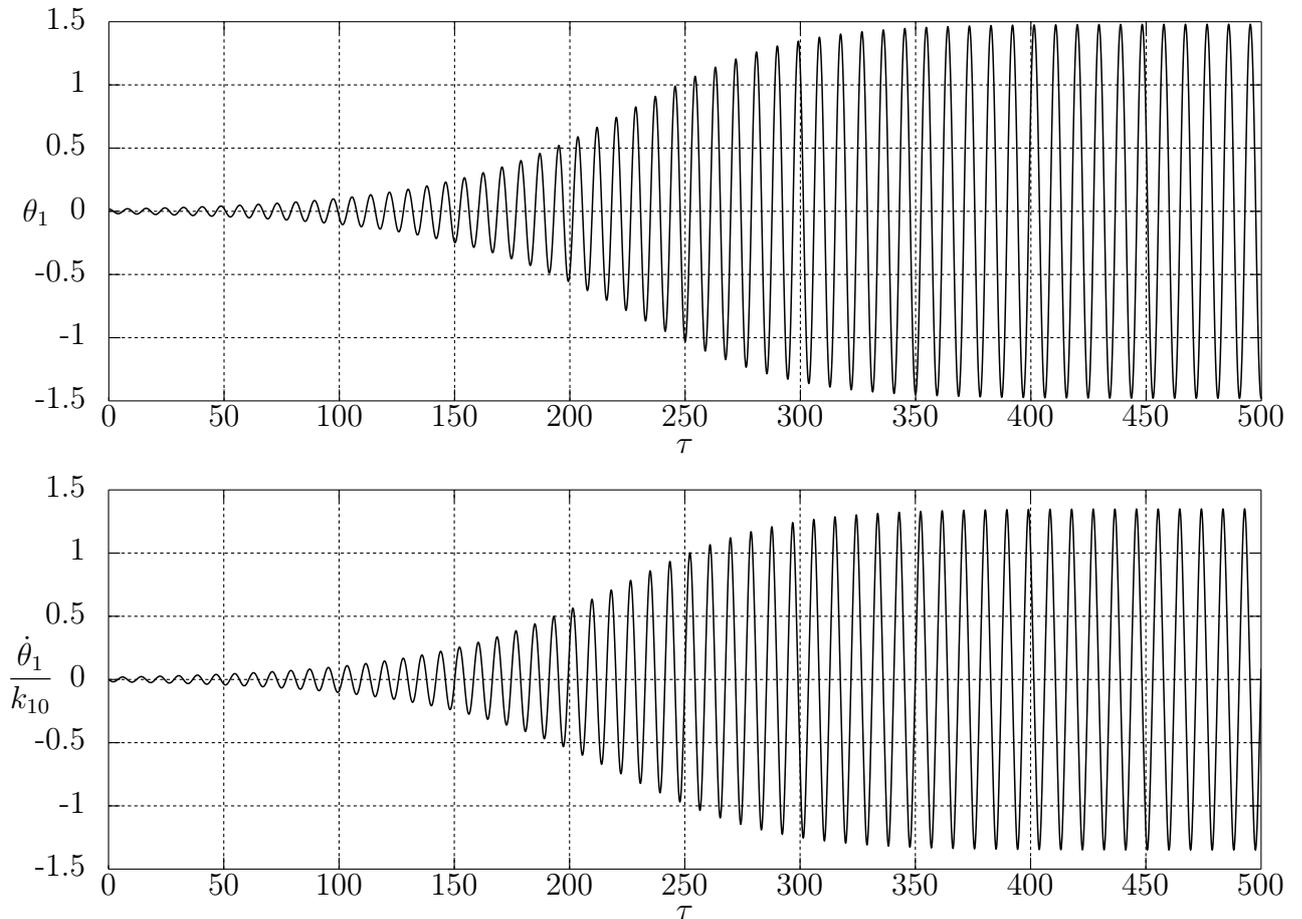


Рис. 4.8. Разгон ортогонального двойного маятника ( $\alpha = \pi/2$ )

то для обобщенной координаты  $\theta_1$  оно будет аналогично (4.3.12) [66]:

$$\ddot{\theta}_1 + k_{10}^2 \sin \theta_1 = \gamma(\theta_1, \dot{\theta}_1) \dot{\theta}_1. \quad (4.4.3)$$

Путем численного интегрирования данного уравнения с малыми начальными условиями можно получить процесс управляемого движения ортогонального двойного маятника, отвечающий его разгону по первой форме, и он приведен на рис. 4.8, где отчетливо виден плавный выход движения на установившийся колебательный режим с достаточно большой амплитудой. Отметим, что эти графики можно получить и при помощи численного интегрирования полного матричного уравнения движения с надлежащими начальными условиями.

Рассмотрим отдельно случай, когда уровень желаемой энергии является не очень большим, т. е. когда отклонения не являются значительными. Важной особенностью этого варианта является то, что для него можно построить приближенное аналитическое решение. Вводя в рассмотрение амплитуду колебаний  $A$  конечного колебательного режима и учитывая, что согласно (3.2.16) имеем  $E_* = 3mgl(1 - \cos A)$ , перепишем уравнение (4.4.3) в виде:

$$\ddot{\theta}_1 + k_{10}^2 \sin \theta_1 = \frac{3}{2} \gamma_0 \left[ 2(\cos \theta_1 - \cos A) - \frac{\dot{\theta}_1^2}{k_{10}^2} \right] \dot{\theta}_1, \quad (4.4.4)$$

который является абсолютно точным. Считая далее обобщенную координату  $\theta_1$  и амплитуду  $A = \text{const}$  величинами одного порядка малости, упростим уравнение (4.4.4), заменив в его левой части  $\sin \theta_1$  на  $\theta_1$ , а в правой части заменив  $\cos \theta_1$  и  $\cos A$  на  $1 - \theta_1^2/2$  и  $1 - A^2/2$  соответственно. Отметим сразу, что в рамках данной аппроксимации будем иметь  $E_* = 3mglA^2/2$ , так что  $\varepsilon_* = 3A^2/2$ , и это выражение понадобится нам в дальнейшем. В результате указанных действий уравнение (4.4.4) приведет к виду [66]:

$$\ddot{\theta}_1 + k_{10}^2 \theta_1 = Q(\theta_1, \dot{\theta}_1), \quad (4.4.5)$$

где величина  $Q$ , характеризующая управляющие воздействия, определяется выражением:

$$Q(\theta_1, \dot{\theta}_1) = \frac{3}{2} \gamma_0 \left( A^2 - \theta_1^2 - \frac{\dot{\theta}_1^2}{k_{10}^2} \right) \dot{\theta}_1. \quad (4.4.6)$$

В условиях нашего предположения о малости нелинейного слагаемого  $Q(\theta_1, \dot{\theta}_1)$  будем разыскивать решение уравнения (4.4.5) в виде:

$$\theta = a \cos \psi, \quad (4.4.7)$$

где  $a = a(t)$  – медленно меняющаяся функция времени, характеризующая амплитуду колебаний, а  $\psi = k_{10}t + \psi_0$  (где  $\psi_0 = \text{const}$ ) – полная фаза колебаний, выражение для которой не будет отличаться от линейной модели, т. к. консервативная нелинейность в уравнении (4.4.5) не была учтена. Зависимость  $a$  от  $t$  следует найти из следующего уравнения гармонического баланса [11]:

$$\int_0^{2\pi} \left( \ddot{\theta}_1 + k_{10}^2 \theta_1 - Q \right) \sin \psi d\psi = 0. \quad (4.4.8)$$

Полагая, что  $\dot{a} = F(a)$ , где функция  $F(a)$ , как нетрудно понять, имеет третий порядок малости по  $a$  и  $A$ , которые мы считаем величинами первого порядка малости, вычислим  $\dot{\theta}_1$  и  $\ddot{\theta}_1$  согласно (4.4.7) с необходимой точностью:

$$\dot{\theta}_1 = F(a) \cos \psi - a \sin \psi k_{10}, \quad \ddot{\theta}_1 = -2F(a) \sin \psi k_{10} - a \cos \psi k_{10}^2. \quad (4.4.9)$$

Далее определим величину  $Q$  по формуле (4.4.6) с точностью до величин третьего порядка малости:

$$Q = -\frac{3}{2} \gamma_0 (A^2 - a^2) a \sin \psi k_{10}. \quad (4.4.10)$$

Подставляя теперь формулы (4.4.7), (4.4.9) и (4.4.10) в уравнение гармонического баланса (4.4.8), получим после преобразований:

$$F(a) = -\frac{1}{2k_{10}\pi} \int_0^{2\pi} Q \sin \psi d\psi = \frac{3}{4} \gamma_0 a (A^2 - a^2). \quad (4.4.11)$$

Таким образом, приходим к следующему уравнению для определения  $a(t)$ :

$$\dot{a} = \kappa a (A^2 - a^2), \quad \kappa = \frac{3}{4} \gamma_0, \quad (4.4.12)$$

которое, очевидно, представляет собой уравнение с разделяющимися переменными и приводится к виду:

$$\int \frac{da}{a(A-a)(A+a)} = \kappa \int dt. \quad (4.4.13)$$

Интеграл, стоящий в левой части уравнения (4.4.13), может быть вычислен путем разложения дроби, стоящей в подынтегральном выражении, на простейшие дроби:

$$\int \frac{da}{a(A-a)(A+a)} = \frac{1}{2A^2} \int \left( \frac{2}{a} + \frac{1}{A-a} - \frac{1}{A+a} \right) = \frac{1}{2A^2} \ln \frac{a^2}{A^2 - a^2}. \quad (4.4.14)$$

В результате уравнение (4.4.13) приведется к виду:

$$\frac{1}{2A^2} \ln \frac{a^2}{A^2 - a^2} = \kappa t + C, \quad (4.4.15)$$

где  $C = \text{const}$  – константа интегрирования. Положим, что в начальный момент времени  $t = 0$  будет  $\theta_1 = a_0$ ,  $\dot{\theta}_1 = 0$ , где  $a_0$  – малая величина. Обращаясь к формулам (4.4.7) и (4.4.9) и принимая во внимание, что  $F(a)$  мало по сравнению с  $a$ , можно приближенно получить, что  $\psi_0 = 0$ ,  $a = a_0$ , а также выразить константу  $C$ :

$$C = \frac{1}{2A^2} \ln \frac{a_0^2}{A^2 - a_0^2}. \quad (4.4.16)$$

Наконец, разрешая уравнение (4.4.15) с учетом (4.4.16) относительно  $a$  и вспоминая, что  $\kappa = 3\gamma_0/4$ , а  $\varepsilon_* = 3A^2/2$ , находим искомую зависимость:

$$a(t) = \frac{a_0 A e^{\kappa A^2 t}}{\sqrt{A^2 + a_0^2 (e^{2\kappa A^2 t} - 1)}} = \frac{a_0 A e^{\gamma_0 \varepsilon_* t / 2}}{\sqrt{A^2 + a_0^2 (e^{\gamma_0 \varepsilon_* t} - 1)}}. \quad (4.4.17)$$

Отсюда видно, что при  $t \rightarrow \infty$  действительно имеем  $a \rightarrow A$ , т. е.  $E \rightarrow E_*$ , как это и должно быть. Процесс управляемого движения для небольших отклонений, полученный с помощью численного интегрирования и демонстрирующий изменение угла  $\theta$  с увеличением безразмерного времени  $\tau$ , показан на рис. 4.9, где также изображены огибающие линии, характеризующие амплитуду колебаний угла  $\theta_1$  и построенные согласно (4.4.17). Видно, что эти линии полностью согласуются с результатами численного интегрирования, что подтверждает корректность полученного аналитического решения.

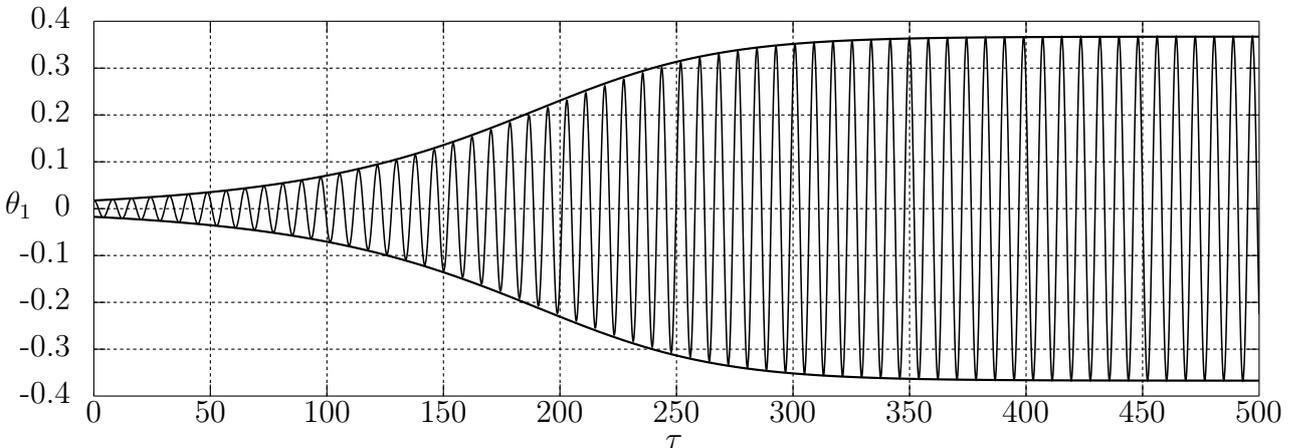


Рис. 4.9. Разгон ортогонального двойного маятника ( $\alpha = \pi/2$ ) в случае малых отклонений

**2. Плоский двойной маятник ( $\alpha = 0$ ).** Переходя к случаю плоского двойного маятника, построим на основе численного интегрирования графики зависимости основных величин, характеризующих управляемый разгон системы по первой форме – обобщенных координат (рис. 4.10) и обобщенных скоростей (рис. 4.11) – от безразмерного времени  $\tau$ . Анализируя их, можно наблюдать ярко выраженный дрейф форм колебаний по мере постепенного перехода из линейной зоны в нелинейную с выходом на установившееся движение для всех указанных величин, имеющее периодический характер.

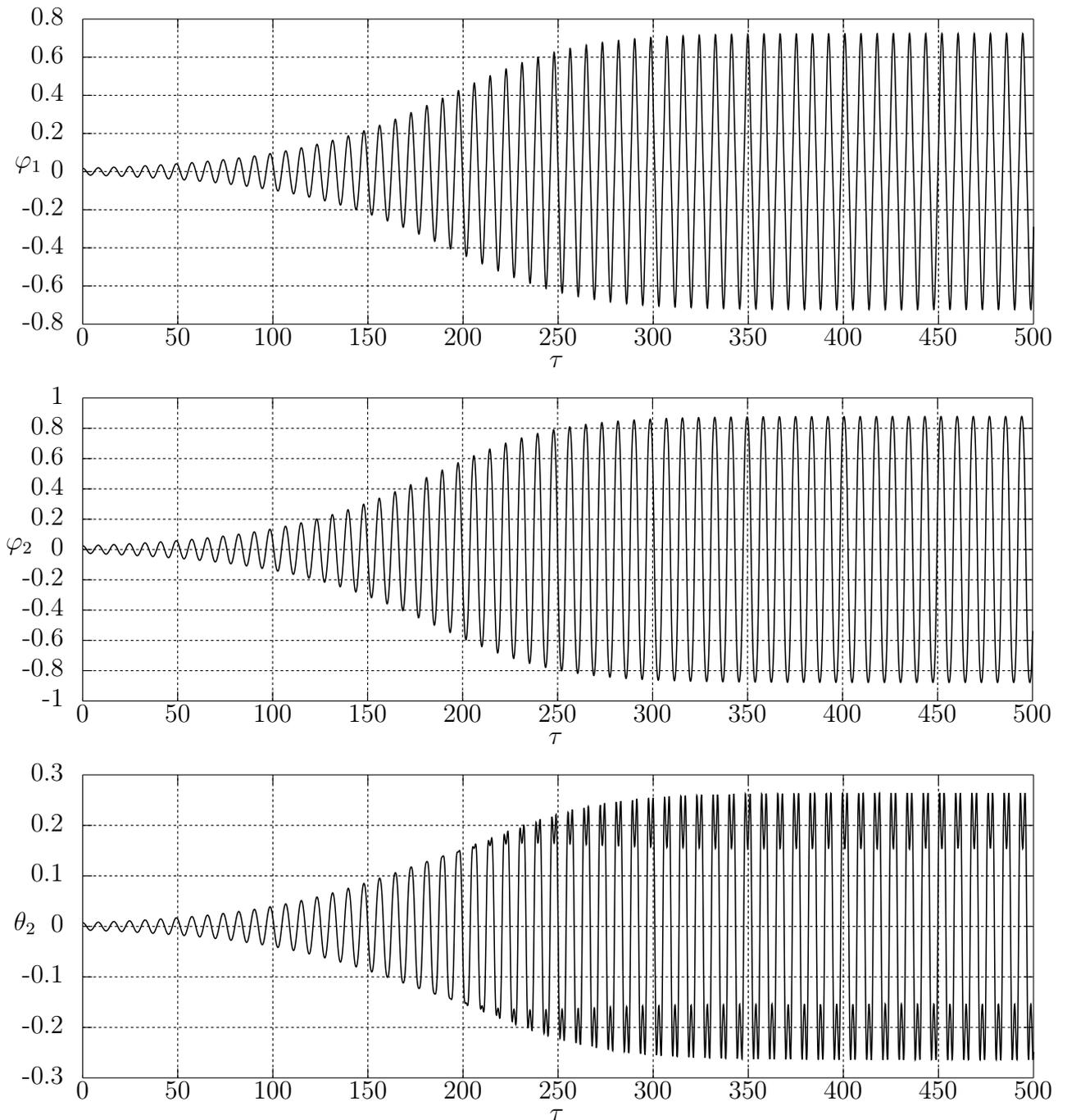


Рис. 4.10. Разгон плоского двойного маятника ( $\alpha = 0$ ): углы  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\theta_2$

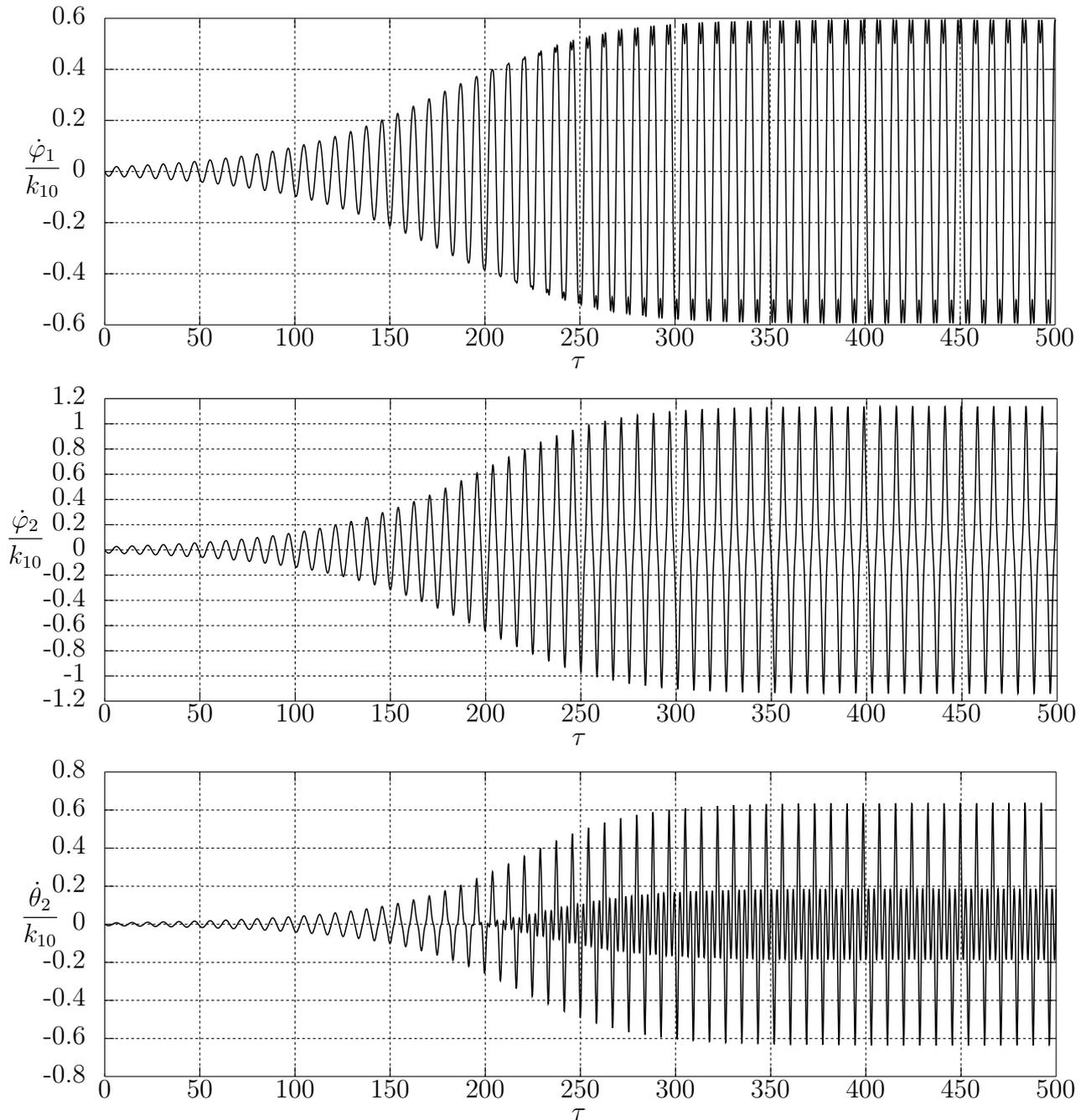


Рис. 4.11. Разгон плоского двойного маятника ( $\alpha = 0$ ): безразмерные угловые скорости  $\dot{\varphi}_1/k_{10}$ ,  $\dot{\varphi}_2/k_{10}$  и  $\dot{\theta}_2/k_{10}$

Необходимо отметить, что в связи с переменностью коэффициента усиления процесс выхода системы на конечный режим в данной ситуации имеет плавный характер, поэтому здесь удалось получить наиболее «чистые» формы нелинейных колебаний без каких-либо обзримых искажений, которые можно было наблюдать по рис. 4.3 и 4.4, где разгон осуществлялся при постоянном коэффициенте усиления и резко прекращался при достижении желаемого уровня энергии [67]. Это обстоятельство подтверждает целесообразность варьирования коэффициента усиления, подчиняя его условию (4.4.1).

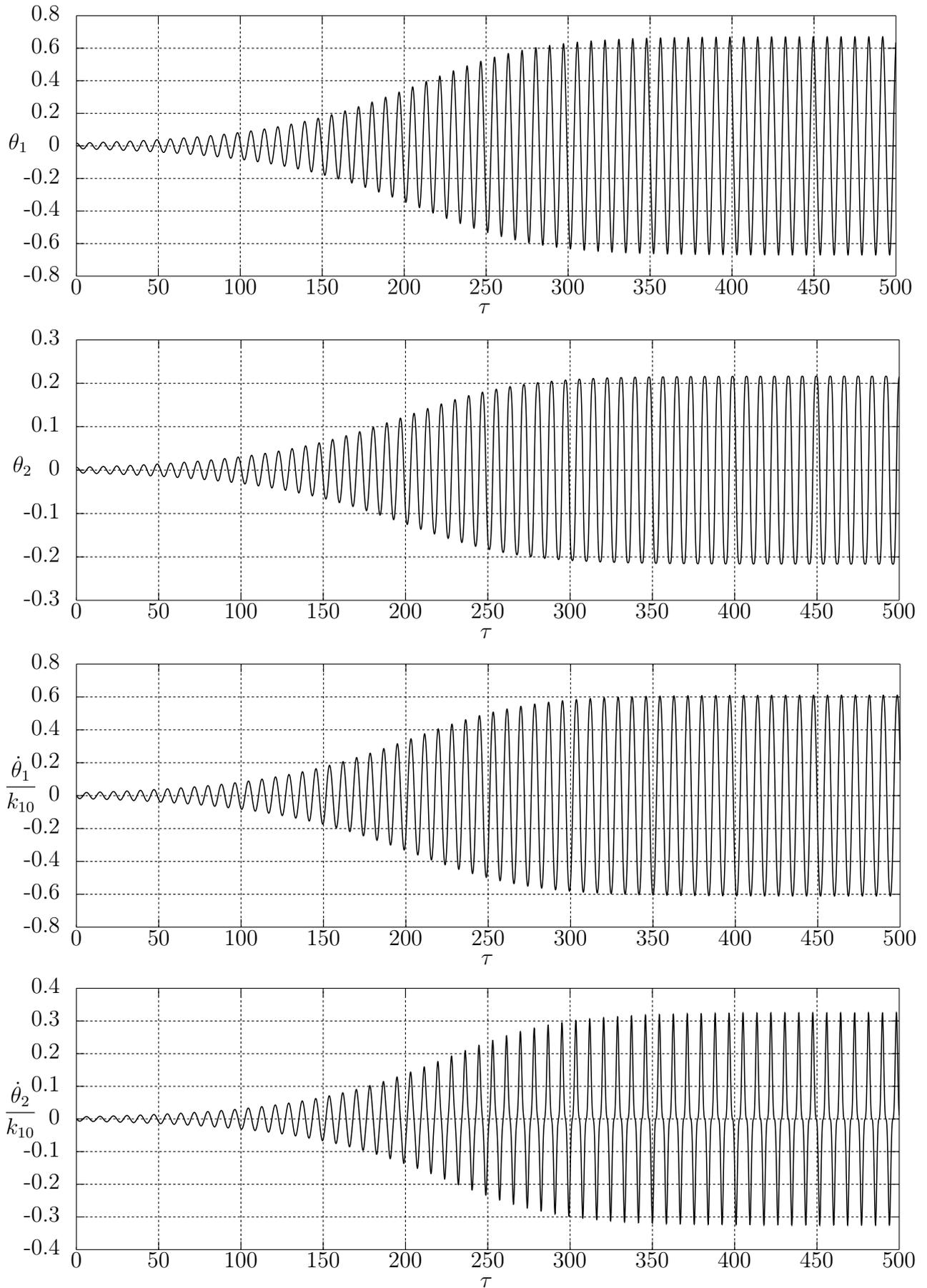


Рис. 4.12. Разгон пространственного двойного маятника ( $\alpha = \pi/6$ )

**3. Пространственный двойной маятник.** Теперь рассмотрим управляемое движение пространственного двойного маятника по первой форме при  $\alpha = \pi/6$ . Графические зависимости, полученные при помощи численного интегрирования, для этого случая показаны на рис. 4.12. При детальном рассмотрении представленных графиков вновь легко видеть, что имеет место постепенный переход формы колебаний из линейного варианта в нелинейный с сохранением одночастотного движения и выходом на конечный консервативный режим, отвечающий желаемому уровню энергии.

Необходимо отметить, что желаемые уровни энергии конечного режима для зависимостей, представленных на рис. 4.8, 4.10–4.11, 4.12, принимались точно такими же, как и соответственно на рис. 4.2, 4.3–4.4, 4.7, а конкретные численные значения коэффициента усиления  $\gamma$  (в случае его постоянства) и величины  $\gamma_0$  (в случае его переменности) в каждом из случаев выбирались таким образом, чтобы продемонстрировать процессы управляемого движения на одном и том же интервале безразмерного времени, что было сделано исключительно для единообразия и не носит принципиального характера.

Остается выяснить, как будет выглядеть приближенное аналитическое решение уравнения (4.2.11) при выборе коэффициента усиления по формуле (4.4.1) при разгоне системы по одной из форм колебаний для случая достаточно малых отклонений. С этой целью запишем выражение для полной механической энергии в квадратичной аппроксимации согласно (2.4.3):

$$E = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{A}_0 \dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\theta}. \quad (4.4.18)$$

Будем полагать, что требуется вывести систему на режим гармонических колебаний по одной из форм колебаний  $\boldsymbol{\Theta}_{(s)}$  линейной модели с отвечающей ей частотой колебаний  $k_{s0}$ :

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Theta}_{(s)} A \cos \psi, \quad (4.4.19)$$

где  $A$  – некоторый постоянный параметр, имеющий смысл амплитуды и также являющийся достаточно малым, а  $\psi = k_{s0}t + \psi_{s0}$ , причем конкретное значение величины  $\psi_{s0}$  не играет здесь никакой существенной роли, и в дальнейшем оно определится начальными условиями движения. Вычислим отвечающий режиму (4.4.19) желаемый уровень энергии по формуле (4.4.18):

$$E_* = \frac{1}{2} A^2 \left[ \boldsymbol{\Theta}_{(s)}^T \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\Theta}_{(s)} k_{s0}^2 \sin^2 \psi + \boldsymbol{\Theta}_{(s)}^T \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\Theta}_{(s)} \cos^2 \psi \right] = \frac{1}{2} N_s k_{s0}^2 A^2, \quad (4.4.20)$$

где использованы условия (2.4.22). Поскольку  $H_s = N_s/(ml^2)$ , а  $p_{s0} = k_{s0}/k$ , то отсюда следует, что  $\varepsilon_* = E_*/(mgl) = H_s p_{s0}^2 A^2/2$ . Ясно, что для небольших отклонений уравнение (4.2.11) можно упростить, приведя его к виду:

$$\mathbf{A}_0 \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\theta} = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}), \quad (4.4.21)$$

где столбец управляющих воздействий здесь определяется выражением:

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{\gamma_0}{2mgl} \left( N_s k_{s0}^2 A^2 - \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{A}_0 \dot{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\theta} \right) \mathbf{A}_0 \dot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (4.4.22)$$

Как и при построении приближенного решения для случая ортогонального двойного маятника, здесь мы исключили собственную нелинейность системы, которая в первом приближении влияет лишь на частоту колебаний, и оставили только нелинейные слагаемые третьего порядка малости, возникающие за счет управляющих воздействий и непосредственно влияющие на нарастание амплитуд колебаний. Будем разыскивать решение уравнения (4.4.21) в виде:

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Theta}_{(s)} a \cos \psi, \quad (4.4.23)$$

где  $a = a(t)$  – некоторая неизвестная функция времени, которая и подлежит определению, а  $\psi = k_{s0}t + \psi_{s0}$ . Зависимость  $a$  от  $t$  будем находить из следующего уравнения гармонического баланса по данной форме  $\boldsymbol{\Theta}_{(s)}$  [11]:

$$\int_0^{2\pi} \boldsymbol{\Theta}_{(s)}^T \left( \mathbf{A}_0 \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\theta} - \mathbf{Q} \right) \sin \psi d\psi = 0. \quad (4.4.24)$$

Полагая, что  $\dot{a} = F(a)$ , где функция  $F(a)$  имеет третий порядок малости, вычислим столбцы  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  и  $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$  согласно (4.4.23) с необходимой точностью:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\Theta}_{(s)} [F(a) \cos \psi - a \sin \psi k_{s0}], \quad \ddot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\Theta}_{(s)} [-2F(a) \sin \psi k_{s0} - a \cos \psi k_{s0}^2]. \quad (4.4.25)$$

Помимо этого, вычислим и столбец управляющих воздействий (4.4.22) также с точностью до третьего порядка малости:

$$\mathbf{Q} = -\frac{\gamma_0 N_s k_{s0}^2}{2mgl} (A^2 - a^2) a \sin \psi k_{s0} \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\Theta}_{(s)}. \quad (4.4.26)$$

Подставляя теперь формулы (4.4.23), (4.4.25) и (4.4.26) в уравнение гармонического баланса (4.4.24), получим после серии преобразований:

$$F(a) = -\frac{1}{2N_s k_{s0} \pi} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{\Theta}_{(s)}^T \mathbf{Q} \sin \psi d\psi = \frac{\gamma_0 N_s k_{s0}^2}{4mgl} a (A^2 - a^2), \quad (4.4.27)$$

так что уравнение для определения функции  $a(t)$  примет вид:

$$\dot{a} = \kappa_s a (A^2 - a^2), \quad \kappa_s = \frac{\gamma_0 H_s p_{s0}^2}{4}. \quad (4.4.28)$$

Нетрудно видеть, что по своей форме уравнение (4.4.28) полностью аналогично ранее полученному уравнению (4.4.12) для случая ортогонального двойного маятника. Задавая начальные условия в исходном виде, а именно  $\theta_0 = a_0 \Theta_{(s)}$ ,  $\dot{\theta}_0 = 0$ , и обращаясь к формулам (4.4.23) и (4.4.25), и, кроме того, принимая во внимание, что  $F(a)$  мало по сравнению с  $a$ , приближенно получим, что  $\psi_{s0} = 0$ , а  $a = a_0$  при  $t = 0$ . Поэтому уравнение (4.4.28) будет иметь решение, полностью аналогичное по своей структуре выражению (4.4.17), где учтено также, что  $\kappa_s = \gamma_0 H_s p_{s0}^2 / 4$ , а  $\varepsilon_* = H_s p_{s0}^2 A^2 / 2$  [140]:

$$a(t) = \frac{a_0 A e^{\kappa_s A^2 t}}{\sqrt{A^2 + a_0^2 (e^{2\kappa_s A^2 t} - 1)}} = \frac{a_0 A e^{\gamma_0 \varepsilon_* t / 2}}{\sqrt{A^2 + a_0^2 (e^{\gamma_0 \varepsilon_* t} - 1)}}. \quad (4.4.29)$$

Отсюда вновь легко видеть, что при  $t \rightarrow \infty$  будет  $a \rightarrow A$ , т. е.  $E \rightarrow E_*$ .

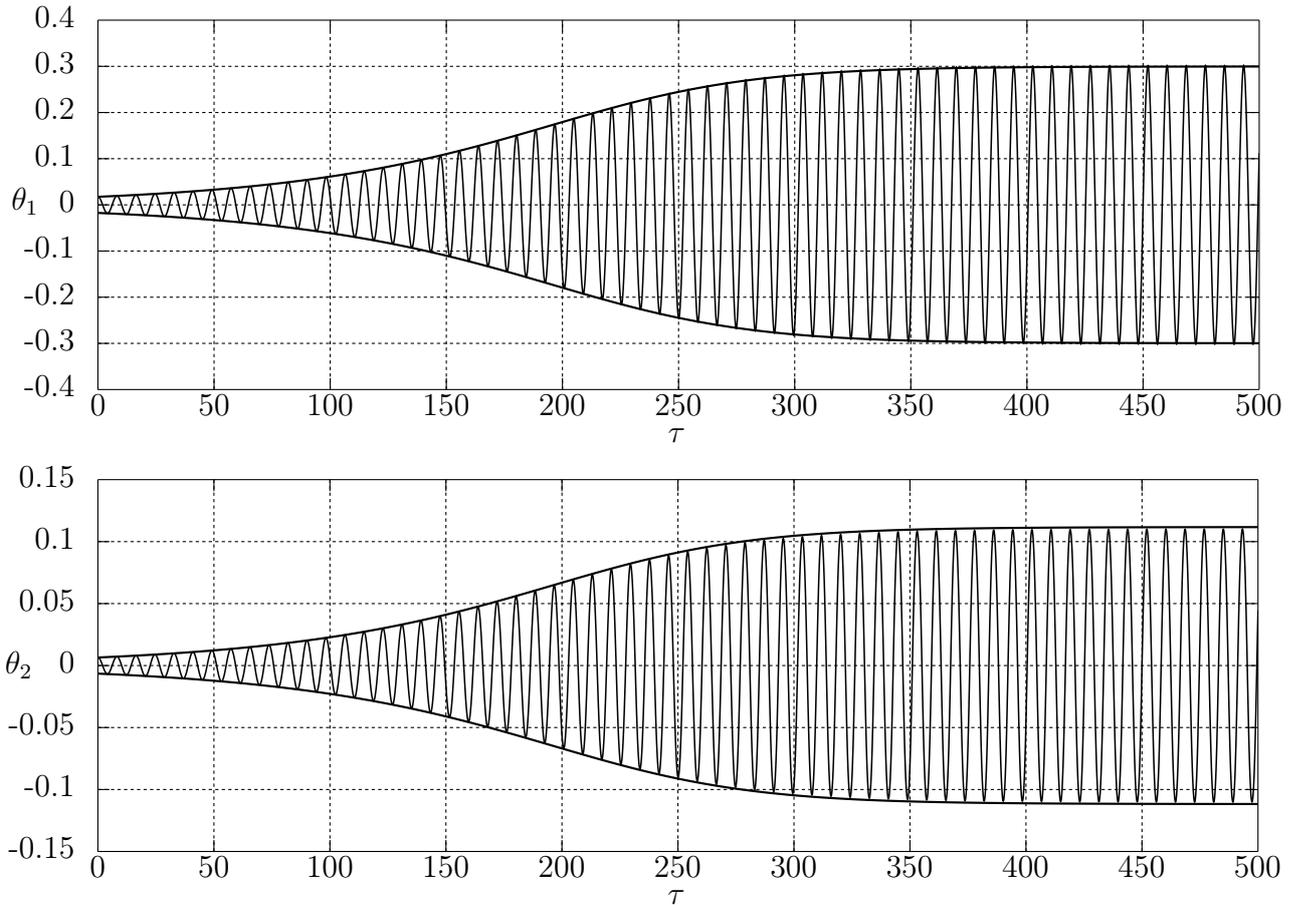


Рис. 4.13. Разгон пространственного двойного маятника ( $\alpha = \pi/6$ ) в случае малых отклонений

Графики управляемого движения системы по первой форме представлены на рис. 4.13 для случая  $\alpha = \pi/6$  при достаточно малых углах  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Здесь также приведены огибающие линии, характеризующие амплитуды колебаний данных углов и построенные по полученным выше формулам. Видно, что эти линии полностью согласуются с результатами численного интегрирования. Таким образом, полученные аналитические результаты позволяют оценить характер увеличения амплитуд колебаний в рамках рассматриваемой упрощенной модели. Следует еще раз подчеркнуть, что несмотря на принятые аппроксимации и отсутствие дрейфа частоты и формы колебаний в рассмотренной модели, она остается нелинейной из-за характера управляющих воздействий.

Анализируя полученные результаты, можно заключить, что представленная модификация коллинеарного закона управления, имеющая переменный коэффициент усиления, точно так же, как и коллинеарное управление с постоянным коэффициентом усиления, действительно позволяет передавать всю подводимую в систему энергии на нарастание только одной формы колебаний. Это означает, что с помощью такого управления можно возбуждать резонансные колебания по заданной форме колебаний, т. е. раскачивать систему по этой форме с постепенным ее переходом от линейного к нелинейному варианту, при этом с течением времени будет осуществляться плавный выход на установившееся колебательное движение с заданным уровнем энергии. В результате можно наблюдать движение системы по нелинейной форме колебаний, которое характеризуется периодичностью и сильно отличается от соответствующей линейной формы колебаний, имеющей гармонический, т. е. чисто синусоидальный характер.

## 4.5. Коллинеарное управление при наличии диссипативных сил

В заключение разговора об управляемых движениях системы рассмотрим ситуацию, когда в шарнирах пространственного двойного маятника действуют управляющие моменты, построенные по принципу коллинеарного управления с постоянным коэффициентом усиления  $\gamma$ , а также учитывается вязкое

трение с диссипативным коэффициентом  $b$  [41]. Ясно, что уравнения движения такой системы, записанные в матричной форме, будут иметь вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\theta}} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\theta}} - \frac{\partial R}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} + \gamma \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}}. \quad (4.5.1)$$

Имея в виду дальнейшее исследование линейной модели рассматриваемого процесса, подставим в (4.5.1) сразу квадратичные аппроксимации кинетической и потенциальной энергий (2.4.3), а также диссипативную функцию (2.5.1). В результате получим следующее линейное матричное уравнение:

$$\mathbf{A}_0 \ddot{\boldsymbol{\theta}} + (\mathbf{B}_0 - \gamma \mathbf{A}_0) \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\theta} = 0. \quad (4.5.2)$$

Домножая уравнение движения (4.5.2) на  $\dot{\boldsymbol{\theta}}^T$  слева, нетрудно получить следующее энергетическое соотношение:

$$\begin{aligned} \dot{E} = 2(\gamma T - R) &= 2ml^2 \left[ (5\delta - n)\dot{\theta}_1^2 + 4\delta \cos \alpha \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + (\delta - n)\dot{\theta}_2^2 \right] = \\ &= N(\dot{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{D}_0 \dot{\boldsymbol{\theta}}, \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

где учтено, что  $2n = b/(ml^2)$ ,  $2\delta = \gamma$ . Видно, что суммарная мощность диссипативных и управляющих сил  $N(\dot{\boldsymbol{\theta}})$  есть квадратичная форма столбца обобщенных скоростей с матрицей

$$\mathbf{D}_0 = 2ml^2 \begin{bmatrix} 5\delta - n & 2\delta \cos \alpha \\ 2\delta \cos \alpha & \delta - n \end{bmatrix}. \quad (4.5.4)$$

Сначала определим условия на параметры  $\delta$  и  $n$ , при которых полная энергия системы всегда будет возрастающей или, напротив, убывающей функцией. Из формулы (4.5.3) следует, что для этого мощность  $N$  должна всегда принимать положительные или же отрицательные значения при любых значениях обобщенных скоростей  $\dot{\theta}_1$  и  $\dot{\theta}_2$ . Следовательно, матрица  $\mathbf{D}_0$  должна быть знакоопределенной положительной или отрицательной, что диктуется условиями Сильвестра [23]. Так, для положительной определенности этой матрицы требуется, чтобы

$$5\delta > n, \quad (5\delta - n)(\delta - n) - 4\delta^2 \cos^2 \alpha > 0. \quad (4.5.5)$$

Решая эту систему неравенств, получим

$$\delta > \frac{3 + 2\sqrt{2 - \sin^2 \alpha}}{1 + 4 \sin^2 \alpha} n = n_2, \quad \sigma > \eta_2 \nu, \quad (4.5.6)$$

где учтено соотношение (2.5.11), а также полученное условие представлено в безразмерной форме, где  $\sigma = \delta/k$ ,  $\nu = n/k$ , и принято во внимание, что  $\eta_s = n_s/n$ , и они определяются по формуле (2.5.14). Для отрицательной же определенности матрицы  $\mathbf{D}_0$  должны выполняться неравенства

$$5\delta < n, \quad (5\delta - n)(\delta - n) - 4\delta^2 \cos^2 \alpha > 0, \quad (4.5.7)$$

которые, в свою очередь, дают

$$\delta < \frac{3 - 2\sqrt{2 - \sin^2 \alpha}}{1 + 4 \sin^2 \alpha} n = n_1, \quad \sigma < \eta_1 \nu, \quad (4.5.8)$$

причем здесь использованы все те же самые соотношения. Из этих рассуждений также следует вывод, что при выполнении условия

$$\eta_1 \nu < \sigma < \eta_2 \nu \quad (4.5.9)$$

мощность  $N$  будет являться знакопеременной функцией обобщенных скоростей  $\dot{\theta}_1$  и  $\dot{\theta}_2$ , так что данному двойному неравенству будут отвечать некоторые промежуточные режимы.

Рассмотрим теперь подробно весь спектр возможных режимов движений системы. Чтобы построить эти режимы и дать им адекватную интерпретацию и классификацию, построим точное аналитическое решение уравнения (4.5.2). Разыскивая это решение в виде (2.5.4), можно прийти к матричному алгебраическому уравнению:

$$[\mathbf{A}_0 \lambda^2 + (\mathbf{B}_0 - \gamma \mathbf{A}_0) \lambda + \mathbf{C}_0] \Theta = 0, \quad (4.5.10)$$

которое имеет нетривиальное решение при выполнении условия

$$\det [\mathbf{A}_0 \lambda^2 + (\mathbf{B}_0 - \gamma \mathbf{A}_0) \lambda + \mathbf{C}_0] = 0. \quad (4.5.11)$$

Принимая во внимание соотношение (2.5.7) между матрицами  $\mathbf{A}_0$ ,  $\mathbf{B}_0$  и  $\mathbf{C}_0$ , получим:

$$\det \left[ \mathbf{A}_0 (\lambda^2 - (2n + \gamma)\lambda) + \mathbf{C}_0 \left( 1 + \frac{4n}{k^2} \lambda \right) \right] = 0. \quad (4.5.12)$$

Из сопоставления этого уравнения с (2.4.6), которому отвечают частоты консервативных колебаний системы  $k_{s0}$ , следует, что значения  $\lambda$  находятся из следующих уравнений:

$$\lambda^2 - (2n + \gamma)\lambda = -k_{s0}^2 \left( 1 + \frac{4n}{k^2} \lambda \right), \quad s = 1, 2, \quad (4.5.13)$$

а формы колебаний остаются такими же, как в исходной консервативной системе. Преобразуя уравнения (4.5.13), получим:

$$\lambda^2 + 2(n_s - \delta)\lambda + k_{s0}^2 = 0, \quad (4.5.14)$$

где сохранены прежние обозначения для  $n_s$  согласно (2.5.11). Решения уравнений (4.5.14), очевидно, есть

$$\lambda_{1,2} = \delta - n_1 \pm ik_1, \quad \lambda_{3,4} = \delta - n_2 \pm ik_2, \quad (4.5.15)$$

где введены обозначения:

$$k_s = \sqrt{k_{s0}^2 - (\delta - n_s)^2}. \quad (4.5.16)$$

Отметим, что решение уравнения (4.5.2) можно записать в виде:

$$\boldsymbol{\theta} = e^{\delta t} \left[ \boldsymbol{\Theta}_{(1)} e^{-n_1 t} (A_1 e^{ik_1 t} + B_1 e^{-ik_1 t}) + \boldsymbol{\Theta}_{(2)} e^{-n_2 t} (A_2 e^{ik_2 t} + B_2 e^{-ik_2 t}) \right], \quad (4.5.17)$$

где комплексные константы интегрирования  $A_s$  и  $B_s$ ,  $s = 1, 2$  вновь определяются по аналогии с (2.5.28) и имеют вид:

$$A_s = \frac{(n_s - \delta + ik_s) \boldsymbol{\Theta}_{(s)}^T \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{\Theta}_{(s)}^T \mathbf{A}_0 \dot{\boldsymbol{\theta}}_0}{2ik_s N_s}, \quad (4.5.18)$$

$$B_s = \frac{(-n_s + \delta + ik_s) \boldsymbol{\Theta}_{(s)}^T \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\theta}_0 - \boldsymbol{\Theta}_{(s)}^T \mathbf{A}_0 \dot{\boldsymbol{\theta}}_0}{2ik_s N_s}.$$

Вводя теперь для удобства безразмерные собственные числа  $\kappa = \lambda/k$ , можно записать их согласно (4.5.15) с использованием безразмерных параметров  $\nu$  и  $\sigma$  в окончательном виде:

$$\kappa_{1,2} = \sigma - \eta_1 \nu \pm i \sqrt{p_{10}^2 - (\sigma - \eta_1 \nu)^2}, \quad \kappa_{3,4} = \sigma - \eta_2 \nu \pm i \sqrt{p_{20}^2 - (\sigma - \eta_2 \nu)^2}. \quad (4.5.19)$$

Видно, что в зависимости от соотношения между  $\nu$  и  $\sigma$  значения  $\kappa$  могут быть как вещественными (положительными или отрицательными), так и комплексными (при этом имея положительную или отрицательную вещественную часть). Все эти случаи определяют принципиально различный качественный характер возникающих режимов движения системы. Чтобы наглядно представить характер этих режимов и оценить их общее количество,

построим на плоскости  $\nu\sigma$  семейство пограничных линий, на которых происходит смена характера движения по каждой из форм  $\Theta_{(s)}$  с затухающего на разгонный и с колебательного на апериодический. Из выражений (4.5.19) ясно, что этими пограничными линиями являются следующие шесть прямых:

$$\sigma = \eta_1\nu, \quad \sigma = \eta_2\nu, \\ \sigma = \eta_1\nu \pm p_{10} = p_{10} \left( \pm 1 + \frac{\nu}{\nu_{10}} \right), \quad \sigma = \eta_2\nu \pm p_{20} = p_{20} \left( \pm 1 + \frac{\nu}{\nu_{20}} \right). \quad (4.5.20)$$

На первых двух из выписанных прямых обращаются в нуль вещественные части корней  $\kappa_{1,2}$  и  $\kappa_{3,4}$  соответственно, а на двух оставшихся парах – мнимые. Прямые (4.5.20) показаны на рис. 4.14. Учитывая, что  $\nu > 0$ , а  $\sigma$  может быть как положительным, так и отрицательным, можно заключить, что указанные прямые делят полуплоскость  $\nu > 0$  на 11 областей с различным характером движения пространственного двойного маятника.

Дадим развернутую классификацию этих областей:

- 1 – апериодический разгон обеих форм  $\Theta_{(1)}$  и  $\Theta_{(2)}$ ;
- 2 – апериодический разгон формы  $\Theta_{(1)}$ , колебательный разгон формы  $\Theta_{(2)}$ ;
- 3 – колебательный разгон обеих форм  $\Theta_{(1)}$  и  $\Theta_{(2)}$ ;
- 4 – колебательный разгон формы  $\Theta_{(1)}$ , колебательное гашение формы  $\Theta_{(2)}$ ;
- 5 – апериодический разгон формы  $\Theta_{(1)}$ , колебательное гашение формы  $\Theta_{(2)}$ ;
- 6 – колебательный разгон формы  $\Theta_{(1)}$ , апериодическое гашение формы  $\Theta_{(2)}$ ;
- 7 – апериодический разгон формы  $\Theta_{(1)}$ , апериодическое гашение формы  $\Theta_{(2)}$ ;
- 8 – колебательное гашение обеих форм  $\Theta_{(1)}$  и  $\Theta_{(2)}$ ;
- 9 – колебательное гашение формы  $\Theta_{(1)}$ , апериодическое гашение формы  $\Theta_{(2)}$ ;
- 10 – апериодическое гашение формы  $\Theta_{(1)}$ , колебательное гашение формы  $\Theta_{(2)}$ ;
- 11 – апериодическое гашение обеих форм  $\Theta_{(1)}$  и  $\Theta_{(2)}$ .

Видно, что при  $\gamma = 0$  и при  $\nu = 0$  из этой диаграммы следуют выводы, которые находятся в полном соответствии с ранее полученными результатами.

Возвращаясь теперь к ранее полученным результатам, можно видеть, что условие (4.5.6) имеет место в областях 1, 2 и 3, где обе формы раскачиваются, а условие (4.5.8) выполнено в областях 8, 9, 10 и 11, когда обе формы гасятся, как этого и следовало ожидать. Эти группы областей для наглядности выделены на диаграмме режимов соответственно темным и светлым фоном.

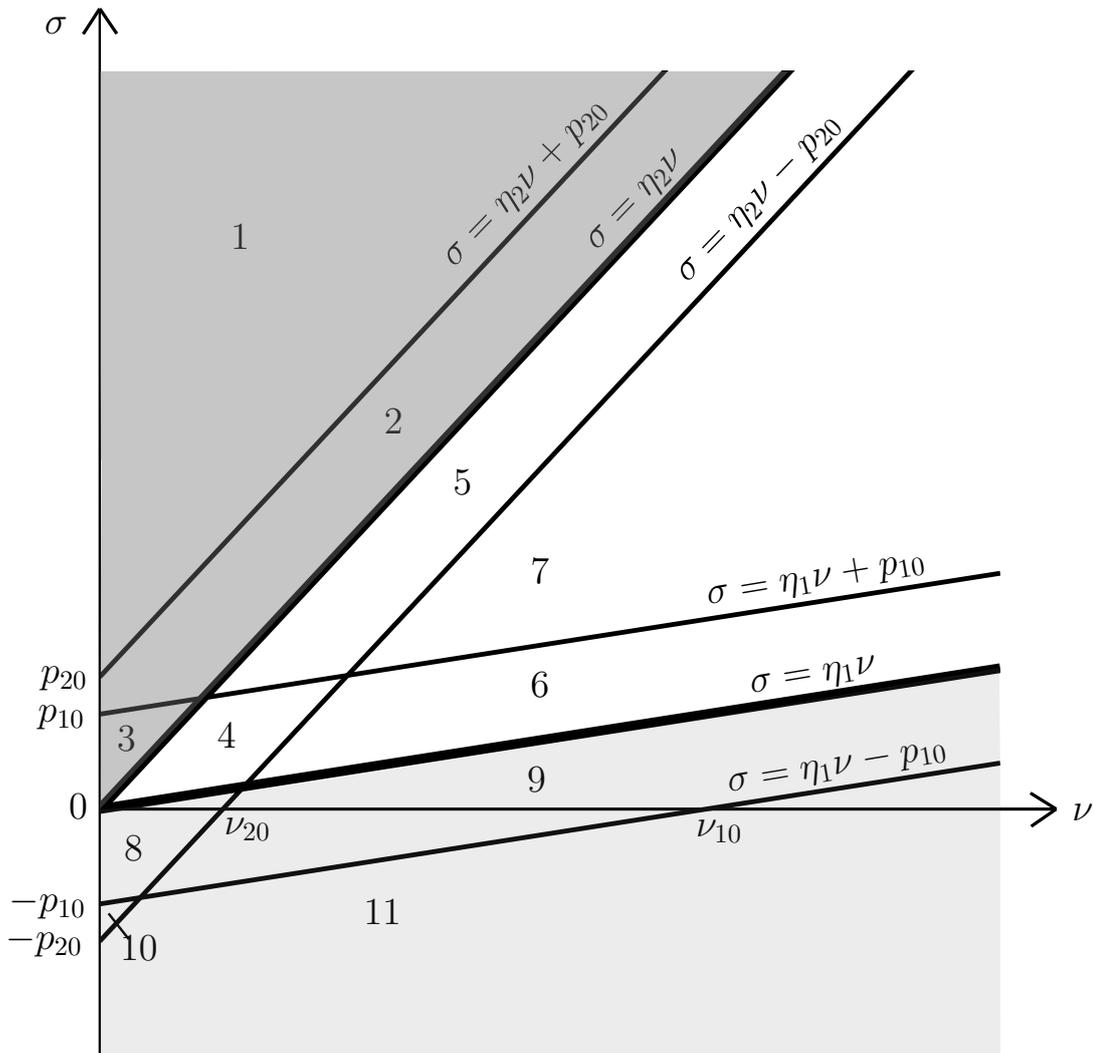


Рис. 4.14. Диаграмма режимов движения системы

В областях 4, 5, 6 и 7 реализуются промежуточные режимы, когда первая форма раскачивается, а вторая – гасится, и им отвечает условие (4.5.9). Особый практический интерес могут представлять области 4 и 6, поскольку при выборе параметров  $\nu$  и  $\sigma$  в этих областях вторая форма будет гаситься (колебательно или аperiodически соответственно), и в результате с течением времени можно наблюдать только одну раскачивающуюся первую форму. Отметим также, что если выбрать параметры  $\nu$  и  $\sigma$  на границе  $\sigma = \eta_1\nu$ , то с течением времени можно будет наблюдать незатухающие колебания только по одной первой форме.

Таким образом, совместный учет как управляющих, так и диссипативных воздействий существенно усложняет картину возможных режимов движения пространственного двойного маятника и позволяет выбрать наиболее пригодные из них для конкретных практических целей.

## 4.6. Выводы по четвертой главе

В настоящей главе было продемонстрировано, что с помощью коллинеарного управления можно разогнать пространственный двойной маятник по каждой из его форм колебаний в отдельности вплоть до достаточно больших амплитуд. Эта замечательная особенность такого управления означает существование режима авторезонансных колебаний, когда вся подводимая в систему энергия полностью идет на ее разгон по одной форме колебаний, обеспечивая одночастотное нарастание этих колебаний. При этом форма колебаний постепенно дрейфует вместе с частотой при переходе из линейной зоны в нелинейную, однако при усложнении своего качественного характера она сохраняет свою регулярную структуру и характеризуется периодичностью. Помимо коллинеарного управления с постоянным коэффициентом усиления, когда выход на установившийся режим осуществляется простым его отключением, также предложена эффективная модификация исходного закона управления, заключающаяся в использовании переменного коэффициента усиления и позволяющая реализовать плавный выход на режим периодических колебаний с желаемым уровнем энергии. Наконец, было изучено совместное влияние диссипативных и управляющих воздействий на динамическое поведение системы в рамках линейной модели, в результате чего представлена диаграмма возможных режимов движения, которые обладают своими отличительными особенностями и могут найти определенное практическое применение.

Отметим еще раз, что исходя из вышперечисленных достоинств предложенного метода формирования управляющих воздействий его целесообразно использовать не только для управления движением пространственного двойного маятника, но и любой другой механической системы. Это заключение особенно касается систем из области современной робототехники и биодинамики, поскольку описанные управляемые режимы широко распространены в животном мире, где фактически все бегающие, плавающие и летающие животные совершают свои локомоции в резонансном движении по одной из форм колебаний. Это и подчеркивает важность использования данных принципов для управления движением современных андроидов и многих других устройств, встречающихся в различных прикладных задачах.

# 5. Оптимизация режимов гашения колебаний пространственного двойного маятника

## 5.1. Постановка задачи оптимизации пассивного и активного гашения колебаний и формирование критериев оптимизации

В предыдущих главах были рассмотрены движения пространственного двойного маятника под действием диссипативных сил вязкого трения и управляющих воздействий, построенных по принципу коллинеарного управления, которые позволяют подавлять колебания системы. Первый вид гашения обычно называют пассивным, тогда как второй – активным. При этом естественным образом возникает вопрос о нахождении наилучших параметров каждого из упомянутых видов гашения в отдельности и при их совместном действии [69, 70]. Ясно, что для того, чтобы колебания затухали наиболее эффективно, следует предложить критерий оптимизации, на основе которого выбирались бы параметры каждого из видов гашения [9, 31, 35, 40, 127, 131]. Представляет интерес использовать различные критерии и сопоставлять результаты, полученные по этим критериям.

В существующей литературе в качестве критерия оптимизации для систем с несколькими степенями свободы наиболее часто принимается критерий, ос-

нованный на максимизации степени устойчивости системы [53, 54]. Как известно, *степенью устойчивости* линейной динамической системы называют расстояние  $\Delta$  от мнимой оси плоскости корней характеристического уравнения до ближайшего к ней корня при условии, что все эти корни лежат слева от мнимой оси [12, 62, 76] (рис. 5.1):

$$\Delta = \min_i |\operatorname{Re} \lambda_i| = \max. \quad (5.1.1)$$

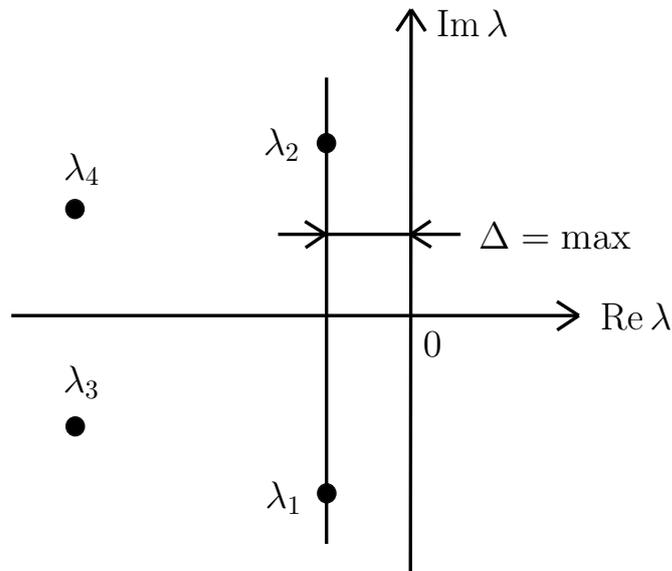


Рис. 5.1. Степень устойчивости

Этот критерий оптимизации является максиминным, и к его важным достоинствам можно отнести то обстоятельство, что он не зависит от начальных условий движения системы. Однако его возможно построить лишь для линейной системы, т. к. в нелинейной системе понятие степени устойчивости лишено смысла, что является недостатком данного критерия. Кроме того, этот критерий не связан напрямую с энергетическими параметрами системы, характеризуя лишь степень затухания той составляющей решения, которая снижается медленнее всего. Поэтому данный критерий следует считать скорее чисто математическим, чем физическим. Тем не менее, критерий, основанный на степени устойчивости, широко применяется в различных практических задачах, что обусловлено его относительной простотой вычисления.

Однако в задачах механики более естественным с физической точки зрения является выбор параметров активного или пассивного гашения колеба-

ний из соображения наилучшего рассеивания полной механической энергии во времени. Исходя из этого, в качестве критерия оптимизации можно принять величину интеграла [20, 29, 76]:

$$F = \int_0^{\infty} E(t) dt = \min, \quad (5.1.2)$$

где  $E = T + \Pi$  – полная механическая энергия системы. Интегральные критерии такого рода также часто используются в теории автоматического управления [6, 27, 79]. Важно подчеркнуть, что критерий (5.1.2) имеет следующий геометрический смысл – величина  $F$  есть площадь под кривой энергии  $E(t)$  на бесконечном промежутке времени, а задача оптимизации тогда сводится к определению таких параметров гашения, при котором эта площадь минимальна (рис. 5.2). Отметим также, что критерий (5.1.2) является энерго-

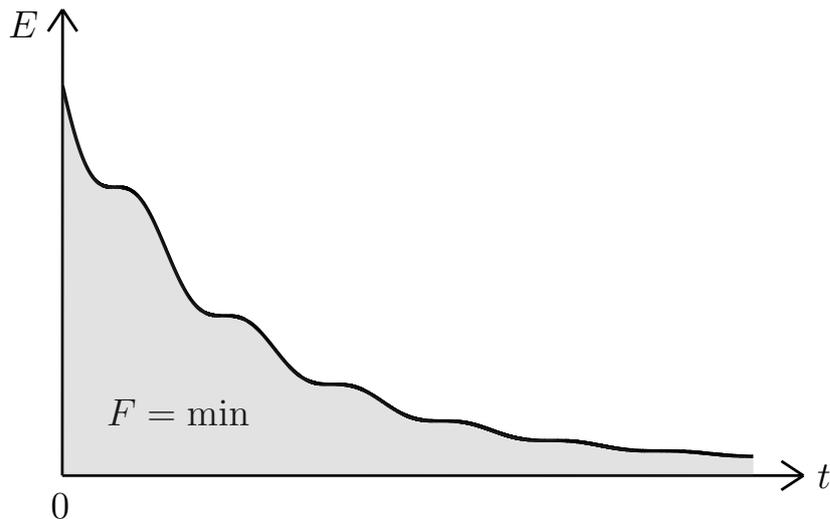


Рис. 5.2. Геометрический смысл энерго-временного критерия

временным, поскольку он гармонично сочетает в своей структуре как энергетические, так и временные характеристики процесса гашения свободных колебаний. Более того, в отличие от степени устойчивости, этот критерий можно использовать как для линейных, так и для нелинейных систем, что существенно расширяет сферу его применимости. Однако при использовании энерго-временного критерия на пути определения оптимальных параметров имеется существенная трудность, связанная с тем, что в общем случае эти параметры будут существенно зависеть от начальных условий движения, что свойственно любому интегральному критерию. В этом заключается главный

недостаток обсуждаемого критерия, которого критерий, основанный на степени устойчивости, был лишен. Тем не менее, поскольку начальные условия далеко не всегда бывают точно определенными, то целесообразно действовать по *принципу гарантированного успеха*, т. е. определять наилучшие параметры режима гашения для наихудшей совокупности начальных условий (такой, для которых значение критерия является наибольшим при заданных параметрах гашения). В этом случае мы приходим к минимаксной процедуре.

Как правило, при решении задач оптимизации параметров механических систем с несколькими степенями свободы приходится прибегать исключительно к численным методам анализа, т. к. построение точных аналитических решений оказывается крайне трудоемким или вовсе невозможным. Данное обстоятельство существенно снижает ценность такого решения в качественном отношении. Однако в настоящем примере пространственного двойного маятника с диссипативными и управляющими факторами удается построить аналитическое решение и воспользоваться численными методами лишь для определения корней алгебраических уравнений, что оказывается очень важным моментом для наиболее наглядной и доступной интерпретации полученных результатов.

## 5.2. Оптимизация вязкого демпфирования колебаний

Поставим сначала вопрос об отыскании коэффициента вязкого трения  $b$  (или отвечающей ему величины  $n$ ) в шарнирах из условия оптимизации процесса затухания малых колебаний пространственного двойного маятника [42].

**1. Степень устойчивости.** Обсудим подробнее траектории движения корней (2.5.12) характеристического уравнения в безразмерном виде  $\kappa = \lambda/k$  по корневому годографу с увеличением коэффициента  $\nu = n/k$  от 0 до  $\infty$ . При  $\nu = 0$  все четыре корня, очевидно, лежат на мнимой оси плоскости годографа. При увеличении  $\nu$  в диапазоне  $0 < \nu < \nu_{20}$  эти корни перемещаются по полуокружностям, лежащим слева от мнимой оси:

$$(\operatorname{Re} \kappa_{1,2})^2 + (\operatorname{Im} \kappa_{1,2})^2 = p_{10}^2, \quad (\operatorname{Re} \kappa_{3,4})^2 + (\operatorname{Im} \kappa_{3,4})^2 = p_{20}^2. \quad (5.2.1)$$

При этом корни  $\kappa_{3,4}$  двигаются по большей полуокружности (5.2.1) и сближаются, пока при  $\nu = \nu_{20}$  не сольются в один кратный вещественный корень, после чего они уже движутся в разные стороны по вещественной оси. Что касается корней  $\kappa_{1,2}$ , то они в диапазоне  $\nu_{20} < \nu < \nu_{10}$  также двигаются по своей полуокружности до тех пор, пока при  $\nu = \nu_{10}$  не происходит их слияние в один кратный корень. После этого они так же, как и пара корней  $\kappa_{3,4}$ , начинают расходиться в разные стороны по вещественной оси. Таким образом, при  $\nu \rightarrow \infty$  в каждой паре один корень стремится к  $-0$ , а другой — к  $-\infty$ . Корневой годограф этого процесса приведен на рис. 5.3.

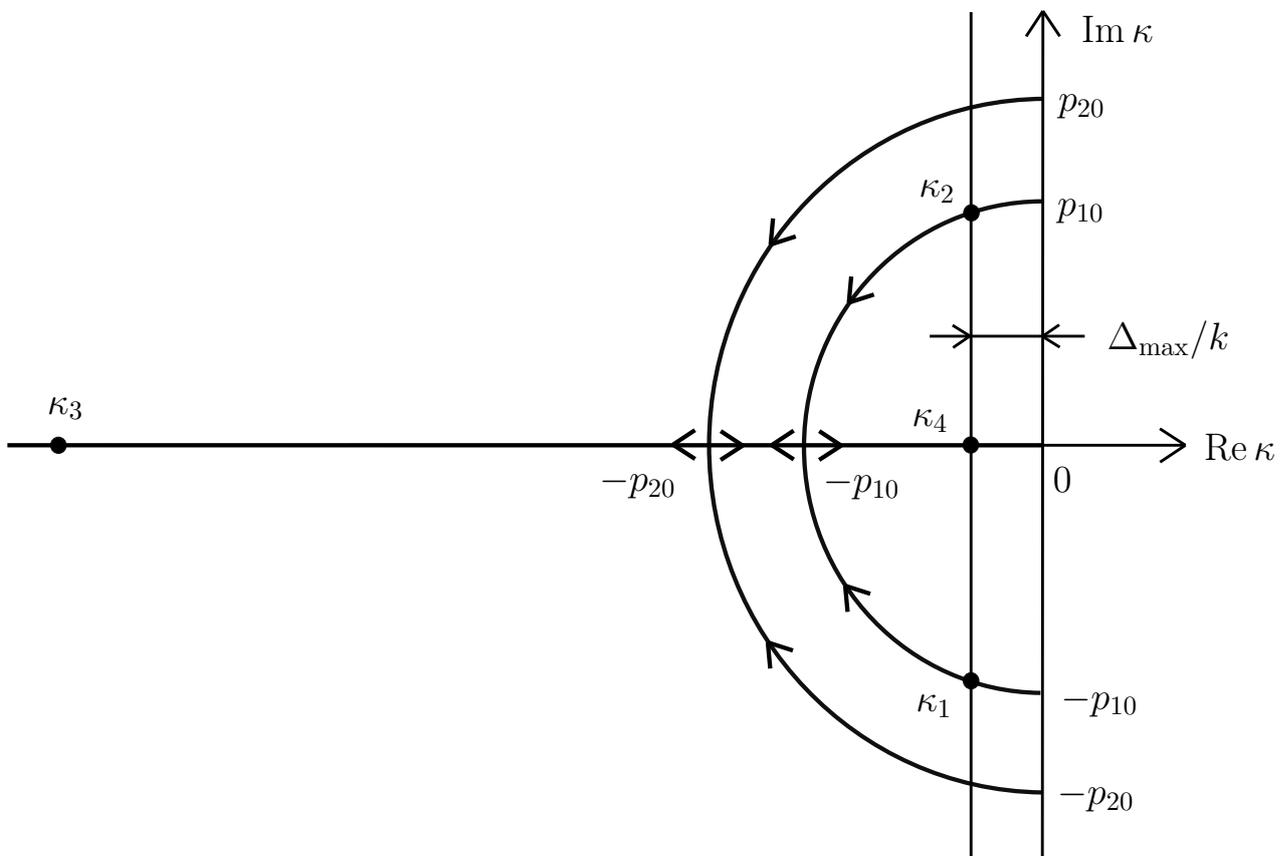


Рис. 5.3. Корневой годограф

Покажем, что существует такое значение  $\nu_*$  в диапазоне  $\nu_{20} < \nu_* < \nu_{10}$ , когда корни  $\kappa_{3,4}$  уже разошлись от своей точки слияния в разные стороны по вещественной оси, а корни  $\kappa_{1,2}$  все еще находятся на своей полуокружности, т. е. являются комплексно-сопряженными, причем вещественная часть корней  $\kappa_{1,2}$  совпадает с меньшим по модулю из вещественных корней  $\kappa_4$ . В этом случае три корня будут находиться на корневом годографе на одной вертикали, а четвертый — значительно левее них. В самом деле, приравнивая

вещественные части указанных корней, равные  $-n_1$  и  $-n_2 + \sqrt{n_2^2 - k_{20}^2}$ , и переходя к безразмерной записи, получим уравнение:

$$-\eta_1\nu = -\eta_2\nu + \sqrt{\eta_2^2\nu^2 - p_{20}^2}. \quad (5.2.2)$$

Разрешая его относительно  $\nu$ , находим искомое значение  $\nu_*$ :

$$\nu_* = \frac{p_{20}}{\sqrt{\eta_1(2\eta_2 - \eta_1)}}. \quad (5.2.3)$$

На рис. 5.4 показано расположение  $\nu_*$  относительно значений  $\nu_{20}$  и  $\nu_{10}$  в зависимости от угла  $\alpha$ , отчетливо демонстрирующее его нахождение в диапазоне  $\nu_{20} < \nu_* < \nu_{10}$ .

Таким образом, можно качественно представить поведение графиков зависимости модулей вещественных частей всех четырех корней характеристического уравнения в безразмерном варианте (рис. 5.5). Здесь сплошными линиями выделены участки, отвечающие ближайшему к мнимой оси корню, который и определяет безразмерную степень устойчивости  $\Delta/k$ . Для убедительности дополнительно покажем, что кривая  $|\operatorname{Re} \kappa_2| = \eta_1\nu - \sqrt{\eta_1^2\nu^2 - p_{10}^2}$  при  $\nu > \nu_{10}$  лежит выше кривой  $|\operatorname{Re} \kappa_4| = \eta_2\nu - \sqrt{\eta_2^2\nu^2 - p_{20}^2}$ . В самом деле, имеет место следующая цепочка соотношений:

$$|\operatorname{Re} \kappa_2| = \frac{p_{10}^2/\eta_1}{\nu + \sqrt{\nu^2 - \nu_{10}^2}} > \frac{p_{20}^2/\eta_2}{\nu + \sqrt{\nu^2 - \nu_{20}^2}} = |\operatorname{Re} \kappa_4|, \quad (5.2.4)$$

где учтено, что  $\nu_{10} > \nu_{20}$  согласно (2.5.17), а также принято во внимание, что

$$\frac{p_{10}^2}{\eta_1} = \frac{1}{2 - 1/p_{10}^2} > \frac{1}{2 - 1/p_{20}^2} = \frac{p_{20}^2}{\eta_2} \quad (5.2.5)$$

в силу соотношений (2.5.14) и того, что  $p_{10} < p_{20}$ . По графику, представленному на рис. 5.5, легко видеть, что максимум степени устойчивости доставляет именно значение  $\nu_*$ , при этом данный экстремум является острым. Максимальное значение степени устойчивости с учетом обезразмеривания будет:

$$\frac{\Delta_{\max}}{k} = \eta_1\nu_* = p_{20}\sqrt{\frac{\eta_1}{2\eta_2 - \eta_1}}. \quad (5.2.6)$$

Из формул (5.2.3) и (5.2.6) можно определить значения  $\nu_*$  и  $\Delta_{\max}/k$  в частных случаях. Так, при  $\alpha = 0$  находим

$$\nu_* = \sqrt{\frac{13\sqrt{2} + 18}{21}} \approx 1.3163, \quad \frac{\Delta_{\max}}{k} = \sqrt{\frac{5\sqrt{2} - 6}{21}} \approx 0.2268, \quad (5.2.7)$$

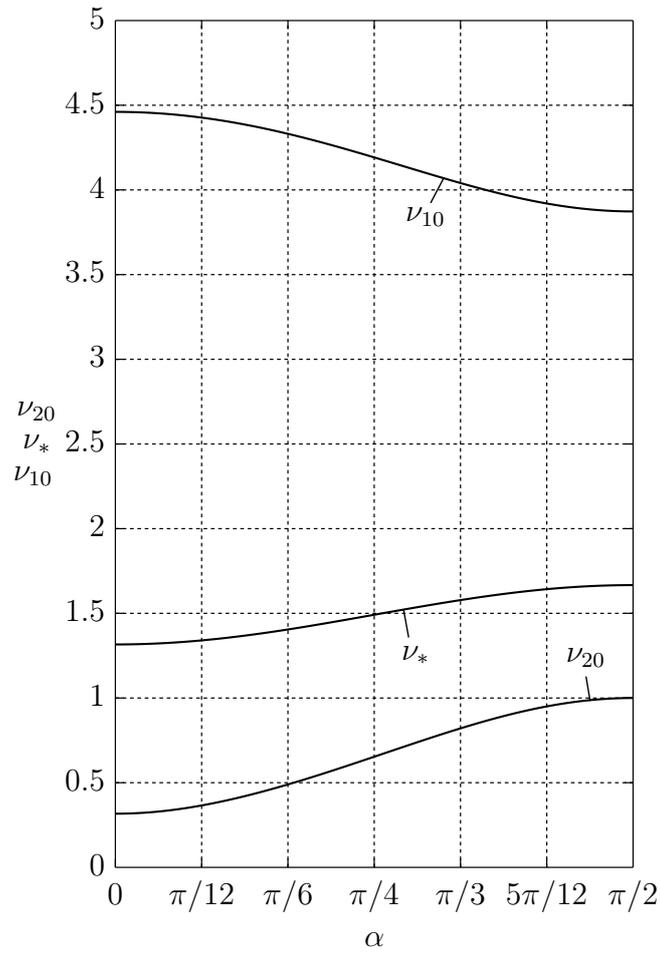


Рис. 5.4. Графики зависимости величин  $\nu_{20}$ ,  $\nu_*$  и  $\nu_{10}$  от угла  $\alpha$

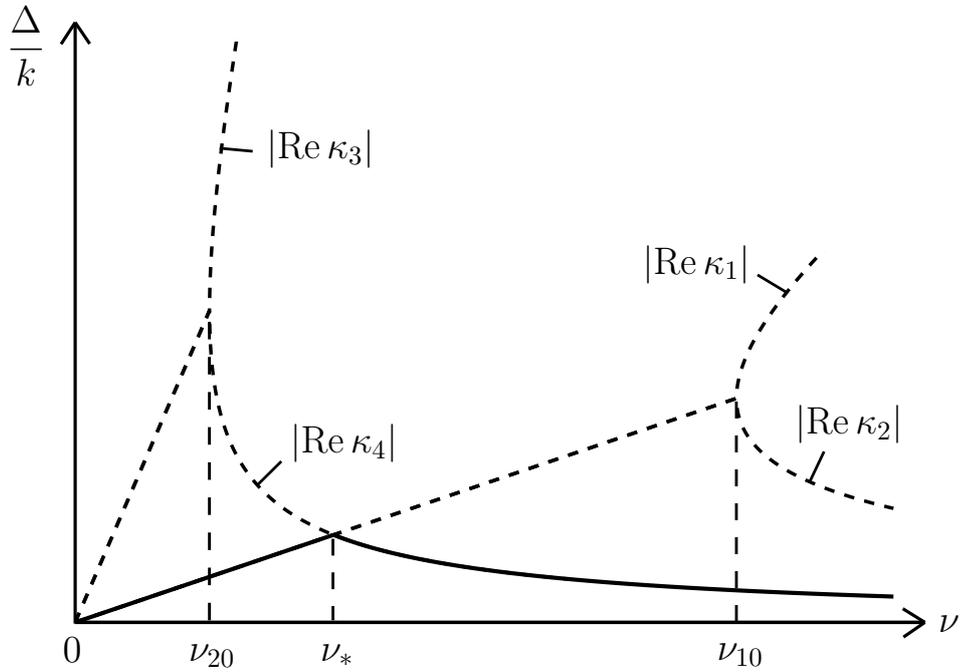


Рис. 5.5. График зависимости безразмерной степени устойчивости  $\Delta/k$  от  $\nu$

а при  $\alpha = \pi/2$  будем иметь

$$\nu_* = \frac{5}{3} \approx 1.6667, \quad \frac{\Delta_{\max}}{k} = \frac{1}{3} \approx 0.3333. \quad (5.2.8)$$

Наконец, по рис. 5.5 видно, что при  $0 < \nu \leq \nu_*$  безразмерная степень устойчивости определяется вещественной частью комплексно-сопряженных корней  $\kappa_{1,2}$ , а при  $\nu > \nu_*$  – меньшим по модулю из вещественных корней  $\kappa_4$ , поэтому

$$\frac{\Delta}{k} = \begin{cases} \eta_1 \nu, & 0 < \nu \leq \nu_* \\ \eta_2 \nu - \sqrt{\eta_2^2 \nu^2 - p_{20}^2}, & \nu > \nu_* \end{cases}. \quad (5.2.9)$$

Естественно, что как при  $\nu \rightarrow 0$ , так и при  $\nu \rightarrow \infty$  степень устойчивости стремится к нулю.

**2. Энерго-временной критерий.** Для решения поставленной задачи по второму критерию будем использовать решение в виде (2.5.26) в комплексной форме. Его удобство заключается в том, что интеграл (5.1.2) тогда будет вычисляться наиболее просто. Подставляя формулы (2.5.26) и (2.5.27) в выражения (2.4.3) для кинетической и потенциальной энергий, а также используя формулы (2.4.21) и (2.4.22), вычислим полную механическую энергию:

$$E = \frac{1}{2} [N_1 e^{-n_1 t} f_1(t) + N_2 e^{-n_2 t} f_2(t)], \quad (5.2.10)$$

где функции  $f_s(t)$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} f_s(t) = & A_s^2 e^{2ik_s t} [(n_s + ik_s)^2 + k_{s0}^2] + \\ & + B_s^2 e^{-2ik_s t} [(-n_s + ik_s)^2 + k_{s0}^2] + 4A_s B_s k_{s0}^2, \quad s = 1, 2. \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

Подставим теперь выражение (5.2.10) с учетом (5.2.11) в интеграл (5.1.2), принимая во внимание, что

$$\int_0^{\infty} e^{-2(n_s \pm ik_s)t} dt = \frac{1}{2(n_s \pm ik_s)}, \quad \int_0^{\infty} e^{-2n_s t} dt = \frac{1}{2n_s}, \quad s = 1, 2. \quad (5.2.12)$$

Тогда получим для  $F$  следующее выражение:

$$F = \frac{1}{2} \left[ N_1 \frac{(A_1 + B_1)^2 n_1^2 + 2A_1 B_1 k_1^2}{n_1} + N_2 \frac{(A_2 + B_2)^2 n_2^2 + 2A_2 B_2 k_2^2}{n_2} \right]. \quad (5.2.13)$$

Отметим, что комплексные константы интегрирования  $A_s$  и  $B_s$  в этом выражении имеют представления (2.5.28). Кроме того, подчеркнем, что выражение (5.2.13) не имеет особенностей при появлении кратных корней характеристического уравнения, т. е. когда  $k_s \rightarrow 0$ . В самом деле, легко видеть, что как величины  $A_s + B_s$ , так и величины  $A_s B_s k_s^2$  при этом оказываются конечными согласно (2.5.28). Таким образом, полученное выражение (5.2.13) справедливо при любых значениях безразмерного диссипативного коэффициента  $\nu$ .

Перейдем теперь к определению оптимального значения  $\nu$  для наилучшей совокупности начальных условий. С этой целью представим начальные условия  $\boldsymbol{\theta}_0$  и  $\dot{\boldsymbol{\theta}}_0$  в виде суммы двух форм колебаний  $\Theta_{(1)}$  и  $\Theta_{(2)}$  с некоторыми коэффициентами  $P_s$  и  $R_s$ :

$$\boldsymbol{\theta}_0 = P_1 \Theta_{(1)} + P_2 \Theta_{(2)}, \quad \dot{\boldsymbol{\theta}}_0 = R_1 \Theta_{(1)} + R_2 \Theta_{(2)}, \quad (5.2.14)$$

причем эти коэффициенты однозначно определяются по заданным  $\boldsymbol{\theta}_0$  и  $\dot{\boldsymbol{\theta}}_0$  [10]. Однако они не совсем удобны для дальнейшего анализа. Поэтому вместо пар коэффициентов  $(P_s, R_s)$  целесообразно ввести две другие пары  $(r_s, \mu_s)$  по формулам:

$$P_s = \frac{r_s}{\sqrt{N_s k_{s0}^2}} \cos \mu_s, \quad R_s = \frac{r_s}{\sqrt{N_s}} \sin \mu_s. \quad (5.2.15)$$

Ясно, что переход от одних коэффициентов к другим фактически представляет переход от декартовых координат к полярным с некоторыми масштабными множителями. При этом  $\mu_s \in [0, 2\pi)$ , а  $r_s \in [0, \infty)$ . Удобно задать пару  $(r_1, r_2)$  также полярными координатами:

$$r_1 = \rho \cos \vartheta, \quad r_2 = \rho \sin \vartheta, \quad (5.2.16)$$

где  $\rho \in [0, \infty)$ , а  $\vartheta \in [0, \pi/2]$ . Удобство осуществленной замены столбцов начальных условий  $\boldsymbol{\theta}_0$  и  $\dot{\boldsymbol{\theta}}_0$  на параметры  $\rho$ ,  $\vartheta$ ,  $\mu_1$  и  $\mu_2$  заключается в том, что начальная энергия системы тогда выразится наиболее просто:

$$E_0 = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}_0^T \mathbf{A}_0 \dot{\boldsymbol{\theta}}_0 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}_0^T \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\theta}_0 = \frac{1}{2} \rho^2. \quad (5.2.17)$$

Отсюда следует важный вывод, что параметр  $\rho$  характеризует уровень начальной энергии системы, а параметры  $\vartheta$ ,  $\mu_1$  и  $\mu_2$  никак на него не влияют.

Подставляя теперь (2.5.28), (5.2.14), (5.2.15), (5.2.16) в (5.2.13) и принимая

во внимание (5.2.17), приходим к выражению для  $F(\nu, \mu_1, \mu_2, \vartheta)$ :

$$F = \frac{E_0}{2} \left[ \frac{\cos^2 \vartheta}{k_{10}} \left( \frac{1}{\nu_1} + \nu_1 + \nu_1 \cos 2\mu_1 + \sin 2\mu_1 \right) + \frac{\sin^2 \vartheta}{k_{20}} \left( \frac{1}{\nu_2} + \nu_2 + \nu_2 \cos 2\mu_2 + \sin 2\mu_2 \right) \right], \quad (5.2.18)$$

где для удобства также введены еще два безразмерных диссипативных коэффициента  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , которые связаны с  $\nu$  посредством следующих формул:

$$\nu_1 = \frac{n_1}{k_{10}} = \frac{\eta_1}{p_{10}} \nu, \quad \nu_2 = \frac{n_2}{k_{20}} = \frac{\eta_2}{p_{20}} \nu. \quad (5.2.19)$$

Обращаясь к выражению (5.2.18) для интегрального критерия оптимизации, перейдем теперь непосредственно к поиску оптимального значения  $\nu$  для наихудшей совокупности начальных условий. Здесь мы встречаемся с минимаксной задачей о нахождении точек экстремума функции  $F(\nu, \mu_1, \mu_2, \vartheta)$ , т. е. о нахождении  $\min_{\nu} \max_{\mu_1, \mu_2, \vartheta} F(\nu, \mu_1, \mu_2, \vartheta)$ . Видно, что при этом сама величина начальной энергии  $E_0$  не играет роли, а имеет значение лишь соотношение между столбцами начальных условий  $\theta_0$  и  $\dot{\theta}_0$ , определяемое величинами  $\mu_1, \mu_2, \vartheta$ . Отбрасывая далее несущественный множитель  $E_0/(2k)$  в выражении для  $F$ , обозначим получившееся безразмерное выражение через  $f$ :

$$f = \frac{\cos^2 \vartheta}{p_{10}} \left[ \frac{1}{\nu_1} + \nu_1 + \sqrt{1 + \nu_1^2} \sin(2\mu_1 + \psi_1) \right] + \frac{\sin^2 \vartheta}{p_{20}} \left[ \frac{1}{\nu_2} + \nu_2 + \sqrt{1 + \nu_2^2} \sin(2\mu_2 + \psi_2) \right], \quad \text{tg } \psi_s = \nu_s, \quad s = 1, 2. \quad (5.2.20)$$

Из (5.2.20) нетрудно видеть, что  $f$  достигает своих максимальных по  $\mu_1$  и  $\mu_2$  значений, равных

$$f_{\max_{\mu_1, \mu_2}} = \frac{\cos^2 \vartheta}{p_{10}} \left( \frac{1}{\nu_1} + \nu_1 + \sqrt{1 + \nu_1^2} \right) + \frac{\sin^2 \vartheta}{p_{20}} \left( \frac{1}{\nu_2} + \nu_2 + \sqrt{1 + \nu_2^2} \right) \quad (5.2.21)$$

в тех точках, когда  $\sin(2\mu_1 + \psi_1) = 1$ ,  $\sin(2\mu_2 + \psi_2) = 1$ . Далее необходимо максимизировать по  $\vartheta$  выражение (5.2.21). Ясно, что своих экстремальных значений это выражение достигает либо при  $\vartheta = 0$  (когда начальные условия задаются по первой форме), либо при  $\vartheta = \pi/2$  (когда начальные условия задаются по второй форме). Определим, в какой из этих точек функция  $f_{\max_{\mu_1, \mu_2}}$

достигает максимального значения по  $\vartheta$ . Для этого выпишем значения данной функции в экстремальных точках:

$$\begin{aligned} \vartheta = 0 : \quad f_{\max}^{\mu_1, \mu_2} &= \frac{1}{p_{10}} \left( \frac{1}{\nu_1} + \nu_1 + \sqrt{1 + \nu_1^2} \right), \\ \vartheta = \frac{\pi}{2} : \quad f_{\max}^{\mu_1, \mu_2} &= \frac{1}{p_{20}} \left( \frac{1}{\nu_2} + \nu_2 + \sqrt{1 + \nu_2^2} \right). \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

Если выразить  $\nu_1$  и  $\nu_2$  через  $\nu$  посредством соотношений (5.2.19), то можно получить, что каждое из этих выражений является функцией  $\nu$  и  $\alpha$ . Для того, чтобы сравнить между собой значения (5.2.22), запишем их упрощенные представления. Так, при  $\nu \rightarrow 0$  имеем

$$f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = 0) \approx \frac{1}{\eta_1 \nu} + \frac{1}{p_{10}}, \quad f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = \frac{\pi}{2}) \approx \frac{1}{\eta_2 \nu} + \frac{1}{p_{20}}, \quad (5.2.23)$$

тогда как при  $\nu \rightarrow \infty$  будет

$$f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = 0) \approx 2 \left( 2 - \frac{1}{p_{10}^2} \right) \nu, \quad f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = \frac{\pi}{2}) \approx 2 \left( 2 - \frac{1}{p_{20}^2} \right) \nu, \quad (5.2.24)$$

где учтены формулы (2.5.14). Поскольку  $p_{10} < p_{20}$ ,  $\eta_1 < \eta_2$ , то отсюда можно заключить, что при  $\nu \rightarrow 0$  будет  $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = 0) > f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = \pi/2)$ , тогда как при  $\nu \rightarrow \infty$  имеем уже  $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = 0) < f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = \pi/2)$ . Это означает, что уравнение  $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = 0) = f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = \pi/2)$  имеет при любом значении  $\alpha$  на интервале  $0 < \nu < \infty$ , по крайней мере, один вещественный корень, который можно определить при помощи численных процедур. Численное исследование показывает, что такой корень  $\nu_*$  при любом  $\alpha$  оказывается единственным.

Из этих рассуждений следует, что максимальное значение функции  $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}$  по  $\vartheta$  зависит от величины коэффициента  $\nu$  следующим образом:

$$f_{\max}^{\mu_1, \mu_2, \vartheta} = \begin{cases} \frac{1}{p_{10}} \left( \frac{1}{\nu_1} + \nu_1 + \sqrt{1 + \nu_1^2} \right), & 0 < \nu \leq \nu_* \\ \frac{1}{p_{20}} \left( \frac{1}{\nu_2} + \nu_2 + \sqrt{1 + \nu_2^2} \right), & \nu > \nu_* \end{cases}. \quad (5.2.25)$$

Остается найти минимальное значение функции (5.2.25) по  $\nu$ . Для этого сперва определим точки экстремума каждой из функций (5.2.22) на интервале  $0 < \nu < \infty$ . Поскольку  $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}$  при  $\vartheta = 0$  является функцией переменной  $\nu_1$ , то

для нахождения ее точки экстремума достаточно вычислить ее производную по этой переменной и приравнять полученное выражение нулю. В результате после ряда преобразований будем иметь:

$$\nu_1^4 + \nu_1^2 - 1 = 0, \quad \nu_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}, \quad \nu_{*1} = \frac{p_{10}}{\eta_1} \nu_1 = \frac{p_{10}}{\eta_1} \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}. \quad (5.2.26)$$

Аналогично определяем точку экстремума функции  $f_{\max_{\mu_1, \mu_2}}$  при  $\vartheta = \pi/2$ :

$$\nu_2^4 + \nu_2^2 - 1 = 0, \quad \nu_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}, \quad \nu_{*2} = \frac{p_{20}}{\eta_2} \nu_2 = \frac{p_{20}}{\eta_2} \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}. \quad (5.2.27)$$

Построим на одном графике зависимости  $\nu_*$ ,  $\nu_{*1}$  и  $\nu_{*2}$  от угла  $\alpha$  (рис. 5.6). Легко видеть, что при любом значении  $\alpha$  будем иметь  $\nu_{*2} < \nu_* < \nu_{*1}$ . Это означает, что значение  $\nu_{*1}$  не попадает в интервал  $0 < \nu \leq \nu_*$ , а значение  $\nu_{*2}$  не попадает в интервал  $\nu > \nu_*$ . Поэтому график функции (5.2.25) на всем интервале  $0 < \nu < \infty$  схематично может быть представлен в следующем виде (рис. 5.7). При этом необходимые отрезки функций выделены сплошными линиями, а посторонние – пунктирными. Отсюда ясно, что минимум функции  $f_{\max_{\mu_1, \mu_2, \vartheta}}$  достигается именно при  $\nu = \nu_*$ , причем этот экстремум является острым, как это было и при рассмотрении критерия оптимизации, основанного на степени устойчивости. Отметим, что в точке  $\nu = \nu_*$  оба значения в (5.2.22) оказываются равными, поэтому если вернуться к формуле (5.2.21), то можно видеть, что при данном значении  $\nu$  в нем будет отсутствовать зависимость от  $\vartheta$ , поскольку равный множитель можно вынести за скобку, а  $\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta = 1$ . Левая ветвь графика, изображенного на рис. 5.7, соответствует значению  $\vartheta = \pi/2$ , а правая ветвь – значению  $\vartheta = 0$ . В найденной же оптимальной точке  $\nu = \nu_*$  величина  $\vartheta$  не играет никакой роли – она может быть любой, и значение критерия (5.2.21) от этого не изменится.

Наконец, выпишем конкретные значения величины  $\nu_*$  и отвечающие им значения критерия  $f_{\max_{\mu_1, \mu_2, \vartheta}}$  в частных случаях. Так, при  $\alpha = 0$  находим

$$\nu_* = 1.5764, \quad f_{\max_{\mu_1, \mu_2, \vartheta}} = 5.5458, \quad (5.2.28)$$

а при  $\alpha = \pi/2$  будем иметь

$$\nu_* = 1.9521, \quad f_{\max_{\mu_1, \mu_2, \vartheta}} = 4.6577. \quad (5.2.29)$$

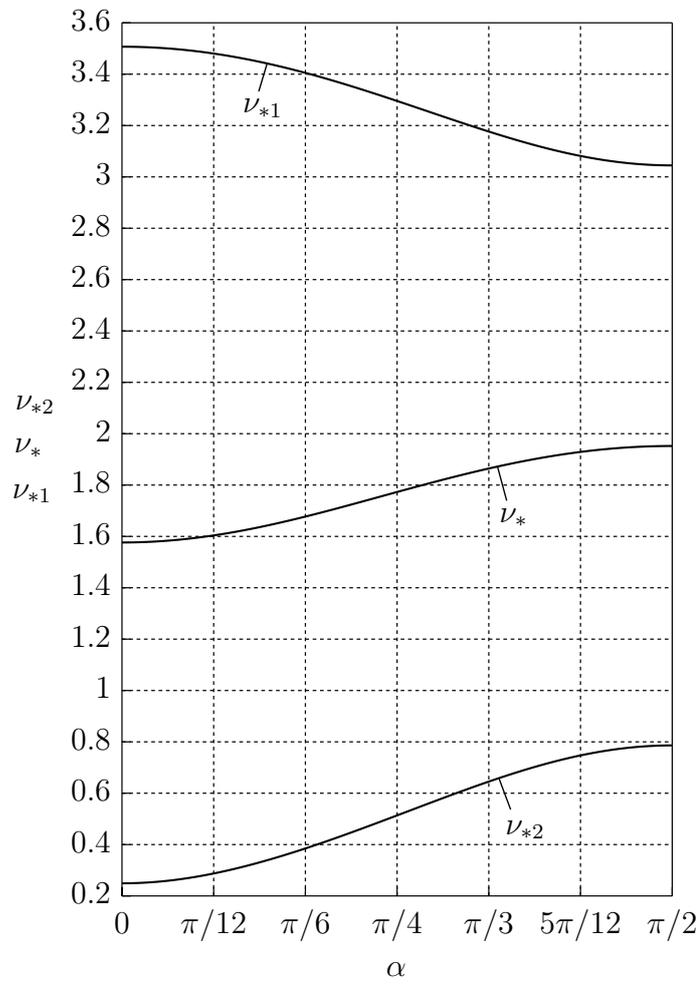


Рис. 5.6. Графики зависимости величин  $\nu_{*2}$ ,  $\nu_*$  и  $\nu_{*1}$  от угла  $\alpha$

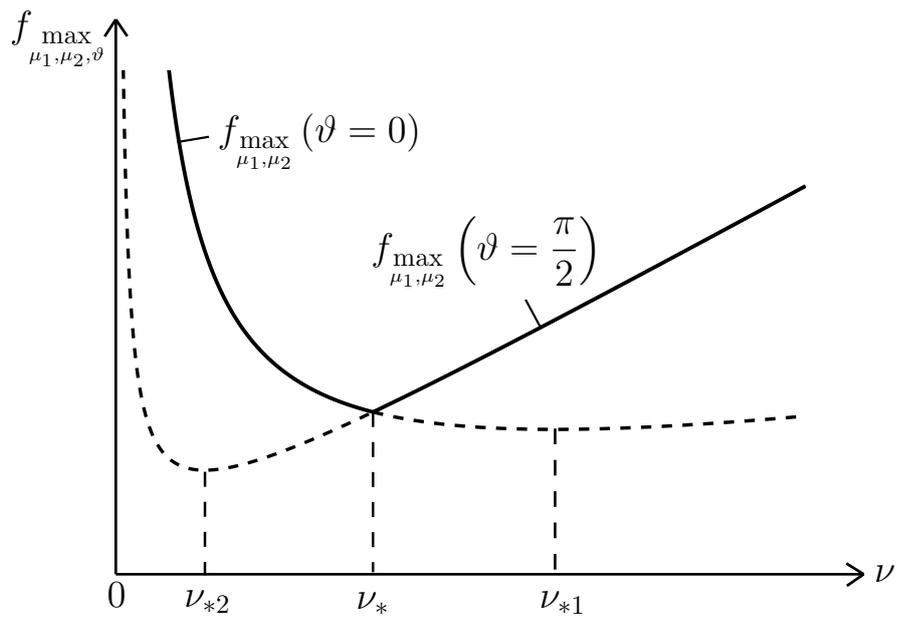


Рис. 5.7. График зависимости  $f_{\mu_1, \mu_2, \vartheta}^{\max}$  от  $\nu$

### 5.3. Оптимизация коллинеарного гашения колебаний

Предположим теперь, что гашение колебаний пространственного двойного маятника осуществляется посредством коллинеарного торможения, т. е. является активным. Определим на основе тех же самых критериев оптимизации, что и для случая пассивного подавления колебаний, оптимальные значения параметра  $\gamma < 0$  (или отвечающей ему величины  $\delta = \gamma/2$ ).

**1. Степень устойчивости.** Как и прежде, сначала рассмотрим критерий, основанный на степени устойчивости, и обсудим поведение безразмерных корней характеристического уравнения  $\kappa = \lambda/k$ , обращаясь к формулам (4.3.5). Нетрудно понять, что корневой годограф здесь будет иметь тот же самый вид, что и на рис. 5.3, однако движение корней при изменении коэффициента  $\sigma = \delta/k$  по нему теперь происходит иначе. Так, при  $\sigma = 0$  все четыре корня лежат на мнимой оси. При уменьшении  $\sigma$  в диапазоне  $-p_{10} < \sigma < 0$  корни двигаются по полуокружностям (5.2.1), находясь при этом на одной вертикали. При  $\sigma = -p_{10}$  корни  $\kappa_{1,2}$  сливаются в один кратный вещественный корень и при дальнейшем уменьшении  $\sigma$  расходятся по вещественной оси в разные стороны от точки слияния. Что касается пары корней  $\kappa_{3,4}$ , то при  $-p_{20} < \sigma < -p_{10}$  они продолжают движение по своей полуокружности, пока при  $\sigma = -p_{20}$  не сольются в кратный корень, после чего при  $\sigma < -p_{20}$  также расходятся по вещественной оси.

Принимая во внимание сказанное, можно построить графики зависимости модулей вещественных частей всех четырех корней характеристического уравнения в безразмерном варианте (рис. 5.8). Как и прежде, сплошными линиями здесь выделены участки, отвечающие ближайшему к мнимой оси корню, который и определяет безразмерную степень устойчивости  $\Delta/k$ . Подчеркнем дополнительно, что в отличие от рассмотренного выше случая вязкого демпфирования, здесь при  $\sigma < -p_{20}$  кривая  $|\operatorname{Re} \kappa_2| = -\sigma - \sqrt{\sigma^2 - p_{10}^2}$  лежит ниже кривой  $|\operatorname{Re} \kappa_4| = -\sigma - \sqrt{\sigma^2 - p_{20}^2}$ , и это очевидно в силу того, что  $p_{10} < p_{20}$ . Ясно, что в исследуемой задаче максимальная степень устойчивости достигается в точке, когда корни  $\kappa_{1,2}$  сливаются, т. е. при условии их кратности. Таким образом, получаем оптимальное значение  $\sigma_*$  и отвечающую

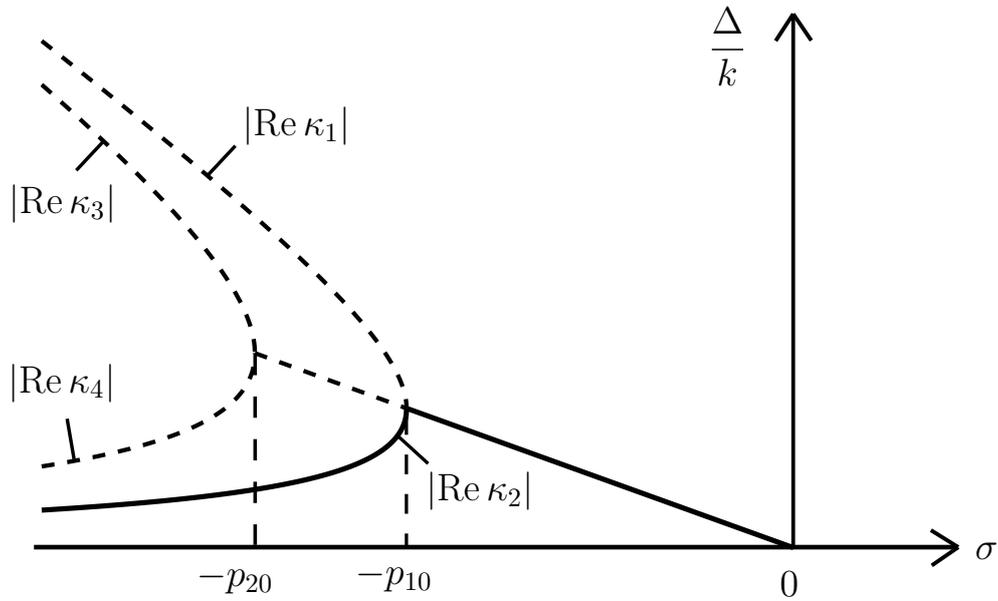


Рис. 5.8. График зависимости безразмерной степени устойчивости  $\Delta/k$  от  $\sigma$

ему максимальную степень устойчивости в безразмерном варианте:

$$\sigma_* = -p_{10}, \quad \frac{\Delta_{\max}}{k} = p_{10}. \quad (5.3.1)$$

Следовательно, зависимость  $\sigma_*$  от угла  $\alpha$  полностью повторяет зависимость первой частоты от этого угла, представленную на рис. 2.6, а потому значение  $\sigma_*$  практически не зависит от угла  $\alpha$ . Ясно, что при  $-p_{10} \leq \sigma < 0$  безразмерная степень устойчивости определяется вещественной частью комплексно-сопряженных корней  $\kappa_{1,2}$ , а после этой точки – меньшим по модулю из этих корней  $\kappa_2$ , которые уже становятся вещественными:

$$\frac{\Delta}{k} = \begin{cases} -\sigma, & -p_{10} \leq \sigma < 0 \\ -\sigma - \sqrt{\sigma^2 - p_{10}^2}, & \sigma < -p_{10} \end{cases}. \quad (5.3.2)$$

Однако здесь следует иметь в виду два важных обстоятельства. Во-первых, как уже говорилось выше, в случае кратного корня одна из функций в фундаментальной системе решений имеет вид  $te^{-k_{10}t}$ . Эта функция нарастает при малых временах, хотя и затухает при  $t \rightarrow \infty$ , и, тем не менее, вряд ли целесообразно иметь такую составляющую решения, если речь идет об оптимальном гашении колебаний [76]. Во-вторых, левая часть графика, изображенного на рис. 5.8, имеет в точке  $\sigma = -p_{10}$  вертикальную касательную. Это значит,

что даже малейшая ошибка в величине  $\sigma$  в меньшую сторону может привести к резкому падению степени устойчивости. Отсюда следует, что если руководствоваться критерием, основанным на степени устойчивости, то на практике лучше всего выбирать значение  $\sigma_*$  несколько большим, чем значение  $-p_{10}$ , чтобы оно было расположено на линейном участке графика. В этом случае оба указанных недостатка будут устранены: не будет кратных корней, а ошибка в значении  $\sigma$  приведет к точно такой же ошибке в значении  $\Delta/k$ .

**2. Энерго-временной критерий.** Обращаясь теперь к интегральному критерию (5.1.2) и не останавливаясь вновь на преобразованиях, придем после совершенно аналогичных действий к следующему выражению для этого критерия:

$$F = \frac{E_0}{2} \left[ \frac{\cos^2 \vartheta}{k_{10}} \left( \frac{1}{\sigma_1} + \sigma_1 + \sigma_1 \cos 2\mu_1 + \sin 2\mu_1 \right) + \frac{\sin^2 \vartheta}{k_{20}} \left( \frac{1}{\sigma_2} + \sigma_2 + \sigma_2 \cos 2\mu_2 + \sin 2\mu_2 \right) \right], \quad (5.3.3)$$

где также введены безразмерные коэффициенты  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , связанные с  $\sigma$  по формулам:

$$\sigma_1 = -\frac{\delta}{k_{10}} = -\frac{\sigma}{p_{10}}, \quad \sigma_2 = -\frac{\delta}{k_{20}} = -\frac{\sigma}{p_{20}}. \quad (5.3.4)$$

Видно, что выражение (5.3.3) с точностью до обозначений совпадает с (5.2.18), однако зависимость коэффициентов  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  от  $\sigma$  согласно выражению (5.3.4) принципиально отличается от того, как ранее зависели  $\nu_1$  и  $\nu_2$  от  $\nu$  в (5.2.19). Поэтому имеет смысл далее действовать более подробно.

Отбрасывая в (5.3.3) несущественный постоянный множитель  $E_0/(2k)$  и находя максимальное значение получившегося выражения по  $\mu_1$  и  $\mu_2$

$$f_{\max_{\mu_1, \mu_2}} = \frac{\cos^2 \vartheta}{p_{10}} \left( \frac{1}{\sigma_1} + \sigma_1 + \sqrt{1 + \sigma_1^2} \right) + \frac{\sin^2 \vartheta}{p_{20}} \left( \frac{1}{\sigma_2} + \sigma_2 + \sqrt{1 + \sigma_2^2} \right), \quad (5.3.5)$$

видим, что, как и прежде, оно достигает экстремума по  $\vartheta$  в точках  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi/2$ . Сопоставляя значения функции  $f_{\max_{\mu_1, \mu_2}}$  в этих точках

$$\begin{aligned} \vartheta = 0 : \quad f_{\max_{\mu_1, \mu_2}} &= \frac{1}{p_{10}} \left( \frac{1}{\sigma_1} + \sigma_1 + \sqrt{1 + \sigma_1^2} \right), \\ \vartheta = \frac{\pi}{2} : \quad f_{\max_{\mu_1, \mu_2}} &= \frac{1}{p_{20}} \left( \frac{1}{\sigma_2} + \sigma_2 + \sqrt{1 + \sigma_2^2} \right), \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

и принимая во внимание выражения (5.3.4), нетрудно установить, что

$$\begin{aligned} f_{\mu_1, \mu_2}^{\max}(\vartheta = 0) &= -\frac{1}{\sigma} - \frac{\sigma}{p_{10}^2} + \frac{1}{p_{10}} \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{p_{10}^2}}, \\ f_{\mu_1, \mu_2}^{\max}\left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right) &= -\frac{1}{\sigma} - \frac{\sigma}{p_{20}^2} + \frac{1}{p_{20}} \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{p_{20}^2}}. \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

Отсюда легко видеть, что максимальное значение функции  $f_{\mu_1, \mu_2}^{\max}$  по  $\vartheta$  достигается при  $\vartheta = 0$  для любого значения  $\sigma$ , поскольку  $p_{20} > p_{10}$ . Остается минимизировать выражение

$$f_{\mu_1, \mu_2, \vartheta}^{\max} = \frac{1}{p_{10}} \left( \frac{1}{\sigma_1} + \sigma_1 + \sqrt{1 + \sigma_1^2} \right) \quad (5.3.8)$$

по  $\sigma$  (или, что проще, по  $\sigma_1$ ). Дифференцируя (5.3.8) по  $\sigma_1$  и приравнявая производную нулю, получим:

$$\sigma_1^4 + \sigma_1^2 - 1 = 0, \quad \sigma_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} = -\frac{\sigma_*}{p_{10}}. \quad (5.3.9)$$

Таким образом, оптимальное значение  $\sigma$  определяется выражением:

$$\sigma_* = -\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} p_{10} \approx -0.7862 p_{10}. \quad (5.3.10)$$

Полученное оптимальное значение тесно связано со знаменитым «золотым сечением», которое часто возникает при решении самых разнообразных оптимизационных задач. В частности, аналогичный результат имеет место в задаче оптимизации демпфирования однозвенного манипулятора, т. е. системы с одной степенью свободы (когда действие коллинеарного управления фактически идентично вязкому трению), где использовался тот же критерий оптимизации [76]. Кроме того, представленную методику поиска оптимального параметра коллинеарного гашения можно обобщить на случай механической системы, обладающей произвольным конечным числом степеней свободы [68]. Наконец, вычислим также значение критерия  $f_{\mu_1, \mu_2, \vartheta}^{\max}$  в найденной точке, которое понадобится нам в дальнейшем:

$$f_{\mu_1, \mu_2, \vartheta}^{\max} = \frac{\sqrt{11 + 5\sqrt{5}}}{p_{10}\sqrt{2}} \approx \frac{3.3302}{p_{10}}. \quad (5.3.11)$$

## 5.4. Сопоставление оптимальных параметров пассивного и активного гашения колебаний

Перейдем к сопоставлению результатов, полученных для пассивного и активного гашения колебаний пространственного двойного маятника. Сначала построим графики зависимости величин  $\nu_*$  и  $\sigma_*$  от угла  $\alpha$ , полученные при исследовании обоих критериев оптимизации. При этом для избежания путаницы дополним обозначения данных величин индексами, показывающими их принадлежность к определенному критерию: (1) – критерию, основанному на степени устойчивости, (2) – энерго-временному критерию. Указанные зависимости представлены на рис. 5.9 и рис. 5.10 соответственно.

Видно, что для обоих случаев гашения имеются отличия в оптимальных значениях, полученных при исследовании различных критериев оптимизации, однако их разброс не является слишком существенным. Поэтому можно оценить, в каком диапазоне наиболее выгодно выбирать параметры  $\nu$  и  $\sigma$ , чтобы обеспечить экстремальные свойства рассматриваемых критериев. При этом нетрудно понять, что в случае оптимального пассивного гашения по обоим критериям движение системы является *колебательно-апериодическим*, т. к.  $\nu_{20} < \nu_* < \nu_{10}$  при любом значении угла  $\alpha$ : корни  $\kappa_{1,2}$  являются комплексно-сопряженными, а корни  $\kappa_{3,4}$  являются вещественными. Это означает, что первая форма гасится достаточно медленно и сохраняет колебательный характер, в то время, как вторая форма оказывается сильно задемпфированной, и вместо колебаний по ней имеет место апериодическое затухание. В случае оптимального активного гашения по обоим критериям характер затухания форм является *колебательным* (разумеется, при условии, что оптимальное значение по критерию, основанному на степени устойчивости, берется на практике несколько правее точки максимума).

Для оценки преимущества активного способа гашения колебания перед пассивным построим график зависимости отношения  $\beta^{(1)}$  степени устойчивости при оптимальном значении  $\sigma = \sigma_*^{(1)}$  в случае активного гашения к степени устойчивости при оптимальном значении  $\nu = \nu_*^{(1)}$  в случае пассивного гашения от угла  $\alpha$ . Кроме того, обращаясь к интегральному критерию, рассмотрим его значения в оптимальных точках  $\sigma = \sigma_*^{(2)}$  и  $\nu = \nu_*^{(2)}$ , даю-

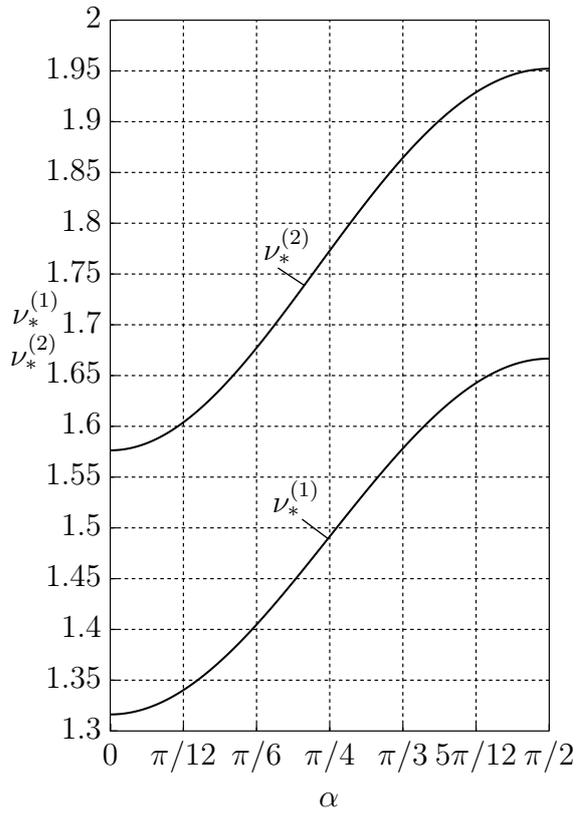


Рис. 5.9. Графики зависимости величин  $\nu_*^{(1)}$  и  $\nu_*^{(2)}$  от угла  $\alpha$

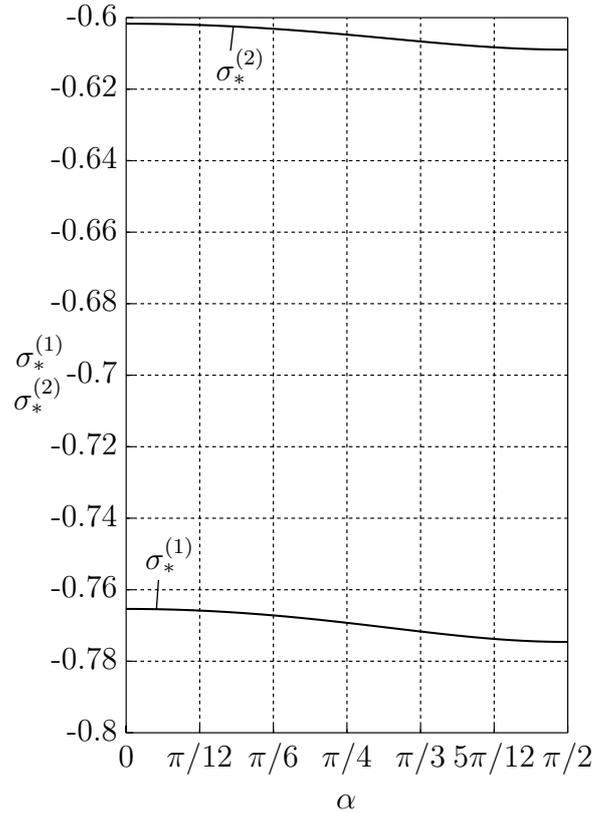


Рис. 5.10. Графики зависимости величин  $\sigma_*^{(1)}$  и  $\sigma_*^{(2)}$  от угла  $\alpha$

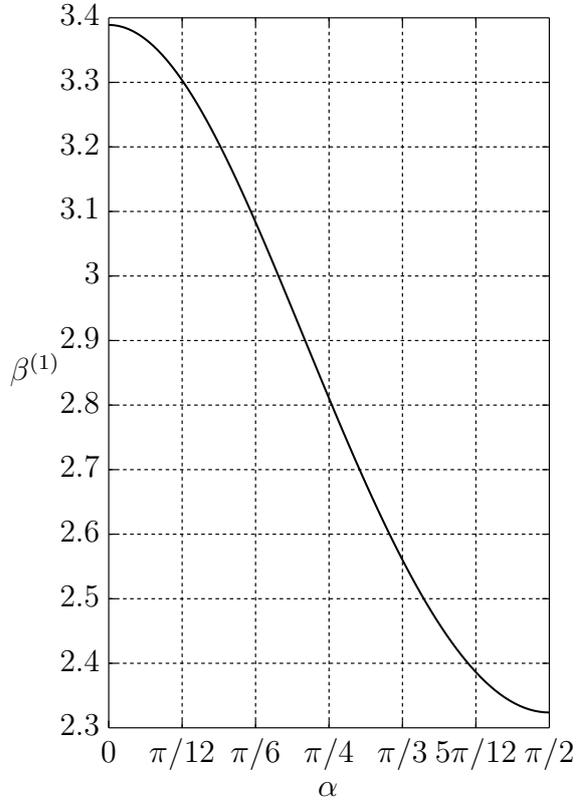


Рис. 5.11. График зависимости величины  $\beta^{(1)}$  от угла  $\alpha$

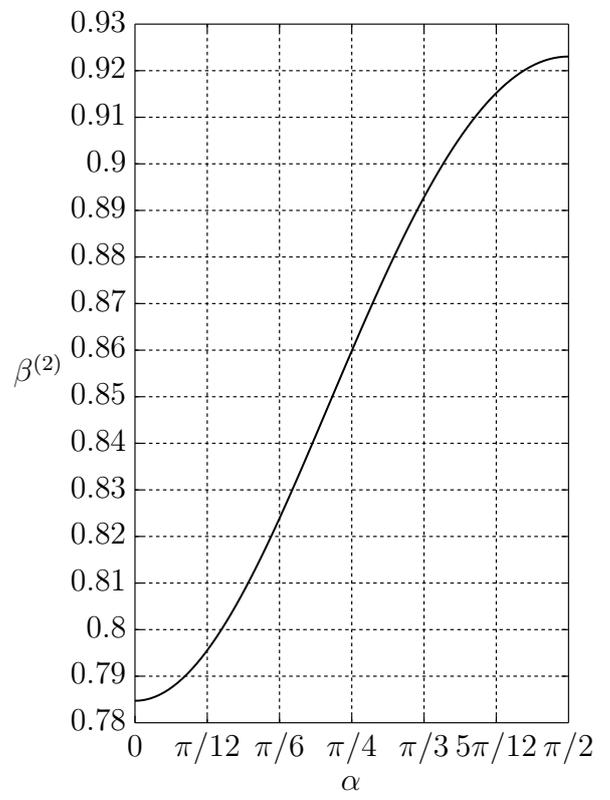


Рис. 5.12. График зависимости величины  $\beta^{(2)}$  от угла  $\alpha$

щих наилучший результат в наихудшем случае для активного и пассивного гашения соответственно, и также построим график их отношения  $\beta^{(2)}$ . Эти графики представлены на рис. 5.11 и рис. 5.12 соответственно. Видно, что  $\beta^{(1)} > 1$ , а  $\beta^{(2)} < 1$ , как этого и следовало ожидать. При этом активное гашение позволяет существенно повысить максимальную степень устойчивости по сравнению с пассивным вариантом гашения, тогда как выигрыш в величине энерго-временного показателя оказывается не таким ощутимым.

## 5.5. Оптимизация коллинеарного гашения колебаний при наличии вязкого демпфирования

В заключение рассмотрим ситуацию, когда в системе уже имеется некоторое заданное демпфирование в обоих шарнирах с безразмерным диссипативным коэффициентом  $\nu$ . Выясним, как следует выбрать параметры активного коллинеарного воздействия, чтобы улучшить процессы затухания движений пространственного двойного маятника. Ясно, что в этом случае корни характеристического уравнения в безразмерном варианте будут определяться формулами (4.5.19). Как и прежде, проанализируем оба критерия и определим зависимость оптимального значения  $\sigma_*$  по этим критериям от  $\nu$ .

**1. Степень устойчивости.** Нетрудно понять, что при  $\nu$ , не превышающем некоторого значения  $\nu_{**}$ , по-прежнему будет возможно слияние корней  $\kappa_{1,2}$ , как это было и при  $\nu = 0$ , а корни  $\kappa_{3,4}$  тогда будут находиться левее этих корней. Тогда максимальная безразмерная степень устойчивости будет равна  $\Delta_*/k = p_{10}$ , а отвечающее ей значение  $\sigma_*$  определится условием:

$$\sigma - \eta_1\nu = -p_{10}, \quad \sigma_{*1}(\nu) = -p_{10} + \eta_1\nu, \quad (5.5.1)$$

и к нему также относится все сказанное ранее в п. 5.3 про кратные корни. Однако если  $\nu$  превысит значение  $\nu_{**}$ , то такая ситуация будет уже невозможна, т. к. корень  $\kappa_4$  при уменьшении  $\sigma$  окажется лежащим на одной вертикали с корнями  $\kappa_{1,2}$  раньше, чем они сольются в один кратный корень. Эта ситуация аналогична случаю, который имел место в п. 5.2. Вещественная часть указанных трех корней и определит максимальную степень устойчивости.

Следовательно, в этом случае значение  $\sigma_*$  определяется из уравнения:

$$\sigma - \eta_1\nu = \sigma - \eta_2\nu + \sqrt{(\sigma - \eta_2\nu)^2 - p_{20}^2}, \quad (5.5.2)$$

разрешая которое относительно  $\sigma$ , находим необходимое значение:

$$\sigma_{*2}(\nu) = \eta_2\nu - \sqrt{(\eta_2 - \eta_1)^2 \nu^2 + p_{20}^2}. \quad (5.5.3)$$

Приравнивая выражения (5.5.1) и (5.5.3), находим после решения получившегося уравнения пограничное значение  $\nu_{**}$ :

$$\nu_{**} = \frac{p_{20}^2 - p_{10}^2}{2p_{10}(\eta_2 - \eta_1)}. \quad (5.5.4)$$

Нетрудно понять, что при  $\nu = \nu_{**}$  максимальная степень устойчивости будет отвечать тому случаю, когда три корня оказываются одинаковыми. Объединяя теперь выражения (5.5.1) и (5.5.3), получим, что оптимальное значение  $\sigma_*$  определяется следующей формулой:

$$\sigma_*(\nu) = \begin{cases} -p_{10} + \eta_1\nu, & 0 < \nu \leq \nu_{**} \\ \eta_2\nu - \sqrt{(\eta_2 - \eta_1)^2 \nu^2 + p_{20}^2}, & \nu > \nu_{**} \end{cases}. \quad (5.5.5)$$

Видно, что это выражение обращается в нуль при  $\nu = \nu_*$ , определяемом из (5.2.3), т. е. когда коэффициент вязкого демпфирования принимается по оптимальному варианту. Как и следовало ожидать, в этой ситуации улучшить степень устойчивости путем введения коллинеарного управления будет невозможно. При этом важно подчеркнуть, что при  $\nu > \nu_*$  значение  $\sigma_*$  становится положительным, и это говорит о том, что в данном случае коллинеарное управление должно быть разгонным. Тем не менее, совместное действие демпфирования и коллинеарного управления дает эффект подавления колебаний, поскольку легко видеть, что в этом случае из (5.5.5) вытекает, что  $\sigma_* < \eta_1\nu$ , а согласно диаграмме, представленной на рис. 4.14, гашению движений системы отвечает именно эта зона. При этом  $\sigma_*$  при  $\nu \rightarrow \infty$  стремится снизу к наклонной асимптоте  $\sigma_* = \eta_1\nu$ . Отметим, что можно записать приближенный характер зависимости (5.5.5) при больших значениях  $\nu$ :

$$\begin{aligned} \sigma_*(\nu) &= \eta_2\nu - (\eta_2 - \eta_1)\nu \sqrt{1 + \frac{p_{20}^2}{(\eta_2 - \eta_1)^2 \nu^2}} \approx \\ &\approx \eta_1\nu - \frac{p_{20}^2}{2(\eta_2 - \eta_1)\nu} + \frac{p_{20}^4}{8(\eta_2 - \eta_1)^3 \nu^3}. \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

Наконец, получим выражение для безразмерной степени устойчивости, отвечающей оптимальному выбору значения  $\sigma_*$  согласно (5.5.5), в зависимости от величины  $\nu$ . Ясно, что при любом  $\nu$  из диапазона  $0 < \nu \leq \nu_{**}$  можно надлежащим подбором  $\sigma$  обеспечить максимально возможное значение безразмерной степени устойчивости, равное  $p_{10}$ , когда корни  $\kappa_{1,2}$  являются кратными. Если же  $\nu > \nu_{**}$ , то максимальная степень устойчивости в безразмерном варианте будет отвечать совпадению вещественных частей трех корней, которые по абсолютной величине согласно (5.5.2) и (5.5.3) будут равны  $\eta_1\nu - \sigma_{*2} = -(\eta_2 - \eta_1)\nu + \sqrt{(\eta_2 - \eta_1)^2\nu^2 + p_{20}^2}$ . Естественно, что это значение будет убывать с увеличением  $\nu$ . Объединяя полученные выражения, будем иметь:

$$\frac{\Delta_*}{k} = \begin{cases} p_{10}, & 0 < \nu \leq \nu_{**} \\ -(\eta_2 - \eta_1)\nu + \sqrt{(\eta_2 - \eta_1)^2\nu^2 + p_{20}^2}, & \nu > \nu_{**} \end{cases}. \quad (5.5.7)$$

График зависимости  $\Delta_*/k$  в зависимости от  $\nu$  при выборе оптимального значения  $\sigma_*$  представлен на рис. 5.13.

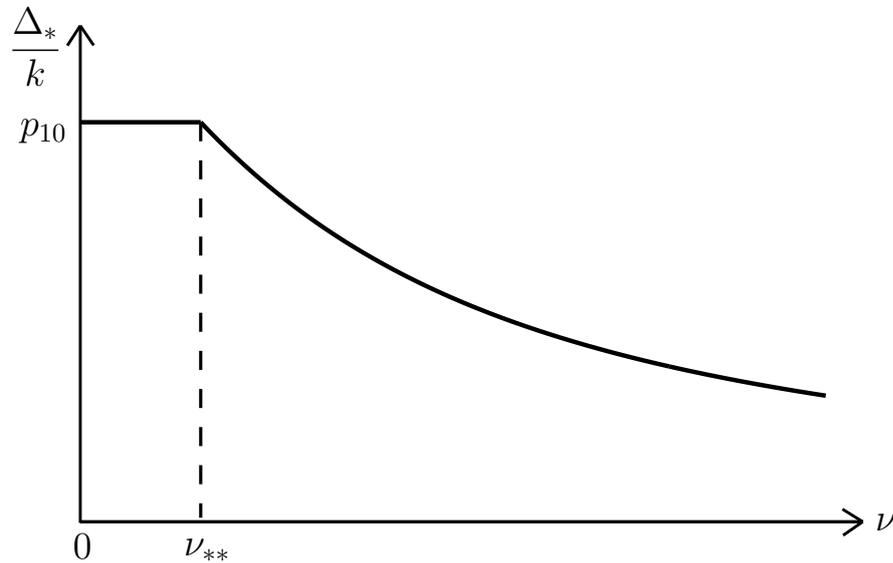


Рис. 5.13. Безразмерная степень устойчивости в зависимости от  $\nu$  при выборе оптимального значения  $\sigma_*$

**2. Энерго-временной критерий.** Обращаясь к исследованию интегрального критерия для рассматриваемой задачи, нетрудно понять, что выражение

для него по аналогии с (5.2.18) и (5.3.3) будет иметь следующий вид:

$$F = \frac{E_0}{2} \left[ \frac{\cos^2 \vartheta}{k_{10}} \left( \frac{1}{\nu_1 + \sigma_1} + \nu_1 + \sigma_1 + (\nu_1 + \sigma_1) \cos 2\mu_1 + \sin 2\mu_1 \right) + \right. \\ \left. + \frac{\sin^2 \vartheta}{k_{20}} \left( \frac{1}{\nu_2 + \sigma_2} + \nu_2 + \sigma_2 + (\nu_2 + \sigma_2) \cos 2\mu_2 + \sin 2\mu_2 \right) \right], \quad (5.5.8)$$

где сохраняются прежние обозначения (5.2.19) для  $\nu_s$  и (5.3.4) для  $\sigma_s$ . Вновь отбрасывая постоянный множитель  $E_0/(2k)$ , запишем сразу максимальное значение получившегося выражения по  $\mu_1$  и  $\mu_2$ :

$$f_{\mu_1, \mu_2}^{\max} = \frac{\cos^2 \vartheta}{p_{10}} \left( \frac{1}{\nu_1 + \sigma_1} + \nu_1 + \sigma_1 + \sqrt{1 + (\nu_1 + \sigma_1)^2} \right) + \\ + \frac{\sin^2 \vartheta}{p_{20}} \left( \frac{1}{\nu_2 + \sigma_2} + \nu_2 + \sigma_2 + \sqrt{1 + (\nu_2 + \sigma_2)^2} \right). \quad (5.5.9)$$

Как и прежде, далее необходимо разобраться, какое из выражений больше:

$$\vartheta = 0 : \quad f_{\mu_1, \mu_2}^{\max} = \frac{1}{p_{10}} \left( \frac{1}{\nu_1 + \sigma_1} + \nu_1 + \sigma_1 + \sqrt{1 + (\nu_1 + \sigma_1)^2} \right), \\ \vartheta = \frac{\pi}{2} : \quad f_{\mu_1, \mu_2}^{\max} = \frac{1}{p_{20}} \left( \frac{1}{\nu_2 + \sigma_2} + \nu_2 + \sigma_2 + \sqrt{1 + (\nu_2 + \sigma_2)^2} \right). \quad (5.5.10)$$

Выше было установлено, что при  $\nu = 0$  имеем  $f_{\mu_1, \mu_2}^{\max}(\vartheta = 0) > f_{\mu_1, \mu_2}^{\max}(\vartheta = \pi/2)$  при любом значении  $\sigma$ . Чтобы выяснить поведение этих функций при  $\nu \neq 0$ , запишем их приближенные выражения при  $\sigma \rightarrow -\infty$ :

$$f_{\mu_1, \mu_2}^{\max}(\vartheta = 0) \approx 2 \left[ 2\nu - (\nu + \sigma) \frac{1}{p_{10}^2} \right], \quad f_{\mu_1, \mu_2}^{\max} \left( \vartheta = \frac{\pi}{2} \right) \approx 2 \left[ 2\nu - (\nu + \sigma) \frac{1}{p_{20}^2} \right], \quad (5.5.11)$$

а для первой из них – также при приближении  $\sigma$  к другой границе  $\sigma = \eta_1 \nu$ , которая является границей зоны гашения движений на диаграмме режимов с рис. 5.13:

$$f_{\mu_1, \mu_2}^{\max}(\vartheta = 0) \approx \frac{1}{\eta_1 \nu - \sigma} + \frac{1}{p_{10}}, \quad (5.5.12)$$

в то время, как  $f_{\mu_1, \mu_2}^{\max}(\vartheta = \pi/2)$  при  $\sigma \rightarrow \eta_1 \nu$  стремится к конечному пределу. Легко видеть, что как при  $\sigma \rightarrow -\infty$ , так и при  $\sigma \rightarrow \eta_1 \nu$  будем иметь  $f_{\mu_1, \mu_2}^{\max}(\vartheta = 0) > f_{\mu_1, \mu_2}^{\max}(\vartheta = \pi/2)$ . Ясно, что при увеличении  $\nu$  от 0 до некоторого пограничного значения  $\nu_{**}$  графики этих функций по-прежнему не будут

иметь общих точек, так что  $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = 0)$  будет являться наибольшим из указанных двух значений. Его минимизация, как нетрудно понять, приводит к следующему значению  $\sigma_*$  в исследуемом диапазоне:

$$\sigma - \eta_1 \nu = -\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} p_{10}, \quad \sigma_{*1}(\nu) = -\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} p_{10} + \eta_1 \nu. \quad (5.5.13)$$

При увеличении  $\nu$  в некоторый момент произойдет касание двух кривых  $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = 0)$  и  $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = \pi/2)$ . Однако пограничной ситуацией, отвечающей значению  $\nu_{**}$ , является не случай касания, а случай пересечения этих кривых в точке экстремума кривой  $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = 0)$ , потому что именно она являлась до сих пор точкой минимума функции  $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2, \vartheta}$ . Чтобы определить эту точку, достаточно решить уравнение  $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = 0) = f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = \pi/2)$  с учетом представлений (5.5.10), подставив в него выражение (5.5.13). Численное исследование позволяет найти таким образом зависимость  $\nu_{**}(\alpha)$ . Обращаясь к анализу случая  $\nu > \nu_{**}$ , отметим сначала, что функция  $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = \pi/2)$  при  $\sigma < \eta_1 \nu$  будет убывающей, т. к. точка ее экстремума

$$\sigma = -\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} p_{20} + \eta_2 \nu \quad (5.5.14)$$

не попадет в интересующий нас интервал, оказавшись больше значения  $\eta_1 \nu$ . В самом деле, используя численные методы решения алгебраических уравнений, можно установить, что в случае расположения этой точки на границе  $\sigma = \eta_1 \nu$ , реализуемом при

$$\nu = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} \frac{p_{20}}{\eta_2 - \eta_1}, \quad (5.5.15)$$

уравнение  $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = 0) = f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = \pi/2)$  не будет иметь решений ни при каких значениях  $\alpha$ , т. е. кривые  $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = 0)$  и  $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = \pi/2)$  еще не будут пересекаться. А тогда при  $\nu > \nu_{**}$  в силу убывания функции  $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = \pi/2)$  на исследуемом интервале указанные кривые будут иметь две точки пересечения, причем минимумом функции  $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2, \vartheta}$  будет точка пересечения  $\sigma_{*2}$ , лежащая ближе к правой границе интервала. Эта ситуация представлена на рис. 5.14, где сплошной линией выделена зависимость  $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2, \vartheta}$ , а посторонние участки отмечены пунктиром.

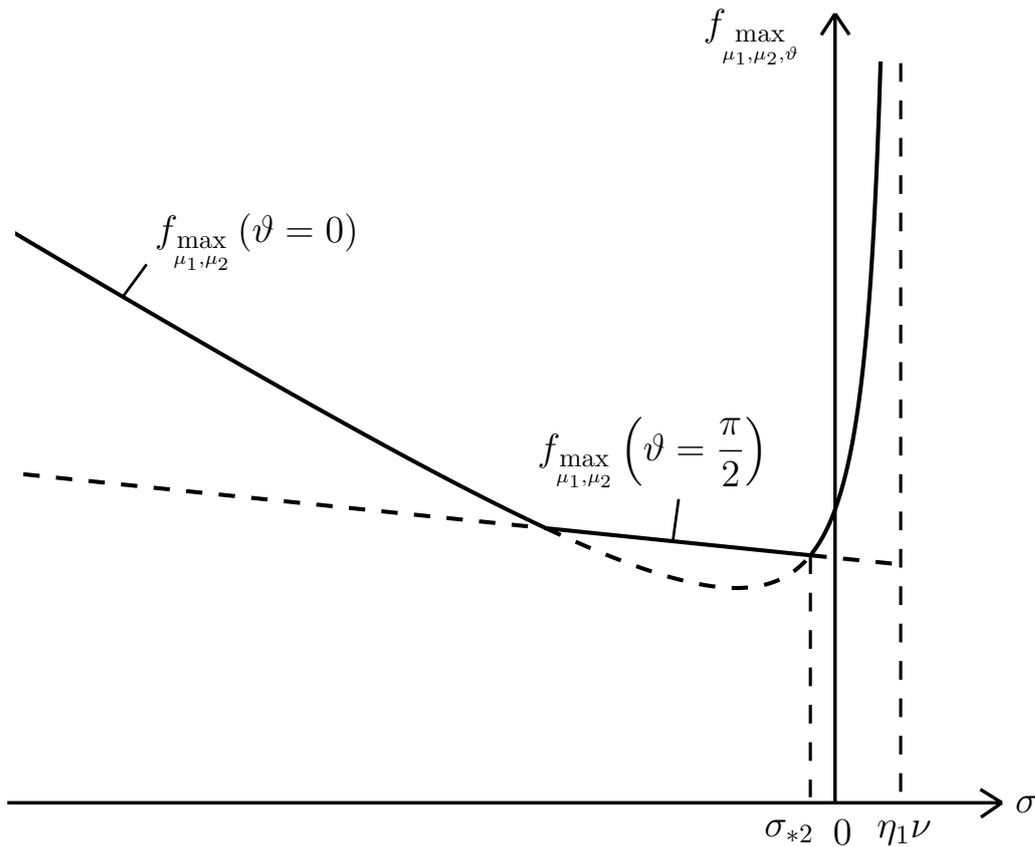


Рис. 5.14. График зависимости  $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2, \vartheta}$  от  $\sigma$  при заданном значении  $\nu > \nu_{**}$

Нетрудно понять, что с увеличением  $\nu$  при  $\nu = \nu_*$  эта точка окажется равной  $\sigma_{*2} = 0$ , поскольку при выборе  $\nu$  по оптимальному варианту на основе энерго-временного критерия улучшить данный показатель будет невозможно. В самом деле, если обратиться к уравнению  $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = 0) = f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = \pi/2)$  с учетом представлений (5.5.10), то легко видеть, что оно удовлетворяется именно при  $\nu = \nu_*$  и  $\sigma = 0$ , поскольку значение  $\nu_*$  получалось ранее из точно такого же уравнения, в котором  $\sigma$  отсутствовало, так что выражения (5.5.10) в этой ситуации полностью переходят в (5.2.22). При последующем увеличении  $\nu$  уже имеем  $\sigma_{*2} > 0$ , причем  $\sigma_{*2} \rightarrow \eta_1 \nu$  при  $\nu \rightarrow \infty$ . Чтобы определить приближенное выражение для точки  $\sigma_{*2}$  при больших значениях  $\nu$ , вернемся к уравнению  $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = 0) = f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = \pi/2)$ , из которого она находится, и положим

$$\sigma_{*2} = \eta_1 \nu + \frac{A}{\nu} + \frac{B}{\nu^2}, \quad (5.5.16)$$

где  $A$  и  $B$  – неопределенные коэффициенты. Подставляя выражение (5.5.16) в исследуемое уравнение  $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = 0) = f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = \pi/2)$ , удержим в его левой и правой части лишь основные слагаемые при  $\nu \rightarrow \infty$ , отвечающие их

наклонным асимптотам. Тогда получим, что

$$-\frac{1}{A}\nu + \frac{B}{A^2} + \frac{1}{p_{10}} = \frac{2(\eta_2 - \eta_1)}{p_{20}^2}\nu. \quad (5.5.17)$$

Приравнивая в этом выражении коэффициенты при одинаковых степенях  $\nu$ , находим значения  $A$  и  $B$ :

$$A = -\frac{p_{20}^2}{2(\eta_2 - \eta_1)}, \quad B = -\frac{A^2}{p_{10}} = -\frac{p_{20}^4}{4(\eta_2 - \eta_1)^2 p_{10}}. \quad (5.5.18)$$

Следовательно, приближенный характер зависимости  $\sigma_{*2}$  от  $\nu$  согласно (5.5.16) примет вид:

$$\sigma_{*2}(\nu) \approx \eta_1\nu - \frac{p_{20}^2}{2(\eta_2 - \eta_1)\nu} - \frac{p_{20}^4}{4(\eta_2 - \eta_1)^2 p_{10}\nu^2}. \quad (5.5.19)$$

Сопоставляя формулы (5.5.6) и (5.5.19), можно сделать важный вывод, что кривая, отвечающая максимуму степени устойчивости, при больших  $\nu$  располагается выше, чем кривая отвечающая минимуму интегрального критерия, а в пределе при  $\nu \rightarrow \infty$  они имеют одну и ту же наклонную асимптоту  $\sigma_* = \eta_1\nu$ . При этом в указанных приближенных выражениях совпадают не только первые слагаемые, отвечающие наклонной асимптоте, но и вторые слагаемые, обратно пропорциональные  $\nu$ . Поэтому можно заключить, что в широком диапазоне достаточно больших значений  $\nu$  оба критерия оптимизации будут приводить к практически одинаковым результатам.

Таким образом, оптимальное значение  $\sigma_*$  определяется выражением:

$$\sigma_*(\nu) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}p_{10} + \eta_1\nu, & 0 < \nu \leq \nu_{**} \\ \sigma_{*2}, & \nu > \nu_{**} \end{cases}. \quad (5.5.20)$$

Остается лишь получить выражение для  $f_{\max_{\mu_1, \mu_2, \vartheta}}$  в зависимости от  $\nu$  при выборе оптимального значения  $\sigma_*$  согласно (5.5.20). Так, в диапазоне  $0 < \nu \leq \nu_{**}$  это значение будет равно  $f_{\max_{\mu_1, \mu_2}}(\vartheta = 0)$ , вычисленному с учетом (5.5.13), что, в свою очередь, приводит к выражению (5.3.11). Конечно, это можно понять и из элементарных соображений, поскольку изменение  $\nu$  приводит лишь к параллельному переносу по горизонтали графика зависимости функции  $f_{\max_{\mu_1, \mu_2}}(\vartheta = 0)$  от  $\sigma$  согласно (5.5.10), что не влияет на ее экстремальное значение. Таким образом, в указанном диапазоне значений  $\nu$  можно надлежащим подбором  $\sigma$  обеспечить минимально возможное значение  $f_{\max_{\mu_1, \mu_2, \vartheta}}$ , равное

(5.3.11). Что же касается случая  $\nu > \nu_{**}$ , то для него искомое значение  $f_{\mu_1, \mu_2, \vartheta}^{\max}$  следует вычислять при  $\sigma = \sigma_{*2}$ , и оно окажется уже большим, чем (5.3.11). В результате находим искомую зависимость

$$f_{\mu_1, \mu_2, \vartheta}^{\max *} = \begin{cases} \frac{\sqrt{11 + 5\sqrt{5}}}{p_{10}\sqrt{2}}, & 0 < \nu \leq \nu_{**} \\ f_{\mu_1, \mu_2, \vartheta}^{\max}(\sigma_{*2}), & \nu > \nu_{**} \end{cases}, \quad (5.5.21)$$

которая представлена на рис. 5.15.

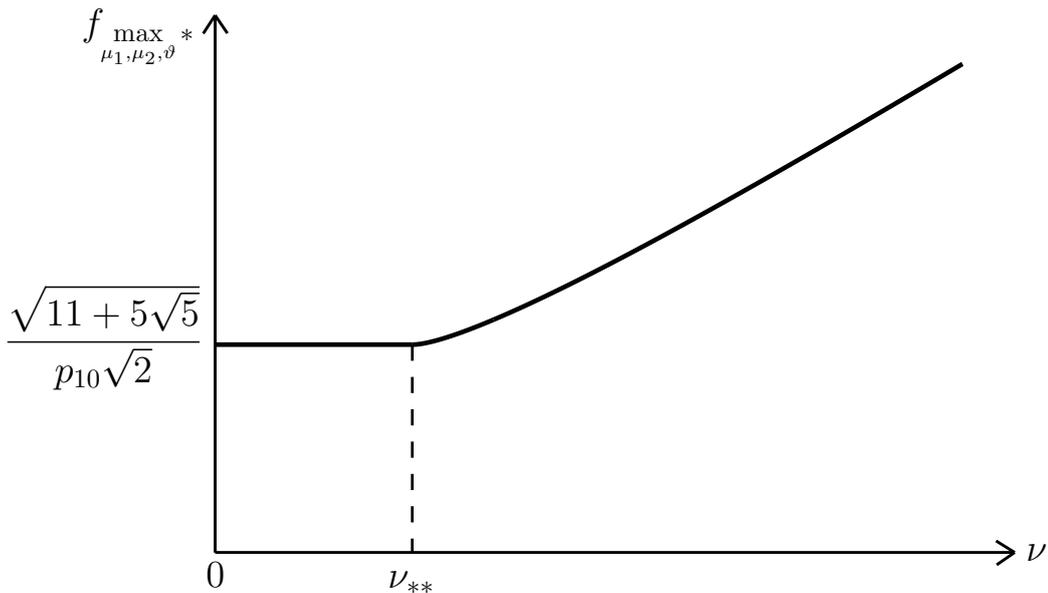


Рис. 5.15. График зависимости  $f_{\mu_1, \mu_2, \vartheta}^{\max *}$  от  $\nu$  при выборе оптимального значения  $\sigma_*$

Переходя теперь к оценке полученных результатов, обсудим зависимости  $\sigma_*$  от  $\nu$ , полученные по формулам (5.5.6) и (5.5.20) и отвечающие двум различным критериям оптимизации. Для этого сначала обратимся к характерным величинам  $\nu_*$  и  $\nu_{**}$ , полученным при исследовании каждого критерия, и построим эти зависимости от угла  $\alpha$  (рис. 5.16). Как и ранее, данные величины здесь снабжены индексами, указывающими на их принадлежность к определенному критерию: (1) – критерию, основанному на степени устойчивости, (2) – энерго-временному критерию.

Видно, что порядок расположения величин  $\nu_*^{(1)}$ ,  $\nu_*^{(2)}$ ,  $\nu_{**}^{(1)}$  и  $\nu_{**}^{(2)}$  по возрастанию при любом значении угла  $\alpha$  всегда оказывается одинаковым, поэтому графики зависимости величин  $\sigma_*^{(1)}$  и  $\sigma_*^{(2)}$  от  $\nu$  будут иметь вид, представленный на рис. 5.17. Приведенные кривые имеют количественные различия, хотя

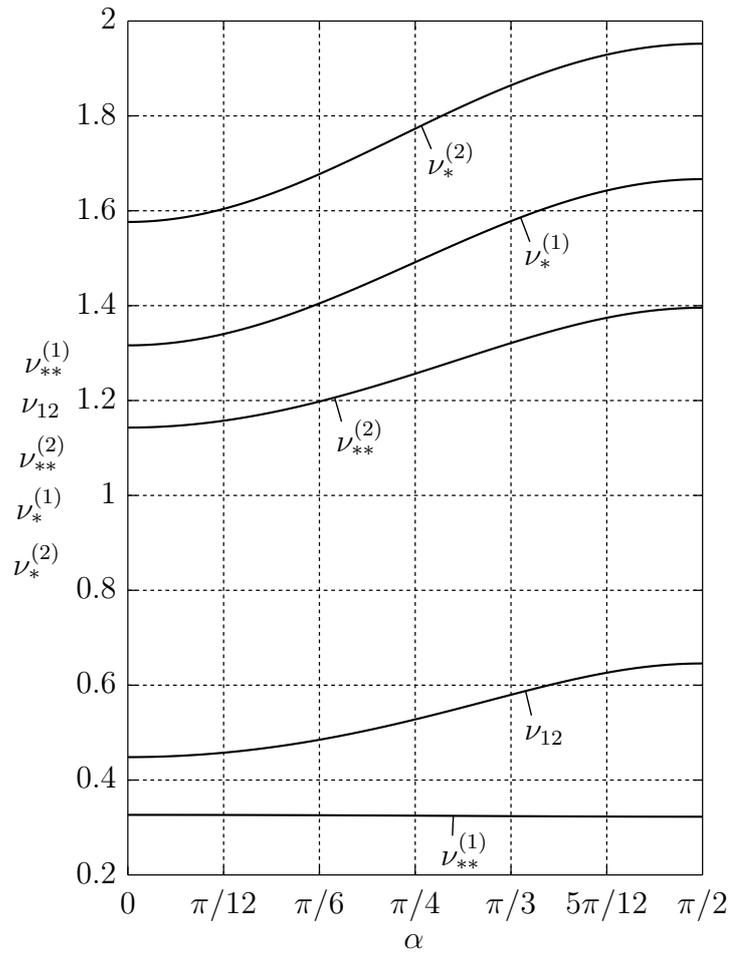


Рис. 5.16. Графики зависимости величин  $\nu_{**}^{(1)}$ ,  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{**}^{(2)}$ ,  $\nu_*^{(1)}$  и  $\nu_*^{(2)}$  от угла  $\alpha$

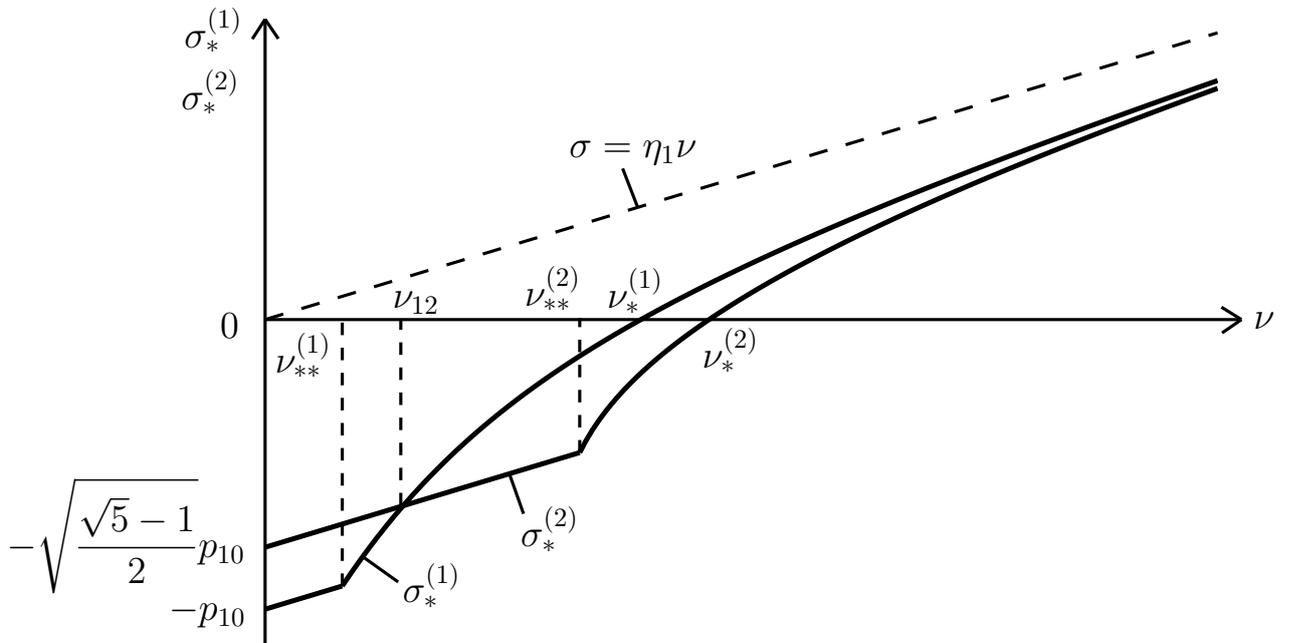


Рис. 5.17. Графики зависимости величин  $\sigma_*^{(1)}$  и  $\sigma_*^{(2)}$  от  $\nu$

качественно они очень похожи. Интересно отметить, что имеется точка  $\nu_{12}$ , в которой оба критерия дают один и тот же результат. Поскольку эта точка лежит в диапазоне  $\nu_{**}^{(1)} < \nu_{12} < \nu_{**}^{(2)}$ , то для ее определения следует записать уравнение:

$$\eta_2 \nu - \sqrt{(\eta_2 - \eta_1)^2 \nu^2 + p_{20}^2} = -\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} p_{10} + \eta_1 \nu. \quad (5.5.22)$$

Разрешая его относительно  $\nu$ , получим:

$$\nu_{12} = \frac{1}{2\sqrt{2}p_{10}} \left( \sqrt{\sqrt{5} + 1} p_{20}^2 - \sqrt{\sqrt{5} - 1} p_{10}^2 \right). \quad (5.5.23)$$

Зависимость  $\nu_{12}$  от угла  $\alpha$  также приведена на рис. 5.16. Таким образом, при любом  $\alpha$  имеет место цепочка неравенств:  $\nu_{**}^{(1)} < \nu_{12} < \nu_{**}^{(2)} < \nu_*^{(1)} < \nu_*^{(2)}$ .

В заключение представляет интерес оценить, насколько улучшились показатели качества при введении в систему коллинеарного управления с параметрами, настроенными наилучшим образом. Сначала построим график зависимости отношения  $\beta^{(1)}$  безразмерной степени устойчивости  $\Delta_*/k$  согласно (5.5.7) к безразмерной степени устойчивости  $\Delta/k$  при  $\sigma = 0$ , т. е. согласно (5.2.9), от параметра  $\nu$ . Ясно, что при  $\nu = 0$  это отношение равно  $+\infty$ , а при  $\nu = \nu_*^{(1)}$  оно достигает минимума, равного 1, когда коллинеарное управление ни при каких параметрах не может улучшить степень устойчивости. Наконец, для установления поведения этого отношения при  $\nu \rightarrow \infty$  запишем приближенные представления исследуемых функций (5.5.7) и (5.2.9):

$$\frac{\Delta_*}{k} \approx \frac{p_{20}^2}{2(\eta_2 - \eta_1)\nu}, \quad \frac{\Delta}{k} \approx \frac{p_{20}^2}{2\eta_2\nu}. \quad (5.5.24)$$

Отсюда вытекает, что предел функции  $\beta^{(1)}$  при  $\nu \rightarrow \infty$  равен  $\eta_2/(\eta_2 - \eta_1) > 1$ . Отметим, что это значение тем больше, чем больше отношение  $\eta_1/\eta_2$ , т. е. чем ближе угол  $\alpha$  к  $\pi/2$ . Указанная зависимость представлена на рис. 5.18.

Помимо этого, построим график зависимости отношения  $\beta^{(2)}$  значения функции  $f_{\mu_1, \mu_2, \vartheta}^{\max *}$  согласно (5.5.21) при наличии наилучшим образом настроенного управления к значению функции  $f_{\mu_1, \mu_2, \vartheta}^{\max}$  при отсутствии управления, т. е. согласно (5.2.25), от параметра  $\nu$ . Ясно, что при  $\nu = 0$  это отношение равно нулю, а при  $\nu = \nu_*^{(2)}$  оно достигает максимума, равного 1, когда коллинеарное управление ни при каких параметрах не может улучшить значение

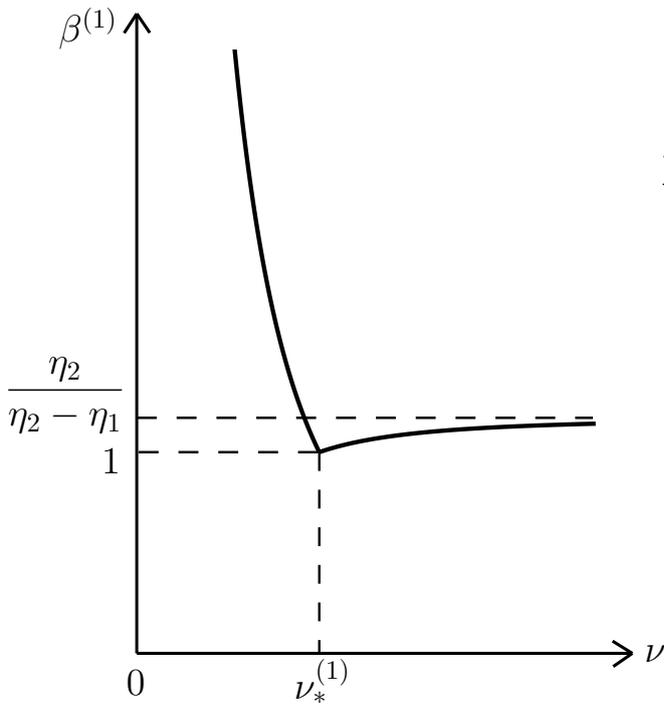


Рис. 5.18. График зависимости величины  $\beta^{(1)}$  от  $\nu$

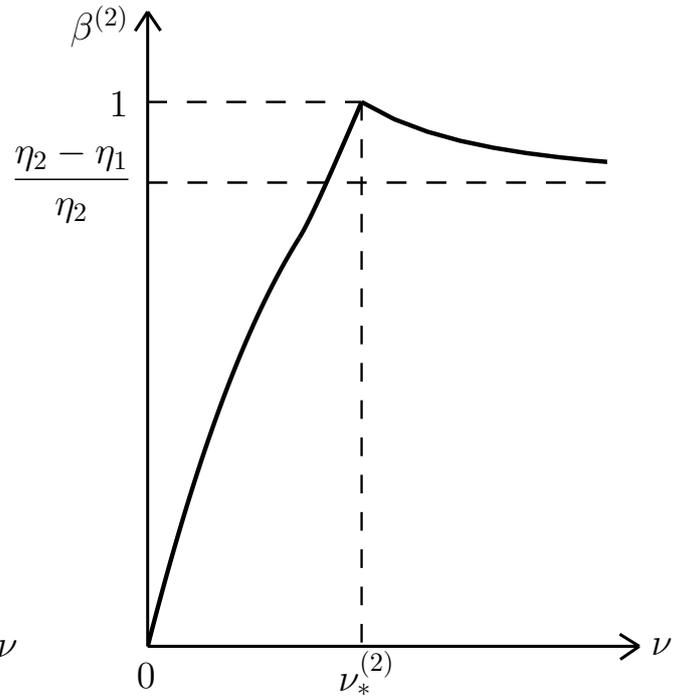


Рис. 5.19. График зависимости величины  $\beta^{(2)}$  от  $\nu$

критерия. Наконец, для установления поведения этого отношения при  $\nu \rightarrow \infty$  запишем упрощенные представления функций (5.5.21) с учетом приближенного выражения (5.5.19) и (5.2.25):

$$f_{\mu_1, \mu_2, \vartheta}^{\max * *} \approx \frac{2(\eta_2 - \eta_1)\nu}{p_{20}^2}, \quad f_{\mu_1, \mu_2, \vartheta}^{\max} \approx \frac{2\eta_2\nu}{p_{20}^2}. \quad (5.5.25)$$

Отсюда следует, что предел функции  $\beta^{(2)}$  при  $\nu \rightarrow \infty$  равен  $(\eta_2 - \eta_1)/\eta_2 < 1$ . Конечно, это значение тем меньше, чем больше отношение  $\eta_1/\eta_2$ , т. е. чем ближе  $\alpha$  к  $\pi/2$ . Упомянутая зависимость приведена на рис. 5.19.

## 5.6. Выводы по пятой главе

В настоящей главе были исследованы вопросы оптимального гашения колебаний пространственного двойного маятника. При этом рассматривалась возможность как пассивного гашения (вязкое демпфирование), так и активного гашения (коллинеарное управление), а также их совместного учета. Принимались два критерия оптимизации, характеризующие эффективность процессов затухания движений системы: максимизация степени устойчивости и минимизация энерго-временного показателя. Были обсуждены основные до-

стоинства и недостатки указанных критериев. В ходе точного решения задачи в рамках линейной модели были определены оптимальные параметры каждого из вариантов гашения как функции угла между шарнирными осями пространственного двойного маятника по обоим критериям оптимизации и осуществлено сопоставление результатов. Кроме того, даны наглядные графические оценки, демонстрирующие преимущество активного гашения. В заключение была рассмотрена задача совместного пассивного и активного гашения и были получены оптимальные значения параметров активного гашения при заданных параметрах пассивного гашения, а также представлены зависимости, иллюстрирующие эффективность использования таких параметров. Эти результаты наглядно демонстрируют целесообразность добавления надлежащих управляющих воздействий в диссипативную систему для обеспечения наиболее выраженных процессов затухания ее движений. При этом следует подчеркнуть нетривиальную структуру построенных решений. Полученные выводы могут представлять серьезный практический интерес при исследовании динамического поведения реальных двухзвенных манипуляторов.

# Заключение

Переходя к заключительному разделу диссертационной работы, представим в нем ее основные результаты и сделаем выводы, продемонстрировав еще раз тесную связь разделов настоящей работы друг с другом.

В качестве объекта исследования был принят двойной математический маятник с идентичными параметрами его звеньев и грузов, шарнирные оси которого предполагались не коллинеарными друг другу. Вследствие этого двойной маятник стал пространственным, что существенно отразилось на сложности исследования его динамического поведения по сравнению с более простым вариантом плоского двойного маятника. Были получены основные геометрические и кинематические соотношения, на основе которых был осуществлен вывод нелинейных уравнений движения рассматриваемой системы, а также были обсуждены частные варианты плоского и ортогонального двойного маятника. В результате подробного анализа линейной модели были найдены частоты и формы малых колебаний, а также даны графические иллюстрации их зависимости от угла между шарнирными осями. Показано, что вязкое трение в шарнирных сочленениях с идентичными диссипативными коэффициентами не нарушает форм свободных колебаний исходной консервативной модели и гасит движения системы именно по этим формам без искажения их характера. Кроме того, в ходе исследования диссипативной модели были проанализированы и проиллюстрированы графически ключевые величины, описывающие процесс затухания движений системы.

Большое внимание было уделено построению нелинейных форм колебаний как для частных вариантов плоского и ортогонального двойного маятника, так и для общего случая пространственного двойного маятника. На основе выражений, полученных для линейной модели, и при помощи асимптотических методов нелинейной механики были получены приближенные аналити-

ческие решения для движения системы по нелинейным формам колебаний в первом приближении для общего случая, а для частных вариантов в силу их более простого характера удалось получить эти формулы во втором приближении. При этом было показано, что найденные выражения находятся в хорошем соответствии с результатами численного интегрирования уравнений движения. Результаты данного исследования были наглядно представлены в виде графиков, поясняющих характер движения системы по нелинейной форме колебаний, а именно, графиков зависимости частот колебаний от амплитуд, фазовых портретов для каждой обобщенной координаты в отдельности, а также графиков изменения обобщенных координат и скоростей на одном периоде колебаний. Все эти иллюстрации показывают, насколько существенно нелинейные формы колебаний отличаются от соответствующего им линейного варианта, что необходимо принимать во внимание при анализе больших колебаний системы.

Весьма обширный раздел работы составляет анализ управляемых движений пространственного двойного маятника. Управляющие моменты в шарнирных сочленениях были сформированы с помощью обратной связи по принципу коллинеарного управления, которое учитывает динамические особенности системы и действует в «унисон» с обобщенными силами инерции. При помощи разумного сочетания аналитического и численного исследования было показано, что такое управление при постоянном коэффициенте усиления позволяет направлять всю подводимую в систему энергию только на развитие выбранной формы колебаний, т. е. осуществлять разгон системы по каждой из ее собственных форм колебаний в отдельности с малых и вплоть до достаточно больших амплитуд с сохранением одночастотного характера движения и постепенным дрейфом частоты и формы колебаний из линейного варианта в нелинейный. Таким образом, была получена наглядная демонстрация явления авторезонанса в системе с двумя степенями свободы. При этом для вывода системы на режим нелинейных консервативных колебаний, близких к периодическим и отвечающих желаемому достаточно большому уровню энергии, необходимо отключить управление в момент достижения системой этой энергии. Было отмечено, что полученные при этом режимы находятся в соответствии с нелинейными формами колебаний, построенными ранее. Помимо коллинеарного управления с постоянным коэффициентом усиления была

рассмотрена его полезная модификация, обладающая переменным коэффициентом усиления, который постепенно понижается при увеличении полной энергии системы и приближении ее к желаемому значению, достижение которого и является целью управления. Это позволяет осуществлять более гибкое управление движением системы, избегая резкого отключения управляющих воздействий и тем самым обеспечивая наилучшее качество и плавность процессов управления. Кроме того, были получены и приближенные аналитические выражения для данной модификации, которые также согласуются с результатами численного интегрирования. Наконец, был произведен совместный учет диссипативных и управляющих воздействий, приводящий к возможности реализации ряда режимов движения, обладающих своими особенностями и проиллюстрированных при помощи диаграммы режимов на плоскости безразмерных диссипативного и управляющего параметров.

Последняя глава работы была посвящена определению оптимальных параметров пассивного и активного вариантов гашения пространственного двойного маятника, представляющих собой вязкое трение и коллинеарное управление с постоянным коэффициентом усиления соответственно, свойства которых были установлены в предыдущих разделах. В качестве критериев оптимизации, характеризующих эффективность процессов затухания движений системы, принимались как критерий, основанный на степени устойчивости, так и интегральный энерго-временной критерий, причем были обсуждены их достоинства и недостатки. В ходе решения задачи оптимизации в рамках линейной модели сначала были определены оптимальные параметры каждого из вариантов гашения по обоим критериям в отдельности, а затем был рассмотрен совместный учет двух вариантов гашения и найдены оптимальные значения управляющего коэффициента при заданном значении диссипативного параметра. Все полученные результаты отображены графически и показано, что использование разных критериев приводит к качественно похожим результатам, имеющим, тем не менее, некоторые количественные отличия. Кроме того, была дана оценка целесообразности дополнительного учета надлежащим образом настроенных управляющих воздействий в диссипативной системе для обеспечения наиболее ярко выраженных процессов затухания.

Резюмируя все приведенные результаты данной диссертационной работы, можно заключить, что заявленная в ее начале цель является **достигнутой**.

# Список литературы

- [1] *Агарева О. Ю.* Относительные равновесия двойного сферического маятника и их устойчивость // Деп. в ВИНТИ 4.12.1996. №34930-В96.
- [2] *Акбиров Р. Р., Маликов А. И.* Управление двойным перевернутым маятником на тележке // Вестник Казанского технического университета им. А. Н. Туполева. 2018. Т. 74. № 2. С. 168–177.
- [3] *Андреев А. С., Перегудова О. А.* Об управлении двухзвенным манипулятором с упругими шарнирами // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 2. С. 267–277
- [4] *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. Изд. 2-е. М.: Наука, 1981. 918 с.
- [5] *Асташев В. К.* О новых направлениях использования явления резонанса в машинах // Вестник научно-технического развития. 2011. № 8(48). С. 10–15.
- [6] *Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003. 614 с.
- [7] *Бабаков И. М.* Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 559 с.
- [8] *Безгласный С. П., Жаренков С. В.* Построение программных движений двойного маятника переменной длины с подвижной точкой подвеса // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2012. Т. 14. № 6. С. 33–37.
- [9] *Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического регулирования. Изд. 2-е. М.: Наука, 1972. 768 с.

- [10] *Бидерман В. Л.* Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
- [11] *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: ГИФМЛ, 1958. 406 с.
- [12] *Болотник Н. Н.* Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983. 257 с.
- [13] *Буланчук П. О.* Управление двойным математическим маятником при помощи вибрации точки подвеса // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4(5). С. 2041–2042.
- [14] *Бутенин Н. В., Луцк Я. Л., Меркин Д. Р.* Курс теоретической механики. Т. 2. Динамика. М.: Наука, 1979. 543 с.
- [15] *Ветчинкин В. П., Ченцов Н. Г.* Плоский маятник о двух степенях свободы и определение при помощи его высоты центра тяжести и момента инерции твердого тела // Труды ЦАГИ. 1923. Вып. 3.
- [16] Вибрации в технике. Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. Болотина В. В. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
- [17] Вибрации в технике. Справочник. Т. 2. Колебания нелинейных механических систем / Под ред. Блехмана И. И. М.: Машиностроение, 1979. 351 с.
- [18] *Вильнит Л. Н.* Дифференциальные уравнения движения механических систем с сухим трением. Новосибирск: Новосиб. гос. техн. ун-т, 2004. 30 с.
- [19] *Вишенкова Е. А., Холостова О. В.* К динамике двойного маятника с горизонтально вибрирующей точкой подвеса // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 2. С. 114–129.
- [20] *Воронов А. А.* Основы теории автоматического управления. Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. М.: Энергия, 1980. 312 с.

- [21] *Ганиев Р. Ф., Ковальчук П. С.* Динамика систем твердых и упругих тел. М.: Машиностроение, 1980. 208 с.
- [22] *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.
- [23] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1968. 576 с.
- [24] *Гернет М. М.* Курс теоретической механики. Изд. 3-е, перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1973. 464 с.
- [25] *Гернет М. М., Ратобылский В. Ф.* Определение моментов инерции. М.: Машиностроение, 1969. 250 с.
- [26] *Геронимус Я. Л.* Теоретическая механика. М.: Наука, 1973. 512 с.
- [27] *Глушков В. М., Амосов Н. М., Артеменко И. А.* Энциклопедия кибернетики. Т. 1. Киев, Главная редакция украинской советской энциклопедии, 1974. 608 с.
- [28] *Голубева О. В.* Теоретическая механика. М.: Высшая школа, 1968. 487 с.
- [29] *Дакев Н. В.* Оптимизация диссипативных свойств шарнирных манипуляторов промышленных роботов: диссертация на соискание степени кандидата технических наук. Л., 1986. 131 с.
- [30] *Данилов О. Е.* Применение учебной компьютерной модели двойного математического маятника в обучении физике // Молодой ученый. 2016. № 8. С. 38–43.
- [31] *Дегилевич Е. А., Смирнов А. С.* Оптимизация демпфирования колебаний линейного осциллятора по временному критерию // IX Поляховские чтения. Материалы международной научной конференции по механике. Санкт-Петербург, Россия, 9–12 марта 2021 г. 2021. С. 92–94.
- [32] Динамика машин и управление машинами / под ред. Крейнина Г. В. М.: Машиностроение, 1988. 240 с.

- [33] *Ердакова Н. Н., Иванов А. П.* Математическое моделирование удара двойного маятника о препятствие // Труды МФТИ. 2013. Т. 5. № 2. С. 134–141.
- [34] *Жонголович И. Д., Лисютин А. Я., Розе Н. В.* Теоретическая механика. Ч. 2. Механика материальной системы и твердого тела. Л., М.: ГТТИ, 1933. 428 с.
- [35] *Зайцев А. П.* Основы теории автоматического управления. Томск: изд-во ТПУ, 2000. 152 с.
- [36] *Зегжда С. А., Шатров Е. А., Юшков М. П.* Гашение колебаний тележки с двойным маятником с помощью управления ее ускорением // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2016. Т. 3(61). Вып. 4. С. 683–688.
- [37] *Клименко А. А., Михлин Ю. В.* Нормальные формы колебаний в нелинейной системе, содержащей маятниковый гаситель колебаний // Проблемы машиностроения. 2014. Т. 17. № 3. С. 38–44.
- [38] *Кочева М. Д.* О колебаниях двойного маятника // Дифференциальные уравнения. 1965. Т. 1, № 3. С. 374–386.
- [39] *Кочева М. Д.* О круговых движениях двойного маятника // Дифференциальные уравнения. 1965. Т. 1. № 2. С. 187–195.
- [40] *Кумакшев С. А.* Активное гашение колебаний несущих конструкций перемещением внутренней массы // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого). Материалы XV Международной научной конференции. Москва, 3–5 июня 2020 г. 2020. С. 250–252.
- [41] *Леонтьев В. А., Смирнов А. С., Смольников Б. А.* Коллинеарное управление колебаниями диссипативного двойного маятника // Робототехника и техническая кибернетика. 2019. Т. 7. № 1. С. 65–70.
- [42] *Леонтьев В. А., Смирнов А. С., Смольников Б. А.* Оптимальное демпфирование колебаний двухзвенного манипулятора // Робототехника и техническая кибернетика. 2018. № 2 (19). С. 52–59.

- [43] *Лойцянский Л. Г., Лурье А. И.* Теоретическая механика. Ч. 3. Динамика несвободной системы и теория колебаний. Л., М.: ОНТИ ГТТИ, 1934. 626 с.
- [44] *Лупина Т. А.* Оценка устойчивости вертикального положения равновесия перевернутого двойного маятника с вязко-упругими элементами // Водный транспорт. 2012. № 3(15). С. 67–73.
- [45] *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: ГИФМЛ, 1961. 824 с.
- [46] *Маневич Л. И., Михлин Ю. В., Пилипчук В. Н.* Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. М.: Наука, 1989. 216 с.
- [47] *Маркеев А. П.* О движении связанных маятников // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9. № 1. С. 27–38.
- [48] *Маркеев А. П.* Теоретическая механика. М., Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2007. 591 с.
- [49] *Матросов В. М., Румянцев В. В., Карапетян А. В.* Нелинейная механика. М.: Физматлит, 2001. 432 с.
- [50] *Меркин Д. Р., Бауэр С. М., Смирнов А. Л., Смольников Б. А.* Теория устойчивости в примерах и задачах. М., Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2007. 208 с.
- [51] *Меркин Д. Р., Смольников Б. А.* Прикладные задачи динамики твердого тела. СПб: изд-во СПбГУ, 2003. 534 с.
- [52] *Моауро В., Негрини П.* Хаотические траектории двойного математического маятника // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 892–895.
- [53] *Муравьев А. С., Смирнов А. С.* Оптимизация демпфирования колебаний маятника с упруго-подвижной точкой подвеса // IX Поляховские чтения. Материалы международной научной конференции по механике. Санкт-Петербург, Россия, 9–12 марта 2021 г. 2021. С. 115–117.

- [54] *Нагаев Р. Ф., Степанов А. В.* Об оптимизации коэффициента затухания свободных колебаний двухмассовой системы // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. 1979. № 4. С. 24–28.
- [55] *Неймарк Ю. И.* Математическое моделирование как наука и искусство. Нижний Новгород: изд-во Нижегородского университета, 2010. 420 с.
- [56] *Петров А. Г.* Нелинейные свободные и вынужденные колебания маятниковых систем при резонансах // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник трудов. В 4-х томах. Т. 1. Общая и прикладная механика. 2019. С. 29–31.
- [57] *Победоносцев Ю. А.* Экспериментальное определение моментов инерции самолета // Труды Всесоюзной конференции по аэродинамике. Изд. ЦАГИ, 1931.
- [58] *Победоносцев Ю. А.* Экспериментальное определение моментов инерции самолета // Труды ЦАГИ. 1935. Вып. 1.
- [59] *Поляхов Н. Д., Галиуллин Р. И.* Управление перевернутым двухзвенным маятником // Известия СПбГЭТУ ЛЭТИ. 2015. № 6. С. 65–70.
- [60] *Порецкий А. С.* Методы стабилизации одиночного и многозвенного перевернутого маятника // Физика и прогресс: Тезисы докладов молодежной научной конференции. Санкт-Петербург. 2006. С. 230–235.
- [61] Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Т. 3 / Под ред. Биргера И. А. и Пановко Я. Г. М.: Машиностроение, 1968. 567 с.
- [62] *Скубов Д. Ю.* Основы теории нелинейных колебаний. СПб, М., Краснодар: Лань, 2013. 311 с.
- [63] *Смирнов А. С., Дегилевич Е. А.* Колебания цепных систем. СПб.: Политех-пресс, 2021. 246 с.
- [64] *Смирнов А. С., Смольников Б. А.* История исследований двойного маятника // История науки и техники. 2020. № 12. С. 3–12.

- [65] *Смирнов А. С., Смольников Б. А.* История механического резонанса – от первоначальных исследований до авторезонанса // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23. Вып. 1. С. 269–292.
- [66] *Смирнов А. С., Смольников Б. А.* Коллинеарное управление движением однозвенного манипулятора с переменным усилением // Молодежь и наука: Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований. Материалы IV Всероссийской научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Комсомольск-на-Амуре, 12–16 апреля 2021 г. Ч. 2. 2021. С. 70–73.
- [67] *Смирнов А. С., Смольников Б. А.* Нелинейный авторезонанс в задачах управления колебаниями многомерных механических систем // XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: сборник тезисов докладов в 4 т., 21–25 августа 2023 г., Санкт-Петербург, Россия. Т. 1. Общая и прикладная механика. 2023. С. 214–216.
- [68] *Смирнов А. С., Смольников Б. А.* Оптимальное гашение свободных колебаний в линейных механических системах // Машиностроение и инженерное образование. 2017. № 3 (52). С. 8–15.
- [69] *Смирнов А. С., Смольников Б. А.* Оптимизация режимов гашения колебаний пространственного двойного маятника. I. Постановка задачи // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2. С. 357–365. [Переводная версия: *Smirnov A. S., Smolnikov B. A.* Optimization of Oscillation Damping Modes of a Spatial Double Pendulum: 1. Formulation of the Problem. Vestnik St. Petersburg University, Mathematics. 2022. Vol. 55. No. 2. Pp. 243–248.]
- [70] *Смирнов А. С., Смольников Б. А.* Оптимизация режимов гашения колебаний пространственного двойного маятника. II. Решение задачи и анализ результатов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 1. С. 121–138. [Переводная версия: *Smirnov A. S., Smolnikov B. A.* Optimization of Oscillation Damping Modes of a Spatial Double Pendulum: 2. Solution of

the Problem and Analysis of the Results. Vestnik St. Petersburg University, Mathematics. 2023. Vol. 56. No. 1. Pp. 93–106.]

- [71] *Смирнов А. С., Смольников Б. А.* Управление процессом раскачивания качелей // Неделя науки СПбПУ. Материалы научного форума с международным участием. Институт прикладной математики и механики. 2016. С. 106–109.
- [72] *Смирнов А. С., Смольников Б. А.* Управление резонансными колебаниями в нелинейных механических системах. Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2016-2017. 2018. С. 23–39.
- [73] *Смирнов А. С., Смольников Б. А.* Управление резонансными колебаниями нелинейных механических систем на основе принципов биодинамики // Машиностроение и инженерное образование, 2017. № 4 (53). С. 11–19.
- [74] *Смольников Б. А.* Перспективы применения принципов биомеханики в робототехнике // Робототехника и техническая кибернетика, 2017. № 1(14). С. 61–68.
- [75] *Смольников Б. А.* Проблемы механики в современной робототехнике // Робототехника и техническая кибернетика, 2016. № 1(10). С. 3–6.
- [76] *Смольников Б. А.* Проблемы механики и оптимизации роботов. М.: Наука, 1991. 232 с.
- [77] *Смольников Б. А., Юревич Е. И.* К проблеме биоморфного управления движениями роботов // Робототехника и техническая кибернетика, 2015. № 1(6). С. 17–20.
- [78] *Стрелков С. П.* Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1964. 440 с.
- [79] Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Кн. 1 / Под ред. Солодовникова В. В. М.: Машиностроение, 1967. 770 с.
- [80] Управление мехатронными вибрационными установками / Под ред. Блехмана И. И. и Фрадкова А. Л. СПб.: Наука, 2001. 278 с.

- [81] *Усвицкий И.* Механика, удобная механизмам // Знание – сила. 1986. № 6.
- [82] *Филипковский С. В.* Свойства нелинейных нормальных форм колебаний роторных систем // Вісник СевНТУ. Механіка, енергетика, екологія. 2010. № 110. С. 26–31.
- [83] *Формальский А. М.* Управление движением неустойчивых объектов. М.: Физматлит, 2014. 232 с.
- [84] *Холостова О. В.* Задачи динамики твердых тел с вибрирующим подвесом. М., Ижевск.: Институт компьютерных исследований, 2016. 308 с.
- [85] *Черноуцько Ф. Л., Ананьевский И. М., Решмин С. А.* Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физмалит, 2006. 328 с.
- [86] *Яблонский А. А., Нореико С. С.* Курс теории колебаний. М.: Высшая школа, 1975. 248 с.
- [87] *Яковлев В. И.* Предыстория аналитической механики. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 328 с.
- [88] *Awrejcewicz J., Wasilewski G., Kudra G., Reshmin S. A.* An experiment with swinging up a double pendulum using feedback control // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2012. 51(2). Pp. 176–182.
- [89] *Badoniya P., George J.* Two Link Planar Robot Manipulator Mechanism Analysis with MATLAB // International Journal for Research in Applied Science & Engineering Technology (IJRASET). 2018. Vol. 6. Iss. VII. Pp. 778–788.
- [90] *Bendersky S., Sandler B.* Investigation of a spatial double pendulum: an engineering approach // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2006. Pp. 1–22.
- [91] *Bernoulli D. Bernoulli D.* Commentatio physico-mechanica specialior de motibus reciprocis compositis. Multifariis nondum exploratis, qui in pendulis bimembribus facilius observari possint in

- confirmationem principii sui de coexistentia vibrationum simpliciorum // Novi commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. 1774. Vol. 19. Pp. 260–284.
- [92] *Bernoulli D.* Theoremata de oscillationibus corporum filo flexili connexorum et catenae verticaliter suspensae // Novi commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Vol. 6, 1738. Pp. 108–122.
- [93] *Biglari H., Jami A. R.* The double pendulum numerical analysis with Lagrangian and the Hamiltonian equations of motions // International Conference on Mechanical and Aerospace Engineering. 2016. Pp. 1–12.
- [94] *Bogdanov A.* Optimal Control of a Double Inverted Pendulum on a Cart // Technical Report CSE-04-006. 2004.
- [95] *Bouasse H.* Pendule, Spiral, Diapason. Vol. II. Paris: Librairi Delagrave, 1920. 518 p.
- [96] *Brown E. W.* Elements of theory of resonance. Cambridge: at the University press, 1932. 60 p.
- [97] *Bulanchuk P. O., Petrov A. G.* Suspension point vibration parameters for a given equilibrium of a double mathematical pendulum // Mechanics of Solids. 2013. 48(4). Pp. 380–387.
- [98] *Chunawala T., Ghandchi-Tehrani M., Yan J.* An optimum design of a double pendulum in autoparametric resonance for energy harvesting applications // The 22nd Vibroengineering Conference. 2016. Vol. 8. Pp. 163–168.
- [99] *Clairaut A.-C.* Solution de quelques problèmes de dynamique // Mémoires de l'Académie des sciences. 1736. Pp. 1–22.
- [100] *Cross R.* A double pendulum swing experiment: In search of a better bat // American Journal of Physics. 2005. 73(4). Pp. 330–339.

- [101] *Dudkowski D., Wojewoda J, Czolczyński K., Kapitaniak T.* Is it really chaos? The complexity of transient dynamics of double pendula // *Nonlinear Dynamics*. 2020. Vol. 102. Pp. 759–770.
- [102] *Efimov D., Fradkov A., Iwasaki T.* Exciting multi-DOF systems by feedback resonance // *Automatica*. 2013. 49(6). Pp. 1782–1789.
- [103] *Elbori A., Abdalsmd L.* Simulation of Double Pendulum // *Quest Journals. Journal of Software Engineering and Simulation*. 2017. Vol. 3. Iss. 7. Pp. 1–13.
- [104] *Espíndola R., Del Valle G., Hernández G., Pineda I., Muciño D., Díaz P., Guijosa S.* The Double Pendulum of Variable Mass: Numerical Study for different cases // *IX International Congress of Physics Engineering. IOP Conference Series: Journal of Physics*. 2019. Vol. 1221. 012049.
- [105] *Eulero L.* De oscillationibus fili flexilis quotcunque pondusculis onusti // *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*. 1741. Vol. 8. Pp. 30–47.
- [106] *Fontaine des Bertins A.* Une courbe etant donnee, trouver celle qui seroit decrite par le sommet d'un angle. *Mémoires de l'Académie des sciences*. 1734. Pp. 527–530.
- [107] *Formalskii A. M.* On stabilization of an inverted double pendulum with one control torque // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2006. 45(3). Pp. 337–344.
- [108] *Fradkov A. L.* *Cybernetical physics. From Control of Chaos to Quantum Control*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg: 2007. 242 p.
- [109] *Fradkov A. L.* Exploring nonlinearity by feedback // *Physica D*. 1999. 128(2–4). Pp. 159–168.
- [110] *Fradkov A. L.* Investigation of physical systems by feedback // *Automation and Remote Control*. 1999. 60(3). Pp. 471–483.
- [111] *Gerres J. M., Jacobs R. M., Kasun S. F., Bacon M. E., Nagolu C. M., Owens E. L., Siehl K. F., Thomsen M., Troyer J. S.* Large Amplitude

- Oscillations of a Double Pendulum // American Physical Society. 2008. Spring Meeting of the Ohio-Region Section of APS, March 28-29, 2008. P1.004.
- [112] *Gracey W.* The Experimental Determination of the Moments of Inertia of Airplanes by a Simplified Compound-Pendulum Method // NAGA. 1948. TN № 1629. 29 p.
- [113] *Ivanov A. V.* Study of the double mathematical pendulum – III Melnikov’s method applied to the system in the limit of small ratio of pendulums masses // Regular and chaotic dynamics. 2000. Vol. 5. № 3. Pp. 329–343.
- [114] *Jadlovská S., Sarnovský J.* Classical Double Inverted Pendulum – a Complex Overview of a System // IEEE 10th International Symposium on Applied Machine Intelligence and Informatics (SAMII). 2012. Pp. 103–108.
- [115] *Karman von T., Biot M. A.* Mathematical Methods in Engineering. McGraw, Hill Publishing Co., 1940. 505 p.
- [116] *Kholostova O. V.* On the motions of a double pendulum with vibrating suspension point // Mechanics of Solids. 2009. 44(2). Pp. 184–197.
- [117] *Klotter K.* Technische Schwingungslehre. Bd. 2. Springer-Verlag, 1960. 484 s.
- [118] *Kovacic I., Zukovic M., Radomirovic D.* Normal modes of a double pendulum at low energy levels // Nonlinear Dynamics. 2020. Vol. 99. Pp. 1893–1908.
- [119] *Lamb H.* Dynamics. Cambridge: The University press, 1914. 344 p.
- [120] *Lavrovskii E. K., Formalskii A. M.* The optimal control synthesis of the swinging and damping of a double pendulum // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2001. 65(2). Pp. 219–227.
- [121] *Levi-Civita T., Amaldi A.* Lezioni di meccanica razionale. Volume secondo. Dinamica dei sistemi con un numero di gradi di libertà. Parte seconda. Bologna: N. Zanichelli, 1927. 684 p.

- [122] *Levien R. B., Tan S. M.* Double pendulum: an experiment in chaos // American journal of physics. 1993. Vol. 61. № 11. Pp. 1038–1044.
- [123] *Lin J., Kajitani M., Masuda T.* Control of double pendulum // Nippon Kikai Gakkai Ronbunshu, C Hen. Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers. 1990. Part C. 56(522). Pp. 431–434.
- [124] *Ludwicki M., Awrejcewicz J., Kudra G.* Spatial double physical pendulum with axial excitation: computer simulation and experimental set-up // International Journal of Dynamics and Control. 2015. Vol. 3. Pp. 1–8.
- [125] *Luo A. C. J., Guo C.* A Period-1 Motion to Chaos in a Periodically Forced, Damped, Double-Pendulum // Journal of Vibration Testing and System Dynamics. 2019. 3(3). Pp. 259–280.
- [126] *MacMillan W. D.* Dynamics of rigid bodies. New York: Dover publications, inc, 1936. 478 p.
- [127] *Magnus K.* Schwingungen. Eine Einführung in die theoretische Behandlung von Schwingungsproblemen. Stuttgart, Teubner, 1961. 251 s.
- [128] *Maiti S., Roy J., Mallik A. K., Bhattacharjee J.* Nonlinear dynamics of a rotating double pendulum // Physics Letters. 2015. 380(3). Pp. 408–412.
- [129] *Mendonça G. L. T., Paiva A., Savi M. A.* Numerical investigation of the nonlinear behavior of a double pendulum // 23rd ABCM International Congress of Mechanical Engineering, December 6-11, 2015, Rio de Janeiro, Brazil. 2015. Pp. 1–8.
- [130] *Mikhlin Y. V.* Normal vibrations of a general class of conservative oscillators // Nonlinear Dynamics. 1996. 11(1). Pp. 1–15.
- [131] *Mirer S. A., Prilepskiy I. V.* Optimum parameters of a gravitational satellite-stabilizer system // Cosmic Research. 2010. No. 48(2). Pp. 194–204.
- [132] *Moon F. C.* Chaotic Vibrations. An Introduction for Applied Scientists and Engineers. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, A Wiley-Interscience Publication, 1987. 309 p.

- [133] *Rafat M., Wheatland M., Bedding T.* Dynamics of a double pendulum with distributed mass // American Journal of Physics. 2009. 77(3). Pp. 216–223.
- [134] *Reshmin S. A.* Decomposition method in the problem of controlling an inverted double pendulum with the use of one control moment // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2005. 44(6). Pp. 861–877.
- [135] *Rosenberg R. M.* The normal modes of nonlinear n-degrees-of-freedom systems // Journal of Applied Mechanics. 1962. Vol. 30. Pp. 7–14.
- [136] *Sawant K. R., Shrikanth V.* Energy dissipation and behavioral regimes in an autonomous double pendulum subjected to viscous and dry friction damping // European Journal of Physics. 2021. 42(5). 055008.
- [137] *Shaw S. W., Pierre C.* Normal modes for nonlinear vibratory systems // Journal of Sound and Vibration. 1993. 164(1). Pp. 85–124.
- [138] *Shinbrot T., Grebogi C., Wisdom J., Yorke J.* Chaos in a Double Pendulum // American Journal of Physics. 1992. 60(6). Pp. 491–499.
- [139] *Skeldon A. C., Mullin T.* Mode interaction in a double pendulum // Physics Letter. 1992. Vol. 166. Pp. 224–229.
- [140] *Smirnov A. S., Smolnikov B. A.* Collinear control of oscillation modes of spatial double pendulum with variable gain // Cybernetics and physics. 2021. Vol. 10. Iss. 2. Pp. 90–96.
- [141] *Smirnov A. S., Smolnikov B. A.* Dissipative Model of Double Mathematical Pendulum with Noncollinear Joints // Advances in Mechanical Engineering. Selected Contributions from the Conference "Modern Engineering: Science and Education". Saint Petersburg, Russia, June 2021. 2022. Pp. 38–47.
- [142] *Smirnov A. S., Smolnikov B. A.* Nonlinear oscillation modes of double pendulum // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. International Conference of Young Scientists and Students "Topical Problems of Mechanical Engineering" (ToPME 2020) 2nd–4th December 2020, Moscow, Russia. 2021. Vol. 1129, 012042.

- [143] *Smirnov A. S., Smolnikov B. A.* Nonlinear oscillation modes of spatial double pendulum // Journal of Physics: Conference Series. The International Scientific Conference on Mechanics "The Ninth Polyakhov's Reading" (ISCM) 9-12 March 2021, Saint Petersburg, Russian Federation. 2021. Vol. 1959, 012046.
- [144] *Smirnov A. S., Smolnikov B. A.* Oscillations of Double Mathematical Pendulum with Noncollinear Joints // Advances in Mechanical Engineering. Selected Contributions from the Conference "Modern Engineering: Science and Education". Saint Petersburg, Russia, June 2020. 2021. Pp. 185–193.
- [145] *Stachowiak T., Okada T.* A numerical analysis of chaos in the double pendulum // Chaos, Solitons and Fractals. 2006. 29(2). Pp. 417–422.
- [146] *Stachowiak T., Szumiński W.* Non-integrability of restricted double pendula // Physics Letters A. 2015. Vol. 379. Iss. 47–48. Pp. 3017–3024.
- [147] *Timoshenko S. P.* Vibration Problems in Engineering. New York: Van Nostrand, 1928. 351 p.
- [148] *Vakakis A., Manevitch L., Mikhlin Yu., Pilipchuk V., Zevin A.* Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems. New-York: Wiley, 1996. 552 p.
- [149] *Vakakis A. F., Rand R.* Normal modes and global dynamics of a two-degree-of-freedom non-linear system. I. Low energies // International Journal of Non-Linear Mechanics. 1992. 27(5). Pp. 861–874.
- [150] *Vakakis A. F., Rand R.* Normal modes and global dynamics of a two-degree-of-freedom non-linear system. II. High energies // International Journal of Non-Linear Mechanics. 1992. 27(5). Pp. 875–888.
- [151] *Veltmann W.* Über die Bewegung einer Glocke // Polytechnisches Journal. 1876. Vol. 220. S. 481–495.
- [152] *Viba J., Eiduks M., Irbe M.* Double pendulum vibration motion in fluid flow // Proceedings of 14th International Scientific Conference on Engineering for Rural Development. 2015. Pp. 434–439.

- [153] *Wang F., Bajaj A., Kamiya K.* Nonlinear normal modes and their bifurcations for an inertially coupled nonlinear conservative system // *Nonlinear Dynamics*. 2005. 42(3). Pp. 233–265.
- [154] *Xinjilefu, Hayward V., Michalska H.* Stabilization of the Spatial Double Inverted Pendulum Using Stochastic Programming Seen as a Model of Standing Postural Control // *9th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*. 2009. Pp. 367–372.
- [155] *Young A., Cao C., Hovakimyan N., Lavretsky E.* Control of a Nonaffine Double-Pendulum System via Dynamic Inversion and Time-Scale Separation // *Proceedings of the 2006 American Control Conference Minneapolis, Minnesota, USA, June 14-16, 2006*. Pp. 1820–1825.
- [156] *Zhou Z., Whiteman C.* Motions of a double pendulum // *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*. 1996. 26(7). Pp. 1177–1191.