

Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Симаков Евгений Сергеевич

ИЗЛУЧЕНИЕ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ПРИСУТСТВИИ
ПРОВОДЯЩИХ ГОФРИРОВАННЫХ СТРУКТУР С МАЛЫМ ПЕРИОДОМ

Научная специальность: 1.3.4. Радиофизика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор
Тюхтин Андрей Викторович

Санкт-Петербург

2024

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Излучение пучка заряженных частиц, движущегося в присутствии плоской мелкогофрированной структуры с малым периодом	19
1.1. Модель мелкогофрированной периодической структуры и метод эквивалентных граничных условий	19
1.2. Излучение пучка заряженных частиц, движущегося вдоль мелкогофрированной структуры	21
1.2.1. Общее решение	21
1.2.2. Исследование поля, возникающего за счет гофрированной поверхности ...	25
1.2.3. Поверхностные волны	32
1.3. Излучение пучка заряженных частиц, пролетающего сквозь мелкогофрированную структуру	41
1.3.1. Общее решение	41
1.3.2. Исследование поля, возникающего за счет гофрированной поверхности ...	44
1.3.3. Объемное излучение	57
1.3.4. Поверхностные волны	65
1.4. Выводы	70
Глава 2. Излучение пучка заряженных частиц, движущегося в присутствии плоской глубокогофрированной структуры с малым периодом	72
2.1. Модель глубокогофрированной периодической структуры и метод эквивалентных граничных условий	72
2.2. Излучение пучка заряженных частиц, движущегося вдоль глубокогофрированной структуры	75
2.2.1. Общее решение	75
2.2.2. Исследование поля, возникающего за счет гофрированной поверхности ...	75
2.2.3. Поверхностные волны	77

2.3. Излучение пучка заряженных частиц, пролетающего сквозь глубокогофрированную структуру.	86
2.3.1. Общее решение	86
2.3.2. Исследование поля, возникающего за счет гофрированной поверхности. . .	87
2.3.3. Объемное излучение	89
2.3.4. Поверхностные волны	94
2.4. Выводы	99
Глава 3. Излучение пучка заряженных частиц, движущегося вдоль оси глубокогофрированного волновода с малым периодом.	101
3.1. Излучение пучка заряженных частиц, движущегося вдоль оси бесконечного глубокогофрированного волновода.	101
3.1.1. Общее решение	101
3.1.2. Исследование поля, возникающего за счет гофрированной поверхности. . .	105
3.2. Дифракция волноводной TM_{01} моды на открытом конце глубокогофрированного волновода	110
3.2.1. Поле внутри волновода.	110
3.2.2. Поле снаружи волновода	112
3.2.3. Уравнение Винера-Хопфа-Фока	115
3.2.4. Поле в дальней зоне.	119
3.3. Выводы	125
Заключение	126
Список литературы.	128
Список публикаций по теме диссертации.	139

Введение

В задачах об излучении пучка (сгустка) заряженных частиц, движущегося вблизи периодической структуры, обычно выделяют три случая в зависимости от соотношения между периодом структуры d и длиной волны λ электромагнитного излучения:

- $\lambda \gg d$ - длинноволновая область, где длина волны много больше периода структуры;
- $\lambda \ll d$ - область длин волн, которые малы по сравнению с периодом структуры;
- $\lambda \sim d$ - резонансная область, где период структуры сравним с длиной волны.

Следует отметить, что в современной научной литературе существует довольно много работ, посвященных задаче об излучении зарядов, движущихся вблизи периодических структур. Однако в большинстве из них рассматривается излучение в диапазоне длин волн, которые по порядку величины сравнимы с периодом структуры (или меньше его). На этих частотах генерируется хорошо известное излучение Смита-Парселла, названное так в честь ученых, впервые наблюдавших его в эксперименте в 1953 году [1]. В настоящее время данный эффект изучен детально, что подтверждается обилием литературы, посвященной теории излучения Смита-Парселла, а также различным приложениям (см., например, статьи [1–12] и монографии [13, 14]).

Данная работа посвящена исследованию излучения пучка заряженных частиц, движущегося в присутствии гофрированных проводящих структур. При этом предполагается, что период гофрирования мал по сравнению с характерными длинами рассматриваемых электромагнитных волн (длинноволновая область). Поскольку длина волны много больше периода структуры, то становится возможным использование так называемых эквивалентных граничных условий (ЭГУ), которые в общем случае обладают анизотропными свойствами и имеют вид

$$\vec{E}_\tau = \hat{W} \vec{H}_\tau,$$

где \vec{E}_τ и \vec{H}_τ - тангенциальные составляющие полного поля на границе раздела двух сред, а \hat{W} - некоторый интегро-дифференциальный оператор [15]. Метод ЭГУ в этом случае эффективен, так как позволяет заменить точные граничные условия на сложной поверхности

некоторыми условиями на более простой (гладкой) поверхности. Таким образом, задача значительно упрощается, и, во многих случаях, мы можем провести строгий аналитический расчет усредненного по периоду структуры электромагнитного поля.

Детальное описание метода ЭГУ представлено в [15], где, в частности, получены граничные условия для гофрированной поверхности с прямоугольной образующей. Вывод данных условий представляет собой сложную математическую задачу. Вкратце об этой процедуре можно сказать следующее. Решение задачи проводится отдельно для одной из двух поляризаций поля. Вблизи проводника электромагнитное поле определяется из уравнения Лапласа с помощью метода конформных отображений. Далее, чтобы найти связь между полем в дальней зоне и полем вблизи проводника, применяется лемма Лоренца. В итоге решение сводится к системе уравнений на коэффициенты отражения и прохождения, которые и определяют ЭГУ.

Подчеркнем, что электромагнитное излучение, возникающее в исследуемом (длинноволновом) диапазоне, связано с особой анизотропией гофрированной поверхности. В этом заключается принципиальное отличие рассматриваемых явлений от излучения Смита-Парселла, которое представляет собой суперпозицию волн, дифрагированных на различных периодах структуры. При этом длина волны излучения Смита-Парселла меньше либо сравнима с периодом структуры, то есть метод ЭГУ автоматически исключает из рассмотрения данный эффект. Отметим, что медленные заряды, в принципе, могут генерировать относительно длинноволновое излучение Смита-Парселла, однако гораздо больший научный интерес представляют задачи с релятивистским движением пучков.

Следует отметить, что задачам об излучении заряда в области длин волн, существенно превышающих период структуры, в научной литературе уделено не так много внимания. Далее будут кратко рассмотрены некоторые работы по этой тематике.

Излучение зарядов, движущихся в волноводах с мелкогофрированной стенкой, исследовалось в работах [16–24]. Под термином “мелкогофрированный” подразумевается, что глубина структуры имеет порядок периода, то есть много меньше длин электромагнитных волн. Такие волноводные структуры могут быть полезны для генерации мощного гигагерцевого и терагерцевого излучения [20, 21]. В частности, в экспериментальной работе [21] авторы предложили метод генерации узкополосного ТГц излучения, возбуждаемого ультрарелятивистским пучком при его движении внутри медного цилиндрического гофрированного волновода. В работе [20] рассматривались два типа волноводов с гофрированной стенкой: обычный цилиндрический (с постоянным радиусом) и конический (с медленно уменьшающимся радиусом от начала к концу). Было получено оптимальное значение периода гофры, при

котором отношение энергии импульсов к потерям энергии в стенках волновода оказывается максимальным. В работе [19] авторы показали, что гофрированную поверхность, имеющую прямоугольный профиль, можно заменить тонким слоем вещества с диэлектрическими и магнитными свойствами. В этом случае поверхностный импеданс определяется диэлектрической и магнитной постоянными, а численный расчет поля с использованием такого импеданса дает хорошее согласие с теорией. Однако стоит отметить, что полученные граничные условия учитывают только одну из двух поляризаций падающего поля. К тому же, диэлектрическая постоянная не выражается явно через параметры гофры, а ищется численно из уравнения Лапласа, что делает невозможным получение общего аналитического решения задачи. В отличие от подхода, развитого в [19], метод ЭГУ для аналогичной поверхности учитывает обе поляризации падающего поля.

Отметим, что метод ЭГУ непосредственно применялся в работах [22–24]. В [22] исследовалось излучение заряда, движущегося вдоль оси бесконечного цилиндрического волновода с идеально проводящей мелкогофрированной стенкой. Авторы получили и проанализировали зависимости частоты и амплитуды поля от скорости движения заряда. Было показано, в частности, что частота излучения уменьшается с ростом скорости заряда, а также с увеличением ширины канавок гофры и её глубины. В работе [23] рассматривалось излучение пучка, движущегося в цилиндрическом волноводе из его мелкогофрированной части в гладкую (и наоборот). Авторы проанализировали электромагнитное поле заряда в этих двух ситуациях, а также провели сравнение данного излучения с излучением, генерируемом зарядом при его движении вдоль оси гладкого волновода, часть которого заполнена диэлектриком [25]. В частности, было показано, что в случае волновода, имеющего гофрированную часть, заряд генерирует строго монохроматическое излучение (в рассматриваемом диапазоне длин волн). Следует также отметить, что в работах [22, 23] приведено сравнение результатов, полученных аналитически (с помощью метода ЭГУ), с результатами численного моделирования в среде CST Particle Studio. Сравнение показало высокую точность аналитических результатов, что оправдывает применение метода ЭГУ в задачах, где длина волны рассматриваемого электромагнитного излучения существенно превышает период структуры. В работе [24] анализировался процесс дифракции волноводной поперечно магнитной моды на открытом конце цилиндрического мелкогофрированного волновода. Аналитическое исследование задачи основывалось на методе Винера-Хопфа-Фока [26–29]. Было получено решение соответствующего уравнения Винера-Хопфа-Фока, которое затем использовалось для построения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений на амплитуды отраженных мод. Некоторые численные результаты данной задачи (в частности, анализ поля вне волновода)

были представлены в работе [30].

Помимо работ, посвященных задачам об излучении заряженных частиц, движущихся вблизи гофрированных поверхностей, можно также отметить аналогичные работы, в которых вместо гофры рассматривается металлическая сетка. В одной из таких работ [31] был исследован случай волновода, стенки которого образованы мелкой сеткой с квадратными ячейками. В этой ситуации реальную структуру обычно заменяют некоторой поверхностью, на которой выполняются усредненные граничные условия (УГрУ) [32, 33].

Учитывая тематику данной работы, существенный интерес для нас представляют также задачи, которые рассматривались в работах [34–37] и некоторых других (см. литературу в [34–43]). В них, с помощью метода УГрУ, было исследовано излучение пучка заряженных частиц, движущегося с постоянной скоростью вблизи периодической структуры из тонких параллельных проводов. При этом предполагалось, что длина волны электромагнитного излучения много больше расстояния между проводами. В работах [34–37] рассматривались два случая движения пучка относительно структуры. В одном из них пучок движется параллельно структуре и перпендикулярно проводам [34, 36]. В частности, была исследована поверхностная волна, генерируемая пучком и распространяющаяся вдоль проводов. В другом случае пучок движется перпендикулярно плоскости проводов и пересекает ее [35, 36]. В данной ситуации излучаются как поверхностные, так и объемные волны. В [36, 37] было показано, что структура поверхностных волн в обоих случаях позволяет определить размеры пучка. В работе [37] рассматривался случай, когда область, занимаемая проводами, представляет собой полуплоскость, а пучок заряженных частиц движется перпендикулярно ей вблизи края полуплоскости. В этой работе также было исследовано как объемное, так и поверхностное излучение, и показана возможность применения последнего для определения размера пучка.

Отметим также работы, в которых исследовалось излучение пучка при его движении в таких искусственных структурах, как метаматериалы. Данную структуру можно считать “средой”, если длины рассматриваемых электромагнитных волн существенно превышают расстояния между макрообъектами, из которых состоит структура. В этом случае элементы “среды” играют роль “молекул”, а саму “среду” можно охарактеризовать определенными макропараметрами. По данной тематике стоит выделить работы, посвященные излучению в проволочных метаматериалах [44–49]. В [44] исследуется излучение от неподвижных источников, а в [45–49] - излучение зарядов, движущихся внутри метаматериала или вблизи его границы. В частности, отмечается, что при движении заряда внутри структуры излучение концентрируется вдоль определенных линий позади источника [45, 46], а при движении вбли-

зи границы - вдоль некоторой поверхности [48] (в обоих случаях скорость перпендикулярна проводам). В работе [47] рассматривается излучение заряда, движущегося внутри неограниченного метаматериала параллельно проводам, покрытым диэлектрической или магнитной оболочкой. Показано, что в этом случае генерация излучения обеспечивается только за счет наличия оболочек.

В связи с рассматриваемыми в настоящей диссертации процессами нужно кратко сказать о двух типах излучения: переходном (ПИ) и дифракционном (ДИ). Первое возникает при пролете заряда сквозь неоднородность, а второе — при движении заряда вблизи неоднородности. В обоих случаях поле заряда наводит переменные токи проводимости (в проводнике) или переменные поляризационные токи (в диэлектрике), в результате чего происходит генерация излучения. Впервые ПИ было теоретически описано в 1946 году в работе [50], где была решена задача об излучении заряда, пересекающего границу раздела двух сред с различными свойствами. Позже было получено экспериментальное подтверждение представленной теории для протонных [51] и электронных [52] пучков. Теория ПИ развивалась, в частности, в работах [53–57] и нашла свое применение при разработке новых методов детектирования и диагностики частиц. Результаты теоретического и экспериментального исследования ПИ отражены во множестве статей и монографий (см. литературу в [50–66]).

Несмотря на сходство физической природы переходного и дифракционного типов излучения, математическое описание последнего представляет собой гораздо более сложную задачу. Некоторые характеристики ДИ, полученные аналитически, были представлены в работах [67–69], где рассматривалась классическая задача об излучении заряда, пролетающего сквозь круглое отверстие в идеально проводящем экране. Данная задача была решена в двух частных случаях: для медленных (нерелятивистских) и быстрых (релятивистских) зарядов. Решение задачи о ДИ на крае идеально проводящего экрана, справедливое для любой скорости заряда, было получено в работе [70] (в случае движения заряда перпендикулярно экрану). Теория ДИ широко представлена в литературе (см., например, [71–77]). В частности, подробное математическое описание данного типа излучения со множеством примеров можно найти в обзорах [72, 74].

Подчеркнем, что ПИ и ДИ имеют важное практическое значение во многих областях физики. Отметим, например, что к основным задачам современной ускорительной физики относится разработка новых методов диагностики пучков заряженных частиц, в частности определение профиля пучка и его размера (как продольного, так и поперечного). Ускорители частиц, как правило, конструируют таким образом, чтобы заряженный сгусток обладал относительно малыми поперечными размерами. Для диагностики таких пучков нужны мето-

ды с достаточной разрешающей способностью. Здесь можно отметить, в частности, широко распространенные методы, основанные на ПИ [78–81]. Активное развитие ускорительной техники, а также тенденция к уменьшению поперечных размеров пучка, способствуют созданию ускорителей заряженных сгустков с большой плотностью и энергией. В этом случае некоторые методы диагностики, основанные на ПИ, становятся неэффективны, так как пучок, имеющий большую энергию, может просто повредить диагностирующий элемент. В связи с этим активно развиваются невозмущающие методы диагностики пучков, основанные на ДИ [7, 8, 10, 82, 83]. Однако и у данного подхода есть свои недостатки. Например, довольно низкая интенсивность ДИ, что затрудняет регистрацию излучения.

В настоящей диссертации рассматриваются пучки заряженных частиц, движущиеся равномерно и прямолинейно и имеющие пренебрежимо малые поперечные размеры (причем распределение заряда вдоль траектории движения может быть произвольным). Данная модель вполне оправдана, поскольку во многих реальных ускорительных системах применяются именно тонкие и вытянутые (в направлении движения) сгустки заряженных частиц. Такие пучки используются, в частности, при кильватерном методе ускорения, когда ускорение одного сгустка ультрарелятивистских частиц происходит за счет поля, порожденного другим сгустком (драйвером), обладающим гораздо большим числом частиц. В таких ускорителях широко используются волноведущие структуры с диэлектрическим заполнением, обладающие, как правило, цилиндрической геометрией, что существенно для достижения максимальных ускоряющих градиентов. При этом волновод имеет гладкую металлическую стенку и цилиндрический диэлектрический слой (или несколько слоев), а пучок движется в вакуумном канале [84–91]. Отметим, что для кильватерного ускорения заряженных частиц, кроме волноводов с заполнением, могут использоваться и вакуумные металлические периодические волноводы [92, 93].

Актуальность темы. Как уже отмечалось, в подавляющем большинстве работ, посвященных анализу излучения заряда при его движении вблизи периодических проводящих структур, рассматривается излучение в диапазоне длин волн, которые по порядку величины либо сравнимы с периодом поверхности, либо меньше его (излучение Смита-Парселла). Однако излучение может генерироваться и на длинах волн, существенно превышающих период. Между тем, такой диапазон длин волн исследовался мало и лишь для некоторых задач с волноводами. Исследования в этом направлении представляют интерес для развития фундаментальных представлений о процессах излучения пучков частиц в периодических структурах.

Тема работы актуальна и для потенциальных приложений. Прежде всего, это обуслов-

лено тем, что исследуемые структуры позволяют генерировать поверхностные волны, которые можно применить для развития методов диагностики пучков частиц, в том числе для определения их размеров и формы. При этом диагностика может быть практически невозможной (по отношению к пучку). Кроме того, рассматриваемые структуры представляют интерес для создания источников гигагерцевого и терагерцевого излучения (как во внешнем пространстве, так и внутри волноведущих структур). В частности, гофрированный волновод с малым периодом может использоваться в методе кильватерного ускорения заряженных частиц, являясь альтернативой гладкому волноводу с диэлектрическим заполнением.

Цель работы заключается в проведении аналитического и численного исследования электромагнитного поля пучка заряженных частиц, движущегося в присутствии проводящих гофрированных структур. При этом рассматривается только относительно низкочастотная часть поля излучения, характерные длины волн которого велики по сравнению с периодом структуры.

В работе анализируются электромагнитные поля пучков, которые движутся с постоянной скоростью, имеют конечную длину и пренебрежимо малое поперечное сечение. **Задачи работы** состоят в исследовании излучения пучков при их движении:

- вдоль безграничной планарной мелкогофрированной структуры перпендикулярно направлению гофрирования;
- сквозь безграничную планарную мелкогофрированную структуру перпендикулярно ей;
- вдоль безграничной планарной глубокогофрированной структуры перпендикулярно направлению гофрирования;
- сквозь безграничную планарную глубокогофрированную структуру перпендикулярно ей;
- вдоль оси бесконечного цилиндрического волновода с глубокогофрированной стенкой.

Еще одной задачей работы является исследование дифракции поперечно магнитной моды, генерируемой пучком, на открытом конце цилиндрического глубокогофрированного волновода (при наличии фланца).

Краткое содержание диссертации

Первая глава посвящена исследованию излучения пучка заряженных частиц, движущегося в присутствии безграничной планарной мелкогофрированной структуры, имеющей прямоугольный профиль. При этом период гофрирования считается малым по сравнению с длинами волн в исследуемой части спектра.

В параграфе 1.1 рассматривается модель, используемая для описания электромагнитных свойств мелкогофрированной структуры. Модель основана на методе эквивалентных граничных условий. Согласно этому методу, гофрированная структура заменяется гладкой поверхностью, на которой ставятся ЭГУ. Указаны параметры, описывающие структуру в рамках этого приближения.

В параграфе 1.2 рассматривается поле тонкого (то есть обладающего малым поперечным размером) пучка заряженных частиц, движущегося равномерно и прямолинейно вдоль поверхности мелкогофрированной структуры перпендикулярно направлению гофрирования. Изначально предполагается, что пучок имеет произвольный продольный профиль (продольную плотность распределения заряда). Методами теории функций комплексного переменного (ТФКП) анализируется поведение полного электромагнитного поля в дальней зоне. Показывается, что волновое поле представляет собой излучение, сосредоточенное вблизи плоскости структуры и распространяющееся вдоль поверхности от линии движения пучка (поверхностные волны). Анализируются компоненты электромагнитного поля поверхностной волны (в виде интегралов Фурье), проводится их численный расчет для гауссова пучка. Рассматриваются потери энергии заряда на излучение поверхностных волн, анализируется спектральная плотность потерь энергии заряда на единицу длины пути.

В параграфе 1.3 исследуется поле тонкого пучка, пролетающего с постоянной скоростью сквозь мелкогофрированную поверхность (перпендикулярно ее плоскости). Методами ТФКП анализируется поведение полного электромагнитного поля в дальней зоне. Показывается, что поле заряда состоит как из поверхностных, так и объемных волн. Анализируются компоненты электромагнитного поля объемной волны, рассматривается энергия объемного излучения. Приводится сравнение спектрально-угловой плотности энергии объемного излучения с аналогичной величиной в случае идеального гладкого экрана. Анализируются компоненты электромагнитного поля поверхностной волны (в виде интегралов Фурье), проводится их численный расчет для гауссова и “прямоугольного” пучка.

Вторая глава посвящена исследованию излучения пучка заряженных частиц, движущегося в присутствии безграничной планарной глубокогофрированной структуры, имеющей прямоугольный профиль. Как и ранее, предполагается, что период гофрирования мал по сравнению с длинами рассматриваемых электромагнитных волн.

В параграфе 2.1 описывается модель, используемая для описания электромагнитных свойств глубокогофрированной структуры. Модель основана на методе ЭГУ, вид которых существенно отличается от случая мелкой гофры. Указаны параметры, описывающие структуру в рамках этого приближения.

В параграфе 2.2 рассматривается поле тонкого пучка заряженных частиц, движущегося равномерно и прямолинейно вдоль поверхности глубокогогофрированной структуры перпендикулярно направлению гофрирования. Методами ТФКП анализируется поведение полного электромагнитного поля в дальней зоне. Показывается, что волновое поле состоит из поверхностных волн, распространяющихся вдоль плоскости структуры от линии движения пучка. Анализируются компоненты электромагнитного поля поверхностной волны (в виде интегралов Фурье), проводится их численный расчет для гауссова пучка. Детально описывается структура поля поверхностной волны, приводится сравнение излучения со случаем мелкой гофры. Также анализируются энергетические характеристики поверхностных волн (в частности, спектральная плотность энергии излучения на единицу длины пути заряда).

В параграфе 2.3 исследуется поле тонкого пучка, пролетающего с постоянной скоростью сквозь глубокогогофрированную поверхность (перпендикулярно ее плоскости). Методами ТФКП анализируется поведение полного электромагнитного поля в дальней зоне. Показывается, что поле заряда состоит как из поверхностных, так и объемных волн. Анализируются компоненты электромагнитного поля объемной волны, рассматривается энергия объемного излучения. Приводятся и обсуждаются диаграммы направленности для спектрально-угловой плотности энергии объемного излучения. Далее анализируются компоненты электромагнитного поля поверхностной волны (в виде интегралов Фурье). Рассматривается энергия поверхностного излучения, проводится численный расчет спектральной плотности энергии. Анализируется распределение поля поверхностной волны в плоскости гофрированной поверхности. Изучаются зависимости энергетических характеристик излучения (как объемного, так и поверхностного) от глубины структуры.

Третья глава посвящена исследованию излучения пучка заряженных частиц, движущегося в присутствии цилиндрического волновода с глубокогогофрированной стенкой, имеющей прямоугольный профиль. Предполагается, что период гофрирования мал по сравнению с радиусом волновода и длинами рассматриваемых электромагнитных волн. Для описания гофрированной поверхности используется те же ЭГУ, что и для планарной глубокогогофрированной структуры.

В параграфе 3.1 рассматривается поле тонкого пучка заряженных частиц, движущегося равномерно и прямолинейно вдоль оси бесконечного цилиндрического глубокогогофрированного волновода. Методами ТФКП анализируется поведение полного электромагнитного поля заряда. Показывается, что излучение распространяется позади заряда и состоит из бесконечного числа симметричных волноводных мод. Анализируются компоненты электромагнитного поля заряда, проводится их численный расчет. Основное внимание уделяется первой моде,

то есть излучению на наименьшей возможной частоте. Приводится сравнение результатов численного счета для компоненты электромагнитного поля первой и второй моды.

В параграфе 3.2 рассматривается дифракция волноводной поперечно магнитной моды на открытом конце цилиндрического глубокогофрированного волновода с фланцем. В качестве падающего поля выступает электромагнитное поле моды, сгенерированной зарядом при его движении вдоль оси бесконечного цилиндрического глубокогофрированного волновода. Поле, отраженное от открытого конца волновода, представляется в виде суммы собственных волноводных мод, распространяющихся в противоположном направлении. Дальнейшее аналитическое исследование задачи основывается на метода Винера-Хопфа-Фока. Ищется решение соответствующего уравнения Винера-Хопфа-Фока, которое затем используется для построения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений на амплитуды отраженных мод. Данная система решается методом редукции. Для поля во внешнем пространстве (вне волновода) ищутся интегральные представления. Поведение данного поля в дальней зоне исследуется методами ТФКП. Проводится численный расчет поля и анализируются типичные диаграммы направленности излучения.

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в диссертации.

Научная новизна представленных результатов заключается в следующем.

Впервые аналитически и численно исследовано электромагнитное поле тонкого (в поперечном направлении) пучка заряженных частиц с произвольным продольным распределением заряда при его движении в присутствии безграничной планарной гофрированной структуры, период которой существенно меньше длин рассматриваемых электромагнитных волн. При этом анализировались два случая гофрировки: мелкое гофрирование, когда глубина сравнима с периодом поверхности, и глубокое гофрирование, когда глубина имеет тот же порядок, что и обратное волновое число.

Впервые аналитически и численно исследовано электромагнитное поле тонкого пучка заряженных частиц с произвольным продольным распределением заряда при его движении вдоль оси бесконечного цилиндрического волновода с глубокогофрированной стенкой, период которой существенно меньше длин рассматриваемых электромагнитных волн. Впервые аналитически и численно исследована дифракция мод данного излучения на открытом конце рассматриваемого волновода.

Научная значимость полученных результатов заключается в аналитическом и численном исследовании процессов излучения тонких пучков частиц в описанных выше условиях. В этой связи можно выделить:

- описание поверхностных волн на безграничной планарной гофрированной структуре при движении пучка вдоль структуры или сквозь нее (для случая мелкого и глубокого гофрирования);
- описание объемного излучения, генерируемого зарядом при пролете безграничной гофрированной планарной структуры (для случая мелкого и глубокого гофрирования);
- описание беспорогового излучения заряда при его движении вдоль оси бесконечного цилиндрического волновода с глубокогофрированной стенкой, а также анализ дифракции моды данного излучения на открытом конце цилиндрического глубокогофрированного волновода.

Практическая значимость полученных результатов обусловлена, в частности, возможностью развития новых методов диагностики пучков заряженных частиц при помощи сплошных гофрированных структур. Полученные в работе результаты показывают, что планарные системы с малым (относительно длины волны излучения) периодом гофрировки позволяют генерировать электромагнитные поля, пространственные распределения которых содержат информацию о размере пучка и распределении заряда в нем. Это позволяет разработать методы диагностики пучков, причем они могут быть неразрушающими (по отношению к пучку). Отметим также, что полученные в работе результаты могут быть использованы для расчетов полей пучков произвольной формы с помощью алгоритмов, основанных на аналитическом решении уравнений Максвелла, без затраты большого количества вычислительных ресурсов.

Кроме того, исследуемые структуры представляют интерес для создания источников мощного излучения (на гигагерцевых и терагерцевых частотах), которое может послужить альтернативой волновым кильватерным полям, генерируемым зарядами в волноводных структурах с диэлектрическим заполнением. Также рассматриваемые структуры могут применяться в качестве излучателей во внешнее пространство.

Достоверность полученных результатов обеспечивается посредством применения строгих и асимптотических аналитических методов электродинамики, математической физики, теории функции комплексной переменной и теории волноводов. Достоверность применяемого метода эквивалентных граничных условий подтверждается, в частности, хорошим совпадением с результатами моделирования поля заряда в бесконечных гофрированных волноводах.

Личный вклад автора. Результаты работы, представленные в диссертации, отражают персональный вклад автора в проведенные аналитические и численные исследования. Автор

участвовал (совместно с научным руководителем) в выборе применяемых методов исследования, анализе получаемых результатов и подготовке публикаций. Автором лично проведены все аналитические расчеты и на их основе разработаны компьютерные программы в пакете Matlab.

Публикации. По результатам диссертации опубликовано 12 работ [94–105], из них 5 статей в рецензируемых журналах (все журналы входят в базы “Web of science”, “Scopus” и РИНЦ) [94–98], 7 публикаций в трудах международных и всероссийских конференций [99–105].

Апробация работы. Результаты работы, представленные в диссертации, докладывались и обсуждались на международной конференции “Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2018)” (Искья, Италия, 2018) [99], международной студенческой конференции “Science and Progress 2018” (Санкт-Петербург, Россия, 2018) [100], международном симпозиуме “Radiation from Relativistic Electrons in Periodic Structures (RREPS’19)” (Белгород, Россия, 2019) [101], всероссийской конференции по естественным и гуманитарным наукам с международным участием “Наука СПбГУ – 2020” (Санкт-Петербург, Россия, 2020, онлайн) [102], ведущей ежегодной международной конференции по физике ускорителей «International Particle Accelerator Conference (IPAC’21)» (Кампинас, Бразилия, 2021, онлайн) [103], всероссийской конференции по естественным и гуманитарным наукам с международным участием “Наука СПбГУ – 2021” (Санкт-Петербург, Россия, 2021, онлайн) [104], международной конференции “Days on Diffraction 2023” (Санкт-Петербург, Россия, 2023, онлайн) [105]. Все доклады были представлены автором лично, кроме доклада на конференции “Channeling 2018”. Отметим также, что результаты работы докладывались на нескольких научных семинарах на Кафедре радиофизики СПбГУ.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 140 страниц, включая 35 рисунков, список литературы, содержащий 114 наименований, и список публикаций по теме диссертации, содержащий 12 наименований.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, профессору Андрею Викторович Тюхтину, за полезные советы и обсуждения, за терпение, за поддержку и помощь в работе. Автор благодарен С.Н. Галямину, В.В. Воробьеву и Т.Ю. Алёхиной за плодотворные обсуждения и ценные комментарии. Автор благодарен преподавателям и сотрудникам кафедры радиофизики Санкт-Петербургского государственного университета за полезные дискуссии и комментарии.

Основные научные результаты

1. Исследовано поле тонкого пучка заряженных частиц, движущегося в присутствии планарной мелкогофрированной структуры с малым (относительно длины волны излучения) периодом [94, 95]. Общее решение каждой задачи получено с помощью метода эквивалентных граничных условий [94] (с. 2-3), [95] (с. 2-4). Показано, что при движении заряда вдоль плоскости поверхности [94] поле излучения состоит из поверхностных волн, в то время как объемное излучение на рассматриваемых частотах отсутствует [94] (с. 4-5). Продемонстрировано, что поверхностная волна генерируется только в ультрарелятивистском диапазоне скоростей пучка [94] (с. 5) и представляет собой локализованный импульс, содержащий информацию о размере пучка и о распределении заряда в нем. В случае, когда пучок заряженных частиц пролетает сквозь поверхность [95], показано, что волновое поле состоит как из поверхностных, так и объемных волн, причем объемное излучение мало отличается от излучения в случае гладкого экрана [95] (с. 4-5). Продемонстрировано, что поверхностная волна является беспороговой по скорости пучка и представляет собой локализованный импульс, структура которого отражает профиль пучка и его длину [95] (с. 5-7).

2. Исследовано поле тонкого пучка заряженных частиц, движущегося в присутствии планарной глубокогофрированной структуры с малым (относительно длины волны излучения) периодом [96, 97]. Общее решение каждой задачи получено с помощью метода эквивалентных граничных условий [96] (с. 2-3), [97] (с. 2-3). Показано, что при движении заряда вдоль плоскости поверхности [96] поле излучения состоит из поверхностных волн, в то время как объемное излучение на рассматриваемых частотах отсутствует [96] (с. 4). Продемонстрировано, что в отличие от случая мелкой гофры [94] поверхностная волна генерируется в широком диапазоне скоростей пучка и имеет более сложную структуру [96] (с. 5-8). При этом относительно глубокая гофра способствует генерации более мощных поверхностных волн, в то время как диагностика пучков (в ультрарелятивистском диапазоне скоростей) наиболее эффективна при относительно небольшой глубине гофрировки [96] (с. 5-6). В случае, когда пучок заряженных частиц пролетает сквозь поверхность [97], показано, что волновое поле состоит как из поверхностных, так и объемных волн [97] (с. 3-5). Проанализированы диаграммы направленности обоих типов излучения [97] (с. 3-6). Продемонстрировано, что распределение поля (как объемного, так и поверхностного) весьма чувствительно к изменению глубины гофры: при увеличении глубины почти вся энергия излучения концентрируется вдоль канавок гофрированной поверхности [97] (с. 3-7).

3. Исследована дифракция волноводной поперечно магнитной моды на открытом конце цилиндрического волновода, стенка которого имеет глубокое гофрирование с малым (отно-

сительно длины волны излучения) периодом [98]. Электромагнитное поле падающей моды (внутри волновода) получено с помощью метода эквивалентных граничных условий [98] (с. 2), а поле во внешнем пространстве (вне волновода) - с помощью метода Винера-Хопфа-Фока [98] (с. 2-4). Показано, что распределение поля в дальней зоне характеризуется максимумами излучения, количество которых растет с увеличением числа распространяющихся мод, отраженных от открытого конца волновода [98] (с. 5-7). Также продемонстрировано, что интенсивность отдельной моды данного излучения сравнима с интенсивностью моды в случае гладкого волновода с диэлектрическим заполнением [98] (с. 6).

Личное участие автора в получении всех представленных результатов: проведение аналитических и численных расчетов, разработка компьютерных программ в пакете Matlab. Автор участвовал (совместно с соавторами) в выборе применяемых методов исследования, анализе полученных результатов и подготовке публикаций.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Исследование излучения пучка заряженных частиц, движущегося в присутствии безграничной планарной мелкогофрированной структуры с малым периодом, показывает, что:
 - в случае продольного движения пучка с ультрарелятивистской скоростью генерируются поверхностные волны, распространяющиеся вдоль плоскости структуры;
 - в случае пролета пучка сквозь структуру поле излучения состоит из поверхностных и объемных волн;
 - в обоих вариантах движения заряда поверхностная волна представляет собой локализованный импульс, структура которого отражает форму и размер пучка.

2. Исследование излучения пучка заряженных частиц, движущегося в присутствии безграничной планарной глубокогофрированной структуры с малым периодом, показывает, что:
 - в случае продольного движения заряд генерирует поверхностные волны, распространяющиеся вдоль плоскости структуры, причем генерация происходит в широком диапазоне скоростей заряда;
 - в случае пролета пучка сквозь структуру поле излучения состоит из поверхностных и объемных волн;
 - поле поверхностной волны имеет более сложную структуру по сравнению со случаем мелкой гофры;

- относительно глубокая гофрированная поверхность способствует генерации более мощных поверхностных волн, в то время как определение размера и формы пучка наиболее эффективно при относительно небольшой глубине гофрировки.

3. Исследование дифракции волноводной поперечно магнитной моды на открытом конце цилиндрического волновода с глубокогофрированной стенкой показывает, что:

- число распространяющихся мод, отраженных от открытого конца волновода, конечно и определяется геометрическими параметрами гофрированной поверхности, радиусом волновода и скоростью заряда;
- распределение поля в дальней зоне (вне волновода) характеризуется радиационными максимумами, количество которых растет с увеличением числа распространяющихся мод, отраженных от открытого конца волновода;
- интенсивности отдельной волноводной моды и порождаемого ею поля во внешнем пространстве, как правило, сравнимы с аналогичными величинами в случае волновода с диэлектрическим заполнением.

Глава 1. Излучение пучка заряженных частиц, движущегося в присутствии плоской мелкогофрированной структуры с малым периодом

Данная глава посвящена исследованию излучения пучка заряженных частиц, движущегося в присутствии идеально проводящей планарной мелкогофрированной поверхности. Анализируются два варианта равномерного прямолинейного движения пучка относительно структуры: вдоль плоскости поверхности перпендикулярно направлению гофрирования и сквозь поверхность (перпендикулярно ей). Рассматривается “длинноволновая” часть спектра излучения, для которой характерные длины волн значительно превышают период структуры. Данное предположение позволяет использовать для описания воздействия гофрированной поверхности на поле пучка так называемые эквивалентные граничные условия.

1.1. Модель мелкогофрированной периодической структуры и метод эквивалентных граничных условий

Рассмотрим планарную гофрированную поверхность, расположенную в вакууме или среде, электродинамические свойства которой близки к свойствам вакуума. Сечение поверхности показано на рис.1.1. Верхние части гофры лежат в плоскости $y = 0$. Поверхность имеет прямоугольный профиль, заданный геометрическими параметрами d , d_1 , d_2 и d_3 . В случае, когда период структуры d и глубина гофры d_3 много меньше характерных длин рассматриваемых электромагнитных волн λ , то есть

$$d \ll \lambda, \quad d_3 \ll \lambda, \quad (1.1.1)$$

гофрированную структуру можно заменить гладкой поверхностью, на которой выполняются эквивалентные граничные условия (ЭГУ). В случае идеально проводящей поверхности, показанной на рис.1.1, для Фурье-образов электрического и магнитного полей ЭГУ имеют

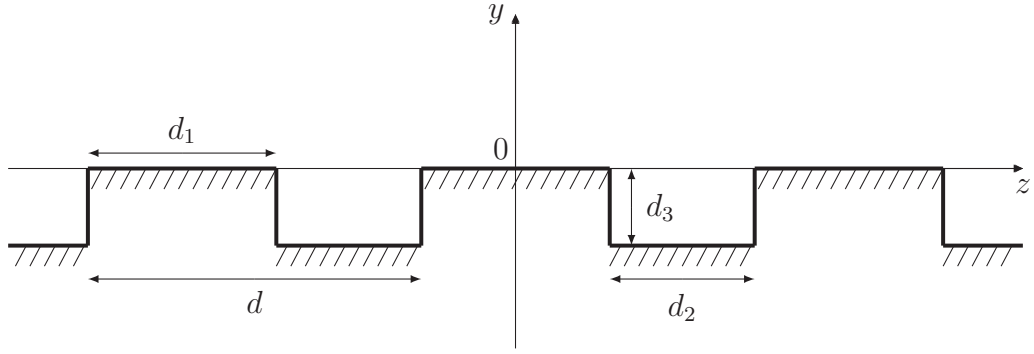


Рис.1.1. Сечение мелкогофрированной поверхности (ось x направлена вдоль канавок гофры, “от нас”).

вид [15]

$$E_z \omega|_{y=0} = \eta^m H_x \omega|_{y=0}, \quad E_x \omega|_{y=0} = \eta^e H_z \omega|_{y=0}. \quad (1.1.2)$$

Здесь η^m и η^e - импедансы, мнимые для идеально проводящих структур и задающиеся выражениями [15]

$$\eta^m = ik_0 \left(d_0 - \delta \frac{\alpha_z^2}{1 - \alpha_x^2} \right), \quad \eta^e = -ik_0 \delta (1 - \alpha_x^2), \quad (1.1.3)$$

где $d_0 = d_2 d_3 / d$, d_2 - ширина канавок гофры, $\alpha_x = k_x / k_0$, $\alpha_z = k_z / k_0$, k_x и k_z - тангенциальные компоненты волнового вектора, $k_0 = \omega / c$, ω - частота электромагнитного поля, c - скорость света в вакууме. Параметр гофры δ определяется формулой [15]

$$\delta = d_3 + \frac{d}{2\pi} \ln \left(\frac{\sigma - 1}{\sigma} \right) + \frac{td}{2\pi} \int_0^{1/\sigma} \frac{du}{\sqrt{(1-u)(1-\sigma u)} (\sqrt{1-tu} + 1)}, \quad (1.1.4)$$

где величины t и σ являются решением системы трансцендентных уравнений

$$\int_0^t \frac{\sqrt{t-u}}{\sqrt{u(1-u)(\sigma-u)}} du = \pi \frac{d_1}{d}, \quad \int_t^1 \frac{\sqrt{u-t}}{\sqrt{u(1-u)(\sigma-u)}} du = 2\pi \frac{d_3}{d}. \quad (1.1.5)$$

Отметим, что параметр δ , период структуры d и глубина канавок d_3 имеют один и тот же порядок величины (при этом, как показывают расчеты, практически всегда $d_0 > \delta$). Подчеркнем также, что в случае системы диафрагм ($d_1/d \rightarrow 0$) параметр δ определяется простой формулой [15]

$$\delta = d_3 - \frac{d}{\pi} \ln \left[\operatorname{ch} \left(\frac{\pi d_3}{d} \right) \right]. \quad (1.1.6)$$

1.2. Излучение пучка заряженных частиц, движущегося вдоль мелкоффрированной структуры

1.2.1. Общее решение

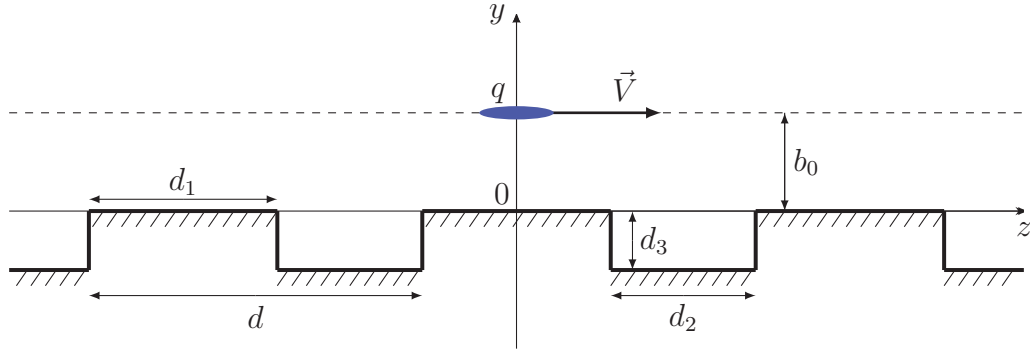


Рис.1.2. Движение заряда вдоль мелкоффрированной поверхности (ось x направлена вдоль канавок гофры, “от нас”).

Мы предполагаем, что пучок заряженных частиц движется с постоянной скоростью $\vec{V} = V_z \vec{e}_z$ ($V_z \equiv V$) параллельно поверхности и перпендикулярно канавкам гофры. Будем считать, что пучок имеет бесконечно малые поперечные размеры и произвольное распределение заряда вдоль направления движения. Объемные плотности заряда и тока можно записать в виде

$$\rho = q\delta(x)\delta(y - b_0)\kappa(z - Vt), \quad j_z \equiv j = Vq\delta(x)\delta(y - b_0)\kappa(z - Vt), \quad (1.2.1)$$

где $\kappa(z - Vt)$ - функция, определяющая распределение заряда в пучке вдоль направления движения (профиль пучка), q - заряд пучка, $\delta()$ - дельта-функция Дирака, b_0 - расстояние от траектории пучка до периодической структуры (рис.1.2). Отметим, что функция $\kappa(z - Vt)$ введена таким образом, что $\int_{-\infty}^{+\infty} \kappa(\zeta) d\zeta = 1$, где $\zeta = z - Vt$.

Решение задачи сводится к решению системы уравнений Максвелла для вакуума

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \text{div } \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \text{div } \vec{H} = 0 \quad (1.2.2)$$

с граничными условиями (1.1.2). При этом мы воспользуемся вектором Герца. Компоненты поля выражаются через него по формулам

$$\vec{E} = \text{grad div } \vec{\Pi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2}, \quad \vec{H} = \frac{1}{c} \text{rot } \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t}. \quad (1.2.3)$$

Из уравнений Максвелла вытекает следующее уравнение для вектора Герца:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} = -4\pi \vec{j}. \quad (1.2.4)$$

Полное электромагнитное поле можно записать как сумму “вынужденного” поля пучка (то есть поля в безграничном вакууме) и “свободного” поля (то есть поля, возникающего за счет гофрированной поверхности). Отметим, что данная терминология была введена В.Л. Гинзбургом и применялась, например, в его книге [63]. Соответственно, вектор Герца записывается в виде

$$\vec{\Pi} = \vec{\Pi}^{(i)} + \vec{\Pi}^{(r)}, \quad (1.2.5)$$

где $\vec{\Pi}^{(i)}$ - вектор Герца “вынужденного” поля пучка, $\vec{\Pi}^{(r)}$ - вектор Герца “свободного” поля.

В дальнейшем мы будем пользоваться методом Фурье. Введем прямое и обратное преобразование Фурье произвольной функции $F(\vec{r}, t)$ по правилу

$$F_{\omega, \vec{k}} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 \vec{r} \int_{-\infty}^{+\infty} dt F(\vec{r}, t) \exp(-i\vec{k}\vec{r} + i\omega t), \quad (1.2.6)$$

$$F(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 \vec{k} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega F_{\omega, \vec{k}} \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t), \quad (1.2.7)$$

где $F_{\omega, \vec{k}}$ - Фурье-образ функции $F(\vec{r}, t)$ по частоте и трехмерному волновому вектору.

Рассмотрим сначала “вынужденное” поле, являющееся кулоновским полем движущегося пучка. Хотя оно хорошо известно, приведем кратко вывод выражения для него, которое будет использоваться далее. Данное поле описывается вектором Герца $\vec{\Pi}^{(i)}$ и является решением неоднородного уравнения (1.2.4). Так как плотность тока \vec{j} имеет только z -компоненту, “вынужденное” поле описывается однокомпонентным вектором Герца

$$\vec{\Pi}^{(i)} = \Pi_z^{(i)} \vec{e}_z. \quad (1.2.8)$$

Перейдем в уравнении (1.2.4) к Фурье-образам по частоте и трехмерному волновому вектору

$$\{-k^2 + k_0^2\} \Pi_{z, \omega, \vec{k}}^{(i)} = -\frac{4\pi i}{ck_0} j_{\omega, \vec{k}}, \quad (1.2.9)$$

где

$$j_{\omega, \vec{k}} = \frac{q\tilde{\kappa}}{(2\pi)^2} \delta\left(k_z - \frac{k_0}{\beta}\right) \exp(-ik_y b_0). \quad (1.2.10)$$

Здесь $\beta = V/c$, $k_0 = \omega/c$, а $\tilde{\kappa}$ - Фурье-образ профиля пучка

$$\tilde{\kappa} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \kappa(\zeta) \exp(-ik_z \zeta), \quad \zeta = z - Vt. \quad (1.2.11)$$

Таким образом, четырехмерный Фурье-образ вектора Герца “вынужденного” поля по частоте и волновому вектору имеет вид

$$\Pi_{z, \omega, \vec{k}}^{(i)} = \frac{iq\tilde{\kappa}\delta\left(k_z - \frac{k_0}{\beta}\right) \exp(-ik_y b_0)}{\pi c k_0 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - k_0^2)}. \quad (1.2.12)$$

Применяя обратное преобразование Фурье по компонентам волнового вектора, получаем Фурье-образ потенциала Герца по частоте:

$$\begin{aligned} \Pi_z^{(i)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 \vec{k} \Pi_{z, \omega, \vec{k}}^{(i)} \exp(i\vec{k}\vec{r}) \\ &= \frac{iq}{\pi c k_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \tilde{\kappa} \delta\left(k_z - \frac{k_0}{\beta}\right) \frac{\exp[ik_x x + ik_y (y - b_0) + ik_z z]}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - k_0^2}. \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Интеграл по k_z легко берется за счет дельта-функции $\delta(k_z - k_0/\beta)$:

$$\Pi_z^{(i)} = \frac{iq\tilde{\kappa}}{\pi c k_0} \exp\left(i\frac{k_0}{\beta} z\right) \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \frac{\exp[ik_x x + ik_y (y - b_0)]}{k_x^2 + k_y^2 + k_0^2 \frac{1-\beta^2}{\beta^2}}. \quad (1.2.14)$$

Теперь отдельно рассмотрим интеграл по k_y

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \frac{\exp[ik_y (y - b_0)]}{k_x^2 + k_y^2 + k_0^2 \frac{1-\beta^2}{\beta^2}}. \quad (1.2.15)$$

Будем брать этот интеграл по вычетах. Для этого дополним контур интегрирования (вещественную ось R) полуокружностью бесконечно большого радиуса Γ_+ в верхней полуплоскости, если $y > b_0$, и полуокружностью бесконечно большого радиуса Γ_- в нижней полуплоскости, если $y < b_0$. Подынтегральная функция имеет два полюса $k_y = \pm k_{y0} = \pm i\sqrt{k_x^2 + k_0^2 \beta^{-2} (1 - \beta^2)}$. Зафиксируем знак мнимой части k_{y0} по правилу $\text{Im } k_{y0} > 0$. Тогда контур $C_+ = R + \Gamma_+$ охватывает полюс со знаком “+”, а контур $C_- = R + \Gamma_-$ охватывает полюс со знаком “-”. Вычисляя интеграл I для $y > b_0$ (верхний знак) и $y < b_0$ (нижний знак), получаем

$$I = \int_{C_{\pm}} dk_y \frac{\exp[ik_y (y - b_0)]}{k_x^2 + k_y^2 + k_0^2 \frac{1-\beta^2}{\beta^2}} = \pm 2\pi i \text{Res}_{k_y = \pm k_{y0}} \frac{\exp[ik_y (y - b_0)]}{k_y^2 - k_{y0}^2} = \pi i \frac{\exp[ik_y |y - b_0|]}{k_{y0}}. \quad (1.2.16)$$

Таким образом, выражение для Фурье-образа (по частоте) вектора Герца “вынужденного” поля имеет вид

$$\vec{\Pi}_{\omega}^{(i)} = \Pi_z^{(i)} \vec{e}_z, \quad \Pi_z^{(i)} = -\frac{q\tilde{\kappa}}{c k_0} \exp\left(i\frac{k_0}{\beta} z\right) \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \frac{\exp(ik_x x + ik_{y0} |y - b_0|)}{k_{y0}}. \quad (1.2.17)$$

где $k_{y0} = i\sqrt{k_x^2 + k_0^2\beta^{-2}(1 - \beta^2)}$, причем $\text{Im } k_{y0} > 0$.

Фурье-образы электрического и магнитного полей выражаются через вектор Герца по формулам

$$\vec{E}_\omega = \vec{\nabla} \text{div } \vec{\Pi}_\omega + k_0^2 \vec{\Pi}_\omega, \quad \vec{H}_\omega = -ik_0 \text{rot } \vec{\Pi}_\omega. \quad (1.2.18)$$

Для дальнейшего удобно записать полученные по формулам (1.2.18) Фурье-образы электрического и магнитного полей по частоте и x -компоненте волнового вектора:

$$E_{x\omega, k_x}^{(i)} = \frac{q\tilde{\kappa}}{c\beta} \frac{k_x}{k_{y0}} \exp\left(ik_{y0}|y - b_0| + i\frac{k_0}{\beta}z\right), \quad (1.2.19)$$

$$E_{y\omega, k_x}^{(i)} = \frac{q\tilde{\kappa}}{c\beta} \text{sgn}(y - b_0) \exp\left(ik_{y0}|y - b_0| + i\frac{k_0}{\beta}z\right), \quad (1.2.20)$$

$$E_{z\omega, k_x}^{(i)} = \frac{q\tilde{\kappa}}{c} \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} \frac{k_0}{k_{y0}} \exp\left(ik_{y0}|y - b_0| + i\frac{k_0}{\beta}z\right), \quad (1.2.21)$$

$$H_{x\omega, k_x}^{(i)} = -\frac{q\tilde{\kappa}}{c} \text{sgn}(y - b_0) \exp\left(ik_{y0}|y - b_0| + i\frac{k_0}{\beta}z\right), \quad (1.2.22)$$

$$H_{y\omega, k_x}^{(i)} = \frac{q\tilde{\kappa}}{c} \frac{k_x}{k_{y0}} \exp\left(ik_{y0}|y - b_0| + i\frac{k_0}{\beta}z\right), \quad (1.2.23)$$

$$H_{z\omega, k_x}^{(i)} = 0. \quad (1.2.24)$$

Теперь обратимся к “свободному” полю. Учитывая вид эквивалентных граничных условий (1.1.2), данное поле можно описать двухкомпонентным вектором Герца

$$\vec{\Pi}^{(r)} = \Pi_x^{(r)} \vec{e}_x + \Pi_z^{(r)} \vec{e}_z. \quad (1.2.25)$$

Введем произвольные коэффициенты R_x и R_z и запишем Фурье-образы компонент вектора Герца “свободного” поля в виде

$$\begin{Bmatrix} \Pi_x^{(r)} \\ \Pi_z^{(r)} \end{Bmatrix} = -\frac{q\tilde{\kappa}}{ck_0k_{y0}} \begin{Bmatrix} R_x \\ R_z \end{Bmatrix} \exp\left[ik_{y0}(y + b_0) + i\frac{k_0}{\beta}z\right]. \quad (1.2.26)$$

В этом случае компоненты электромагнитного поля, “наведенного” периодической структурой, примут вид

$$E_{x\omega, k_x}^{(r)} = \frac{q\tilde{\kappa}}{ck_{y0}} \left(R_x \frac{k_x^2 - k_0^2}{k_0} + R_z \frac{k_x}{\beta}\right) \exp\left[ik_{y0}(y + b_0) + i\frac{k_0}{\beta}z\right], \quad (1.2.27)$$

$$E_{y\omega, k_x}^{(r)} = \frac{q\tilde{\kappa}}{c} \left(R_x \frac{k_x}{k_0} + R_z \frac{1}{\beta}\right) \exp\left[ik_{y0}(y + b_0) + i\frac{k_0}{\beta}z\right], \quad (1.2.28)$$

$$E_{z\omega, k_x}^{(r)} = \frac{q\tilde{\kappa}}{c\beta k_{y0}} \left(R_x k_x + R_z k_0 \frac{1 - \beta^2}{\beta}\right) \exp\left[ik_{y0}(y + b_0) + i\frac{k_0}{\beta}z\right], \quad (1.2.29)$$

$$H_{x\omega, k_x}^{(r)} = -\frac{q\tilde{\kappa}}{c} R_z \exp\left[ik_{y0}(y + b_0) + i\frac{k_0}{\beta}z\right], \quad (1.2.30)$$

$$H_{y\omega, k_x}^{(r)} = \frac{q\tilde{\kappa}}{ck_{y0}} \left(R_z k_x - R_x \frac{k_0}{\beta}\right) \exp\left[ik_{y0}(y + b_0) + i\frac{k_0}{\beta}z\right], \quad (1.2.31)$$

$$H_{z \omega, k_x}^{(r)} = \frac{q\tilde{\kappa}}{c} R_x \exp \left[i k_{y0} (y + b_0) + i \frac{k_0}{\beta} z \right], \quad (1.2.32)$$

где R_x и R_z - неизвестные величины. Найдем их, решив систему, вытекающую из граничных условий (1.1.2):

$$\begin{cases} E_{z \omega, k_x}^{(i)} + E_{z \omega, k_x}^{(r)} = \eta^m \left(H_{x \omega, k_x}^{(i)} + H_{x \omega, k_x}^{(r)} \right) \\ E_{x \omega, k_x}^{(i)} + E_{x \omega, k_x}^{(r)} = \eta^e \left(H_{z \omega, k_x}^{(i)} + H_{z \omega, k_x}^{(r)} \right). \end{cases} \quad (1.2.33)$$

Величины η^m и η^e здесь определены соотношениями (1.1.3). В итоге получим

$$R_x = \frac{2k_0 k_x k_{y0} \beta \eta^m}{k_x^2 k_0 + (k_0 - \beta^2 k_0 + k_{y0} \beta^2 \eta^m) (k_0^2 - k_x^2 + k_{y0} k_0 \eta^e)}, \quad (1.2.34)$$

$$R_z = -\frac{k_x^2 k_0 + (k_0 - \beta^2 k_0 - k_{y0} \beta^2 \eta^m) (k_0^2 - k_x^2 + k_{y0} k_0 \eta^e)}{k_x^2 k_0 + (k_0 - \beta^2 k_0 + k_{y0} \beta^2 \eta^m) (k_0^2 - k_x^2 + k_{y0} k_0 \eta^e)}, \quad (1.2.35)$$

где $k_{y0} = i \sqrt{k_x^2 + k_0^2 \beta^{-2} (1 - \beta^2)}$.

1.2.2. Исследование поля, возникающего за счет гофрированной поверхности

Согласно (1.2.26), Фурье-образы компонент вектора Герца “свободного” поля по частоте имеют вид

$$\begin{cases} \Pi_{x \omega}^{(r)} \\ \Pi_{z \omega}^{(r)} \end{cases} = -\frac{q\tilde{\kappa}}{c k_0} \exp \left(i \frac{k_0}{\beta} z \right) \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \begin{cases} R_x \\ R_z \end{cases} \frac{\exp [i \Phi (k_x)]}{k_{y0}}, \quad (1.2.36)$$

где $\Phi (k_x) = k_x x + k_{y0} (y + b_0)$. В подынтегральном выражении имеется функция

$$k_{y0} = i \sqrt{k_x^2 + k_0^2 \frac{1 - \beta^2}{\beta^2}}, \quad (1.2.37)$$

обладающая двумя точками ветвления $k_x = \pm k_{xb} = \pm i k_0 \beta^{-1} \sqrt{1 - \beta^2}$. Как отмечалось выше, на вещественной оси данная функция определена правилом $\text{Im } k_{y0} > 0$, то есть $\text{Re } \sqrt{k_x^2 + k_0^2 \beta^{-2} (1 - \beta^2)} > 0$. Целесообразно распространить это правило на весь “верхний” лист римановой поверхности для данной функции. Тогда разрезы будут проходить по мнимой оси на $\pm i\infty$.

Другими особенностями подынтегральной функции в формуле (1.2.36) являются нули знаменателя в выражениях для коэффициентов (1.2.34) и (1.2.35). Найдем данные полюсы, решив уравнение

$$k_x^2 k_0 + (k_0 - \beta^2 k_0 + k_{y0} \beta^2 \eta^m) (k_0^2 - k_x^2 + k_{y0} k_0 \eta^e) = 0, \quad (1.2.38)$$

где величины

$$\eta^m = i \frac{k_0}{k_0^2 - k_x^2} \left[d_0 (k_0^2 - k_x^2) - \delta \frac{k_0^2}{\beta^2} \right], \quad \eta^e = -i \frac{\delta}{k_0} (k_0^2 - k_x^2) \quad (1.2.39)$$

и (1.2.37) также зависят от k_x . Напомним, что мы рассматриваем электромагнитное излучение с длинами волн $\lambda \gg d$, где d - период структуры. Отсюда следует, что $k_0 d \ll 1$, то есть произведение $k_0 d$ - малый параметр задачи. Если к тому же учесть, что параметр гофры δ , стоящий в выражениях для η^m и η^e , также порядка d , то получим

$$|\eta^m| \sim |\eta^e| \ll 1. \quad (1.2.40)$$

Если в уравнении (1.2.38) пренебречь величинами η^m и η^e , то получим простое уравнение

$$k_x^2 + (1 - \beta^2) (k_0^2 - k_x^2) = 0, \quad (1.2.41)$$

которое имеет два чисто мнимых решения $k_{x1,2} = \pm i k_0 \beta^{-1} \sqrt{1 - \beta^2}$. Вклад таких полюсов экспоненциально убывает с ростом $|x|$, то есть не относится к волновому полю (полю излучения). Это естественно, так как фактически мы заменили гофрированную поверхность на идеально проводящую плоскость, при движении вдоль которой никакого излучения нет.

Вернемся к исходному уравнению (1.2.38) и перепишем его, раскрыв скобки:

$$k_x^2 k_0 + (1 - \beta^2) (k_0^2 - k_x^2) k_0 + k_{y0} \beta^2 (k_0^2 - k_x^2) \eta^m + (1 - \beta^2) k_0^2 k_{y0} \eta^e + k_0 k_{y0} \beta^2 \eta^m \eta^e = 0. \quad (1.2.42)$$

Подставив сюда формулы (1.2.37) и (1.2.39) и сделав некоторые преобразования, получим

$$k_0 \sqrt{k_x^2 + k_0^2 \frac{1 - \beta^2}{\beta^2}} \left\{ \sqrt{k_x^2 + k_0^2 \frac{1 - \beta^2}{\beta^2}} \left[\beta^2 (k_x^2 d_0 \delta - k_0^2 d_0 \delta + 1) + k_0^2 \delta^2 \right] + k_x^2 \left[\beta^2 d_0 - (1 - \beta^2) \delta \right] + k_0^2 \left[(2 - \beta^2) \delta - \beta^2 d_0 \right] \right\} = 0. \quad (1.2.43)$$

Рассмотрим наиболее важный для нас ультрарелятивистский режим движения заряда, то есть случай, когда параметр $\beta \rightarrow 1$. Тогда выражение (1.2.43) примет вид

$$k_0 \sqrt{k_x^2} \left[\sqrt{k_x^2} (1 + k_x^2 d_0 \delta - k_0^2 d_0 \delta + k_0^2 \delta^2) + k_x^2 d_0 + k_0^2 (\delta - d_0) \right] = 0. \quad (1.2.44)$$

Отметим, что точка $k_x = 0$ не является особенностью подынтегральной функции в (1.2.36), так как в данном случае числители коэффициентов R_x и R_z также обращаются в ноль. Поскольку $k_0 d$ - малый параметр задачи, сумма в квадратных скобках имеет слагаемые нулевого, первого и второго порядка малости. Приравняв к нулю выражение в скобках, найдем

$$\sqrt{k_x^2} = k_0^2 (d_0 - \delta) - k_x^2 d_0 + \delta \sqrt{k_x^2} [(k_0^2 - k_x^2) d_0 - k_0^2 \delta]. \quad (1.2.45)$$

В нулевом приближении есть только одно решение $k_x = 0$. Тогда в первом приближении получаем $\sqrt{k_x^2} = k_0^2 (d_0 - \delta)$. Поскольку для “верхнего” листа $\text{Re} \sqrt{k_x^2} > 0$, то решение данного уравнения принадлежит “верхнему” листу, если $d_0 > \delta$, и “нижнему” листу, если $d_0 < \delta$. В общем случае решение уравнения (1.2.45) в первом приближении можно записать в виде

$$k_x = \pm k_{x0}, \quad \text{где } k_{x0}^2 = k_0^4 (d_0 - \delta)^2. \quad (1.2.46)$$

Величину k_{x0} выберем так, чтобы при введении малого затухания в среду выполнялось условие $\text{Im} k_{x0} > 0$. Для учета малого затухания достаточно сделать замену $k_0^2 = \omega^2/c^2 \rightarrow k_0^2 [1 + i\sigma \text{sgn}(\omega)]$, где $0 < \sigma \ll 1$ (в конечных результатах устремим σ к нулю). Тогда $k_{x0}^2 = k_0^4 [1 + 2i\sigma \text{sgn}(\omega)] (d_0 - \delta)^2$. Видим, что для положительных частот величина k_{x0}^2 лежит в первом квадранте комплексной плоскости, а для отрицательных частот - в четвертом квадранте. Следовательно, извлекая корень из k_{x0}^2 и учитывая условие $\text{Im} k_{x0} > 0$, для полюса k_{x0} при $\omega > 0$ можем записать

$$k_{x0} = k_0^2 (1 + 2i\sigma) |d_0 - \delta| \quad (1.2.47)$$

или, переходя к пределу $\sigma \rightarrow +0$ ($\omega > 0$),

$$k_{x0} = k_0^2 |d_0 - \delta|. \quad (1.2.48)$$

Подчеркнем, что полюсы $\pm k_{x0}$ лежат на “верхнем” листе при $d_0 > \delta$ и на “нижнем” - при $d_0 < \delta$.

В случае произвольной скорости заряда решение уравнения (1.2.43) в нулевом приближении имеет вид $k_x^2 = -k_0^2 (1 - \beta^2) / \beta^2$. Тогда приближенно получим

$$\beta^2 \sqrt{k_x^2 + k_0^2 \frac{1 - \beta^2}{\beta^2}} = k_0^2 \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} [\beta^2 d_0 - (1 - \beta^2) \delta] - k_0^2 [(2 - \beta^2) \delta - \beta^2 d_0] = k_0^2 \left(d_0 - \frac{\delta}{\beta^2} \right). \quad (1.2.49)$$

Откуда следует, что

$$k_x^2 = k_{x0}^2 = -k_0^2 \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} + \frac{k_0^4}{\beta^4} \left(d_0 - \frac{\delta}{\beta^2} \right)^2. \quad (1.2.50)$$

Как видим, если β не близко к 1, то $k_{x0}^2 < 0$, то есть полюсы мнимые. Это означает, что вклад таких полюсов будет экспоненциально убывать вдоль направления x , то есть они не дадут распространяющихся волн. Поэтому далее для нас основной интерес представляет случай ультрарелятивистского движения заряда, когда β близко к 1.

На рис.1.3 показаны точки ветвления $\pm k_{xb}$, разрезы, полюсы $\pm k_{x0}$ для случая $d_0 > \delta$ при $\omega > 0$ и контур интегрирования с учетом правила обхода полюсов. Такое расположение полюсов относительно контура интегрирования показано выше в случае ультрарелятивистского режима движения заряда. Тогда при учете малого затухания в среде полюсы $\pm k_{x0}$

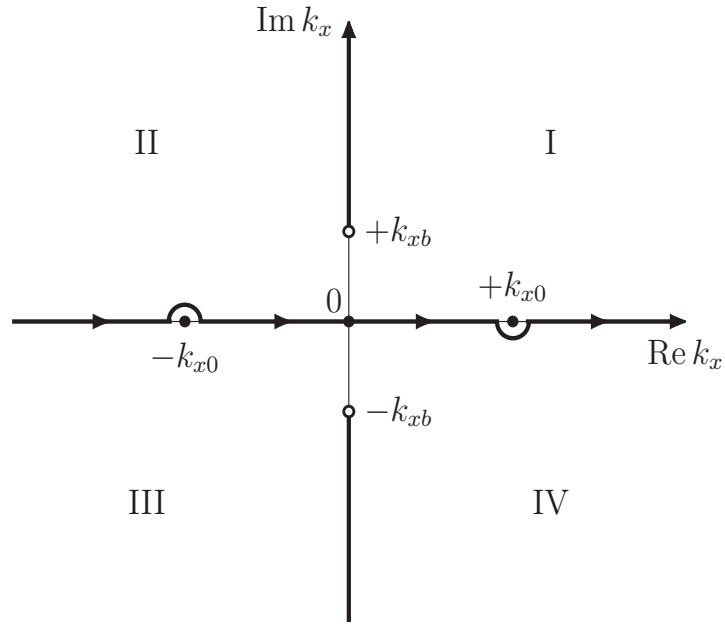


Рис.1.3. Расположение полюсов $\pm k_{x0}$ при условии $d_0 > \delta$ (для $\omega > 0$), точек ветвления $\pm k_{xb}$, разрезов и контура интегрирования (вещественная ось) на комплексной плоскости k_x . Кругом \circ здесь обозначены точки ветвления, а римскими цифрами - квадранты комплексной плоскости).

определяются формулой (1.2.47), из которой следует, что для $\omega > 0$ у полюса $+k_{x0}$ вещественная и мнимая части всегда положительны, а у полюса $-k_{x0}$ - всегда отрицательны. Для $\omega < 0$ вещественные части полюсов $\pm k_{x0}$ меняют знаки на обратные, а у мнимых частей знаки сохраняются.

Будем исследовать асимптотическое поведение интеграла (1.2.36) методом перевала. Для удобства сначала сделаем замену переменной интегрирования

$$k_x = \frac{k_0}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2} \operatorname{sh} \chi, \quad (1.2.51)$$

где $\operatorname{sh} \chi$ - гиперболический синус. Тогда $k_{y0} = ik_0 \beta^{-1} \sqrt{1 - \beta^2} \operatorname{ch} \chi$, и интеграл (1.2.36) примет следующий вид:

$$\begin{Bmatrix} \Pi_x^{(r)} \\ \Pi_z^{(r)} \end{Bmatrix} = \frac{iq\tilde{\kappa}}{ck_0} \exp\left(i \frac{k_0}{\beta} z\right) \int_{-\infty}^{+\infty} d\chi \begin{Bmatrix} R_x \\ R_z \end{Bmatrix} \exp[i\Phi(\chi)], \quad (1.2.52)$$

где фаза $\Phi(\chi) = k_0 \beta^{-1} \sqrt{1 - \beta^2} [x \operatorname{sh} \chi + i(y + b_0) \operatorname{ch} \chi]$. Следует отметить, что замена (1.2.51) позволила нам избавиться от точек ветвления в выражении (1.2.36).

Седловые точки $\chi = \chi_s$ определяются из условия

$$\frac{d\Phi(\chi)}{d\chi} = \frac{k_0}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2} [x \operatorname{ch} \chi + i(y + b_0) \operatorname{sh} \chi] = 0. \quad (1.2.53)$$

Отсюда найдем, что $\text{sh } \chi_s = ix(y + b_0)^{-1} \text{ch } \chi_s$, и, воспользовавшись тригонометрическим тождеством $\text{ch}^2 \zeta - \text{sh}^2 \zeta = 1$, получим

$$\text{ch } \chi_{s\pm} = \pm \frac{y + b_0}{\sqrt{x^2 + (y + b_0)^2}}, \quad (1.2.54)$$

где χ_{s+} соответствует знаку “+” в правой части равенства, χ_{s-} - знаку “-”. Из данного выражения видно, что $\text{ch } \chi_{s\pm} < 1$. Следовательно, на комплексной плоскости χ седловые точки являются чисто мнимыми величинами:

$$\chi_{s\pm} = i\chi''_{s\pm}. \quad (1.2.55)$$

Учитывая данный факт, равенство (1.2.54) можно переписать в виде

$$\text{ch } \chi_{s\pm} = \cos \chi''_{s\pm} = \pm \frac{y + b_0}{\sqrt{x^2 + (y + b_0)^2}}. \quad (1.2.56)$$

Здесь было использовано тождество $\text{ch}(i\zeta) = \cos \zeta$.

Ранее мы зафиксировали $\text{Im } k_{y0} > 0$. Отсюда следует, что (в новой переменной χ)

$$\text{Re} \left(\frac{k_0}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2} \text{ch } \chi \right) = \text{Re} \left[\frac{k_0}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2} (\text{ch } \chi' \cos \chi'' + i \text{sh } \chi' \sin \chi'') \right] > 0 \Rightarrow \cos \chi'' > 0. \quad (1.2.57)$$

Таким образом, отображение “верхнего” листа плоскости k_x на плоскость χ есть полосы

$$\begin{cases} \chi = \chi' + i\chi'' \\ -\infty < \chi' < +\infty \\ -\frac{\pi}{2} + \pi m < \chi'' < \frac{\pi}{2} + \pi m, \end{cases} \quad (1.2.58)$$

где m - четное число. “Нижний” лист отображается на аналогичные полосы с нечетным значением m . Мы будем рассматривать далее области, где $m = 0, 1$, то есть $-\pi/2 < \chi'' < 3\pi/2$.

Из равенства (1.2.56) видно, что седловая точка χ_{s+} лежит в полосе $\chi'' \in (-\pi/2, \pi/2)$ (при $m = 0$), а седловая точка χ_{s-} - в полосе $\chi'' \in (\pi/2, 3\pi/2)$ (при $m = 1$). Поскольку отображение “верхнего” листа плоскости k_x есть полоса

$$\begin{cases} \chi = \chi' + i\chi'' \\ -\infty < \chi' < +\infty \\ -\frac{\pi}{2} < \chi'' < \frac{\pi}{2} (m = 0), \end{cases} \quad (1.2.59)$$

то нас интересует только точка $\chi_{s+} = i\chi''_{s+}$.

Контур наибоыстрейшего спуска Γ_χ^* (КНС) проходит через седловую точку χ_{s+} и удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \Phi(\chi) = \operatorname{Re} \Phi(\chi_{s+}) \\ \operatorname{Im} \Phi(\chi) > \operatorname{Im} \Phi(\chi_{s+}). \end{cases} \quad (1.2.60)$$

Первое условие принимает вид

$$x \operatorname{sh} \chi' \left(\cos \chi'' - \frac{y + b_0}{x} \sin \chi'' \right) = 0. \quad (1.2.61)$$

Перепишем его следующим образом:

$$\pm |x| \operatorname{sh} \chi' \left(\cos \chi'' \mp \frac{y + b_0}{x} \sin \chi'' \right) = 0, \quad (1.2.62)$$

где верхний знак соответствует положительным значениям x , а нижний знак - отрицательным значениям x . Поскольку $\cos \chi''_{s+} = (y + b_0) / \sqrt{x^2 + (y + b_0)^2}$, то можно показать, что

$$\operatorname{ctg} \chi''_{s+} = \pm \frac{y + b_0}{|x|}. \quad (1.2.63)$$

Пусть $\chi''_{s+} \in (0, \pi/2)$. Тогда $\operatorname{ctg} \chi''_{s+} = (y + b_0) / |x|$. Подставив данное равенство в уравнение (1.2.62), получим

$$\pm \frac{|x| \operatorname{sh} \chi'}{\sin \chi''_{s+}} \sin(\chi''_{s+} \mp \chi'') = 0. \quad (1.2.64)$$

Отсюда следует, что при $x > 0$ (верхний знак) $\chi'' = \chi''_{s+}$, а при $x < 0$ (нижний знак) $\chi'' = -\chi''_{s+}$. Аналогичный результат получим, если $\chi''_{s+} \in (-\pi/2, 0)$, то есть когда $\operatorname{ctg} \chi''_{s+} = -(y + b_0) / |x|$. Поскольку значение $\chi = i\chi'' = i\chi''_{s+}$ не противоречит второму условию в системе (1.2.60), то мы можем заключить, что КНС является прямой линией, параллельной вещественной оси на плоскости χ , и лежит при $x > 0$ в области $\chi'' \in (0, \pi/2)$, а при $x < 0$ - в области $\chi'' \in (-\pi/2, 0)$.

На рис.1.4 изображена комплексная плоскость χ с контуром интегрирования R , контуром наибоыстрейшего спуска Γ_χ^* (при $x > 0$), седловыми точками $\chi_{s\pm} = i\chi''_{s\pm}$, полюсами $\pm\chi_0 \equiv \pm\chi_{0+}$ (при $d_0 > \delta$ и $\omega > 0$) и $\pm\chi_0 \equiv \pm\chi_{0-}$ (при $d_0 < \delta$ и $\omega > 0$). Римскими цифрами отмечены области, соответствующие квадрантам плоскости k_x (римские цифры со штрихом соответствуют квадрантам "нижнего" листа плоскости k_x). Отметим, что в случае $d_0 > \delta$ полюсы $\pm\chi_0$ лежат в области, соответствующей "верхнему" листу плоскости k_x , а в случае $d_0 < \delta$ - в области, соответствующей "нижнему" листу плоскости k_x .

Теперь оценим вклад седловой точки χ_{s+} в интегралы (1.2.52). Выражение для фазы примет вид

$$\Phi(\chi_{s+}) = \frac{k_0}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2} [x \operatorname{sh} \chi_{s+} + i(y + b_0) \operatorname{ch} \chi_{s+}]. \quad (1.2.65)$$

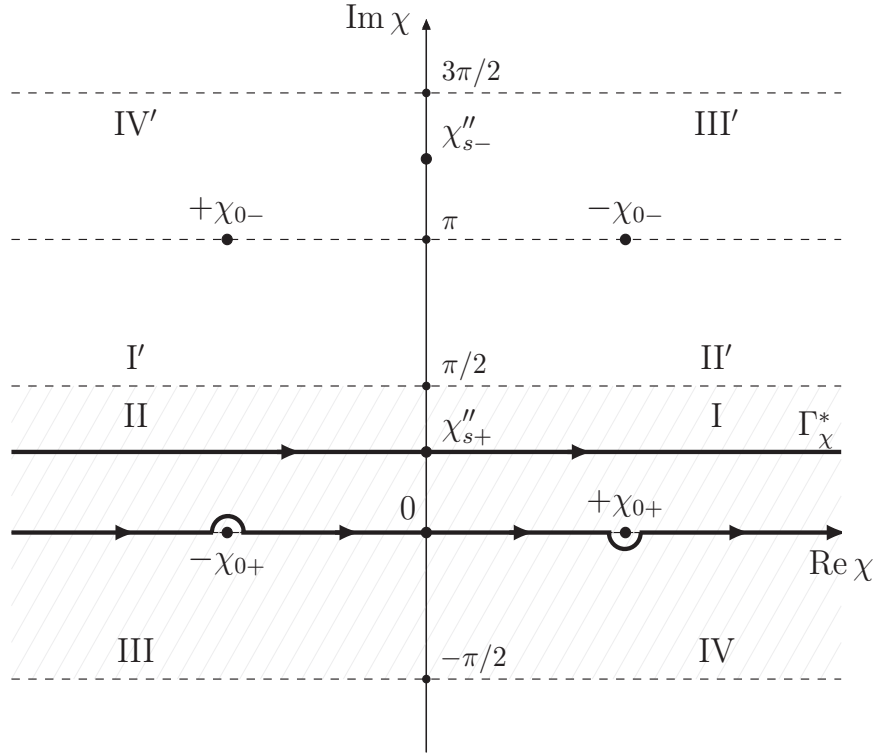


Рис.1.4. Расположение полюсов $\pm\chi_0 \equiv \pm\chi_{0+}$ при $d_0 > \delta$ и $\omega > 0$, тех же полюсов $\pm\chi_0 \equiv \pm\chi_{0-}$ при $d_0 < \delta$ и $\omega > 0$, исходного контура интегрирования (вещественная ось) и контура наибыстрейшего спуска Γ_χ^* на комплексной плоскости χ . Римскими цифрами обозначены области, соответствующие квадрантам плоскости k_x (для “верхнего” листа - без штриха, для “нижнего” листа - со штрихом).

Перепишем данную формулу с учетом (1.2.54) и тождества $\text{ch}^2 \xi - \text{sh}^2 \xi = 1$:

$$\Phi(\chi_{s+}) = i \frac{k_0}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{x^2 + (y + b_0)^2}. \quad (1.2.66)$$

В результате, если выполнено неравенство $k_0 \beta^{-1} \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{x^2 + (y + b_0)^2} \gg 1$, вклад седловой точки χ_{s+} в интегралы (1.2.52) можно оценить по стандартной формуле (для z -компоненты) [106]

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_x^{(\Gamma_\chi^*)} \\ \Pi_z^{(\Gamma_\chi^*)} \end{array} \right\} \cong i \frac{q\tilde{\kappa}}{ck_0} \sqrt{\frac{2\pi}{|\Phi(\chi_{s+})|}} \left\{ \begin{array}{l} R_x(\chi_{s+}) \\ R_z(\chi_{s+}) \end{array} \right\} \exp\left(\frac{ik_0 z}{\beta} + i\Phi(\chi_{s+})\right), \quad (1.2.67)$$

где величина $\Phi(\chi_{s+})$ определена формулой (1.2.66).

Из выражений (1.2.67) видно, что, в силу мнимости $\Phi(\chi_{s+})$, вклад седловой точки экспоненциально убывает с ростом расстояния от проекции траектории заряда на плоскость периодической структуры по закону $\exp\left(-k_0 \beta^{-1} \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{x^2 + (y + b_0)^2}\right)$. При расчете поля им можно пренебречь в силу его экспоненциальной малости. Данный вклад не представляет для нас интереса, так как не относится к полю излучения (не уносит энергию от источника).

Подчеркнем, что экспоненциальное убывание вклада КНС с ростом расстояния физически означает, что в рассматриваемой ситуации отсутствует объемное излучение.

1.2.3. Поверхностные волны

Обратимся к исходному интегралу (1.2.52). Можно показать, что подынтегральное выражение экспоненциально стремится к нулю, если $\operatorname{Re} \chi \rightarrow \pm\infty$, а $\operatorname{Im} \chi \in (0, \pi/2)$ при $x > 0$, и если $\operatorname{Re} \chi \rightarrow \pm\infty$, а $\operatorname{Im} \chi \in (-\pi/2, 0)$ при $x < 0$. Учитывая это обстоятельство, при $x > 0$ мы можем образовать замкнутый контур C_+ , состоящий из исходного контура R , контура, обратного к КНС, и отрезков, параллельных мнимой оси и расположенных на бесконечности. Интеграл по такому контуру определяется вкладом одного полюса $+\chi_0$ при условии, что $d_0 > \delta$ (см. рис.1.4):

$$\oint_{C_+} = \int_{-\infty}^{+\infty} + \int_{+\infty}^{+\infty+i\chi''_{s+}} - \int_{\Gamma_\chi^*} + \int_{-\infty+i\chi''_{s+}}^{-\infty} = 2\pi i \operatorname{Res}_{\chi=+\chi_0}. \quad (1.2.68)$$

При $x < 0$ аналогичный контур C_- будет включать контур, обратный к КНС, расположенный ниже вещественной оси. Соответственно, если выполнено неравенство $d_0 > \delta$, мы получаем

$$\oint_{C_-} = \int_{-\infty}^{+\infty} + \int_{+\infty}^{+\infty-i\chi''_{s+}} - \int_{\Gamma_\chi^*} + \int_{-\infty-i\chi''_{s+}}^{-\infty} = -2\pi i \operatorname{Res}_{\chi=-\chi_0}. \quad (1.2.69)$$

Поскольку в случае $d_0 < \delta$ захват полюсов $\pm\chi_0$ при преобразовании контура не происходит, в дальнейшем мы рассмотрим только случай $d_0 > \delta$.

Так как интегралы по удаленным на бесконечность вертикальным отрезкам равны нулю в силу экспоненциальной малости подынтегральных функций, то (1.2.52) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \Pi_x^{(r)} \\ \Pi_z^{(r)} \end{Bmatrix} &= a(\omega) \oint_{\Gamma_\chi^*} d\chi \begin{Bmatrix} R_x(\chi) \\ R_z(\chi) \end{Bmatrix} \exp[i\Phi(\chi)] \\ &\quad \pm 2\pi i a(\omega) \operatorname{Res}_{\chi=\pm\chi_0} \left(\begin{Bmatrix} R_x(\chi) \\ R_z(\chi) \end{Bmatrix} \exp[i\Phi(\chi)] \right), \end{aligned} \quad (1.2.70)$$

где знак “+” соответствует контуру C_+ (случай $x > 0$), а знак “-” - контуру C_- (случай $x < 0$). Функция $a(\omega)$ и фаза $\Phi(\chi)$ здесь определены равенствами

$$a(\omega) = \frac{iq\tilde{\kappa}}{ck_0} \exp\left(i\frac{k_0}{\beta}z\right), \quad \Phi(\chi) = \frac{k_0}{\beta} \sqrt{1-\beta^2} [x \operatorname{sh} \chi + i(y+b_0) \operatorname{ch} \chi]. \quad (1.2.71)$$

Поскольку вклад КНС экспоненциально мал, если выполнено неравенство

$$\frac{k_0}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{x^2 + (y + b_0)^2} \gg 1, \quad (1.2.72)$$

то наибольший интерес для нас имеют вклады полюсов, которые, при условии вещественности $\pm\chi_0$, представляют собой поверхностные волны. Поэтому выражение (1.2.70) определяется в основном вторым слагаемым

$$\begin{pmatrix} \Pi_{x\omega}^{(r)} \\ \Pi_{z\omega}^{(r)} \end{pmatrix} \cong \pm 2\pi i a(\omega) \operatorname{Res}_{\chi=\pm\chi_0} \left(\begin{pmatrix} R_x(\chi) \\ R_z(\chi) \end{pmatrix} \exp[i\Phi(\chi)] \right). \quad (1.2.73)$$

Сначала рассмотрим z -компоненту вектора Герца “свободного” поля $\Pi_z^{(r)}$. Коэффициент $R_z(\chi)$ представим в виде дроби

$$R_z(\chi) = \frac{\psi_z(\chi)}{(\chi - \chi_0)(\chi + \chi_0)}, \quad (1.2.74)$$

где $\pm\chi_0$ - полюсы, изображенные на рис.1.4. Вычисляя вычеты, получаем

$$\begin{aligned} \Pi_z^{(r)} &= a(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} d\chi \frac{\psi_z(\chi)}{(\chi - \chi_0)(\chi + \chi_0)} \exp[i\alpha x \operatorname{sh} \chi - \alpha(y + b_0) \operatorname{ch} \chi] \\ &\cong \pi i a(\omega) \frac{\psi_z(\pm\chi_0)}{\chi_0} \exp[i\alpha|x| \operatorname{sh} \chi_0 - \alpha(y + b_0) \operatorname{ch} \chi_0], \end{aligned} \quad (1.2.75)$$

где $\alpha = k_0\beta^{-1}\sqrt{1 - \beta^2}$. Согласно формуле (1.2.51), замена k_x на $-k_x$ эквивалентна замене χ на $-\chi$, а из выражения (1.2.35) видно, что $R_z(k_x) = R_z(-k_x)$. Следовательно, при замене (1.2.51) четность функции R_z сохраняется. Учитывая данное обстоятельство, можно сделать вывод, что функция $\psi_z(\chi)$, стоящая в числителе выражения (1.2.74), также является четной. Поэтому интеграл (1.2.75) можно записать в виде

$$\Pi_z^{(r)} \cong \pi i a(\omega) \frac{\psi_z(\chi_0)}{\chi_0} \exp[i\alpha|x| \operatorname{sh} \chi_0 - \alpha(y + b_0) \operatorname{ch} \chi_0]. \quad (1.2.76)$$

Теперь проведем аналогичные рассуждения для x -компоненты вектора Герца “свободного” поля $\Pi_x^{(r)}$. Коэффициент $R_x(\chi)$ тогда примет вид

$$R_x(\chi) = \frac{\psi_x(\chi)}{(\chi - \chi_0)(\chi + \chi_0)}. \quad (1.2.77)$$

Необходимо отметить, что в этом случае функция $R_x(k_x)$, заданная выражением (1.2.34), является нечетной. Отсюда следует, что $R_x(-\chi) = -R_x(\chi)$ и, согласно формуле (1.2.77), $\psi_x(-\chi) = -\psi_x(\chi)$. Учитывая данный факт при вычислении интеграла (1.2.70), получим

$$\Pi_x^{(r)} \cong \pm \pi i a(\omega) \frac{\psi_x(\chi_0)}{\chi_0} \exp[i\alpha|x| \operatorname{sh} \chi_0 - \alpha(y + b_0) \operatorname{ch} \chi_0], \quad (1.2.78)$$

где знак “+” соответствует положительным значениям x , а знак “-” - отрицательным.

Мы показали, что величина Фурье-образа вектора Герца по частоте на плоскости χ определяется в основном вкладами полюсов $\pm\chi_0$. Соответствующие вычеты могут быть вычислены также и на плоскости k_x . Тогда те же выражения (1.2.73) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \Pi_x^{(r)} \\ \Pi_z^{(r)} \end{Bmatrix} &= -\frac{q\tilde{\kappa}}{ck_0} \exp\left(i\frac{k_0}{\beta}z\right) \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \begin{Bmatrix} R_x \\ R_z \end{Bmatrix} \frac{\exp[i\Phi(k_x)]}{k_{y0}} \\ &\cong \mp \frac{q\tilde{\kappa}}{ck_0} \exp\left(i\frac{k_0}{\beta}z\right) 2\pi i \operatorname{Res}_{k_x=\pm k_{x0}} \left(\begin{Bmatrix} R_x \\ R_z \end{Bmatrix} \frac{\exp[i\Phi(k_x)]}{k_{y0}} \right), \end{aligned} \quad (1.2.79)$$

где верхний знак относится к области $x > 0$, а нижний - к области $x < 0$. Фаза $\Phi(k_x)$ здесь определена соотношением

$$\Phi(k_x) = k_x x + k_{y0}(y + b_0). \quad (1.2.80)$$

Напомним, что величина k_{x0} в общем случае находится из уравнения (1.2.43), а в частном случае ультрарелятивистского движения заряда она определяется по формуле (1.2.48).

Согласно выражению (1.2.50), если β существенно отлично от 1, то полюсы подынтегральной функции в (1.2.36) являются чисто мнимыми, то есть вдоль гофрированной структуры поверхностная волна распространяться не будет. Поэтому остановимся на наиболее интересном ультрарелятивистском режиме движения заряда, когда $\beta \rightarrow 1$. Как нам известно, в этой ситуации полюсы $\pm k_{x0}$ являются чисто вещественными и приближенно определяются соотношениями (1.2.48). В силу условия $d_0 > \delta$, в выражениях для полюсов $\pm k_{x0}$ модуль будем опускать. Также для простоты рассмотрим только положительные частоты $\omega > 0$.

Получим выражения для компонент электромагнитного поля в случае, когда $\beta \rightarrow 1$. Коэффициенты R_x и R_z с учетом формул (1.2.37) и (1.2.39) примут вид

$$R_x = -\frac{2k_0 k_x [(k_0^2 - k_x^2) d_0 - k_0^2 \delta]}{(k_0^2 - k_x^2) (|k_x| - k_0^2 (d_0 - \delta))}, \quad R_z = -\frac{|k_x| + (1 + |k_x| \delta) [(k_0^2 - k_x^2) d_0 - k_0^2 \delta]}{|k_x| - k_0^2 (d_0 - \delta)}. \quad (1.2.81)$$

Сосчитаем вычеты в выражении (1.2.79) и, пренебрегая слагаемыми выше второго порядка малости по $k_0 d$, для компонент вектора Герца найдем

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \Pi_x^{(r)} \\ \Pi_z^{(r)} \end{Bmatrix} &\cong \frac{4\pi q\tilde{\kappa}}{ck_0} \begin{Bmatrix} \operatorname{sgn}(x) k_0 (d_0 - \delta) \\ 1 \end{Bmatrix} \\ &\times \exp[ik_0^2 (d_0 - \delta) |x| + ik_0 z - k_0^2 (d_0 - \delta) (y + b_0)], \end{aligned} \quad (1.2.82)$$

где $\operatorname{sgn}(x)$ - функция знака переменной x . Используя связь вектора Герца с электрическим и магнитным полями (1.2.18), получим конечные формулы для компонент поля поверхностной

волны (с индексом “s”)

$$E_{x\omega}^{(s)} = \frac{q\tilde{\kappa}k_0}{c} O(k_0^3 (d_0 - \delta)^3) = 0, \quad (1.2.83)$$

$$E_{y\omega}^{(s)} = -4\pi i \frac{q\tilde{\kappa}k_0}{c} k_0 (d_0 - \delta) \exp [ik_0^2 (d_0 - \delta) |x| + ik_0 z - k_0^2 (d_0 - \delta) (y + b_0)], \quad (1.2.84)$$

$$E_{z\omega}^{(s)} = -4\pi \frac{q\tilde{\kappa}k_0}{c} k_0^2 (d_0 - \delta)^2 \exp [ik_0^2 (d_0 - \delta) |x| + ik_0 z - k_0^2 (d_0 - \delta) (y + b_0)], \quad (1.2.85)$$

$$H_{x\omega}^{(s)} = 4\pi i \frac{q\tilde{\kappa}k_0}{c} k_0 (d_0 - \delta) \exp [ik_0^2 (d_0 - \delta) |x| + ik_0 z - k_0^2 (d_0 - \delta) (y + b_0)], \quad (1.2.86)$$

$$H_{y\omega}^{(s)} = \frac{q\tilde{\kappa}k_0}{c} O(k_0^3 (d_0 - \delta)^3) = 0, \quad (1.2.87)$$

$$H_{z\omega}^{(s)} = -4\pi i \operatorname{sgn}(x) \frac{q\tilde{\kappa}k_0}{c} k_0^2 (d_0 - \delta)^2 \exp [ik_0^2 (d_0 - \delta) |x| + ik_0 z - k_0^2 (d_0 - \delta) (y + b_0)]. \quad (1.2.88)$$

Данные результаты относятся к случаю $d_0 > \delta$ (в противном случае поверхностная волна не возбуждается). Отметим, что соответствующие выражения для отрицательных частот $\omega < 0$ могут быть получены из формул (1.2.83)-(1.2.88) по правилу $F_{-\omega} = F_{\omega}^*$, вытекающему из вещественности исходных компонент поля. Нетрудно убедиться, что с помощью данного правила можно свести интегралы Фурье по частоте к виду

$$E_{x,y,z}^{(s)}(\vec{r}, t) = 2c \int_0^{+\infty} dk_0 \operatorname{Re} [E_{x,y,z\omega}^{(s)} \exp(-ik_0 ct)], \quad (1.2.89)$$

$$H_{x,y,z}^{(s)}(\vec{r}, t) = 2c \int_0^{+\infty} dk_0 \operatorname{Re} [H_{x,y,z\omega}^{(s)} \exp(-ik_0 ct)], \quad (1.2.90)$$

где $E_{x,y,z\omega}^{(s)}$ и $H_{x,y,z\omega}^{(s)}$ заданы соотношениями (1.2.83)-(1.2.88).

Ниже представлены результаты численного расчета интегралов (1.2.89) в случае гауссова пучка (рис.1.5). Напомним, что распределение заряда вдоль оси движения (профиль пучка) определяется функцией $\kappa(\zeta)$, а ее Фурье-образ $\tilde{\kappa}$ можно найти по формуле (1.2.11). Тогда для гауссова пучка величина $\kappa_{gaus}(\zeta)$ и ее Фурье-образ $\tilde{\kappa}_{gaus}$ примут вид

$$\kappa_{gaus}(\zeta) = \frac{\exp(-\zeta^2/2\sigma^2)}{\sqrt{2\pi}\sigma}, \quad \tilde{\kappa}_{gaus} = \frac{\exp(-k_0^2\sigma^2/2\beta^2)}{2\pi}, \quad (1.2.91)$$

где σ - половина длины пучка.

Из рис.1.5 следует, что поверхностная волна представляет собой локализованный импульс. Поле поверхностной волны быстро убывает с увеличением длины пучка. При этом амплитуда компоненты $E_z^{(s)}$ (снизу) много меньше, чем амплитуда $E_y^{(s)}$ (сверху). Следует отметить, что по расстоянию между максимумами можно судить о размере заряда. Для компоненты $E_y^{(s)}$ расстояние между двумя основными максимумами соответствует половине длины пучка σ . Что касается компоненты $E_z^{(s)}$, величине σ соответствует расстояние между

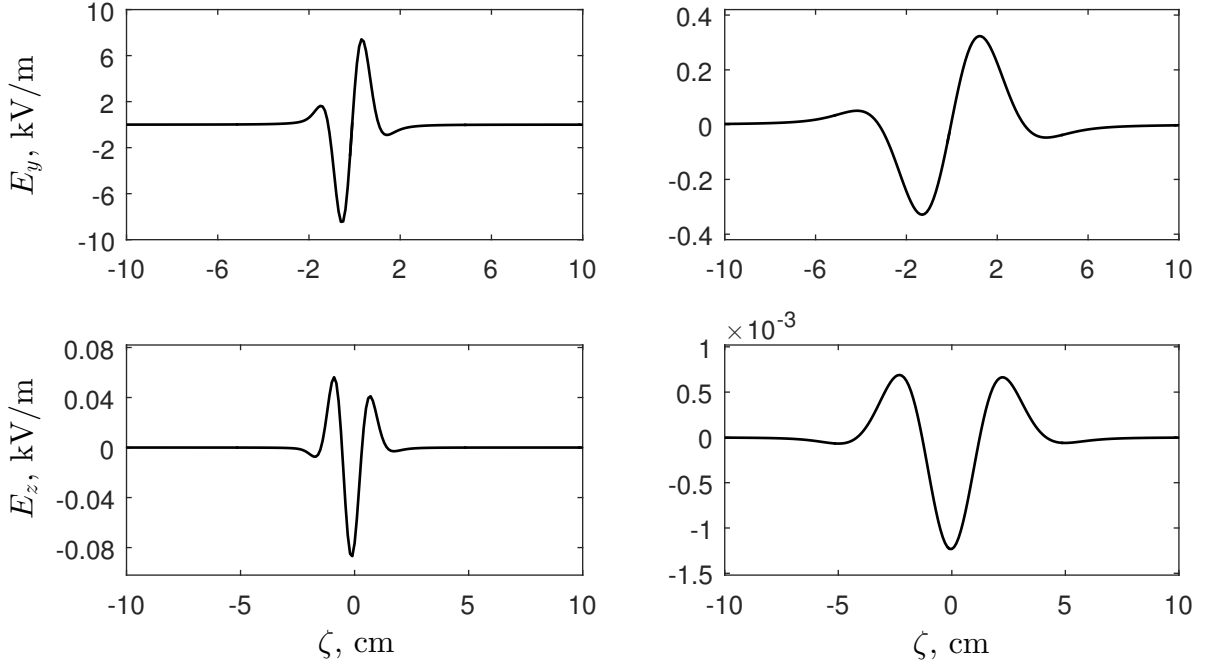


Рис.1.5. Зависимость компоненты поля поверхностной волны $E_y^{(s)}$ (верхний ряд) и $E_z^{(s)}$ (нижний ряд) от координаты $\zeta = z - ct$ для гауссова пучка. Параметры пучка: заряд $q = 1$ нКл; скорость $\beta \rightarrow 1$; длина $2\sigma = 1$ см (левый столбец) и $2\sigma = 3$ см (правый столбец). Параметры структуры: период гофрирования $d = 0.05$ см, глубина $d_3 = 0.01$ см, ширина канавок $d_2 \rightarrow d$ ($d_1 \rightarrow 0$, система диафрагм). Значения координат: $x = 10$ см, $y = 0$ см. Расстояние между траекторией пучка и плоскостью структуры $b_0 = 3$ см. Величины $E_y^{(s)}$ и $E_z^{(s)}$ приведены в системе СИ (кВ/м).

первым и вторым основными максимумами, а расстояние между первым и третьим - полной длине пучка 2σ .

Рассмотрим полную энергию движущегося заряда, излучаемую в единицу времени в положительном направлении x :

$$\frac{dW^{(s)}}{dt} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{+\infty} dy S_x \Big|_{x=x_0>0}, \quad (1.2.92)$$

где

$$S_x = \frac{c}{4\pi} (E_y^{(s)} H_z^{(s)} - E_z^{(s)} H_y^{(s)}) \quad (1.2.93)$$

представляет собой x -компоненту вектора Умова-Пойнтинга. Множитель "2" в (1.2.92) объясняется тем, что поверхностные волны излучаются как в положительном, так и в отрицательном направлении x . Подставим (1.2.93) в (1.2.92) и запишем компоненты электромагнитного

поля через интегралы Фурье вида $F(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega F_\omega \exp(-i\omega t)$. Получаем

$$\begin{aligned} \frac{dW^{(s)}}{dt} = & \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{+\infty} dy \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{E}_{y\omega}^{(s)} \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{z}{c\beta}\right)\right] \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \tilde{H}_{z\omega'}^{(s)} \exp\left[-i\omega'\left(t - \frac{z}{c\beta}\right)\right] \right. \\ & \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{E}_{z\omega}^{(s)} \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{z}{c\beta}\right)\right] \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \tilde{H}_{y\omega'}^{(s)} \exp\left[-i\omega'\left(t - \frac{z}{c\beta}\right)\right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.2.94)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{cases} \tilde{E}_{y\omega}^{(s)} \\ \tilde{E}_{z\omega}^{(s)} \end{cases} = \begin{cases} E_{y\omega}^{(s)} \\ E_{z\omega}^{(s)} \end{cases} \exp\left(-i\frac{\omega}{c\beta}z\right), \quad \begin{cases} \tilde{H}_{y\omega}^{(s)} \\ \tilde{H}_{z\omega}^{(s)} \end{cases} = \begin{cases} H_{y\omega}^{(s)} \\ H_{z\omega}^{(s)} \end{cases} \exp\left(-i\frac{\omega}{c\beta}z\right). \quad (1.2.95)$$

Под величинами $E_{y\omega}^{(s)}$, $E_{z\omega}^{(s)}$, $H_{y\omega}^{(s)}$ и $H_{z\omega}^{(s)}$ здесь подразумеваются компоненты поверхностной волны, то есть вклады полюса k_{x0} , который при $\beta \rightarrow 1$ приближенно равен $k_{x0} \cong k_0^2 |d_0 - \delta|$. Формулы (1.2.84), (1.2.85), (1.2.87) и (1.2.88) в этом случае примут вид (для $x > 0$)

$$E_{y\omega}^{(s)} = -4\pi i \frac{q\tilde{\kappa}k_0}{c} k_0 (d_0 - \delta) \exp\left[ik_0^2 (d_0 - \delta) |x| - k_0^2 (d_0 - \delta) (y + b_0)\right], \quad (1.2.96)$$

$$E_{z\omega}^{(s)} = -4\pi \frac{q\tilde{\kappa}k_0}{c} k_0^2 (d_0 - \delta)^2 \exp\left[ik_0^2 (d_0 - \delta) |x| - k_0^2 (d_0 - \delta) (y + b_0)\right], \quad (1.2.97)$$

$$H_{y\omega}^{(s)} = \frac{q\tilde{\kappa}k_0}{c} O(k_0^3 (d_0 - \delta)^3) = 0, \quad (1.2.98)$$

$$H_{z\omega}^{(s)} = -4\pi i \operatorname{sgn}(x) \frac{q\tilde{\kappa}k_0}{c} k_0^2 (d_0 - \delta)^2 \exp\left[ik_0^2 (d_0 - \delta) |x| - k_0^2 (d_0 - \delta) (y + b_0)\right]. \quad (1.2.99)$$

Отметим, что выражения (1.2.96)-(1.2.99) не зависят от z , поэтому интеграл по z в формуле (1.2.94) сводится к δ -функции:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{z}{c\beta}\right)\right] \exp\left[-i\omega'\left(t - \frac{z}{c\beta}\right)\right] \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \exp\left[i\frac{\zeta}{c\beta}(\omega + \omega')\right] = 2\pi c\beta\delta(\omega + \omega'), \end{aligned} \quad (1.2.100)$$

где $\zeta = z - c\beta t$. После интегрирования по ω' соотношение (1.2.94) принимает следующий вид:

$$\frac{dW^{(s)}}{dt} = c^2\beta \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left(\tilde{E}_{y\omega}^{(s)} \tilde{H}_{z-\omega}^{(s)} - \tilde{E}_{z\omega}^{(s)} \tilde{H}_{y-\omega}^{(s)} \right). \quad (1.2.101)$$

Перейдем к интегралу по положительным частотам:

$$\begin{aligned} \frac{dW^{(s)}}{dt} = & c^2\beta \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left(\tilde{E}_{y\omega}^{(s)} \tilde{H}_{z-\omega}^{(s)} - \tilde{E}_{z\omega}^{(s)} \tilde{H}_{y-\omega}^{(s)} \right) \\ = & c^2\beta \int_0^{+\infty} dy \left\{ \int_0^{+\infty} d\omega \left(\tilde{E}_{y\omega}^{(s)} \tilde{H}_{z-\omega}^{(s)} - \tilde{E}_{z\omega}^{(s)} \tilde{H}_{y-\omega}^{(s)} \right) + \int_{-\infty}^0 d\omega \left(\tilde{E}_{y\omega}^{(s)} \tilde{H}_{z-\omega}^{(s)} - \tilde{E}_{z\omega}^{(s)} \tilde{H}_{y-\omega}^{(s)} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= c^2 \beta \int_0^{+\infty} dy \left\{ \int_0^{+\infty} d\omega \left(\tilde{E}_{y\omega}^{(s)} \tilde{H}_{z-\omega}^{(s)} - \tilde{E}_{z\omega}^{(s)} \tilde{H}_{y-\omega}^{(s)} \right) + \int_0^{+\infty} d\omega \left(\tilde{E}_{y-\omega}^{(s)} \tilde{H}_{z\omega}^{(s)} - \tilde{E}_{z-\omega}^{(s)} \tilde{H}_{y\omega}^{(s)} \right) \right\}. \quad (1.2.102)$$

Далее воспользуемся тождествами типа $\tilde{E}_{y-\omega} = \tilde{E}_{y\omega}^*$ (звездочка здесь обозначает комплексное сопряжение), вытекающими из вещественности исходных компонент поля, то есть E_y и всех остальных (аналогично для $\tilde{E}_{z\omega}$, $\tilde{H}_{y\omega}$ и $\tilde{H}_{z\omega}$). Для выражения (1.2.102) получаем

$$\begin{aligned} \frac{dW^{(s)}}{dt} &= c^2 \beta \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} d\omega \left(\tilde{E}_{y\omega}^{(s)} \tilde{H}_{z\omega}^{(s)*} - \tilde{E}_{z\omega}^{(s)} \tilde{H}_{y\omega}^{(s)*} + \tilde{E}_{y\omega}^{(s)*} \tilde{H}_{z\omega}^{(s)} - \tilde{E}_{z\omega}^{(s)*} \tilde{H}_{y\omega}^{(s)} \right) \\ &= 2c^2 \beta \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} d\omega \operatorname{Re} \left(\tilde{E}_{y\omega}^{(s)} \tilde{H}_{z\omega}^{(s)*} - \tilde{E}_{z\omega}^{(s)} \tilde{H}_{y\omega}^{(s)*} \right). \end{aligned} \quad (1.2.103)$$

В теории излучения заряженных частиц обычно рассматривают потери энергии заряда на единицу длины пути dW/dz_0 . Учитывая, что $dz_0 = V dt = c\beta t$, имеем

$$\frac{dW^{(s)}}{dz_0} = \frac{1}{c\beta} \frac{dW^{(s)}}{dt} = 2c \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} d\omega \operatorname{Re} \left(\tilde{E}_{y\omega}^{(s)} \tilde{H}_{z\omega}^{(s)*} - \tilde{E}_{z\omega}^{(s)} \tilde{H}_{y\omega}^{(s)*} \right). \quad (1.2.104)$$

Введем спектральную плотность потерь энергии заряда на излучение поверхностной волны $d^2W^{(s)}/d\omega dz_0$

$$\frac{dW^{(s)}}{dz_0} = \int_0^{+\infty} \frac{d^2W^{(s)}}{d\omega dz_0} d\omega. \quad (1.2.105)$$

Учитывая соотношение (1.2.104) и формулы (1.2.95), запишем выражение для спектральной плотности в виде

$$\frac{d^2W^{(s)}}{d\omega dz_0} = 2c \int_0^{+\infty} dy \operatorname{Re} \left(E_{y\omega}^{(s)} H_{z\omega}^{(s)*} - E_{z\omega}^{(s)} H_{y\omega}^{(s)*} \right). \quad (1.2.106)$$

Подставим сюда соотношения (1.2.96)-(1.2.99) для компонент поля и получим

$$\frac{d^2W^{(s)}}{d\omega dz_0} = 2c \int_0^{+\infty} dy \operatorname{Re} \left\{ \frac{16\pi^2 q^2 |\tilde{\kappa}|^2 k_0^2}{c^2} k_0^3 (d_0 - \delta)^3 \exp \left[-2k_0^2 (d_0 - \delta) (y + b_0) \right] \right\}. \quad (1.2.107)$$

Выражение в фигурных скобках вещественно. Следовательно, имеем

$$\frac{d^2W^{(s)}}{d\omega dz_0} = \frac{32\pi^2 q^2 |\tilde{\kappa}|^2 k_0^2}{c} k_0^3 (d_0 - \delta)^3 \exp \left[-2k_0^2 (d_0 - \delta) b_0 \right] \int_0^{+\infty} dy \exp \left[-2k_0^2 (d_0 - \delta) y \right]. \quad (1.2.108)$$

После взятия интеграла по y для спектральной плотности окончательно получаем

$$\frac{d^2W^{(s)}}{d\omega dz_0} = 16\pi^2 \frac{q^2 |\tilde{\kappa}|^2 k_0}{c} k_0^2 (d_0 - \delta)^2 \exp \left[-2k_0^2 (d_0 - \delta) b_0 \right]. \quad (1.2.109)$$

Для построения графических зависимостей удобно ввести безразмерную спектральную плотность энергии $d^2\tilde{W}^{(s)}/d\omega dz_0$

$$\frac{d^2W^{(s)}}{d\omega dz_0} = \frac{q^2|\tilde{\kappa}|^2k_0}{c} \frac{d^2\tilde{W}^{(s)}}{d\omega dz_0}, \quad \frac{d^2\tilde{W}^{(s)}}{d\omega dz_0} = 16\pi^2k_0^2(d_0 - \delta)^2 \exp[-2k_0^2(d_0 - \delta)b_0]. \quad (1.2.110)$$

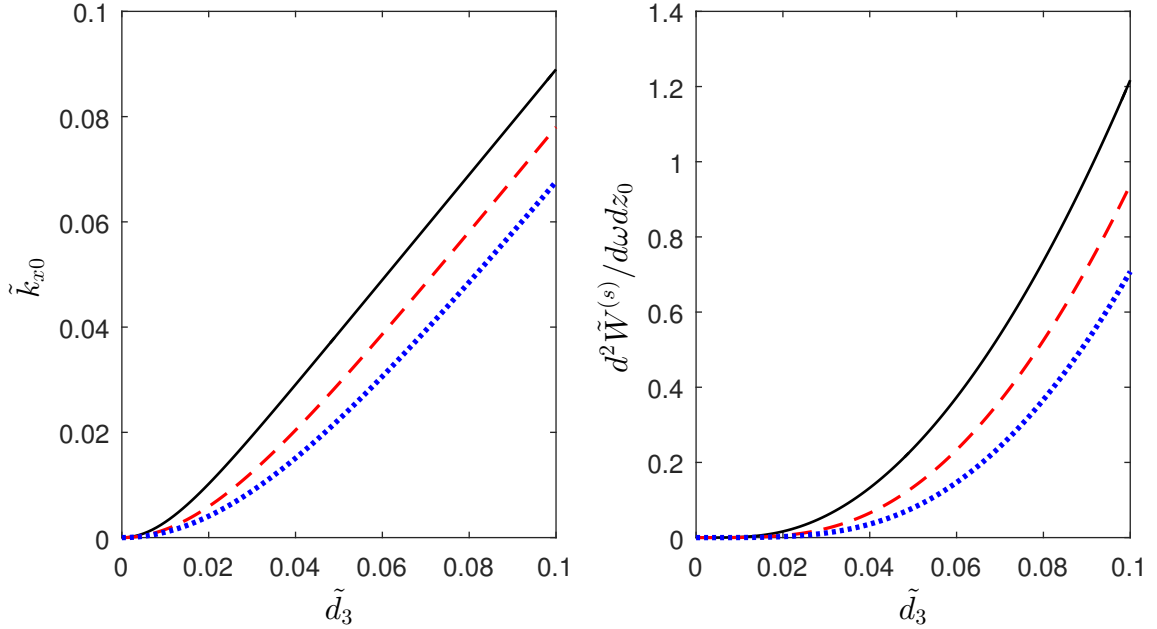


Рис.1.6. Безразмерная проекция волнового вектора \tilde{k}_{x0} (слева) и безразмерная спектральная плотность энергии излучения $d^2\tilde{W}^{(s)}/d\omega dz_0$ (справа) для ультррелятивистского заряда ($\beta \rightarrow 1$). Безразмерные параметры структуры: ширина канавок $\tilde{d}_2 \rightarrow \tilde{d}$ (система диафрагм); период гофрирования $\tilde{d} = 0.05k_0$ (черные сплошные линии), $\tilde{d} = 0.1k_0$ (красные штриховые линии) и $\tilde{d} = 0.15k_0$ (синие пунктирные линии). Безразмерное расстояние от траектории пучка до плоскости периодической структуры $\tilde{b}_0 = 0.15k_0$. На горизонтальной оси - безразмерная глубина структуры \tilde{d}_3 .

На рис.1.6 и рис.1.7 представлены зависимости спектральной плотности $d^2W^{(s)}/d\omega dz_0$ и компоненты волнового вектора k_{x0} от глубины гофрированной поверхности, то есть от параметра d_3 , при различных значениях остальных параметров структуры для ультррелятивистского режима движения заряда ($\beta \rightarrow 1$). Для удобства введены следующие безразмерные величины:

$$\frac{d^2\tilde{W}^{(s)}}{d\omega dz_0} = \frac{c}{q^2|\tilde{\kappa}|^2k_0} \frac{d^2W^{(s)}}{d\omega dz_0}, \quad \tilde{k}_{x0} = \frac{k_{x0}}{k_0} = k_0(d_0 - \delta), \quad \tilde{d}_3 = d_3k_0. \quad (1.2.111)$$

На рис.1.6 данные зависимости показаны для случая системы диафрагм ($d_1 \rightarrow 0, d_2 \rightarrow d$) при различных значениях периода структуры d . Видно, что с увеличением глубины гофры параллельная гофре компонента волнового вектора растет, причем в большей части графика

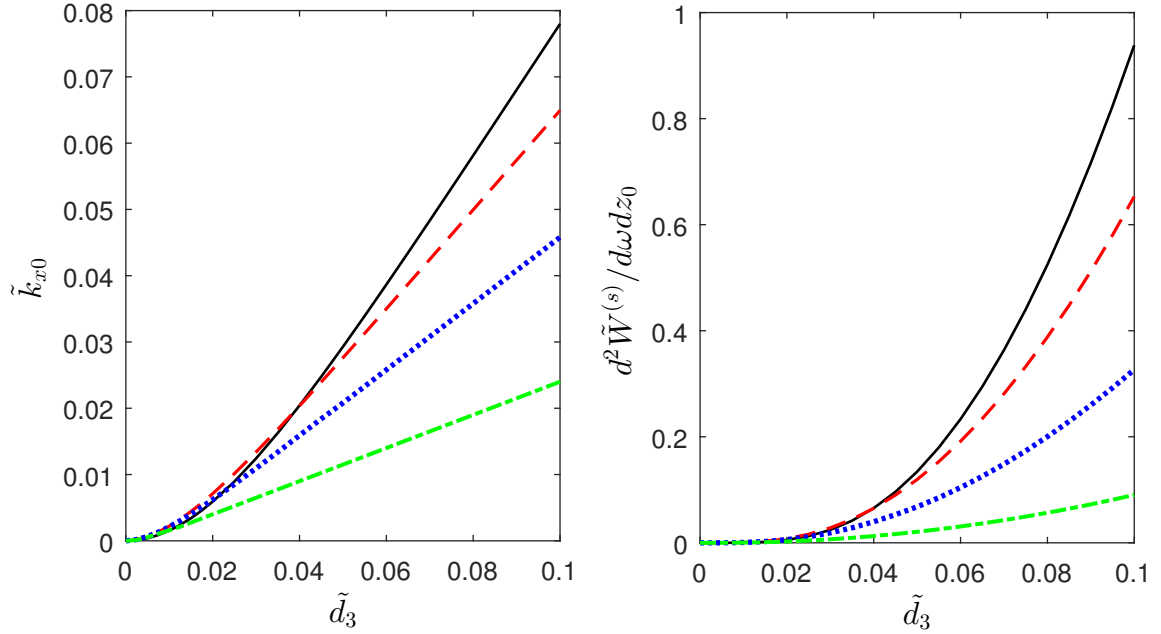


Рис.1.7. Безразмерная проекция волнового вектора \tilde{k}_{x0} (слева) и безразмерная спектральная плотность энергии излучения $d^2\tilde{W}^{(s)}/d\omega dz_0$ (справа) для ультрарелятивистского заряда ($\beta \rightarrow 1$). Безразмерные параметры структуры: период гофрирования $\tilde{d} = 0.1k_0$; ширина каналов $\tilde{d}_2 \rightarrow \tilde{d}$ (черные сплошные линии, система диафрагм), $\tilde{d}_2 = 0.075k_0$ (красные штриховые линии), $\tilde{d}_2 = 0.05k_0$ (синие пунктирные линии) и $\tilde{d}_2 = 0.025k_0$ (зеленые штрих-пунктирные линии). Безразмерное расстояние от траектории пучка до плоскости периодической структуры $\tilde{b}_0 = 0.15k_0$. На горизонтальной оси - безразмерная глубина структуры \tilde{d}_3 .

- почти линейно. Это объясняется тем, что δ слабо зависит от d_3 при не малых значениях d_3/d , что и приводит к линейной функции $k_{x0}(d_3)$, согласно (1.2.48). Естественно, с ростом k_{x0} растет и полный волновой вектор, так как $k_z = \omega/V \cong k_0 = \omega/c$, то есть длина поверхностной волны уменьшается. Потери энергии заряда на излучение поверхностной волны растут с увеличением глубины гофры, причем нелинейно (тем быстрее, чем больше d_3).

На рис.1.7 зависимости безразмерной спектральной плотности $d^2\tilde{W}^{(s)}/d\omega dz_0$ и безразмерной компоненты волнового вектора \tilde{k}_{x0} показаны для различных значений ширины “холмиков” гофрированной поверхности (параметр d_1) при постоянном значении периода структуры d . С ростом d_1 x -компонента волнового вектора и спектральная плотность потерь энергии заряда на излучение поверхностных волн уменьшаются.

Из рассмотренных зависимостей можно заключить, что гофрированная поверхность, состоящая из диафрагм ($d_1 \rightarrow 0$, $d_2 \rightarrow d$), является наиболее эффективной системой для генерации поверхностного излучения.

1.3. Излучение пучка заряженных частиц, пролетающего сквозь мелкогофрированную структуру

1.3.1. Общее решение

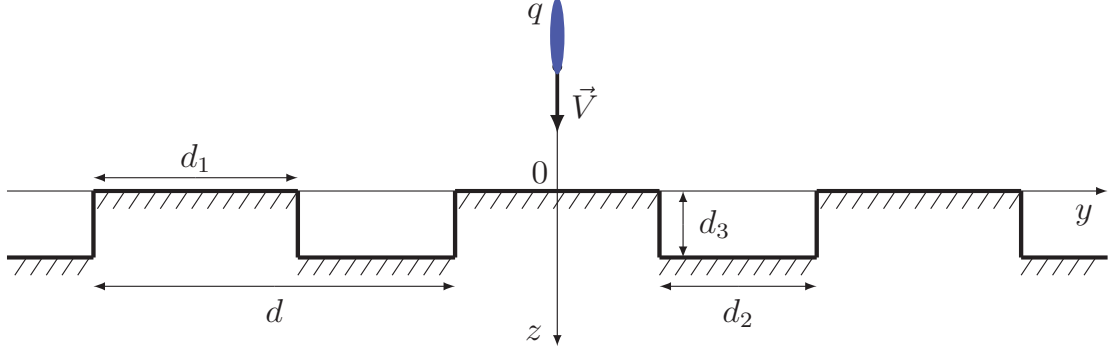


Рис.1.8. Движение заряда сквозь мелкогофрированную поверхность (ось x направлена вдоль канавок гофры, “от нас”).

Теперь рассмотрим излучение пучка заряженных частиц, пролетающего сквозь идеально проводящую мелкогофрированную поверхность (рис.1.8). Как и ранее, мы будем исследовать “длинноволновую” (или “низкочастотную”) часть спектра излучения, то есть будем считать выполненными условия

$$d \ll \lambda, \quad d_3 \ll \lambda,$$

где λ - длина волны рассматриваемого электромагнитного излучения, а d и d_3 - период и глубина гофры, соответственно. Как и ранее, будем пользоваться методом эквивалентных граничных условий.

Гофрированная поверхность, изображенная на рис.1.8, лежит в плоскости $z = 0$ и имеет свойства, описанные в параграфе 1.1. Эквивалентные граничные условия в данном случае имеют вид [15]

$$E_{y\omega}|_{z=0} = \eta^m H_{x\omega}|_{z=0}, \quad E_{x\omega}|_{z=0} = \eta^e H_{y\omega}|_{z=0}, \quad (1.3.1)$$

где импедансы η^m и η^e заданы выражениями [15]

$$\eta^m = \frac{ik_0}{k_0^2 - k_x^2} [d_0 (k_0^2 - k_x^2) - \delta k_y^2], \quad \eta^e = -i \frac{\delta}{k_0} (k_0^2 - k_x^2). \quad (1.3.2)$$

Напомним, что $d_0 = d_2 d_3 / d$, параметр гофры δ в общем случае определяется формулами (1.1.4) и (1.1.5), а в частном случае системы диафрагм ($d_1/d \rightarrow 0$) - формулой (1.1.6). Отметим также, что граничные условия (1.3.1) записаны для области $z < 0$ (для области

$z > 0$ необходимо изменить знак в правых частях (1.3.1)). Ниже мы получим общее решение задачи для области $z < 0$.

Мы предполагаем, что пучок заряженных частиц движется с постоянной скоростью $\vec{V} = V\vec{e}_z$, перпендикулярной к плоскости поверхности. Пучок имеет бесконечно малые поперечные размеры и произвольное распределение заряда вдоль оси движения (ось z). Объемные плотности заряда и тока можно записать в виде

$$\rho = q\delta(x)\delta(y)\kappa(z-Vt), \quad j_z \equiv j = Vq\delta(x)\delta(y)\kappa(z-Vt), \quad (1.3.3)$$

где $\kappa(z-Vt)$ - профиль пучка (рис.1.8; ось “ x ” направлена вдоль канавок гофры, то есть перпендикулярно плоскости рисунка, “от нас”).

Полное электромагнитное поле, как и в предыдущем параграфе, мы будем представлять в виде суммы

$$\vec{\Pi} = \vec{\Pi}^{(i)} + \vec{\Pi}^{(r)}, \quad (1.3.4)$$

где $\vec{\Pi}^{(i)}$ - вектор Герца собственного поля пучка (“вынужденное” поле), а $\vec{\Pi}^{(r)}$ - вектор Герца поля, возникающего за счет гофрированной поверхности (“свободное” поле).

“Вынужденное” поле описывается однокомпонентным вектором Герца $\vec{\Pi}^{(i)} = \Pi_z^{(i)}\vec{e}_z$ и является решением неоднородного уравнения (1.2.4) в безграничном пространстве, в котором плотность тока \vec{j} имеет единственную компоненту, заданную формулой (1.3.3). Вывод выражения для Фурье-образа вектора Герца “вынужденного” поля аналогичен выводу, данному в предыдущем параграфе, нужно только положить $b_0 = 0$, где b_0 - расстояние между траекторией пучка и осью z в декартовой системе координат. Это естественно, так как в обеих задачах “вынужденное” поле представляет собой квазикулоновское поле заряда, движущегося равномерно и прямолинейно в неограниченном вакууме.

Таким образом, формулу (1.2.14) можно переписать в виде

$$\Pi_z^{(i)} = \frac{iq\tilde{\kappa}}{\pi ck_0} \exp\left(i\frac{k_0}{\beta}z\right) \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \frac{\exp(ik_x x + ik_y y)}{k_x^2 + k_y^2 + k_0^2 \frac{1-\beta^2}{\beta^2}}. \quad (1.3.5)$$

Фурье-образ профиля пучка $\tilde{\kappa}$, как и ранее, задан выражением (1.2.11). Используя связь вектора Герца с электрическим и магнитным полями (1.2.18), получим Фурье-образы компонент “вынужденного” поля по частоте и двум касательным к границе компонентам волнового вектора

$$E_{x\omega, k_x, k_y}^{(i)} = -\frac{iq\tilde{\kappa}}{\pi c\beta} \frac{k_x}{k_x^2 + k_y^2 + k_0^2 \frac{1-\beta^2}{\beta^2}} \exp\left(i\frac{k_0}{\beta}z\right), \quad (1.3.6)$$

$$E_{y\omega, k_x, k_y}^{(i)} = -\frac{iq\tilde{\kappa}}{\pi c\beta} \frac{k_y}{k_x^2 + k_y^2 + k_0^2 \frac{1-\beta^2}{\beta^2}} \exp\left(i\frac{k_0}{\beta}z\right), \quad (1.3.7)$$

$$E_z^{(i)}{}_{\omega, k_x, k_y} = -\frac{iq\tilde{\kappa}}{\pi c\beta} \frac{1-\beta^2}{\beta} \frac{k_0}{k_x^2 + k_y^2 + k_0^2 \frac{1-\beta^2}{\beta^2}} \exp\left(i\frac{k_0}{\beta}z\right), \quad (1.3.8)$$

$$H_x^{(i)}{}_{\omega, k_x, k_y} = \frac{iq\tilde{\kappa}}{\pi c} \frac{k_y}{k_x^2 + k_y^2 + k_0^2 \frac{1-\beta^2}{\beta^2}} \exp\left(i\frac{k_0}{\beta}z\right), \quad (1.3.9)$$

$$H_y^{(i)}{}_{\omega, k_x, k_y} = -\frac{iq\tilde{\kappa}}{\pi c} \frac{k_x}{k_x^2 + k_y^2 + k_0^2 \frac{1-\beta^2}{\beta^2}} \exp\left(i\frac{k_0}{\beta}z\right), \quad (1.3.10)$$

$$H_z^{(i)}{}_{\omega, k_x, k_y} = 0. \quad (1.3.11)$$

“Свободное” поле можно описать двухкомпонентным вектором Герца

$$\vec{\Pi}^{(r)} = \Pi_x^{(r)} \vec{e}_x + \Pi_z^{(r)} \vec{e}_z. \quad (1.3.12)$$

Как и в параграфе 1.2, введем произвольные коэффициенты R_x и R_z и запишем Фурье-образы компонент вектора Герца в виде

$$\begin{cases} \Pi_x^{(r)} \\ \Pi_z^{(r)} \end{cases} = \frac{iq\tilde{\kappa}}{\pi c k_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \begin{cases} R_x \\ R_z \end{cases} \frac{\exp(ik_x x + ik_y y + ik_{z0}|z|)}{k_{z0}}, \quad (1.3.13)$$

где $k_{z0}^2 = k_0^2 - k_x^2 - k_y^2$. Величину k_{z0} нужно определить так, чтобы при введении малого поглощения в среду волна становилась затухающей. Это означает, что при замене $k_0^2 = \omega^2/c^2$ на $k_0^2 [1+i\sigma \operatorname{sgn}(\omega)]$, где $0 < \sigma \ll 1$, должно выполняться требование $\operatorname{Im} k_{z0} > 0$. Отсюда вытекает, что при $\sigma \rightarrow +0$ $k_{z0} = \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}$, если $k_0^2 > k_x^2 + k_y^2$. Для “местных” волн, то есть при $k_x^2 + k_y^2 > k_0^2$, имеем $k_{z0} = i\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k_0^2}$.

С учетом выражений (1.3.13) компоненты электромагнитного поля, “наведенного” гофрированной поверхностью, примут вид

$$E_x^{(r)}{}_{\omega, k_x, k_y} = \frac{iq\tilde{\kappa}}{\pi c k_0^2 k_{z0}} [(k_0^2 - k_x^2) R_x + k_x k_{z0} R_z] \exp(ik_{z0}|z|), \quad (1.3.14)$$

$$E_y^{(r)}{}_{\omega, k_x, k_y} = -\frac{iq\tilde{\kappa}}{\pi c k_0^2 k_{z0}} k_y [k_x R_x - k_{z0} R_z] \exp(ik_{z0}|z|), \quad (1.3.15)$$

$$E_z^{(r)}{}_{\omega, k_x, k_y} = \frac{iq\tilde{\kappa}}{\pi c k_0^2 k_{z0}} [k_x k_{z0} R_x + (k_x^2 + k_y^2) R_z] \exp(ik_{z0}|z|), \quad (1.3.16)$$

$$H_x^{(r)}{}_{\omega, k_x, k_y} = \frac{iq\tilde{\kappa}}{\pi c k_0 k_{z0}} k_y R_z \exp(ik_{z0}|z|), \quad (1.3.17)$$

$$H_y^{(r)}{}_{\omega, k_x, k_y} = -\frac{iq\tilde{\kappa}}{\pi c k_0 k_{z0}} (k_{z0} R_x + k_x R_z) \exp(ik_{z0}|z|), \quad (1.3.18)$$

$$H_z^{(r)}{}_{\omega, k_x, k_y} = -\frac{iq\tilde{\kappa}}{\pi c k_0 k_{z0}} k_y R_x \exp(ik_{z0}|z|). \quad (1.3.19)$$

Неизвестные коэффициенты R_x и R_z найдем, решив систему, вытекающую из граничных условий (1.3.1):

$$\begin{cases} E_y^{(i)}{}_{\omega, k_x, k_y} + E_y^{(r)}{}_{\omega, k_x, k_y} = \eta^m (H_x^{(i)}{}_{\omega, k_x, k_y} + H_x^{(r)}{}_{\omega, k_x, k_y}) \\ E_x^{(i)}{}_{\omega, k_x, k_y} + E_x^{(r)}{}_{\omega, k_x, k_y} = \eta^e (H_y^{(i)}{}_{\omega, k_x, k_y} + H_y^{(r)}{}_{\omega, k_x, k_y}). \end{cases} \quad (1.3.20)$$

В итоге получим

$$R_x = -\frac{\beta k_0 k_x k_{z0} (\beta k_{z0} + k_0) (\eta^m + \eta^e)}{(k_0^2 - \beta^2 k_{z0}^2) [k_0 k_{z0} + (k_x^2 + k_{z0}^2) \eta^e - (k_0^2 - k_x^2) \eta^m - k_0 k_{z0} \eta^e \eta^m]}, \quad (1.3.21)$$

$$R_z = \frac{\beta k_0 k_{z0} [k_0^2 - (\beta k_x^2 - k_0 k_{z0}) \eta^e + \beta (k_0^2 - k_x^2) \eta^m + \beta k_0 k_{z0} \eta^e \eta^m]}{(k_0^2 - \beta^2 k_{z0}^2) [k_0 k_{z0} + (k_x^2 + k_{z0}^2) \eta^e - (k_0^2 - k_x^2) \eta^m - k_0 k_{z0} \eta^e \eta^m]}, \quad (1.3.22)$$

где импедансы η^m и η^e определены соотношениями (1.3.2).

1.3.2. Исследование поля, возникающего за счет гофрированной поверхности

Мы выяснили, что “свободное” поле описывается двухкомпонентным вектором Герца (1.3.12), Фурье-образы компонент которого задаются выражениями (1.3.13). Теперь приступим к исследованию полученного решения. Рассмотрим отдельно интегралы по k_x в (1.3.13)

$$\begin{pmatrix} I_x \\ I_z \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \begin{pmatrix} R_x \\ R_z \end{pmatrix} \frac{\exp(ik_x x + ik_{z0}|z|)}{k_{z0}}, \quad (1.3.23)$$

где коэффициенты R_x и R_z определены формулами (1.3.21) и (1.3.22), соответственно. В подынтегральном выражении имеется функция k_{z0} , обладающая двумя точками ветвления

$$k_x = \pm k_{xb} = \pm \sqrt{k_0^2 - k_y^2}. \quad (1.3.24)$$

Напомним, что на вещественной оси функция k_{z0} определена правилом $\text{Im } k_{z0} > 0$. Целесообразно распространить это правило на весь “верхний” лист римановой поверхности, как это было сделано в предыдущем параграфе для функции k_{y0} . При введении малого затухания в среду точки $\pm k_{xb}$ смещаются с осей в соответствующие квадранты комплексной плоскости k_x . Разрезы в этом случае являются частями гипербол и, в пределе исчезающе малого затухания, практически параллельны осям, как это показано на рис.1.9.

Другими особенностями подынтегральных функций в (1.3.23) являются особенности коэффициентов R_x и R_z . Прежде чем приступить к их поиску, напомним, что мы рассматриваем “длинноволновое” приближение, которое подразумевает малость периода d и глубины гофры d_3 по сравнению с длиной волны электромагнитного излучения λ . В данном приближении, для случая мелкой гофрировки, импедансы η^m и η^e являются малыми параметрами задачи (см. формулу (1.2.40) предыдущего параграфа и текст перед ней). Таким образом, согласно (1.3.21) и (1.3.22), выражения для коэффициентов R_x и R_z содержат слагаемые нулевого, первого и второго порядка малости относительно малого параметра задачи $k_0 d$. В дальнейшем мы ограничимся линейным приближением, то есть будем пренебрегать слагаемыми выше первого порядка малости. Учитывая явный вид импедансов (1.3.2), для коэффициентов

R_x и R_z в линейном приближении получим

$$R_x = \frac{i\beta k_0 k_x k_{z_0} (\beta k_{z_0} + k_0) \left[\delta \left(k_0^2 k_y^2 + (k_0^2 - k_x^2)^2 \right) - d_0 k_0^2 (k_0^2 - k_x^2) \right]}{(k_0^2 - k_x^2) (k_0^2 - \beta^2 k_{z_0}^2) \left[k_0^2 k_{z_0} - i d_0 k_0^2 (k_0^2 - k_x^2) + i \delta \left(k_0^2 k_y^2 - (k_0^2 - k_x^2) (k_x^2 + k_{z_0}^2) \right) \right]}, \quad (1.3.25)$$

$$R_z = \frac{\beta k_0 k_{z_0} \left[k_0^3 + i d_0 \beta k_0^2 (k_0^2 - k_x^2) + i \delta \left((k_0^2 - k_x^2) (\beta k_x^2 - k_0 k_{z_0}) - \beta k_0^2 k_y^2 \right) \right]}{(k_0^2 - \beta^2 k_{z_0}^2) \left[k_0^2 k_{z_0} - i d_0 k_0^2 (k_0^2 - k_x^2) + i \delta \left(k_0^2 k_y^2 - (k_0^2 - k_x^2) (k_x^2 + k_{z_0}^2) \right) \right]}. \quad (1.3.26)$$

Рассмотрим отдельно знаменатель в выражении для коэффициента R_x . Приравняв его к нулю, получим

$$(k_0^2 - k_x^2) (k_0^2 - \beta^2 k_{z_0}^2) \left[k_0^2 k_{z_0} - i d_0 k_0^2 (k_0^2 - k_x^2) + i \delta \left(k_0^2 k_y^2 - (k_0^2 - k_x^2) (k_x^2 + k_{z_0}^2) \right) \right] = 0. \quad (1.3.27)$$

Дисперсионное уравнение (1.3.27) имеет несколько решений относительно неизвестной k_x . Поскольку левая часть в данном уравнении представляет собой произведение трех выражений, стоящих в скобках, то исходное уравнение (1.3.27) разбивается на три независимых уравнения. Первое из них

$$k_0^2 - k_x^2 = 0 \quad (1.3.28)$$

даст два чисто вещественных решения

$$k_x = \pm k_{x0} = \pm k_0. \quad (1.3.29)$$

Второе уравнение с учетом явного вида функции k_{z_0} примет вид

$$k_0^2 - \beta^2 k_{z_0}^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_0^2 \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} = 0, \quad (1.3.30)$$

откуда следуют два чисто мнимых решения

$$k_x = \pm k_{x1} = \pm i \sqrt{k_y^2 + k_0^2 \frac{1 - \beta^2}{\beta^2}}. \quad (1.3.31)$$

Теперь запишем третье уравнение, вытекающее из равенства нулю суммы, стоящей в квадратных скобках в (1.3.27)

$$k_0^2 \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2} - i d_0 k_0^2 (k_0^2 - k_x^2) + i \delta \left(k_0^2 k_y^2 - (k_0^2 - k_x^2) (k_0^2 - k_y^2) \right) = 0. \quad (1.3.32)$$

Будем решать уравнение (1.3.32) методом последовательных приближений. Для этого запишем его в виде

$$k_x^2 = k_0^2 - k_y^2 + k_0^{-2} \left[d_0 k_0 (k_0^2 - k_x^2) - \delta k_0^{-1} \left(k_0^2 k_y^2 - (k_0^2 - k_x^2) (k_0^2 - k_y^2) \right) \right]^2. \quad (1.3.33)$$

В нулевом приближении ($d_0 = \delta = 0$) имеем решение $k_x^2 = k_0^2 - k_y^2$. Подставив его в (1.3.33), в первом приближении найдем

$$k_x^2 = k_0^2 - k_y^2 + k_y^4 k_0^{-2} (d_0 k_0 - \delta k_y^2 k_0^{-1})^2. \quad (1.3.34)$$

Извлекая корень, окончательно получим

$$k_x = \pm k_{x2} = \pm \sqrt{k_0^2 - k_y^2 + k_y^4 k_0^{-2} (d_0 k_0 - \delta k_y^2 k_0^{-1})^2} \cong \pm \sqrt{k_0^2 - k_y^2} [1 + O(k_0^2 d^2)]. \quad (1.3.35)$$

Поправка к главному члену под радикалом получилась второго порядка малости, однако пренебречь ею мы не можем, поскольку в этом случае (1.3.35) уже не будет решением уравнения (1.3.32) в линейном приближении. Также отметим, что на комплексной плоскости k_x полюсы $\pm k_{x2}$ лежат в окрестностях точек ветвления $\pm k_{xb}$, заданных выражениями (1.3.24).

Итак, мы показали, что коэффициент R_x имеет несколько особенностей, а именно три пары симметричных полюсов $\pm k_{x0}$, $\pm k_{x1}$ и $\pm k_{x2}$, заданных формулами (1.3.29), (1.3.31) и (1.3.35), соответственно. Нетрудно убедиться, что в коэффициенте R_z присутствуют только полюсы $\pm k_{x1}$ и $\pm k_{x2}$, поскольку знаменатели коэффициентов R_x и R_z совпадают с точностью до множителя $(k_0^2 - k_x^2)$, который в знаменателе R_z отсутствует (см. формулы (1.3.25) и (1.3.26)).

На рис.1.9 изображена комплексная плоскость k_x , на которой отмечены точки ветвления $\pm k_{xb}$, разрезы, полюсы $\pm k_{x0}$, $\pm k_{x1}$, $\pm k_{x2}$ и контур интегрирования с учетом исчезающе малого затухания в среде при $\omega > 0$ в случаях, когда $|k_y| > k_0$ (слева) и $|k_y| < k_0$ (справа). Напомним, что для учета исчезающе малого затухания достаточно сделать замену $k_0^2 = \omega^2/c^2$ на $k_0^2 [1 + i\sigma \operatorname{sgn}(\omega)]$, где $0 < \sigma \ll 1$. Тогда для полюсов $\pm k_{x0} = \pm k_0$ такое расположение относительно контура интегрирования становится очевидным. Для полюсов $+k_{x1}$, $+k_{x2}$ и точки ветвления $+k_{xb}$ имеем

$$+k_{x1} \cong |k_{x1}| \exp\left(i\frac{\pi}{2} + i\frac{\phi}{2}\right), \text{ где } \phi = \operatorname{arctg}\left[\sigma \operatorname{sgn}(\omega) \frac{2k_0(1-\beta^2)\beta^{-2}}{k_y^2 + k_0^2(1-\beta^2)\beta^{-2}}\right]; \quad (1.3.36)$$

$$+k_{x2} \cong +k_{xb} \cong |k_{xb}| \begin{cases} \exp\left(i\frac{\phi}{2}\right) & \text{при } |k_y| < k_0 \\ \exp\left(i\frac{\pi}{2} + i\frac{\phi}{2}\right) & \text{при } |k_y| > k_0 \end{cases}, \text{ где } \phi = \operatorname{arctg}\left[\sigma \operatorname{sgn}(\omega) \frac{2k_0}{k_0^2 - k_y^2}\right]. \quad (1.3.37)$$

Симметричные им полюсы $-k_{x1}$, $-k_{x2}$ и точка ветвления $-k_{xb}$ отличаются от полученных выражений множителем $\exp(i\pi)$. Из формулы (1.3.36) видно, что полюс $+k_{x1}$ при $\omega > 0$ лежит во втором квадранте комплексной плоскости k_x , как в случае $|k_y| > k_0$, так и в случае $|k_y| < k_0$, то есть при $\sigma \rightarrow +0$ стремится к мнимой оси слева. Выражения (1.3.37) показывают, что для положительных частот полюс $+k_{x2}$ и, следовательно, точка ветвления $+k_{xb}$ лежат в первом квадранте плоскости k_x и при $\sigma \rightarrow +0$ стремятся к мнимой оси (случай $|k_y| > k_0$, левая картинка на рис.1.9) или к вещественной оси (случай $|k_y| < k_0$, правая картинка на рис.1.9).

Будем исследовать асимптотическое поведение интегралов (1.3.23) методом перевала [106]. Для удобства сначала сделаем замену переменной интегрирования

$$k_x = \sqrt{k_0^2 - k_y^2} \sin \chi. \quad (1.3.38)$$

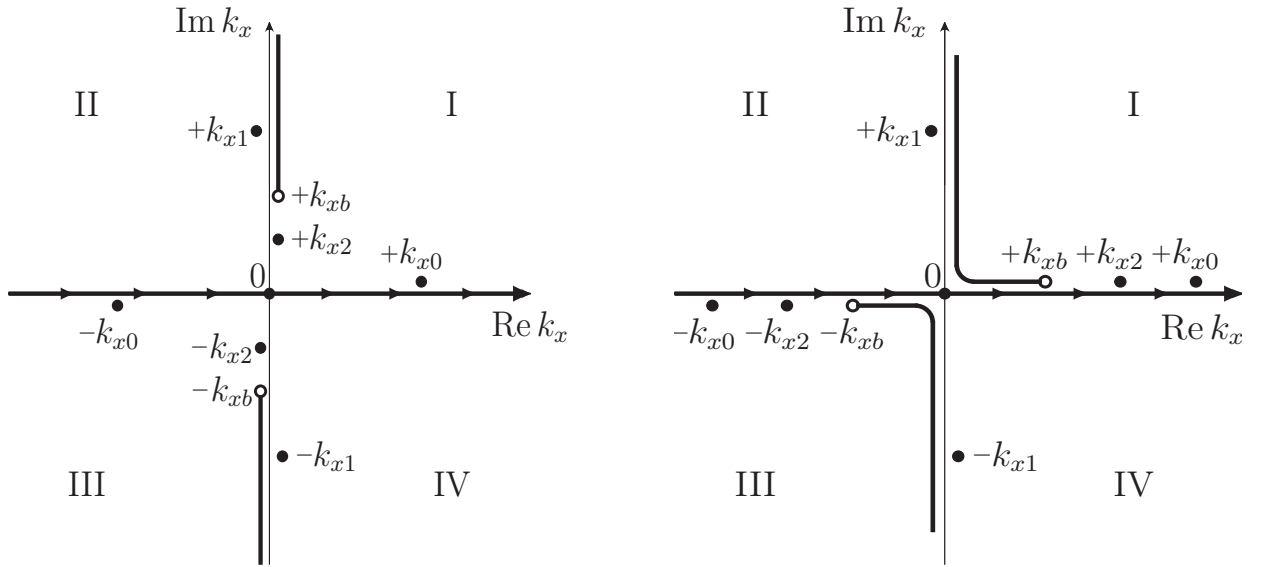


Рис.1.9. Расположение точек ветвления $\pm k_{xb}$, разрывов, полюсов $\pm k_{x0}$, $\pm k_{x1}$, $\pm k_{x2}$ и контура интегрирования (вещественная ось) на комплексной плоскости k_x при учете исчезающе малого затухания в среде для $\omega > 0$ в случаях, когда $|k_y| > k_0$ (слева) и $|k_y| < k_0$ (справа). Кружком о здесь обозначены точки ветвления, а римскими цифрами - квадранты комплексной плоскости.

Тогда интегралы (1.3.23) примут вид

$$\begin{cases} I_x \\ I_z \end{cases} = \int_{\Gamma_x} d\chi \begin{cases} R_x \\ R_z \end{cases} \exp[i\Phi(\chi)], \quad (1.3.39)$$

где Γ_x - исходный контур интегрирования на комплексной плоскости χ , а величина $\Phi(\chi)$ задана выражением

$$\Phi(\chi) = \sqrt{k_0^2 - k_y^2} (x \sin \chi + |z| \cos \chi). \quad (1.3.40)$$

Отметим, что замена (1.3.38) позволила нам избавиться от точек ветвления в формуле (1.3.23). Для дальнейших рассуждений существенно, какой знак имеет выражение под радикалом в (1.3.40). Поэтому целесообразно рассмотреть отдельно две ситуации: $|k_y| > k_0$ и $|k_y| < k_0$.

Случай $|k_y| > k_0$

Сначала предположим, что $|k_y| > k_0$. В этом случае формулу (1.3.40) удобно переписать в виде

$$\Phi(\chi) = i\sqrt{k_y^2 - k_0^2} (x \sin \chi + |z| \cos \chi), \quad (1.3.41)$$

где корень $\sqrt{k_y^2 - k_0^2}$ вещественный и положительный.

Седловые точки $\chi = \chi_s$ определяются из условия

$$\frac{d\Phi(\chi)}{d\chi} = i\sqrt{k_y^2 - k_0^2} (x \cos \chi - |z| \sin \chi) = 0. \quad (1.3.42)$$

Откуда следует, что

$$\cos \chi_{s\pm} = \pm \frac{|z|}{\sqrt{x^2 + z^2}}, \quad (1.3.43)$$

где χ_{s+} соответствует знаку “+” в правой части равенства, а χ_{s-} - знаку “-”. Следовательно, на комплексной плоскости χ седловые точки $\chi_{s\pm}$ являются чисто вещественными величинами и лежат в областях

$$\frac{\pi}{2} (2n - 1) < \chi_{s\pm} < \frac{\pi}{2} (2n + 1), \quad (1.3.44)$$

где четные значения n соответствуют точке χ_{s+} , а нечетные - точке χ_{s-} .

Ранее мы зафиксировали $\text{Im } k_{z0} > 0$. Отсюда вытекает, что (в новой переменной χ)

$$\begin{aligned} \text{Im} \left(i \sqrt{k_y^2 - k_0^2} \cos(\chi' + i\chi'') \right) &= \text{Re} (\cos(\chi' + i\chi'')) \\ &= \text{Re} (\cos \chi' \text{ch } \chi'' - i \sin \chi' \text{sh } \chi'') > 0 \Rightarrow \cos \chi' > 0. \end{aligned} \quad (1.3.45)$$

Таким образом, отображение “верхнего” листа плоскости k_x на плоскость χ есть полосы

$$\begin{cases} \chi = \chi' + i\chi'' \\ -\frac{\pi}{2} + \pi m < \chi' < \frac{\pi}{2} + \pi m \\ -\infty < \chi'' < +\infty, \end{cases} \quad (1.3.46)$$

где m - четное число. “Нижний” лист отображается на аналогичные полосы с нечетным значением m . Мы будем рассматривать далее области, где $m = 0, 1$, то есть $-\pi/2 < \chi' < 3\pi/2$. Согласно (1.3.44), данной области принадлежат две седловые точки, соответствующие значениям $n = 0, 1$. Точка χ_{s+} (при $n = 0$) лежит в полосе $\chi' \in (-\pi/2, \pi/2)$, а седловая точка χ_{s-} (при $n = 1$) - в полосе $\chi' \in (\pi/2, 3\pi/2)$. Поскольку отображение “верхнего” листа плоскости k_x есть полоса

$$\begin{cases} \chi = \chi' + i\chi'' \\ -\frac{\pi}{2} < \chi' < \frac{\pi}{2} \quad (m = 0) \\ -\infty < \chi'' < +\infty, \end{cases} \quad (1.3.47)$$

то нас интересует только точка χ_{s+} .

Контур наибоыстрейшего спуска Γ_x^* (КНС) проходит через седловую точку χ_{s+} и удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} \text{Re } \Phi(\chi) = \text{Re } \Phi(\chi_{s+}) \\ \text{Im } \Phi(\chi) > \text{Im } \Phi(\chi_{s+}), \end{cases} \quad (1.3.48)$$

где величина $\Phi(\chi)$ задана формулой (1.3.41). Тогда условия (1.3.48) примут вид

$$\begin{cases} \text{sh } \chi'' (x \cos \chi' - |z| \sin \chi') = 0 \\ \text{ch } \chi'' (x \sin \chi' + |z| \cos \chi') > x \sin \chi_{s+} + |z| \cos \chi_{s+}. \end{cases} \quad (1.3.49)$$

Учитывая выражение (1.3.43) для седловой точки χ_{s+} , нетрудно убедиться, что

$$\sin \chi_{s+} = \pm \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + z^2}}, \quad (1.3.50)$$

где знак “+” соответствует положительным значениям x , а знак “-” - отрицательным. Тогда условия (1.3.49) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \text{sh } \chi'' (\sin \chi_{s+} \cos \chi' - \cos \chi_{s+} \sin \chi') = 0 \\ \text{ch } \chi'' (\sin \chi_{s+} \sin \chi' + \cos \chi_{s+} \cos \chi') > \sin^2 \chi_{s+} + \cos^2 \chi_{s+}. \end{cases} \quad (1.3.51)$$

Используя известные тригонометрические тождества, для условий на КНС окончательно получим

$$\begin{cases} \text{sh } \chi'' \sin (\chi_{s+} - \chi') = 0 \\ \text{ch } \chi'' \cos (\chi_{s+} - \chi') > 1. \end{cases} \quad (1.3.52)$$

Решение данной системы есть

$$\chi' = \chi_{s+}, \quad \chi'' \in (-\infty, +\infty). \quad (1.3.53)$$

Таким образом, мы можем заключить, что на плоскости χ КНС Γ_χ^* является прямой линией, параллельной мнимой оси, и лежит в полосе (1.3.47). К тому же, из формулы (1.3.50) следует, что при $x > 0$ КНС принадлежит области $\chi' \in (0, \pi/2)$, а при $x < 0$ - области $\chi' \in (-\pi/2, 0)$.

На рис.1.10 изображена комплексная плоскость χ с контуром интегрирования Γ_χ (мнимая ось), контуром наискорейшего спуска Γ_χ^* (при $x > 0$), седловыми точками $\chi_{s\pm}$ и полюсами $\pm\chi_0, \pm\chi_1, \pm\chi_2$, которые соответствуют полюсам $\pm k_{x0}, \pm k_{x1}$ и $\pm k_{x2}$ на плоскости k_x . Римскими цифрами отмечены области, соответствующие квадрантам плоскости k_x (римские цифры со штрихом соответствуют квадрантам “нижнего” листа плоскости k_x).

Интегралы (1.3.39) можно найти, если образовать на комплексной плоскости χ замкнутый контур C_+ (при $x > 0$), состоящий из контура интегрирования Γ_χ , контура, обратного к КНС, а также отрезков $\Gamma_{\pm\infty}^+$, параллельных вещественной оси и расположенных на бесконечности. Интеграл по такому замкнутому контуру будет определяться вкладами полюсов $+\chi_0$,

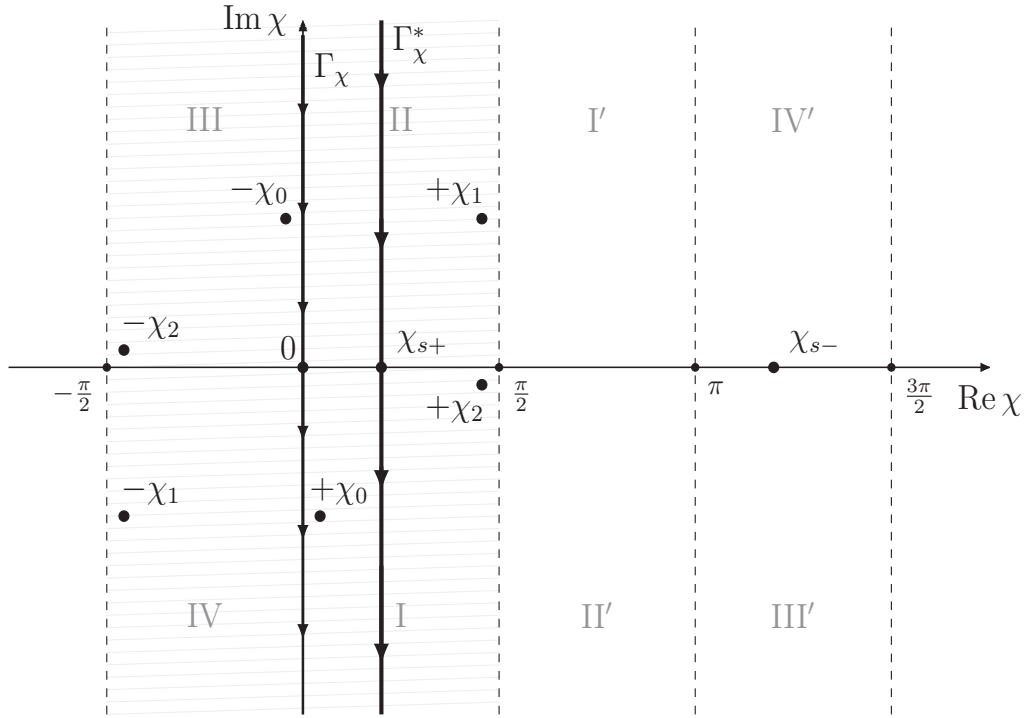


Рис.1.10. Расположение полюсов $\pm\chi_0$, $\pm\chi_1$, $\pm\chi_2$, седловых точек $\chi_{s\pm}$, исходного контура интегрирования Γ_χ (мнимая ось) и контура наискорейшего спуска Γ_χ^* (при $x > 0$) на комплексной плоскости χ при $\omega > 0$ в случае, когда $|k_y| > k_0$. Римскими цифрами обозначены области, соответствующие квадрантам плоскости k_x (для “верхнего” листа - без штриха, для “нижнего” листа - со штрихом).

$+\chi_1$ и $+\chi_2$ при условии, что данные полюсы “захватываются” контуром. Согласно формулам (1.3.43) и (1.3.50), при $x > 0$ седловая точка χ_{s+} принадлежит области $(0, \pi/2)$, причем $\chi_{s+} \rightarrow \pi/2$, если $|z| \rightarrow 0$, и $\chi_{s+} \rightarrow 0$, если $|x| \rightarrow 0$. Можно показать, что полюсы $+\chi_1$ и $+\chi_2$ “захватываются” контуром C_+ только в случае, когда $|z| \rightarrow 0$ и, следовательно, $\chi_{s+} \rightarrow \pi/2$ (см. рис.1.10). В этой ситуации седловая точка χ_{s+} не является изолированной, то есть лежит вблизи особенности подынтегральной функции (вблизи полюса $+\chi_2$). Следовательно, при $|z| \rightarrow 0$ мы не можем рассматривать вклад полюса $+\chi_2$ отдельно от вклада седловой точки χ_{s+} , а должны учитывать их совместный вклад в интегралы (1.3.39). Отметим, что такое расположение полюсов $\pm\chi_2$ нетрудно показать, если воспользоваться формулами (1.3.35) и (1.3.38), из которых следует, что

$$\pm \sin \chi_2 = \pm \sqrt{1 + \frac{k_y^4 k_0^{-2} (d_0 k_0 - \delta k_y^2 k_0^{-1})^2}{k_0^2 - k_y^2}} = \pm \sqrt{1 + O(k_0^2 d_0^2)}. \quad (1.3.54)$$

Верхний знак здесь соответствует полюсу $+\chi_2$, а нижний знак - полюсу $-\chi_2$. Поскольку поправка под радикалом в (1.3.54) второго порядка малости относительно малого параметра

$k_0 d_0$, мы можем заключить, что полюс $+\chi_2$ располагается в окрестности точки $\chi = \pi/2$, а полюс $-\chi_2$ - в окрестности точки $\chi = -\pi/2$.

Аналогичным образом можно показать, что полюс $+\chi_0$ располагается далеко от вещественной оси и “захватывается” контуром C_+ в большом диапазоне значений χ_{s+} . В частности, вклад полюса $+\chi_0$ необходимо учитывать всегда, если мы рассматриваем поле вблизи поверхности.

Ввиду всего вышесказанного, при $|z| \rightarrow 0$ интегралы по замкнутому контуру C_+ будут определяться вкладами полюсов $+\chi_0$ и $+\chi_1$

$$\oint_{C_+} = \int_{\Gamma_\chi} + \int_{\Gamma_{-\infty}^+} - \int_{\Gamma_\chi^*} + \int_{\Gamma_{+\infty}^+} = 2\pi i \sum_{n=0}^1 \text{Res}_{\chi=+\chi_n}. \quad (1.3.55)$$

При $x < 0$ аналогичный контур C_- будет включать контур интегрирования Γ_χ , контур, обратный к КНС, а также отрезки $\Gamma_{\pm\infty}^-$, параллельные вещественной оси и расположенные на бесконечности. В этом случае точка χ_{s+} принадлежит области $(-\pi/2, 0)$ и при $|z| \rightarrow 0$ располагается вблизи полюса $-\chi_2$. Тогда интеграл по контуру C_- будет определяться вкладами полюсов $-\chi_0$ и $-\chi_1$

$$\oint_{C_-} = \int_{\Gamma_\chi} + \int_{\Gamma_{-\infty}^-} - \int_{\Gamma_\chi^*} + \int_{\Gamma_{+\infty}^-} = -2\pi i \sum_{n=0}^1 \text{Res}_{\chi=-\chi_n}. \quad (1.3.56)$$

Знак “-” перед суммой в правой части (1.3.56) объясняется тем, что обход контура C_- производится по часовой стрелке. Далее, можно показать, что подынтегральное выражение в (1.3.39) экспоненциально стремится к нулю, если

$$\begin{cases} x > 0, \\ \chi' \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \\ \chi'' \rightarrow \pm\infty \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 0, \\ \chi' \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \\ \chi'' \rightarrow \pm\infty. \end{cases} \quad (1.3.57)$$

В силу соотношений (1.3.57), интегралы по удаленным на бесконечность горизонтальным отрезкам $\Gamma_{\pm\infty}^+$ (при $x > 0$) и $\Gamma_{\pm\infty}^-$ (при $x < 0$) равны нулю. Тогда, объединяя (1.3.55) и (1.3.56), можно записать

$$\int_{\Gamma_\chi} \cong \pm 2\pi i \sum_{n=0}^1 \text{Res}_{\chi=\pm\chi_n} + \int_{\Gamma_\chi^*}, \quad (1.3.58)$$

где знак “+” соответствует положительным значениям x , а знак “-” - отрицательным значениям x .

Вклады полюсов $\pm\chi_0$ и $\pm\chi_1$ в интегралы (1.3.39) будут исследованы в дальнейшем. Сейчас же рассмотрим только вклад седловой точки χ_{s+} , то есть интегралы (1.3.39), идущие

вдоль КНС Γ_χ^* . В случае, когда точка χ_{s+} является изолированной, то есть не лежит вблизи особенностей подынтегральной функции, данный вклад при условии $\sqrt{(k_y^2 - k_0^2)(x^2 + z^2)} \gg 1$ можно приближенно оценить по стандартной формуле [106]

$$\begin{Bmatrix} I_x^{(v)} \\ I_z^{(v)} \end{Bmatrix} \sim \sqrt{\frac{2\pi}{|\Phi|}} \begin{Bmatrix} R_x(\chi_{s+}) \\ R_z(\chi_{s+}) \end{Bmatrix} \exp\left(i\Phi - i\frac{\pi}{2}\right), \quad (1.3.59)$$

где $\Phi = i\sqrt{(k_y^2 - k_0^2)(x^2 + z^2)}$. Индекс “ v ” у величин $I_x^{(v)}$ и $I_z^{(v)}$ указывает на то, что полученные выражения не равны интегралам (1.3.39), а лишь описывают вклад седловой точки в данные интегралы без учета вклада полюсов. Множитель $\exp(-i\pi/2)$ в (1.3.59) объясняется тем, что угол между КНС и вещественной осью в седловой точке равен $-\pi/2$. Коэффициенты R_x и R_z в полученном выражении зависят от седловой точки χ_{s+} через компоненты волнового вектора k_x и k_{z0}

$$k_x = i\sqrt{k_y^2 - k_0^2} \sin \chi_{s+}, \quad k_{z0} = \sqrt{k_0^2 - k_y^2 - k_x^2} = i\sqrt{k_y^2 - k_0^2} \cos \chi_{s+}. \quad (1.3.60)$$

С учетом явного вида $\cos \chi_{s+}$ и $\sin \chi_{s+}$ (формулы (1.3.43) и (1.3.50), соответственно) соотношения (1.3.55) примут вид

$$k_x = \pm i\sqrt{k_y^2 - k_0^2} \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + z^2}}, \quad k_{z0} = i\sqrt{k_y^2 - k_0^2} \frac{|z|}{\sqrt{x^2 + z^2}}, \quad (1.3.61)$$

где знак “+” соответствует положительным значениям x , а знак “-” - отрицательным.

Отметим, что приближение (1.3.59) не применимо при рассмотрении поля вблизи поверхности, то есть в случае, когда значение $|z|$ близко к нулю. Как известно, при $|z| \rightarrow 0$ седловая точка χ_{s+} не является изолированной, так как располагается вблизи полюса $+\chi_2$ (при $x > 0$) и $-\chi_2$ (при $x < 0$). В этом случае асимптотическая оценка интегралов (1.3.39) будет иметь более сложный вид [106]

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} I_x^{(v)} \\ I_z^{(v)} \end{Bmatrix} \sim \sqrt{\frac{2\pi}{|\Phi|}} \begin{Bmatrix} R_x(\chi_{s+}) \\ R_z(\chi_{s+}) \end{Bmatrix} \exp\left(i\Phi - i\frac{\pi}{2}\right) \\ & + \sqrt{\pi} \operatorname{Res}_{\chi=\pm\chi_2} \begin{Bmatrix} R_x(\chi) \\ R_z(\chi) \end{Bmatrix} \left[\frac{b^{-1}}{\sqrt{|\Phi|}} \pm 2iQ\left(-ib\sqrt{|\Phi|}\right) \exp(-b^2\Phi) \right] \exp(i\Phi), \end{aligned} \quad (1.3.62)$$

где $\Phi = i\sqrt{(k_y^2 - k_0^2)(x^2 + z^2)}$, $b = \sqrt{i(1 - \cos(\chi_2 - \chi_{s+}))}$, а функция $Q(\alpha)$ есть интеграл

$$Q(\alpha) = \int_{\alpha}^{+\infty} \exp(-x^2) dx. \quad (1.3.63)$$

Верхний знак в формуле (1.3.62) соответствует положительным значениям x , а нижний знак - отрицательным значениям x . Заметим, что выражение (1.3.62) является суммой двух слагаемых. Первое слагаемое в точности совпадает с (1.3.59), то есть представляет собой асимптотическую оценку для интегралов (1.3.39) в случае изолированной седловой точки χ_{s+} . Второе слагаемое появляется при рассмотрении поля вблизи поверхности, когда точка χ_{s+} располагается вблизи полюсов $\pm\chi_2$.

В итоге, из выражений (1.3.59) и (1.3.62) следует, что, в силу мнимости Φ , вклад седловой точки экспоненциально убывает с ростом расстояния от точки пролета заряда сквозь плоскость периодической структуры по закону $\exp\left[-\sqrt{(k_y^2 - k_0^2)(x^2 + z^2)}\right]$. При расчете поля им можно пренебречь в силу его экспоненциальной малости. Данный вклад не представляет для нас интереса, так как не относится к полю излучения (не уносит энергию от источника).

Таким образом, мы получили, что в случае $|k_y| > k_0$ вклад КНС дает экспоненциальное убывание поля с ростом расстояния. Физически это означает, что при таких значениях k_y отсутствует объемное излучение (как и следовало ожидать).

Случай $|k_y| < k_0$

Теперь рассмотрим ситуацию, когда $|k_y| < k_0$. Величина $\Phi(\chi)$ в этом случае определяется формулой (1.3.40), где корень вещественный и положительный. Тогда условие для седловых точек $\chi = \chi_s$ примет вид

$$\frac{d\Phi(\chi)}{d\chi} = \sqrt{k_0^2 - k_y^2} (x \cos \chi - |z| \sin \chi) = 0. \quad (1.3.64)$$

Решение данного уравнения есть $\cos \chi_{s\pm} = \pm|z|/\sqrt{x^2 + z^2}$, что совпадает с выражением (1.3.43). Следовательно, при $|k_y| < k_0$ седловые точки $\chi_{s\pm}$ имеют тот же вид, что и в случае $|k_y| > k_0$.

Из фиксации $\text{Im } k_{z0} > 0$ вытекает, что

$$\begin{aligned} \text{Im} \left(\sqrt{k_0^2 - k_y^2} \cos(\chi' + i\chi'') \right) &= \text{Im} (\cos(\chi' + i\chi'')) \\ &= \text{Im} (\cos \chi' \text{ch } \chi'' - i \sin \chi' \text{sh } \chi'') > 0 \Rightarrow \sin \chi' \text{sh } \chi'' < 0, \end{aligned} \quad (1.3.65)$$

то есть отображение “верхнего” листа плоскости k_x на плоскость χ есть области

$$\begin{cases} \chi = \chi' + i\chi'' \\ \pi(m-1) < \chi' < \pi m \quad \text{при } \chi'' > 0 \\ \pi m < \chi' < \pi(m+1) \quad \text{при } \chi'' < 0, \end{cases} \quad (1.3.66)$$

где m - четное число. Если в формулах (1.3.66) изменить знаки в неравенствах для χ'' на обратные, то получим отображение “нижнего” листа

$$\begin{cases} \chi = \chi' + i\chi'' \\ \pi(m-1) < \chi' < \pi m \quad \text{при } \chi'' < 0 \\ \pi m < \chi' < \pi(m+1) \quad \text{при } \chi'' > 0, \end{cases} \quad (1.3.67)$$

где m - четное число. Таким образом, “верхний” и “нижний” листы плоскости k_x переходят на плоскости χ в области, расположенные в “шахматном” порядке (рис.1.11). Далее мы будем рассматривать область, где $m = 0$, то есть $-\pi < \chi' < \pi$ и $-\infty < \chi'' < +\infty$. Согласно (1.3.44), данной области принадлежит седловая точка χ_{s+} , соответствующая значению $n = 0$.

Контур наибоыстрейшего спуска Γ_χ^* (КНС) проходит через седловую точку χ_{s+} и удовлетворяет условиям (1.3.48), в которых функция $\Phi(\chi)$ задана формулой (1.3.40). Тогда условия (1.3.48) для случая $|k_y| < k_0$ примут вид

$$\begin{cases} \text{ch } \chi'' (x \sin \chi' + |z| \cos \chi') = x \sin \chi_{s+} + |z| \cos \chi_{s+} \\ \text{sh } \chi'' (x \cos \chi' - |z| \sin \chi') > 0. \end{cases} \quad (1.3.68)$$

Учитывая формулы (1.3.43) и (1.3.50) и используя известные тригонометрические тождества, для условий (1.3.68) получим

$$\begin{cases} \text{ch } \chi'' \cos(\chi_{s+} - \chi') = 1 \\ \text{sh } \chi'' \sin(\chi_{s+} - \chi') > 0. \end{cases} \quad (1.3.69)$$

Из первого условия системы (1.3.69) следует уравнение на КНС Γ_χ^*

$$\chi'' = \text{arch} [\cos^{-1}(\chi_{s+} - \chi')], \quad (1.3.70)$$

где arch - обратный гиперболический косинус. При этом должно выполняться неравенство $\cos(\chi_{s+} - \chi') > 0$, из которого вытекает, что КНС принадлежит области

$$\begin{cases} \chi_{s+} - \frac{\pi}{2} < \chi' < \chi_{s+} + \frac{\pi}{2} \\ -\infty < \chi'' < +\infty. \end{cases} \quad (1.3.71)$$

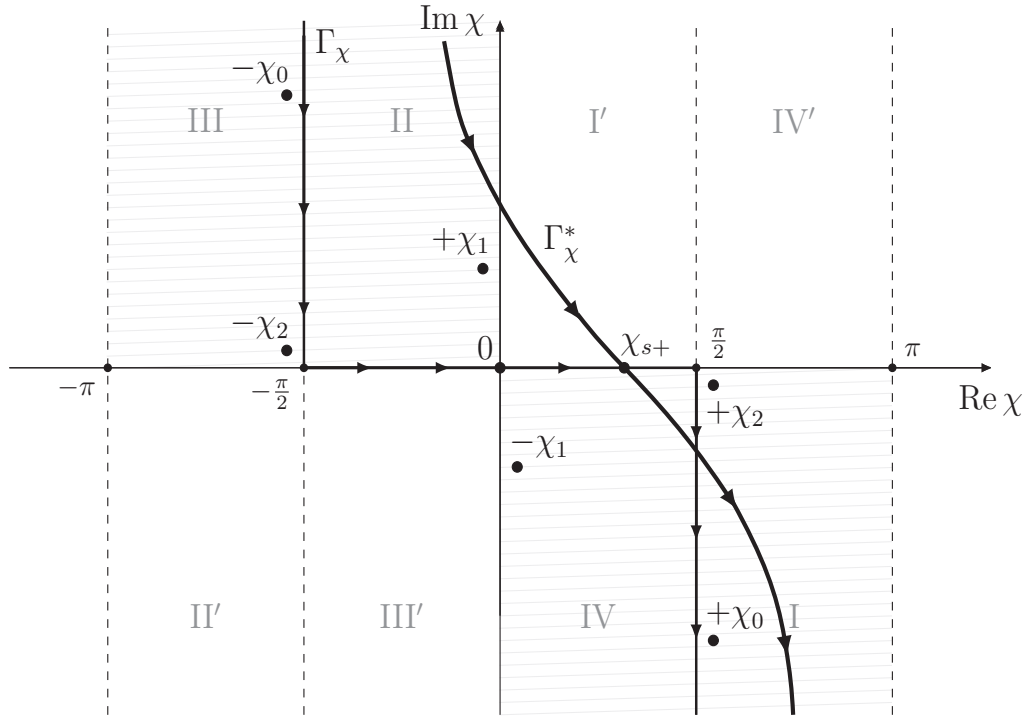


Рис.1.11. Расположение полюсов $\pm\chi_0, \pm\chi_1, \pm\chi_2$, седловой точки χ_{s+} , исходного контура интегрирования Γ_χ и контура наискорейшего спуска Γ_χ^* (при $x > 0$) на комплексной плоскости χ при $\omega > 0$ в случае, когда $|k_y| < k_0$. Римскими цифрами обозначены области, соответствующие квадрантам плоскости k_x (для “верхнего” листа - без штриха, для “нижнего” листа - со штрихом).

Второе условие в системе (1.3.69) даст

$$\begin{cases} \chi_{s+} - \pi < \chi' < \chi_{s+} & \text{при } \chi'' > 0 \\ \chi_{s+} < \chi' < \chi_{s+} + \pi & \text{при } \chi'' < 0, \end{cases} \quad (1.3.72)$$

что однозначно определяет положение КНС на плоскости χ .

На рис.1.11 изображена комплексная плоскость χ с контуром интегрирования Γ_χ , контуром наискорейшего спуска Γ_χ^* (при $x > 0$), седловой точкой χ_{s+} и полюсами $\pm\chi_0, \pm\chi_1, \pm\chi_2$, которые соответствуют полюсам $\pm k_{x0}, \pm k_{x1}$ и $\pm k_{x2}$ на плоскости k_x . Римскими цифрами отмечены области, соответствующие квадрантам плоскости k_x (для “верхнего” листа - без штриха, для “нижнего” листа - со штрихом).

Как и в случае $|k_y| > k_0$, интегралы (1.3.39) можно найти, если образовать на плоскости χ замкнутый контур $C_+ = \Gamma_\chi + \Gamma_{-\infty}^+ - \Gamma_\chi^* + \Gamma_{+\infty}^+$ (при $x > 0$) и $C_- = \Gamma_\chi + \Gamma_{-\infty}^- - \Gamma_\chi^* + \Gamma_{+\infty}^-$ (при $x < 0$), где $\Gamma_{\pm\infty}^+$ и $\Gamma_{\pm\infty}^-$ - горизонтальные отрезки, расположенные на бесконечности, а контуры Γ_χ и Γ_χ^* изображены на рис.1.11. Как и ранее, интегралы по χ в (1.3.39), идущие

вдоль C_+ , определяются вкладами полюсов $+\chi_0$ и $+\chi_1$, а те же интегралы, идущие вдоль C_- , - вкладами полюсов $-\chi_0$ и $-\chi_1$. Поскольку, в силу условий

$$\begin{cases} x > 0, \\ \chi' \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \text{ при } \chi'' \rightarrow +\infty, \\ \chi' \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ при } \chi'' \rightarrow -\infty \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x < 0, \\ \chi' \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \text{ при } \chi'' \rightarrow +\infty, \\ \chi' \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ при } \chi'' \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (1.3.73)$$

интегралы по удаленным на бесконечность горизонтальным отрезкам $\Gamma_{\pm\infty}^+$ и $\Gamma_{\pm\infty}^-$ равны нулю, то мы можем заключить, что в случае $|k_y| < k_0$ также справедливо соотношение (1.3.58).

Рассмотрим вклад седловой точки χ_{s+} в интегралы (1.3.39). Если точка χ_{s+} изолированная, то данный вклад при условии $\sqrt{(k_0^2 - k_y^2)(x^2 + z^2)} \gg 1$ приближенно равен [106]

$$\begin{Bmatrix} I_x^{(v)} \\ I_z^{(v)} \end{Bmatrix} \sim \sqrt{\frac{2\pi}{|\Phi|}} \begin{Bmatrix} R_x(\chi_{s+}) \\ R_z(\chi_{s+}) \end{Bmatrix} \exp\left(i\Phi - i\frac{\pi}{4}\right), \quad (1.3.74)$$

где $\Phi = \sqrt{(k_0^2 - k_y^2)(x^2 + z^2)}$ - вещественная и положительная величина. Множитель $\exp(-i\pi/4)$ в (1.3.74) объясняется тем, что угол между касательной к КНС и вещественной осью в седловой точке равен $-\pi/4$. Как и в случае $|k_y| > k_0$, коэффициенты R_x и R_z зависят от седловой точки χ_{s+} через компоненты волнового вектора k_x и k_{z0} , однако в данном случае эти величины являются чисто вещественными

$$k_x = \pm \sqrt{k_0^2 - k_y^2} \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + z^2}}, \quad k_{z0} = \sqrt{k_0^2 - k_y^2} \frac{|z|}{\sqrt{x^2 + z^2}} \quad (\text{при } \omega > 0), \quad (1.3.75)$$

где знак “+” соответствует положительным значениям x , а знак “-” - отрицательным.

Если точка χ_{s+} располагается вблизи полюсов $\pm\chi_2$, то есть если $|z| \rightarrow 0$, асимптотическая оценка интегралов (1.3.39) имеет вид [106]

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} I_x^{(v)} \\ I_z^{(v)} \end{Bmatrix} &\sim \sqrt{\frac{2\pi}{|\Phi|}} \begin{Bmatrix} R_x(\chi_{s+}) \\ R_z(\chi_{s+}) \end{Bmatrix} \exp\left(i\Phi - i\frac{\pi}{4}\right) \\ &+ \sqrt{\pi} \operatorname{Res}_{\chi=\pm\chi_2} \begin{Bmatrix} R_x(\chi) \\ R_z(\chi) \end{Bmatrix} \left[\frac{b^{-1}}{\sqrt{|\Phi|}} \pm 2iQ\left(-ib\sqrt{|\Phi|}\right) \exp(-b^2\Phi) \right] \exp(i\Phi), \end{aligned} \quad (1.3.76)$$

где $\Phi = \sqrt{(k_0^2 - k_y^2)(x^2 + z^2)}$, $b = \sqrt{i(1 - \cos(\chi_2 - \chi_{s+}))}$, функция $Q(\alpha)$ задана формулой (1.3.63), верхний знак соответствует положительным значениям x , а нижний знак - отрицательным значениям x . Из полученного выражения видно, что, как и в случае $|k_y| > k_0$, влияние полюсов $\pm\chi_2$ при расчете поля вблизи поверхности приводит к появлению нового слагаемого, пропорционального вычету в полюсе $+\chi_2$ (при $x > 0$) и вычету в полюсе $-\chi_2$ (при $x < 0$).

Из формул (1.3.74) и (1.3.76) следует, что при расчете поля вдали от поверхности, то есть при достаточно больших значениях $|z|$ (в этом случае мы можем пренебречь влиянием полюсов в (1.3.76)), вклад седловой точки в интеграл (1.3.39) убывает с ростом расстояния от точки влета заряда в плоскость периодической поверхности по закону $(x^2 + z^2)^{-1/4}$. Ниже мы покажем, что данный вклад в исходные интегралы для компонент вектора Герца (1.3.13) представляет собой объемную часть поля излучения заряда.

1.3.3. Объемное излучение

Рассмотрим отдельно вклад седловой точки, полученный при асимптотическом исследовании интегралов по k_x в выражениях для компонент вектора Герца (1.3.13). Как известно, в случае $|k_y| > k_0$ данный вклад приводит к экспоненциальному убыванию подынтегральных функций с ростом расстояния (см. выражения (1.3.59) и (1.3.62)), поэтому не представляет для нас интереса. Учитывая данный факт, в дальнейших рассуждениях мы будем предполагать, что $|k_y| < k_0$. Также для простоты последующих формул будем рассматривать поле вдали от поверхности, то есть ситуацию, когда можно пренебречь вторым слагаемым в выражении (1.3.76). В этом случае вклад седловой точки приближенно определяется формулой (1.3.74). Будем обозначать данный вклад в Фурье-образ вектора Герца (1.3.13) индексом “ ν ”:

$$\begin{pmatrix} \Pi_{x\omega}^{(\nu)} \\ \Pi_{z\omega}^{(\nu)} \end{pmatrix} \cong \frac{iq\tilde{\kappa}}{\pi ck_0^2} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt[4]{x^2 + z^2}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \begin{pmatrix} R_x \\ R_z \end{pmatrix} \frac{\exp[i\Psi(k_y)]}{\sqrt[4]{k_0^2 - k_y^2}}, \quad (1.3.77)$$

где

$$\Psi(k_y) = k_y y + \sqrt{(k_0^2 - k_y^2)(x^2 + z^2)}. \quad (1.3.78)$$

Интеграл по k_y удобно исследовать, если перейти к новой переменной ξ по правилу

$$k_y = k_0 \sin \xi. \quad (1.3.79)$$

Тогда выражения (1.3.79) примут вид

$$\begin{pmatrix} \Pi_{x\omega}^{(\nu)} \\ \Pi_{z\omega}^{(\nu)} \end{pmatrix} \cong \frac{iq\tilde{\kappa}}{\pi ck_0^2} \frac{\sqrt{2\pi k_0}}{\sqrt[4]{x^2 + z^2}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \int_{\Gamma_\xi} d\xi \begin{pmatrix} R_x \\ R_z \end{pmatrix} \sqrt{\cos \xi} \exp[i\Psi(\xi)], \quad (1.3.80)$$

где

$$\Psi(\xi) = k_0 \left(y \sin \xi + \sqrt{x^2 + z^2} \cos \xi \right), \quad (1.3.81)$$

а Γ_ξ - исходный контур интегрирования на комплексной плоскости ξ .

Вклад в интегралы (1.3.77) (и, следовательно, (1.3.80)), описывающий объемную часть излучения, можно оценить методом перевала, как это было сделано в предыдущем параграфе.

С учетом формулы (1.3.81) условие для седловых точек $\xi = \xi_s$ примет вид

$$\frac{d\Psi(\xi)}{d\xi} = k_0 \left(y \cos \xi - \sqrt{x^2 + z^2} \sin \xi \right) = 0, \quad (1.3.82)$$

откуда следует, что

$$\cos \xi_{s\pm} = \pm \frac{\sqrt{x^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (1.3.83)$$

где ξ_{s+} соответствует знаку “+” в правой части равенства, а ξ_{s-} - знаку “-”. Следовательно, на комплексной плоскости ξ седловые точки $\xi_{s\pm}$ являются чисто вещественными величинами и лежат в областях

$$\frac{\pi}{2} (2n - 1) < \xi_{s\pm} < \frac{\pi}{2} (2n + 1), \quad (1.3.84)$$

где четные значения n соответствуют точке ξ_{s+} , а нечетные - точке ξ_{s-} .

Напомним, что ранее мы зафиксировали $\text{Im } k_{z0} > 0$, где $k_{z0} = \sqrt{k_0^2 - k_y^2 - k_x^2}$. С учетом формул (1.3.75) и (1.3.79) для функции k_{z0} при $\omega > 0$ получим

$$k_{z0} = k_0 \frac{|z|}{\sqrt{x^2 + z^2}} \cos \xi. \quad (1.3.85)$$

Тогда из фиксации $\text{Im } k_{z0} > 0$ следует, что

$$\begin{aligned} \text{Im} \left(k_0 \frac{|z|}{\sqrt{x^2 + z^2}} \cos \xi \right) &= \text{Im} (\cos (\xi' + i\xi'')) \\ &= \text{Im} (\cos \xi' \text{ch } \xi'' - i \sin \xi' \text{sh } \xi'') > 0 \Rightarrow \sin \xi' \text{sh } \xi'' < 0. \end{aligned} \quad (1.3.86)$$

Области на комплексной плоскости ξ , где выполняется условие (1.3.86), можно записать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \xi' + i\xi'' \\ \pi(m-1) < \xi' < \pi m \quad \text{при } \xi'' > 0 \\ \pi m < \xi' < \pi(m+1) \quad \text{при } \xi'' < 0, \end{array} \right. \quad (1.3.87)$$

где m - четное число. Рассмотрим область со значением $m = 0$, то есть $-\pi < \xi' < \pi$ и $-\infty < \xi'' < +\infty$. Согласно (1.3.84), данной области принадлежит одна седловая точка ξ_{s+} , соответствующая значению $n = 0$. Отметим также, что с учетом (1.3.83) для точки ξ_{s+} справедливо равенство

$$\sin \xi_{s+} = \pm \frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (1.3.88)$$

где верхний знак соответствует положительным значениям y , а нижний знак - отрицательным значениям y .

Контур наибоыстрейшего спуска Γ_ξ^* проходит через седловую точку ξ_{s+} и удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \Psi(\xi) = \operatorname{Re} \Psi(\xi_{s+}) \\ \operatorname{Im} \Psi(\xi) > \operatorname{Im} \Psi(\xi_{s+}), \end{cases} \quad (1.3.89)$$

где величина $\Psi(\xi)$ задана выражением (1.3.81). Тогда условия (1.3.89) примут вид

$$\begin{cases} \operatorname{ch} \chi'' (y \sin \xi' + \sqrt{x^2 + z^2} \cos \xi') = y \sin \xi_{s+} + \sqrt{x^2 + z^2} \cos \xi_{s+} \\ \operatorname{sh} \xi'' (y \cos \xi' - \sqrt{x^2 + z^2} \sin \xi') > 0. \end{cases} \quad (1.3.90)$$

Учитывая формулы (1.3.83) и (1.3.88) и используя известные тригонометрические тождества, для системы (1.3.90) получим

$$\begin{cases} \operatorname{ch} \xi'' \cos(\xi_{s+} - \xi') = 1 \\ \operatorname{sh} \xi'' \sin(\xi_{s+} - \xi') > 0. \end{cases} \quad (1.3.91)$$

Отметим, что условия (1.3.91) аналогичны условиям (1.3.62) с точностью до замены $\xi = \chi$. Отсюда следует, что контур наибоыстрейшего спуска Γ_ξ^* будет иметь тот же вид, что и контур Γ_χ^* , изображенный на рис.1.11.

В результате, интегралы (1.3.80), идущие по Γ_ξ^* , приближенно равны [106]

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Pi_{x\omega}^{(v)} \\ \Pi_{z\omega}^{(v)} \end{pmatrix} &\cong \frac{iq\tilde{\kappa}}{\pi ck_0^2} \frac{\sqrt{2\pi k_0}}{\sqrt{x^2 + z^2}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \\ &\times \sqrt{\frac{2\pi}{|\Psi(\xi_{s+})|}} \begin{pmatrix} R_x(\xi_{s+}) \\ R_z(\xi_{s+}) \end{pmatrix} \sqrt{\cos \xi_{s+}} \exp\left[i\Psi(\xi_{s+}) - i\frac{\pi}{4}\right], \end{aligned} \quad (1.3.92)$$

где $\Psi(\xi_{s+}) = k_0 (y \sin \xi_{s+} + \sqrt{x^2 + z^2} \cos \xi_{s+})$, а множитель $\exp(-i\pi/4)$ объясняется тем, что угол между касательной к КНС Γ_ξ^* и вещественной осью на комплексной плоскости ξ в седловой точке равен $-\pi/4$. Учитывая явный вид $\cos \xi_{s+}$ и $\sin \xi_{s+}$ (формулы (1.3.83) и (1.3.88), соответственно), для компонент вектора Герца (1.3.92) найдем

$$\begin{pmatrix} \Pi_{x\omega}^{(v)} \\ \Pi_{z\omega}^{(v)} \end{pmatrix} \cong \frac{2q\tilde{\kappa}}{ck_0^2} \begin{pmatrix} R_x(\xi_{s+}) \\ R_z(\xi_{s+}) \end{pmatrix} \frac{\exp\left(ik_0\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (1.3.93)$$

Напомним, что данную формулу мы получили, применив метод перевала к каждому из двух интегралов в выражении для вектора Герца (1.3.13). Стоит отметить, что тот же результат можно получить, если применить метод перевала непосредственно к двойному интегралу в (1.3.13) [106].

Полученная асимптотика (1.3.93) справедлива при $k_0\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \gg 1$. Коэффициенты R_x и R_z в данном выражении зависят от седловой точки ξ_{s+} через компоненты волнового вектора (k_x, k_y, k_{z0}) . Согласно формулам (1.3.67) и (1.3.79), данные компоненты в точке ξ_{s+} при $\omega > 0$ равны

$$k_x = k_0 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad k_y = k_0 \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad k_{z0} = k_0 \frac{|z|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (1.3.94)$$

Теперь для наглядности полученных формул перейдем в сферическую систему координат (R, θ, φ) по правилу

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \cos \varphi, \\ y = R \sin \theta \sin \varphi, \\ z = R \cos \theta = -R |\cos \theta|, \end{cases} \quad (1.3.95)$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, а угол θ принадлежит промежутку $(\pi/2, \pi)$, поскольку мы рассматриваем полупространство $z < 0$ (рис.1.12). Тогда для компонент волнового вектора (1.3.94) получим

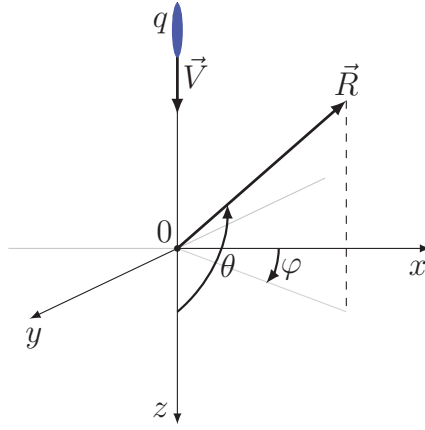
$$\begin{cases} k_x = k_0 \sin \theta \cos \varphi, \\ k_y = k_0 \sin \theta \sin \varphi, \\ k_{z0} = k_0 |\cos \theta|. \end{cases} \quad (1.3.96)$$

Далее, используя выражения для компонент вектора Герца (1.3.93), по известным формулам (1.2.18) получим Фурье-образы компонент электромагнитного поля в сферической системе координат (R, θ, φ)

$$E_{R\omega}^{(v)} = H_{R\omega}^{(v)} = 0, \quad \begin{cases} E_{\theta\omega}^{(v)} \\ E_{\varphi\omega}^{(v)} \end{cases} = \begin{cases} H_{\varphi\omega}^{(v)} \\ -H_{\theta\omega}^{(v)} \end{cases} \cong \frac{2q\tilde{\kappa}}{c} \begin{cases} R_x \cos \theta \cos \varphi - R_z \sin \theta \\ R_x \sin \varphi \end{cases} \frac{\exp(ik_0 R)}{R}. \quad (1.3.97)$$

Напомним, что полученная асимптотика применима при $k_0 R \gg 1$. Коэффициенты R_x и R_z здесь определены соотношениями (1.3.25) и (1.3.26), где компоненты волнового вектора (k_x, k_y, k_{z0}) зависят от углов сферической системы координат (R, θ, φ) согласно (1.3.96). Учитывая это обстоятельство, выражения для коэффициентов можем записать в виде

$$R_x = \frac{i\beta \sin \theta \cos \varphi |\cos \theta| (1 + \beta |\cos \theta|) F_1^{(v)}}{(1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) (1 - \beta^2 \cos^2 \theta) F_0^{(v)}}, \quad R_z = \frac{\beta |\cos \theta| F_2^{(v)}}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta) F_0^{(v)}}. \quad (1.3.98)$$

Рис.1.12. Сферическая система координат (R, θ, φ) .

Функции $F_0^{(v)}$, $F_1^{(v)}$ и $F_2^{(v)}$ в формулах (1.3.98) содержат слагаемые нулевого и первого порядка малости относительно малого параметра $k_0 d \sim k_0 \delta \ll 1$ и сложным образом зависят от углов θ и φ

$$F_0^{(v)} = |\cos \theta| - ik_0 d_0 (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) - ik_0 \delta [\cos^2 \theta - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi)], \quad (1.3.99)$$

$$F_1^{(v)} = -k_0 d_0 (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) + k_0 \delta [\sin^2 \theta \sin^2 \varphi + (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi)^2], \quad (1.3.100)$$

$$F_2^{(v)} = 1 + i\beta k_0 d_0 (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) + ik_0 \delta [(1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi)(\beta \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - |\cos \theta|) - \beta \sin^2 \theta \sin^2 \varphi]. \quad (1.3.101)$$

Напомним, что параметр гофры $d_0 = d_2 d_3 / d$, где ширина канавок d_2 , глубина d_3 и период d изображены на рис.1.8. Наконец, подставив (1.3.98) в (1.3.97), для компонент поля получим

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} E_{\theta \omega}^{(v)} \\ E_{\varphi \omega}^{(v)} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} H_{\varphi \omega}^{(v)} \\ -H_{\theta \omega}^{(v)} \end{Bmatrix} \cong -\frac{2q\tilde{\kappa}}{c} \frac{\beta |\cos \theta| \sin \theta}{(1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) (1 - \beta^2 \cos^2 \theta) F_0^{(v)}} \\ &\times \begin{Bmatrix} i |\cos \theta| \cos^2 \varphi (1 + \beta |\cos \theta|) F_1^{(v)} + (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) F_2^{(v)} \\ -i \sin \varphi \cos \varphi (1 + \beta |\cos \theta|) F_1 \end{Bmatrix} \frac{\exp(ik_0 R)}{R}. \end{aligned} \quad (1.3.102)$$

Выражения (1.3.102) представляют собой Фурье-образы компонент поля объемной волны. Отметим, что генерация объемного переходного излучения в данной задаче выглядит вполне естественно, так как пучок заряженных частиц пересекает проводящую планарную структуру. В силу соотношений (1.3.99)-(1.3.101), определяющих функции $F_0^{(v)}$, $F_1^{(v)}$ и $F_2^{(v)}$, компоненты поля объемной волны (1.3.102) содержат слагаемые нулевого и первого порядка малости относительно малого параметра $k_0 d$. Основные слагаемые (нулевой порядок) описывают поле заряда, пролетающего сквозь гладкую идеально проводящую поверхность. “Гофрирование” поверхности приводит лишь к появлению малых поправок (первый порядок).

Покажем теперь, что при замене гофрированной поверхности на гладкую формулы (1.3.102) переходят в известные выражения для компонент электромагнитного поля переходного излучения заряда, влетающего из вакуума в гладкую идеально проводящую поверхность. Для простоты рассмотрим точечный заряд. В этом случае профиль пучка $\kappa(z - Vt) = \delta(z - Vt)$, а его Фурье-образ $\tilde{\kappa} = 1/2\pi$ (см. формулу (1.2.11)). При переходе к гладкой поверхности достаточно положить параметры гофры равными нулю, то есть $d_0 = \delta = 0$. Тогда для функций $F_0^{(v)}$, $F_1^{(v)}$ и $F_2^{(v)}$, заданных выражениями (1.3.99)-(1.3.101), имеем

$$F_0^{(v)} = |\cos \theta|, \quad F_1^{(v)} = 0, \quad F_2^{(v)} = 1. \quad (1.3.103)$$

Подставив (1.3.103) в (1.3.102), для компонент поля найдем

$$E_{\varphi\omega}^{(v)} = H_{\theta\omega}^{(v)} = 0, \quad E_{\theta\omega}^{(v)} = H_{\varphi\omega}^{(v)} \cong -\frac{q}{\pi c} \frac{\beta \sin \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)} \frac{\exp(ik_0 R)}{R}. \quad (1.3.104)$$

Формулы (1.3.104) представляют собой известные выражения для компонент поля переходного излучения, генерируемого точечным зарядом при влете заряда из вакуума в идеально проводящую плоскость [63].

Рассмотрим полную энергию объемного излучения движущегося заряда, проходящую за все время через сферу радиуса R с центром в начале координат:

$$W^{(v)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \oint_R \vec{S}^{(v)} d\vec{\Omega} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_R \vec{S}^{(v)} d\vec{\Omega}, \quad (1.3.105)$$

где $\vec{S}^{(v)} = c(4\pi)^{-1} [\vec{E}^{(v)}, \vec{H}^{(v)}]$ - вектор Умова-Пойнтинга, $d\vec{\Omega}$ - элемент поверхности сферы с нормалью, направленной наружу. В последнем выражении в (1.3.105) подразумевается интегрирование по полусфере в одной из областей ($z > 0$ или $z < 0$). Переход от интегрирования по сфере к интегрированию по полусфере объясняется тем, что поле излучения обладает свойством симметрии относительно плоскости $z = 0$, вследствие чего в полупространства $z > 0$ и $z < 0$ излучается одинаковая энергия. Ниже мы будем рассматривать полупространство $z < 0$.

Согласно выражениям (1.3.102), вектор Умова-Пойнтинга имеет единственную компоненту вдоль радиус-вектора:

$$S_R^{(v)} = \frac{c}{4\pi} \left(E_{\theta}^{(v)} H_{\varphi}^{(v)} - H_{\theta}^{(v)} E_{\varphi}^{(v)} \right) = \frac{c}{4\pi} \left[\left(E_{\theta}^{(v)} \right)^2 + \left(E_{\varphi}^{(v)} \right)^2 \right]. \quad (1.3.106)$$

Тогда выражение для полной энергии (1.3.105) примет вид

$$W^{(v)} = \frac{cR^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \sin \theta \left[\left(E_{\theta}^{(v)} \right)^2 + \left(E_{\varphi}^{(v)} \right)^2 \right]. \quad (1.3.107)$$

Рассмотрим отдельно интегрирование по времени в выражении (1.3.107). Запишем соответствующие компоненты поля через их Фурье-образы $E_{\theta,\varphi}^{(v)} = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\theta,\varphi\omega}^{(v)} \exp(-i\omega t) d\omega$. Тогда получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \left[\left(E_{\theta}^{(v)} \right)^2 + \left(E_{\varphi}^{(v)} \right)^2 \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega E_{\theta\omega}^{(v)} \exp(-i\omega t) \right. \\ \left. \times \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' E_{\theta\omega'}^{(v)} \exp(-i\omega' t) + \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega E_{\varphi\omega}^{(v)} \exp(-i\omega t) \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' E_{\varphi\omega'}^{(v)} \exp(-i\omega' t) \right\}. \quad (1.3.108)$$

Интегрирование по времени сводится к δ -функции, вследствие чего тройные интегралы в (1.3.108) могут быть преобразованы к однократным

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \left[\left(E_{\theta}^{(v)} \right)^2 + \left(E_{\varphi}^{(v)} \right)^2 \right] = 2\pi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega E_{\theta\omega}^{(v)} E_{\theta-\omega}^{(v)} + \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega E_{\varphi\omega}^{(v)} E_{\varphi-\omega}^{(v)} \right). \quad (1.3.109)$$

Из вещественности компонент поля вытекает, что для вещественных частот Фурье-образы компонент удовлетворяют равенству $E_{\theta,\varphi-\omega}^{(v)} = \left(E_{\theta,\varphi\omega}^{(v)} \right)^*$, где $()^*$ - оператор комплексного сопряжения. С учетом данного свойства интегрирование по ω в (1.3.109) можно свести к положительной полуоси:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \left[\left(E_{\theta}^{(v)} \right)^2 + \left(E_{\varphi}^{(v)} \right)^2 \right] = 4\pi \int_0^{+\infty} d\omega \left(|E_{\theta\omega}^{(v)}|^2 + |E_{\varphi\omega}^{(v)}|^2 \right). \quad (1.3.110)$$

Подставив (1.3.110) в (1.3.107), для полной энергии получим

$$W^{(v)} = 2 \int_0^{+\infty} d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \sin \theta W_{\omega\Omega}^{(v)}, \quad (1.3.111)$$

где $W_{\omega\Omega}^{(v)}$ - спектрально-угловая плотность энергии, то есть энергия, излучаемая в единичном интервале частот в единичный телесный угол:

$$W_{\omega\Omega}^{(v)}(\theta, \varphi) = cR^2 \left(|E_{\theta\omega}^{(v)}|^2 + |E_{\varphi\omega}^{(v)}|^2 \right). \quad (1.3.112)$$

Напомним, что в случае движения пучка сквозь гофрированную поверхность, Фурье-образы компонент поля в (1.3.112) определяются выражениями (1.3.102). Если же заряд пролетает сквозь идеально проводящую плоскость, то компоненты поля заданы формулами (1.3.104).

На рис.1.13 представлены зависимости спектрально-угловой плотности энергии $W_{\omega\Omega}^{(v)}$ от угла θ в случае гофрированной поверхности и в случае идеально проводящей плоскости при различных значениях угла φ и скорости пучка β . Графики приведены для области $z < 0$, то есть $90^\circ < \theta < 180^\circ$.

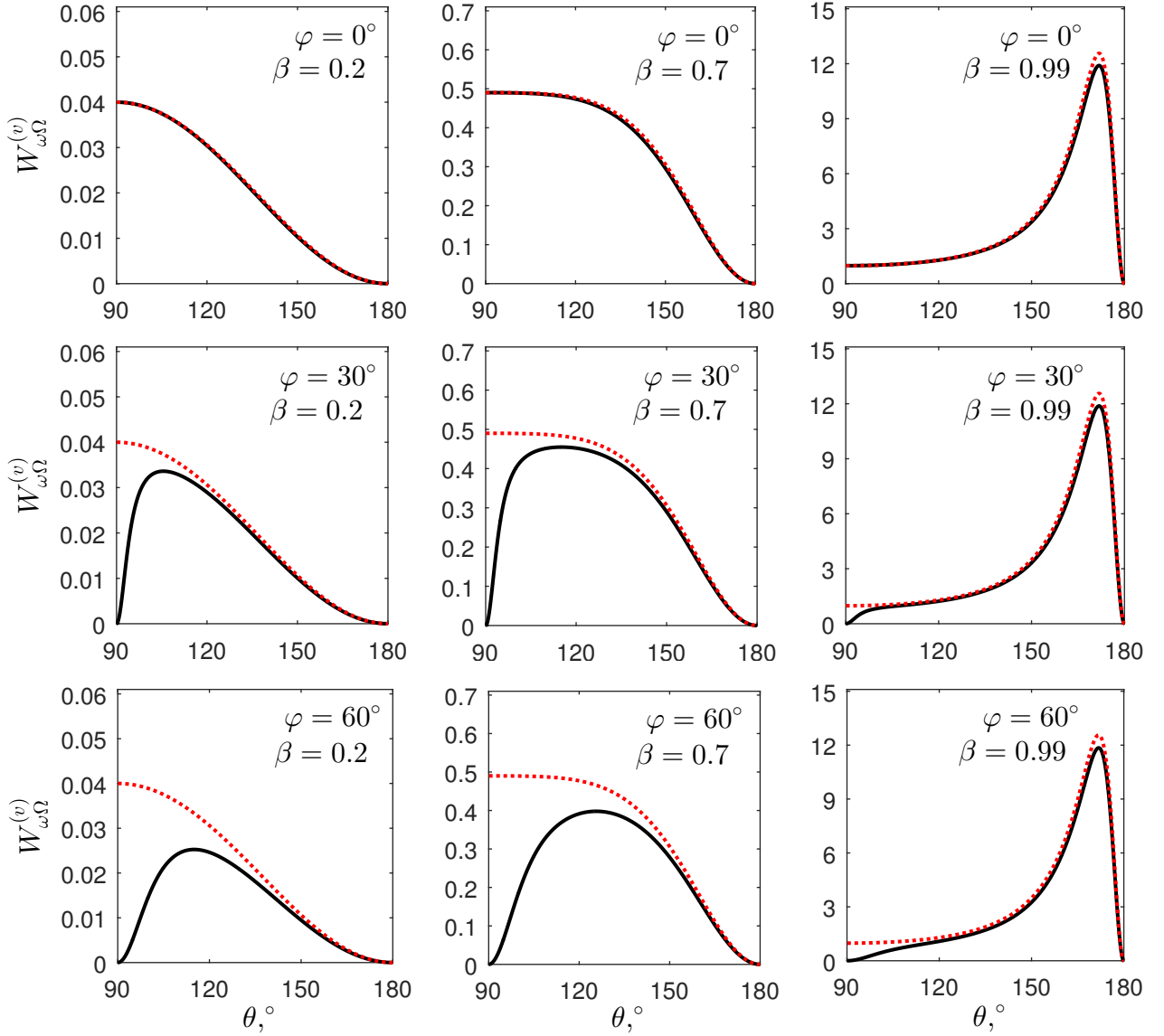


Рис.1.13. Зависимость спектрально-угловой плотности энергии $W_{\omega\Omega}^{(v)}$ от угла θ в случае мелко-гофрированной поверхности (черные сплошные линии) и в случае идеального экрана (красные пунктирные линии). Полярный угол $\varphi = 0^\circ$ (верхний ряд), $\varphi = 30^\circ$ (средний ряд) и $\varphi = 60^\circ$ (нижний ряд). Скорость пучка $\beta = 0.2$ (левый столбец), $\beta = 0.7$ (средний столбец) и $\beta = 0.99$ (правый столбец). Длина волны $\lambda = 1$ см ($k_0 \cong 6.28$ см $^{-1}$). Параметры структуры: период и глубина гофрирования $d = d_3 = 0.1$ см, ширина канавок $d_2 = 0.05$ см. Плотность энергии нормирована на величину $4q^2|\tilde{\kappa}|^2/c$.

Из приведенных зависимостей следует, что при увеличении скорости пучка положение максимума излучения смещается в сторону бóльших значений θ , при этом значение максимума растет тем быстрее, чем больше β . При ультррелятивистском движении заряда максимальное излучение имеется в направлении, близком к линии движения заряда. Данные закономерности характерны и для гладкого проводящего экрана.

Сравнивая рисунки для разных углов φ , видим, что обычно наибольшее значение спект-

рально-угловой плотности энергии $W_{\omega\Omega}^{(v)}$ достигается в плоскости $\varphi = 0$, то есть в направлении гофрирования (графики в верхнем ряду). С ростом φ значение $W_{\omega\Omega}^{(v)}$ в максимуме уменьшается, если скорость пучка заметно отличается от скорости света ($\beta = 0.2$ и $\beta = 0.7$, графики в левом и среднем столбцах, соответственно). В ультрарелятивистском режиме движения заряда максимальное значение $W_{\omega\Omega}^{(v)}$ не меняется при изменении угла φ ($\beta = 0.99$, графики в правом столбце).

Отметим, что при увеличении длины волны λ диаграмма направленности объемного излучения в случае гофрированной поверхности стремится к диаграмме направленности в случае идеального экрана и при $\lambda \rightarrow \infty$ полностью совпадает с ней (в этой ситуации черные сплошные линии на рис.1.13 переходят в красные пунктирные линии). Это связано с тем, что с ростом λ уменьшается малый параметр $k_0 d_0 = 2\pi d_0/\lambda$ (и $k_0 \delta$), стоящий в выражениях (1.3.102) (напомним, что $d_0 = d_2 d_3/d$). Таким образом, при $\lambda \rightarrow \infty$ ($k_0 d_0 \rightarrow 0$ и $k_0 \delta \rightarrow 0$) формулы (1.3.102) переходят в выражения (1.3.104). В частности, из рис.1.13 следует, что при значении параметра $k_0 d_0 \cong 0.3$ ($k_0 \delta \cong 0.03$) в плоскости $\varphi = 0^\circ$ объемное излучение заряда, пролетающего сквозь гофру, практически совпадает с объемным излучением заряда в случае идеального экрана (графики в верхнем ряду). Тот же вывод можно сделать при анализе зависимостей в среднем ($\varphi = 30^\circ$) и нижнем ($\varphi = 60^\circ$) рядах для больших значений угла θ .

1.3.4. Поверхностные волны

Ранее мы провели асимптотический анализ внутреннего интеграла в (1.3.13). Для этого мы перешли к новой переменной χ по правилу (1.3.38) и рассмотрели отдельно две ситуации: $|k_y| > k_0$ и $|k_y| < k_0$. В результате, было показано, что интеграл по χ , идущий вдоль контура интегрирования, определяется вкладами полюсов $\pm\chi_0$ и $\pm\chi_1$, а также вкладом контура наискорейшего спуска Γ_χ^* (см. выражение (1.3.58)). Интеграл, идущий вдоль КНС Γ_χ^* , был детально исследован. Теперь же подробно рассмотрим вклады полюсов $\pm\chi_0$ и $\pm\chi_1$.

Согласно (1.3.58), на комплексной плоскости χ данные вклады определяются вычетами подынтегральных функций. Заметим, что соответствующие вычеты могут быть вычислены и на плоскости k_x . В этом случае компоненты Фурье-образа вектора Герца определены формулой (1.3.13), а полюсы $\pm k_{x0}$ и $\pm k_{x1}$ заданы соотношениями (1.3.29) и (1.3.31), соответственно. Из выражения (1.3.31) следует, что полюсы $\pm k_{x1}$ являются чисто мнимыми величинами. Вклад данных полюсов приведет к экспоненциальному убыванию поля в направлении оси x , то есть данный вклад не является полем излучения. Поэтому в дальнейшем мы рас-

смотрим только вклад полюсов $\pm k_{x0}$. Согласно выражению (1.3.29), полюсы $\pm k_{x0}$ являются чисто вещественными величинами. Ниже мы покажем, что вклады данных полюсов в интегралы (1.3.13) представляют собой поверхностные волны, распространяющиеся в плоскости поверхности.

Таким образом, Фурье-образ вектора Герца “свободного” поля при условии $\sqrt{(k_0^2 - k_y^2)(x^2 + z^2)} \gg 1$ можно приближенно представить в виде

$$\vec{\Pi}_\omega^{(r)} \cong \vec{\Pi}_\omega^{(v)} + \vec{\Pi}_\omega^{(s)}, \quad (1.3.113)$$

где $\vec{\Pi}_\omega^{(v)}$ описывает объемную часть излучения (вклад седловой точки, при $|k_y| < k_0$), детально исследованную ранее, а $\vec{\Pi}_\omega^{(s)}$ представляет собой вклады полюсов $\pm k_{x0} = \pm k_0$. В результате, учитывая выражения (1.3.13), для вектора $\vec{\Pi}_\omega^{(s)} + \vec{\Pi}_{x\omega}^{(s)} \vec{e}_x + \vec{\Pi}_{z\omega}^{(s)} \vec{e}_z$ можем записать

$$\begin{pmatrix} \Pi_{x\omega}^{(s)} \\ \Pi_{z\omega}^{(s)} \end{pmatrix} = \mp \frac{2q\tilde{\kappa}}{ck_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik_y y) dk_y \operatorname{Res}_{k_x = \pm k_{x0}} \left(\begin{pmatrix} R_x \\ R_z \end{pmatrix} \frac{\exp(ik_x x + ik_{z0}|z|)}{k_{z0}} \right), \quad (1.3.114)$$

где верхний знак соответствует положительным значениям x , а нижний знак - отрицательным значениям x . Сосчитав вычеты в выражениях (1.3.114), получим

$$\begin{aligned} \Pi_{z\omega}^{(s)} &= 0, \quad \Pi_{x\omega}^{(s)} = \operatorname{sgn}(x) \frac{iq\tilde{\kappa}\beta}{c} \delta \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \frac{i\beta|k_y| + k_0}{k_y^2 + k_0^2\beta^{-2}} \exp(ik_0|x| + ik_y y - |k_y||z|) \\ &= 2 \operatorname{sgn}(x) \frac{iq\tilde{\kappa}\beta}{c} \delta \int_0^{+\infty} dk_y \frac{i\beta k_y + k_0}{k_y^2 + k_0^2\beta^{-2}} \cos(k_y y) \exp(ik_0|x| - k_y|z|). \end{aligned} \quad (1.3.115)$$

Равенство нулю компоненты $\Pi_{z\omega}^{(s)}$ объясняется тем, что коэффициент R_z не имеет полюсов $\pm k_{x0} = \pm k_0$ (см. выражение (1.3.26)).

По известным формулам (1.2.18) перейдем от вектора Герца (1.3.115) к Фурье-образам компонент электромагнитного поля $E_{x,y,z\omega}^{(s)}$ и $H_{x,y,z\omega}^{(s)}$. Тогда для компонент поля $E_{x,y,z}^{(s)}$ и $H_{x,y,z}^{(s)}$ получим

$$\begin{aligned} E_x^{(s)} &= H_x^{(s)} = 0, \\ \begin{pmatrix} E_y^{(s)} \\ E_z^{(s)} \end{pmatrix} &= \operatorname{sgn}(x) \begin{pmatrix} H_z^{(s)} \\ -H_y^{(s)} \end{pmatrix} \\ &= 2q\beta\delta \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 k_0 \tilde{\kappa} \exp[ik_0(|x| - ct)] \int_0^{+\infty} dk_y \frac{k_y(i\beta k_y + k_0)}{k_y^2 + k_0^2\beta^{-2}} \begin{pmatrix} \sin(k_y y) \\ -\cos(k_y y) \end{pmatrix} \exp(-k_y|z|). \end{aligned} \quad (1.3.116)$$

Подынтегральные функции в (1.3.116) экспоненциально убывают с ростом $|z|$, то есть в направлении, ортогональном плоскости поверхности. Ввиду наличия экспоненты

$\exp[ik_0(|x| - ct)]$, мы можем заключить, что данная волна распространяется вдоль канавок гофры со скоростью света c . Отметим также, что выражения (1.3.116) пропорциональны малому параметру $k_0\delta$, откуда следует, что при переходе к гладкой поверхности ($\delta \rightarrow 0$) компоненты поля стремятся к нулю, то есть поверхностная волна не возбуждается, как и следовало ожидать.

Дальнейшее исследование интегралов (1.3.116) будем проводить численно. Рассмотрим два вида пучков: с гауссовым и “прямоугольным” распределением заряда. Напомним, что профиль пучка определяется функцией $\kappa(\zeta)$, а ее Фурье-образ $\tilde{\kappa}$ - формулой (1.2.11). Для гауссова пучка величина $\kappa_{gaus}(\zeta)$ и ее Фурье-образ $\tilde{\kappa}_{gaus}$ заданы соотношениями (1.2.91). В случае “прямоугольного” пучка выражения для $\kappa_{rect}(\zeta)$ и $\tilde{\kappa}_{rect}$ можно записать в виде

$$\kappa_{rect}(\zeta) = \frac{\Theta(\sigma - |\zeta|)}{2\sigma}, \quad \tilde{\kappa}_{rect} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(k_0\sigma/\beta)}{k_0\sigma/\beta}, \quad (1.3.117)$$

где σ - половина длины пучка, а $\Theta(\sigma - |\zeta|)$ - функция Хевисайда.

На рис.1.14 представлены зависимости компоненты поля поверхностной волны $E_z^{(s)}$ от координаты z (верхний ряд), y (средний ряд) и $|x| - ct$ (нижний ряд) для гауссова пучка (1.2.91). На рис.1.15 данные зависимости представлены для пучка “прямоугольной” формы (1.3.117). Видно, что компонента $E_z^{(s)}$ быстро убывает с увеличением $|z|$. Данный факт подтверждает, что выражения (1.3.116) представляют собой компоненты электромагнитного поля поверхностной волны. Зависимость от координаты y показывает, что компонента $E_z^{(s)}$ имеет резкий максимум при $y = 0$ и быстро убывает при увеличении $|y|$, то есть в направлении, перпендикулярном канавкам гофры. Графики в нижних рядах демонстрируют зависимость $E_z^{(s)}$ от “смещенной” координаты $|x| - ct$, откуда следует, что поверхностная волна представляет собой локализованный импульс, распространяющийся вдоль канавок гофры со скоростью света. Также из рис.1.14 и рис.1.15 видно, что компонента $E_z^{(s)}$ убывает при увеличении длины пучка 2σ и при уменьшении его скорости β . Отметим, что в данной задаче отсутствует пороговое значение скорости, ниже которого поверхностная волна не возбуждается (в отличие от задачи, исследованной в параграфе 1.2, где было показано, что поверхностная волна генерируется только ультрарелятивистским пучком).

Приведенные на рис.1.14 и рис.1.15 зависимости ясно показывают, что поле поверхностной волны содержит информацию о распределении заряда в пучке и его размере, то есть генерируемое излучение представляет интерес для диагностики пучков. Если скорость заряда равна скорости света в вакууме ($\beta = 1$), длина импульса соответствует длине пучка 2σ (графики в нижнем ряду). С уменьшением скорости заряда длина импульса увеличивается, то есть становится больше, чем продольный размер пучка. Структура импульса также отра-

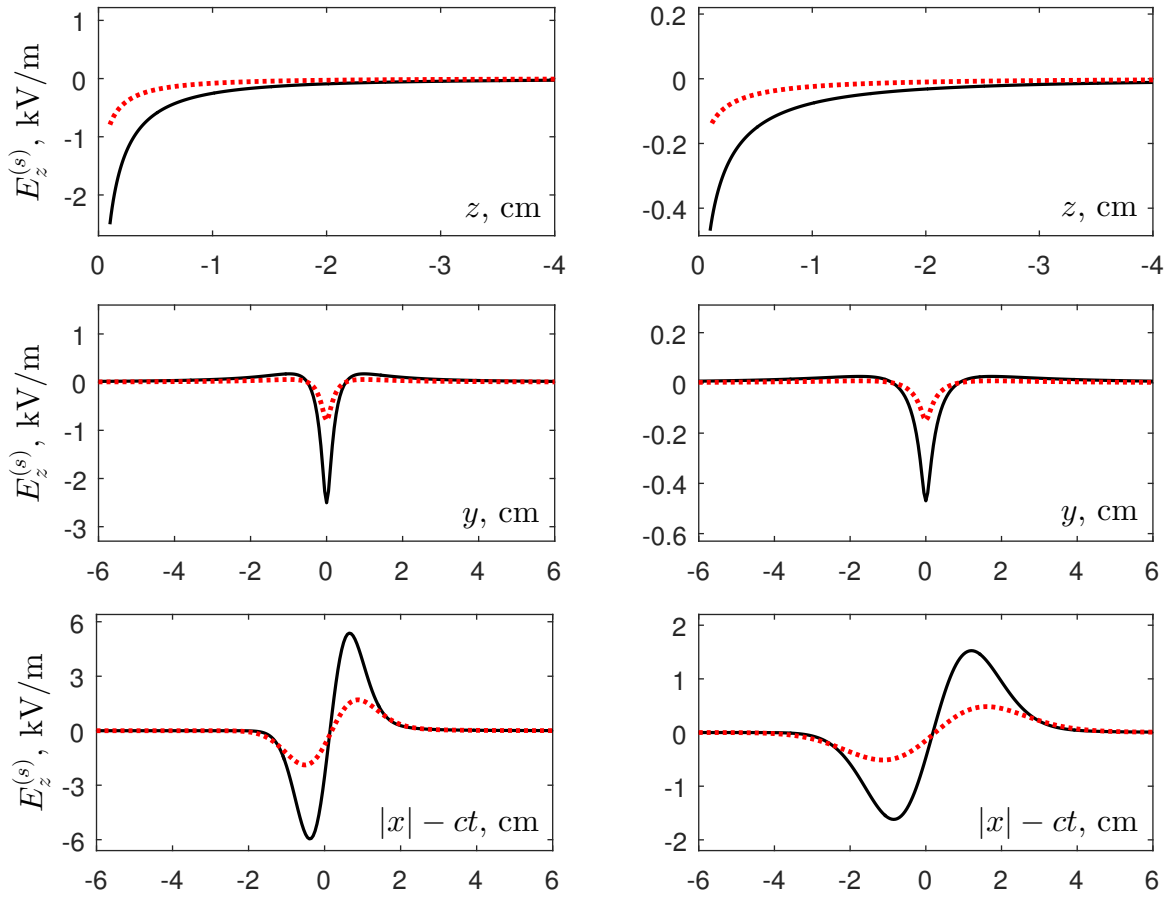


Рис.1.14. Зависимость компоненты поля поверхностной волны $E_z^{(s)}$ от координаты z (верхний ряд), y (средний ряд) и $|x| - ct$ (нижний ряд) для гауссова пучка. Параметры пучка: заряд $q = 1$ нКл; скорость $\beta = 1$ (черные сплошные линии) и $\beta = 0.75$ (красные пунктирные линии); длина $2\sigma = 1$ см (левый столбец) и $2\sigma = 2$ см (правый столбец). Параметры структуры: период и глубина гофрирования $d = d_3 = 0.1$ см, ширина канавок $d_2 = 0.05$ см. Значения координат: $y = 0$ см, $|x| = ct$ (верхний ряд); $z = -0.1$ см, $|x| = ct$ (средний ряд); $z = -0.1$ см, $y = 0$ см (нижний ряд). Величина $E_z^{(s)}$ приведена в системе СИ (кВ/м).

жает форму (профиль) пучка. Это хорошо видно в случае “прямоугольного” распределения заряда (графики в нижнем ряду на рис.1.15): импульс характеризуется двумя резкими максимумами, соответствующими “началу” и “концу” пучка, при этом между максимумами поле малó. Отметим также, что при увеличении длины пучка увеличивается ширина импульса в направлении y (перпендикулярно канавкам, графики в среднем ряду).

Подчеркнем, что представленные зависимости были получены для компоненты $E_z^{(s)}$. Однако все закономерности, выявленные при анализе данных зависимостей, относятся также и к компоненте $E_y^{(s)}$, выражение для которой совпадает с выражением для $E_z^{(s)}$ с точностью до замены $-\cos(k_y y)$ на $\sin(k_y y)$ (см. формулу (1.3.116)).

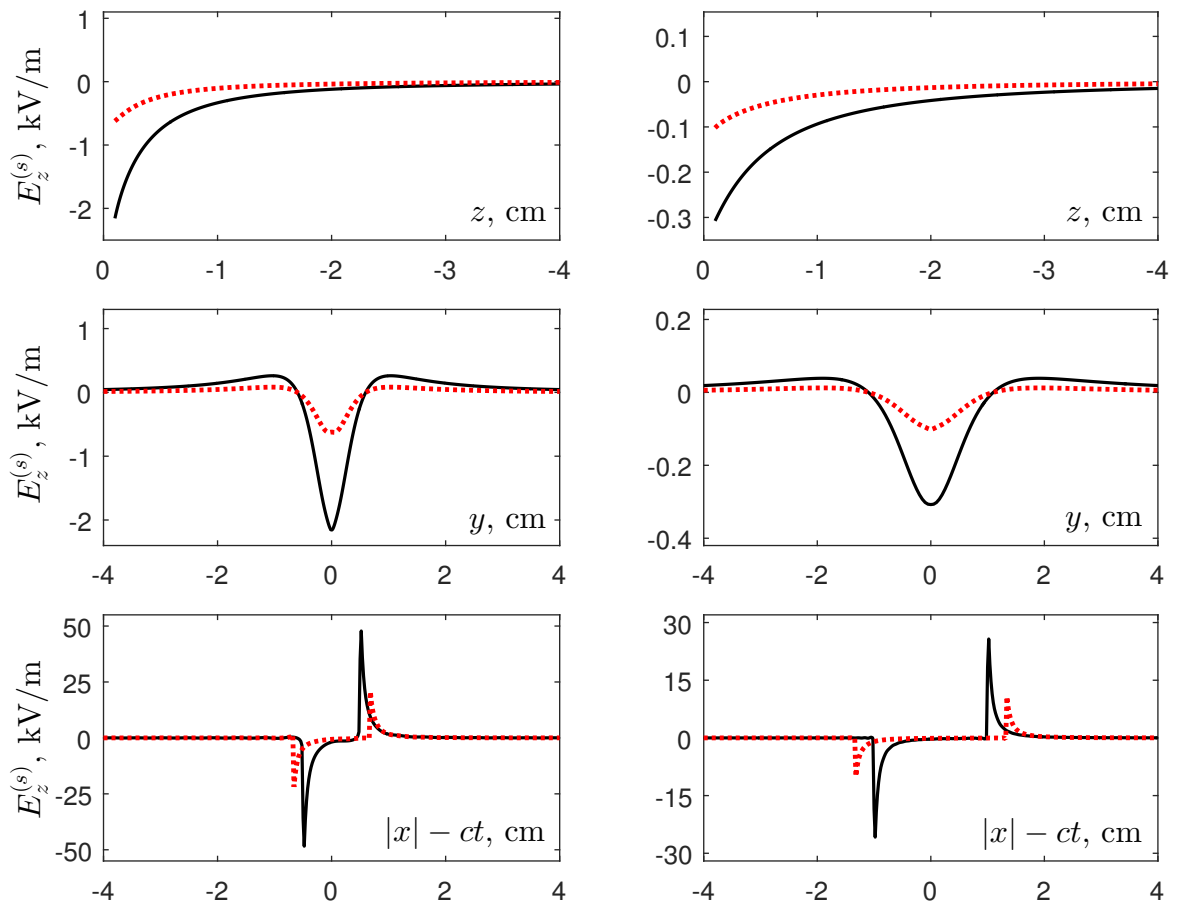


Рис.1.15. То же, что и на рис.1.14, для “прямоугольного” пучка.

1.4. Выводы

В данной главе было проведено аналитическое и численное исследование поля тонкого (в поперечном направлении) пучка заряженных частиц, движущегося равномерно и прямолинейно в присутствии безграничной планарной гофрированной структуры. Предполагалось, что период гофрирования существенно меньше длин рассматриваемых электромагнитных волн, что позволило применить метод эквивалентных граничных условий. Также подразумевалось, что глубина структуры имеет тот же порядок, что и период гофрировки, то есть рассматривался случай мелкого гофрирования.

Анализировались два варианта движения пучка относительно структуры:

- вдоль плоскости поверхности перпендикулярно направлению гофрирования;
- сквозь поверхность перпендикулярно ей.

Были найдены интегральные представления для компонент полного электромагнитного поля, поведение данного поля в дальней зоне исследовалось методами теории функций комплексного переменного.

В случае движения заряда вдоль гофрированной структуры было показано, что объемное излучение отсутствует, возбуждаются лишь две поверхностные волны, распространяющиеся без затухания вдоль плоскости поверхности в разные стороны от траектории пучка. Показано, что поверхностные волны генерируются только ультрарелятивистским пучком и представляют собой локализованные импульсы, содержащие информацию о размере пучка и о распределении заряда в нем. Приведены результаты расчета поля поверхностной волны для гауссова пучка. Рассмотрены потери энергии заряда (на единицу длины пути) и получено выражение для спектральной плотности потерь энергии на излучение поверхностных волн. Приведены графические зависимости спектральной плотности энергии излучения и проекции волнового вектора на направление гофрирования. Показано, в частности, что с ростом глубины гофрирования уменьшается длина поверхностной волны и растет спектральная плотность потерь энергии заряда. Также из полученных зависимостей следует, что гофрированная поверхность, состоящая из диафрагм, является наиболее эффективной системой для генерации поверхностного излучения.

В случае пересечения зарядом гофрированной поверхности было показано, что волновое поле пучка состоит как из поверхностных, так и объемных волн. Найдены Фурье-образы компонент электромагнитного поля объемной волны. Из полученных формул следует, что

объемная часть излучения, как правило, мало отличается от излучения в случае гладкого экрана: замена идеально проводящей плоскости на гофрированную поверхность обычно приводит лишь к появлению малых поправок в выражениях для компонент поля. Более детально был рассмотрен эффект генерации зарядом поверхностного излучения. Получены выражения для компонент поля поверхностной волны (в виде интегралов Фурье). Численный расчет поля проводился для двух видов пучков, вытянутых вдоль направления движения: с гауссовым и “прямоугольным” распределением заряда. В результате было показано, что пучок возбуждает две поверхностные волны, которые представляют собой локализованные импульсы, уходящие в разные стороны от траектории движения пучка. Поверхностные волны являются беспороговыми по скорости пучка (в отличие от случая, когда заряд движется вдоль структуры), распространяются вдоль плоскости поверхности со скоростью света без затухания, а по распределению поля поверхностной волны можно судить о профиле пучка и его длине.

Глава 2. Излучение пучка заряженных частиц, движущегося в присутствии плоской глубокогофрированной структуры с малым периодом

Данная глава посвящена исследованию излучения пучка заряженных частиц, движущегося в присутствии идеально проводящей планарной глубокогофрированной поверхности. Как и в предыдущей главе, мы рассмотрим два варианта равномерного прямолинейного движения заряда: вдоль плоскости структуры перпендикулярно направлению гофрирования и сквозь структуру (перпендикулярно ей). Напомним, что в работе анализируется излучение на длинах волн, существенно превышающих период структуры. В этом случае аналитическое решение задачи может быть получено с помощью эквивалентных граничных условий.

2.1. Модель глубокогофрированной периодической структуры и метод эквивалентных граничных условий

Исследуемая структура изображена на рис.2.1. Предполагается, что период гофрированной поверхности d много меньше характерных длин рассматриваемых электромагнитных волн λ :

$$d \ll \lambda.$$

Как известно, в этом случае гофру можно заменить гладкой поверхностью (в плоскости $y = 0$), на которой выполняются эквивалентные граничные условия (ЭГУ).

В данной главе мы предполагаем, что поверхность является глубокогофрированной, то есть глубина гофры d_3 имеет тот же порядок величины, что и обратное волновое число [15]:

$$k_0 d_3 \sim 1, \tag{2.1.1}$$

где $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda$.

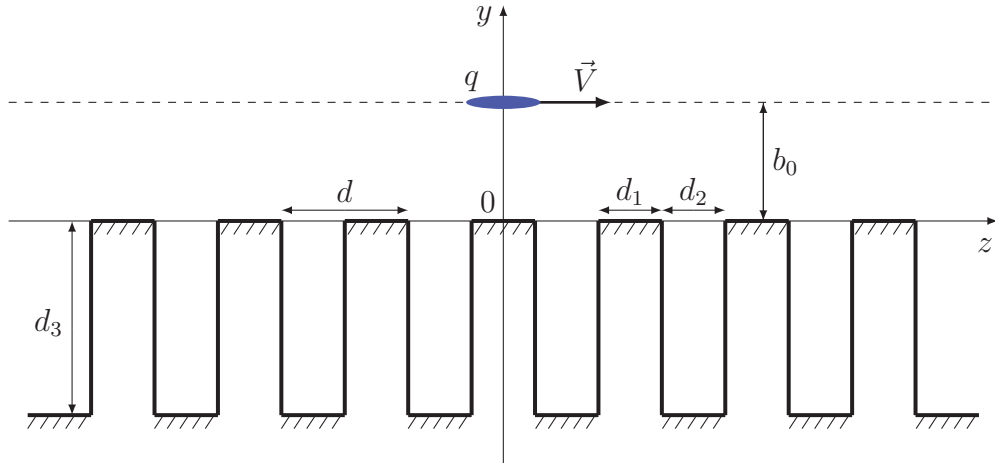


Рис.2.1. Движение заряда вдоль глубокогоффрированной поверхности (ось x направлена вдоль канавок гофры, “от нас”).

В случае идеально проводящей глубокогоффрированной структуры, изображенной на рис.2.1, ЭГУ для Фурье-образов электрического и магнитного полей записываются в виде [15]

$$E_z \omega|_{y=0} = \eta H_x \omega|_{y=0}, \quad E_x \omega|_{y=0} = 0. \quad (2.1.2)$$

Как следует из ЭГУ, гофрированная поверхность имеет идеальную проводимость в направлении “ x ”, то есть вдоль канавок гофры. Импеданс η в (2.1.1) определяется формулой [15]

$$\eta = i\eta_0, \quad \eta_0 = \frac{d_2}{d} \frac{\operatorname{tg}(k_0 d_3)}{1 - k_0 d l \operatorname{tg}(k_0 d_3)}. \quad (2.1.3)$$

Здесь l - параметр гофры, заданный выражением [15]

$$l = \frac{1}{2\pi} \left[(2 - \xi)^2 \ln(2 - \xi) - \xi^2 \ln \xi - 2(1 - \xi) \ln 4(1 - \xi) \right], \quad (2.1.4)$$

где $\xi = d_1/d$. Зависимость $l(\xi)$ изображена на рис.2.2. Как видим, значения данного параметра много меньше единицы на всей области определения: $0 < l \lesssim 0.082$.

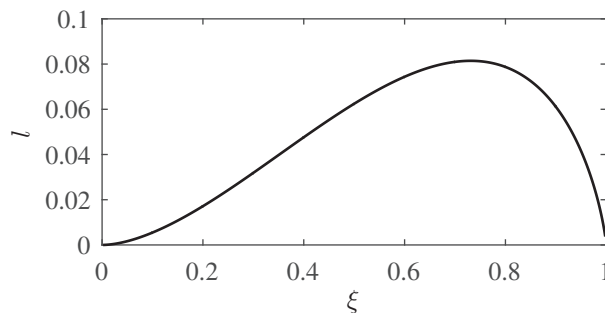


Рис.2.2. Зависимость $l(\xi)$.

Подчеркнем, что ЭГУ для глубокогоффрированной структуры имеют принципиальные отличия от ЭГУ для мелкой гофры, описание которых представлено в параграфе 1.1 главы 1. Как видим, в рассматриваемом приближении глубокогоффрированная структура характеризуется одним ненулевым импедансом (2.1.3), который может быть сколько угодно большим. Напомним, что в случае мелкой гофры длина волны существенно превышает как период, так и глубину гофрировки, а ЭГУ определяются двумя ненулевыми импедансами, каждый из которых является малым параметром задачи. Предельный переход от (2.1.2), (2.1.3) к (1.1.2), (1.1.3) осуществить невозможно, так как условия (2.1.2) не учитывают члены, которые становятся существенны в приближении мелкой гофры, когда $k_0 d_3 \ll 1$. Поэтому задачи, рассматриваемые в главах 1 и 2, не переходят одна в другую и требуют отдельного анализа.

2.2. Излучение пучка заряженных частиц, движущегося вдоль глубокогофрированной структуры

2.2.1. Общее решение

На рис.2.1 изображен пучок заряженных частиц, движущийся с постоянной скоростью $\vec{V} = c\beta\vec{e}_z$ вдоль глубокогофрированной поверхности перпендикулярно ее канавкам. Как и ранее, мы предполагаем, что пучок имеет бесконечно малые поперечные размеры и произвольное распределение заряда вдоль оси движения, то есть плотности его заряда и тока задаются выражениями (1.2.1).

Полное электромагнитное поле пучка определяется как сумма поля заряда в неограниченном вакууме (“вынужденное” поле, с индексом “ i ”) и поля, возникающего за счет гофрированной поверхности (“свободное” поле, с индексом “ r ”): $\vec{E} = \vec{E}^{(i)} + \vec{E}^{(r)}$, $\vec{H} = \vec{H}^{(i)} + \vec{H}^{(r)}$. Фурье-образы (по частоте и x -компоненте волнового вектора) компонент “вынужденного” и “свободного” полей задаются формулами (1.2.19)-(1.2.24) и (1.2.27)-(1.2.32), соответственно (подробнее см. параграф 1.2, пункт 1.2.1). Неизвестные коэффициенты R_x и R_z , стоящие в выражениях для “свободного” поля, можно найти, решив систему

$$\begin{cases} E_{z\omega,k_x}^{(i)} + E_{z\omega,k_x}^{(r)} = \eta \left(H_{x\omega,k_x}^{(i)} + H_{x\omega,k_x}^{(r)} \right) \\ E_{x\omega,k_x}^{(i)} + E_{x\omega,k_x}^{(r)} = 0, \end{cases} \quad (2.2.1)$$

вытекающую из граничных условий (2.1.2). В случае глубокогофрированной структуры мы получаем

$$R_x = -\frac{2\beta^{-1}k_0k_x\eta_0}{k_0\sqrt{k_x^2 + k_0^2\frac{1-\beta^2}{\beta^2}} + (k_x^2 - k_0^2)\eta_0}, \quad (2.2.2)$$

$$R_z = -\frac{k_0\sqrt{k_x^2 + k_0^2\frac{1-\beta^2}{\beta^2}} - (k_x^2 - k_0^2)\eta_0}{k_0\sqrt{k_x^2 + k_0^2\frac{1-\beta^2}{\beta^2}} + (k_x^2 - k_0^2)\eta_0}, \quad (2.2.3)$$

где η_0 - мнимая часть импеданса η (см. формулу (2.1.3)).

2.2.2. Исследование поля, возникающего за счет гофрированной поверхности

Исследование поля, “наведенного” гофрированной структурой, удобнее проводить, используя вектор Герца данного поля. Напомним, что Фурье-образы компонент вектора Герца “свобод-

ного” поля заданы соотношениями (1.2.36). Для удобства выпишем их снова:

$$\begin{pmatrix} \Pi_{x\omega}^{(r)} \\ \Pi_{z\omega}^{(r)} \end{pmatrix} = -\frac{q\tilde{\kappa}}{ck_0} \exp\left(i\frac{k_0}{\beta}z\right) \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \begin{pmatrix} R_x \\ R_z \end{pmatrix} \frac{\exp[i\Phi(k_x)]}{k_{y0}}, \quad (2.2.4)$$

где $\tilde{\kappa}$ - Фурье-образ профиля пучка, заданный выражением (1.2.11), $\Phi(k_x) = k_x x + k_{y0}(y + b_0)$, $k_{y0} = i\sqrt{k_x^2 + k_0^2\beta^{-2}(1 - \beta^2)}$, а коэффициенты R_x и R_z определяются по формулам (2.2.2) и (2.2.3), соответственно.

Подынтегральная функция в (2.2.4) имеет ряд особенностей. Во-первых, это точки ветвления функции $k_{y0}(k_x)$, то есть $k_x = \pm k_{xb} = \pm ik_0\beta^{-1}\sqrt{1 - \beta^2}$. Напомним, что на вещественной оси функция $k_{y0}(k_x)$ определена правилом $\text{Im } k_{y0} > 0$. Данное правило можно распространить на весь “верхний” лист римановой поверхности, если провести разрезы по мнимой оси на $\pm i\infty$. Во-вторых, особенностями подынтегральной функции в (2.2.4) являются нули знаменателя в выражениях для коэффициентов R_x и R_z , то есть решения соответствующего уравнения:

$$k_0\sqrt{k_x^2 + k_0^2\frac{1 - \beta^2}{\beta^2}} + (k_x^2 - k_0^2)\eta_0 = 0. \quad (2.2.5)$$

Дисперсионное уравнение (2.2.5) имеет два точных решения

$$k_x = \pm k_{x0} = \pm k_0 \sqrt{1 - \frac{\text{sgn}(\eta_0)}{2\eta_0^2} \left(\sqrt{1 + \frac{4\eta_0^2}{\beta^2}} - \text{sgn}(\eta_0) \right)}. \quad (2.2.6)$$

Как следует из (2.2.6), полюсы $\pm k_{x0}$ являются вещественными величинами в случае, когда выражение под большим радикалом положительно. Нетрудно показать, что условие вещественности полюсов имеет вид

$$\beta > \frac{1}{\sqrt{1 + \eta_0^2}}. \quad (2.2.7)$$

Если неравенство (2.2.7) не выполнено, то есть скорость заряда меньше некоторого предельного значения, полюсы $\pm k_{x0}$ являются мнимыми величинами. Вклад таких полюсов не представляет интереса, так как будет экспоненциально убывать в направлении x . Поэтому далее мы будем считать, что полюсы (2.2.6) вещественны, то есть условие (2.2.7) выполнено. Подчеркнем, что полюсы $\pm k_{x0}$, точки ветвления $\pm k_{xb}$, разрезы и контур интегрирования расположены на комплексной плоскости k_x так, как это показано на рис.1.3.

Асимптотическое исследование интегралов (2.2.4) будем проводить с помощью метода перевала [106]. Процедура исследования аналогична той, что использовалась в параграфе 1.2, поэтому отметим здесь только основные моменты. Сначала мы делаем замену (1.2.51),

то есть переходим к новой переменной интегрирования χ . Далее, из уравнения (1.2.53) находим седловую точку, лежащую на “верхнем” листе. Контур наибоыстрейшего спуска (КНС) проходит через данную точку и удовлетворяет условиям (1.2.60), откуда следует, что КНС является прямой линией, параллельной вещественной оси на комплексной плоскости χ . Расположение полюсов, контура интегрирования, седловой точки и КНС на данной плоскости показано на рис.1.4.

Исходные интегралы, идущие вдоль КНС, оцениваются по стандартной формуле [106]. В случае движения заряда вдоль глубокогоффрированной поверхности мы получаем

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \Pi_{\omega x}^{(\Gamma_\chi^*)} \\ \Pi_{\omega z}^{(\Gamma_\chi^*)} \end{array} \right\} &\cong i \frac{q\tilde{\kappa}}{ck_0^{3/2}} \frac{\sqrt{2\pi\beta}}{\sqrt[4]{1-\beta^2} \sqrt{x^2 + (y+b_0)^2}} \left\{ \begin{array}{l} R_x(\chi_{s+}) \\ R_z(\chi_{s+}) \end{array} \right\} \\ &\times \exp\left(\frac{ik_0 z}{\beta} - \frac{k_0}{\beta} \sqrt{1-\beta^2} \sqrt{x^2 + (y+b_0)^2}\right), \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

где χ_{s+} - седловая точка, а Γ_χ^* - КНС, проходящий через данную точку. Отметим, что (2.2.8) отличается от аналогичного результата для мелкой гофры (1.2.67) только видом выражений для коэффициентов R_x и R_z . Как следует из (2.2.8), вклад КНС экспоненциально мал, если выполнено условие $k_0\beta^{-1} \sqrt{1-\beta^2} \sqrt{x^2 + (y+b_0)^2} \gg 1$.

Напомним, что экспоненциальное убывание вклада КНС с ростом расстояния физически означает отсутствие объемного излучения.

2.2.3. Поверхностные волны

Как и в параграфе 1.2 (см. пункт 1.2.3), можно показать, что исходные интегралы (2.2.4) определяются только вкладами полюсов (2.2.6). При положительных значениях x вклад в интегралы дает полюс $+k_{x0}$, а при отрицательных - полюс $-k_{x0}$. При этом предполагается, что выполнено неравенство $k_0\beta^{-1} \sqrt{1-\beta^2} \sqrt{x^2 + (y+b_0)^2} \gg 1$, то есть вкладом седловой точки можно пренебречь.

Сосчитав вычеты, мы получаем выражения для Фурье-образов компонент вектора Герца по частоте:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \Pi_x^{(s)} \\ \Pi_z^{(s)} \end{array} \right\} &= 2\pi i \operatorname{sgn}(x) \operatorname{Res}_{k_x=\pm k_{x0}} \left\{ \begin{array}{l} \Pi_x^{(r)} \\ \Pi_z^{(r)} \end{array} \right\} = 2\pi \frac{q\tilde{\kappa}\beta}{c} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sgn}(x) \operatorname{sgn}(\eta_0) k_0^{-1} g^{-2} \\ k_0^{-1} [\beta^2 - \operatorname{sgn}(\eta_0) g^2]^{-\frac{1}{2}} \end{array} \right\} \\ &\times \exp\left[\frac{ik_0 z}{\beta} + i \frac{k_0}{\beta} \sqrt{\beta^2 - \operatorname{sgn}(\eta_0) g^2} |x| - \frac{k_0}{\beta^2} |\eta_0| g^2 (y+b_0)\right], \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

где

$$g^2 = \frac{\beta^2}{2\eta_0^2} \left[\sqrt{1 + \frac{4\eta_0^2}{\beta^2}} - \operatorname{sgn}(\eta_0) \right]. \quad (2.2.10)$$

Отметим, что $g^2 > 0$. Данный факт обеспечивает экспоненциальное затухание поля при увеличении y , то есть в направлении перпендикулярном плоскости поверхности. Из (1.2.18) и (2.2.9) следует, что Фурье-образы компонент электромагнитного поля определяются выражениями

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_{x\omega}^{(s)} \\ E_{y\omega}^{(s)} \\ E_{z\omega}^{(s)} \end{pmatrix} &= \frac{2\pi q\tilde{\kappa}k_0}{c\sqrt{\beta^2 - \operatorname{sgn}(\eta_0)g^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -i\eta_0 \\ \beta[g^2 - \operatorname{sgn}(\eta_0)]g^{-2} \end{pmatrix} \\ &\times \exp\left[\frac{ik_0z}{\beta} + i\frac{k_0}{\beta}\sqrt{\beta^2 - \operatorname{sgn}(\eta_0)g^2}|x| - \frac{k_0}{\beta^2}|\eta_0|g^2(y + b_0)\right], \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} H_{x\omega}^{(s)} \\ H_{y\omega}^{(s)} \\ H_{z\omega}^{(s)} \end{pmatrix} &= \frac{2\pi q\tilde{\kappa}k_0}{c} \begin{pmatrix} i|\eta_0|g^2\beta^{-1}[\beta^2 - \operatorname{sgn}(\eta_0)g^2]^{-\frac{1}{2}} \\ -\operatorname{sgn}(x)[g^2 - \operatorname{sgn}(\eta_0)]g^{-2} \\ -i\operatorname{sgn}(x)\eta_0\beta^{-1} \end{pmatrix} \\ &\times \exp\left[\frac{ik_0z}{\beta} + i\frac{k_0}{\beta}\sqrt{\beta^2 - \operatorname{sgn}(\eta_0)g^2}|x| - \frac{k_0}{\beta^2}|\eta_0|g^2(y + b_0)\right]. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Формулы (2.2.11) и (2.2.12) описывают электромагнитное поле поверхностной волны, генерируемой пучком и распространяющейся вдоль плоскости гофрированной поверхности. Данная волна возбуждается, если скорость заряда выше некоторого предела, определяемого условием (2.2.7). При этом, в отличие от случая мелкогофрированной структуры, рассмотренного нами в параграфе 1.2, скорость заряда не обязана быть близкой к скорости света в вакууме. Как следует из (2.2.7), нижний предел скорости определяется только импедансом η_0 , который зависит от геометрических параметров поверхности. Варьируя эти параметры, мы можем менять значение импеданса, а следовательно, и значение скорости пучка, выше которого происходит генерация поверхностных волн. Предельное значение скорости может быть и много меньше единицы, поскольку импеданс глубокогофрированной поверхности не является малым параметром и может быть сколь угодно большим (см. параграф 2.1).

Подчеркнем, что полученные соотношения верны только для положительных частот $k_0 = \omega/c > 0$. Соответствующие формулы для случая $k_0 < 0$ можно вывести из (2.2.11) и (2.2.12), применив правило $F_{-\omega} = F_{\omega}^*$, вытекающее из вещественности исходных компонент поля. Как отмечалось в параграфе 1.2, используя данное правило, мы также можем свести интегралы Фурье для компонент поля к интегралам по положительной полуоси, то есть

$$E_{x,y,z}^{(s)}(\vec{r}, t) = 2c \int_0^{+\infty} dk_0 \operatorname{Re} [E_{x,y,z\omega}^{(s)} \exp(-ik_0ct)], \quad (2.2.13)$$

$$H_{x,y,z}^{(s)}(\vec{r}, t) = 2c \int_0^{+\infty} dk_0 \operatorname{Re} [H_{x,y,z}^{(s)} \omega \exp(-ik_0 ct)]. \quad (2.2.14)$$

Фурье-образы $E_{x,y,z}^{(s)} \omega$ и $H_{x,y,z}^{(s)} \omega$ здесь определены формулами (2.2.11) и (2.2.12).

Подынтегральные выражения в (2.2.13) и (2.2.14) имеют ряд особенностей. Функция $\sqrt{\beta^2 - \operatorname{sgn}(\eta_0) g^2}$, стоящая в знаменателе компонент $E_{y,z}^{(s)} \omega$ и $H_x^{(s)} \omega$, дает точки ветвления

$$k_0 = k_{0bj} \cong \frac{1}{d_3} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{d}{d_2} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} \right) + (j-1)\pi \right], \quad (2.2.15)$$

где $j = 1, 2, 3, \dots$ Данное выражение получено приближенно, так как в процессе его вывода мы пренебрегли слагаемым $k_0 dl \operatorname{tg}(k_0 d_3)$. Напомним, что в “длинноволновом” приближении величина $k_0 d = 2\pi d/\lambda$ является малым параметром задачи. Кроме того, значение параметра глубокой гофры l много меньше единицы на всей области определения (см. параграф 2.1).

Другими особенностями подынтегральных выражений в (2.2.13) и (2.2.14) являются полюсы компонент $E_{y,z}^{(s)} \omega$ и $H_{y,z}^{(s)} \omega$:

$$k_0 = k_{0j} = k_{01} + (j-1)\pi, \quad (2.2.16)$$

где $j = 1, 2, 3, \dots$ Здесь, $k_0 = k_{01}$ - первое, то есть ближайшее к началу координат, решение уравнения

$$k_0 dl \operatorname{tg}(k_0 d_3) = 1. \quad (2.2.17)$$

Данное уравнение вытекает из равенства нулю знаменателя функции η_0 , заданной выражением (2.1.3). Таким образом, в точках $k_0 = k_{0j}$ импеданс стремится к бесконечности, а функция $g^2 \cong \beta \eta_0^{-1}$ - к нулю (см. (2.2.10)), что и приводит к появлению особенностей в формулах для компонент $E_{y,z}^{(s)} \omega$ и $H_{y,z}^{(s)} \omega$.

Отметим, что, согласно (2.2.17), в точках $k_0 = k_{0j}$ значение тангенса $\operatorname{tg}(k_0 d_3)$ велико ($k_0 d$ и l много меньше единицы). Точки, в которых тангенс стремится к бесконечности, определяются по формуле

$$k_0 = \tilde{k}_{0j} = (2j-1) \frac{\pi}{2d_3}, \quad (2.2.18)$$

где $j = 1, 2, 3, \dots$ Используя (2.2.17), можно показать, что разность $\tilde{k}_{0j} - k_{0j}$ увеличивается с ростом j . Однако, для первых значений j мы можем полагать, что $k_{0j} \cong \tilde{k}_{0j}$. Это понадобится нам для некоторых оценок.

Ниже представлены результаты численного расчета интегралов (2.2.13). Предполагалось, что пучок имеет гауссово распределение заряда, то есть профиль пучка и его Фурье-образ заданы соотношениями (1.2.91). На рис.2.3 и рис.2.4 показаны зависимости компонент

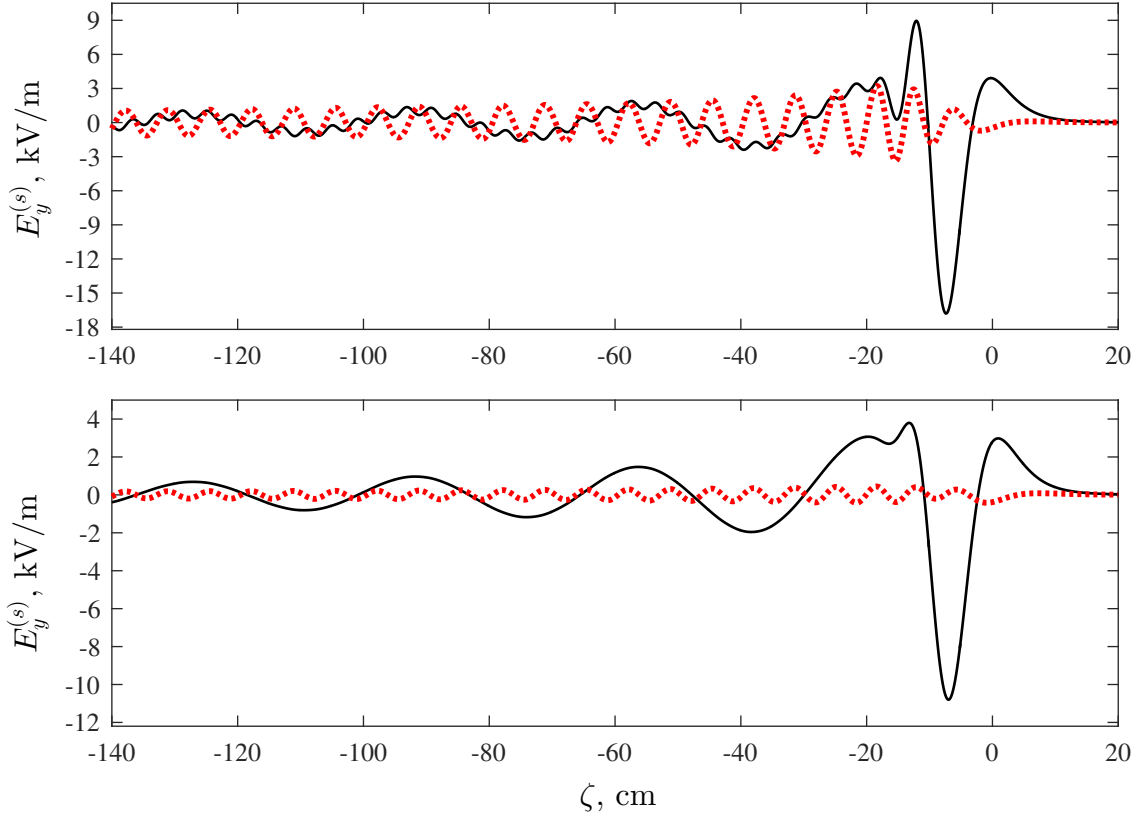


Рис.2.3. Зависимость компоненты поля поверхностной волны $E_y^{(s)}$ от координаты $\zeta = z - Vt$ для гауссова пучка. Параметры пучка: заряд $q = 1$ нКл; скорость $\beta = 0.99$ (черные сплошные линии) и $\beta = 0.8$ (красные пунктирные линии); длина $2\sigma = 3$ см (сверху) и $2\sigma = 5$ см (снизу). Параметры структуры: период гофрирования $d = 0.05$ см, ширина канавок $d_2 = 0.04$ см, глубина $d_3 = 1$ см. Значения координат: $x = 10$ см, $y = 0$. Расстояние между траекторией пучка и плоскостью структуры $b_0 = 3$ см. Величина $E_y^{(s)}$ приведена в системе СИ (кВ/м).

поля поверхностной волны $E_y^{(s)}$ и $E_z^{(s)}$, соответственно, от координаты $\zeta = z - Vt$. Как следует из графиков, в области за зарядом $\zeta < 0$ имеется квазипериодическая зависимость, амплитуда которой медленно уменьшается с ростом расстояния от заряда. Данная квазипериодическая функция представляет собой вклад первой точки ветвления k_{0b1} . В соответствии с (2.2.15), данный вклад приводит к осцилляциям вдоль ζ с периодом

$$\zeta_{bj} \cong \frac{2\pi\beta d_3}{\operatorname{arctg}\left(\frac{d}{d_2} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}\right) + (j-1)\pi}, \quad (2.2.19)$$

где $j = 1, 2, 3, \dots$. Значение ζ_{bj} уменьшается с увеличением индекса j и с уменьшением скорости β . В частности, для ультрарелятивистского пучка ($\beta = 0.99$, черные сплошные линии) имеем $\zeta_{b1} \cong 35.2$ см, $\zeta_{b2} \cong 1.8$ см и т.д. В случае $\beta = 0.8$ (красные пунктирные линии) получаем $\zeta_{b1} \cong 6.7$ см, $\zeta_{b2} \cong 1.3$ см и т.д. Таким образом, поле поверхностной волны почти полностью

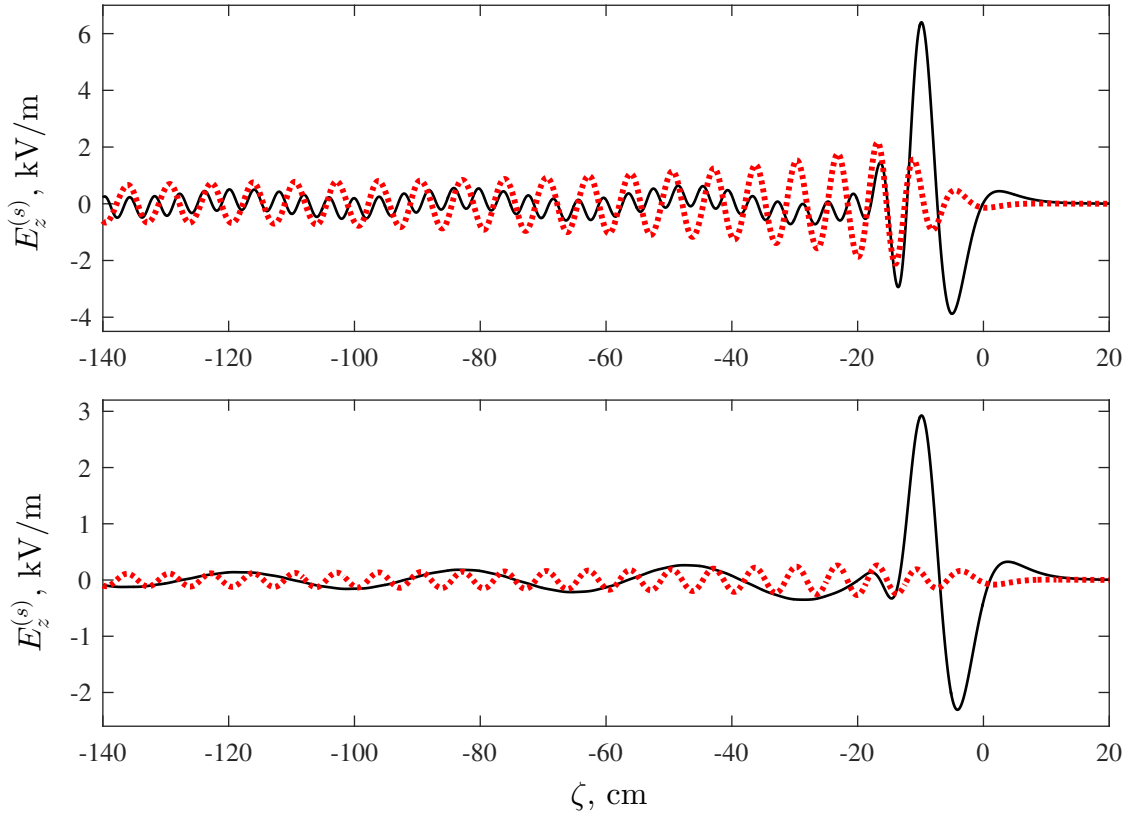


Рис.2.4. То же, что и на рис.2.3, для компоненты поля $E_z^{(s)}$.

определяется вкладом первой точки ветвления.

Следует отметить, что, при определенных условиях, можно наблюдать вклад первого полюса k_{01} , который проявляется в виде небольших осцилляций, накладывающихся на квазипериодическую функцию. Данную суперпозицию можно увидеть, в частности, для более коротких ультрарелятивистских пучков ($2\sigma = 3$, $\beta = 0.99$, черные сплошные линии на верхних графиках рис.2.3 и рис.2.4). Период этих осцилляций можно оценить, используя формулу (2.2.18), поскольку для первых нескольких значений j полюсы k_{0j} приближенно равны значениям \tilde{k}_{0j} . Следовательно, мы получаем

$$\zeta_j \cong \frac{4\beta d_3}{2j - 1}, \quad (2.2.20)$$

где $j = 1, 2, 3, \dots$. Значения периодов, соответствующих вкладам первых двух полюсов, равны $\zeta_1 \cong 3.96$ и $\zeta_2 \cong 1.32$ см ($\beta = 0.99$, $d_3 = 1$ см). Период осцилляций на графике приблизительно равен 3.9 см, что соответствует вкладу первого полюса.

Подчеркнем, что в некоторых ситуациях структуру поверхностной волны можно использовать для определения размера пучка. Как следует из рис.2.3 и рис.2.4, в ультрарелятивистском случае ($\beta = 0.99$) наблюдаются экстремумы с относительно большой амплитудой. Длина пучка приблизительно равна расстоянию между двумя основными максимумами

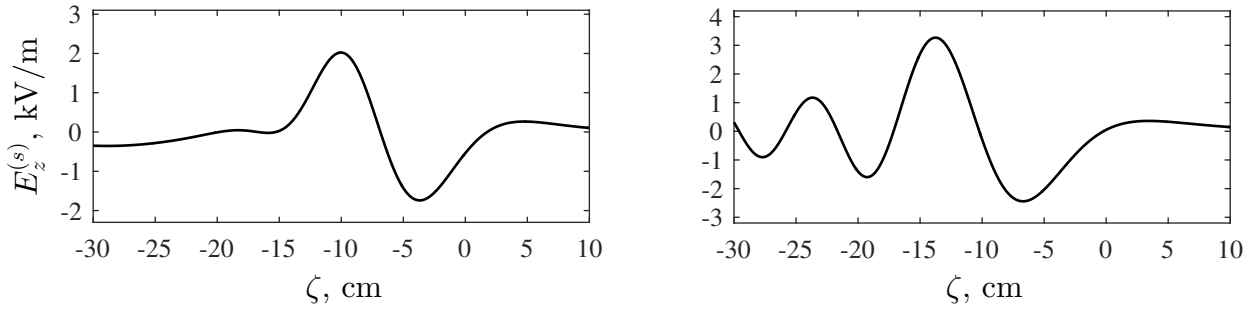


Рис.2.5. Зависимость компоненты поля поверхностной волны $E_z^{(s)}$ от координаты $\zeta = z - Vt$ для гауссова пучка. Параметры пучка: заряд $q = 1$ нКл, скорость $\beta = 0.99$, длина $2\sigma = 6$ см. Параметры структуры: период гофрирования $d = 0.05$ см; ширина канавок $d_2 = 0.04$ см; глубина $d_3 = 1$ см (слева) и $d_3 = 2$ см (справа). Значения координат: $x = 10$ см, $y = 0$. Расстояние между траекторией пучка и плоскостью структуры $b_0 = 3$ см. Величина $E_z^{(s)}$ приведена в системе СИ (кВ/м).

(второй и третий справа). Более детально область, содержащая эти максимумы, изображена на рис.2.5, на котором представлены зависимости компоненты $E_z^{(s)}$ от координаты ζ для ультрарелятивистского пучка с длиной $2\sigma = 6$ см. Как видно из графиков, значение ζ , соответствующее расстоянию между максимумами, увеличивается с ростом глубины гофры: расстояние приблизительно равно 6.3 см ($d_3 = 1$ см, график слева) и 7 см ($d_3 = 2$ см, график справа). Заметим также, что с ростом глубины увеличивается амплитуда поля (это касается и квазипериодического “хвоста”). При этом структура поля становится более сложной, что затрудняет определение размера пучка. Таким образом, относительно глубокая гофрированная поверхность способствует генерации более мощных поверхностных волн, в то время как диагностика пучков (в ультрарелятивистском диапазоне скоростей) наиболее эффективна, когда глубина существенно меньше длины пучка.

Напомним, что поверхностные волны возбуждаются в аналогичной ситуации, когда заряд движется вдоль мелкогофрированной поверхности (см. параграф 1.2). Однако эффекты, рассматриваемые в этих двух задачах, имеют принципиальные отличия. В случае мелкой гофры мы показали, что поверхностные волны генерируются только ультрарелятивистским зарядом. При этом структура волны имеет простой вид: это локализованный импульс, имеющий длину примерно равную длине пучка. В случае глубокой гофры поверхностная волна имеет более сложную структуру: за зарядом наблюдается квазипериодический “хвост” с медленно уменьшающейся амплитудой. При определенных условиях можно получить суперпозицию квазипериодической функции и осцилляций с меньшим периодом. Отметим также, что рассматриваемое в настоящем параграфе излучение намного интенсивнее, а генерация

данного излучения происходит в относительно широком диапазоне скоростей заряда.

Теперь проанализируем энергию поверхностных волн. Полная энергия, излучаемая зарядом в единицу длины пути и проходящая через две параллельные плоскости $x = \pm x_0$ ($y > 0$), может быть найдена по формуле

$$\frac{dW^{(s)}}{dz_0} = \frac{1}{V} \frac{dW^{(s)}}{dt} = \frac{1}{2\pi\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{+\infty} dy (E_y^{(s)} H_z^{(s)} - E_z^{(s)} H_y^{(s)}) \Big|_{x=x_0>0}. \quad (2.2.21)$$

Запишем компоненты поля через интегралы Фурье вида $F(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega F_\omega \exp(-i\omega t)$, подставим их в (2.2.21) и, сделав некоторые преобразования, получим

$$\frac{dW^{(s)}}{dz_0} = \int_0^{+\infty} \frac{dW^{(s)}}{dz_0 dk_0} dk_0, \quad (2.2.22)$$

где

$$\frac{dW^{(s)}}{dz_0 dk_0} = 2c^2 \int_0^{+\infty} dy \operatorname{Re}(E_{y\omega}^{(s)} H_{z\omega}^{(s)*} - E_{z\omega}^{(s)} H_{y\omega}^{(s)*}) \quad (2.2.23)$$

есть спектральная плотность потерь энергии заряда в единицу длины пути. Подробный вывод формулы (2.2.23) представлен в параграфе 1.2 (см. пункт 1.2.3). Подставив в (2.2.23) Фурье-образы соответствующих компонент поля поверхностной волны из (2.2.11), (2.2.12) и взяв интеграл по y , найдем

$$\frac{dW^{(s)}}{dz_0 dk_0} = 4\pi^2 q^2 |\tilde{\kappa}|^2 \beta k_0 \frac{\eta_0^2 + \beta^2 g^{-4} [g^2 - \operatorname{sgn}(\eta_0)]^2}{|\eta_0| g^2 \sqrt{\beta^2 - \operatorname{sgn}(\eta_0) g^2}} \exp\left(-2 \frac{k_0}{\beta^2} |\eta_0| g^2 b_0\right). \quad (2.2.24)$$

Зависимости спектральной плотности энергии (в единицу длины пути заряда) от волнового числа представлены на рис.2.6. Следует отметить, что при расчетах мы учли малое затухание в среде. Зависимости получены при тех же параметрах, что и верхние графики на рис.2.3 и рис.2.4. Как видим, при $\beta = 0.8$ есть только один пик, соответствующий точке ветвления k_{0b1} . В ультрарелятивистском случае ($\beta = 0.99$) наблюдаются два пика, один из которых (слева) соответствует точке ветвления k_{0b1} , а второй (справа) - полюсу k_{01} . Таким образом, энергетический спектр излучения состоит из узких частотных диапазонов, при этом каждый диапазон характеризуется резким максимумом. Электромагнитное поле поверхностной волны почти полностью формируется на частотах, соответствующих первой точке ветвления k_{0b1} . В этом заключается еще одно принципиальное отличие глубокогофрированной структуры от мелкой гофры, когда поверхностная волна генерируется в относительно широком диапазоне частот.

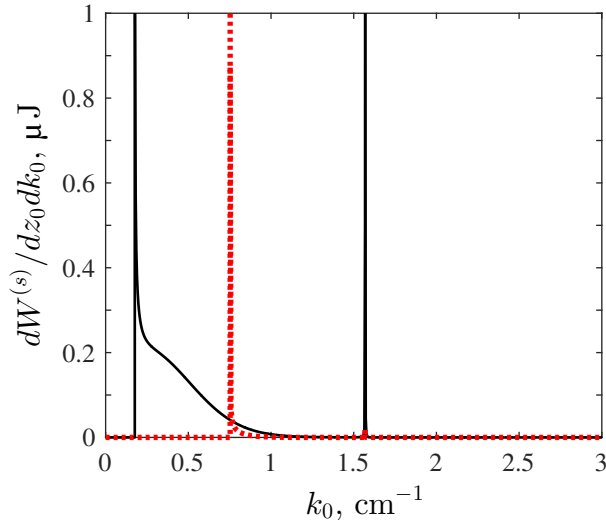


Рис.2.6. Зависимость спектральной плотности энергии (в единицу длины пути заряда) $d^2W^{(s)}/dz_0dk_0$ от волнового числа k_0 для гауссова пучка. Параметры пучка: заряд $q = 1$ нКл; длина $2\sigma = 3$ см; скорость $\beta = 0.99$ (черные сплошные линии) и $\beta = 0.8$ (красные пунктирные линии). Параметры структуры: период гофрирования $d = 0.05$ см, ширина канавок $d_2 = 0.04$ см, глубина $d_3 = 1$ см. Расстояние между траекторией пучка и плоскостью структуры $b_0 = 3$ см. Величина $d^2W^{(s)}/dz_0dk_0$ приведена в системе СИ (мкДж).

В заключение обратимся к полной энергии, расходуемой пучком в единицу длины пути. Данная величина определена формулой (2.2.22), где подынтегральное выражение суть спектральная плотность, имеющая вид (2.2.24). Результаты численного расчета интеграла (2.2.22) представлены на рис.2.7. На графиках показаны зависимости полных потерь энергии гауссова пучка от его скорости при различных значениях длины пучка и глубины гофрированной поверхности. Из приведенных зависимостей следует, что полные потери энергии увеличиваются с ростом скорости заряда и с уменьшением его длины. Каждая кривая имеет максимум, когда скорость пучка близка к скорости света в вакууме. Отметим, что диапазон скоростей заряда, в котором происходит генерация поверхностных волн, увеличивается с ростом глубины поверхности. Таким образом, варьируя параметры задачи, можно генерировать излучение в относительно широком диапазоне скоростей. Это, несомненно, является важным преимуществом глубокогогофрированной структуры перед мелкой гофрой (в случае мелкогофрированной структуры поверхностные волны возбуждаются только ультрарелятивистским зарядом).

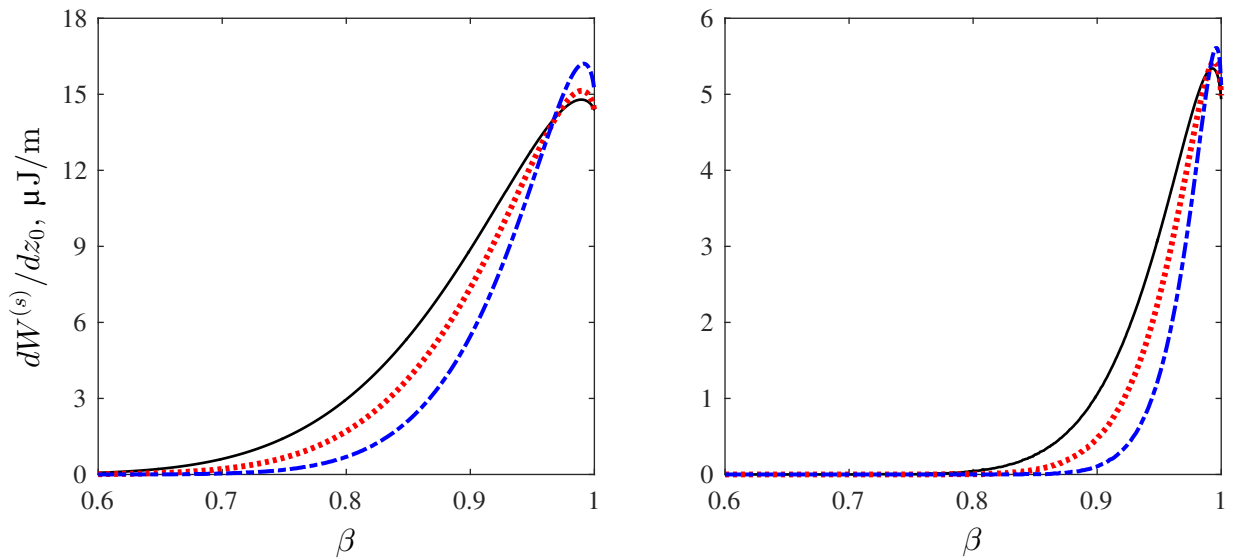


Рис.2.7. Зависимость энергии поверхностной волны (в единицу длины пути заряда) $d^2W^{(s)}/dz_0$ от скорости β для гауссова пучка. Параметры пучка: заряд $q = 1$ нКл; длина $2\sigma = 1.5$ см (слева) и $2\sigma = 5$ см (справа). Параметры структуры: период гофрирования $d = 0.05$ см; ширина канавок $d_2 = 0.04$ см; глубина $d_3 = 1.2$ см (черные сплошные линии), $d_3 = 1$ см (красные пунктирные линии) и $d_3 = 0.8$ см (синие штрих-пунктирные линии). Расстояние между траекторией пучка и плоскостью структуры $b_0 = 3$ см. Величина $d^2W^{(s)}/dz_0$ приведена в системе СИ (мкДж/м).

2.3. Излучение пучка заряженных частиц, пролетающего сквозь глубокогофрированную структуру

2.3.1. Общее решение

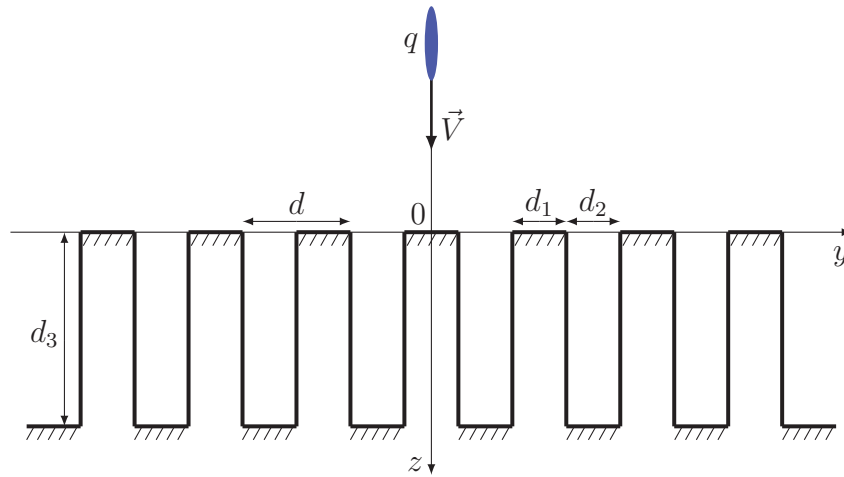


Рис.2.8. Движение заряда сквозь глубокогофрированную поверхность (ось x направлена вдоль канавок гофры, “от нас”).

В данном параграфе анализируется излучение пучка заряженных частиц, пролетающего сквозь глубокогофрированную поверхность (рис.2.8). Напомним, что мы исследуем “длинно-волновую” (или “низкочастотную”) часть спектра излучения, то есть считаем выполненным условие

$$d \ll \lambda.$$

Как и ранее, будем пользоваться методом эквивалентных граничных условий.

Гофрированная поверхность, изображенная на рис.2.8, лежит в плоскости $z = 0$ и имеет свойства, описанные в параграфе 2.1. Эквивалентные граничные условия в данном случае имеют вид [15]

$$E_y \omega|_{z=0} = \eta H_x \omega|_{z=0}, \quad E_x \omega|_{z=0} = 0, \quad (2.3.1)$$

где импеданс η задан выражением (2.1.3). Граничные условия (2.3.1) записаны для области $z < 0$ (для области $z > 0$ меняется знак в правой части первого равенства). Ниже мы получим общее решение задачи для области $z < 0$.

Пучок заряженных частиц движется с постоянной скоростью $\vec{V} = c\beta\vec{e}_z$, имеет бесконечно малые поперечные размеры и произвольное распределение заряда вдоль оси движения.

В этом случае плотности заряда и тока определяются по формулам (1.3.3). Как и ранее, мы полагаем, что полное электромагнитное поле пучка является суммой “вынужденного” поля (с индексом “ i ”), то есть поля пучка в неограниченном вакууме, и “свободного” поля (с индексом “ r ”), возникающего за счет влияния гофрированной поверхности: $\vec{E} = \vec{E}^{(i)} + \vec{E}^{(r)}$, $\vec{H} = \vec{H}^{(i)} + \vec{H}^{(r)}$. Фурье-образы (по частоте и двум компонентам волнового вектора) “вынужденного” и “свободного” полей заданы соотношениями (1.3.6)-(1.3.11) и (1.3.14)-(1.3.19), соответственно (подробнее см. параграф 1.3, пункт 1.3.1). Неизвестные коэффициенты R_x и R_z , стоящие в выражениях для “свободного” поля, определяются из системы

$$\begin{cases} E_{y \omega, k_x, k_y}^{(i)} + E_{y \omega, k_x, k_y}^{(r)} = \eta \left(H_{x \omega, k_x, k_y}^{(i)} + H_{x \omega, k_x, k_y}^{(r)} \right) \\ E_{x \omega, k_x, k_y}^{(i)} + E_{x \omega, k_x, k_y}^{(r)} = 0, \end{cases} \quad (2.3.2)$$

вытекающей из граничных условий (2.3.1). В случае глубокогофрированной структуры мы получаем

$$R_x = -\frac{i\beta k_0 k_x k_{z0} (k_0 + \beta k_{z0}) \eta_0}{(k_0^2 - \beta^2 k_{z0}^2) [k_0 k_{z0} - i(k_0^2 - k_x^2) \eta_0]}, \quad (2.3.3)$$

$$R_z = \frac{\beta k_0 k_{z0} [k_0^2 + i\beta (k_0^2 - k_x^2) \eta_0]}{(k_0^2 - \beta^2 k_{z0}^2) [k_0 k_{z0} - i(k_0^2 - k_x^2) \eta_0]}, \quad (2.3.4)$$

где $k_{z0}^2 = k_0^2 - k_x^2 - k_y^2$, а η_0 - мнимая часть импеданса η , согласно (2.1.3). Величина k_{z0} введена таким образом, что при введении малого поглощения в среду волна становится затухающей. Это означает, что при замене $k_0^2 = \omega^2/c^2$ на $k_0^2 [1 + i\sigma \operatorname{sgn}(\omega)]$, где $0 < \sigma \ll 1$, должно выполняться требование $\operatorname{Im} k_{z0} > 0$. Тогда при $\sigma \rightarrow +0$ имеем $k_{z0} = \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}$, если $k_0^2 > k_x^2 + k_y^2$, и $k_{z0} = i\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k_0^2}$, если $k_x^2 + k_y^2 > k_0^2$.

2.3.2. Исследование поля, возникающего за счет гофрированной поверхности

Исследование поля, возникающего за счет влияния гофрированной структуры, будем проводить, используя вектор Герца данного поля. Напомним, что “свободное” поле описывается двухкомпонентным вектором Герца, Фурье-образы компонент которого заданы соотношениями (1.3.13). Для дальнейшего изложения удобно выписать их снова

$$\begin{cases} \Pi_{x \omega}^{(r)} \\ \Pi_{z \omega}^{(r)} \end{cases} = \frac{iq\tilde{\kappa}}{\pi c k_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \begin{cases} R_x \\ R_z \end{cases} \frac{\exp(ik_x x + ik_y y + ik_{z0}|z|)}{k_{z0}}, \quad (2.3.5)$$

где коэффициенты R_x и R_z определены формулами (2.3.3) и (2.3.4), соответственно. Также отметим, что в дальнейшем, для простоты, мы будем рассматривать только положительные частоты $\omega > 0$.

Рассмотрим интеграл по k_x и проанализируем особенности подынтегральных выражений. Функция k_{z0} обладает двумя точками ветвления $k_x = \pm k_{xb} = \pm \sqrt{k_0^2 - k_y^2}$. Расположение точек ветвления на комплексной плоскости k_x при учете малого затухания показано на рис.1.9 (слева - при $k_y > k_0$, справа - при $k_y < k_0$). Разрезы на рис.1.9 проведены так, чтобы правило $\text{Im } k_{z0} > 0$ распространялось на весь "верхний" лист римановой поверхности.

Другими особенностями подынтегральных функций в (2.3.5) являются полюсы коэффициентов R_x и R_z . Согласно (2.3.3) и (2.3.4), дисперсионное уравнение имеет вид

$$(k_0^2 - \beta^2 k_{z0}^2) [k_0 k_{z0} - i(k_0^2 - k_x^2) \eta_0] = 0. \quad (2.3.6)$$

Выражение в квадратных скобках обращается в ноль в точках

$$k_x = \pm k_{x0} = \pm k_0 \sqrt{1 - g^2}, \quad (2.3.7)$$

где

$$g^2 = \frac{\text{sgn}(\eta_0)}{2\eta_0^2} \left[\sqrt{1 + \frac{4\eta_0^2 k_y^2}{k_0^2}} - \text{sgn}(\eta_0) \right]. \quad (2.3.8)$$

Заметим, что полюсы (2.3.7) чисто вещественны при условии $g^2 < 1$, которое, с учетом (2.3.8), сводится к неравенству

$$k_y^2 < k_0^2 (1 + \eta_0^2). \quad (2.3.9)$$

В дальнейшем мы будем считать, что условие (2.3.9) выполнено. Как будет показано, в этом случае вклады полюсов (2.3.7) представляют собой поверхностные волны, распространяющиеся вдоль плоскости гофры.

Уравнение $k_0^2 - \beta^2 k_{z0}^2 = 0$, вытекающее из дисперсионного уравнения (2.3.6), имеет два чисто мнимых решения

$$k_x = \pm k_{x1} = \pm i \sqrt{k_y^2 + k_0^2 \frac{1 - \beta^2}{\beta^2}}. \quad (2.3.10)$$

Полюсы (2.3.10) не представляют для нас интереса, так как их вклад приведет к экспоненциальному убыванию поля. Вкладом данных полюсов можно пренебречь при условии $k_0 \beta^{-1} \sqrt{1 - \beta^2} |x| \gg 1$.

На рис.1.9 показано расположение особенностей $\pm k_{x0}$ и $\pm k_{x1}$ на комплексной плоскости k_x (слева - для случая $k_y > k_0$, справа - для случая $k_y < k_0$). Такое расположение полюсов относительно контура интегрирования нетрудно получить, если учесть исчезающе малое затухание в среде, как мы делали это ранее. Во избежание путаницы поясним, что точки $\pm k_{x2}$,

изображенные на рис.1.9 - это полюсы, которые были в аналогичной задаче с мелкогофрированной структурой (см. параграф 1.3). В рассматриваемом случае глубокого гофрирования данных особенностей нет.

Асимптотическое исследование интеграла по k_x в (2.3.5) будем проводить с помощью метода перевала [106]. Процедура исследования аналогична той, что была представлена в пункте 1.3.2 параграфа 1.3, поэтому приведем здесь только основные моменты. Сначала мы делаем замену (1.3.38), то есть переходим к новой переменной интегрирования χ . Затем анализируем отдельно две ситуации: $k_y > k_0$ и $k_y < k_0$. Для каждого случая мы находим седловую точку и контур наибыстрейшего спуска, проходящий через эту точку. Далее строим на плоскости χ замкнутый контур, состоящий из контура интегрирования, контура наибыстрейшего спуска и двух отрезков, удаленных на $\pm\infty$. Рассматривая исходные интегралы по такому замкнутому контуру, получаем, что они приближенно равны сумме вкладов полюсов и седловой точки. Асимптотические оценки для вклада седловой точки при $k_y > k_0$ и $k_y < k_0$ определяются по формулам (1.3.59) и (1.3.74), соответственно. В результате при $k_y > k_0$ данный вклад экспоненциально убывает по закону $\exp\left[-\sqrt{(k_y^2 - k_0^2)(x^2 + z^2)}\right]$ и при расчете поля им можно пренебречь. Однако при $k_y < k_0$ убывание с ростом расстояния подчиняется закону $(x^2 + z^2)^{-1/4}$. Ниже мы покажем, что в этом случае вклад седловой точки представляет собой объемную часть излучения заряда. Что касается вкладов полюсов, этому вопросу будет посвящен последний пункт данного параграфа.

2.3.3. Объемное излучение

Проанализируем отдельно вклад седловой точки. Как известно, в случае $|k_y| > k_0$ данный вклад приводит к экспоненциальному убыванию подынтегральных функций (см. (1.3.59)) и не представляет для нас интереса. Поэтому далее мы будем полагать, что $|k_y| < k_0$, то есть пользоваться формулой (1.3.74). Применяя в данном выражении метод перевала к интегралу по k_y (эта процедура подробно описана в пункте 1.3.3 параграфа 1.3), мы получаем Фурье-образ вектора Герца в виде

$$\begin{pmatrix} \Pi_{x\omega}^{(v)} \\ \Pi_{z\omega}^{(v)} \end{pmatrix} \cong \frac{2q\tilde{\kappa}}{ck_0^2} \begin{pmatrix} R_x \\ R_z \end{pmatrix} \frac{\exp(ik_0R)}{R}, \quad (2.3.11)$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, а коэффициенты R_x и R_z заданы соотношениями (2.3.3) и (2.3.4), соответственно. Отметим, что выражения (2.3.11) справедливы при $k_0R \gg 1$.

Фурье-образы компонент электромагнитного поля можно получить по формулам (1.2.18).

Используя (2.3.11), имеем

$$E_{R\omega}^{(v)} = H_{R\omega}^{(v)} = 0, \quad \begin{Bmatrix} E_{\theta\omega}^{(v)} \\ E_{\varphi\omega}^{(v)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_{\varphi\omega}^{(v)} \\ -H_{\theta\omega}^{(v)} \end{Bmatrix} \cong \frac{2q\tilde{\kappa}}{c} \begin{Bmatrix} R_x \cos \theta \cos \varphi - R_z \sin \theta \\ R_x \sin \varphi \end{Bmatrix} \frac{\exp(ik_0 R)}{R}, \quad (2.3.12)$$

где, для удобства, введена сферическая система координат (1.3.95). Учитывая явный вид коэффициентов R_x и R_z , из (2.3.12) получаем

$$E_{R\omega}^{(v)} = H_{R\omega}^{(v)} = 0, \quad \begin{Bmatrix} E_{\theta\omega}^{(v)} \\ E_{\varphi\omega}^{(v)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_{\varphi\omega}^{(v)} \\ -H_{\theta\omega}^{(v)} \end{Bmatrix} \cong \frac{2q\tilde{\kappa}}{c} \frac{\beta |\cos \theta| \sin \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta) F_0^{(v)}} \begin{Bmatrix} F_1^{(v)} \\ F_2^{(v)} \end{Bmatrix} \frac{\exp(ik_0 R)}{R}, \quad (2.3.13)$$

где

$$F_0^{(v)} = |\cos \theta| - i(1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) \eta_0, \quad (2.3.14)$$

$$F_1^{(v)} = -1 - i\eta_0 [\beta(1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) + \cos \theta \cos^2 \varphi (1 + \beta |\cos \theta|)], \quad (2.3.15)$$

$$F_2^{(v)} = i \sin \varphi \cos \varphi (1 + \beta |\cos \theta|) \eta_0. \quad (2.3.16)$$

Формулы (2.3.13) описывают электромагнитное поле объемной волны. При условии $\eta_0 = 0$ данные формулы переходят в известные выражения (1.3.104), то есть описывают поле переходного излучения, генерируемое зарядом при влете в идеально проводящую гладкую поверхность [63]. Во избежание путаницы поясним, что формулы (1.3.104) написаны для точечного заряда, то есть Фурье-образ профиля пучка $\tilde{\kappa} = 1/(2\pi)$. Ниже мы покажем, что распределение поля объемного излучения в случае глубокого гофрирования существенно отличается от распределения поля в аналогичной задаче с мелкой гофрой (см. параграф 1.3, пункт 1.3.3). Это объясняется тем, что импеданс η_0 в данном приближении уже не является малым параметром задачи. Напомним, что в случае мелкого гофрирования компоненты поля объемной волны отличаются от формул (1.3.104) лишь наличием малых поправок.

Теперь рассмотрим потери энергии заряда на излучение объемных волн. Полная энергия, проходящая за все время через сферу радиуса R с центром в начале координат, имеет вид

$$W^{(v)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \oint_R \vec{S}^{(v)} d\vec{\Omega} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_R \vec{S}^{(v)} d\vec{\Omega}, \quad (2.3.17)$$

где $\vec{S}^{(v)} = c(4\pi)^{-1} [\vec{E}^{(v)}, \vec{H}^{(v)}]$ - вектор Умова-Пойнтинга, а $d\vec{\Omega}$ - элемент поверхности сферы с нормалью, направленной наружу. С учетом (2.3.13) вектор Умова-Пойнтинга имеет единственную компоненту вдоль радиус-вектора. Отметим, что в последнем выражении в (2.3.17) подразумевается интегрирование по полусфере в области $z < 0$. Множитель “2” объясняется тем, что в полупространства $z > 0$ и $z < 0$ излучается одинаковая энергия.

Выражение (2.3.17) можно привести к виду

$$W^{(v)} = 2 \int_0^{+\infty} d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \sin \theta W_{\omega\Omega}^{(v)}, \quad (2.3.18)$$

где

$$W_{\omega\Omega}^{(v)}(\theta, \varphi) = cR^2 \left(|E_{\theta\omega}^{(v)}|^2 + |E_{\varphi\omega}^{(v)}|^2 \right) \quad (2.3.19)$$

суть спектрально-угловая плотность энергии, а Фурье-образы компонент поля заданы соотношениями (2.3.13). Подробный вывод формулы (2.3.19) представлен в пункте 1.3.3 параграфа 1.3.

На рис.2.9 приведены зависимости спектрально-угловой плотности энергии $W_{\omega\Omega}^{(v)}$ (в единицах $q^2|\tilde{\kappa}|^2/c$) от углов сферической системы координат (1.3.95) для различных значений скорости пучка β и глубины структуры d_3 . Угол φ - полярный, а угол θ изменяется вдоль радиуса окружности от $\theta = 90^\circ$ (у края) до $\theta = 180^\circ$ (в центре). Как следует из графиков, максимум плотности энергии наблюдается в плоскости $y = 0$, которая содержит нормаль к плоскости поверхности и направление вдоль канавок гофры (данная плоскости соответствует углам $\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 180^\circ$). Стоит отметить, что чем больше глубина структуры, тем быстрее уменьшается плотность энергии с ростом расстояния от плоскости $y = 0$. Это объясняется тем, что, согласно (2.1.3), импеданс поверхности η_0 растёт с увеличением глубины (имеется ввиду рост глубины до значения, когда знаменатель в (2.1.3) впервые обращается в ноль). Вследствие этого проводимость в направлении y (перпендикулярно канавкам) уменьшается, а в направлении x (вдоль канавок) исследуемая структура обладает идеальной проводимостью.

На рис.2.10 представлены зависимости спектрально-угловой плотности энергии $W_{\omega\Omega}^{(v)}$ от угла θ в плоскости $y = 0$ (то есть при $\varphi = 0^\circ$ или $\varphi = 180^\circ$) для различных значений скорости пучка β . Видно, что в случае $\beta = 0.7$ плотность энергии монотонно убывает с ростом угла. Для более быстрых пучков монотонность исчезает, и на графике образуется максимум (потери энергии при этом возрастает). Угол θ , соответствующий максимуму, увеличивается с ростом скорости заряда. В частности, для $\beta = 0.7$ плотность энергии имеет максимум при $\theta = 90^\circ$, то есть излучение концентрируется вблизи плоскости гофрированной структуры (это также верно и для более медленных пучков). Для $\beta = 0.8$ и $\beta = 0.9$ направление максимума $\theta \cong 132^\circ$ и $\theta \cong 151^\circ$, соответственно. В ультрарелятивистском случае, когда Лоренц-фактор $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \gg 1$, максимум плотности энергии наблюдается в направлении почти совпадающим с траекторией движения пучка ($\theta \cong 180^\circ$, см. рис.2.11). Следует отметить, что в полуплоскости $\varphi = 0^\circ$ (или $\varphi = 180^\circ$) спектрально-угловая плотность энергии не зави-

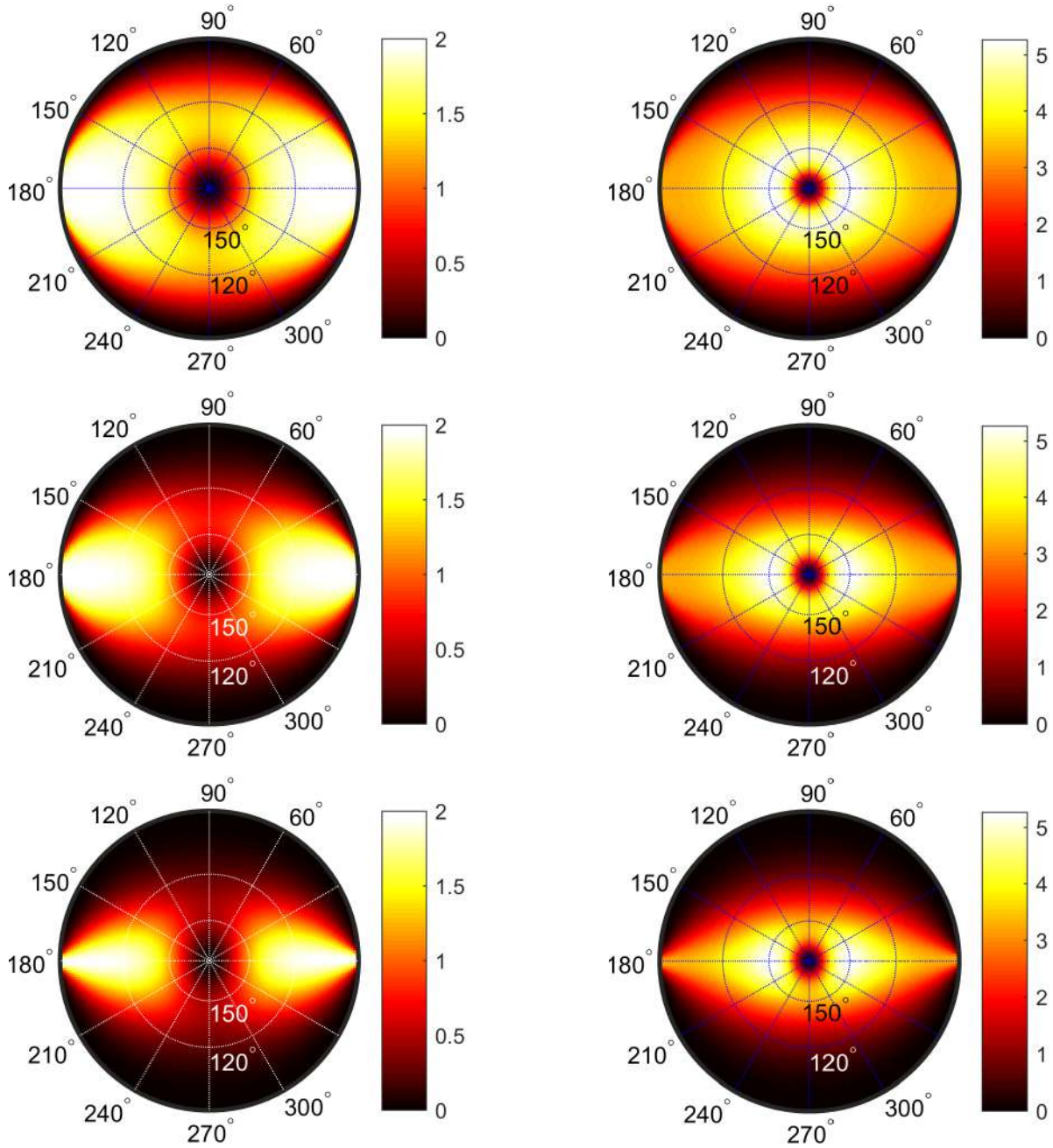


Рис.2.9. Зависимость спектрально-угловой плотности энергии объемных волн $W_{\omega\Omega}^{(v)}$ от углов сферической системы координат (1.3.95). Угол φ - полярный, а угол θ изменяется вдоль радиуса окружности: от $\theta = 90^\circ$ (у края) до $\theta = 180^\circ$ (в центре). Направление гофрирования соответствует углам $\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 180^\circ$. Скорость пучка $\beta = 0.7$ (левый столбец) и $\beta = 0.9$ (правый столбец). Параметры структуры: период гофрирования $d = 0.05$ см; ширина канавок $d_2 = 0.04$ см; глубина $d_3 = 0.5$ см (верхний ряд), $d_3 = 1$ см (средний ряд) и $d_3 = 1.5$ см (нижний ряд). Волновое число $k_0 = 1$ см $^{-1}$. Спектрально-угловая плотность энергии нормирована на величину $q^2|\tilde{\kappa}|^2/c$.

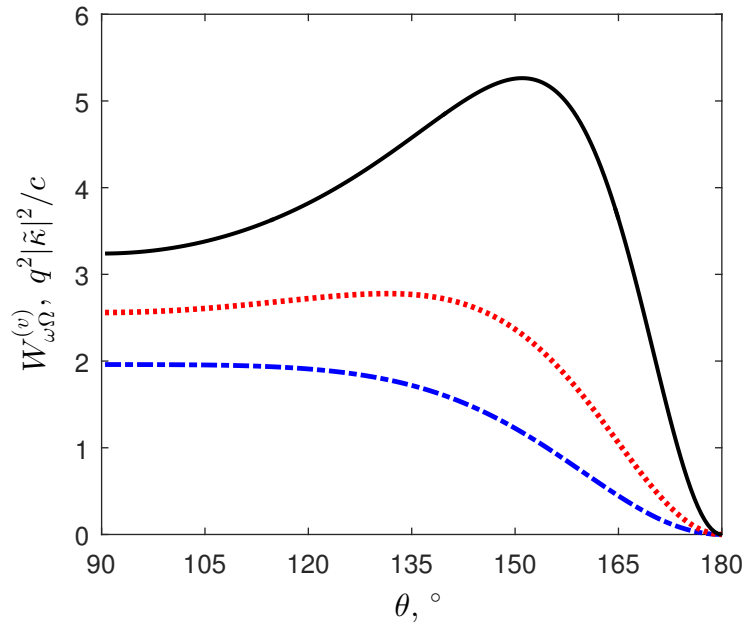


Рис.2.10. Зависимость спектрально-угловой плотности энергии $W_{\omega\Omega}^{(v)}$ от угла θ в случае $\varphi = 0^\circ$ (или $\varphi = 180^\circ$). Скорость пучка $\beta = 0.9$ (черная сплошная линия), $\beta = 0.8$ (красная пунктирная линия) и $\beta = 0.7$ (синяя штирих-пунктирная линия). Параметры структуры: период гофрирования $d = 0.05$ см, ширина канавок $d_2 = 0.04$ см, глубина $d_3 = 1.5$ см. Волновое число $k_0 = 1$ см $^{-1}$. Спектрально-угловая плотность энергии нормирована на величину $q^2 |\tilde{\kappa}|^2 / c$.

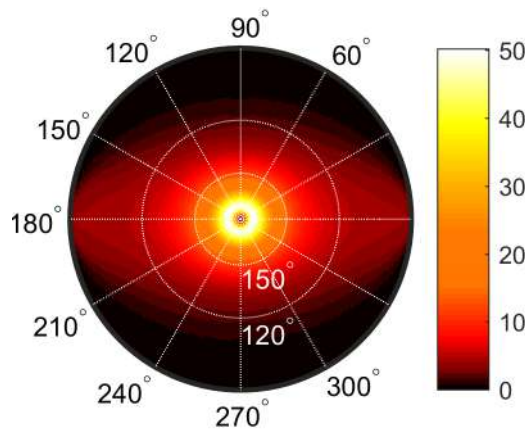


Рис.2.11. То же, что и на рис.2.9, для $\beta = 0.99$ и $d_3 = 1$ см.

сит от параметров структуры. Это легко показать, если положить $\varphi = 0^\circ$ (или $\varphi = 180^\circ$) в формулах (2.3.13)-(2.3.16). Тогда выражения для компонент поля объемной волны (2.3.13) переходят в известные формулы для случая гладкого идеального экрана (1.3.104) [63]. С физической точки зрения данный факт можно объяснить тем, что гофрированная поверхность не препятствует движению тока в направлении x , то есть вдоль канавок гофры.

2.3.4. Поверхностные волны

Теперь проанализируем вклады полюсов в интегралы по k_x в выражениях (2.3.5). Как отмечалось ранее, подынтегральные функции имеют две пары симметричных полюсов $\pm k_{x0}$ и $\pm k_{x1}$, заданных формулами (2.3.7) и (2.3.10), соответственно. Полюсы $\pm k_{x1}$ чисто мнимые. Их вклад не является полем излучения, так как даст экспоненциальное убывание поля в направлении x (данным вкладом можно пренебречь при условии $k_0\beta^{-1}\sqrt{1-\beta^2}|x| \gg 1$). Поэтому в дальнейшем мы рассмотрим только вклад полюсов $\pm k_{x0}$.

Таким образом, Фурье-образ вектора Герца при условии $\sqrt{(k_0^2 - k_y^2)(x^2 + z^2)} \gg 1$ можно приближенно представить в виде суммы $\vec{\Pi}_\omega^{(r)} \cong \vec{\Pi}_\omega^{(v)} + \vec{\Pi}_\omega^{(s)}$. Первое слагаемое (с индексом “ v ”) описывает объемную часть излучения, исследованную в предыдущем пункте параграфа. Второе слагаемое (с индексом “ s ”) представляет собой вклад полюсов $\pm k_{x0} = \pm k_0$. Данный вклад в интегралы (2.3.5) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \Pi_{x\omega}^{(s)} \\ \Pi_{z\omega}^{(s)} \end{pmatrix} = -\operatorname{sgn}(x) \frac{2q\tilde{\kappa}}{ck_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik_y y) dk_y \operatorname{Res}_{k_x=\pm k_0} \left(\begin{pmatrix} R_x \\ R_z \end{pmatrix} \frac{\exp(ik_x x + ik_{z0}|z|)}{k_{z0}} \right), \quad (2.3.20)$$

где коэффициенты R_x и R_z заданы выражениями (2.3.3) и (2.3.4), соответственно. Сосчитав вычеты, получим

$$\begin{pmatrix} \Pi_{x\omega}^{(s)} \\ \Pi_{z\omega}^{(s)} \end{pmatrix} = \frac{q\tilde{\kappa}\beta}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \begin{pmatrix} \eta_0 k_0^{-1} (ik_0 - \beta\sqrt{k_y^2 - k_0^2 g^2}) \\ -\operatorname{sgn}(x) (1 + i\beta g^2 \eta_0) (1 - g^2)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \times \frac{\exp(ik_0\sqrt{1-g^2}|x| + ik_y y - \sqrt{k_y^2 - k_0^2 g^2}|z|)}{k_0^2 + \beta(k_y^2 - k_0^2 g^2)}. \quad (2.3.21)$$

Напомним, что функция g^2 задана выражением (2.3.8). Используя (2.3.21), по формулам (1.2.18) найдем Фурье-образы компонент поля:

$$\begin{pmatrix} E_{x\omega}^{(s)} \\ E_{y\omega}^{(s)} \\ E_{z\omega}^{(s)} \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \begin{pmatrix} E_{x\omega, k_y}^{(s)} \\ E_{y\omega, k_y}^{(s)} \\ E_{z\omega, k_y}^{(s)} \end{pmatrix} \exp(ik_y y), \quad (2.3.22)$$

$$\begin{pmatrix} H_{x\omega}^{(s)} \\ H_{y\omega}^{(s)} \\ H_{z\omega}^{(s)} \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \begin{pmatrix} H_{x\omega, k_y}^{(s)} \\ H_{y\omega, k_y}^{(s)} \\ H_{z\omega, k_y}^{(s)} \end{pmatrix} \exp(ik_y y), \quad (2.3.23)$$

где

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} E_{x\omega, k_y}^{(s)} \\ E_{y\omega, k_y}^{(s)} \\ E_{z\omega, k_y}^{(s)} \end{array} \right\} = \frac{q\tilde{\kappa}\beta \exp\left(ik_0\sqrt{1-g^2}|x| - \sqrt{k_y^2 - k_0^2g^2}|z|\right)}{c \sqrt{1-g^2} [k_0^2 + \beta(k_y^2 - k_0^2g^2)]} \\ & \times \left\{ \begin{array}{l} ik_0\sqrt{1-g^2} \left(k_0g^2\eta_0 - \sqrt{k_y^2 - k_0^2g^2}\right) \\ -i \operatorname{sgn}(x) k_y \left[k_0\eta_0(1-g^2) + (1+i\beta\eta_0)\sqrt{k_y^2 - k_0^2g^2}\right] \\ -\operatorname{sgn}(x) \left[k_0^2 + i\beta\eta_0k_y^2 + \sqrt{k_y^2 - k_0^2g^2} \left(\sqrt{k_y^2 - k_0^2g^2} + k_0\eta_0(1-g^2)\right)\right] \end{array} \right\}, \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} H_{x\omega, k_y}^{(s)} \\ H_{y\omega, k_y}^{(s)} \\ H_{z\omega, k_y}^{(s)} \end{array} \right\} = \frac{q\tilde{\kappa}\beta \exp\left(ik_0\sqrt{1-g^2}|x| - \sqrt{k_y^2 - k_0^2g^2}|z|\right)}{c \left(k_0^2 + \beta(k_y^2 - k_0^2g^2)\right)} \\ & \times \left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{sgn}(x) k_0k_y (1+i\beta\eta_0g^2) (1-g^2)^{-\frac{1}{2}} \\ k_0^2 + \eta_0 \left(k_0\sqrt{k_y^2 - k_0^2g^2} + i\beta k_y^2\right) \\ -k_y\eta_0 \left(ik_0 - \beta\sqrt{k_y^2 - k_0^2g^2}\right) \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

Полученные выражения описывают электромагнитное поле поверхностных волн, которые возбуждаются при условии (2.3.9), то есть в случае, когда функция $g^2 < 1$. Напомним, что данные формулы справедливы для случая $\omega > 0$. Соответствующие выражения для отрицательных частот могут быть получены из (2.3.24) и (2.3.25) по правилу $F_{-\omega} = F_{\omega}^*$, вытекающему из вещественности исходных компонент поля. Дальнейший анализ интегралов (2.3.22) и (2.3.23) весьма сложен, поэтому рассмотрим некоторые энергетические характеристики.

Энергия поверхностной волны, проходящая за все время через единичную площадку, расположенную в плоскости (y, z) , в направлении $x > 0$ (или $x < 0$), то есть вдоль канавок гофры, может быть найдена по формуле

$$\frac{d^2W^{(s)}}{dydz} \equiv W_x^{(s)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt S_x, \quad (2.3.26)$$

где $S_x = (c/4\pi) \left(E_y^{(s)} H_z^{(s)} - E_z^{(s)} H_y^{(s)}\right)$ - x -компонента вектора Умова-Пойнтинга. Запишем компоненты поля через интегралы Фурье вида $F(\vec{r}, t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} d\omega dk_y F_{\omega, k_y} \exp(ik_y y - i\omega t)$ и подставим их в (2.3.26):

$$W_x^{(s)} = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \iiint_{-\infty}^{+\infty} d\omega d\omega' dk_y dk_y' \exp[i(k_y + k_y') y - i(\omega + \omega') t]$$

$$\times \left(E_{y \omega, k_y}^{(s)} H_{z \omega', k'_y}^{(s)} - E_{z \omega, k_y}^{(s)} H_{y \omega', k'_y}^{(s)} \right). \quad (2.3.27)$$

Интегрирование по времени сводится к δ -функции:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp [-i (\omega + \omega') t] = 2\pi \delta (\omega + \omega'). \quad (2.3.28)$$

Подставив (2.3.28) в (2.3.27) и проинтегрировав по ω' , получим

$$W_x^{(s)} = \frac{c}{2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} d\omega dk_y dk'_y \exp [i (k_y + k'_y) y] \left(E_{y \omega, k_y}^{(s)} H_{z -\omega, k'_y}^{(s)} - E_{z \omega, k_y}^{(s)} H_{y -\omega, k'_y}^{(s)} \right). \quad (2.3.29)$$

Далее перейдем к интегралу по положительным частотам:

$$\begin{aligned} W_x^{(s)} &= \frac{c}{2} \iint_{-\infty}^{+\infty} dk_y dk'_y \exp [i (k_y + k'_y) y] \\ &\times \left[\int_0^{+\infty} \left(E_{y \omega, k_y}^{(s)} H_{z -\omega, k'_y}^{(s)} - E_{z \omega, k_y}^{(s)} H_{y -\omega, k'_y}^{(s)} \right) + \int_{-\infty}^0 \left(E_{y \omega, k_y}^{(s)} H_{z -\omega, k'_y}^{(s)} - E_{z \omega, k_y}^{(s)} H_{y -\omega, k'_y}^{(s)} \right) \right] \\ &= \frac{c}{2} \int_0^{+\infty} d\omega \iint_{-\infty}^{+\infty} dk_y dk'_y \exp [i (k_y + k'_y) y] \\ &\times \left(E_{y \omega, k_y}^{(s)} H_{z -\omega, k'_y}^{(s)} - E_{z \omega, k_y}^{(s)} H_{y -\omega, k'_y}^{(s)} + E_{y -\omega, k_y}^{(s)} H_{z \omega, k'_y}^{(s)} - E_{z -\omega, k_y}^{(s)} H_{y \omega, k'_y}^{(s)} \right). \quad (2.3.30) \end{aligned}$$

Из выражений (2.3.24) и (2.3.25) следует, что величины $H_{y \omega, k_y}^{(s)}$ и $E_{z \omega, k_y}^{(s)}$ четны по k_y , а величины $H_{z \omega, k_y}^{(s)}$ и $E_{y \omega, k_y}^{(s)}$ нечетны. С учетом данного обстоятельства, а также свойства $F_{\omega, k_y}^* = F_{-\omega, -k_y}$, вытекающего из вещественности компонент поля, формула (2.3.30) принимает вид

$$\begin{aligned} W_x^{(s)} &= -\frac{c}{2} \int_0^{+\infty} d\omega \iint_{-\infty}^{+\infty} dk_y dk'_y \exp [i (k_y + k'_y) y] \\ &\times \left(E_{y \omega, k_y}^{(s)} H_{z \omega, k'_y}^{(s)*} + E_{z \omega, k_y}^{(s)} H_{y \omega, k'_y}^{(s)*} + E_{y \omega, k_y}^{(s)*} H_{z \omega, k'_y}^{(s)} + E_{z \omega, k_y}^{(s)*} H_{y \omega, k'_y}^{(s)} \right) \\ &= -\frac{c}{2} \int_0^{+\infty} d\omega \iint_{-\infty}^{+\infty} dk_y dk'_y \exp [i (k_y + k'_y) y] \\ &\times \left[E_{y \omega, k_y}^{(s)} H_{z \omega, k'_y}^{(s)*} + E_{z \omega, k_y}^{(s)} H_{y \omega, k'_y}^{(s)*} + \left(E_{y \omega, k_y}^{(s)} H_{z \omega, k'_y}^{(s)*} \right)^* + \left(E_{z \omega, k_y}^{(s)} H_{y \omega, k'_y}^{(s)*} \right)^* \right] \\ &= -c \int_0^{+\infty} d\omega \iint_{-\infty}^{+\infty} dk_y dk'_y \cos [(k_y + k'_y) y] \operatorname{Re} \left(E_{y \omega, k_y}^{(s)} H_{z \omega, k'_y}^{(s)*} + E_{z \omega, k_y}^{(s)} H_{y \omega, k'_y}^{(s)*} \right) \\ &- ic \int_0^{+\infty} d\omega \iint_{-\infty}^{+\infty} dk_y dk'_y \sin [(k_y + k'_y) y] \operatorname{Re} \left(E_{y \omega, k_y}^{(s)} H_{z \omega, k'_y}^{(s)*} + E_{z \omega, k_y}^{(s)} H_{y \omega, k'_y}^{(s)*} \right). \quad (2.3.31) \end{aligned}$$

Если в последнем слагаемом раскрыть синус суммы, то можно показать, что данное слагаемое обращается в ноль ввиду нечетности подынтегральной функции по k_y или k'_y . Таким образом, мы получаем

$$W_x^{(s)} = \int_0^{+\infty} W_{x\omega}^{(s)} d\omega, \quad (2.3.32)$$

где

$$W_{x\omega}^{(s)} = -c \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y dk'_y \cos [(k_y + k'_y) y] \operatorname{Re} \left(E_{y\omega, k_y}^{(s)} H_{z\omega, k'_y}^{(s)*} + E_{z\omega, k_y}^{(s)} H_{y\omega, k'_y}^{(s)*} \right) \quad (2.3.33)$$

суть спектральная плотность энергии поверхностных волн, проходящей через единичную площадку в направлении $x > 0$ (или $x < 0$).

Аналогичную формулу можно получить и для энергии, проходящей через единичную площадку, расположенную в плоскости (x, z) , в направлении $y > 0$ (или $y < 0$), то есть перпендикулярно канавкам гофры.

$$\frac{d^2 W^{(s)}}{dx dz} \equiv W_y^{(s)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt S_y, \quad (2.3.34)$$

где $S_y = (c/4\pi) (E_z^{(s)} H_x^{(s)} - E_x^{(s)} H_z^{(s)})$ - y -компонента вектора Умова-Пойнтинга. В итоге y -компонента спектральной плотности энергии примет вид

$$W_y^{(s)} = -c \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y dk'_y \sin [(k_y + k'_y) y] \operatorname{Im} \left(E_{x\omega, k_y}^{(s)} H_{z\omega, k'_y}^{(s)*} - E_{z\omega, k_y}^{(s)} H_{x\omega, k'_y}^{(s)*} \right). \quad (2.3.35)$$

Фурье-образы компонент поля, стоящие в (2.3.33) и (2.3.35), определяются соответствующими выражениями из (2.3.24) и (2.3.25).

На рис.2.12 представлены результаты численного расчета интегралов (2.3.33) и (2.3.35). В левом столбце показаны зависимости спектральной плотности $W_{y\omega}^{(s)}$ от координат x и y в плоскости $z = -0.5$ см для различных значений глубины структуры d_3 . В правом столбце аналогичные зависимости показаны для $W_{x\omega}^{(s)}$. Видно, что распределение спектральной плотности энергии существенно меняется при изменении d_3 . Чем больше глубина гофрирования, тем быстрее заряд теряет энергию на излучение. С ростом глубины концентрация энергии вдоль канавок гофры, то есть в направлении x , увеличивается (аналогичный эффект наблюдался и при исследовании объемного излучения, см. пункт 2.3.3 данного параграфа). Как уже отмечалось, это объясняется тем, что с ростом глубины увеличивается импеданс структуры η_0 . Проводимость в направлении y при этом падает, в то время как в направлении

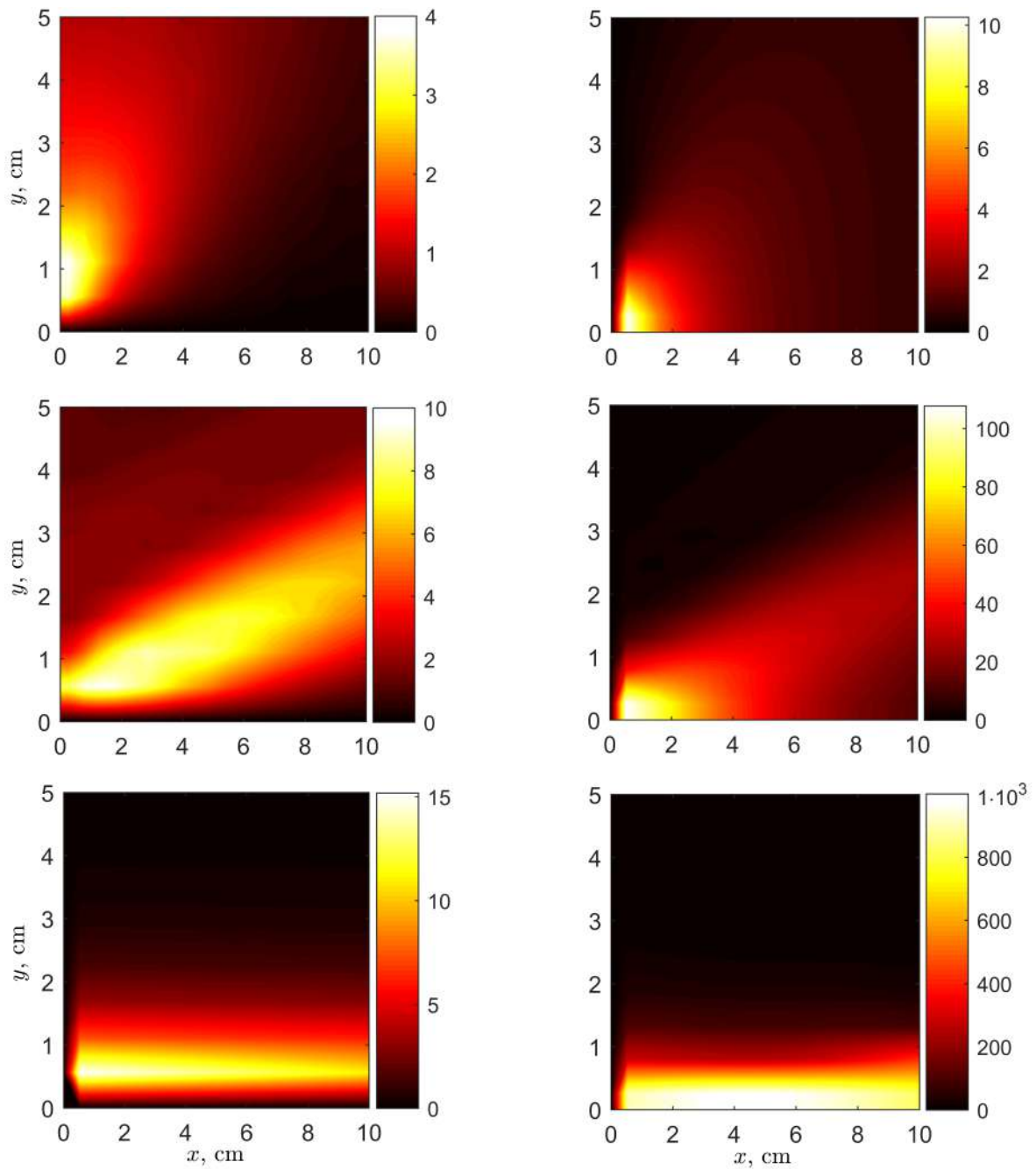


Рис.2.12. Зависимость спектральной плотности энергии поверхностных волн $W_{y\omega}^{(s)}$ (левый столбец) и $W_{x\omega}^{(s)}$ (правый столбец) от координат x и y в плоскости $z = -0.5$ см. Параметры структуры: период гофрирования $d = 0.05$ см; ширина канавок $d_2 = 0.04$ см; глубина $d_3 = 0.5$ см (верхний ряд), $d_3 = 1.3$ см (средний ряд) и $d_3 = 1.5$ см (нижний ряд). Скорость пучка $\beta = 0.99$. Волновое число $k_0 = 1$ см⁻¹. Спектральная плотность нормирована на величину $q^2|\tilde{\kappa}|^2/(c \cdot \text{см}^2)$.

x проводимость гофры бесконечна. Следовательно, с ростом d_3 отношение $W_{x\omega}^{(s)}/W_{y\omega}^{(s)}$ также увеличивается, и для относительно глубокой структуры имеем $W_{x\omega}^{(s)} \gg W_{y\omega}^{(s)}$ (графики в нижнем ряду рис.2.12).

2.4. Выводы

В данной главе было проведено аналитическое и численное исследование поля тонкого (в поперечном направлении) пучка заряженных частиц, движущегося равномерно и прямолинейно в присутствии безграничной планарной гофрированной структуры. Предполагалось, что период гофрирования существенно меньше длин рассматриваемых электромагнитных волн, что позволило применить метод эквивалентных граничных условий. Также подразумевалось, что глубина структуры имеет тот же порядок, что и обратное волновое число, то есть рассматривался случай глубокого гофрирования.

Как и в предыдущей главе, анализировались два варианта движения пучка относительно структуры:

- вдоль плоскости поверхности перпендикулярно направлению гофрирования;
- сквозь поверхность перпендикулярно ей.

Были найдены интегральные представления для компонент полного электромагнитного поля, поведение данного поля в дальней зоне исследовалось методами теории функций комплексного переменного.

В случае движения заряда вдоль гофрированной структуры было показано, что объемное излучение отсутствует, возбуждаются лишь две поверхностные волны, распространяющиеся без затухания вдоль плоскости поверхности в разные стороны от траектории пучка. Найдены Фурье-образы компонент электромагнитного поля поверхностной волны, приведены результаты расчета данного поля для гауссова пучка. Показано, что, в отличие от случая мелкой гофры, поверхностное излучение генерируется в широком диапазоне скоростей заряда и имеет более сложную структуру. Также продемонстрировано, что относительно глубокая гофрированная поверхность способствует генерации более мощных поверхностных волн, в то время как диагностика пучков (в ультрарелятивистском диапазоне скоростей) наиболее эффективна при относительно небольшой глубине гофрировки. Рассмотрены потери энергии заряда (в единицу длины пути), в результате чего получено выражение для спектральной плотности потерь энергии на излучение поверхностных волн, а также рассчитана полная энергия, теряемая зарядом на излучение. Приведены графические зависимости спектральной плотности энергии и полной энергии излучения. Показано, в частности, что энергетический спектр излучения состоит из узких частотных диапазонов, каждый из которых характеризуется резким максимумом, а электромагнитное поле поверхностной волны почти полностью генерируется на частотах, соответствующих первому максимуму. Отметим

также, что диапазон скоростей заряда, в котором происходит генерация поверхностных волн, увеличивается с ростом глубины гофрирования и с уменьшением длины пучка.

В случае пересечения зарядом гофрированной поверхности было показано, что волновое поле пучка состоит как из поверхностных, так и из объемных волн. Найдены Фурье-образы компонент электромагнитного поля объемной волны, рассмотрены потери энергии заряда, получено выражение для спектрально-угловой плотности энергии объемного излучения. Продемонстрировано, в частности, что максимум плотности энергии наблюдается в плоскости, содержащей нормаль к поверхности и направление гофрирования. При этом угол, соответствующий максимуму в данной плоскости, растет с ростом скорости заряда (угол отсчитывается от поверхности), а для ультрарелятивистского пучка направление максимального излучения близко к направлению движения заряда. Затем был детально рассмотрен эффект генерации поверхностного излучения. Найдены Фурье-образы компонент электромагнитного поля поверхностных волн, распространяющихся без затухания вдоль плоскости поверхности. Проанализированы потери энергии заряда на излучение поверхностных волн, получены выражения для спектральной плотности энергии, проходящей через единичную площадку в двух направлениях (лежащих в плоскости поверхности): вдоль канавок гофры и перпендикулярно им. Показано, в частности, что распределение излучения весьма чувствительно к изменению глубины гофры (то же можно сказать и про объемное излучение). Это связано с тем, что с ростом глубины структуры ее проводимость в направлении, перпендикулярном канавкам, уменьшается, в то время как в направлении гофрирования структура обладает идеальной проводимостью. Таким образом, при увеличении глубины поверхности почти вся энергия излучения концентрируется вдоль канавок гофры.

Глава 3. Излучение пучка заряженных частиц, движущегося вдоль оси глубокогфрированного волновода с малым периодом

Данная глава посвящена исследованию излучения пучка заряженных частиц при его движении вдоль оси цилиндрического волновода с идеально проводящей глубокогфрированной стенкой. В первом параграфе мы рассмотрим задачу об излучении заряда, движущегося в бесконечном волноводе. Во втором параграфе речь пойдет о дифракции отдельной волноводной моды на открытом конце полубесконечного волновода. Предполагается, что период структуры много меньше длин рассматриваемых электромагнитных волн и радиуса волновода. В этом случае аналитическое решение задачи может быть получено с помощью эквивалентных граничных условий.

3.1. Излучение пучка заряженных частиц, движущегося вдоль оси бесконечного глубокогфрированного волновода

3.1.1. Общее решение

Исследуемая структура представляет собой бесконечный цилиндрический волновод, находящийся в вакууме. Стенка волновода образована глубокогфрированной поверхностью, имеющей прямоугольный профиль (на рис.3.1 изображено продольное сечение данного волновода). Поскольку период структуры d много меньше длин электромагнитных волн λ и радиуса волновода a , то есть

$$d \ll \lambda, \quad d \ll a,$$

гофрированную стенку можно заменить некоторой гладкой анизотропной поверхностью, на которой выполняются эквивалентные граничные условия (ЭГУ).

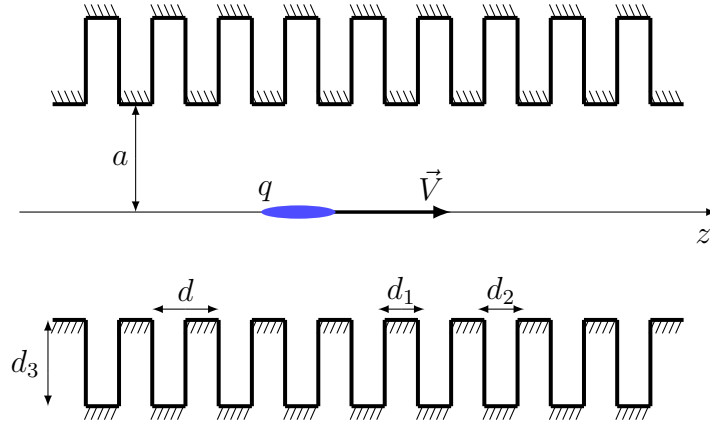


Рис.3.1. Движение заряда вдоль оси цилиндрического глубокогоффрированного волновода (показано продольное сечение волновода).

Напомним, что для глубокой гофры характерные значения ее глубины имеют порядок обратного волнового числа, то есть должно выполняться условие (2.1.1). В этом заключается принципиальное отличие глубокой гофры от случая мелкого гофрирования, когда глубина структуры много меньше длин рассматриваемых электромагнитных волн (см. главу 1).

Ввиду симметрии задачи мы будем пользоваться цилиндрической системой координат (r, φ, z) , где ось z совпадает с осью волновода. Тогда ЭГУ для Фурье-образов электрического и магнитного полей примут вид [15]

$$E_z \omega|_{r=a} = \eta H_\varphi \omega|_{r=a}, \quad E_\varphi \omega|_{r=a} = 0. \quad (3.1.1)$$

Импеданс структуры $\eta = i\eta_0$ здесь задан выражением (2.1.3).

Подчеркнем, что несмотря на конечный радиус волновода (то есть конечный радиус кривизны гофры), мы можем использовать ЭГУ, полученные для планарной поверхности [15]. При этом предполагается, что радиус волновода существенно превышает глубину гофрирования.

Мы предполагаем, что пучок заряженных частиц движется вдоль оси волновода со скоростью $\vec{V} = c\beta\vec{e}_z$ и имеет пренебрежимо малые поперечные размеры. В этом случае объемные плотности заряда и тока определяются выражениями

$$\rho = q\delta(\vec{r})\kappa(z - Vt), \quad j_z \equiv j = c\beta q\delta(\vec{r})\kappa(z - c\beta t), \quad (3.1.2)$$

где $\kappa(z - c\beta t)$ - профиль пучка, то есть функция, описывающая распределение заряда в пучке вдоль оси движения. Полное поле пучка будем представлять в виде суммы “вынужденного” поля, то есть поля пучка в неограниченном вакууме (с индексом “i”), и “свободного”

поля, возникающего за счет гофрированной поверхности (с индексом “ r ”).

“Вынужденное” электромагнитное поле заряда хорошо известно. Приведем кратко вывод выражений для компонент данного поля в форме, удобной для дальнейшего анализа (подробности можно найти, например, в пособии [107]). Фурье-образ вектора Герца “вынужденного” поля имеет вид

$$\Pi_{r\omega}^{(i)} = \Pi_{\varphi\omega}^{(i)} = 0, \quad \Pi_{z\omega}^{(i)} = \frac{iq\tilde{\kappa}}{\pi ck_0} \exp\left(i\frac{k_0 z}{\beta}\right) \iint_{-\infty}^{+\infty} dk_y dk_x \frac{\exp(ik_x x + ik_y y)}{k_x^2 + k_y^2 + k_0^2 \frac{1-\beta^2}{\beta^2}}, \quad (3.1.3)$$

где Фурье-образ профиля пучка $\tilde{\kappa}$ определяется по формуле (1.2.11). Введем цилиндрическую систему координат в пространстве волновых векторов по правилу

$$\begin{cases} k_x = k_r \cos(\varphi_k) \\ k_y = k_r \sin(\varphi_k) \\ k_z = k_z. \end{cases} \quad (3.1.4)$$

В координатах (3.1.4) выражение (3.1.3) примет вид

$$\Pi_{z\omega}^{(i)} = \frac{iq\tilde{\kappa}}{\pi ck_0} \exp\left(i\frac{k_0 z}{\beta}\right) \int_0^{2\pi} d\varphi_k \int_0^{+\infty} dk_r \frac{k_r \exp[ik_r r \cos(\varphi - \varphi_k)]}{k_r^2 + k_0^2 \frac{1-\beta^2}{\beta^2}}. \quad (3.1.5)$$

Интеграл по φ_k - табличный [108], а интеграл по k_r можно свести к интегралу по всей оси и сосчитать его с помощью теоремы о вычетах [109]. В результате получим

$$\Pi_{z\omega}^{(i)} = \frac{2iq\tilde{\kappa}}{ck_0} K_0(|k_{r0}|r) \exp\left(i\frac{k_0 z}{\beta}\right), \quad (3.1.6)$$

где $|k_{r0}| = |k_0|(\beta\gamma)^{-1}$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, а $K_0()$ - функция Макдональда. Фурье-образы компонент “вынужденного” электромагнитного поля можно найти по формулам (1.2.18). В итоге имеем

$$\begin{Bmatrix} E_r^{(i)} \\ E_z^{(i)} \\ H_\varphi^{(i)} \end{Bmatrix} = \frac{2q\tilde{\kappa}|k_0|}{c\beta^2} \begin{Bmatrix} \sqrt{1 - \beta^2} K_1(|k_{r0}|r) \\ -i \operatorname{sgn}(k_0) (1 - \beta^2) K_0(|k_{r0}|r) \\ \beta \sqrt{1 - \beta^2} K_1(|k_{r0}|r) \end{Bmatrix} \exp\left(i\frac{k_0 z}{\beta}\right). \quad (3.1.7)$$

Теперь рассмотрим “свободное” поле. Фурье-образ вектора Герца данного поля имеет одну ненулевую компоненту (вдоль оси z) и удовлетворяет однородному уравнению

$$(\Delta + k_0^2) \Pi_{z\omega}^{(r)} = 0, \quad (3.1.8)$$

где

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (3.1.9)$$

есть оператор Лапласа в цилиндрических координатах. Уравнение (3.1.8) будем решать методом разделения переменных. Ввиду симметрии задачи по φ потенциал Герца является функцией двух переменных, то есть

$$\Pi_z^{(r)} = \psi(r) \chi(z). \quad (3.1.10)$$

Подставив (3.1.10) в (3.1.8) и поделив на $\psi(r) \chi(z)$, получим

$$\frac{1}{\psi(r)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \psi(r)}{\partial r} \right] + \frac{1}{\chi(z)} \frac{\partial^2 \chi(z)}{\partial z^2} + k_0^2 = 0. \quad (3.1.11)$$

Как видим, первое слагаемое в (3.1.11) зависит только от переменной r , а второе - только от z . Следовательно, каждое из слагаемых равно постоянной величине, и мы получаем два независимых уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi(r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \psi(r) + \mu^2 \psi(r) = 0, \quad (3.1.12)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \chi(z) + \nu^2 \chi(z) = 0, \quad (3.1.13)$$

где $k_0^2 = \mu^2 + \nu^2$, а μ и ν - поперечное и продольное волновые числа, соответственно.

Сделаем в уравнении (3.1.12) замену переменной $\tilde{r} = \mu r$

$$\frac{\partial^2}{\partial \tilde{r}^2} \psi(\tilde{r}) + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \psi(\tilde{r}) + \psi(\tilde{r}) = 0. \quad (3.1.14)$$

Это уравнение Бесселя, решением которого являются цилиндрические функции. Поскольку начало координат входит в область определения искомой функции, в качестве решения уравнения (3.1.14) следует взять функцию Бесселя $J_0(\tilde{r})$, не имеющую особенностей при $\tilde{r} \rightarrow 0$.

Решения уравнения (3.1.13) с точностью до константы R можно записать в виде

$$q(z) = R \exp(\pm i\nu z). \quad (3.1.15)$$

Для нас подходит решение со знаком “+”, описывающее волны, распространяющиеся в положительном направлении оси z . Зависимость от продольной координаты определяется “вынужденным” полем (3.1.7). Тогда, чтобы удовлетворить граничным условиям, следует положить $\nu = k_0/\beta$. Поперечное волновое число в этом случае примет вид $\mu \equiv k_{r0} = i|k_0|(\beta\gamma)^{-1}$.

Таким образом, потенциал Герца “свободного” поля определяется выражением

$$\Pi_z^{(r)} = RI_0(|k_{r0}|r) \exp\left(i \frac{k_0 z}{\beta}\right), \quad (3.1.16)$$

где $I_0()$ - модифицированная функция Бесселя, связанная с функцией Бесселя соотношением $J_0(ix) = I_0(x)$. Пользуясь формулами (1.2.18) и свойством $I'_0() = I_1()$, найдем Фурье-образы

компонент электромагнитного поля

$$\begin{pmatrix} E_r^{(r)} \\ E_z^{(r)} \\ H_\varphi^{(r)} \end{pmatrix} = -\frac{2q\tilde{\kappa}|k_0|}{c\beta^2} R \begin{pmatrix} \sqrt{1-\beta^2} I_1(|k_{r0}|r) \\ i \operatorname{sgn}(k_0) (1-\beta^2) I_0(|k_{r0}|r) \\ \beta \sqrt{1-\beta^2} I_1(|k_{r0}|r) \end{pmatrix} \exp\left(i\frac{k_0 z}{\beta}\right). \quad (3.1.17)$$

Теперь воспользуемся граничными условиями (3.1.1). Полное электромагнитное поле заряда определяется как сумма “вынужденного” и “свободного” полей. Подставив полное поле в (3.1.1), получаем уравнение

$$E_z^{(i)}|_{r=a} + E_z^{(r)}|_{r=a} = i\eta_0 (H_\varphi^{(i)} + H_\varphi^{(r)})|_{r=a}, \quad (3.1.18)$$

где Фурье-образы компонент определяются соответствующими выражениями из (3.1.7) и (3.1.17). Из уравнения (3.1.18) следует, что коэффициент R имеет вид

$$R = -\frac{K_0(|k_{r0}|a) + \operatorname{sgn}(k_0) \beta\gamma\eta_0 K_1(|k_{r0}|a)}{I_0(|k_{r0}|a) - \operatorname{sgn}(k_0) \beta\gamma\eta_0 I_1(|k_{r0}|a)}, \quad (3.1.19)$$

где $|k_{r0}| = |k_0| (\beta\gamma)^{-1}$.

3.1.2. Исследование поля, возникающего за счет гофрированной поверхности

Исследуем “свободное” поле. Компоненты данного поля можно найти, сосчитав интегралы Фурье

$$\begin{pmatrix} E_r^{(r)} \\ E_z^{(r)} \\ H_\varphi^{(r)} \end{pmatrix} = c \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \begin{pmatrix} E_r^{(r)} \\ E_z^{(r)} \\ H_\varphi^{(r)} \end{pmatrix} \exp(-ik_0 ct). \quad (3.1.20)$$

Подставив в (3.1.20) соответствующие выражения из (3.1.7) и (3.1.17), получаем

$$\begin{pmatrix} E_r^{(r)} \\ E_z^{(r)} \\ H_\varphi^{(r)} \end{pmatrix} = -\frac{2q}{\beta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \tilde{\kappa}|k_0| R \begin{pmatrix} \sqrt{1-\beta^2} I_1(|k_{r0}|r) \\ i \operatorname{sgn}(k_0) (1-\beta^2) I_0(|k_{r0}|r) \\ \beta \sqrt{1-\beta^2} I_1(|k_{r0}|r) \end{pmatrix} \exp\left(i\frac{k_0 \zeta}{\beta}\right), \quad (3.1.21)$$

где $\zeta = z - c\beta t$, а коэффициент R задан соотношением (3.1.19).

Особенностями подынтегральных функций в (3.1.21) являются нули знаменателя в выражении для R , то есть решения дисперсионного уравнения

$$I_0(|k_{r0}|a) = \operatorname{sgn}(k_0) \beta\gamma\eta_0 I_1(|k_{r0}|a). \quad (3.1.22)$$

Уравнение (3.1.22) имеет бесконечное множество решений, поскольку импеданс η_0 является периодической функцией (см. формулу (2.1.3) для импеданса). В отсутствие поглощения энергии в среде или стенках данные решения чисто вещественны и, ввиду четности функций в обеих частях равенства (3.1.22), располагаются симметрично по отношению к мнимой оси. Обозначим их через

$$k_0 = k_{0n}^{\pm}, \quad (3.1.23)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$. Для того чтобы установить правило обхода полюсов, можно воспользоваться методом введения малого затухания. Согласно ему, при учете диссипации (в среде или стенках волновода) вклад каждого полюса в фиксированной точке должен убывать со временем. Так как величины k_{0n}^{\pm} пропорциональны частотам, то вклады полюсов будут убывать, если их мнимые части будут отрицательными. Поэтому при учете поглощения полюсы должны лежать ниже контура интегрирования. В пределе исчезающе малого поглощения этот факт можно учесть, обходя полюсы по бесконечно малым полуокружностям (рис.3.2).

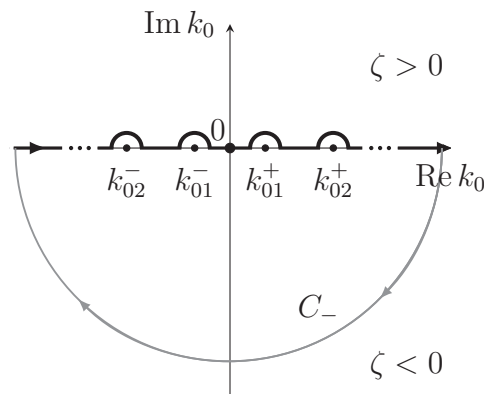


Рис.3.2. Расположение полюсов, контура интегрирования и полуокружности бесконечного радиуса C_- на комплексной плоскости k_0 .

Подчеркнем, что подынтегральные функции в (3.1.21) имеют и другие особенности, к которым относятся точки ветвления модифицированных функций Ханкеля. Вклад данных особенностей определяет квазикулоновое поле заряда и не представляет для нас интереса. Поэтому далее мы сосредоточимся только на вкладах полюсов k_{0n}^{\pm} , то есть рассмотрим волновую часть поля (поле излучения).

Дополняя контур интегрирования бесконечной полуокружностью в верхней (при $\zeta > 0$) или нижней (при $\zeta < 0$) полуплоскости и рассчитывая вычеты, получим выраже-

ния для компонент поля излучения (позначим их индексом “ w ”):

$$\begin{pmatrix} E_r^{(w)} \\ E_z^{(w)} \\ H_\varphi^{(w)} \end{pmatrix} = - \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} E_{rn}^{(w)} \sin(k_{0n}\zeta/\beta) \\ E_{zn}^{(w)} \cos(k_{0n}\zeta/\beta) \\ H_{\varphi n}^{(w)} \sin(k_{0n}\zeta/\beta) \end{pmatrix} \Theta(-\zeta), \quad (3.1.24)$$

где $\Theta()$ - функция Хевисайда. Амплитуды компонент определяются по формулам

$$\begin{pmatrix} E_{rn}^{(w)} \\ E_{zn}^{(w)} \\ H_{\varphi n}^{(w)} \end{pmatrix} = \frac{q\tilde{\kappa}_n}{\beta a} k_{0n} R_n \begin{pmatrix} I_1(k_{r0n}r) \\ \gamma^{-1} I_0(k_{r0n}r) \\ \beta I_1(k_{r0n}r) \end{pmatrix}, \quad (3.1.25)$$

где $\tilde{\kappa}_n = \tilde{\kappa}(k_{0n})$, $k_{r0n} = k_{0n}(\beta\gamma)^{-1}$. Выражение для коэффициента R_n имеет вид

$$R_n = \frac{8\pi [K_0(k_{r0n}a) + \beta\gamma\eta_{0n}K_1(k_{r0n}a)]}{\beta\gamma\eta_{0n}I_0(k_{r0n}a) - I_1(k_{r0n}a) \left[1 + \frac{\beta^2\gamma^2}{k_{0n}a} \left(\eta_{0n} - k_{0n} \frac{\partial}{\partial k_0} \eta_0 \Big|_{k_0=k_{0n}} \right) \right]}. \quad (3.1.26)$$

Здесь $\eta_{0n} = \eta_0(k_{0n})$, а производная импеданса по k_0

$$\frac{\partial}{\partial k_0} \eta_0 = \frac{d_2 [d_3 + dl \sin^2(k_0 d_3)]}{d \cos^2(k_0 d_3) [1 - k_0 dl \operatorname{tg}(k_0 d_3)]^2}. \quad (3.1.27)$$

Подчеркнем, что n -ый член ряда (3.1.24) представляет собой сумму вкладов двух полюсов: k_{0n}^+ и k_{0n}^- . При этом под k_{0n} в формулах (3.1.24)-(3.1.26) подразумевается абсолютное значение n -ого полюса. В дальнейшем, при рассмотрении слагаемого с номером n из (3.1.24), мы будем говорить “вклад полюса k_{0n} ”.

Проанализируем первое слагаемое в (3.1.24), то есть излучение на наименьшей возможной частоте (вклад полюса k_{01}). На рис.3.3 в левом столбце представлены зависимости частоты излучения $f_1 = ck_{01}/(2\pi)$ от скорости заряда β при различных значениях глубины гофры d_3 и ширины ее канавок d_2 . Из графиков видно, что при рассматриваемых параметрах излучение генерируется на частотах - единицы гигагерц. С ростом скорости заряда частота уменьшается. Тот же эффект наблюдается при уменьшении глубины гофры и при увеличении ширины канавок. Отметим, что с ростом глубины структуры зависимость частоты излучения от скорости заряда становится слабее.

В среднем и правом столбцах рис.3.3 представлены зависимости амплитуд $E_{r1}^{(w)}$ и $E_{z1}^{(w)}$ от скорости β . При расчетах предполагалось, что заряд - точечный, то есть распределение заряда вдоль оси движения описывается дельта-функцией $\kappa = \delta(z - c\beta t)$. Тогда, согласно (1.2.11), Фурье-образ $\tilde{\kappa} = 1/(2\pi)$. Из графиков следует, что с увеличением скорости компоненты поля монотонно возрастают. Кривые для разных значений глубины гофры имеют

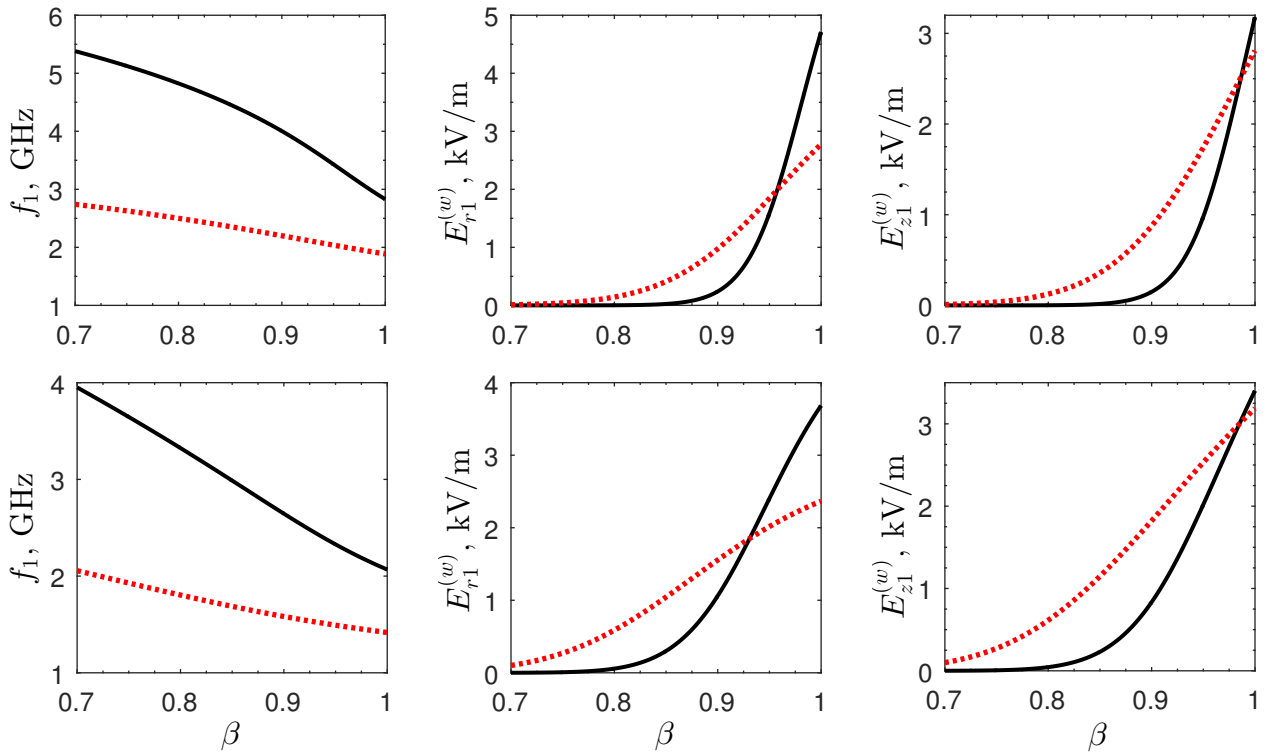


Рис.3.3. Зависимость частоты излучения f_1 (левый столбец), амплитуд $E_{r1}^{(w)}$ (средний столбец) и $E_{z1}^{(w)}$ (правый столбец) от скорости β для точечного заряда с $q = 1$ нКл. Параметры структуры: период гофрирования $d = 0.1$ см; глубина $d_3 = 1$ см (черные сплошные линии) и $d_3 = 2$ см (красные пунктирные линии); ширина канавок $d_2 = 0.05$ см (верхний ряд) и $d_2 \rightarrow d$ (система диафрагм, нижний ряд); радиус волновода $a = 10$ см. Координата $r = 5$ см. Частота f_1 определяется из дисперсионного уравнения (3.1.22). Величины f_1 , $E_{r1}^{(w)}$ и $E_{z1}^{(w)}$ приведены в системе СИ (частота в ГГц, амплитуды компонент в кВ/м).

одну точку пересечения, то есть изменение глубины может привести как к усилению, так и ослаблению электрического поля. Например, в случае компоненты $E_{z1}^{(w)}$ (правый столбец) увеличение глубины структуры приводит к ослаблению поля только для ультрарелятивистских зарядов. Если изменять ширину канавок гофры (при фиксированной глубине), аналогичный вывод можно сделать только для компоненты $E_{r1}^{(w)}$: при скорости заряда, превышающей некоторое значение, увеличение параметра d_2 приводит к ослаблению поля. Что касается продольной компоненты электрического поля, то с ростом d_2 значение $E_{z1}^{(w)}$ возрастает при любой скорости заряда.

Итак, мы рассмотрели вклад полюса k_{01} , то есть слагаемое с номером $n = 1$ в (3.1.24). Расчеты показывают, что вкладами остальных полюсов (с номерами $n > 1$) можно пренебречь. На рис.3.4 приведены зависимости относительных величин $E_{r2}^{(w)}/E_{r1}^{(w)}$ и $E_{z2}^{(w)}/E_{z1}^{(w)}$ от скорости заряда β . Амплитуды электрического поля $E_{r2}^{(w)}$ и $E_{z2}^{(w)}$ есть результат вклада по-

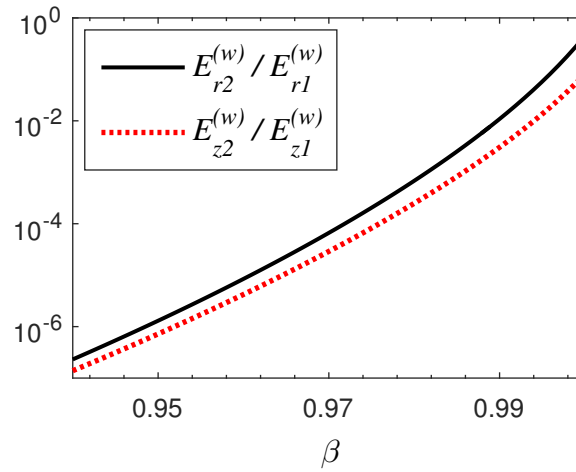


Рис.3.4. Зависимость $E_{r2}^{(w)} / E_{r1}^{(w)}$ (черная сплошная кривая) и $E_{z2}^{(w)} / E_{z1}^{(w)}$ (красная пунктирная кривая) от скорости β для точечного заряда с $q = 1$ нКл. Параметры структуры: период гофрирования $d = 0.1$ см, глубина $d_3 = 1$ см, ширина канавок $d_2 = 0.05$ см, радиус волновода $a = 10$ см. Координата $r = 5$ см. Значения по оси ординат приведены в логарифмическом масштабе.

люса k_{02} . Для удобства, значения по осям ординат приведены в логарифмическом масштабе. Как видим, полное поле заряда почти полностью определяется первым слагаемым в (3.1.24). Вклады остальных полюсов могут быть существенны только для релятивистских зарядов.

3.2. Дифракция волноводной TM_{01} моды на открытом конце глубокогофрированного волновода

В данном параграфе мы рассмотрим дифракцию отдельной волноводной моды на открытом конце цилиндрического глубокогофрированного волновода. Данная мода может быть сгенерирована, в частности, пучком заряженных частиц при его движении вдоль волноводной оси. Поскольку предполагается, что период гофрирования много меньше рассматриваемых длин волн и радиуса волновода, электромагнитное поле падающей моды может быть получено с помощью эквивалентных граничных условий. Дальнейшее решение задачи основывается на методе Винера-Хопфа-Фока [26–29] (в литературе данный метод известен также как метод обобщенного сшивания [110]).

Стоит отметить, что метод Винера-Хопфа-Фока применялся ранее, в частности, при решении задач о дифракции излучения на открытом конце гофрированного волновода [24] и гладкого волновода с диэлектрическим заполнением [110–112]. В статье [110] было получено аналитическое решение задачи для прямоугольного волновода, имеющего бесконечный фланец и нагруженного диэлектрическими пластинами (до этого был исследован аналогичный волновод без заполнения [113]). В работах [111, 112] метод Винера-Хопфа-Фока был модернизирован для случая цилиндрического волновода с заполнением и открытым концом. В результате было получено аналитическое решение для цилиндрического гладкого волновода, имеющего сплошное [111] и частичное (цилиндрический слой) [112] диэлектрическое заполнение. Стоит сказать, что в данных работах приведено сравнение теории с результатами численного моделирования в среде CST Particle Studio. Сравнение показало высокую точность аналитических результатов. Алгоритм расчета электромагнитного поля, развитый в [111, 112], затем был применен при решении задачи, где исследовался цилиндрический волновод с идеально проводящей мелкофрированной стенкой [24].

3.2.1. Поле внутри волновода

На рис.3.5 изображено продольное сечение исследуемой структуры. Как и в предыдущем параграфе, мы будем пользоваться цилиндрической системой координат (r, φ, z) , где ось z совпадает с осью волновода. В области $z < 0$ располагается полубесконечный цилиндрический волновод с идеально проводящей глубокогофрированной стенкой. В плоскости $z = 0$ при $r > a$, где a - радиус волновода, имеется бесконечный идеально проводящий фланец.

Предполагается, что на открытый конец волновода падает симметричная поперечно-

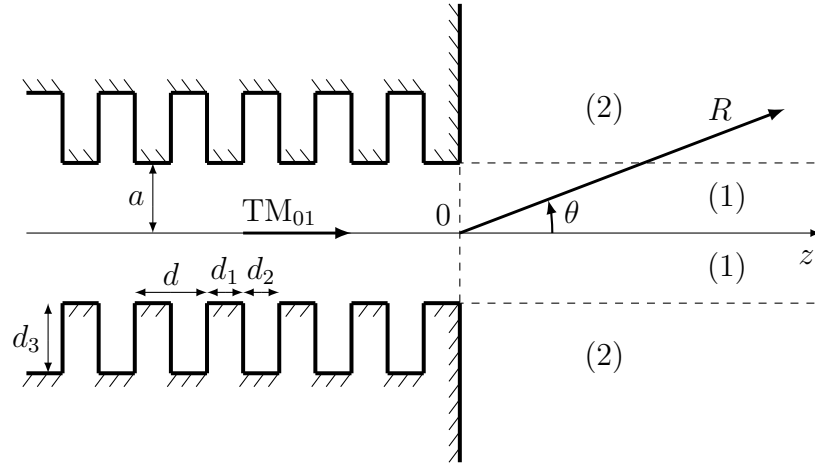


Рис.3.5. Продольное сечение цилиндрического глубокогоффрированного волновода с открытым концом (при наличии фланца).

магнитная TM_{01} мода, которая генерируется пучком заряженных частиц при его движении вдоль волноводной оси. Электромагнитное поле рассматриваемой моды было получено нами в предыдущем параграфе. Данное поле описывается слагаемым с номером $n = 1$ в формуле (3.1.24).

Для удобства запишем компоненты поля падающей (с индексом “ i ”) TM_{01} моды в комплексной форме (здесь и далее, для краткости, мы будем опускать множитель $\exp(-i\omega_1 t)$, где $\omega_1 = k_{01}c$):

$$H_{\varphi}^{(i)} = \frac{iq\tilde{\kappa}_1}{a} k_{01} R_1 I_1(k_{r01}r) \exp(ik_{01}\beta^{-1}z), \quad (3.2.1)$$

$$E_r^{(i)} = \frac{iq\tilde{\kappa}_1}{a\beta} k_{01} R_1 I_1(k_{r01}r) \exp(ik_{01}\beta^{-1}z), \quad (3.2.2)$$

$$E_z^{(i)} = -\frac{q\tilde{\kappa}_1}{a\beta\gamma} k_{01} R_1 I_0(k_{r01}r) \exp(ik_{01}\beta^{-1}z). \quad (3.2.3)$$

Реальное (физически измеримое) поле суть вещественная часть выражений (3.2.1)-(3.2.3).

Электромагнитное поле, отраженное (с индексом “ r ”) от открытого конца волновода, можно представить в виде суммы собственных волноводных мод, распространяющихся в противоположном направлении оси z :

$$H_{\varphi}^{(r)} = \frac{iqk_{01}}{a} \sum_{m=1}^{\infty} M_m J_1(k_{rm}r) \exp(-ik_{zm}z), \quad (3.2.4)$$

$$E_r^{(r)} = -\frac{iq}{a} \sum_{m=1}^{\infty} k_{zm} M_m J_1(k_{rm}r) \exp(-ik_{zm}z), \quad (3.2.5)$$

$$E_z^{(r)} = -\frac{q}{a} \sum_{m=1}^{\infty} k_{rm} M_m J_0(k_{rm}r) \exp(-ik_{zm}z), \quad (3.2.6)$$

где неизвестные коэффициенты $\{M_m\}$ будут найдены позже. Поперечные волновые числа $\{k_{rm}\}$ определяются из дисперсионного уравнения

$$k_{rm} J_0(k_{rm} a) = \eta_0 k_{01} J_1(k_{rm} a), \quad (3.2.7)$$

вытекающего из эквивалентных граничных условий (3.1.1).

3.2.2. Поле снаружи волновода

Ниже мы будем рассматривать только компоненту магнитного поля H_φ . Выражения для компонент электрического поля E_r и E_z могут быть получены по формулам

$$E_r = \frac{1}{ik_{01}} \frac{\partial H_\varphi}{\partial z}, \quad E_z = \frac{-1}{ik_{01} r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) \right]. \quad (3.2.8)$$

Разделим пространство снаружи волновода ($z > 0$) на две области: $r < a$ и $r > a$ (на рис.3.5 они обозначены через (1) и (2), соответственно). Для дальнейших выкладок удобно доопределить магнитное поле на область $z < 0$ (при $r > a$). В связи с этим, введем новую функцию

$$\tilde{H}_\varphi^{(2)}(r, z) = H_\varphi^{(2)}(r, z) \Theta(z) + H_\varphi^{(2)}(r, -z) \Theta(-z), \quad (3.2.9)$$

где $\Theta()$ - функция Хевисайда, а верхний индекс обозначает принадлежность к области (2). С физической точки зрения нас интересует только случай $z > 0$, когда второе слагаемое в (3.2.9) равно нулю и, следовательно, $\tilde{H}_\varphi^{(2)}(r, z) = H_\varphi^{(2)}(r, z)$. Подчеркнем, что слагаемое $H_\varphi^{(2)}(r, -z) \Theta(-z)$ не имеет физического смысла и необходимо только для математических преобразований.

Будем решать уравнение Гельмгольца для магнитного поля (при $z > 0$)

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} + k_{01}^2 \right] H_\varphi^{(1,2)}(r, z) = 0. \quad (3.2.10)$$

Для области (1) введем функцию $\Psi_+^{(1)}(r, \alpha)$ по правилу

$$\Psi_+^{(1)}(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_\varphi^{(1)}(r, z) \Theta(z) \exp(i\alpha z) dz. \quad (3.2.11)$$

Индекс “+” здесь означает, что на комплексной плоскости α функция аналитична при $\text{Im } \alpha > -\delta$, где $\delta > 0$ (при положительной мнимой части α подынтегральная функция экспоненциально убывает, если $|\alpha| \rightarrow \infty$, так как $z > 0$) [26]. Для области (2) введем функцию $\Psi^{(2)}(r, \alpha)$ по правилу

$$\Psi^{(2)}(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{H}_\varphi^{(2)}(r, z) \exp(i\alpha z) dz. \quad (3.2.12)$$

Функция $\tilde{H}_\varphi^{(2)}(r, z)$ в (3.2.12) определена выражением (3.2.9). Заметим, что $\Psi^{(2)}(r, \alpha) = \Psi_+^{(2)}(r, \alpha) + \Psi_-^{(2)}(r, \alpha)$, где

$$\Psi_+^{(2)}(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_\varphi^{(2)}(r, z) \Theta(z) \exp(i\alpha z) dz, \quad (3.2.13)$$

$$\Psi_-^{(2)}(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_\varphi^{(2)}(r, -z) \Theta(-z) \exp(i\alpha z) dz. \quad (3.2.14)$$

Индекс “-” здесь означает, что на комплексной плоскости α функция аналитична при $\text{Im } \alpha < \delta$ [26]. Отметим, что функция $\Psi_+^{(2)}(r, -\alpha) = \Psi_-^{(2)}(r, \alpha)$ и, следовательно, аналитична в области $\text{Im } \alpha < \delta$.

Поддействуем на уравнение (3.2.10) оператором $(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(z) \exp(i\alpha z) dz$. Имеем

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} + k_{01}^2 \right] \Psi_+^{(1,2)}(r, \alpha) \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} H_\varphi^{(1,2)}(r, z) \right] \Theta(z) \exp(i\alpha z) dz = 0. \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

Интеграл во втором слагаемом сводится к интегралу по полуоси. Проинтегрировав два раза по частям, получаем

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} + \varkappa^2 \right] \Psi_+^{(1,2)}(r, \alpha) \\ & = -\frac{1}{2\pi} \left[\exp(i\alpha z) \frac{\partial H_\varphi^{(1,2)}(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=+0}^{z=+\infty} - i\alpha \exp(i\alpha z) H_\varphi^{(1,2)}(r, z) \Big|_{z=+0}^{z=+\infty} \right], \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

где

$$\varkappa = \sqrt{k_{01}^2 - \alpha^2}, \quad \text{Im } \varkappa > 0. \quad (3.2.17)$$

Уравнение для функции $\Psi^{(2)}(r, \alpha)$

Рассмотрим сначала область (2). Поскольку фланец имеет идеальную проводимость, то есть $\partial H_\varphi / \partial z \sim E_r = 0$ при $z = 0$ ($r > a$), граничные условия для магнитного поля в (3.2.16) принимают вид

$$\frac{\partial H_\varphi^{(2)}(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=+0} = H_\varphi^{(2)}(r, z) \Big|_{z=+\infty} = 0. \quad (3.2.18)$$

Следовательно, мы получаем

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} + \varkappa^2 \right] \Psi_+^{(2)}(r, \alpha) = -\frac{i\alpha}{2\pi} H_\varphi^{(2)}(r, z) \Big|_{z=+0}. \quad (3.2.19)$$

Сумма (3.2.19) и этого же уравнения при $-\alpha$ дает

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} + \varkappa^2 \right] \left[\Psi_+^{(2)}(r, \alpha) + \Psi_-^{(2)}(r, \alpha) \right] = 0. \quad (3.2.20)$$

Здесь мы использовали свойство $\Psi_+^{(2)}(r, -\alpha) = \Psi_-^{(2)}(r, \alpha)$. (3.2.20) является уравнением Бесселя, решение которого должно быть уходящей волной и стремиться к нулю при $r \rightarrow +\infty$. Этому условию удовлетворяет функция Ханкеля $H_1^{(1)}(\varkappa r)$. Тогда

$$\Psi_+^{(2)}(r, \alpha) + \Psi_-^{(2)}(r, \alpha) = C_2 H_1^{(1)}(\varkappa r), \quad (3.2.21)$$

где C_2 - неизвестная величина.

Уравнение для функции $\Psi_+^{(1)}(r, \alpha)$

Теперь рассмотрим область (1). Граничные условия для магнитного поля в (3.2.16) записываются в виде

$$H_\varphi^{(1)}(r, z) \Big|_{z=+\infty} = 0, \quad (3.2.22)$$

$$\left[H_\varphi^{(i)}(r, z) + H_\varphi^{(r)}(r, z) \right] \Big|_{z=-0} = H_\varphi^{(1)}(r, z) \Big|_{z=+0}, \quad (3.2.23)$$

$$\left[\frac{\partial H_\varphi^{(i)}(r, z)}{\partial z} + \frac{\partial H_\varphi^{(r)}(r, z)}{\partial z} \right] \Big|_{z=-0} = \frac{\partial H_\varphi^{(1)}(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=+0}. \quad (3.2.24)$$

Соотношения (3.2.23) и (3.2.24) означают непрерывность компонент H_φ и E_r , соответственно, в плоскости $z = 0$ ($r < a$). Подставляя (3.2.22)-(3.2.24) в (3.2.16) и учитывая выражения для магнитного поля внутри волновода (3.2.1) и (3.2.4), получаем

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} + \varkappa^2 \right] \Psi_+^{(1)}(r, \alpha) \\ & = -\frac{qk_{01}}{2\pi a} \left[\left(\frac{k_{01}}{\beta} - \alpha \right) \tilde{\kappa}_1 R_1 I_1(k_{r01}r) - \sum_{m=1}^{\infty} (k_{zm} + \alpha) M_m J_1(k_{rm}r) \right]. \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Решение уравнения (3.2.25) есть сумма общего решения однородного уравнения $\Psi_g^{(1)}(r, \alpha)$ и частного решения неоднородного уравнения $\Psi_p^{(1)}(r, \alpha)$. Конечность решения при $r = 0$ обеспечивает функция Бесселя. Тогда для $\Psi_g^{(1)}(r, \alpha)$ можем написать

$$\Psi_g^{(1)}(r, \alpha) = C_1 J_1(\varkappa r), \quad (3.2.26)$$

где C_1 - неизвестная величина. В соответствии с правой частью (3.2.25), частное решение можно представить в виде

$$\Psi_p^{(1)}(r, \alpha) = A I_1(k_{r01}r) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m J_1(k_{rm}r). \quad (3.2.27)$$

Подставив (3.2.27) в (3.2.25), найдем выражения для коэффициентов $A, \{B_m\}$

$$A = -\frac{qk_{01}}{2\pi a} \frac{\tilde{\kappa}_1 R_1}{k_{01}\beta^{-1} + \alpha}, \quad B_m = \frac{qk_{01}}{2\pi a} \frac{M_m}{k_{zm} - \alpha}. \quad (3.2.28)$$

Таким образом, решение уравнения (3.2.25) определяется формулой

$$\Psi_+^{(1)}(r, \alpha) = C_1 J_1(\varkappa r) - \frac{qk_{01}}{2\pi a} \left[\frac{\tilde{\kappa}_1 R_1 I_1(k_{r01}r)}{k_{01}\beta^{-1} + \alpha} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{M_m J_1(k_{rm}r)}{k_{zm} - \alpha} \right]. \quad (3.2.29)$$

Функции $\Phi_+^{(1)}(r, \alpha)$, $\Phi_{\pm}^{(2)}(r, \alpha)$

По аналогии с (3.2.11)-(3.2.14) введем функции $\Phi_+^{(1)}(r, \alpha)$ и $\Phi_{\pm}^{(2)}(r, \alpha)$

$$\Phi_+^{(2)}(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_z^{(2)}(r, z) \Theta(z) \exp(i\alpha z) dz, \quad (3.2.30)$$

$$\Phi_-^{(2)}(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_z^{(2)}(r, -z) \Theta(-z) \exp(i\alpha z) dz, \quad (3.2.31)$$

$$\Phi_+^{(1)}(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_z^{(1)}(r, z) \Theta(z) \exp(i\alpha z) dz. \quad (3.2.32)$$

Напомним, что индекс “+” (или “-”) означает аналитичность функции при $\text{Im } \alpha > -\delta$ (или $\text{Im } \alpha < \delta$), где $\delta > 0$.

Нетрудно убедиться, что выражения для функций $\Phi_+^{(1)}(r, \alpha)$ и $\Phi_{\pm}^{(2)}(r, \alpha)$ можно получить, не решая соответствующего уравнения, а используя связь компонент E_z и H_{φ} (см. (3.2.8)) и уже полученные решения для $\Psi_+^{(1)}(r, \alpha)$ и $\Psi_{\pm}^{(2)}(r, \alpha)$. Тогда функции $\Phi_+^{(1)}(r, \alpha)$ и $\Phi_{\pm}^{(2)}(r, \alpha)$ определяются по формулам

$$\Phi_+^{(1)}(r, \alpha) = \frac{-1}{ik_{01}r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r\Psi_+^{(1)}(r, \alpha) \right) \right], \quad \Phi_{\pm}^{(2)}(r, \alpha) = \frac{-1}{ik_{01}r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r\Psi_{\pm}^{(2)}(r, \alpha) \right) \right], \quad (3.2.33)$$

откуда

$$\Phi_+^{(1)}(r, \alpha) = \frac{i\varkappa C_1}{k_{01}} J_0(\varkappa r) - \frac{iq}{2\pi a} \left[\frac{k_{r01}\tilde{\kappa}_1 R_1}{k_{01}\beta^{-1} + \alpha} I_0(k_{r01}r) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{rm} M_m}{k_{zm} - \alpha} J_0(k_{rm}r) \right], \quad (3.2.34)$$

$$\Phi_+^{(2)}(r, \alpha) + \Phi_-^{(2)}(r, \alpha) = \frac{i\varkappa}{k_{01}} C_2 H_0^{(1)}(\varkappa r). \quad (3.2.35)$$

3.2.3. Уравнение Винера-Хопфа-Фока

На границе областей (1) и (2), то есть при $r = a$ ($z > 0$), компоненты электромагнитного поля E_z и H_{φ} должны быть непрерывны. Данные условия можно записать через функции $\Phi_+^{(1,2)}$ и $\Psi_+^{(1,2)}$:

$$\Phi_+^{(1)}(a, \alpha) = \Phi_+^{(2)}(a, \alpha), \quad (3.2.36)$$

$$\Psi_+^{(1)}(a, \alpha) = \Psi_+^{(2)}(a, \alpha). \quad (3.2.37)$$

Используя выражения (3.2.34), выразим из (3.2.36) коэффициент C_1

$$C_1 = \frac{k_{01}}{i\kappa J_0(\kappa a)} \Phi_+^{(2)}(a, \alpha) + \frac{qk_{01}}{2\pi a \kappa J_0(\kappa a)} \left[\frac{k_{r01} \tilde{\kappa}_1 R_1}{k_{01} \beta^{-1} + \alpha} I_0(k_{r01} a) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{rm} M_m}{k_{zm} - \alpha} J_0(k_{rm} a) \right]. \quad (3.2.38)$$

С учетом формул (3.2.29) и (3.2.38), условие (3.2.37) примет вид

$$\Psi_+^{(2)}(a, \alpha) = -\frac{k_{01}}{J_0(\kappa a)} \times \left\{ \frac{i}{\kappa} \Phi_+^{(2)}(a, \alpha) J_1(\kappa a) - \frac{q}{2\pi a} \left[\frac{\tilde{\kappa}_1 R_1 \xi_1(a, \alpha)}{k_{01} \beta^{-1} + \alpha} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{M_m \xi_m(a, \alpha)}{k_{zm} - \alpha} \right] \right\}, \quad (3.2.39)$$

где

$$\xi_1(a, \alpha) = \frac{k_{r01}}{\kappa} J_1(\kappa a) I_0(k_{r01} a) - I_1(k_{r01} a) J_0(\kappa a), \quad (3.2.40)$$

$$\xi_m(a, \alpha) = \frac{k_{rm}}{\kappa} J_1(\kappa a) J_0(k_{rm} a) - J_1(k_{rm} a) J_0(\kappa a). \quad (3.2.41)$$

Отметим, что правая часть в (3.2.39) имеет особенности в точках, когда функция Бесселя $J_0(\kappa a)$, стоящая в знаменателе, обращается в ноль. Согласно (3.2.17), значения α в данных точках определяются по формуле

$$\alpha_n = \sqrt{k_{01}^2 - \left(\frac{j_n}{a}\right)^2}, \quad (3.2.42)$$

где $n = 1, 2, \dots$; j_n - n -ый ноль функции Бесселя ($J_0(j_n) = 0$). Подчеркнем, что правая часть в (3.2.39) не имеет особенностей при $\alpha = -k_{01} \beta^{-1}$ и $\alpha = k_{zm}$, а также при $\alpha = \pm k_{01}$ (когда $\kappa = 0$).

Напомним, что функция $\Psi_+^{(2)}(a, \alpha)$ аналитична в области $\text{Im } \alpha > -\delta$. Следовательно, правая часть в формуле (3.2.39) не может иметь особенности при $\alpha = \alpha_n$. Для выполнения этого условия необходимо потребовать, чтобы выражение в фигурных скобках в (3.2.39) было равно нулю в точках (3.2.42). Отсюда следует уравнение

$$\frac{i}{\kappa_n} \Phi_+^{(2)}(a, \alpha_n) J_1(\kappa_n a) - \frac{q}{2\pi a} \left[\frac{\tilde{\kappa}_1 R_1 \xi_1(a, \alpha_n)}{k_{01} \beta^{-1} + \alpha_n} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{M_m \xi_m(a, \alpha_n)}{k_{zm} - \alpha_n} \right] = 0, \quad (3.2.43)$$

где $\kappa_n = \kappa(\alpha_n)$.

Далее выразим коэффициент C_2 из (3.2.35) и, полагая $r = a$, подставим его в (3.2.21).

Имеем

$$\Psi_+^{(2)}(a, \alpha) + \Psi_-^{(2)}(a, \alpha) = -\frac{ik_{01} H_1^{(1)}(\kappa a)}{\kappa H_0^{(1)}(\kappa a)} \left[\Phi_+^{(2)}(a, \alpha) + \Phi_-^{(2)}(a, \alpha) \right]. \quad (3.2.44)$$

Используя формулу (3.2.39), а также свойства $\Psi_+^{(2)}(-\alpha) = \Psi_-^{(2)}(\alpha)$ и $\Phi_+^{(2)}(-\alpha) = \Phi_-^{(2)}(\alpha)$, преобразуем (3.2.44) к виду

$$\begin{aligned} & \left[\Phi_+^{(2)}(a, \alpha) + \Phi_-^{(2)}(a, \alpha) \right] \left[H_0^{(1)}(\varkappa a) H_1^{(2)}(\varkappa a) - H_1^{(1)}(\varkappa a) H_0^{(2)}(\varkappa a) \right] \\ &= -\frac{2iq\varkappa H_0^{(1)}(\varkappa a)}{\pi a} \left[\frac{k_{01}\tilde{\kappa}_1 R_1 \xi_1(a, \alpha)}{\beta(k_{01}^2\beta^{-2} - \alpha^2)} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{zm} M_m \xi_m(a, \alpha)}{k_{zm}^2 - \alpha^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.2.45)$$

Левая часть (3.2.45) содержит вронскиан функций Ханкеля [114]

$$W \left[H_0^{(2)}(\varkappa a), H_0^{(1)}(\varkappa a) \right] = H_0^{(1)}(\varkappa a) H_1^{(2)}(\varkappa a) - H_1^{(1)}(\varkappa a) H_0^{(2)}(\varkappa a) = \frac{4i}{\pi \varkappa a}. \quad (3.2.46)$$

Подставив (3.2.46) в (3.2.45), получим

$$\Phi_+^{(2)}(a, \alpha) + \Phi_-^{(2)}(a, \alpha) = -\frac{q}{2} \left[\tilde{\kappa}_1 R_1 G_1(\alpha) - \sum_{m=1}^{\infty} M_m G_m(\alpha) \right]. \quad (3.2.47)$$

Это уравнение Винера-Хопфа-Фока. Функции $G_1(\alpha)$ и $G_m(\alpha)$ здесь заданы соотношениями

$$G_1(\alpha) = \varkappa^2 H_0^{(1)}(\varkappa a) \xi_1(a, \alpha) F_1(\alpha), \quad G_m(\alpha) = \varkappa^2 H_0^{(1)}(\varkappa a) \xi_m(a, \alpha) F_m(\alpha), \quad (3.2.48)$$

где $\xi_1(a, \alpha)$ и $\xi_m(a, \alpha)$ определены формулами (3.2.40) и (3.2.41), соответственно, а

$$F_1(\alpha) = \frac{k_{01}\beta^{-1}}{k_{01}^2\beta^{-2} - \alpha^2}, \quad F_m(\alpha) = \frac{k_{zm}}{k_{zm}^2 - \alpha^2}. \quad (3.2.49)$$

В полосе аналитичности $-\delta < \text{Im } \alpha < \delta$ каждую из функций $G_1(\alpha)$ и $G_m(\alpha)$ можно представить в виде суммы

$$G_1(\alpha) = G_{1+}(\alpha) + G_{1-}(\alpha), \quad G_m(\alpha) = G_{m+}(\alpha) + G_{m-}(\alpha), \quad (3.2.50)$$

где “+” означает аналитичность функции при $\text{Im } \alpha > -\delta$, а “-” - при $\text{Im } \alpha < \delta$. Детали данного разложения можно найти, к примеру, в [26]. Подставим (3.2.50) в уравнение Винера-Хопфа-Фока (3.2.47) и, сделав некоторые преобразования, найдем

$$\begin{aligned} & \Phi_+^{(2)}(a, \alpha) + \frac{q}{2} \left[\tilde{\kappa}_1 R_1 G_{1+}(\alpha) - \sum_{m=1}^{\infty} M_m G_{m+}(\alpha) \right] \\ &= -\Phi_-^{(2)}(a, \alpha) - \frac{q}{2} \left[\tilde{\kappa}_1 R_1 G_{1-}(\alpha) - \sum_{m=1}^{\infty} M_m G_{m-}(\alpha) \right], \quad -\delta < \text{Im } \alpha < \delta. \end{aligned} \quad (3.2.51)$$

Из полученного выражения следует, что функция, аналитичная в области $\text{Im } \alpha > -\delta$, равна функции, аналитичной в области $\text{Im } \alpha < \delta$. Как можно показать с помощью аналитического продолжения, в этом случае обе части уравнения (3.2.51) равны некоторой целой, то есть аналитичной во всей комплексной плоскости α , функции $P(\alpha)$ [26]. Тогда из (3.2.51) следует, что (для функций с индексом “+”)

$$\Phi_+^{(2)}(a, \alpha) + \frac{q}{2} \left[\tilde{\kappa}_1 R_1 G_{1+}(\alpha) - \sum_{m=1}^{\infty} M_m G_{m+}(\alpha) \right] = P(\alpha) \quad (3.2.52)$$

при всех α .

Определим поведение функции $P(\alpha)$ при больших значениях $|\alpha|$. Для этого нам понадобится ряд теорем об асимптотическом разложении функции [26], а также условие на ребре, то есть поведение поля вблизи края волновода. Для продольной компоненты электрического поля данное условие имеет вид [26]

$$E_z \sim z^{-\frac{1}{3}} \quad \text{при } r = a, \quad |z| \rightarrow 0. \quad (3.2.53)$$

Отметим, что для компоненты E_r условие будет таким же, однако для дальнейших выкладок оно нам не понадобится.

Функции $G_{1+}(\alpha)$ и $G_{m+}(\alpha)$ в (3.2.52) заданы соотношениями [26]

$$G_{1+}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ic}^{+\infty+ic} \frac{G_1(x)}{x-\alpha} dx, \quad G_{m+}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ic}^{+\infty+ic} \frac{G_m(x)}{x-\alpha} dx, \quad (3.2.54)$$

где $-\delta < c < \text{Im } \alpha < \delta$, а функции $G_1(x)$ и $G_m(x)$ определяются по формулам (3.2.48). Нетрудно убедиться, что $G_1(x) \sim |x|^{-1}$ и $G_m(x) \sim |x|^{-1}$ при больших значениях x . Тогда интегралы (3.2.54) сходятся равномерно. Следовательно, $G_{1+}(\alpha)$ и $G_{m+}(\alpha)$ зависят от α так же, как и подынтегральные функции, то есть $G_{1+}(\alpha) \sim \alpha^{-1}$ и $G_{m+}(\alpha) \sim \alpha^{-1}$.

Теперь рассмотрим сумму по m в (3.2.52) и определим, как ведут себя члены ряда при $m \rightarrow \infty$. Из дисперсионного уравнения (3.2.7) следует, с ростом m значения поперечных волновых чисел k_{rm} увеличиваются. Тогда, используя формулы асимптотического разложения для функций Бесселя при большом аргументе, можем написать дисперсионное уравнение в виде

$$k_{rm} \cos\left(k_{rm}a - \frac{\pi}{4}\right) = \eta_0 k_{01} \sin\left(k_{rm}a - \frac{\pi}{4}\right), \quad m \rightarrow \infty. \quad (3.2.55)$$

Решая (3.2.55) в двух предельных случаях $\eta_0 = 0$ и $\eta_0 \rightarrow \infty$, найдем, что $k_{rm} \sim m$. Учитывая данный факт, а также формулу (3.2.48) и равномерную сходимость интеграла в (3.2.54), можем получить оценку $G_{m+}(\alpha) \sim m^{-1/2}$.

Из условия на ребре (3.2.53) следует, что поле внутри волновода и вблизи ребра раскладывается в ряд [26]

$$E_z^{(r)}(z) \sim \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\frac{2}{3}} \exp(-m|z|). \quad (3.2.56)$$

С другой стороны, продольная компонента электрического поля определяется выражением (3.2.6), где $k_{zm} = \sqrt{k_{01}^2 - k_{rm}^2}$, причем $\text{Im } k_{zm} > 0$. Следовательно, при больших m для продольных волновых чисел имеем $k_{zm} \sim im$ и, полагая $M_m \sim m^p$, из (3.2.6) получаем

$$E_z^{(r)}(z) \sim \sum_m m^{p+\frac{1}{2}} \exp(-m|z|). \quad (3.2.57)$$

Сравнивая (3.2.56) и (3.2.57), видим, что $p = -7/6$, то есть при $m \rightarrow \infty$ члены ряда в (3.2.52) пропорциональны $m^{-1-2/3}$. Отсюда следует, что ряд в (3.2.52) сходится равномерно, и его зависимость от α определяется функцией $G_{m+}(\alpha)$.

Осталось определить, как при больших значениях $|\alpha|$ ведет себя функция $\Phi_+^{(2)}(a, \alpha)$. Напомним, что данная функция есть интеграл (3.2.30). Учитывая (3.2.30) и условие на ребре (3.2.53), можно показать, что при $|\alpha| \rightarrow \infty$ справедлива следующая оценка [26]: $\Phi_+^{(2)}(a, \alpha) \sim \alpha^{-2/3}$.

Итак, принимая во внимание сделанные оценки, видим, что при больших значениях $|\alpha|$ в левой части выражения (3.2.52) доминирует слагаемое, изменяющееся по закону $\alpha^{-2/3}$. Следовательно, $P(\alpha) \sim \alpha^{-2/3}$ и $P(\alpha) \rightarrow 0$, если $|\alpha| \rightarrow \infty$. На основании теоремы Лиувилля, согласно которой ограниченная целая функция постоянна, функция $P(\alpha)$ тождественно равна нулю [26].

Таким образом, решение уравнения Винера-Хопфа-Фока имеет вид

$$\Phi_+^{(2)}(a, \alpha) = -\frac{q}{2} \left[\tilde{\kappa}_1 R_1 G_{1+}(\alpha) - \sum_{m=1}^{\infty} M_m G_{m+}(\alpha) \right]. \quad (3.2.58)$$

Подставив (3.2.58) в (3.2.43), получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^{\infty} W_{nm} M_m = w_n, \quad (3.2.59)$$

где $n = 1, 2, \dots$. Величины W_{nm} и w_n здесь заданы соотношениями

$$W_{nm} = \frac{a}{2\chi_n} J_1(\chi_n a) \tilde{G}_{m+}(\alpha_n) + \frac{\xi_m(a, \alpha_n)}{k_{zm} - \alpha_n}, \quad (3.2.60)$$

$$w_n = \tilde{\kappa}_1 R_1 \left[\frac{a}{2\chi_n} J_1(\chi_n a) \tilde{G}_{1+}(\alpha_n) + \frac{\xi_1(a, \alpha_n)}{k_{01}\beta^{-1} + \alpha_n} \right], \quad (3.2.61)$$

где $\tilde{G}_{1+}(\alpha_n) = 2\pi i G_{1+}(\alpha_n)$ и $\tilde{G}_{m+}(\alpha_n) = 2\pi i G_{m+}(\alpha_n)$. Используя асимптотические оценки, сделанные ранее, нетрудно показать, что система (3.2.59) сходится. Решая данную систему методом редукции, можно определить коэффициенты M_m .

3.2.4. Поле в дальней зоне

Чтобы найти магнитное поле в области (1), нужно сосчитать интеграл Фурье, обратный к (3.2.11). Поскольку рассматриваются только положительные значения z , данный интеграл имеет вид

$$H_\varphi^{(1)}(r, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_+^{(1)}(r, \alpha) \exp(-i\alpha z) d\alpha. \quad (3.2.62)$$

Комбинируя формулы (3.2.29), (3.2.38) и (3.2.58), нетрудно получить выражение для функции $\Psi_+^{(1)}(r, \alpha)$

$$\Psi_+^{(1)}(r, \alpha) = \frac{qk_{01}}{2\pi a J_0(\alpha a)} \left\{ \frac{a}{2\alpha} \left[\tilde{\kappa}_1 R_1 \tilde{G}_{1+}(\alpha) - \sum_{m=1}^{\infty} M_m \tilde{G}_{m+}(\alpha) \right] J_1(\alpha r) + \frac{\tilde{\kappa}_1 R_1 \xi_1(r, \alpha)}{k_{01}\beta^{-1} + \alpha} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{M_m \xi_m(r, \alpha)}{k_{zm} - \alpha} \right\}, \quad (3.2.63)$$

где

$$\xi_1(r, \alpha) = \frac{k_{r01}}{\alpha} J_1(\alpha r) I_0(k_{r01}a) - I_1(k_{r01}r) J_0(\alpha a), \quad (3.2.64)$$

$$\xi_m(r, \alpha) = \frac{k_{rm}}{\alpha} J_1(\alpha r) J_0(k_{rm}a) - J_1(k_{rm}r) J_0(\alpha a). \quad (3.2.65)$$

Магнитное поле в области (2) есть интеграл Фурье, обратный к (3.2.12). Так как нас интересует только случай $z > 0$, то, согласно (3.2.9), $\tilde{H}_\varphi^{(2)}(r, z) = H_\varphi^{(2)}(r, z)$, и мы получаем

$$H_\varphi^{(2)}(r, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^{(2)}(r, \alpha) \exp(-i\alpha z) d\alpha, \quad (3.2.66)$$

где функция $\Psi^{(2)}(r, \alpha) = \Psi_+^{(2)}(r, \alpha) + \Psi_-^{(2)}(r, \alpha)$ определена равенством (3.2.21). Полагая $r = a$ в (3.2.35), выразим коэффициент C_2 и подставим в (3.2.21). Сумму функций $\Phi_+^{(2)}(a, \alpha)$ и $\Phi_-^{(2)}(a, \alpha)$ возьмем из (3.2.47). В итоге получим

$$\Psi^{(2)}(r, \alpha) = \frac{iqk_{01}\alpha}{2} \left[\tilde{\kappa}_1 R_1 \xi_1(a, \alpha) F_1(\alpha) - \sum_{m=1}^{\infty} M_m \xi_m(a, \alpha) F_m(\alpha) \right] H_1^{(1)}(\alpha r). \quad (3.2.67)$$

Проанализируем излучение в дальней зоне, то есть при условии $k_{01}R \gg 1$, где $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ (см. рис.3.5). В этом случае диапазон углов θ , соответствующих области (1), пренебрежимо мал, поэтому далее мы будем рассматривать только область (2). Магнитное поле в данной области определяется формулами (3.2.66) и (3.2.67). Расчет интеграла (3.2.66) при условии $k_{01}R \gg 1$ будем проводить с помощью метода перевала [106]. Сделаем стандартные замены

$$r = R \sin \theta, \quad z = R \cos \theta \quad (3.2.68)$$

и введем новые переменные

$$\alpha = k_{01} \sin \tau, \quad \alpha r = k_{01} R \sin \tau \sin \theta. \quad (3.2.69)$$

Асимптотика функции Ханкеля $H_1^{(1)}(\alpha r)$ в (3.2.67) при больших значениях аргумента $\alpha r \gg 1$ принимает вид [114]

$$H_1^{(1)}(\alpha r) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha r}} \exp \left[i \left(\alpha r - \frac{3\pi}{4} \right) \right]. \quad (3.2.70)$$

Отметим, что условие $\varkappa r \gg 1$ накладывает ограничение снизу на угол наблюдения $\theta \gg (k_0 R)^{-1/2}$. Следовательно, подынтегральная функция в (3.2.66) имеет экспоненциальную зависимость

$$\exp [i (\varkappa r - \alpha z)] \quad (3.2.71)$$

или, в новых переменных (3.2.68) и (3.2.69),

$$\exp [i k_{01} R \sin (\theta - \tau)]. \quad (3.2.72)$$

Из (3.2.72) следует, что изолированная седловая точка $\tau_0 = \theta - \pi/2$. Вклад точки τ_0 в интеграл (3.2.66) можно оценить по стандартной формуле [106], и мы получаем

$$H_{\varphi 0}^{(2)}(R, \theta) \cong -i q k_{01}^2 \sin \theta \left[\tilde{\kappa}_1 R_1 \xi_1(a, \theta) F_1(\theta) - \sum_{m=1}^{\infty} M_m \xi_m(a, \theta) F_m(\theta) \right] \frac{\exp(i k_{01} R)}{R}, \quad (3.2.73)$$

где

$$\xi_1(a, \theta) = \frac{k_{r01}}{k_{01} \sin \theta} J_1(k_{01} a \sin \theta) I_0(k_{r01} a) - I_1(k_{r01} a) J_0(k_{01} a \sin \theta), \quad (3.2.74)$$

$$\xi_m(a, \theta) = \frac{k_{rm}}{k_{01} \sin \theta} J_1(k_{01} a \sin \theta) J_0(k_{rm} a) - J_1(k_{rm} a) J_0(k_{01} a \sin \theta), \quad (3.2.75)$$

$$F_1(\theta) = \frac{\beta^{-1}}{k_{01} (\beta^{-2} - \cos^2 \theta)}, \quad F_m(\theta) = \frac{k_{zm}}{k_{zm}^2 - k_{01}^2 \cos^2 \theta}. \quad (3.2.76)$$

Напомним, что $k_{r01} = k_{01} (\beta \gamma)^{-1}$, а Фурье-образ профиля пучка $\tilde{\kappa}_1 = \tilde{\kappa}(k_{01})$, величина R_1 , поперечные волновые числа k_{rm} и коэффициенты M_m определяются по формулам (1.2.11), (3.1.26), (3.2.7) и (3.2.59), соответственно.

Итак, при условии $k_{01} R \gg 1$ магнитная составляющая поля ТМ₀₁ моды, дифрагированной на открытом конце глубокогогофрированного волновода, описывается выражением (3.2.73). Электромагнитное поле падающей моды было получено и проанализировано в предыдущем параграфе. Там же были рассмотрены некоторые зависимости частоты излучения $f_1 = k_{01} c / (2\pi)$, определяемой из дисперсионного уравнения (3.1.22), от параметров задачи (см. рис.3.3, левый столбец).

Ниже представлены результаты расчета, полученные по формуле (3.2.73). На рис.3.6, рис.3.7 и рис.3.8 показаны зависимости модуля магнитного поля в дальней зоне $|H_{\varphi 0}^{(2)}|$ от угла θ при различных значениях параметров гофрированной структуры и скорости заряда.

Рассмотрим сначала рис.3.6 и рис.3.7. На данных рисунках от левого столбца к правому увеличивается глубина гофрирования d_3 , а от верхней строки к нижней - радиус волновода a . Расчеты проводились для двух значений скорости пучка: $\beta = 0.9$ (рис.3.6) и $\beta = 0.7$ (рис.3.7). Как видим, при увеличении глубины гофры амплитуда поля растет тем быстрее, чем больше радиус волновода и чем медленнее заряд. Возрастание амплитуды также наблюдается с

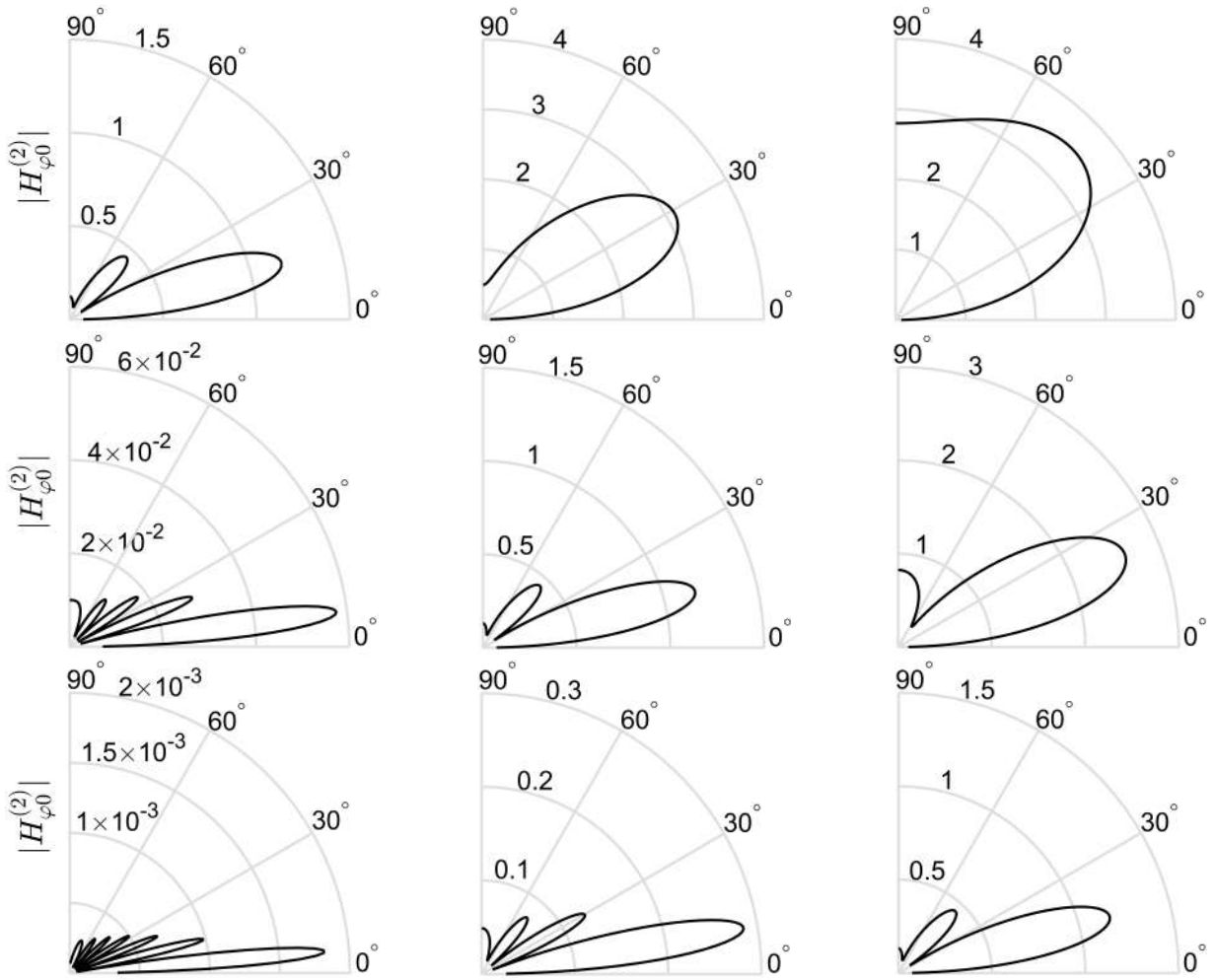


Рис.3.6. Зависимость $|H_{\varphi 0}^{(2)}|$ от угла θ в дальней зоне ($k_{01}R \gg 1$) в случае падающей TM_{01} моды. Скорость заряда $\beta = 0.9$. Параметры структуры: радиус волновода $a = 5$ см (верхний ряд), $a = 10$ см (средний ряд) и $a = 15$ см (нижний ряд); глубина гофрирования $d_3 = 0.5$ см (левый столбец), $d_3 = 1$ см (средний столбец) и $d_3 = 1.5$ см (правый столбец); период $d = 0.1$ см; ширина канавок $d_2 = 0.05$ см. Частота излучения $f_1 = k_{01}c/(2\pi)$ есть решение дисперсионного уравнения (3.1.22). Значения $|H_{\varphi 0}^{(2)}|$ приведены в единицах $qk_{01}\tilde{\kappa}_1/R$.

увеличением скорости и с уменьшением радиуса. При этом наибольшая амплитуда (при рассматриваемых параметрах) имеет место, когда $d_3 = 1.5$ см, $a = 5$ см и $\beta = 0.9$ (см. график в правом столбце верхнего ряда на рис.3.6). Расчеты показывают, что при изменении скорости заряда амплитуда поля может существенно возрастать даже в ультррелятивистском диапазоне скоростей (в случае относительно небольшой глубины гофрирования и большого волноводного радиуса). В частности, амплитуда возрастает приблизительно в 1.5 раза с увеличением скорости от 0.99 до 0.999 при условии, что глубина и радиус равны 0.5 см и 15 см, соответственно.

Как следует из рис.3.6 и рис.3.7, поле в дальней зоне имеет, как правило, несколько мак-

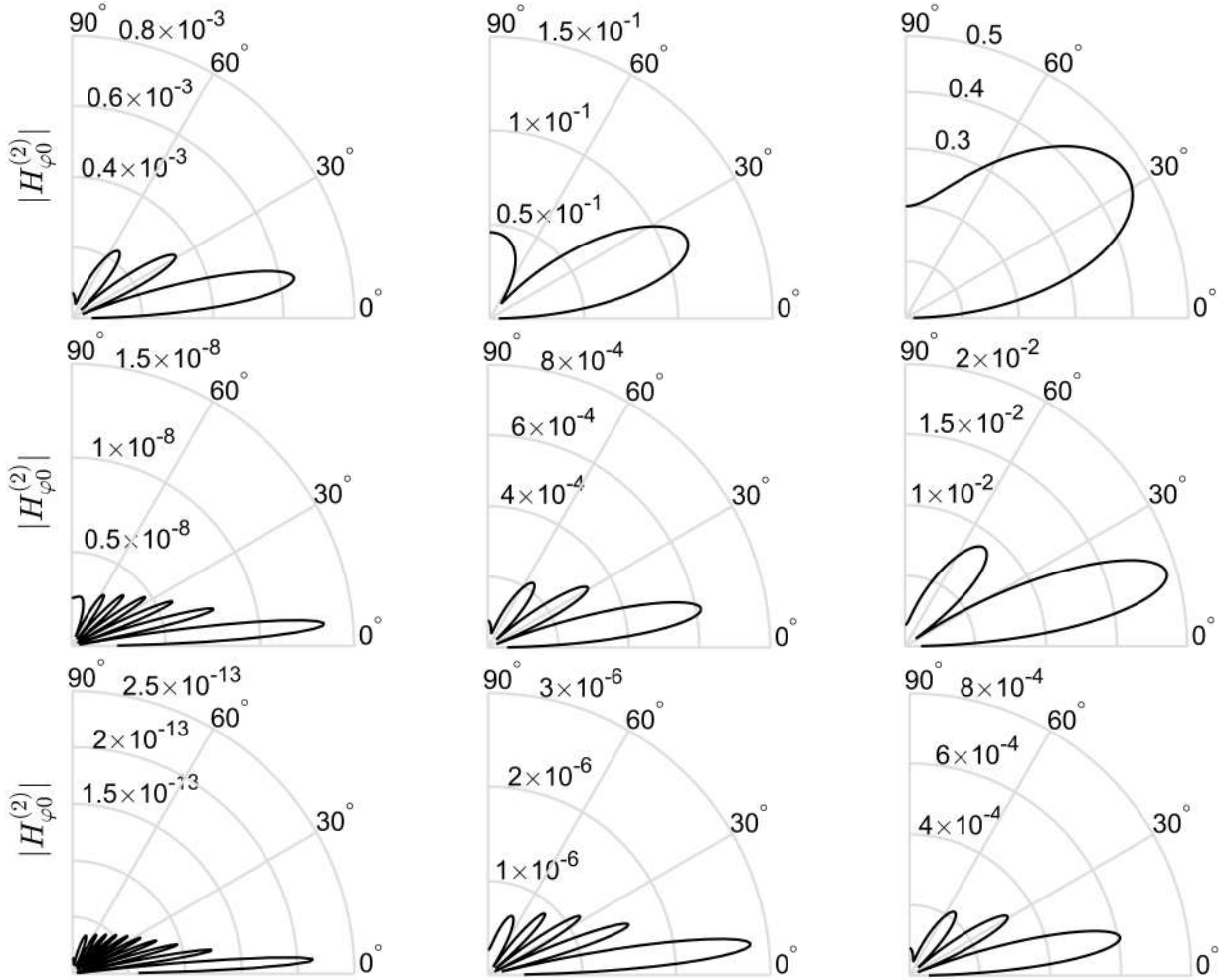


Рис.3.7. То же, что и на рис.3.6 для $\beta = 0.7$.

симумов излучения. Количество максимумов увеличивается с ростом числа распространяющихся отраженных мод в волноводе (3.2.4), то есть мод, для которых продольное волновое число k_{zm} вещественно. Количество таких мод тем больше, чем больше радиус волновода и чем медленнее заряд. Угол θ , соответствующий направлению каждого максимума, возрастает с увеличением глубины гофры и с уменьшением радиуса. При этом ширина лепестка диаграммы направленности также увеличивается. К примеру, основной максимум излучения (с наибольшей амплитудой) в случае, когда $\beta = 0.9$, $a = 15$ см и $d_3 = 0.5$ см, имеет направление $\theta \cong 5^\circ$, и угол возрастает до $\theta \cong 15^\circ$ при увеличении глубины до $d_3 = 1.5$ см (нижний ряд на рис.3.6).

В заключение рассмотрим распределение магнитного поля в дальней зоне в зависимости от отношения ширины канавок d_2 к периоду структуры d . На рис.3.8 показаны диаграммы направленности в случаях, когда $d_2/d = 0.7$ (красные пунктирные линии) и $d_2/d = 0.9$ (черные сплошные линии). Значения остальных параметров задачи те же, что и на графиках в среднем ряду рис.3.6. Как следует из рис.3.8, с ростом d_2/d амплитуда поля возрастает, то

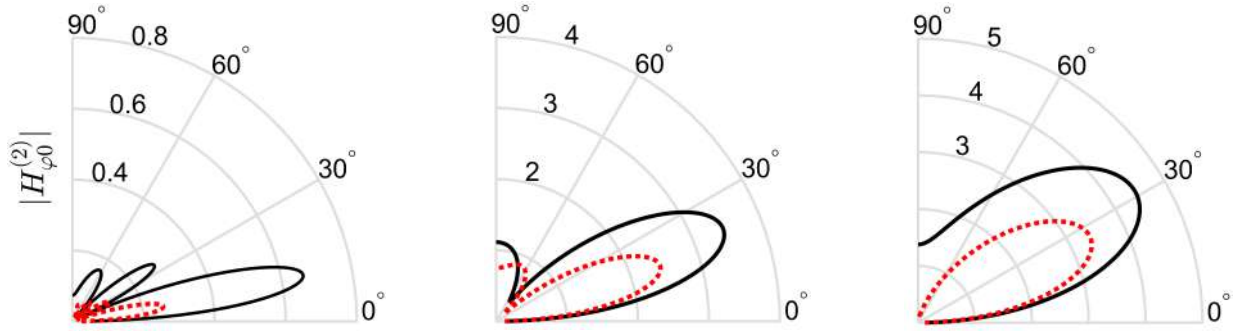


Рис.3.8. Зависимость $|H_{\varphi 0}^{(2)}|$ от угла θ в дальней зоне ($k_{01}R \gg 1$) в случае падающей TM_{01} моды. Скорость заряда $\beta = 0.9$. Параметры структуры: радиус волновода $a = 10$ см; глубина гофрирования $d_3 = 0.5$ см (левый столбец), $d_3 = 1$ см (средний столбец) и $d_3 = 1.5$ см (правый столбец); ширина канавок $d_2 = 0.07$ см (красные пунктирные линии) и $d_2 = 0.09$ см (черные сплошные линии); период $d = 0.1$ см. Частота излучения $f_1 = k_{01}c/(2\pi)$ есть решение дисперсионного уравнения (3.1.22). Значения $|H_{\varphi 0}^{(2)}|$ приведены в единицах $qk_{01}\tilde{\kappa}_1/R$.

есть глубокогофрированная структура, состоящая из диафрагм ($d_2/d \rightarrow 1$), является наиболее эффективной для генерации излучения. Напомним, что аналогичный вывод был сделан нами в главе 1 при рассмотрении мелкогофрированной планарной поверхности. Отметим также, что уменьшение числа распространяющихся отраженных мод приводит к увеличению углов, соответствующих направлениям максимумов. Последнее характерно для всех представленных на рис.3.6, рис.3.7 и рис.3.8 диаграмм направленности.

3.3. Выводы

В данной главе было проведено аналитическое и численное исследование поля тонкого (в поперечном направлении) пучка заряженных частиц, движущегося равномерно и прямолинейно в присутствии цилиндрического волновода с глубокогофрированной стенкой. Предполагалось, что период гофрирования существенно меньше радиуса волновода и длин рассматриваемых электромагнитных волн. В связи с этим, при описании гофрированной структуры был применен метод эквивалентных граничных условий.

В случае движения пучка вдоль оси бесконечного цилиндрического глубокогофрированного волновода было показано, что поле излучения находится за зарядом и состоит из бесконечного набора распространяющихся волноводных мод. Методами ТФКП получены аналитические выражения для компонент данного поля, проведен их численный расчет. Детально исследованы характеристики первой волноводной моды (имеющей наименьшую возможную частоту), представлены и проанализированы зависимости компонент электромагнитного поля данной моды, а также частоты излучения от параметров гофрирования и скорости заряда. В частности, показано, что при рассматриваемых параметрах значения частот данного излучения составляют единицы гигагерц. С увеличением скорости пучка частота излучения уменьшается, а компоненты поля, наоборот, растут. Также продемонстрировано, что поле излучения, как правило, определяется только вкладом первой моды (вклады остальных мод могут быть существенны только для ультрарелятивистских зарядов).

Далее исследовался процесс дифракции волноводной поперечно магнитной моды на открытом конце цилиндрического глубокогофрированного волновода (при наличии фланца). Поле, отраженное от открытого конца волновода, было представлено в виде суммы собственных волноводных мод. Дальнейший анализ основывался на методе Винера-Хопфа-Фока. Получено соответствующее уравнение Винера-Хопфа-Фока, найдено его решение, с помощью которого построена бесконечная система линейных алгебраических уравнений на амплитуды отраженных мод. Данная система была решена методом редукции. Найдены интегральные представления для поля во внешнем пространстве (вне волновода), поведение данного поля в дальней зоне исследовано с помощью метода перевала. Проведен численный расчет поля, построены и проанализированы типичные диаграммы направленности. В частности, показано, что амплитуда поля увеличивается с ростом скорости заряда и глубины гофры, а также с уменьшением радиуса волновода. Отметим также, что поле в дальней зоне имеет, как правило, несколько максимумов излучения, количество которых увеличивается с ростом числа распространяющихся мод, отраженных от открытого конца волновода.

Заключение

В настоящей работе исследовалось излучение пучка заряженных частиц, движущегося с постоянной скоростью в присутствии проводящих гофрированных структур. Анализировалась относительно длинноволновая часть спектра излучения, когда длина электромагнитной волны существенно превышает период гофрирования. Данное предположение позволило использовать метод эквивалентных граничных условий. Во всех задачах также предполагалось, что пучок имеет пренебрежимо малые поперечные размеры и произвольное распределение заряда вдоль траектории движения.

В первой главе рассматривалось излучение заряда, движущегося в присутствии безграничной планарной мелкогофрированной структуры. Анализировались два варианта движения заряда: вдоль плоскости поверхности (перпендикулярно направлению гофрирования) и сквозь поверхность (перпендикулярно ей). Показано, что в случае продольного движения заряд генерирует поверхностные волны, в то время как объемное излучение (на рассматриваемых относительно низких частотах) отсутствует. В данной ситуации поверхностная волна возбуждается только ультрарелятивистским зарядом и представляет собой локализованный импульс, содержащий информацию о распределении заряда в пучке и о его размере. В случае пересечения пучком гофрированной поверхности показано, что волновое поле состоит как из поверхностных, так и из объемных волн. Основное внимание здесь было уделено исследованию поверхностного излучения. Показано, в частности, что данная волна генерируется при любой скорости пучка и, как и в предыдущей задаче, представляет собой локализованный импульс, характеристики которого могут быть полезны для определения профиля и длины пучка.

Во второй главе рассматривалось излучение заряда, движущегося в присутствии безграничной планарной глубокогофрированной структуры. Как и в предыдущей главе, здесь анализировались два варианта движения заряда: вдоль плоскости поверхности и сквозь нее. Показано, что в случае продольного движения заряд генерирует поверхностные волны, в то время как объемное излучение на рассматриваемых частотах отсутствует. В данной ситуации поверхностная волна возбуждается в широком диапазоне скоростей заряда и имеет весьма сложную структуру. При относительно небольшой глубине гофрировки форма сигнала может быть использована для определения размера пучка (при ультрарелятивистском

движении заряда). В случае пересечения пучком гофрированной поверхности показано, что волновое поле состоит как из поверхностных, так и из объемных волн. Показано, в частности, что при достаточно больших значениях глубины гофры энергия, уходящая от точки влета заряда в направлении гофрирования, существенно превышает энергию, уходящую в направлении, перпендикулярном канавкам. Отметим также, что в случае ультрарелятивистского режима движения заряда поверхностное излучение, как правило, гораздо интенсивнее объемного излучения.

В третьей главе рассматривалось излучение заряда, движущегося в цилиндрическом волноводе с глубокогофрированной стенкой. Показано, что при движении пучка вдоль оси данного волновода поле излучения состоит из бесконечного набора распространяющихся волноводных мод. Излучение, как правило, определяется электромагнитным полем первой моды (поля остальных мод могут быть существенны только для ультрарелятивистских зарядов). Затем анализировался процесс выхода моды рассматриваемого излучения из открытого конца волновода (при наличии фланца). Аналитическое исследование данной задачи основывалось на методе Винера-Хопфа-Фока. Из анализа диаграмм направленности излучения следует, что поле в дальней (волновой) зоне вне волновода весьма чувствительно к изменению параметров гофрированной поверхности, радиуса волновода, а также скорости заряда. В частности, при варьировании параметров задачи существенно меняется амплитуда поля и количество радиационных максимумов. Отметим также, что интенсивность отдельной моды данного излучения сравнима с интенсивностью моды в случае гладкого волновода с диэлектрическим заполнением. Таким образом, это излучение можно использовать в самой волноведущей структуре, например, для кильватерного ускорения заряженных частиц, а гофрированный волновод с открытым концом может использоваться как источник излучения во внешнее пространство.

Список литературы

- [1] Smith, S.J. Visible light from localized surface charges moving across a grating / S.J. Smith, E.M. Purcell // *Phys. Rev. Lett.* — 1953. — Vol. 92, no. 4. — P. 1069.
- [2] Франк, И.М. Эффект Доплера в преломляющей среде / И.М. Франк // *Изв. АН СССР, серия Физ.* — 1942. — Т. 6, № 1-2. — С. 3–31.
- [3] Glass, S.J. Quantum theory of the Smith-Purcell experiment / S.J. Glass, H. Mendlowitz // *Phys. Rev.* — 1968. — Vol. 174, no. 1. — Pp. 57–61.
- [4] First observation of Smith-Purcell radiation from relativistic electrons / G. Doucas, J.H. Mulvey, M. Omori et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 1992. — Vol. 69, no. 12. — Pp. 1761–1764.
- [5] Shestopalov, V.P. The Smith-Purcell effect / V.P. Shestopalov. — Commack, NY: Nova Science Publishers, 1998. — P. 473.
- [6] Potylitsyn, A.P. Smith–Purcell effect as resonant diffraction radiation / A.P. Potylitsyn // *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B.* — 1998. — Vol. 145, no. 1-2. — Pp. 60–66.
- [7] Determination of longitudinal bunch shape by means of coherent Smith-Purcell radiation / G. Doucas, M.F. Kimmitt, A. Doria et al. // *Phys. Rev. ST Accel. Beams.* — 2002. — Vol. 5, no. 7. — P. 072802.
- [8] Longitudinal electron bunch profile diagnostics at 45 MeV using coherent Smith-Purcell radiation / G. Doucas, V. Blackmore, B. Ottewell et al. // *Phys. Rev. ST Accel. Beams.* — 2006. — Vol. 9, no. 9. — P. 092801.
- [9] Karlovets, D.V. Comparison of Smith-Purcell radiation models and criteria for their verification / D.V. Karlovets, A.P. Potylitsyn // *Phys. Rev. ST Accel. Beams.* — 2006. — Vol. 9, no. 8. — P. 080701.
- [10] Potylitsyn, A.P. Resonant diffraction radiation from inclined gratings and bunch length measurements / A.P. Potylitsyn, D.V. Karlovets, G. Kube // *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B.* — 2008. — Vol. 266, no. 17. — Pp. 3781–3788.

- [11] Observation of THz evanescent waves in a Smith-Purcell free-electron laser / H.L. Andrews, C.A. Brau, J.D. Jarvis et al. // *Phys. Rev. ST Accel. Beams.* — 2009. — Vol. 12, no. 8. — P. 080703.
- [12] Smith-Purcell radiation from periodic beams / D.Y. Sergeeva, A.P. Potylitsyn, A.A. Tishchenko, M.N. Strikhanov // *Opt. Express.* — 2017. — Vol. 25, no. 21. — Pp. 26310–26328.
- [13] Diffraction radiation from relativistic particles / A.P. Potylitsyn, M.I. Ryazanov, M.N. Strikhanov, A.A. Tishchenko. — Berlin: Springer Berlin, Heidelberg, 2011. — Vol. 239 of Springer Tracks in Modern Physics. — P. 278.
- [14] Potylitsyn, A.P. Electromagnetic radiation of electrons in periodic structures / A.P. Potylitsyn. — Berlin: Springer Berlin, Heidelberg, 2011. — Vol. 243 of Springer Tracks in Modern Physics. — P. 216.
- [15] Нефедов, Е.И. Электродинамика периодических структур / Е.И. Нефедов, А.Н. Сивов. — Москва: Наука, 1977. — С. 209.
- [16] Wakefields due to surface waves in a beam pipe with a periodic rough surface / A. Mostacci, F. Ruggiero, M. Angelici et al. // *Phys. Rev. ST Accel. Beams.* — 2002. — Vol. 5, no. 4. — P. 044401.
- [17] Bane, K.L.F. Impedance of a rectangular beam tube with small corrugations / K.L.F. Bane, G. Stupakov // *Phys. Rev. ST Accel. Beams.* — 2003. — Vol. 6, no. 2. — P. 024401.
- [18] Mineo, M. Corrugated rectangular waveguide tunable backward wave oscillator for terahertz applications / M. Mineo, C. Paoloni // *IEEE Trans. Electron Devices.* — 2010. — Vol. 57, no. 6. — Pp. 1481–1484.
- [19] Stupakov, G. Surface impedance formalism for a metallic beam pipe with small corrugations / G. Stupakov, K.L.F. Bane // *Phys. Rev. ST Accel. Beams.* — 2012. — Vol. 15, no. 12. — P. 124401.
- [20] Bane, K.L.F. Terahertz radiation from a pipe with small corrugations / K.L.F. Bane, G. Stupakov // *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A.* — 2012. — Vol. 677. — Pp. 67–73.
- [21] Measurements of terahertz radiation generated using a metallic, corrugated pipe / K. Bane, G. Stupakov, S. Antipov et al. // *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A.* — 2017. — Vol. 844. — Pp. 121–128.

- [22] Radiation of charged particle bunches in corrugated waveguides with small period / A.V. Tyukhtin, V.V. Vorobev, E.R. Akhmatova, S. Antipov // J. Instrum. — 2018. — Vol. 13. — P. C04009.
- [23] Radiation of charged particle bunches in corrugated waveguides with small period / A.A. Grigoreva, A.V. Tyukhtin, V.V. Vorobev, S.P. Antipov // Phys. Rev. Accel. Beams. — 2019. — Vol. 22, no. 7. — P. 071303.
- [24] Galyamin, S.N. Diffraction of Cherenkov radiation at the open end of a shallow corrugated waveguide / S.N. Galyamin, A.A. Grigoreva. — 2021. — arXiv:2005.05020.
- [25] Alekhina, T.Yu. Radiation of a charge in a waveguide with a boundary between two dielectrics / T.Yu. Alekhina, A.V. Tyukhtin // J. Phys.: Conf. Ser. — 2012. — Vol. 357. — P. 012010.
- [26] Миттра, Р. Аналитические методы теории волноводов / Р. Миттра, С. Ли. — Москва: Мир, 1974. — P. 327.
- [27] Вайнштейн, Л.А. Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода / Л.А. Вайнштейн. — Москва: Изд. “Сов. радио”, 1953. — С. 203.
- [28] Нобл, Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных / Б. Нобл. — Москва: Изд. Иностран. лит., 1962. — С. 280.
- [29] Vainshtein, L. The theory of diffraction and the factorization method: generalized Wiener-Hopf technique / L. Vainshtein. — The Golem Press, 1969. — Vol. 3 of Golem series in electromagnetics. — P. 411.
- [30] Galyamin, S.N. Diffraction at the open-ended dielectric-loaded circular waveguide / S.N. Galyamin, A.V. Tyukhtin, V.V. Vorobev // Proceedings of the 12th International Particle Accelerator Conference (IPAC’21). — Campinas, Brazil. — 2021. — May. — Pp. 2033–2035.
- [31] Tyukhtin, A.V. Method of particle energy determination based on measurement of waveguide mode frequencies / A.V. Tyukhtin // J. Phys.: Conf. Ser. — 2012. — Vol. 357. — P. 012003.
- [32] Конторович, М.И. Об усреднённых граничных условиях на поверхности сетки с квадратными ячейками / М.И. Конторович // Радиотехника и электроника. — 1963. — Т. 8. — С. 1506–1515.

- [33] Электродинамика сетчатых структур / М.И. Конторович, М.И. Астрахан, В.П. Акимов, Г.А. Ферсман. — Москва: Радио и связь, 1987. — С. 136.
- [34] Барсуков, К.А. Об излучении заряда, движущегося над плоской границей диэлектрика с анизотропной проводимостью / К.А. Барсуков, Л.Г. Нарышкина // Изв. ВУЗов. Радиофизика. — 1967. — Т. 10, № 4. — С. 509–517.
- [35] Красильников, В.Н. Излучение заряда, пересекающего систему тонких параллельных проводов / В.Н. Красильников, А.В. Тюхтин // Изв. ВУЗов. Радиофизика. — 1990. — Т. 33, № 11. — С. 1278–1283.
- [36] Tyukhtin, A.V. Radiation excited by a charged-particle bunch on a planar periodic wire structure / A.V. Tyukhtin, V.V. Vorobev, S.N. Galyamin // Phys. Rev. ST Accel. Beams. — 2014. — Vol. 17, no. 12. — P. 122802.
- [37] Tyukhtin, A.V. Radiation of charged-particle bunches passing perpendicularly by the edge of a semi-infinite planar wire structure / A.V. Tyukhtin, V.V. Vorobev, S.N. Galyamin // Phys. Rev. E. — 2015. — Vol. 91, no. 6. — P. 063202.
- [38] Барсуков, К.А. Переходное излучение на анизотропно проводящей плоскости / К.А. Барсуков, Л.Г. Нарышкина // Изв. ВУЗов. Радиофизика. — 1965. — Т. 8, № 5. — С. 936–941.
- [39] Барсуков, К.А. Излучение заряда, движущегося над анизотропно проводящей плоскостью / К.А. Барсуков, Л.Г. Нарышкина // ЖТФ. — 1966. — Т. 36, № 2. — С. 225–229.
- [40] Барсуков, К.А. О влиянии края замедляющей полуплоскости на излучение заряженной частицы, движущейся параллельно этому краю / К.А. Барсуков, С.Х. Бекова // Изв. ВУЗов. Радиофизика. — 1971. — Т. 14, № 6. — С. 939–943.
- [41] Soboleva, V.V. Radiation of relativistic electrons in a periodic wire structure / V.V. Soboleva, G.A. Naumenko, V.V. Bleko // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B. — 2015. — Vol. 355. — Pp. 132–134.
- [42] Coherent transition radiation from wire metamaterials / G.A. Naumenko, V.V. Bleko, V.V. Soboleva, A.O. Shumeyko // Advanced Materials Res. — 2015. — Vol. 1084. — Pp. 213–216.

- [43] Vorobev, V.V. Surface waves generated by charged particle bunch moving along the edge of semi-infinite planar wire grid / V.V. Vorobev, A.V. Tyukhtin, S.N. Galyamin // *Radiat. Phys. Chem.* — 2017. — Vol. 133. — Pp. 91–97.
- [44] Silveirinha, M.G. Radiation from elementary sources in a uniaxial wire medium / M.G. Silveirinha, S.I. Maslovski // *Phys. Rev. B.* — 2012. — Vol. 85, no. 15. — P. 155125.
- [45] Fernandes, D.E. Cherenkov emission in a nanowire material / D.E. Fernandes, S.I. Maslovski, M.G. Silveirinha // *Phys. Rev. B.* — 2012. — Vol. 85, no. 15. — P. 155107.
- [46] Vorobev, V.V. Nondivergent Cherenkov radiation in a wire metamaterial / V.V. Vorobev, A.V. Tyukhtin // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — Vol. 108, no. 18. — P. 184801.
- [47] Tyukhtin, A.V. Cherenkov radiation in a metamaterial comprised of coated wires / A.V. Tyukhtin, V.V. Vorobev // *J. Opt. Soc. Am. B.* — 2013. — Vol. 30, no. 6. — Pp. 1524–1531.
- [48] Tyukhtin, A.V. Radiation of charges moving along the boundary of a wire metamaterial / A.V. Tyukhtin, V.V. Vorobev // *Phys. Rev. E.* — 2014. — Vol. 89, no. 1. — P. 013202.
- [49] Morgado, T.A. Analytical solution for the stopping power of the Cherenkov radiation in a uniaxial nanowire material / T.A. Morgado, D.E. Fernandes, M.G. Silveirinha // *Photonics.* — 2015. — Vol. 2, no. 2. — Pp. 702–718.
- [50] Гинзбург, В.Л. Излучение равномерно движущегося электрона, возникающее при его переходе из одной среды в другую / В.Л. Гинзбург, И.М. Франк // *ЖЭТФ.* — 1946. — Т. 16, № 1. — С. 15–28.
- [51] Goldsmith, P. Optical transition radiation from protons entering metal surfaces / P. Goldsmith, L.V. Jelley // *Phil. Mag.* — 1959. — Vol. 4, no. 43. — Pp. 836–844.
- [52] Boersch, H. Experimental Detection of Transition Radiation / H. Boersch, C. Radeloff, G. Sauerbrey // *Phys. Rev. Lett.* — 1961. — Vol. 7, no. 2. — Pp. 52–54.
- [53] Гарибян, Г.М. К теории переходного излучения / Г.М. Гарибян // *ЖЭТФ.* — 1957. — Т. 33, № 6. — С. 1403–1410.
- [54] Гарибян, Г.М. К теории переходного излучения и ионизационных потерь энергии частицы / Г.М. Гарибян // *ЖЭТФ.* — 1960. — Т. 37, № 2. — С. 527–533.

- [55] Гарибян, Г.М. Излучение частицы при переходе через границу раздела сред с учётом влияния многократного рассеяния / Г.М. Гарибян // ЖЭТФ. — 1961. — Т. 39, № 2. — С. 332–336.
- [56] Гарибян, Г.М. Макроскопическая теория переходного излучения: научное сообщение ЕФИ / Г.М. Гарибян. — 1973. — Т. 27. — С. 86.
- [57] Гарибян, Г.М. Рентгеновское переходное излучение / Г.М. Гарибян, Ян Ши. — Ереван: Изд. АНАрм. ССР, 1983. — С. 320.
- [58] Барсуков, К.А. Переходное излучение в волноводе / К.А. Барсуков // ЖЭТФ. — 1959. — Т. 37, № 4. — С. 1106–1109.
- [59] Франк, И.М. Переходное излучение и оптические свойства вещества / И.М. Франк // УФН. — 1965. — Т. 87, № 2. — С. 189–210.
- [60] Лорикян, М.П. Детектирование частиц с помощью переходного излучения / М.П. Лорикян // ЖЭТФ. — 1974. — Т. 65, № 4. — С. 1327–1329.
- [61] Transition radiation detector for relativistic particles at accelerator energies / A. Vamberger, G.F. Dell Jr., H. Uto et al. // Phys. Lett. B. — 1973. — Vol. 43, no. 2. — Pp. 153–156.
- [62] Гинзбург, В.Л. Некоторые вопросы теории переходного излучения и переходного рассеяния / В.Л. Гинзбург, В.Н. Цытович // УФН. — 1978. — Т. 126, № 4. — С. 553–608.
- [63] Гинзбург, В.Л. Переходное излучение и переходное рассеяние / В.Л. Гинзбург, В.Н. Цытович. — Москва: Наука, 1984. — С. 360.
- [64] Оганесян, А.Г. Рентгеновское переходное излучение и его применение в эксперименте / А.Г. Оганесян // ЭЧАЯ. — 1985. — Т. 16, № 1. — С. 137–182.
- [65] Dolgoshein, V. Transition radiation detectors / V. Dolgoshein // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A. — 1993. — Vol. 326, no. 3. — Pp. 434–469.
- [66] Платонов, К.Д. Переходное излучение в случайно-неоднородных средах / К.Д. Платонов, Г.Д. Флейшман // УФН. — 2002. — Т. 172. — С. 241–300.
- [67] Днестровский, Ю.Н. Излучение заряженных частиц при пролете возле идеально проводящих тел / Ю.Н. Днестровский, Д.П. Костомаров // ДАН СССР. — 1957. — Т. 116, № 3. — С. 377–380.

- [68] Бобринев, В. Излучение точечного заряда, равномерно движущегося по оси круглого отверстия в бесконечной идеально проводящей плоскости / В. Бобринев, В. Брагинский // ДАН СССР. — 1958. — Т. 123, № 4. — С. 634–636.
- [69] Днестровский, Ю.Н. Излучение модулированного пучка заряженных частиц при пролете через круглое отверстие в плоском экране / Ю.Н. Днестровский, Д.П. Костомаров // ДАН СССР. — 1959. — Т. 124, № 4. — С. 792–795.
- [70] Казанцев, А.П. Излучение заряженной частицы, пролетающей вблизи металлического экрана / А.П. Казанцев, Г.И. Сурдутович // ДАН СССР. — 1962. — Т. 147, № 1. — С. 74–77.
- [71] Седрамян, Д.М. Дифракционное излучение точечной заряженной частицы / Д.М. Седрамян // Изв. АН АрмССР. Физика. — 1964. — Т. 17. — С. 103–108.
- [72] Болотовский, Б.М. Дифракционное излучение / Б.М. Болотовский, Г.В. Воскресенский // УФН. — 1966. — Т. 88, № 2. — С. 209–251.
- [73] Гишинский, И.А. Электромагнитные поверхностные явления / И.А. Гишинский. — Новосибирск: Наука, 1990. — С. 143.
- [74] Болотовский, Б.М. Дифракция и дифракционное излучение / Б.М. Болотовский, Е.А. Галстьян // УФН. — 2000. — Т. 170, № 8. — С. 809–830.
- [75] Рязанов, М.И. Дифракционное излучение от неоднородного диэлектрического слоя на поверхности идеального проводника / М.И. Рязанов, М.Н. Стриханов, А.А. Тищенко // ЖЭТФ. — 2004. — Т. 126. — С. 349–358.
- [76] Тищенко, А.А. Дифракционное излучение ультрарелятивистского заряда в области высоких частот / А.А. Тищенко, А.П. Потылицын, М.Н. Стриханов // Изв. ВУЗов. Физика. — 2004. — Т. 47, № 1. — С. 3–7.
- [77] Переходное излучение нерелятивистских электронных сгустков на диафрагмах / В.Н. Болотов, С.И. Кононенко, В.И. Муратов, В.Д. Федорченко // ЖТФ. — 2004. — Т. 74, № 4. — С. 89–93.
- [78] Analysis of optical transition radiation emitted by a 1 MeV electron beam and its possible use as diagnostic tool / M. Castellano, M. Ferrario, S. Kulinski et al. // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A. — 1995. — Vol. 357, no. 2–3. — Pp. 231–237.

- [79] Castellano, M. Spatial resolution in optical transition radiation beam diagnostics / M. Castellano, V.A. Verzilov // *Phys. Rev. ST Accel. Beams.* — 1998. — Vol. 1, no. 6. — P. 062801.
- [80] Transverse phase space mapping of relativistic electron beams using optical transition radiation / G.P. Le Sage, T.E. Cowan, R.B. Fiorito, D.W. Rule // *Phys. Rev. ST Accel. Beams.* — 1999. — Vol. 2, no. 12. — P. 122802.
- [81] Low-energy electron-beam diagnostics based on the optical transition radiation / A.N. Aleinik, O.V. Chefonov, B.N. Kalinin et al. // *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B.* — 2003. — Vol. 201, no. 1. — Pp. 34–43.
- [82] Castellano, M. A new non-intercepting beam size diagnostics using diffraction radiation from a slit / M. Castellano // *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A.* — 1997. — Vol. 394, no. 3. — Pp. 275–280.
- [83] Fiorito, R.B. Diffraction radiation diagnostics for moderate to high energy charged particles beams / R.B. Fiorito, D.W. Rule // *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B.* — 2001. — Vol. 173, no. 1-2. — Pp. 67–82.
- [84] Experimental demonstration of wake-field effects in dielectric structures / W. Gai, P. Schoesow, B. Cole et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 1988. — Vol. 61, no. 24. — Pp. 2756–2758.
- [85] Kanareykin, A.D. Analysis of multimode wakefield generation in accelerating structures with conductive dielectric loading / A.D. Kanareykin, A.V. Tyukhtin // *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A.* — 2006. — Vol. 558, no. 1. — Pp. 62–65.
- [86] Kanareykin, A. Cherenkov radiation and dielectric based accelerating structures: wakefield generation, power extraction and energy transfer efficiency / A. Kanareykin // *J. Phys.: Conf. Ser.* — 2010. — Vol. 236, no. 1. — P. 012032.
- [87] Experimental demonstration of wakefield acceleration in a tunable dielectric loaded accelerating structure / C. Jing, A. Kanareykin, J.G. Power et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Vol. 106, no. 16. — P. 164802.
- [88] Experimental observation of energy modulation in electron beams passing through terahertz dielectric wakefield structures / S. Antipov, C. Jing, M. Fedurin et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — Vol. 108, no. 14. — P. 144801.

- [89] Andonian, G. Electron-beam driven dielectric wakefield accelerator experiments in the terahertz regime / G. Andonian // AIP Conf. Proc. — 2012. — Vol. 1507, no. 1. — Pp. 94–102.
- [90] Observation of acceleration and deceleration in gigaelectron-volt-per-metre gradient dielectric wakefield accelerators / B. O’Shea, G. Andonian, S. Barber et al. // Nat. Commun. — 2016. — Vol. 7. — P. 12763.
- [91] Positron driven high-field terahertz waves via dielectric wakefield interaction / N. Majernik, G. Andonian, O.B. Williams et al. // Phys. Rev. Res. — 2022. — Vol. 4, no. 2. — P. 023065.
- [92] Bane, K.L.F. Wake fields and wake field acceleration / K.L.F. Bane, P.B. Wilson, T. Weiland // AIP Conf. Proc. — 1985. — Vol. 127, no. 1. — Pp. 875–928.
- [93] Direct measurement of beam-induced fields in accelerating structures / H. Figueroa, W. Gai, R. Konecny et al. // Phys. Rev. Lett. — 1988. — Vol. 60, no. 21. — Pp. 2144–2147.
- [94] Simakov, E.S. Radiation of a charge moving along a corrugated surface with a relatively small period / E.S. Simakov, A.V. Tyukhtin, S.N. Galyamin // Phys. Rev. Accel. Beams. — 2019. — Vol. 22, no. 6. — Pp. 061301 (1–8).
- [95] Simakov, E.S. Surface radiation of a charged particle bunch passing through a corrugated surface with a relatively small period / E.S. Simakov, A.V. Tyukhtin // J. Instrum. — 2020. — Vol. 15. — Pp. C05047 (1–8).
- [96] Simakov, E.S. Radiation of a charged particle bunch moving along a deeply corrugated structure with a relatively small period / E.S. Simakov, A.V. Tyukhtin // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A. — 2022. — Vol. 1028. — Pp. 166387 (1–8).
- [97] Simakov, E.S. Radiation of a charged particle bunch passing through a deeply corrugated structure with a relatively small period / E.S. Simakov, A.V. Tyukhtin // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A. — 2023. — Vol. 1045. — Pp. 167640 (1–7).
- [98] Simakov, E.S. Diffraction of a symmetric TM mode at an open-ended deeply corrugated waveguide with a small period / E.S. Simakov, S.N. Galyamin, A.V. Tyukhtin // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A. — 2023. — Vol. 1057. — Pp. 168799 (1–8).
- [99] Tyukhtin, A.V. Surface radiation from charge moving along corrugated metal structure with small period / A.V. Tyukhtin, E.S. Simakov // The 8th International Conference Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2018). — Ischia, Italy. — 2018. — September. — P. 123.

- [100] Simakov, E.S. Surface radiation from charge moving along the corrugated structure with a small period / E.S. Simakov // The 9th International Student Conference “Science and Progress - 2018”. — Saint-Petersburg, Russia. — 2018. — November. — P. 203.
- [101] Simakov, E.S. Radiation from a charged particle bunch moving in presence of a corrugated surface with small period / E.S. Simakov, A.V. Tyukhtin // XIII International Symposium on Radiation from Relativistic Electrons in Periodic Structures - RREPS'19. — Belgorod, Russia. — 2019. — September. — P. 111.
- [102] Симаков, Е.С. Излучение пучка заряженных частиц в присутствии глубоко гофрированной проводящей структуры с малым периодом / Е.С. Симаков, А.В. Тюхтин // Всероссийская конференция по естественным и гуманитарным наукам с международным участием “Наука СПбГУ – 2020”. — Санкт-Петербург, Россия. — 2020. — Декабрь. — С. 468.
- [103] Simakov, E.S. Radiation of a charged particle bunch moving along a deep corrugated surface with a small period / E.S. Simakov, A.V. Tyukhtin // Proceedings of the 12th International Particle Accelerator Conference (IPAC'21). — Campinas, Brazil. — 2021. — May. — Pp. 1999–2001.
- [104] Симаков, Е.С. Излучение пучка заряженных частиц, пролетающего сквозь глубоко гофрированную проводящую структуру с малым периодом / Е.С. Симаков, А.В. Тюхтин // Всероссийская конференция по естественным и гуманитарным наукам с международным участием “Наука СПбГУ – 2021”. — Санкт-Петербург, Россия. — 2021. — Декабрь. — С. 323.
- [105] Simakov, E.S. Diffraction of a symmetric TM mode at an open-ended deeply corrugated waveguide with a small period / E.S. Simakov, S.N. Galyamin, A.V. Tyukhtin // Proceedings of the International Conference “Days on Diffraction 2023”. — Saint-Petersburg, Russia. — 2023. — June. — Pp. 212–217.
- [106] Фелсен, Л. Излучение и рассеяние волн (том 1) / Л. Фелсен, Н. Маркувиц. — Москва: Мир, 1978. — С. 550.
- [107] Тюхтин, А.В. Излучение Вавилова-Черенкова в изотропной среде: учебно-методическое пособие / А.В. Тюхтин. — СПб: СОЛО, 2019. — С. 78.
- [108] Прудников, А.П. Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. — Москва: Наука, 1983. — С. 752.

- [109] Сидоров, Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. — Москва: Наука, 1989. — С. 480.
- [110] Воскресенский, Г.В. Излучение магнитных волн из открытого конца плоского волновода, частично заполненного диэлектриком / Г.В. Воскресенский, С.М. Журав // Радиотехника и электроника. — 1978. — Т. 23, № 12. — С. 2505–2510.
- [111] Galyamin, S.N. Diffraction at the open-ended dielectric-loaded circular waveguide: rigorous approach / S.N. Galyamin, V.V. Vorobev, A.V. Tyukhtin // IEEE Trans. Microw. Theory Tech. — 2021. — Vol. 69, no. 5. — Pp. 2429–2438.
- [112] Galyamin, S.N. Diffraction at the open end of dielectric-lined circular waveguide / S.N. Galyamin, V.V. Vorobev // IEEE Trans. Microw. Theory Tech. — 2022. — Vol. 70, no. 6. — Pp. 3087–3095.
- [113] Воскресенский, Г.В. Излучение из плоского волновода с фланцем / Г.В. Воскресенский, С.М. Журав // Радиотехника и электроника. — 1976. — Т. 21, № 7. — С. 1390–1395.
- [114] Абрамовиц, М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. — Москва: Наука, 1979. — С. 832.

Список публикаций по теме диссертации

- 1) Simakov, E.S. Radiation of a charge moving along a corrugated surface with a relatively small period / E.S. Simakov, A.V. Tyukhtin, S.N. Galyamin // Phys. Rev. Accel. Beams. – 2019. – Vol. 22, no. 6. – P. 061301 (1-8).
- 2) Simakov, E.S. Surface radiation of a charged particle bunch passing through a corrugated surface with a relatively small period / E.S. Simakov, A.V. Tyukhtin // J. Instrum. – 2020. – Vol. 15. – P. C05047 (1-8).
- 3) Simakov, E.S. Radiation of a charged particle bunch moving along a deeply corrugated structure with a relatively small period / E.S. Simakov, A.V. Tyukhtin // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A. – 2022. – Vol. 1028. – P. 166387 (1-8).
- 4) Simakov, E.S. Radiation of a charged particle bunch passing through a deeply corrugated structure with a relatively small period / E.S. Simakov, A.V. Tyukhtin // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A. – 2023. – Vol. 1045. – P. 167640 (1-7).
- 5) Simakov, E.S. Diffraction of a symmetric TM mode at an open-ended deeply corrugated waveguide with a small period / E.S. Simakov, S.N. Galyamin, A.V. Tyukhtin // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A. – 2023. – Vol. 1057. – P. 168799 (1-8).
- 6) Tyukhtin, A.V. Surface radiation from charge moving along corrugated metal structure with small period / A.V. Tyukhtin, E.S. Simakov // The 8th International Conference Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena (Channeling 2018). – Ischia, Italy. – 2018. – September. – P. 123.
- 7) Simakov, E.S. Surface radiation from charge moving along the corrugated structure with a small period / E.S. Simakov // The 9th International Student Conference “Science and Progress 2018”. – Saint-Petersburg, Russia. – 2018. – November. – P. 203.
- 8) Simakov, E.S. Radiation from a charged particle bunch moving in presence of a corrugated surface with small period / E.S. Simakov, A.V. Tyukhtin // XIII International Symposium on Radiation from Relativistic Electrons in Periodic Structures (RREPS'19). – Belgorod, Russia. – 2019. – September. – P. 111.

- 9) Симаков, Е.С. Излучение пучка заряженных частиц в присутствии глубоко гофрированной проводящей структуры с малым периодом / Е.С. Симаков, А.В. Тюхтин // Всероссийская конференция по естественным и гуманитарным наукам с международным участием “Наука СПбГУ 2020”. – Санкт-Петербург, Россия. – 2020. – Декабрь. – С. 468.
- 10) Simakov, E.S. Radiation of a charged particle bunch moving along a deep corrugated surface with a small period / E.S. Simakov, A.V. Tyukhtin // Proceedings of the 12th International Particle Accelerator Conference (IPAC'21). – Campinas, Brazil. – 2021. – May. – Pp. 1999-2001.
- 11) Симаков, Е.С. Излучение пучка заряженных частиц, пролетающего сквозь глубоко гофрированную проводящую структуру с малым периодом / Е.С. Симаков, А.В. Тюхтин // Всероссийская конференция по естественным и гуманитарным наукам с международным участием “Наука СПбГУ 2021”. – Санкт-Петербург, Россия. – 2021. – Декабрь. – С. 323.
- 12) Simakov, E.S. Diffraction of a symmetric TM mode at an open-ended deeply corrugated waveguide with a small period / E.S. Simakov, S.N. Galyamin, A.V. Tyukhtin // Proceedings of the International Conference “Days on Diffraction 2023”. – Saint-Petersburg, Russia. – 2023. – June. – Pp. 212-217.