

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

На правах рукописи

Шарлай Артем Сергеевич

**ПОИСК ОПТИМАЛЬНОЙ ПО СТОИМОСТИ
СТРОИТЕЛЬСТВА ТРАЕКТОРИИ ДОРОГИ НА РЕЛЬЕФЕ
МЕСТНОСТИ**

Научная специальность

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент М.Э. Аббасов

г. Санкт-Петербург

2024

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	4
Глава 1	Вспомогательные сведения
1.1	Некоторые сведения из функционального анализа 12
1.2	Некоторые сведения из высшей алгебры 14
1.3	Некоторые сведения из вариационного исчисления 14
Глава 2	Постановка задачи и необходимые условия минимума
2.1	Постановка задачи и основные предположения 17
2.2	Вывод необходимых условий минимума для функционала стоимости 19
Глава 3	Приближенные методы решения задачи
3.1	Метод, основанный на полиномиальной интерполяции 24
3.2	Метод Рунге 30
3.3	Метод Галеркина 38
Глава 4	Численное решение задачи. Существование и единственность решения
4.1	Метод пристрелки для поиска оптимальной траектории 44
4.2	Существование и единственность решения 49
Заключение	56
Приложение А	Листинги программ
A.1	Листинг программы MatLab, реализующей метод, основанный на полиномиальной аппроксимации 58

А.2	Листинг программы MatLab, реализующей метод Рунге при постоянном α	61
А.3	Листинг программы MatLab, реализующей метод Рунге при переменном α	63
А.4	Листинг программы Python, реализующей метод Галеркина для системы тригонометрических полиномов	65
А.5	Листинг программы Python, реализующей метод Галеркина для системы алгебраических полиномов	68
А.6	Листинг программы MatLab, реализующей метод пристрелки	72
Список обозначений		78
Литература		79

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы и степень разработанности проблемы в литературе

Одной из существенных задач при геометрическом проектировании дорог, водотоков, трубопроводов и других транспортных сетей является определение оптимального в смысле стоимости строительства пути [63]. Проблемы такого вида естественным образом возникают перед различными частными организациями, государственными органами и военными структурами, является предметом изучения для многих исследователей. Такие задачи встречаются не только в гражданском строительстве, но и в других областях, таких как робототехника, изучение космоса и т. д. [47, 89]. Ввиду высокой важности проблемы разработано множество эффективных методов ее решения. Эти методы обычно основаны на теории графов. Здесь можно, например, упомянуть о популярном у инженеров методе “Cost Path Analysis”, который базируется на построении и анализе решетки стоимости. Одним из наиболее часто используемых является алгоритм Дейкстры [62]. Для повышения точности решения при применении этого алгоритма приходится увеличивать плотность решетки. Это приводит к резкому увеличению времени вычислений и во многих случаях делает этот подход практически неприменимым. Для преодоления этого недостатка были предложены различные эвристические методы, такие, например, как алгоритм A^* [50, 91, 95], представляющие собой модификацию алгоритма Дейкстры, которая использует эвристическую функцию для уменьшения количества вычислений. Другая идея основана на построении случайных деревьев таким образом, чтобы они быстро расширялись и покрывали изучаемую область. Здесь можно упомянуть алгоритмы RRT [64, 76], RRT* [100], RRT connect [77],

T-RRT [71] и другие, использующие тот же подход [79, 94]. Существует много других эвристических процедур решения задачи [46, 56, 69, 93, 101]. Такие методы приводят к удовлетворительному результату, качество которого обычно не может быть гарантировано. В данном диссертационном исследовании предлагается метод решения задачи, обеспечивающий оптимальность полученного пути, основанный на вариационных принципах.

Цель исследования

Целью настоящего исследования является математическое моделирование затрат на строительство дороги, соединяющей две заданные точки: исходный пункт, из которого транспортируются строительные материалы, необходимые для прокладки пути, и конечный пункт. Такая модель позволяет строго сформулировать проблему поиска оптимальной по затратам траектории. Также целью работы является анализ полученной модели с выводом условий, которым должна удовлетворять искомая траектория, а также конструирование методов и алгоритмов решения получающейся задачи, а также доказательство существования и единственности ее решения. Обобщая сказанное, глобальной целью работы является представление математических инструментов для структур и лиц, принимающих решения в вопросах, связанных с дорожным строительством или сферами, допускающими аналогичную математическую формализацию, для более эффективного использования ресурсов.

Основные задачи

Одной из основных задач, на решение которых направлено настоящее диссертационное исследование, является построение математической модели для проблемы получения оптимальной в смысле затрат траектории, соединяющей две заданные точки. Для математической формализации задачи нужно выделить основных характеристики, от которых зависит стоимость пути.

Модель задается с помощью интегрального функционала стоимости, который задает отображение между допустимыми кривыми и их стоимостью.

Для этого функционала требуется получить необходимое условие минимума, посредством которого и может быть определена искомая оптимальная траектория. Нужно предложить методы решения получающегося условия, а также изучить вопросы существования и единственности его решения.

Научная новизна

В данной диссертационной работе проблема поиска оптимальной по затратам на строительство траектории, соединяющей две заданные точки, сводится к задаче вариационного исчисления. Интегральный функционал стоимости, определяющий разработанную модель, учитывает стоимость доставки строительных материалов и стоимость их укладки как основные величины, от которых зависит конечная стоимость всего пути. Получающийся функционал содержит слагаемое с двойным интегралом, которое после дополнительного преобразования сводится к более простому виду. Для полученной таким образом задачи с помощью аппарата вариационного исчисления выводится необходимое условие минимума, которое имеет вид интегро-дифференциального уравнения. Таким образом, показано, что оптимальная траектория удовлетворяет указанному интегро-дифференциальному уравнению и двум граничным условиям. При некоторых дополнительных условиях доказана единственность решения, с помощью принципа неподвижной точки Шаудера исследован вопрос его существования. Разработаны приближенные методы решения получающейся граничной задачи, позволяющие получать ответ в виде алгебраического или тригонометрического полинома, а также построен численный метод решения, использующий идеи линеаризации, метода пристрелки, а также метода конечных разностей.

Методы исследования

С помощью аппарата математического моделирования строится интегральный функционал стоимости, аргументом в котором выступает функция, описывающая траекторию пути. Для формирования функционала выделены основные величины, влияющие на стоимость пути - это стоимость

доставки строительных материалов и стоимость работ по их укладке. При этом используется естественное предположение о том, что стоимость прокладки единицы длины дороги зависит от удаленности от исходной точки, которая принимается в качестве материальной базы. Для поиска оптимальной функции используется аппарат вариационного исчисления, методы высшей алгебры, алгоритмы из области математического программирования, численных методов, теории дифференциальных уравнений и функционального анализа. Выводятся условия оптимальности, учитывающие специфику построенного функционала. Они аналогичны классическим условиям Эйлера-Лагранжа, однако приводят не к дифференциальным, а интегро-дифференциальным уравнениям. При построении методов решения получающейся граничной задачи используются численные методы нахождения решения систем нелинейных алгебраических уравнений, разложение искомой траектории по системе базисных функций, а также средств математического пакета MATLAB и языка программирования Python. Для доказательства существования и единственности решения привлекаются понятия равномерно непрерывного оператора, равностепенной непрерывности и равномерной ограниченности и компактности множества функций.

Теоретическая значимость и практическая значимость

Полученные в работе результаты получены автором лично и имеют теоретическую значимость для исследований в сфере гражданского строительства и других областей, в которых возникают задачи построения оптимальной в том или ином смысле траектории. Предложенный в работе подход дает возможность прокладывать оптимальные по стоимости железные и автомобильные дороги, трубопроводы и прочие объекты транспортной инфраструктуры, соединяющие две заданные точки. Это позволяет решать одну из важнейших задач планирования строительства указанных объектов наиболее эффективно с точки зрения затрат. На основе построенной модели и разработанных методов можно создать современный программный продукт, позволяющий получать теоретически обоснованное оптимальное решение исследуемой задачи.

Как уже было отмечено, к аналогичным математическим формулировкам

кам могут приводить проблемы и из других областей, таких, например, как робототехника [78, 90]. Поэтому полученные в настоящей работе результаты могут применяться не только в рамках дорожного строительства, но и для более широкого круга задач.

Границы исследования

Исследование ведется в предположении, что перепад высот на местности незначителен и им можно пренебречь. При этом необходимо отметить, что в рамках предложенной модели учет рельефа местности можно проводить за счет использования функции стоимости строительных работ, которая зависит в том числе и от рельефа.

Предмет исследования

Предмет исследования работы является задача получения оптимальной по стоимости строительства траектории, соединяющей две данные точки.

Объект исследования

Объектом исследования является интегральный функционал стоимости строительства пути. В работе рассматривается проблематика построения данного функционала, а также методы его минимизации.

Апробация результатов

Основные результаты диссертационной работы были опубликованы в высокорейтинговых научных журналах

- Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления,
- Математическое моделирование (Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук),

а также доложены на международных конференциях

- Международная конференции «XIV International Conference "Optimization and Applications"(ОПТИМА-2023)», г. Петровац, Черногория, 18–22 сентября 2023 г.
- 5th International Conference on Problems of Cybernetics and Informatics (PCI 2023), Баку, Азербайджан, 28–30 августа 2023 г.
- The 8th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications (COIA-2022), Баку, Азербайджан 24–26 августа 2022 г.

и семинарах

- Workshop on the intersections of computation and optimisations, Канберра, Австралия, 24 ноября 2021 г.
- Семинар кафедры 13 “Общенаучных дисциплин” Военной академии материально-технического обеспечения имени генерала армии А. В. Хрулева, Санкт-Петербург, Россия, 25 ноября 2021 г.

Кроме того, данное исследование было поддержано экспертами Российского Научного Фонда, которые поддержали проект 23-21-00027 “Поиск оптимальной траектории с применением алгоритмов искусственного интеллекта”.

Публикации

Результаты работы опубликованы в трех статьях в российских и международных рецензируемых научных журналах (см. [1–3]) и в нескольких тезисах международных научных конференций (см. [38–40]), список которых представлен выше.

Основные научные результаты

- Метод математического моделирования построения оптимальной в смысле стоимости дороги, соединяющей две заданные точки, см. пункт

1 работы [3], пункт 2 работы [2], пункт 2 работы [1], работу [38] из списка публикаций автора диссертации (предложен лично автором диссертации)

- Математическая формализация, в рамках которой построена модель, определяемая интегральным функционалом стоимости, см. пункт 1 работы [3], пункт 2 работы [2], пункт 2 работы [1] из списка публикаций автора диссертации (предложена лично автором диссертации)
- Необходимое условие минимума построенного функционала, учитывающее его специфику. Это условие имеет вид интегро-дифференциального уравнения, см. пункт 2 работы [3] из списка публикаций автора диссертации (личный вклад составляет не менее 80%)
- Теоремы существования и единственности полученного интегро-дифференциального уравнения, см. пункт 3 работы [1] из списка публикаций автора диссертации (личный вклад составляет не менее 80%)
- Приближенные и численные методы решения полученного уравнения, основанные на подходах функционального анализа, а также аппарате вычислительной математики, см. пункт 3 работы [3], пункты 3 и 4 работы [2], пункты 2, 3, 4 работы [1], работу [39] из списка публикаций автора диссертации (личный вклад составляет не менее 80%)
- Программная реализация построенных алгоритмов в математическом пакете MATLAB и языке программирования Python, см. пункт 3 работы [3], пункты 4 работы [2], пункт 4 работы [1] из списка публикаций автора диссертации, а также Приложение А в самой диссертации (личный вклад составляет не менее 80%)

Положения, выносимые на защиту

Сформулируем основные результаты, полученные в работе:

- Разработан метод математического моделирования построения оптимальной в смысле стоимости дороги, соединяющей две заданные точ-

ки. Предложена математическая формализация, в рамках которой построена модель, определяемая интегральным функционалом стоимости.

- Сформулировано и доказано необходимое условие минимума построенного функционала, учитывающее его специфику. Это условие имеет вид интегро-дифференциального уравнения.
- Сформулированы и доказаны теоремы существования и единственности полученного интегро-дифференциального уравнения.
- Разработаны приближенные и численные методы решения полученного уравнения, основанные на подходах функционального анализа, а также аппарате вычислительной математики. Предложена программная реализация построенных алгоритмов в математическом пакете MATLAB и языке программирования Python.

ГЛАВА 1

Вспомогательные сведения

Вначале коротко приведем вспомогательные сведения, необходимые для дальнейшего изложения.

1.1 Некоторые сведения из функционального анализа

Мы будем работать в следующих нормированных пространствах:

- Пространство непрерывных функций $\mathbb{C}[0, l]$ с нормой

$$\|x\| = \max_{t \in [0, l]} |x(t)|.$$

- Пространство $\mathbb{C}^k[0, l]$ k -раз непрерывно дифференцируемых функций с нормой

$$\|x\|_{\mathbb{C}^k[0, l]} = \sum_{i=0}^k \max_{t \in [0, l]} |x^{(i)}(t)|.$$

- Пространство $\widetilde{\mathcal{L}}_p[0, l]$ непрерывных на $[0, l]$ функций с нормой

$$\|x\|_p = \left(\int_0^l |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty).$$

Определение 1.1.1 Пусть A, B - два множества нормированного пространства \mathbb{X} . A называют плотным в B , если $B \subset \bar{A}$, где \bar{A} - замыкание множества A . A называют всюду плотным если $\mathbb{E} = \bar{A}$.

Пусть \mathbb{E} – евклидово пространство

Определение 1.1.2 Система элементов $\{x_i\} \subset \mathbb{E}$ называется полной тогда и только тогда, когда множество всевозможных линейных комбинаций её элементов всюду плотно в \mathbb{E} .

Определение 1.1.3 Полную ортогональную систему $\{x_i\}$ евклидова пространства \mathbb{E} называют ортогональным базисом.

Пространство $\widetilde{\mathcal{L}}_2[0, l]$ непрерывных на $[0, l]$ функций является евклидовым. В нем можно ввести скалярное произведение так:

$$\langle x, y \rangle = \int_0^l x(t)y(t) dt.$$

Важнейшим ортогональным базисом в этом пространстве является тригонометрическая система, состоящая из функций

$$\frac{1}{2}, \cos \frac{2\pi k}{l}t, \sin \frac{2\pi k}{l}t, k = 1, 2, \dots$$

Определение 1.1.4 Функция $x(t)$, определенная на $[0, l]$ называется финитной, если найдется $[a; b] : 0 < a; b < l$ вне которого $x(t) \equiv 0$ (функция финитна на $(-\infty; +\infty)$, если она равна нулю вне некоторого отрезка).

Теорема 1.1.1 Множество финитных, бесконечно дифференцируемых на $[0, l]$ функций плотно в $\widetilde{\mathcal{L}}_p[0, l]$.

Следствие 1.1.1.1 Множество финитных, непрерывно дифференцируемых на $[0, l]$ функций плотно в $\widetilde{\mathcal{L}}_p[0, l]$.

Подробное изложение и доказательства приведенных результатов могут быть найдены в [18, 21, 25, 31].

1.2 Некоторые сведения из высшей алгебры

Определение 1.2.1 Пусть $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$. Матрицу

$$V(x_1, \dots, x_{n+1}) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

называют матрицей Вандермонда.

Определитель Вандермонда

$$\det V(x_1, \dots, x_{n+1}) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j).$$

Для того, чтобы определитель Вандермонда равнялся нулю необходимо и достаточно, чтобы существовала хотя бы одна пара (x_i, x_j) такая, что $x_i = x_j$ при $i \neq j$.

Подробное изложение и доказательства приведенных результатов могут быть найдены в [11, 14, 22, 23].

1.3 Некоторые сведения из вариационного исчисления

Пусть дана функция $F(x, y, y')$, непрерывная вместе с ее частными производными по всем трем аргументам x, y, y' включительно. Пусть также даны две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ в плоскости Oxy . Любую кривую, выражаемую уравнениями

$$y = y(x),$$

где $y \in C^1[x_1, x_2]$, проходящую через точки A и B ($y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$) будем называть допустимой. Сформулируем простейшую задачу вариационного исчисления. Среди всех допустимых кривых нужно определить ту, вдоль которой интеграл

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$

принимает наибольшее значение.

Для решения указанной задачи применяется метод вариаций. Кратко его опишем. Пусть $\eta(x)$ – непрерывно дифференцируемая финитная функция, заданная на отрезке $[x_1, x_2]$. Вариацией функционала J в y называют величину

$$\delta J = \left. \frac{d}{dt} J(y + t\eta) \right|_{t=0}.$$

Теорема 1.3.1 *Для того чтобы допустимая функция $y = y(x)$ была минимумом функционала J , необходимо, чтобы вариация*

$$\delta J = 0$$

для любой финитной непрерывно дифференцируемой на отрезке $[x_1, x_2]$ функции.

Подробное изложение и доказательства приведенных результатов могут быть найдены, например, в [9, 15, 24, 34–36, 84, 88].

ГЛАВА 2

Постановка задачи и необходимые условия минимума

Основным предметом настоящего исследования является проблема получения оптимальной по стоимости затрат на строительство траектории пути. Такие задачи возникают при решении широкого круга практических задач, таких, например, как дорожное строительство, робототехника, прокладка трубопроводов и иных транспортных сетей, а потому встают перед различными частными организациями, государственными органами и военными структурами. Существует большое количество применяемых исследователями способов решения задачи, большая часть которых имеют эвристическую природу. Например, одним из наиболее популярных инженерных подходов к решению этой задачи является метод “*Cost Path Analysis*”, который базируется на построении и анализе решетки стоимости (см. [?, 52, 98]). В данной работе предлагается иной путь, основанный на идеях, аппарате и подходах математического моделирования. Предлагается математическая формализация исходной задачи, которая приводит к проблеме минимизации интегрального функционала стоимости, аргументом в котором выступает функция, описывающая траекторию пути. Полученный функционал после некоторых дополнительных преобразований переписывается в более простой форме. Таким образом, проблема сводится к задаче вариационного исчисления, для которой можно вывести необходимое условие оптимальности, учитывающее специфику данного функционала. Необходимо отметить, что оно имеет вид не дифференциального, как классические условия Эйлера-Лагранжа, а интегро-дифференциального уравнения, требующего построения методов для его решения, а также выяснения условий, обес-

печивающих существование и единственность решения. Все эти вопросы и составляют существо настоящей работы.

Начнем с постановки задачи, а также с формулирования и обсуждения основных предположений, при которых строится модель и выводится интегральный функционал стоимости.

2.1 Постановка задачи и основные предположения

Пусть заданы координаты начальной и конечной точек O и A , которые нужно связать дорогой, затратив минимальное количество средств на строительство. Естественно предполагать, что общая стоимость строительства складывается из двух компонент:

- стоимости доставки строительных материалов;
- стоимости укладки дорожного покрытия.

Для подсчета этих составляющих нужны дополнительные предположения. Сформулируем их.

- Доставка стройматериалов всегда осуществляется из начальной точки и производится по уже построенному участку дороги.

Мы считаем, что подвоз строительных материалов осуществляется из пункта O , выполняющего роль материальной базы. При этом их транспортировка к текущему расположению строительной площадки производится исключительно по уже готовому участку дороги, то есть проходит в одних и тех же условиях на протяжении всего процесса строительства. Отметим также, что, цена доставки зависит от удаленности от базы и объема перевозимого материала.

- Технология строительства дороги одинакова в любой точке траектории.

Так как технология укладки дороги едина в любой точке траектории, величина количества материалов, требующихся для строительства единицы длины пути, является постоянной. Поэтому можно ввести постоянную

α , равную стоимости доставки, приходящейся на единицу длины пути (от базы), объема строительных материалов, необходимых для укладки единицы длины дороги.

- Перепад высот на местности, где ведется строительство дороги, незначительный.

Это предположение дает возможность пренебрегать перепадом высот на рассматриваемой области и вести дальнейшие построения в двухмерной системе координат.

- Условия строительства меняются от точки к точке.

Предполагаем, что каждая точка имеет свои условия строительства, обусловленные рельефом, ландшафтом и другими факторами. Следовательно, можем ввести функцию β стоимости строительных работ за единицу длины пути.

Введем декартову систему координат с началом в точке O . Без уменьшения общности можно считать, что конечная точка A имеет координаты $(l, 0)$. Пусть $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая граничным условиям

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0.$$

Любую такую кривую будем называть допустимой.

При сформулированных предположениях функционал стоимости строительства дороги, определяемой функцией $y(x)$, имеет вид

$$J(y) = \int_0^l \alpha \sqrt{1 + y'^2(x)} \int_0^x \sqrt{1 + y'^2(\xi)} d\xi dx + \int_0^l \beta(x, y) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx, \quad (2.1)$$

где α – константа, определяющая стоимость доставки, а $\beta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ заданная неотрицательная функция с непрерывными частными производными.

ми до второго порядка включительно, определяющая стоимость работ по укладке дорожного полотна.

Будем далее предполагать, что существует дважды непрерывно дифференцируемая допустимая кривая $y_*(x)$, доставляющая минимум функционалу (2.1). Она и определяет оптимальную по стоимости строительства траекторию дороги.

Таким образом, получаем задачу вариационного исчисления с закрепленными концами.

2.2 Вывод необходимых условий минимума для функционала стоимости

Излагаемые в данном пункте результаты получены автором в работе [3]. Вначале сформулируем и докажем вспомогательный результат.

Лемма 2.2.1 *Для произвольной функции $f(x) \in \mathbb{C}[0, l]$ справедливо равенство*

$$\int_0^l f(x) \int_0^x f(\xi) d\xi dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^l f(x) dx \right)^2. \quad (2.2)$$

Доказательство Левая часть равенства (2.2) представляет из себя двойной интеграл

$$\int_0^l \int_0^x f(\xi) f(x) d\xi dx = \iint_{G_1} f(\xi) f(x) d\xi dx,$$

где область G_1 изображена вертикальной штриховкой на Рис. 2.1. Меняя порядок интегрирования, получаем

$$\iint_{G_1} f(\xi) f(x) d\xi dx = \int_0^l \int_{\xi}^l f(\xi) f(x) dx d\xi.$$

Воспользовавшись тем, что переменные x и ξ симметрично входят в подинтегральное выражение в правой части, меняем их местами

$$\int_0^l \int_{\xi}^l f(\xi)f(x) dx d\xi = \int_0^l \int_x^l f(x)f(\xi) d\xi dx = \iint_{G_2} f(\xi)f(x) d\xi dx.$$

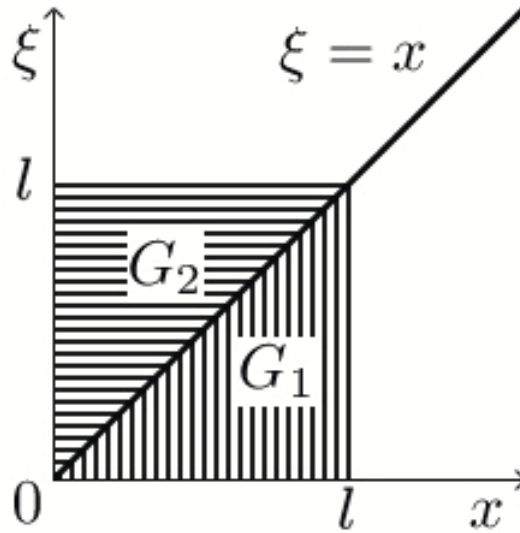


Рис. 2.1: Иллюстрация областей, по которым ведется интегрирование.

Таким образом, получаем, что интеграл по области G_2 , изображенной на Рис. 2.1 горизонтальной штриховкой, равен интегралу по области G_1

$$\iint_{G_1} f(\xi)f(x) d\xi dx = \iint_{G_2} f(\xi)f(x) d\xi dx.$$

Поэтому можем записать

$$\begin{aligned} \iint_{G_1} f(\xi)f(x) d\xi dx &= \frac{1}{2} \iint_{G_1 \cup G_2} f(\xi)f(x) d\xi dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^l f(\xi)f(x) d\xi dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l f(x) dx \int_0^l f(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \left(\int_0^l f(x) dx \right)^2, \end{aligned}$$

что и завершает доказательство.

Воспользовавшись Леммой 2.2.1, можем переписать функционал (2.1) в виде

$$J(y) = \frac{\alpha}{2} \left(\int_0^l \sqrt{1 + y'^2(x)} dx \right)^2 + \int_0^l \beta(x, y) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx. \quad (2.3)$$

Следующая теорема, которая была получена в [3], дает необходимое условие минимума этого функционала.

Теорема 2.2.1 *Для того чтобы на допустимой кривой $y_*(x) \in C^2[0, l]$ достигался минимум функционала стоимости J необходимо, чтобы*

$$\begin{aligned} \frac{y_*''(x)}{1 + y_*'^2(x)} \left(\alpha \int_0^l \sqrt{1 + y_*'^2(x)} dx + \beta(x, y_*(x)) \right) \\ + y_*'(x) \frac{\partial \beta(x, y_*(x))}{\partial x} - \frac{\partial \beta(x, y_*(x))}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Доказательство Для удобства ведем обозначение

$$F(y') = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Тогда

$$J(y) = \frac{\alpha}{2} \left(\int_0^l F(y'(x)) dx \right)^2 + \int_0^l \beta(x, y) F(y'(x)) dx.$$

Пусть $\delta(x)$ — непрерывно дифференцируемая финитная на $[0, l]$ функция, а ε — скалярная величина. Выпишем (см. пункт 1.3) вариацию функционала

$$\delta J(y_*) = \frac{d}{d\varepsilon} J(y_* + \varepsilon \delta)|_{\varepsilon=0}.$$

В соответствии с Теоремой 1.3.1 допустимая кривая y_* , доставляющая минимум функционалу J , удовлетворяет равенству

$$\delta J(y_*) = 0.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \delta J(y_*) &= \frac{d}{d\varepsilon} \left[\frac{\alpha}{2} \left(\int_0^l F(y'_* + \varepsilon\delta') dx \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^l \beta(x, y_* + \varepsilon\delta) F(y'_* + \varepsilon\delta') dx \right] \Big|_{\varepsilon=0} = \\ &= \alpha \int_0^l \frac{\partial F}{\partial y'} \delta' dx \int_0^l F(y'_*) dx + \int_0^l \frac{\partial \beta}{\partial y} F(y'_*) \delta dx + \int_0^l \beta \frac{\partial F}{\partial y'} \delta' dx. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой интегрирования по частям, рассмотрим отдельно выражения в слагаемых, входящих в правую часть данного равенства.

$$\int_0^l \frac{\partial F}{\partial y'} \delta' dx = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta \Big|_0^l - \int_0^l \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta dx = - \int_0^l \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta dx,$$

$$\int_0^l \beta \frac{\partial F}{\partial y'} \delta' dx = \beta \frac{\partial F}{\partial y'} \delta \Big|_0^l - \int_0^l \frac{d}{dx} \left(\beta \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta dx = - \int_0^l \frac{d}{dx} \left(\beta \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta dx.$$

Тогда с учетом полученного можем записать необходимое условие минимума в виде

$$\begin{aligned} \delta J(y_*) &= \int_0^l \left(-\alpha \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \int_0^l F(y'_*) dx + \frac{\partial \beta}{\partial y} F(y'_*) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{d}{dx} \left(\beta \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) \delta dx = 0. \end{aligned}$$

Функция, находящаяся под интегралом и являющаяся множителем δ , принадлежит $\mathbb{C}[0, l]$. Так как $\mathbb{C}[0, l] \subset \widetilde{\mathcal{L}}_2[0, l]$, а множество непрерывно дифференцируемых на $[0, l]$ финитных функций согласно Теореме 1.1.1

всюду плотно в $\widetilde{\mathcal{L}}_2[0, l]$, из последнего равенства следует

$$-\alpha \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \int_0^l F(y'_*) dx + \frac{\partial \beta}{\partial y} F(y'_*) - \frac{d}{dx} \left(\beta \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0.$$

Подставляя в это равенство $F(y') = \sqrt{1 + y'^2}$, а также

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = y''_*(1 + y'^2)^{-\frac{3}{2}},$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{y''_*(x)}{1 + y'^2_*(x)} \left(\alpha \int_0^l \sqrt{1 + y'^2_*(x)} dx + \beta(x, y_*(x)) \right) + \\ + y'_*(x) \frac{\partial \beta(x, y_*(x))}{\partial x} - \frac{\partial \beta(x, y_*(x))}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

что и завершает доказательство. ■

Замечание 2.2.1 Отметим, что можно получить то же условие (2.4) и с помощью классических результатов вариационного исчисления. Для этого нужно представить функционал (2.3) в виде, пригодном для непосредственного применения условий Эйлера-Лагранжа.

ГЛАВА 3

Приближенные методы решения задачи

В данной главе рассматриваются приближенные методы решения задачи получения оптимальной в смысле стоимости строительства траектории дороги. Будут получены аналитические выражения для приближенного решения, имеющие вид алгебраических или тригонометрических полиномов. Такой подход в ряде случаев может быть удобен для обработки и дальнейшего изучения полученных результатов.

Излагаемые в данной главе результаты получены автором в работах [2, 3, 38, 40].

3.1 Метод, основанный на полиномиальной интерполяции

Согласно Теорема 2.2.1 для получения допустимой кривой, удовлетворяющей необходимому условию минимума, нужно решить интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{y''}{1+y'^2} \left(\alpha \int_0^l \sqrt{1+y'^2} dx + \beta \right) + y' \beta_x - \beta_y = 0, \quad (3.1)$$

численное решение которого является самостоятельной задачей. Ее можно решить, рассматривая значения функции в узлах в качестве переменных, используя их для построения интерполяционного полинома. Этот путь приводит к нелинейной системе алгебраических уравнений относительно значений функции в узлах. В [5] разработан алгоритм реализующий указан-

ную идею для решения интегро-дифференциального уравнения при заданных начальных условиях. Для применения аналогичного подхода к нашей задаче можно модифицировать упомянутый алгоритм для задач с граничными условиями.

Итак, приведем описание адаптации метода из [5], учитывающей задаваемые в нашем случае граничные условия.

На отрезке $[0, l]$ введем равномерную сетку, содержащую $n + 1$ узлов. Имея значения вторых производных искомой функции в узлах сетки, можно построить интерполяционный полином для $y''(x)$ степени n . Интегрируя полученный многочлен и используя значения функции в первом и последнем узлах сетки (концах отрезка $[0, l]$), получаем интерполяционные многочлены степени $n + 1$ и $n + 2$ для функций $y'(x)$ и $y(x)$ соответственно. Применяя какую-либо квадратурную формулу для вычисления интеграла

$$\int_0^l \sqrt{1 + y'(x)^2} dx,$$

сводим уравнение (3.1) к задаче решения системы нелинейных уравнений относительно значений вторых производных в узлах сетки.

Обозначим через $p = (p_1, \dots, p_{n+1})^T$ вектор коэффициентов интерполяционного многочлена для $y''(x)$, а

$$\bar{y}^{(2)} = \left(y_1^{(2)}, \dots, y_{n+1}^{(2)} \right)^T$$

вектор, компоненты которого равны значению функции $y''(x)$ в узлах сетки, т.е.

$$y_i^{(2)} = y''(x_i), \quad x_i = (i - 1) \frac{l}{n}, \quad i = 1, \dots, n + 1.$$

Рассмотрим матрицу Вандермонда

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^n \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\bar{y}^{(2)} = Zp,$$

откуда в силу невырожденности Z (см. пункт 1.2) получаем

$$p = Z^{-1}\bar{y}^{(2)}.$$

Отсюда

$$y''(x) = XZ^{-1}\bar{y}^{(2)},$$

где $X = (1, x, \dots, x^n)$. Интегрируя последнее равенство в пределах от x_1 до x_i для каждого из $i = 1, \dots, n + 1$, получим

$$\bar{y}^{(1)} = Iy'(x_1) + S\bar{y}^{(2)},$$

здесь $I = (1, \dots, 1)^T$ — n -мерный единичный вектор, $\bar{y}^{(1)}$ — вектор, компоненты которого равны значению функции $y'(x)$ в узлах сетки,

$$S = BZ^{-1},$$

а матрица

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 - x_1 & \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} & \frac{x_2^3 - x_1^3}{3} & \dots & \frac{x_2^{n+1} - x_1^{n+1}}{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n+1} - x_1 & \frac{x_{n+1}^2 - x_1^2}{2} & \frac{x_{n+1}^3 - x_1^3}{3} & \dots & \frac{x_{n+1}^{n+1} - x_1^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}.$$

Обозначая \bar{y} — вектор, компоненты которого равны значению функции $y(x)$ в узлах сетки, аналогично приходим к

$$\bar{y} = Iy(x_1) + SIy'(x_1) + S^2\bar{y}^{(2)}.$$

Учитывая, что в нашей задаче известно значение искомой функции $y(x)$ в точке x_{n+1} (на правом конце отрезка) $y_n = y(x_{n+1})$, а не $y'(x_1)$, из послед-

него равенства выражаем нужную нам величину

$$y'(x_1) = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_1) - [S^2\bar{y}^{(2)}]_{n+1}}{[SI]_{n+1}},$$

где $[S^2\bar{y}^{(2)}]_{n+1}$ и $[SI]_{n+1}$ обозначают $n + 1$ -ые компоненты векторов $S^2\bar{y}^{(2)}$ и SI соответственно. Считая n четным, вычисляем интеграл с помощью формулы Симпсона (см., например, [6, 7, 16])

$$\begin{aligned} \int_0^l \sqrt{1 + y'^2} dx &\approx \int_0^l F(y'(x)) dx = \\ &= \frac{l}{3n} \sum_{i=1}^{n/2} \left(F(y_{2i-1}^{(1)}) + 4F(y_{2i}^{(1)}) + F(y_{2i+1}^{(1)}) \right). \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно приходим к нелинейной системе из $n + 1$ уравнений относительно n переменных $y_1^{(2)}, \dots, y_{n+1}^{(2)}$

$$\begin{cases} \frac{y_j^{(2)}}{1 + (y_j^{(1)})^2} \left[\alpha \Phi(\bar{y}^{(1)}) + \beta(x_j, y_j) \right] + y_j^{(1)} \beta_x(x_j, y_j) - \beta_y(x_j, y_j) = 0, \\ j = 1, \dots, n + 1, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} y'(x_1) &= \frac{y(x_{n+1}) - y(x_1) - [S^2\bar{y}^{(2)}]_{n+1}}{[SI]_{n+1}}, \\ \bar{y}^{(1)} &= Iy'(x_1) + S\bar{y}^{(2)}, \\ \bar{y} &= Iy(x_1) + SIy'(x_1) + S^2\bar{y}^{(2)}, \\ \Phi(\bar{y}^{(1)}) &= \frac{x_a}{3n} \sum_{i=1}^{n/2} \left(F(y_{2i-1}^{(1)}) + 4F(y_{2i}^{(1)}) + F(y_{2i+1}^{(1)}) \right). \end{aligned}$$

Пример 3.1.1 Рассмотрим задачу, в которой $\alpha = 0.1$, $l = y_l = 1$, а функция

$$\beta(x, y) = 1 + \sin 5x \cdot \sin y.$$

Для удобства интерпретации можно считать, что функция $\beta(x, y)$ за-

дает уравнение поверхности местности, то есть стоимость укладки дорожного покрытия тем больше, чем выше точка располагается над плоскостью Oxy .

Найдем с помощью описанного выше подхода с применением математического пакета *MatLab*¹ оптимальную по затратам траекторию, соединяющую точки O и A . Принимая $n = 26$ (при этом, очевидно, искомая кривая y аппроксимируется многочленом 28-ой степени), получаем численные результаты, приведенные в Таблице 3.1.

x	0	0.0385	0.0769	0.1154	0.1538	0.1923	0.2308	0.2692	0.3077
y	0	0.0110	0.0218	0.0333	0.0453	0.0588	0.0728	0.0880	0.1058
x	0.3462	0.3846	0.4231	0.4615	0.5000	0.5385	0.5769	0.6154	0.6538
y	0.1228	0.1424	0.1635	0.1859	0.2103	0.2363	0.2645	0.2956	0.3282
x	0.6923	0.7308	0.7692	0.8077	0.8462	0.8846	0.9231	0.9615	1.0000
y	0.3668	0.4061	0.4532	0.5087	0.5739	0.6533	0.7500	0.8526	1.0000

Таблица 3.1: Результаты расчетов.

На Рис. 3.1.1 и 3.2 полученная траектория изображена на поверхности

$$z = \beta(x, y).$$

Кривая ожидаемо “обходит” возвышенности.

¹подробнее см. приложение А.1.

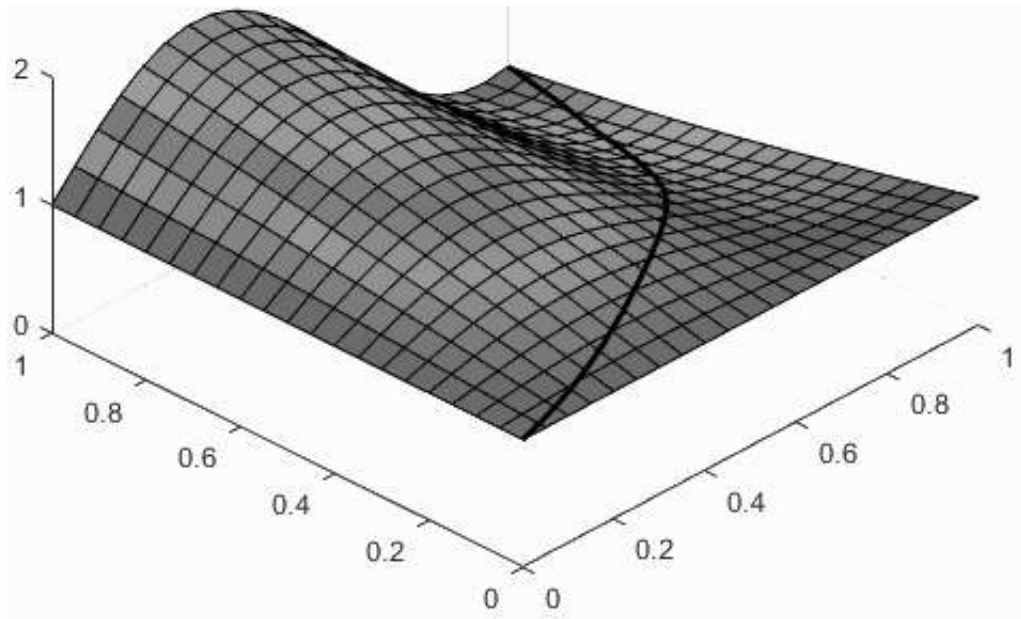


Рис. 3.1: Полученная траектория в Примере 3.1.1.

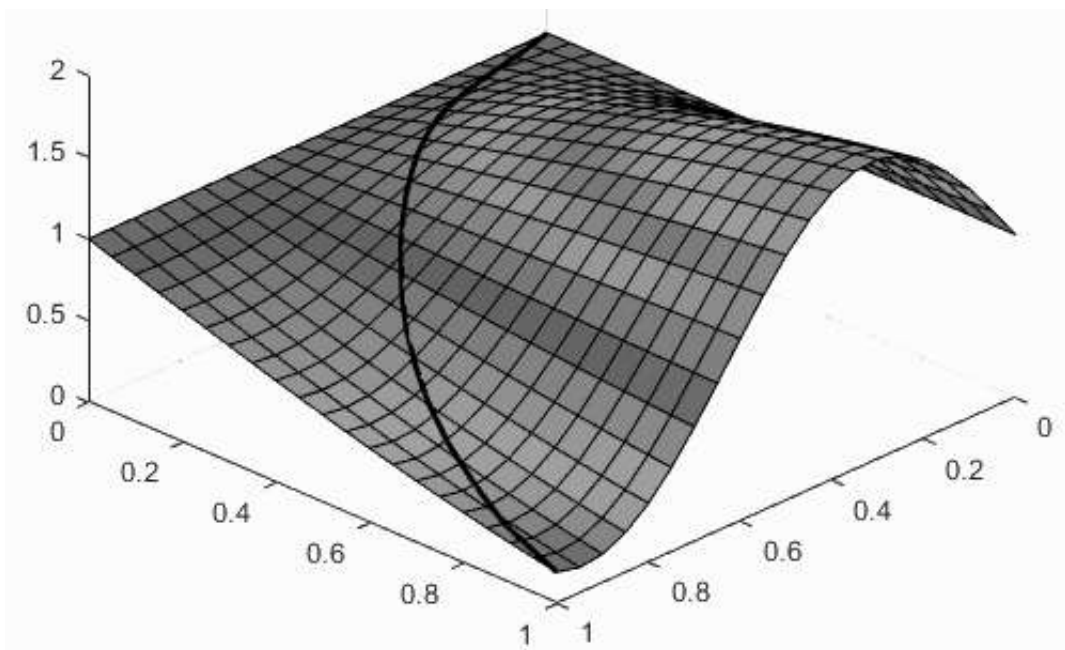


Рис. 3.2: Вид из другой точки на полученную траекторию в Примере 3.1.1.

Отметим, что представленный метод приводит к неудовлетворительным результатам при большом количестве узлов (численно неустойчивость при высокой степени полинома интерполяции). Поэтому возникает необходимость разработки иных подходов, позволяющих получать решение уравнения (4.1) с любой желаемой точностью.

3.2 Метод Ритца

Для решения нашего интегро-дифференциального уравнения (3.1) в предыдущем пункте использовался численный метод, основанный на аппроксимации искомой функции и ее производных алгебраическими полиномами. Из-за роста вычислительной погрешности с ростом степени полинома (см., например, [6]) такой подход становится практически неприменимым для поиска решения с высокой степенью точности. В данном параграфе для нахождения минимума функционала стоимости рассматривается метод Ритца [8, 13, 26, 27]. Показывается, как с его помощью может быть решена исследуемая задача. Кроме того, здесь рассматривается и решается более общая постановка задачи, при которой стоимость доставки материалов не является постоянной величиной, а зависит от координаты точки.

Вначале кратко приведем основную идею метода Ритца в общем виде [19], а далее конкретизируем ее для исследуемой задачи.

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$I(y) = \int_0^l F(x, y, y') dx,$$

где F — непрерывная функция своих аргументов, а $y \in C^1[0, l]$ при условии

$$y(0) = y(l) = 0. \quad (3.2)$$

Пусть

$$\phi(x, a_1, \dots, a_n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.3)$$

последовательность n -параметрических семейств функций, каждое из которых шире предыдущего за счет добавления дополнительного параметра, и при всех значениях параметров выполнены условия (3.2). Для каждого семейства можно поставить задачу минимизации функции n аргументов

$$I(a_1, \dots, a_n) = \int_0^l F(x, \phi(x, a_1, \dots, a_n), \phi'(x, a_1, \dots, a_n)) dx, \quad (3.4)$$

которая сводится к решению системы уравнений

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

Обозначим $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ оптимальный набор параметров, а

$$\bar{y}_n = \phi(x, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$$

соответствующую функцию семейства. В силу расширения класса допустимых функций с ростом n последовательность $\{I(\bar{y}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ является монотонно убывающей:

$$I(\bar{y}_1) \geq I(\bar{y}_2) \geq \dots$$

Если множество функций, образующих рассматриваемую систему семейств (3.3), является плотным в множестве функций из $C^1[0, l]$, для которых выполнены условия (3.2) (см. [2, 8]) то получим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(a_n) = I(y^*), \quad (3.6)$$

где y^* — функция доставляющая минимум функционалу I . Действительно, пусть любую непрерывно дифференцируемую функцию y , определенную на $[0, l]$ и обращающуюся в нуль на концах этого отрезка, можно сколь угодно точно аппроксимировать в норме пространства $C^1[0, l]$ функцией, принадлежащей одному из семейств. Тогда для любого $\delta > 0$ можно подобрать n и $y_n^* = \phi(x, a_1^*, \dots, a_n^*)$ так, чтобы было справедливо неравенство

$$\|y^* - y_n^*\|_{C^1[0, l]} \leq \delta.$$

Вследствие непрерывности F для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при

$$\|y^* - y_n^*\|_{C^1[0, l]} \leq \delta$$

выполняется неравенство

$$I(y_n^*) - I(y^*) \leq \varepsilon.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ верна цепочка неравенств

$$I(y^*) \leq I(\bar{y}_n) \leq I(y_n^*) \leq I(y^*) + \varepsilon,$$

откуда в силу произвольности выбора ε следует (3.6).

Опираясь на теорему Вейерштрасса об аппроксимации тригонометрическим многочленом, можно показать, что требуемому свойству плотности, а также граничным условиям (3.2) будет удовлетворять, в частности, система

$$\phi(x, a_1, \dots, a_n) = \sum_{k=1}^n a_k \sin \frac{\pi k}{l} x, \quad n = 1, 2, \dots$$

Пусть n — фиксированное число. Введем обозначение для вектора коэффициентов $a = (a_1, \dots, a_n)^T$, а также производных функции ϕ :

$$\phi_x(x, a) = \frac{\partial \phi(x, a)}{\partial x} = \sum_{k=1}^n a_k \frac{\pi k}{l} \cos \frac{\pi k}{l} x,$$

$$\phi_{a_k}(x, a) = \frac{\partial \phi(x, a)}{\partial a_k} = \sin \frac{\pi k}{l} x, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$\phi_{xa_k}(x, a) = \frac{\partial^2 \phi(x, a)}{\partial x \partial a_k} = \frac{\pi k}{l} \cos \frac{\pi k}{l} x, \quad k = 1, \dots, n.$$

Функционал (3.4) для выбранной системы функций запишется следующим образом:

$$I(a) = \frac{\alpha}{2} \left(\int_0^l \sqrt{1 + \phi_x^2(x, a)} dx \right)^2 + \int_0^l \beta(x, \phi(x, a)) \sqrt{1 + \phi_x^2(x, a)} dx,$$

а условия экстремума (3.5) сведутся к системе нелинейных алгебраических

уравнений относительно a_1, \dots, a_n

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(a)}{\partial a_k} = & \alpha \left(\int_0^l \sqrt{1 + \phi_x^2(x, a)} dx \right) \int_0^l \frac{\phi_{xa_k}(x, a) \phi_x(x, a)}{\sqrt{1 + \phi_x^2(x, a)}} dx + \\ & + \int_0^l \frac{\partial \beta(x, \phi(x, a))}{\partial y} \phi_{a_k}(x, a) \sqrt{1 + \phi_x^2(x, a)} dx + \\ & + \int_0^l \beta(x, \phi(x, a)) \frac{\phi_{xa_k}(x, a) \phi_x(x, a)}{\sqrt{1 + \phi_x^2(x, a)}} dx = 0, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Найдя решение $\bar{a} = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)^T$ этой системы, получим приближенное решение $\phi_x(x, \bar{a})$ исходной задачи.

Рассматриваемый подход позволяет находить приближенное решение и для задачи сформулированной в более общем виде, а именно, для ситуации, когда цена доставки α не является постоянной, а изменяется от точки к точке в силу различных условий строительства. Например, на твердых грунтах для прокладки дороги может потребоваться меньшее количество материалов, чем на болотистой местности. В этом случае для выбранной системы функций интегральный функционал стоимости будет иметь вид

$$\begin{aligned} I(a) = & \int_0^l \alpha(x, \phi(x, a)) \sqrt{1 + \phi_x^2(x, a)} \int_0^x \sqrt{1 + \phi_\xi^2(\xi, a)} d\xi dx + \\ & + \int_0^l \beta(x, \phi(x, a)) \sqrt{1 + \phi_x^2(x, a)} dx, \end{aligned}$$

что приводит к следующей системе нелинейных алгебраических уравнений

для поиска a_1, \dots, a_n

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I(a)}{\partial a_k} = & \int_0^l \frac{\partial \alpha(x, \phi(x, a))}{\partial y} \phi_{a_k}(x, a) \sqrt{1 + \phi_x^2(x, a)} \int_0^x \sqrt{1 + \phi_\xi^2(\xi, a)} d\xi dx + \\
& + \int_0^l \alpha(x, \phi(x, a)) \frac{\phi_{xa_k}(x, a) \phi_x(x, a)}{\sqrt{1 + \phi_x^2(x, a)}} \int_0^x \sqrt{1 + \phi_\xi^2(\xi, a)} d\xi dx + \\
& + \int_0^l \alpha(x, \phi(x, a)) \sqrt{1 + \phi_x^2(x, a)} \int_0^x \frac{\phi_{\xi a_k}(\xi, a) \phi_\xi(\xi, a)}{\sqrt{1 + \phi_\xi^2(\xi, a)}} d\xi dx + \\
& + \int_0^l \frac{\partial \beta(x, \phi(x, a))}{\partial y} \phi_{a_k}(x, a) \sqrt{1 + \phi_x^2(x, a)} dx + \\
& + \int_0^l \beta(x, \phi(x, a)) \frac{\phi_{xa_k}(x, a) \phi_x(x, a)}{\sqrt{1 + \phi_x^2(x, a)}} dx = 0, \quad k = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

Заметим наконец, что при ненулевых граничных условиях можно рассмотреть систему функций

$$\phi(x, a_1, \dots, a_n) = y(0) + \frac{y(l) - y(0)}{l} x + \sum_{k=1}^n a_k \sin \frac{\pi k}{l} x, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

В этом случае в приведенных выше рассуждениях изменится лишь выражение для $\phi_x(x, a)$:

$$\phi_x(x, a) = \frac{y(l) - y(0)}{l} + \sum_{k=1}^n a_k \frac{\pi k}{l} \cos \frac{\pi k}{l} x,$$

остальное же останется без изменений.

Отметим, что метод Ритца является мощным инструментом решения прикладных задач, который используется множеством исследователей [37, 41, 42, 59, 61, 67, 74, 81, 82, 86, 96, 99].

Примеры программ, реализующих метод Ритца для постоянного и переменного α , приведены в приложениях А.2 и А.3 соответственно.

Пример 3.2.1 Рассмотрим задачу, в которой $\alpha = 0.1$, $l = 1$,

$$\beta(x, y) = 1 + \sin 5x \cdot \sin y,$$

а граничные условия имеют вид

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 1.$$

Для удобства восприятия результатов будем считать, что функция $\beta(x, y)$ определяет поверхность местности, т. е. стоимость укладки дорожного покрытия прямо пропорциональна высоте точки над плоскостью Oxy . Используя математический пакет *MatLab*, при $n = 5$ были получены следующие результаты:

$$\bar{a} = (-0.31397, 0.07367, -0.03138, 0.01212, -0.00396)^T.$$

На найденном приближенном решении, которое задается в виде (3.7), имеем

$$I(a) = 1.279.$$

Применение алгоритма, описанного в пункте 3.1 и основанного на аппроксимации искомой кривой алгебраическим полиномом степени m , для $m = 26$ приводит к решению, на котором функционал равен 1.325. На Рис. 3.3 и 3.4 показана поверхность $z = \beta(x, y)$, на которой белым цветом выделена траектория, построенная с помощью метода Рунца ($n = 5$), черным — решение полученное алгоритмом из пункта 3.1 ($m = 26$).

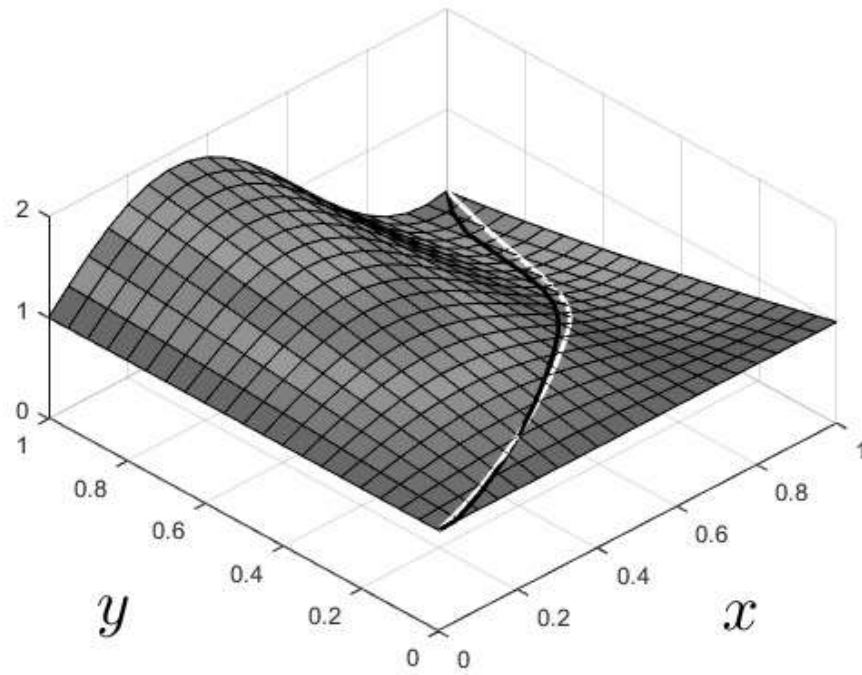


Рис. 3.3: Вид из начальной точки на полученные в примере 3.2.1 траектории.

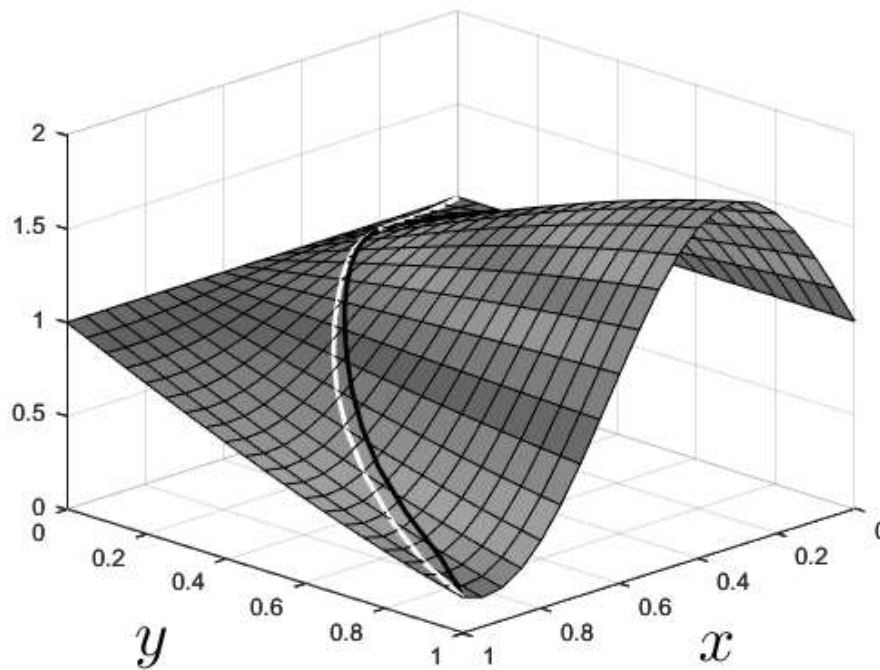


Рис. 3.4: Вид из конечной точки на полученные в примере 3.2.1 траектории.

Пример 3.2.2 Пусть $l = 1$,

$$\alpha(x, y) = \cos^2 5x \cdot \cos^2 y,$$

$$\beta(x, y) = 1 + \sin 5x \cdot \sin y,$$

граничные условия имеют вид

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 1.$$

Ищем решение в виде в виде (3.7) с помощью метода Рунца. Используя математический пакет *MatLab*, при $n = 5$ получаем следующие результаты:

$$\bar{a} = (-0.32611, 0.11689, -0.0671, 0.03071, -0.01276)^T.$$

На найденном приближенном решении имеем

$$I(a) = 1.44536.$$

Построенное решение показано на Рис. 3.5.

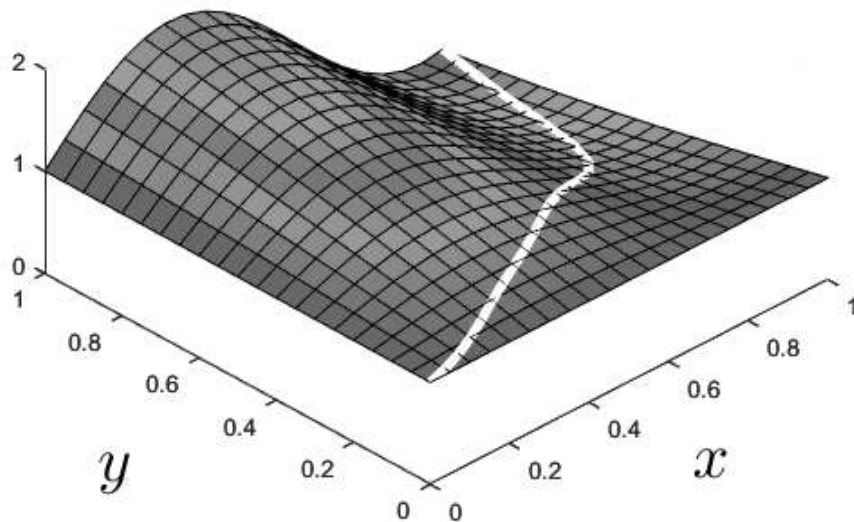


Рис. 3.5: Решение в примере 3.2.2, изображенное на поверхности $z = \beta(x, y)$.

Рассмотренный подход к решению задачи позволяет получать резуль-

тат в виде тригонометрического полинома, который при уже относительно небольшом количестве слагаемых (в примере 3.2.1 их было 5) дает результаты лучше, чем решение, основанное на аппроксимации искомой функции алгебраическим полиномом высокой степени, предлагаемое методом пункта 3.1 (в примере 3.1.1 данная степень равнялась 26). При этом сходимость предложенного алгоритма вытекает из сходимости метода Рунге.

3.3 Метод Галеркина

Опишем вначале основную идею метода Галеркина (см., например, [19]). Рассмотрим оператор

$$L(y) = \frac{y''}{1+y'^2} \left(\alpha \int_0^l \sqrt{1+y'^2} dx + \beta(x, y) \right) + y' \frac{\partial \beta(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial \beta(x, y)}{\partial y},$$

описывающий необходимое условие минимума

$$L(y) = 0. \quad (3.8)$$

Будем искать решение в виде

$$y = \frac{y_l}{l}x + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k(x), \quad (3.9)$$

где $\{\phi_k(x) \mid k = 1, 2, \dots\}$ – система базисных функций в пространстве $C_0^2[0, l]$ дважды непрерывных, финитных на отрезке $[0, l]$ функций. Очевидно функция (3.9) удовлетворяет граничным условиям

$$y(0) = y(l) = 0.$$

Можно, например, использовать функции

$$\phi_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

или

$$\phi_k(x) = (l-x)x^k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.11)$$

что непосредственно следует из аппроксимационных теорем Вейерштрасса.

Будем рассматривать проблему (3.8) в пространстве $\mathcal{L}_2[0, l]$. Очевидно, что функция y_* удовлетворяет уравнению (3.8) тогда и только тогда, когда $L(y_*)$ ортогональна всем функциям системы $\{\phi_k(x) \mid k = 1, 2, \dots\}$. Однако если мы работаем исключительно с суммой первых n членов ряда (3.9), то можем удовлетворить только n условиям ортогональности, т.е.

$$\begin{aligned} \int_0^l L(y_*(x))\phi_k(x)dx \\ = \int_0^l L\left(\frac{y_l}{l}x + \sum_{k=1}^n a_k\phi_k(x)\right)\phi_k(x)dx = 0, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Эти уравнения используются для нахождения неизвестных коэффициентов разложения решения по базисным функциям. Более подробную информацию о методе можно найти, например, в [19].

Метод Галеркина и его модификации используются многими исследователями для решения прикладных [43–45, 48, 53, 57, 66, 68, 70, 72, 75, 80, 83, 85, 87].

Рассмотрим численные примеры, в которых будем предполагать, что поверхность местности, на которой должна быть построена дорога, задается функцией β . Это предположение позволяет получить наглядную графическую иллюстрацию и интерпретацию результатов. Примеры программ, реализующих метод Галеркина для систем базисных функций (3.10) и (3.11), приведены в приложениях А.4 и А.5 соответственно.

Пример 3.3.1 Пусть $\alpha = 0.1$, $l = 1$, $y_l = 1$ и $\beta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\beta(x, y) = 1 + \sin 5x \cdot \sin y.$$

Сначала воспользуемся системой функций (3.10) и найдем решение в виде

$$y(x) = \frac{y_l}{l}x + \sum_{k=1}^5 a_k \sin \frac{\pi k}{l}x. \quad (3.12)$$

С помощью метода Галеркина получаем (черная кривая на Рис. 3.6)

$$a_1 = -0.31489, \quad a_2 = 0.07442, \quad a_3 = -0.03199, \quad a_4 = 0.01256, \quad a_5 = -0.00424.$$

Напомним, что для той же задачи метод Рунца, рассмотренный в параграфе 3.2, приводил нас (см. Пример 3.2.1) к решению, стоимость которого также равна 1,279. Как видим на Рис. 3.6, эти два решения практически идентичны.

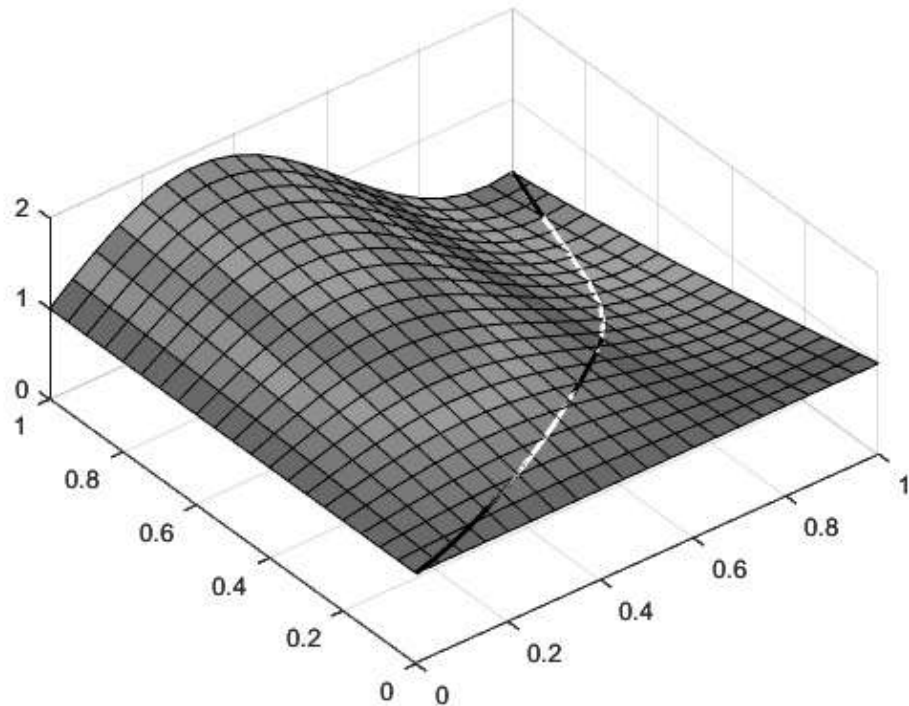


Рис. 3.6: Графики решений вида (3.12), полученные методами Галёркина (черная кривая) и Рунца (белая кривая) в Примере 3.3.1.

Теперь воспользуемся системой (3.11) и найдем решение в виде

$$y(x) = \frac{y_l}{l}x + \sum_{k=1}^5 a_k x^k (1-x). \quad (3.13)$$

Применяя метод Галеркина, получаем

$$a_1 = -0.31489, \quad a_2 = 0.07442, \quad a_3 = -0.03199, \quad a_4 = 0.01256, \quad a_5 = -0.00424.$$

На Рис. 3.7 показаны решения вида (3.13), полученные методом Галёркина и Рунца. Стоимость решения (т.е. значение функционала J) на полученном решении

$$a_1 = -0,66947, a_2 = -1,03044, a_3 = 0,4348, a_4 = 0,51721, a_5 = -2,37822,$$

составляет 1,2798.

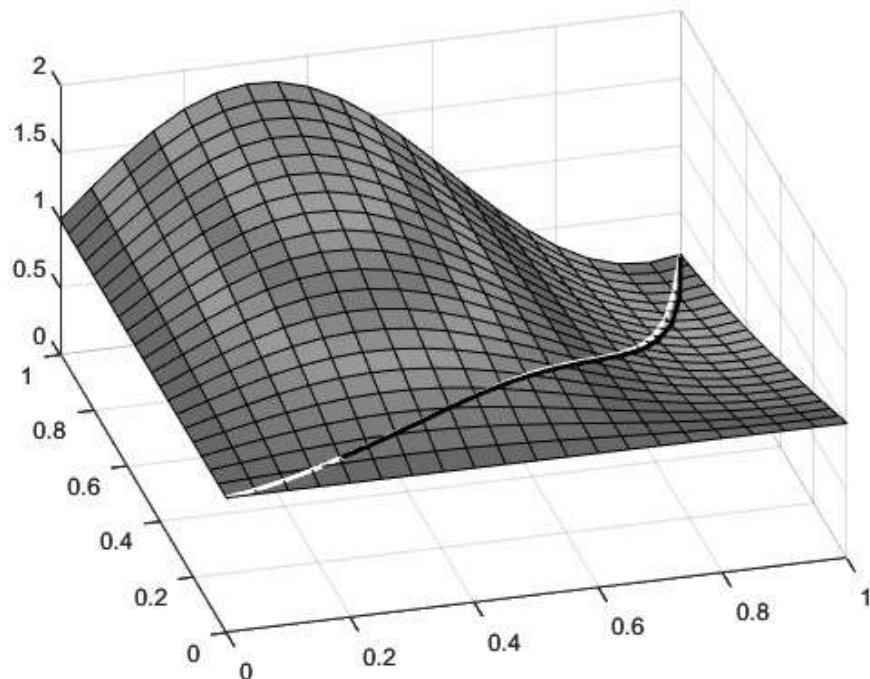


Рис. 3.7: Графики решений вида (3.13), полученные методами Галёркина (черная кривая) и Рунца (белая кривая) в Примере 3.3.1.

Пример 3.3.2 Пусть $\alpha = 0.5$, $l = 1$, $y_l = 1$ и $\beta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\beta(x, y) = 5 + 2 \cos 2x \cdot \sin y.$$

На Рис. 3.8 показано приближенное решение вида (3.13), полученное методом Галёркина, где

$$a_1 = -0.13852, a_2 = 0.02332, a_3 = -0.01159, a_4 = 0.00629, a_5 = -0.03046.$$

Стоимость решения (значение функционала J) равна 7.964.

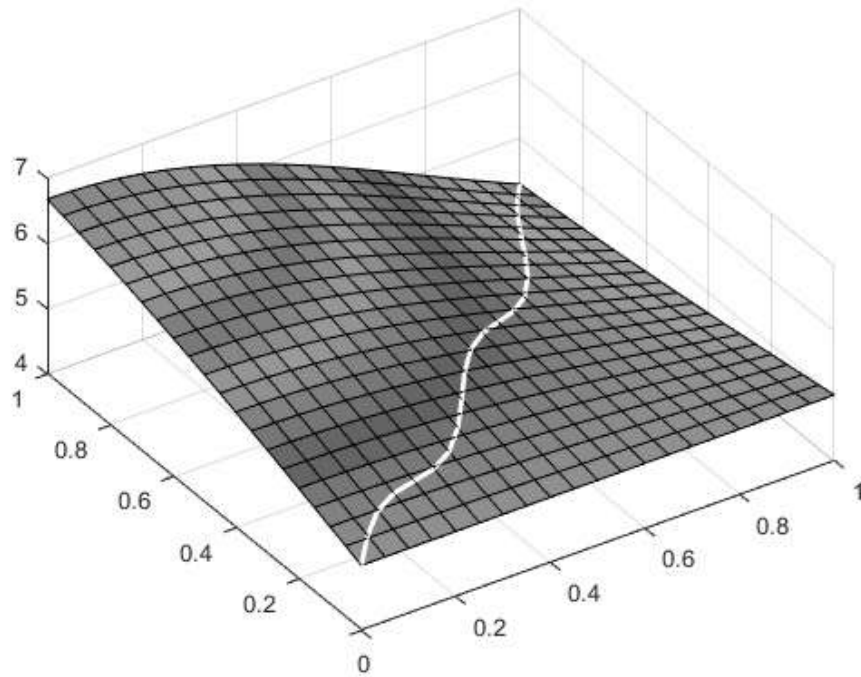


Рис. 3.8: График решения вида (3.13), полученного методом Галеркина в Примере 3.3.2.

Пример 3.3.3 Пусть $\alpha = 0.1$, $l = 1$, $y_l = 1$ и $\beta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\beta(x, y) = \sqrt{2.75 - (x - 0.5)^2 - 10(y - 0.5)^2}.$$

Метод Галеркина приводит нас к решению вида (3.13), где

$$a_1 = -0,78479, \quad a_2 = 0,02804, \quad a_3 = 4,52723, \quad a_4 = -3,25439, \quad a_5 = 0,2608.$$

Это решение показано на Рис. 3.9 и имеет стоимость (значение функционала J) 1,941.

Пример 3.3.4 Пусть $\alpha = 0.5$, $l = 1$, $y_l = 1$ и $\beta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\beta(x, y) = \sqrt{0.5 + 10(x - 0.5)^2 - (y - 0.5)^2}.$$

Метод Галеркина дает нам решение вида (3.13), где

$$a_1 = -0.43003, \quad a_2 = 0.07392, \quad a_3 = -7.33056, \quad a_4 = 25.32797, \quad a_5 = -20.57708.$$

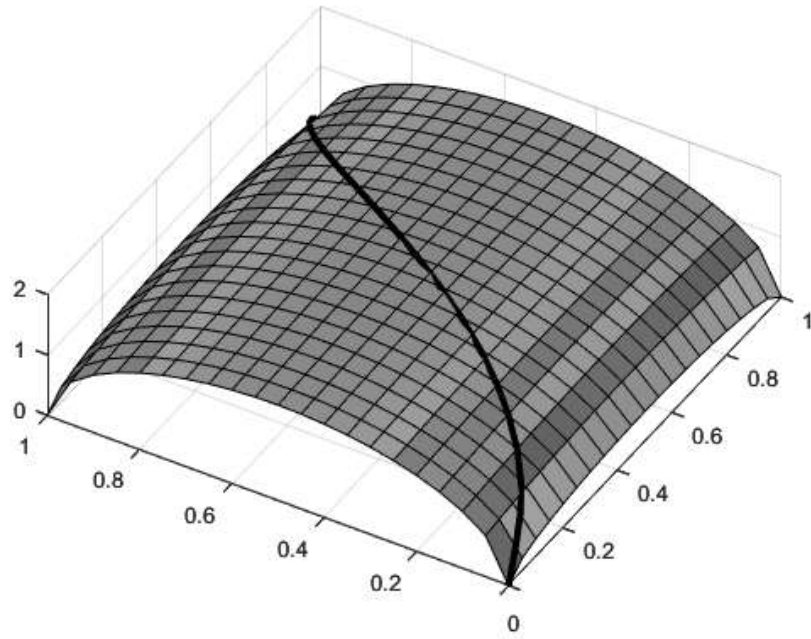


Рис. 3.9: График решения вида (3.13), полученного методом Галеркина в Примере 3.3.3.

Это решение показано на Рис. 3.10 и имеет стоимость (значение функционала J) 2,1.

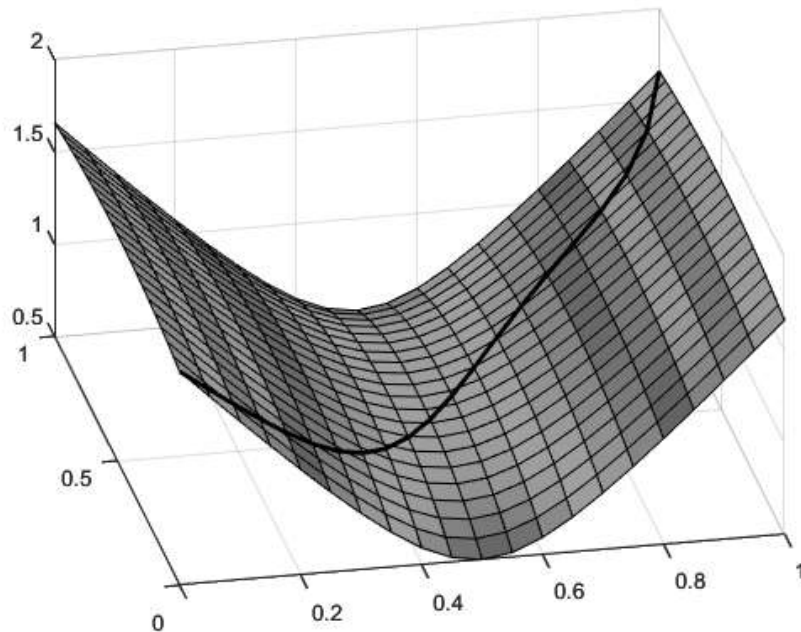


Рис. 3.10: График решения вида (3.13), полученного методом Галеркина в Примере 3.3.4.

ГЛАВА 4

Численное решение задачи. Существование и единственность решения

В данной главе описывается численный метод решения интегро-дифференциального уравнения (3.1), основанный на известном и детально изученном в литературе методе пристрелки. При дополнительных предположениях с помощью принципа неподвижной точки Шаудера доказано существование решения. Исследован вопрос единственности решения.

Излагаемые в данной главе результаты получены автором в работе [1].

4.1 Метод пристрелки для поиска оптимальной траектории

Получение оптимальной траектории с помощью изложенных в предыдущем параграфе приближенных методов могут требовать больших временных затрат, поэтому особый интерес представляет разработка численных методов решения интегро-дифференциального уравнения (3.1). Основной целью данного пункта является построение итеративного алгоритма нахождения решения уравнения (3.1), сочетающего в себе идеи линеаризации и метода пристрелки.

Итак, из Теоремы 2.2.1 следует, что искомая оптимальная траектория $y_*(x)$ должна удовлетворять интегро-дифференциальному уравнению

$$y'' \left(\alpha \int_0^l \sqrt{1 + y'^2} dx + \beta(x, y) \right) + (1 + y'^2) (y' \beta_x(x, y) - \beta_y(x, y)) = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$y'' = -\frac{(1 + y'^2)(y'\beta_x(x, y) - \beta_y(x, y))}{\alpha \int_0^l \sqrt{1 + y'^2} dx + \beta(x, y)}, \quad (4.1)$$

где $y(0) = 0$ и $y(l) = 0$.

Одной из основных проблем при численном решении этого уравнения является вычисление интеграла в знаменателе правой части (4.1). С одной стороны при применении идей классических конечно-разностных схем уравнение должно использоваться для последовательного вычисления значений функции в узлах используемой сетки, а с другой – значения функции во всех узлах должны быть известны заранее для вычисления интеграла.

В данном пункте предлагается итерационный алгоритм, основанный на линеаризации и методе пристрелки. Последний хорошо изучен и детально описан в литературе и часто применяется при решении прикладных задач [6, 10, 49, 51, 54, 55, 58, 60, 65, 73, 92]. Линеаризация исходной задачи в окрестности некоторой аппроксимации $y_n(x)$ решения служит двум целям: во-первых, мы можем использовать $y_n(x)$ для вычисления интеграла в знаменателе правой части (4.1), а, во-вторых, появляется возможность применить метод пристрелки к полученной линейной краевой задаче для получения очередного приближения $y_{n+1}(x)$.

Обозначим правую часть (4.1) через $f(x, y, y')$ и предположим, что задано приближенное решение $y_n(x)$. Тогда в окрестности $y_n(x)$ имеет место разложение

$$f(x, y, y') \approx f(x, y_n, y'_n) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_n, y'_n)(y - y_n) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y_n, y'_n)(y' - y'_n)$$

Для удобства введем обозначения

$$f_{n0}(x) = f(x, y_n, y'_n), \quad f_{n1}(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_n, y'_n), \quad f_{n2}(x) = \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y_n, y'_n),$$

где

$$f_{n0}(x) = -\frac{(1 + y_n'^2)(y_n'\beta_x(x, y_n) - \beta_y(x, y_n))}{\alpha \int_0^l \sqrt{1 + y_n'^2} dx + \beta(x, y_n)},$$

$$f_{n1}(x) = -\frac{1}{\left(\alpha \int_0^l \sqrt{1 + y_n'^2} dx + \beta(x, y_n)\right)^2} \left[\begin{aligned} & \left((1 + y_n'^2)(y_n'\beta_{xy}(x, y_n) - \beta_{yy}(x, y_n)) \right) \\ & \times \left(\alpha \int_0^l \sqrt{1 + y_n'^2} dx + \beta(x, y_n) \right) - \beta_y(x, y_n)(1 + y_n'^2) \\ & \times (y_n'\beta_x(x, y_n) - \beta_y(x, y_n)) \end{aligned} \right], \quad (4.2)$$

$$f_{n2}(x) = -\frac{1}{\left(\alpha \int_0^l \sqrt{1 + y_n'^2} dx + \beta(x, y_n)\right)^2} \left[\begin{aligned} & \left(2y_n'(y_n'\beta_x(x, y_n) - \beta_y(x, y_n)) \right) \\ & + (1 + y_n'^2)\beta_x(x, y_n) \left(\alpha \int_0^l \sqrt{1 + y_n'^2} dx + \beta(x, y_n) \right) \\ & - \alpha \left((1 + y_n'^2)(y_n'\beta_x(x, y_n) - \beta_y(x, y_n)) \right) \int_0^l \frac{y_n'}{\sqrt{1 + y_n'^2}} dx \end{aligned} \right]. \quad (4.3)$$

Тогда новое приближение $y_{n+1}(x)$ может быть найдено как решение следующей краевой задачи

$$\begin{aligned} y_{n+1}''(x) &= f_{n0}(x) + f_{n1}(x)(y_{n+1}(x) - y_n(x)) + \\ &+ f_{n2}(x)(y_{n+1}'(x) - y_n'(x)), \\ y_{n+1}(0) &= 0, \quad y_{n+1}(l) = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Сеточный аналог проблемы (4.1) имеет вид

$$\frac{y^{k+1} - 2y^k + y^{k-1}}{h^2} = f(x^k, y^k, y'^k), \quad k = 1, \dots, N-1,$$

$$y^0 = 0, \quad y^N = 0,$$

где

$$h = l/N, \quad x^k = kh,$$

а y^k есть аппроксимация $y(x^k)$. Пусть

$$y_n^k, \quad k = 0, \dots, N$$

есть множество значений, образующих n -е приближение к решению. В окрестности этого приближения справедливо разложение

$$\begin{aligned} f(x^k, y^k, y'^k) &\approx f(x^k, y_n^k, y_n'^k) + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(x^k, y_n^k, y_n'^k)(y^k - y_n^k) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x^k, y_n^k, y_n'^k)(y'^k - y_n'^k) = \\ &= f_{n0}(x^k) + f_{n1}(x^k)(y^k - y_n^k) + f_{n2}(x^k)(y'^k - y_n'^k) = \\ &= f_{n0}^k + f_{n1}^k(y^k - y_n^k) + f_{n2}^k(y'^k - y_n'^k). \end{aligned}$$

Следовательно, следующее приближение может быть найдено из сеточного аналога краевой задачи (4.4)

$$\begin{aligned} \frac{y_{n+1}^{k+1} - 2y_{n+1}^k + y_{n+1}^{k-1}}{h^2} &= f_{n0}^k + f_{n1}^k(y_{n+1}^k - y_n^k) + f_{n2}^k(y_{n+1}'^k - y_n'^k), \\ k &= 1, \dots, N-1, \\ y_{n+1}^0 &= 0, \quad y_{n+1}^N = 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Подставляя симметричную разностную производную вместо $y_{n+1}'^k$ и $y_n'^k$ в

(4.5) мы приходим к дискретной задаче

$$y_{n+1}^{k+1} = \frac{f_{n0}^k + f_{n1}^k(y_{n+1}^k - y_n^k) - \frac{f_{n2}^k}{2h}(y_{n+1}^{k-1} + y_n^{k+1} - y_n^{k-1}) + 2y_{n+1}^k - y_{n+1}^{k-1}}{1 - \frac{hf_{n2}^k}{2}},$$

$$k = 1, \dots, N-1,$$

$$y_{n+1}^0 = 0, \quad y_{n+1}^N = 0. \quad (4.6)$$

Заметим, что интегралы в

$$f_{ni}^k, \quad i = 1, 2, 3$$

можно вычислить численно, например, по правилу трапеций.

Краевая задача (4.6) может быть решена методом пристрелки. Пусть заданы y_n^k , $k = 1, \dots, N$. Получим \tilde{y}_{n+1}^k , $k = 1, \dots, N$ как решение следующей задачи

$$\tilde{y}_{n+1}^{k+1} = \frac{f_{n0}^k + f_{n1}^k(\tilde{y}_{n+1}^k - y_n^k) - \frac{f_{n2}^k}{2h}(\tilde{y}_{n+1}^{k-1} + y_n^{k+1} - y_n^{k-1}) + 2\tilde{y}_{n+1}^k - \tilde{y}_{n+1}^{k-1}}{1 - \frac{hf_{n2}^k}{2}},$$

$$k = 1, \dots, N-1,$$

$$\tilde{y}_{n+1}^0 = 0, \quad \tilde{y}_{n+1}^1 = y_n^1, \quad (4.7)$$

а

$$\hat{y}_{n+1}^k, \quad k = 1, \dots, N$$

как решение соответствующей однородной задачи

$$\hat{y}_{n+1}^{k+1} = \frac{f_{n1}^k \hat{y}_{n+1}^k - \frac{f_{n2}^k}{2h} \hat{y}_{n+1}^{k-1} + 2\hat{y}_{n+1}^k - \hat{y}_{n+1}^{k-1}}{1 - \frac{hf_{n2}^k}{2}},$$

$$k = 1, \dots, N-1,$$

$$\hat{y}_{n+1}^0 = 0, \quad \hat{y}_{n+1}^1 = y_n^1. \quad (4.8)$$

Общее решение (4.6) имеет вид

$$y_{n+1}^k = \tilde{y}_{n+1}^k + c\hat{y}_{n+1}^k,$$

где c – константа. Следовательно, мы можем выбрать константу таким образом, чтобы выполнялось граничное условие

$$y_{n+1}^N = 0,$$

то есть

$$c = -\frac{\tilde{y}_{n+1}^N}{\hat{y}_{n+1}^N}.$$

Наконец, в качестве начального приближения мы можем выбрать, например, прямую, удовлетворяющую граничным условиям

$$y_0^k = 0, \quad k = 1, \dots, N \quad (4.9)$$

и завершать вычисления, как только для некоторого малого положительного ε выполнится неравенство

$$|J(y_{n+1}) - J(y_n)| \leq \varepsilon \quad (4.10)$$

4.2 Существование и единственность решения

Обсудим вопросы существования и единственности решения задачи (4.1). Нам понадобятся вспомогательные сведения (см. [18, 21, 25, 31]).

Определение 4.2.1 *Функции из множества $U \subset \mathbb{C}^1[0, l]$ называют равномерно ограниченными, если существует $p > 0$ такое, что*

$$|y(x)| + |y'(x)| \leq p$$

для любого $y(x) \in U$ и любого $x \in [0, l]$.

Определение 4.2.2 *Функции из множества $U \subset \mathbb{C}^1[0, l]$ называют равномерно непрерывными, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$*

такое, что для любых x_1, x_2 из $[0, l]$, для которых $|x_1 - x_2| < \delta$ и для всех $y(x) \in U$ имеет место неравенство

$$|y(x_1) - y(x_2)| + |y'(x_1) - y'(x_2)| < \varepsilon.$$

Теорема 4.2.1 (Теорема Арцела) Пусть $U \subset \mathbb{C}^1[0, l]$ множество непрерывно дифференцируемых функций. Для того, чтобы U было компактным необходимо и достаточно, чтобы функции из множества U были равномерно ограничены и равномерно непрерывны.

Отметим, что эта теорема является следствием классической теоремы Арцела для $\mathbb{C}[0, l]$ и теоремы о почленном дифференцировании функциональных последовательностей.

Определение 4.2.3 Непрерывный оператор A , определенный на множестве U линейного нормированного пространства E с областью значений, расположенной в U , называется вполне непрерывным, если всякое ограниченное подмножество U он отображает в компактное.

Теорема 4.2.2 (Принцип неподвижной точки Шаудера) Если вполне непрерывный оператор A отображает ограниченное замкнутое выпуклое множество S банахова пространства на свою часть, то существует неподвижная точка этого отображения, т.е. такая точка $x \in S$, что $Ax = x$.

Перейдем теперь к доказательству существования решения задачи (4.1).

Теорема 4.2.3 Пусть $M \geq \frac{1}{2l}$, и существует

$$c \leq \frac{\alpha}{32l^2 M^2},$$

такое, что функция $\beta(x, y)$ в области своего определения удовлетворяет условию

$$\max\{|\beta_x(x, y)|, |\beta_y(x, y)|\} \leq c.$$

Тогда в области

$$G = \{y \mid \max_{x \in [0, l]} |y(x)| = \|y\|_{\mathbb{C}[0, l]} \leq 2l^2 M, \|y'\|_{\mathbb{C}[0, l]} \leq 2lM\}$$

существует единственное решение задачи (4.1).

Доказательство Отметим, что исходная задача (4.1) эквивалентна операторному уравнению $Ay(x) = y(x)$, где оператор A , отображающий $\mathbb{C}^1[0, l]$ в $\mathbb{C}^1[0, l]$, задается следующим образом:

$$Ay(x) = \int_0^x d\xi \int_0^\xi f(\eta, y(\eta), y'(\eta)) d\eta - \frac{x}{l} \int_0^l d\xi \int_0^\xi f(\eta, y(\eta), y'(\eta)) d\eta.$$

Если последовательность $y_n(x)$, принадлежащая множеству G сходится в смысле нормы пространства $\mathbb{C}^1[0, l]$ к функции $y(x)$, принадлежащей, очевидно, тому же множеству, то в силу непрерывности функции $f(x, y, y')$ имеем $f(x, y_n, y'_n) \rightarrow f(x, y, y')$ равномерно на $[0, l]$. Отсюда в силу возможности перехода к пределу под знаком интеграла при равномерной сходимости, получаем $Ay_n \rightarrow Ay$, то есть оператор A непрерывен на G .

Докажем, что если y принадлежит G , то и Ay содержится в G . Действительно, учитывая, что $\beta \geq 0$, для любого y из G и всех x из $[0, l]$ имеем

$$|f(x, y, y')| = \left| \frac{(1 + y'^2)(y'\beta_x - \beta_y)}{\alpha \int_0^l \sqrt{1 + y'^2} dx + \beta} \right| \leq \frac{(1 + (2lM)^2)(1 + 2lM)c}{\alpha l}.$$

Учитывая, что

$$1 \leq 2lM,$$

получаем

$$|f(x, y, y')| \leq M,$$

откуда для любого $x \in [0, l]$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |Ay(x)| &\leq \int_0^x d\xi \int_0^\xi |f(\eta, y(\eta), y'(\eta))| d\eta + \\ &+ \frac{x}{l} \int_0^l d\xi \int_0^\xi |f(\eta, y(\eta), y'(\eta))| d\eta \leq 2l^2 M, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dx} Ay(x) \right| &\leq \int_0^x |f(\eta, y(\eta), y'(\eta))| d\eta + \\ &+ \frac{1}{l} \int_0^l d\xi \int_0^\xi |f(\eta, y(\eta), y'(\eta))| d\eta \leq 2lM. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Таким образом $Ay(x) \in G$, а, значит, оператор A преобразует это множество в себя.

Пусть x_1, x_2 – произвольные точки отрезка $[0, l]$, тогда справедливы неравенства

$$|Ay(x_1) - Ay(x_2)| \leq 2lM|x_1 - x_2|, \quad (4.13)$$

$$\left| \frac{d}{dx} Ay(x_1) - \frac{d}{dx} Ay(x_2) \right| \leq M|x_1 - x_2|. \quad (4.14)$$

Неравенства (4.11), (4.12), (4.13), (4.14) в силу приведенной выше теоремы Арцела показывают, что оператор A преобразует G в компактное множество.

Очевидно также, что множество G является ограниченным, замкнутым и выпуклым.

Таким образом выполнены все условия теоремы Шаудера, поэтому существует неподвижная точка оператора A , что и завершает доказательство. ■

Перейдем к вопросу о единственности решения. Она, как правило, доказывается на основе липшицевости правой части исследуемого уравнения [4, 28–30, 32, 33].

Будем по-прежнему рассматривать задачу на области G при условии ограниченности функции $\beta(x, y)$ и всех ее частных производных первого и второго порядка. Из (4.2) и (4.3) видно, что при сделанных предположениях функция $f(x, y, y')$ удовлетворяет условию Липшица по двум своим последним переменным при любом x из отрезка $[0, l]$. То есть найдется такая константа L , что для любого x из данного отрезка справедливо неравенство

$$|f(x, y_1, y_1') - f(x, y_2, y_2')| \leq L(|y_1(x) - y_2(x)| + |y_1'(x) - y_2'(x)|). \quad (4.15)$$

Теорема 4.2.4 Пусть выполнены все условия теоремы 2, а частные производные $\beta_{xy}(x, y), \beta_{yy}(x, y)$ ограничены. Тогда решение задачи (4.1) в об-

ласти G единственно.

Доказательство Допустим, что в G кроме $y(x)$ существует еще и другое решение $z(x)$ задачи (4.1). Пусть точка $x_0 \in [0, l]$ такова, что

$$y(x) = z(x), \quad y'(x) = z'(x)$$

для любого $x \in [0, x_0]$, но

$$y(x) \neq z(x), \quad y'(x) \neq z'(x) \quad (4.16)$$

в любой открытой правой окрестности точки x_0 . Возьмем произвольное малое $\varepsilon > 0$. Так как в отрезке $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ есть точки, для которых выполняется (4.16), то функция

$$|y(x) - z(x)| + |y'(x) - z'(x)|$$

достигает на нем в некоторой точке γ своего наибольшего значения $\theta > 0$. Очевидно $\gamma \neq x_0$. Справедливы следующие равенства

$$y(x) = \int_0^x d\xi \int_0^\xi f(\eta, y(\eta), y'(\eta)) d\eta - \frac{x}{l} \int_0^l d\xi \int_0^\xi f(\eta, y(\eta), y'(\eta)) d\eta.$$

$$z(x) = \int_0^x d\xi \int_0^\xi f(\eta, z(\eta), z'(\eta)) d\eta - \frac{x}{l} \int_0^l d\xi \int_0^\xi f(\eta, z(\eta), z'(\eta)) d\eta.$$

Вычтем одно из этих равенств из другого и используем для оценки условие Липшица (4.15).

$$\begin{aligned} |y(\gamma) - z(\gamma)| + |y'(\gamma) - z'(\gamma)| = \theta &\leq \\ &\int_{x_0}^{\gamma} d\xi \int_{x_0}^{\xi} |f(\eta, y(\eta), y'(\eta)) - f(\eta, z(\eta), z'(\eta))| d\eta + \\ &+ \frac{\gamma}{l} \int_{x_0}^l d\xi \int_{x_0}^{\xi} |f(\eta, y(\eta), y'(\eta)) - f(\eta, z(\eta), z'(\eta))| d\eta \leq \\ &\leq 2(\gamma - x_0) \int_{x_0}^l L(|y(\eta) - z(\eta)| + |y'(\eta) - z'(\eta)|) d\eta \leq \\ &\leq 2Ll\varepsilon\theta. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\theta \leq 2Ll\varepsilon\theta,$$

откуда в силу положительности $\theta > 0$, получаем неравенство

$$1 \leq 2Ll\varepsilon,$$

приводящее к противоречию, так как ε можно выбрать сколь угодно малым. ■

В заключение проиллюстрируем работу построенного в параграфе 4.1 метода на примере. Пример программы, реализующей предложенный в данной главе метод, приведен в приложении А.6.

Пример 4.2.1 *Предположим, что стоимость строительства прямо пропорциональна высоте местности, а поверхность местности определяется функцией $z = \beta(x, y)$. Пусть $l = 1$, $\alpha = 1$ а функция $\beta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ имеет вид*

$$\beta(x, y) = 1 + \frac{1}{100} \sin 5x \cdot \sin y.$$

Здесь можно положить $M = 0.5$, а c , очевидно, равно 0.05. Таким образом, выполнены условия теорем 2 и 3, поэтому в области

$$G = \{y \mid \|y\|_{C[0,l]} \leq 1, \|y'\|_{C[0,l]} \leq 1\}$$

решение задачи существует и единственно.

Применяя предложенный метод для $N = 1000$, начального приближения (4.9) и критерия остановки (4.10) при $\varepsilon = 10^{-6}$ приходим к решению (см. Рис. 4.1) за $n = 3$ итерации и 0.17 секунд¹. Значение функционала стоимости на полученном решении составляет 1.5.

Метод Рунца, в котором приближенное решение ищется в виде

$$y(x) = \sum_{k=1}^5 a_k \sin \frac{\pi k}{l} x, \quad (4.17)$$

¹Расчеты проводились в программе MatLab R2022b на ПК с процессором Core Duo P8600 и оперативной памятью в 4Gb.

приводит к решению (см. Рис. 4.1) за 0.57 секунды. При этом получаются следующие коэффициенты

$$a_1 = -0.0002, \quad a_2 = -0.0001, \quad a_3 = 0.00002, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = 0,$$

а значение функционала стоимости на полученном решении равно 1.5.

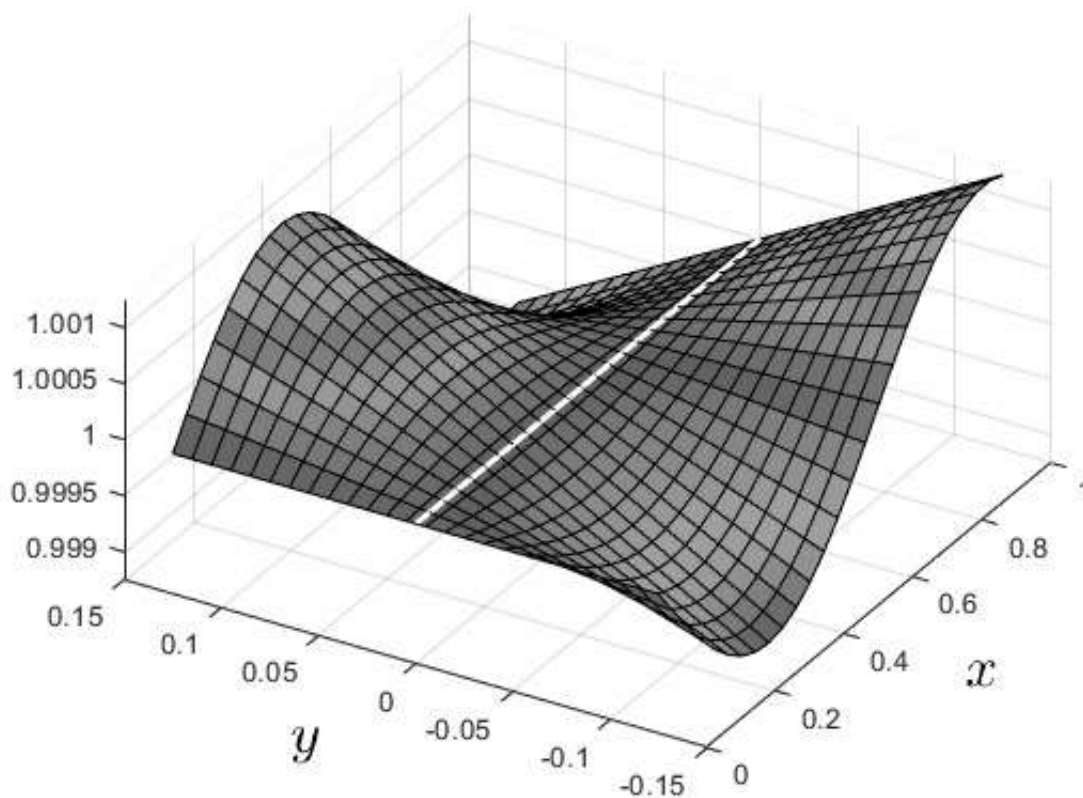


Рис. 4.1: Изображения визуально неотличимых решений, полученных методом Ритца и пристрелки в Примере 4.2.1.

В данном исследовании разработан метод нахождения минимальной по стоимости траектории, использующий идеи и подходы вариационного исчисления, а, значит, гарантирующий оптимальность полученного решения. Построен функционал стоимости, выведено необходимое условие его минимума, имеющее вид интегро-дифференциального уравнения. Предложены методы приближенного и численного решения этого уравнения. С помощью принципа неподвижной точки Шуадера доказана теорема существования решения, исследован вопрос его единственности.

Заключение

Приведем краткий обзор полученных в работе результатов.

Во введении дается обзор литературы по теме работы, обсуждается актуальность исследования, его теоретическая и практическая ценность, научная новизна.

В первой главе кратко приводятся основные определения и вспомогательные результаты из функционального анализа, высшей алгебры, вариационного исчисления, которые используются в дальнейшем изложении.

Во второй главе рассматривается постановка задачи поиска оптимальной в смысле стоимости траектории, вводятся предположения, в рамках которых строится математическая модель. Задача сводится к поиску функции, на которой достигается минимум интегрального функционала стоимости. Для решения этой проблемы вариационного исчисления выводится необходимое условие минимума построенного функционала. Данное условие имеет вид интегро-дифференциального уравнения.

В третьей главе предложены приближенные методы решения задачи. Так, полученное в первой главе интегро-дифференциальное уравнение решается с помощью метода, основанного на полиномиальной аппроксимации, а также с помощью метода Галеркина. В данной главе также рассматривается постановка задачи, в рамках которой стоимость доставки меняется от точки к точке. Показано, как можно получить приближенное решение для проблемы минимизации получаемого для этого случая функционала стоимости с помощью метода Рунге.

Четвертая глава посвящена изучению вопросов существования и единственности решения задачи. Теорема существования доказана с помощью принципа неподвижной точки Шаудера. В этом разделе разработан итеративный также метод решения интегро-дифференциального уравнения, основанный на линеаризации и методе пристрелки.

Также в приложениях приводятся листинги программ, реализующих предложенные в данном исследовании методы решения изучаемой задачи.

Дальнейшие исследования могут вестись в направлении уточнения модели, а также исследовании задачи с ограничениями. Действительно, важным и представляющим большой практический интерес являются ситуация, когда на рельефе имеются «запретные» области, в которых расположены болота, водоемы, реки и пр. естественные преграды и препятствия. Эта задача также как и рассмотренная в настоящей работе требует вывода необходимых условий и построения методов их решения.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Листинги программ

А.1 Листинг программы MatLab, реализующей метод, основанный на полиномиальной аппроксимации

```
function z = beta(x,y)
z=1+sin(5*x)*sin(y);
end
```

```
function z = betax(x,y)
z=5*cos(5*x)*sin(y);
end
```

```
function z = betay(x,y)
z=sin(5*x)*cos(y);
end
```

```
function z=diff1(S,y)
m=length(y);
y1=diffy1(S,y);
z=ones(m,1)*y1+S*y;
end
```

```
function z=diffy1(S,y)
m=length(y);
A=(S*S)*y;
```

```

B=S*ones(m,1);
z=(1-A(m))/B(m);
end

```

```

function z=func_y(S,y)
m=length(y);% m=n+1
y1=diffy1(S,y);
z=S*ones(m,1)*y1+(S*S)*y;
end

```

```

function J = J(z,n)
alpha=0.1;
h=1/n;
sum1=0;
for i=1:n
sum1=sum1+sqrt(h^2+(z(i+1)-z(i))^2);
end
sum2=0;
for i=1:n
sum2=sum2+sqrt(h^2+(z(i+1)-z(i))^2)*beta((i-1)*h,z(i));
end
J=0.5*alpha*sum1^2+sum2;
end

```

```

function F = root(S,yd2)
m = length(yd2);
h=1/(m-1);
z1=diff1(S,yd2);
y=func_y(S,yd2);
intgrl=simpson(S,yd2);
for i=1:m
F(i)=(yd2(i)/(1+(z1(i))^2))*(0.1*intgrl+beta(i*h,y(i)))...
+(z1(i))*betax(i*h,y(i))-betay(i*h,y(i));
end

```

```
end
```

```
function z = simpson(S,y)
```

```
z = 0;
```

```
m=length(y);
```

```
h=1/(m-1);
```

```
z1=diff1(S,y);
```

```
    for i = 1:(m-1)/2
```

```
        z = z+(1+(z1(2*i-1))^2)^0.5+4*(1+(z1(2*i))^2)^0.5+...
            (1+(z1(2*i+1))^2)^0.5;
```

```
    end
```

```
z = h*z/3;
```

```
end
```

```
clear all
```

```
clc
```

```
n=23; %степень аппроксимационного полинома
```

```
tic
```

```
h=1/n;
```

```
x = 0:h:n*h;
```

```
Zz=fliplr(vander(x));
```

```
for i=1:n+1
```

```
    for j=1:n+1
```

```
        B(i,j)=(x(i)^j-x(1)^j)/j;
```

```
    end
```

```
end
```

```
B;
```

```
S=B/Zz;
```

```
[X,Y] = meshgrid([0:0.05:1]);
```

```
Z = 1+sin(5*X).*sin(Y);
```

```
surf(X,Y,Z);
```

```
hold on
```

```
w0=zeros(n+1,1);
```

```
y0=fsolve(@(y)root(S,y),w0);
```

```

y = (func_y(S,y0))';
toc
x=0:h:n*h;
z=1+sin(5*x).*sin(y);
hPlot = plot3(x,y,z,'k');
set( hPlot, 'LineWidth',2);
J(y,n)

```

A.2 Листинг программы MatLab, реализующей метод Рунге при постоянном α .

```

function z = beta(x,y)
z=1+sin(5*x).*sin(y);
end

function y = myfunc(x,a)
l=1;
ya=1;
n=length(a);
y = ya*x/l;
    for k=1:n
        y=y+a(k)*sin(x*k*pi/l);
    end
end

function y = myIntegrand(x,c)
l=1;
ya=1;
n=length(c);

z=ya/l;
for k=1:n
    z=z+c(k)*k*pi/l*cos(x*k*pi/l);

```

```

end
y=sqrt(1+z.^2);
end

function F = myIntegrand2(x,c)
l=1;
ya=1;
n=length(c);
y = ya*x/l;
    for k=1:n
        y=y+c(k)*sin(x*k*pi/l);
    end
F=myIntegrand(x,c).*beta(x,y);
end

function F = Costfunc(c)
alpha=0.1;
l=1;
q1 = integral(@(x) myIntegrand(x,c),0,l);
q2=integral(@(x) myIntegrand2(x,c),0,l);
F=q1*q1*alpha/2+q2;
end

clear all
clc
format long
c0=rand(1,5);
tic
[sol,F1]=fminunc(@(c)Costfunc(c),c0);
toc
x=(0:0.05:1)';
y=myfunc(x,sol);
z=1+sin(5*x).*sin(y);
hPlot = plot3(x,y,z,'w');

```

```

set( hPlot, 'LineWidth',2);
hold on
[X,Y] = meshgrid([0:0.05:1]);
Z = 1+sin(5*X).*sin(Y);
surf(X,Y,Z);
Costfunc(sol)
sol

```

А.3 Листинг программы MatLab, реализующей метод Рунге при переменном α .

```

function z = alpha(x,c)
y=phi(x,c);
z=(cos(5*x).*cos(y)).^2;
end

```

```

function z = beta(x,c)
y=phi(x,c);
z=1+sin(5*x).*sin(y);
end

```

```

function y = phi(x,c)
l=1;
ya=1;
n=length(c);
z=ya*x/l;
for k=1:n
    z=z+c(k)*sin(x*k*pi/l);
end
y=z;
end

```

```

function y = myIntegrand(x,c)

```

```

l=1;
ya=1;
n=length(c);
z=ya/l;
for k=1:n
    z=z+c(k)*k*pi/l*cos(x*k*pi/l);
end
y=sqrt(1+z.^2);
end

```

```

function q1 = firstsummandint(c)
l=1;
fun = @(x,y) alpha(x,c).*myIntegrand(x,c).*myIntegrand(y,c);
xmin = 0;
xmax = l;
ymin = 0;
ymax = @(x) x;
q1 = integral2(fun,xmin,xmax,ymin,ymax,'Method','tiled');
end

```

```

function q2 = secondsummandint(c)
l=1;
F=@(x) myIntegrand(x,c).*beta(x,c);
q2=integral(F,0,l);
end

```

```

function F = Costfunc(c)
l=1;
q2=secondsummandint(c);
F=firstsummandint(c)+q2;
end

```

```

clear all

```



```

clc
format long
c0=rand(1,5);
[sol,F1]=fminunc(@(c)Costfunc(c),c0);
x=(0:0.05:1)';
y=phi(x,sol);
z=1+sin(5*x).*sin(y);
hPlot = plot3(x,y,z,'w');
set( hPlot, 'LineWidth',4);
hold on
[X,Y] = meshgrid([0:0.05:1]);
Z = 1+sin(5*X).*sin(Y);
surf(X,Y,Z);
Costfunc(sol)
sol

```

А.4 Листинг программы Python, реализующей метод Галеркина для системы тригонометрических полиномов

```

import sympy
import scipy
from scipy import optimize
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math
from math import *
from sympy import *
from scipy.optimize import fsolve
def f(x, u1, u2, u3, u4, u5):
    f = [0, 0, 0, 0, 0]
    f1 = u1(x[0], x[1], x[2], x[3], x[4])
    f2 = u2(x[0], x[1], x[2], x[3], x[4])

```

```

f3 = u3(x[0], x[1], x[2], x[3], x[4])
f4 = u4(x[0], x[1], x[2], x[3], x[4])
f5 = u5(x[0], x[1], x[2], x[3], x[4])
f[0] = f1
f[1] = f2
f[2] = f3
f[3] = f4
f[4] = f5
return f

```

```
def trapez(f, a, b, n):
```

```

    h = (b-a)/n
    k = (f.subs(x, a) + f.subs(x, b))/2
    while(a<b-h):
        a = a+h
        k = k + f.subs(x, a)
    return(k*h)

```

```
xa=1
```

```
ya=1
```

```
a = 0.1
```

```
x, a1, a2, a3, a4, a5, y = symbols("x a1 a2 a3 a4 a5 y")
```

```

yn = ya*x/xa + a1*(sin(math.pi*x/xa)) + a2*(sin(2*math.pi*x/xa))\
+a3*(sin(3*math.pi*x/xa))+ a4*(sin(4*math.pi*x/xa))\
+a5*(sin(5*math.pi*x/xa)) #функция n=5

```

```
b = 1 + sin(5*x)*sin(yn) #функция рельефа местности
```

```
bstr = 1 + sin(5*x)*sin(y)
```

```
bx = 5*sin(yn)*cos(5*x)
```

```
by = sin(5*x)*cos(yn)
```

```
print(yn)
```

```
ynp = yn.diff(x) #первая производная
```

```
print(ynp)
```

```
ynp2 = sqrt(1+ sympy.Mul(ynp, ynp)) #умножаем производные
```

```
ynp2 = ynp.diff(x) #вторая производная
```

```

integr = a * трапес(уур, 0, ха, 100)#внутренний интеграл
yob = (sympy.Mul(ynp2, 1/(1 + sympy.Mul(ynp, ynp))))*(integr + b)\
  + ynp*bx - by#общее уравнение
yob1 = yob * (sin(math.pi*x/xa))
yob2 = yob * (sin(2*math.pi*x/xa))
yob3 = yob * (sin(3*math.pi*x/xa))
yob4 = yob * (sin(4*math.pi*x/xa))
yob5 = yob * (sin(5*math.pi*x/xa))

urav1 = трапес(yob1, 0, ха , 5)
urav2 = трапес(yob2, 0, ха , 5)
urav3 = трапес(yob3, 0, ха , 5)
urav4 = трапес(yob4, 0, ха , 5)
urav5 = трапес(yob5, 0, ха , 5)

f1 = lambdify((a1, a2, a3, a4, a5), urav1, 'numpy')
f2 = lambdify((a1, a2, a3, a4, a5), urav2, 'numpy')
f3 = lambdify((a1, a2, a3, a4, a5), urav3, 'numpy')
f4 = lambdify((a1, a2, a3, a4, a5), urav4, 'numpy')
f5 = lambdify((a1, a2, a3, a4, a5), urav5, 'numpy')

#print(f(x0, f1, f2, f3, f4, f5))

sol = fsolve(lambda xx: f(xx, f1, f2, f3, f4, f5),\
  np.asarray([0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0]))

print(sol)

yn = ya*x/xa + sol[0]*(sin(math.pi*x/xa))\
  + sol[1]*(sin(2*math.pi*x/xa)) +sol[2]*(sin(3*math.pi*x/xa))\
  + sol[3]*(sin(4*math.pi*x/xa))+sol[4]*(sin(5*math.pi*x/xa))
#получившаяся функция
integr1 = трапес(sqrt(1+ sympy.Mul(yn.diff(x),\
  yn.diff(x))), 0, ха, 200)

```

```

integr2 = trapec((1 + sin(5*math.pi/math.pi*x)*sin(yn))\
*sqrt(1+ sympy.Mul(yn.diff(x), yn.diff(x))), 0, xa, 200)
res = a/2*integr1*integr1+integr2
print(res)

x0 = np.linspace(0,xa,100)
y0 = np.zeros(100)
z0 = np.zeros(100)
for i in range(len(x0)) :
    y0[i]=yn.subs(x, x0[i])
    b1=bstr.subs(x,x0[i])
    z0[i]=b1.subs(y,y0[i])
fig = plt.figure(figsize =(10, 5))
ax = plt.axes(projection ='3d')
#ax.plot_trisurf(x0, y0, z0)
x00 = np.linspace(0, xa, 100)
y00 = np.linspace(0, ya, 100)
x00, y00 = np.meshgrid(x00, y00)
z00 = 1 + np.sin(5 * x00) * np.sin(y00)
ax.plot_surface(x00, y00, z00, alpha=0.5)
ax.plot(x0, y0, z0, color = "red")
plt.show()

```

А.5 Листинг программы Python, реализующей метод Галеркина для системы алгебраических полино- МОВ

```

import sympy
import scipy
from scipy import optimize
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

```

```

import math
from math import *
from sympy import *
from scipy.optimize import fsolve
def f(x, u1, u2, u3, u4, u5):
    f = [0, 0, 0, 0, 0]
    f1 = u1(x[0], x[1], x[2], x[3], x[4])
    f2 = u2(x[0], x[1], x[2], x[3], x[4])
    f3 = u3(x[0], x[1], x[2], x[3], x[4])
    f4 = u4(x[0], x[1], x[2], x[3], x[4])
    f5 = u5(x[0], x[1], x[2], x[3], x[4])
    f[0] = f1
    f[1] = f2
    f[2] = f3
    f[3] = f4
    f[4] = f5
    return f

def trapez(f, a, b, n):
    h = (b-a)/n
    k = (f.subs(x, a) + f.subs(x, b))/2
    while(a<b-h):
        a = a+h
        k = k + f.subs(x, a)
    return(k*h)

xa=1
ya=1
a = 0.1
x, a1, a2,a3,a4,a5,y = symbols("x a1 a2 a3 a4 a5 y")
yn = ya*x/xa + a1*x*(1-x) + a2*x**2*(1-x) +a3*x**3*(1-x)+\
    a4*x**4*(1-x)+a5*x**5*(1-x) #функция n=5
b = 1 + sin(5*x)*sin(yn)
bstr = 1 + sin(5*x)*sin(y)

```

```

bx = 5*sin(yn)*cos(5*x)
by = sin(5*x)*cos(yn)
print(yn)
ynp = yn.diff(x) #первая производная
print(ynp)
yup =sqrt(1+ sympy.Mul(ynp, ynp)) #умножаем производные
ynp2 = ynp.diff(x) #вторая производная
integr =a * трапец(yup, 0, xa, 100)#внутренний интеграл
yob = (sympy.Mul(ynp2, 1/(1 + sympy.Mul(ynp, ynp))))*(integr + b)\
+ ynp*bx - by#общее уравнение
yob1 = yob * (x*(1-x))
yob2 = yob * x**2*(1-x)
yob3 = yob * x**3*(1-x)
yob4 = yob * x**4*(1-x)
yob5 = yob * x**5*(1-x)

urav1 = трапец(yob1, 0, xa , 5)
urav2 = трапец(yob2, 0, xa , 5)
urav3 = трапец(yob3, 0, xa , 5)
urav4 = трапец(yob4, 0, xa , 5)
urav5 = трапец(yob5, 0, xa , 5)

f1 = lambdify((a1, a2, a3, a4, a5), urav1, 'numpy')
f2 = lambdify((a1, a2, a3, a4, a5), urav2, 'numpy')
f3 = lambdify((a1, a2, a3, a4, a5), urav3, 'numpy')
f4 = lambdify((a1, a2, a3, a4, a5), urav4, 'numpy')
f5 = lambdify((a1, a2, a3, a4, a5), urav5, 'numpy')

#print(f(x0, f1, f2, f3, f4, f5))

sol = fsolve(lambda xx: f(xx, f1, f2, f3, f4, f5),\
np.asarray([0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0]))

```

```

print(sol)

yn = ya*x/xa + sol[0]*x*(1-x) + sol[1]*x**2*(1-x)\
    +sol[2]*x**3*(1-x)+ sol[3]*x**4*(1-x)+sol[4]*x**5*(1-x)
#получившаяся функция
integr1 = trapec(sqrt(1+ sympy.Mul(yn.diff(x),\
    yn.diff(x))), 0, xa, 200)
integr2 = trapec((1 + sin(5*math.pi/math.pi*x)\
    *sin(math.pi/math.pi*yn))*sqrt(1+ sympy.Mul(yn.diff(x), yn.diff(x))),
    res = a/2*integr1*integr1+integr2
print(integr1)
print(integr2)
print(res)

x0 = np.linspace(0,xa,100)
y0 = np.zeros(100)
z0 = np.zeros(100)
for i in range(len(x0)) :
    y0[i]=yn.subs(x, x0[i])
    b1=bstr.subs(x,x0[i])
    z0[i]=b1.subs(y,y0[i])
fig = plt.figure(figsize =(10, 5))
ax = plt.axes(projection ='3d')
#ax.plot_trisurf(x0, y0, z0)
x00 = np.linspace(0, xa, 100)
y00 = np.linspace(0, ya, 100)
x00, y00 = np.meshgrid(x00, y00)
z00 = 1 + np.sin(5 * x00) * np.sin(y00)
ax.plot_surface(x00, y00, z00, alpha=0.5)
ax.plot(x0, y0, z0, color = "red")
plt.show()

```

А.6 Листинг программы MatLab, реализующей метод пристрелки

```
function z = beta(y)
n=length(y)-1;
h=1/n;
x=0:h:1;
z=1+sin(5*x).*sin(y);
z=z(1,1:end-1);
end
```

```
function z = betax(y)
n=length(y)-1;
h=1/n;
x=0:h:1;
z=5*cos(5*x).*sin(y);
z=z(1,1:end-1);
end
```

```
function z = betaxy(y)
n=length(y)-1;
h=1/n;
x=0:h:1;
z=5*cos(5*x).*cos(y);
z=z(1,1:end-1);
end
```

```
function z = betay(y)
n=length(y)-1;
h=1/n;
x=0:h:1;
z=sin(5*x).*cos(y);
z=z(1,1:end-1);
```



```
end
```

```
function z = betayy(y)
n=length(y)-1;
h=1/n;
x=0:h:1;
z=-sin(5*x).*sin(y);
z=z(1,1:end-1);
end
```

```
function F = Costfunc(y)
alpha=0.1;
k=length(y);
n=k-1;
h=1/n;
z_dify = sqrt(1+dify(y).^2);
z=[z_dify z_dify(end)];
zz=beta(y).*z_dify;
zz=[zz zz(end)];
w=0;
ww=0;
for i=1:k
w=w+z(i);
ww=ww+zz(i);
end
q1=h*(w-(z(1)+z(end))/2);
q2=h*(ww-(zz(1)+zz(end))/2);
F=q1*q1*alpha/2+q2;
end
```

```
function w = denumi(y,dify)
alpha=0.1;
n=length(y)-1;
h=1/n;
```

```
w=alpha*intdy(dify)+beta(y);
end
```

```
function z = diffy(y)
n=length(y)-1;
z=ones(1,n);
h=1/n;
z(1)=(y(2)-y(1))/(h);
    for i=2:n
        z(i)=(y(i+1)-y(i-1))/(2*h);
    end
end
```

```
function w = intdy(dify)
n=length(dify);
k=n+1;
h=1/n;
    z=[dify dify(end)];
    z=sqrt(1+z.^2);
    w=0;
    for i=1:k
        w=w+z(i);
    end
    w=h*(w-(z(1)+z(end))/2);
end
```

```
function w = intdy1(dify)
n=length(dify);
k=n+1;
h=1/n;
    z=[dify dify(end)];
    z=z./sqrt(1+z.^2);
    w=0;
    for i=1:k
```

```

    w=w+z(i);
end
w=h*(w-(z(1)+z(end))/2);
end

function z0 = term0(y,dify)
n=length(y)-1;
z0=(1+dify.^2).*(dify.*betax(y)-betay(y));
end

function z1 = term1(y,dify)
n=length(y)-1;
z1=(1+dify.^2).*(dify.*betaxy(y)-betay(y)).*...
denumi(y,dify)-betay(y).*(1+dify.^2).*(dify.*betax(y)-betay(y));
end

function z2 = term2(y,dify)
alpha=0.1;
n=length(y)-1;
z2=(2*dify.*(dify.*betax(y)-betay(y))+(1+dify.^2).*betax(y)).*...
denumi(y,dify)-alpha*intdy1(dify).*(1+dify.^2).*...
(dify.*betax(y)-betay(y));
end

clear all
clc
%format long
n=1000;
h=1/n;
%y=[0 1*ones(1,n)/n];
y=0:h:1;
x=0:h:1;
%for k=1:10
eps=1e-6;

```

```

flag=0;
cost_prev=Costfunc(y);
cost_new=Costfunc(y)+1e10*eps;
tic
while abs(cost_prev-cost_new)>eps
z=diffy(y);
d=denumi(y,z);
d2=d.^2;
t0=term0(y,z)./d;
t1=term1(y,z)./d2;
t2=term2(y,z)./d2;
yhom=y;
y_old=y;
for i=2:n
    y(i+1)=(-h^2*(t0(i)+t1(i)*(y(i)-y_old(i))-...
    t2(i)*(y(i-1)/(2*h)+z(i)))+2*y(i)-y(i-1))/(1+0.5*h*t2(i));
    yhom(i+1)=(-h^2*(t1(i)*(yhom(i))-...
    t2(i)*(yhom(i-1)/(2*h))))+...
    2*yhom(i)-yhom(i-1))/(1+0.5*h*t2(i));
end
c=(1-y(end))/yhom(end);
y=y+c*yhom;
cost_new=Costfunc(y);
cost_prev=Costfunc(y_old);
flag=flag+1;
Costfunc(y)
end
toc
sol=y;
[X,Y] = meshgrid([0:0.05:1]);
Z = 1+sin(5*X).*sin(Y);
surf(X,Y,Z);
hold on

```

```
ksi=1+sin(5*x).*sin(sol);  
hPlot = plot3(x,sol,ksi,'k');  
set( hPlot, 'LineWidth',2);  
hold on  
sol_gal=galerkin(x);  
ksi_gal=1+sin(5*x).*sin(sol_gal);  
hPlot = plot3(x,sol_gal,ksi_gal,'g');  
set( hPlot, 'LineWidth',2);  
hold on  
Costfunc(sol)  
flag
```

Список обозначений

\forall – квантор всеобщности,

\exists – квантор существования,

$\|\cdot\|$ – норма,

$|\cdot|$ – модуль,

$\det A$ – определитель матрицы A ,

$\mathbb{C}[0, l]$ – пространство непрерывных на $[0, l]$ функций с равномерной нормой,

$\mathbb{C}^k[0, l]$ – пространство k -раз непрерывно дифференцируемых на $[0, l]$ функций,

$\widetilde{\mathcal{L}}_p[0, l]$ – пространство непрерывных на $[0, l]$ функций с интегральной нормой,

$\mathcal{L}_p[0, l]$ – пространство Лебега, полученное пополнением пространства $\widetilde{\mathcal{L}}_p[0, l]$,

$\|\cdot\|_{\mathbb{C}^1[0, l]}$ – норма пространства $\mathbb{C}^k[0, l]$,

$\|\cdot\|_{\widetilde{\mathcal{L}}_p[0, l]}$ – норма пространства $\widetilde{\mathcal{L}}_p[0, l]$,

$\delta J(\cdot) = 0$ – вариация функционала J .

Литература

1. Аббасов М.Э., Шарлай А.С. Вариационный подход к поиску оптимальной по стоимости траектории// Матем. моделирование. 2023 Т. 35(12) С. 89–100.
2. Аббасов М.Э., Шарлай А.С. Метод поиска оптимальной по стоимости траектории дороги на поверхности местности// Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т.19(2). С. 139–147. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.201>
3. Аббасов М.Э., Шарлай А.С. Поиск оптимальной по стоимости строительства траектории дороги на рельефе местности// Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т.17(1). С. 4-12.
4. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1972. 240с.
5. Бандурин Н. Г., Гуреева Н. А. Метод и пакет программ для численного решения систем существенно нелинейных обыкновенных интегродифференциально-алгебраических уравнений// Матем. моделирование. 2012. Т. 24(2). С. 3–16.
6. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Лаборатория знаний, 2020. 636 с.
7. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, том 1 (2-е изд.). М.: Физматлит, 1962. 464с.

8. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, том 2. М.: Физматлит, 1959. 620с.
9. Блисс Г.А. Лекции по вариационному исчислению. М.: ИЛ, 1950. 349с.
10. Будаков Б. А. Метод стрельбы для решения задач равновесного программирования// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53(12). С. 1819–1824.
11. Винберг Э. Б. Курс алгебры. 2-е изд., испр. и доп. М.: Факториал Пресс, 2001. 544 с.
12. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ (2-е изд.). М.: Наука, 1967. 415с.
13. Гавурин М. К. Лекции по методам вычислений. М.: Наука, 1971
14. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц (5-е изд.). М.: Физматлит, 2010. 560с.
15. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Физматлит, 1961. 227с.
16. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики (3-е изд.). М.: Наука, 1966. 664с.
17. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624с.
18. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. (3-е изд.). М.: Наука, 1984. 752 стр.
19. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Л.: Физматиз, 1962. 708 с.
20. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969. 448с.
21. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа (4-е изд.). М.: Наука, 1976. 544с.

22. Кострикин А. И. Введение в алгебру Часть 1. Основы алгебры (4-е изд.). М.: МЦНМО, 2000. 272 с.
23. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1965. 431 с.
24. Люстерник Л. А., Лаврентьев М. А. Курс вариационного исчисления. М.: ГОНТИ, 1938. 192 с.
25. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
26. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Физматгиз, 1970. 512с.
27. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. М.: Физматгиз, 1966. 432с.
28. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Физматлит, 2009. 208с.
29. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1961. 312с.
30. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.: ГИФМЛ, 1958. 468 с.
31. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 495 с.
32. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. Пер. с англ. Изд. 4, стереот. М.: Издательство иностранной литературы. 2010. 352 с.
33. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. 2-е изд., испр. М.: КомКнига, 2007. 240 с.
34. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М.: Наука, 1966. 176с.
35. Черноузько Ф.Л., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления (Численные методы). М.: Наука, 1973. 236с.

36. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424с.
37. A. Keibolahi, Y. Kiani et al. Nonlinear rapid heating of shallow arches, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 41(10-12), pp. 1244–1258, (2018). DOI: 10.1080/01495739.2018.1494522
38. Abbasov M.E., Sharlay A.S. Finding a cost optimal road trajectory with respect to the slope of the terrain// PROCEEDINGS of the 8th International Conference on CONTROL AND OPTIMIZATION WITH INDUSTRIAL APPLICATIONS. Volume I. 2023, pp. 27–29.
39. Abbasov M.E., Sharlay A.S. Shooting Method for Finding Cost Optimal Trajectory// 2023 5th International Conference on Problems of Cybernetics and Informatics (PCI). 2023, pp. 1–3, doi: 10.1109/PCI60110.2023.10325965.
40. Abbasov M.E., Sharlay A.S., Belenok A.I. Galerkin method for finding cost optimal trajectory// XIV International Conference on Optimization Methods and Applications OPTIMIZATION AND APPLICATIONS (OPTIMA-2023). BOOK OF ABSTRACTS. 2023. P. 16
41. Akbas S. D., Ersoy H. et al. Dynamic analysis of a fiber-reinforced composite beam under a moving load by the Ritz method. *Mathematics* 9(9), 1048 (2021). <https://doi.org/10.3390/math9091048>
42. Ali A. M., Jasim M. H., Al-Kasob B. D. H. Low velocity impact study of a sandwich beams using Ritz method and finite element modelling// *Journal of Engineering, Design and Technology*. 2022. <https://doi.org/10.1108/JEDT-10-2021-0584>
43. Altenbach, H., Ochsner, A. (eds) Ritz–Galerkin Methods. In: *Encyclopedia of Continuum Mechanics*. Springer, Berlin, Heidelberg, P. 2193, (2020). https://doi.org/10.1007/978-3-662-55771-6_300558
44. Amein N.K., Ramadan M. A. A small time solutions for the KdV equation using Bubnov-Galerkin finite element method, *Journal of the*

- Egyptian Mathematical Society, Vol. 19(3), pp.118–125, (2011). DOI: 10.1016/j.joems.2011.10.005
45. Ashok R., Manam S. R. Oblique Wave Scattering Problems Involving Vertical Porous Membranes. *J. Marine. Sci. Appl.*, Vol.21, pp.51–66 (2022). <https://doi.org/10.1007/s11804-022-00255-0>
 46. C. Yu, J. Lee et. al. Extensions to least-cost path algorithms for roadway planning. *International Journal of Geographical Information Science*. 17(4), 361–376 (2003)
 47. Carsten J., Rankin A. et al. Global Planning on the Mars Exploration Rovers: Software Integration and Surface Testing, *Journal of Field Robotics* 26(4), 337–357, (2009)
 48. Chang W. S., Hassan H. et al. Error Analysis on Galerkin Scheme for the Diffusion Problem. In: Rajendran, P., Mazlan, N., Rahman, A., Suhadis, N., Razak, N., Abidin, M. (eds) *Proceedings of International Conference of Aerospace and Mechanical Engineering 2019. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, Singapore. (2020) https://doi.org/10.1007/978-981-15-4756-0_4
 49. Chapr S. C *Applied numerical methods with MATLAB for engineers and scientists*, 3rd edn. McGraw-Hill, (2012). p.622
 50. Chen G .R., Guo S. et al. Convex optimization and A-star algorithm combined path planning and obstacle avoidance algorithm. *Control and Decision*. 35, 2907–2914 (2020)
 51. Conte S. D., De Boor C. *Elementary numerical analysis: an algorithmic approach*, 3rd edn. McGraw-Hill, (1980). p.416
 52. Tomlin D. Propagating radial waves of travel cost in a grid// *International Journal of Geographical Information Science*. 2010. Vol. 24(9). pp. 1391–1413.
 53. Das B. C., Soumen D. et al. Oblique scattering by thin vertical barriers: solution by multi-term Galerkin technique using simple

- polynomials as basis. *J. Mar. Sci. Technol.*, Vol.23, pp.915–925, (2018).
<https://doi.org/10.1007/s00773-017-0520-4>
54. Davis M. E. *Numerical methods and modeling for chemical engineers.* Wiley, (1984). p. 258.
 55. Deuffhard P. Recent Advances in Multiple Shooting Techniques, In *Computational Techniques for Ordinary Differential Equations*, I. Gladwell and D. K. Sayers (eds.), Academic, London (1980).
 56. Douglas D. H. Least cost path in GIS using an accumulated cost surface and slope lines// *Cartographica*. 1994. Vol. 31. pp. 37–51.
 57. El-Dib Y. O., Elgazery N. S. Galerkin’s method to solve a fractional time-delayed jerk oscillator. *Arch Appl Mech* 93, pp.3597–3607 (2023). DOI: 10.1007/s00419-023-02455-8
 58. Esfandiari R. S. *Numerical methods for engineers and scientists using MATLAB*, 2nd edn. (Chap. 8.4). CRC Press, Inc., (2017). p.472.
 59. Firoozjaee, M.A., Jafari, H., Lia, A. et al. Numerical approach of Fokker–Planck equation with Caputo–Fabrizio fractional derivative using Ritz approximation. *J. Comput. Appl. Math.* Vol. 339, 367–373 (2018).
 60. Fox L., Mayers D. F. *Numerical solution of ordinary differential equations.* Chapman & Hall, London, (1987). p.107.
 61. Friz P. K., Gassiat P. et al. Short-dated smile under rough volatility: asymptotics and numerics, *Quantitative Finance*, Vol.22(3), pp.463–480, (2022). DOI: 10.1080/14697688.2021.1999486
 62. Gass S.I., Harris C.M. Dijkstra’s algorithm . In: Gass, S.I., Harris, C.M. (eds) *Encyclopedia of Operations Research and Management Science.* Springer, New York, NY (2001)
 63. Gurara D., Klyuev V. et al. Trends and challenges in infrastructure investment in low-income developing countries. *IMF working papers* (2017)

64. He D.-Q., Wang H.-B. et al. Robot path planning using improved rapidly-exploring random tree algorithm, IEEE Industrial Cyber-Physical Systems (ICPS), 181–186, (2018)
65. Hoffman J. D. Numerical methods for engineers and scientists, 2nd edn. Marcel Dekker, Inc., (1992). p.823.
66. Huang X. Y., Wang J. et al. Nonlinear Dynamics Analysis for a Model-Reduced Rotor System with Nonlinear Galerkin Method. In: Dimitrovova, Z., Biswas, P., Goncalves, R., Silva, T. (eds) Recent Trends in Wave Mechanics and Vibrations. WMVC 2022. Mechanisms and Machine Science, Vol. 125. Springer, Cham. (2023) https://doi.org/10.1007/978-3-031-15758-5_51
67. Huchhanagouda H. P., Pitchaimani J. et al. Buckling and vibration of beams using Ritz method: Effects of axial grading of GPL and axially varying load, Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2023. DOI: 10.1080/15376494.2023.2185711
68. Iqbal A., Abbas M. et al. A Galerkin approach to solitary wave propagation for the second-order nonlinear evolution equation based on quartic B-spline functions, International Journal of Computer Mathematics, Vol. 99(11), pp. 2205–2220, (2022). DOI: 10.1080/00207160.2022.2039388
69. J. Bruce, M. Veloso RoboCup 2002: Robot Soccer World Cup VI, In Real-Time Randomized Path Planning for Robot Navigation (Lecture Notes in Computer Science, Berlin: Springer). 2752, 288–295, (2003)
70. Jahan S., Ferdows M. et al. Convective flow of hybrid nano particles in combination of TiO_2+CuO /engine oil MoS_2+ZnO /engine oil and Al_2O_3+Cu /engine oil with viscous dissipation over vertically moving surface: Numerical and Galerkin approach, Numerical Heat Transfer, Part A: Applications, (2023). DOI: 10.1080/10407782.2023.2261145
71. Jaillet L., Cortes J., Simeon T. Sampling-Based Path Planning on Costmaps Configuration-space, Ieee Trans. Robot.. 26(4), 635–646 (2010)

72. Kalashnikov S., Gurova E. et al. Influence of the Type of Basis Functions in the Bubnov-Galerkin Method in the Deformation Analysis of a Compressed-Curved Rod with Induced Anisotropy. In: Klyuev, S.V., Vatin, N.I., Sabitov, L.S. (eds) *Industrial and Civil Construction 2022. ISCICC 2022. Lecture Notes in Civil Engineering*, Vol 436. Springer, Cham. (2024). DOI: 10.1007/978-3-031-44432-6_6
73. Keskin A. U. The Shooting Method for the Solution of One-Dimensional BVPs. In: *Boundary Value Problems for Engineers*. Springer, Cham, pp.167–258, (2019). https://doi.org/10.1007/978-3-030-21080-9_5
74. Khalili M. M., Keibolahi A. et al. Application of Ritz method to large amplitude rapid surface heating of FGM shallow arches. *Arch Appl Mech* 92, 1287–1301 (2022). <https://doi.org/10.1007/s00419-022-02106-4>
75. Kulagin N. E., Lerman L. M. On periodically modulated rolls in the generalized Swift–Hohenberg equation: Galerkin’ approximations, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 454, 133845, (2023). DOI:10.1016/j.physd.2023.133845
76. LaValle S. M. Rapidly-exploring random trees: a new tool for path planning, *The annual research report*, 1998
77. LaValle S. M., Kuffner J. J. RRT-connect: An efficient approach to single-query path planning, *IEEE International Conference on Robotics and Automation* (2000)
78. Li X., Zhao G. et. al. Generating optimal path by level set approach for a mobile robot moving in static/dynamic environments// *Applied Mathematical Modelling*. 2020. Vol. 85. pp. 210–230.
79. Li Y., Wei W. et al. PQ-RRT*: an improved path planning algorithm for mobile robots. *Expert Syst Appl*. 152:113425, (2020)
80. Lin H., Atluri N. S. The Meshless Local Petrov–Galerkin (MLPG) method for solving incompressible Navier–Stokes equations. *Comput. Model. Eng. Sci.*, Vol.2, pp. 117–142, (2001)

81. Lytvyn O. M., Lytvyn O. O., Tomanova I. S. Solving the biharmonic plate bending problem by the Ritz method using explicit formulas for splines of degree 5// *Cybern Syst Anal.* 2018. Vol. 54, pp. 944–947.
82. Mamehrashi K., Yousefi S. A. A numerical method for solving a nonlinear 2-D optimal control problem with the classical diffusion equation. *International Journal of Control.* Vol 90(2), pp. 298–306. (2016). doi:10.1080/00207179.2016.1178807
83. Mandal B. N., De S. Use of Galerkin Technique in Some Water Wave Scattering Problems Involving Plane Vertical Barriers. In: Dutta, H., Peters, J. (eds) *Applied Mathematical Analysis: Theory, Methods, and Applications. Studies in Systems, Decision and Control, Vol.177.* Springer, Cham., (2020). https://doi.org/10.1007/978-3-319-99918-0_13
84. Mordukhovich B. S. *Variational Analysis and Generalized Differentiation II.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006. XXII, 610 P.
85. Nahid N., Nelakanti G. Convergence analysis of Galerkin and multi-Galerkin methods for nonlinear-Hammerstein integral equations on the half-line using Laguerre polynomials, *International Journal of Computer Mathematics*, Vol. 99(4), pp. 808–836, (2022). DOI: 10.1080/00207160.2021.1937612
86. Nemat A., Yousefi S. A. A numerical method for solving fractional optimal control problems using Ritz method// *ASME. J. Comput. Nonlinear Dynam.* 2016. Vol. 11(5) N 051015.
87. Nguyen A. T., Nguyen C. T. al. A novel weighted local averaging for the Galerkin method with application to elastic buckling of Euler column, *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 24:2, 128-142, (2023). DOI: 10.1080/15502287.2022.2080612
88. Rindler F. *Calculus of Variations.* Springer International Publishing, 2018. XII, 444 P.

89. Saranya C., Unnikrishnan M. et al., Lalithambika VR, Terrain Based D* Algorithm for Path Planning. IFAC-PapersOnLine. 49(1), 178–182 (2016)
90. Sprunk C., Lau B. et. al. An accurate and efficient navigation system for omnidirectional robots in industrial environments// Autonomous Robots. 2016. Vol. 41(2), pp. 473–493.
91. Sudhakara P., Ganapathy V. Trajectory planning of a mobile robot using enhanced A-star algorithm. Indian J. Sci. Technol. 9(41), 1–10 (2016)
92. Teukolsky W H, Vetterling S. A. et al. “Section 18.1. The Shooting Method”, Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing (3rd ed.), New York: Cambridge University Press, (2007). ISBN 978-0-521-88068- 8
93. D. Tomlin, Propagating radial waves of travel cost in a grid, International Journal of Geographical Information Science. 24(9), 1391–1413 (2010)
94. Wang W., Zuo L. et al. A learning-based multi-RRT approach for robot path planning in narrow passages. J Intell Robot Syst. 90(1), 81–100 (2018)
95. Xiong X., Min H. et al. Application improvement of A* algorithm in intelligent vehicle trajectory planning. Math Biosci Eng MBE 18(1). 1–21, (2021)
96. Xue J., Wang Y. Free vibration analysis of a flat stiffened plate with side crack through the Ritz method// Arch. Appl. Mech. 2019. Vol. 89. pp. 2089–2102.
97. Yates, J., Wang, X. and Chen, N. Assessing the effectiveness of k-shortest path sets in problems of network interdiction. Optim Eng. 15, 721–749 (2014).
98. Yu C., Lee J. et. al. Extensions to least-cost path algorithms for roadway planning// International Journal of Geographical Information Science. 2003. Vol. 17(4). pp. 361–376.
99. Yuan J., Yang Y. et al. Frequency analysis of beams with LASMP using Ritz method. Ferroelectrics, 555(1), pp. 211–223. (2020). doi:10.1080/00150193.2019.1691397

100. Yuan Yi J., Sun Q. R. et al. Path planning of a manipulator based on an improved P_RRT* algorithm. *Complex Intell. Syst.* 8, 2227–2245 (2022)
101. Zazai M. F., Fugenschuh A. R Computing the trajectories for the development of optimal routes. *Optimization and Engineering.* 22, 975–999 (2021)