

Балтийский государственный технический университет  
«ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова

На правах рукописи

Савелова Карина Эдуардовна

**Регулярное и маховское отражение  
газодинамических разрывов с энергосвободением**

1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук, доцент  
Чернышов Михаил Викторович

Санкт-Петербург

2024

## Содержание

<b>Введение</b> .....	5
<b>Глава 1. Математические модели и основные соотношения</b> .....	21
1.1. Скачок уплотнения.....	21
1.2. Скачок уплотнения с импульсным энерговыведением и изменением химического состава газа.....	24
1.3. Тройные конфигурации скачков уплотнения.....	26
1.4. Область квазиодномерного течения.....	29
1.5. Волна Прандтля-Майера.....	31
<b>Выводы по главе 1</b> .....	37
<b>Глава 2. Теоретический анализ ударно-волновых систем и структур в потоках газа с высокой сверхзвуковой скоростью</b> .....	38
2.1. Экстремальное регулярное отражение косых скачков уплотнения и бегущих ударных волн.....	38
2.1.1. Схема течения с регулярным отражением скачка уплотнения.	38
2.1.2. Схема эквивалентного нестационарного течения с регулярным отражением ударной волны.....	44
2.1.3. Аналитические результаты, определяющие экстремальное отражение скачков уплотнения и бегущих ударных волн.....	48
2.1.4. Результаты вычислений и их обсуждение.....	51
2.2. Приближенно-аналитическая модель ударно-волновой структуры течения с маховским отражением скачков уплотнения...	55
2.2.1. Локальное решение задачи о маховском отражении .....	57
2.2.2. Аналитическое описание и выбор начального приближения для параметров течения по «виртуальному соплу» за главным скачком.....	60
2.2.3. Аппроксимация потока за отраженным скачком.....	63
2.2.4. Кривизна отраженного скачка и аппроксимация его формы...	66
2.2.5. Взаимодействие отраженного скачка со встречной волной	

разрежения.....	68
2.2.6. Отражение веера характеристик волны разрежения, приводящее к развороту тангенциального разрыва.....	71
2.2.7. Общий алгоритм расчета ударно-волновой структуры течения с маховским отражением.....	75
2.2.8. Результаты применения предлагаемой аналитической модели и её экспериментальная верификация.....	77
2.3. Неоднозначность решений для ударно-волновых структур, образующихся в высокоскоростных потоках газа с малым показателем адиабаты.....	80
2.3.1. Математический аппарат исследования тройных конфигураций скачков уплотнения.....	81
2.3.2. Условия существования и неоднозначность решений для тройных конфигураций.....	85
2.3.3. Неоднозначность решения для тройных конфигураций второго типа с отрицательным углом наклона отраженного скачка..	94
2.4. Выводы по главе 2.....	99
<b>Глава 3. Анализ маховского отражения в сверхзвуковых течениях газа с возможностью импульсного энерговыделения на главном скачке.....</b>	<b>102</b>
3.1. Стационарные маховские конфигурации с импульсным энерговыделением и изменением химического состава газа на главном скачке.....	102
3.1.1. Предпосылки к исследованию стационарной маховской конфигурации с энерговыделением на главном скачке.....	102
3.1.2. Основные соотношения, описывающие стационарную маховскую конфигурацию.....	105
3.1.3. Аналитическое описание области существования стационарной маховской конфигурации.....	112

3.2. Аналитическая модель ударно-волновой структуры сверхзвукового течения с маховским отражением и импульсным энерговыделением на главном скачке.....	122
3.2.1. Математическая модель течения и алгоритм её применения...	126
3.2.2. Результаты применения приближенно-аналитической модели ударно-волновой структуры течения с импульсным энерговыделением и изменением химического состава газа на главном скачке.....	137
3.3. О возможности применения полученных результатов в конструкции комбинированного реактивного двигателя.....	143
3.3.1. Идея комбинированного двигателя.....	143
3.3.2. Течение без химических реакций в идеализированном воздухозаборнике перспективного двигателя.....	145
3.3.3. Влияние импульсного энерговыделения на параметры ударно-волновой структуры.....	149
3.4. Выводы по главе 3.....	155
<b>Заключение.....</b>	<b>157</b>
<b>Список литературы.....</b>	<b>162</b>
<b>Приложение А.....</b>	<b>172</b>

## Введение

Сверхзвуковые течения газа, реализуемые в струях, соплах, воздухозаборниках, при обтекании различных поверхностей и их аэродинамической интерференции, сопровождаются образованием газодинамических разрывов (скачков уплотнения, тангенциальных разрывов, слабых разрывов и т.д.), их отражением и взаимодействием, как регулярным, так и нерегулярным. При отражении и взаимодействии газодинамических разрывов формируются многочисленные ударно-волновые структуры [1-3] – совокупности газодинамических разрывов, имеющих одну общую точку. Ярким примером ударно-волновой структуры, возникающей в установившихся сверхзвуковых течениях, является тройная конфигурация скачков уплотнения, образующаяся, в частности, при нерегулярном (маховском) отражении косога скачка от твердой поверхности, плоскости или оси симметрии.

Явления регулярного и нерегулярного отражения скачков уплотнения (в нестационарном случае – ударных волн) впервые описаны Э. Махом и его сотрудниками ([4, 5], см. также [6, 7]). Развитие реактивной авиации, ракетной техники и космонавтики, а также возросший интерес к взаимодействиям сильных взрывных волн с различными объектами и структурами вызвало всплеск интереса к данному явлению в 1940-х и 1950-х годах, в том числе со стороны всемирно известных учёных [8-12]. В частности, Дж. фон Нейманом [8] выделены два критерия смены типа отражения скачка уплотнения или ударной волны: критерий «механического равновесия» (mechanical equilibrium), позже названный именем фон Неймана (von Neumann criterion), и критерий «отделения» (detachment criterion), который вернее называть критерием максимального угла поворота потока (на отраженном скачке). Им же была выявлена область «дуализма решений» (dual solution domain) – параметров набегающего потока и падающего скачка, при которых возможно как регулярное, так и маховское отражение. Развитие теории отражения косых скачков уплотнения в XX веке представлено в обзорных статьях [13-16] и монографиях [17-20]. Консенсус, установившийся к началу 1990-х годов

в научном сообществе, состоял в том, что для отражения бегущих (например, относительно наклонного клина) ударных волн применим критерий максимального поворота потока [17], а для отражения неподвижных (в рассматриваемой координатной системе) скачков уплотнения справедлив критерий фон Неймана, связанный с образованием так называемой стационарной маховской конфигурации [1, 20] с прямым главным (маховским) скачком. При этом размер образующегося маховского скачка оказывался непрерывной функцией параметров задачи (в частности, интенсивности падающего скачка, или его угла падения, или угла поворота потока на его поверхности) и стремился к нулю при выполнении критерия фон Неймана, что соответствовало переходу к регулярному отражению. Таким образом, согласно сложившейся концепции, маховское отражение непрерывно переходило в регулярное и обратно, а также реализовывалось во всей области дуализма решений. Согласно этапной работе [16], нерешенными в теории отражения косых скачков объявлялись проблемы оценки размеров маховского скачка и отрыва потока при взаимодействии падающего скачка с поверхностью, но не вопрос о критериях, определяющих вид отражения. Предположения о существовании гистерезиса смены типа (регулярного или маховского) отражения, представленные в работе [21], не нашли экспериментального подтверждения [22-24] и были временно забыты.

Развитие вычислительной и, отчасти, экспериментальной техники позволило выявить гистерезисные явления в области дуализма решений, сначала путём численного моделирования [25-34], а затем экспериментально [34-37]. Разнообразие численных методов (решение уравнений Эйлера, Навье-Стокса с применением различных моделей турбулентности, прямое статистическое моделирование Монте-Карло) не оставляло сомнений в существовании гистерезиса, становившегося всё более полным по мере увеличения числа Кнудсена (приближения модели разреженного газа к модели сплошной среды). Подробный анализ экспериментальных результатов [25-34] теоретическими и численными методами [36, 37] показал, что выявляемая

неполнота петли гистерезиса (проявляющаяся в том, что внезапный переход от регулярного отражения к маховскому отражению с главным скачком конечной величины происходит внутри области дуализма решений, а не вблизи её верхней границы, соответствующей критерию максимального поворота потока) свидетельствует о влиянии возмущений с боковой стороны (трёхмерности течения) или эффектов отражения возмущений от стенок сверхзвуковой аэродинамической трубы с закрытой рабочей частью [36, 37]. Влияние эффектов трёхмерности подробно исследовано в работах [36-40], а полнота петли гистерезиса в настоящее время служит одной из характеристик качества экспериментальных данных, получаемых в аэродинамических трубах [37]. При этом как регулярное, так и маховское отражение, наблюдаемое в области дуализма решений, устойчиво к малым возмущениям параметров течения [41-46]. Однако, как показано в [28, 29, 46, 47], маховское отражение более устойчиво к возмущениям конечной интенсивности (внезапному изменению скорости потока, плотности газа, внесению преграды в поле течения с последующим удалением возмущения), что объясняется в работах [41, 48] более существенным ростом энтропии потока в целом при маховском отражении, чем при регулярном. Позднее гистерезисные явления при смене типа отражения косых скачков были математически обоснованы топологическими методами [49, 50].

Экспериментально и численно полученные данные [26, 28, 29, 31, 32, 34, 43, 46, 51], а также результаты применения различных приближенно-аналитических моделей [52-58], свидетельствуют, что в области дуализма решений наблюдается или регулярное отражение, или маховское отражение с высотой главного скачка, единственным образом определяемым параметрами задачи (формой обтекаемого тела, числом Маха набегающего потока, углом падения косога скачка, показателем адиабаты газа и т.д.), но не предысторией поля течения. Таким же единственным образом определяется высота главного скачка в области параметров задачи, соответствующей только маховскому отражению. Кроме того, в задачах сверхзвуковой аэродинамики, ракетной

техники и космонавтики, обладающих существенным практическим значением (например, при разгоне сверхзвукового летательного аппарата [59] или при наборе высоты ракетой-носителем с соответствующим уменьшением степени перерасширения истекающей струи [27]), имеет место вступление в область дуализма решений именно из области параметров, соответствующих маховскому отражению. При таком направлении изменения параметров задачи (внешнего давления, числа Маха полёта и т.п.), согласно сложившейся достоверной концепции, именно маховское отражение сохраняется во всей области дуализма решений вплоть до достижения параметров, соответствующих критерию фон Неймана. Это означает, что практический интерес представляют только те методики оценки параметров ударно-волновой структуры течений с маховским отражением скачков уплотнения, в рамках которых высота главного скачка определяется единственным образом во всей области существования маховского отражения (включая область дуализма решений) и стремится к нулю на нижней границе этой области, соответствующей критерию фон Неймана.

Задача быстрой оценки высоты главного скачка как ключевого параметра, определяющего свойства возникающей ударно-волновой структуры и параметров течения за ней, была объявлена одной из двух ключевых для исследования отражения скачков уплотнения уже в работе [16]. Допущения, положенные в основу первых приближенно-аналитических моделей [52, 53], привели к существенной (на 50-90%) недооценке высоты маховского скачка по сравнению с экспериментально наблюдаемыми значениями [24, 37, 40]. Однако в их основе лежала верная (экспериментально и численно подтвержденная) концепция образования «виртуального сопла» (“virtual nozzle”) – области течения за главным скачком уплотнения, в которой осуществляется переход от дозвуковых скоростей течения (непосредственно за скачком) к сверхзвуковым с одновременным (как у классического геометрического сопла Лавалья) переходом от сужения этой области к её расширению, что сопровождается соответствующим разворотом тангенциального разрыва, ограничивающего эту

область. Впоследствии модель [53] была дополнена различными соотношениями, осредняющими число Маха за главным скачком [57, 58], форму отраженного скачка уплотнения [60, 61] и разворачивающегося тангенциального разрыва [54, 55], что несколько увеличило точность достигаемых результатов. Наибольшей (сравнительно с результатами численного и физического эксперимента) точностью аппроксимации сверхзвуковой части поля течения отличается модель, предложенная в работах [56, 62], в основе которой лежат аналитические решения задач о догоняющем [63] и встречном [60, 61] взаимодействии скачков уплотнения и изоэнтропных волн, сопряжения области квазиодномерного течения с волной Прандтля-Майера [64, 65], падения волны разрежения на поверхность тангенциального разрыва с учетом существования отраженной волны сжатия. В представленном диссертационном исследовании аналитическая модель, кратко изложенная в [56], обобщается на случай наличия импульсного энерговыделения (например, вызванного экзотермическими реакциями) и изменения химического состава газовой смеси за главным (маховским) скачком [143, 145, 147].

Интерес к аналитическим моделям для быстрой оценки параметров ударно-волновой структуры течений с маховским отражением и нерегулярным взаимодействием скачков уплотнения заметно возрос в последние годы [57, 58, 66-68], что объясняется, по-видимому, разработкой аппаратов, осуществляющих полёты с высокими сверхзвуковыми скоростями в атмосфере, и воздухозаборных устройств для их двигательных установок. С точностью, приемлемой для прикладных исследований, для описания течений с высокой сверхзвуковой скоростью при наличии скачков уплотнения может быть применена модель совершенного газа с пониженным (по сравнению с воздухом) «эффективным» показателем адиабаты. Именно в таких установившихся течениях (наряду с течениями многоатомных газов) может существовать особая ударно-волновая структура, открытая Л.Г. Гвоздевой [69] и позднее исследованная в работах [70-75] – маховское отражение с отрицательным (относительно набегающего потока) углом наклона

отражённого скачка. В представленной диссертационной работе анализируются условия существования и однозначности решения для таких структур «отрицательного» маховского отражения, выведены соответствующие аналитические соотношения [144]. Проведено сравнение полученных результатов с данными численного эксперимента [70, 76], в том числе при наличии неоднозначности решения.

Тройная конфигурация скачков уплотнения, частным случаем которой является тройная конфигурация маховского отражения, разделяет набегающий поток на две области, существенно отличающиеся значениями скорости и числа Маха течения, импульса и скоростного напора потока, давления торможения и статической температуры, многими другими параметрами [76, 78, 79]. Это в полной мере относится к тройным конфигурациям нерегулярного отражения, реализуемым в потоке с большими числами Маха и пониженными показателями адиабаты газа, в том числе к «отрицательным» конфигурациям [75]. В частности, сверхзвуковой поток газа за отраженным скачком уплотнения обладает существенно более высоким (порой – в десятки раз) значением давления торможения, чем дозвуковой поток за маховским скачком. При условии дальнейшего торможения в системе косых скачков [80-83], этот поток может быть эффективно использован в термодинамическом цикле прямооточного воздушно-реактивного двигателя (цикле Брайтона). Дозвуковой поток за главным (маховским) скачком, несмотря на малое значение полного давления, обладает другим достоинством – существенно более высокой статической температурой газа, что облегчает детонацию топливно-воздушной смеси, поданной на поверхность главного скачка, и стимулирует её использование в термодинамическом цикле прямооточного детонационного двигателя (цикле Фикетта-Джейкобса [84, 85]).

Идея комбинированного прямооточного воздушно-реактивного двигателя, высказанная впервые в работе [86], проанализирована и обоснована в цикле работ [150-156, 159, 160, 165] автора и его научного руководителя. Для его эффективного осуществления необходимо разделение потоков,

формирующихся за главным и отраженным скачками возникающего маховского отражения с импульсным энерговыделением и изменением химического состава газа на главном скачке, вдоль тангенциального разрыва, исходящего из тройной точки. Для решения этой задачи, в свою очередь, необходимо определить область существования маховского отражения, а также высоту главного скачка, форму и другие параметры тангенциального разрыва, других газодинамических разрывов в поле течения при любых произвольно выбранных параметрах задачи из этой области существования. Представленная диссертационная работа во многом посвящена решению этой немаловажной проблемы – разработке приближенно-аналитической модели для быстрой оценки параметров ударно-волновой структуры сверхзвуковых течений с маховским отражением при наличии импульсного энерговыделения и изменения химического состава газовой смеси на главном скачке, который, таким образом, превращается в стационарную детонационную волну. Малая (по сравнению с характерными размерами технических устройств) толщина зоны «химпика» («пика фон Неймана») позволяет пренебречь кинетикой химических реакций за главным скачком при выводе аналитических соотношений. Главный скачок, таким образом, рассматривается в рамках классической модели Чепмена-Жуге как косая (в общем случае) стационарная детонационная волна с мгновенным энерговыделением и сменой химического состава газа, проявляющей себя в изменении его показателя адиабаты. Использование модели Чепмена-Жуге применительно к маховскому скачку позволяет получить ряд аналитических решений, описывающих поле течения. Сравнение с данными численного моделирования [152, 158, 160, 165], включая результаты других авторов [87-90], показывает, что построенная аналитическая модель приводит к качественно верным и количественно достаточно точным результатам.

Для описания области существования решения и расчета параметров потока в окрестности тройной точки маховского отражения в данной работе используется графический аппарат детонационных ударных поляр [91],

описывающих стационарные детонационные волны в рамках модели Чемпена-Жуге. Математическая модель стационарной детонации неоднократно (без полного параметрического анализа) использовалась при описании маховского отражения (в работах [88-90] – применительно к падающему и главному скачкам, а в работе [87] – применительно ко всем скачкам в поле течения). В отличие от вышеуказанных исследований, в данной диссертационной работе учитывается импульсное энерговыделение и изменение химического состава газа исключительно на главном (маховском) скачке. Предполагается, что, как было показано ранее [76, 79, 92], существенно более высокая температура за главным скачком уплотнения стимулирует, в первую очередь, импульсное энерговыделение за его поверхностью в непосредственной близости от него.

В данной работе и других публикациях её автора [145-147, 164, 167, 169] показано, что наличие импульсного энерговыделения приводит к существенному смещению нижней границы области существования маховского отражения, в «обычных» условиях соответствующей критерию фон Неймана. Появляется возможность маховского отражения тех скачков уплотнения, которые в «обычных» условиях (при невозможности импульсного энерговыделения на главном скачке) отражаются только регулярно. Уменьшение показателя адиабаты газа, типичное для горения топливно-воздушной смеси, обладает аналогичным, но на порядок более слабым эффектом. Результаты применения разработанной приближенно-аналитической модели и их вычислительной верификации показывают, что импульсное энерговыделение (в пределах, допускающих стационарную детонацию) приводит к заметному увеличению размеров маховского скачка и ширины области дозвукового течения за ним, потенциально пригодного для последующего применения в термодинамическом цикле Фикетта-Джейкобса. Кроме того, разработанная аналитическая модель позволяет быстро определить форму газодинамических разрывов в поле течения, включая исходящий из тройной точки тангенциальный разрыв, что может быть практически полезным для разделения потоков с разными термогазодинамическими свойствами.

Дальнейшее развитие данной диссертационной работы может привести к построению общей теории ударно-волновых структур (включая тройные конфигурации скачков уплотнения) с импульсным энерговыделением на составляющих газодинамических разрывах.

### **Общая характеристика и структура работы**

Актуальность темы исследования обусловлена необходимостью распространения теории взаимодействия (интерференции) газодинамических разрывов на случаи отражения и взаимодействия разрывов с возможным импульсным энерговыделением и изменением химического состава газа. Необходимость подобного расширения круга теоретически решаемых задач связана с развитием авиационной и ракетно-космической техники, созданием перспективных двигательных установок летательных аппаратов для полётов с большими сверхзвуковыми скоростями. Ввиду этого становятся необходимыми исследование взаимодействия газодинамических разрывов в сверхзвуковых потоках реакционноспособных газовых смесей, анализ поля течения и оптимизация образующихся ударно-волновых систем и структур, быстрая оценка новых аэродинамических схем и перспективных конструкций реактивных двигателей.

Цель проведенной работы состоит в анализе ударно-волновых структур, возникающих при отражении косых скачков уплотнения, в том числе в условиях импульсного энерговыделения и изменения химического состава газовой смеси на главном скачке, а также в создании достоверного математического аппарата для быстрой оценки и анализа поля течения с образующимися ударно-волновыми структурами.

Достоверность полученных результатов обеспечивается применением строгого и хорошо апробированного математического аппарата классической газовой динамики, динамики детонационных волн, условий совместности на газодинамических разрывах и решений классических задач об их взаимодействии. Данные теоретического анализа и численного моделирования,

проведенного автором работы, взаимно верифицируют друг друга. Доступные экспериментальные данные других авторов также подтверждают достоверность полученных результатов.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

- получены аналитические соотношения, описывающие ударно-волновые структуры регулярного отражения с минимальным динамическим и, впервые, с минимальным термическим нагружением объекта воздействия;

- выявлены и аналитически описаны области неоднозначности решения для ударно-волновых структур, возникающих при отражении косых скачков уплотнения в течениях с большими числами Маха и сниженными показателями адиабаты;

- выявлены условия существования и проведен параметрический анализ тройных конфигураций скачков уплотнения, возникающих при маховском отражении с импульсным энерговыделением и изменением химического состава смеси на главном скачке;

- впервые разработана приближенно-аналитическая модель течения с маховским отражением при возможном наличии импульсного энерговыделения и изменения химического состава смеси на главном скачке;

- аналитически и численно выявлены закономерности изменения ударно-волновой структуры маховского отражения в условиях импульсного энерговыделения на главном скачке уплотнения.

Научная ценность диссертации состоит в следующем:

- проведены теоретический анализ и оптимизация ударно-волновых структур регулярного отражения косых скачков уплотнения по критериям динамической и термической нагрузки на объект воздействия, дана интерпретация полученных результатов для нестационарных течений газа с отражением бегущих ударных волн;

- проведён теоретический анализ неоднозначности решений для ударно-волновых структур, имеющих место при отражении косых скачков уплотнения в течениях с большими числами Маха и сниженными показателями адиабаты;

- разработана новая приближенно-аналитическая модель течения с маховским отражением, позволяющая провести теоретический анализ течений с энерговыделением и изменением химического состава газовой смеси исключительно на главном (маховском) скачке;

- проведен анализ влияния импульсного энерговыделения и изменения химического состава газа на реализуемость маховского отражения, газодинамические параметры поля течения и геометрические параметры образующейся при этом ударно-волновой структуры.

Практическая ценность диссертации состоит в следующем:

а) результаты проведенной оптимизации ударно-волновой структуры регулярного отражения позволяют существенно снизить динамические и тепловые нагрузки на аэродинамические поверхности и объекты воздействия взрывных волн;

б) проанализированная неоднозначность решений для ударно-волновых структур маховского отражения должна учитываться при газодинамическом проектировании сверхзвуковых воздухозаборников, планеров летательных аппаратов и других технических объектов;

в) разработанная модель быстрой оценки параметров ударно-волновой структуры маховского отражения, допускающая импульсное энерговыделение и изменение химического состава газа на главном скачке, может быть использована при проектировании различных технических устройств, в том числе перспективных прямоточных воздушно-реактивных двигателей.

Публикации. Результаты, представленные в диссертации, опубликованы в работах [143-169] из них 2 – в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК, 8 – в рецензируемых изданиях, индексируемых в международных базах цитирования Web of Science и SCOPUS, 17 – в материалах конференций, индексируемых в РИНЦ. Личный вклад автора в подготовку публикаций описан в Приложении А.

Апробация результатов. Результаты, достигнутые в ходе работы над диссертацией, представлены на следующих всероссийских и международных конференциях, других научно-технических мероприятиях:

а) общероссийская молодежная научно-техническая конференция «Старт-2018» (Санкт-Петербург, 2018);

б) VII Всероссийская молодежная научная конференция «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики» (Томск, 2018);

в) общероссийская научно-техническая конференция «Восьмые Уткинские чтения» (Санкт-Петербург, 2019);

г) XLIV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых – пионеров освоения космического пространства (Москва, 2019);

д) XXII Всероссийская научно-практическая конференция «Актуальные проблемы защиты и безопасности» (Санкт-Петербург, 2019);

е) 19-я Международная конференция «Авиация и космонавтика» (Москва, 2020);

ж) Международная научная конференция по механике «IX Поляховские чтения» (Санкт-Петербург, 2021);

з) Международная научная конференция “PETER 2021: New Models and Hydrocodes for Shock Wave Physics” (Лондон, 2021)

и) 20-я Международная конференция «Авиация и космонавтика» (Москва, 2021);

к) XLV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых – пионеров освоения космического пространства (Москва, 2021);

л) XXII Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2021), Алушта, 2021;

м) 20-я Международная конференция «Авиация и космонавтика» (Москва, 2021);

н) Вторая Общероссийская научно-практическая конференция «Научные чтения памяти академика В.П. Глушко» (Санкт-Петербург, 2021);

о) XXV Всероссийская научно-практическая конференция «Актуальные проблемы защиты и безопасности» (Санкт-Петербург, 2022);

п) XXXIII научно-техническая конференция по аэродинамике (Жуковский, 2022);

р) XXVI Всероссийский семинар с международным участием по струйным, отрывным и нестационарным течениям (Санкт-Петербург, 2022);

с) XLVII Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых – пионеров освоения космического пространства (Москва, 2023);

т) Всероссийский научный симпозиум по проблемам аэромеханики и газовой динамики, посвященный 100-летию со дня рождения академика Горимира Горимировича Чёрного (Москва, 2023);

у) XXVI Всероссийская научно-практическая конференция «Актуальные проблемы защиты и безопасности» (Санкт-Петербург, 2023);

ф) X Международный научно-практический симпозиум «Безопасность космических полетов» (Space Flight Safety), Санкт-Петербург, 2023;

х) XXXIX Сибирский теплофизический семинар (Новосибирск, 2023);

ц) XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (Санкт-Петербург, 2023);

ч) II Школа-семинар «Механика, химия и новые материалы» под руководством чл.-корр. РАН Ю.В. Петрова (Санкт-Петербург, 2023);

ш) VII Минский международный симпозиум по физике ударных волн, горения и детонации (Минск, 2023).

Секционные доклады, представленные автором диссертации на мероприятиях (б), (р) и (х), были удостоены почетных дипломов.

Структура и объём диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы из 169 наименований и одного приложения. Общий объём диссертации составляет 176 страниц, включая 34 рисунка и 1 таблицу.

#### Основные научные результаты

а) Результаты оптимизации ударно-волновой структуры регулярного отражения, аналитически проведённой в представленной работе, позволяют существенно снизить не только динамические [93], но и тепловые нагрузки на тела, подвергающиеся ударно-волновому воздействию при аэродинамической интерференции, а также (при обращении движения) – на объекты воздействия бегущих ударных (в том числе взрывных) волн [148]. Личное участие автора в получении данных результатов: анализ литературы, численные и аналитические расчеты, интерпретация результатов, написание статьи.

б) Результаты [144, 166] анализа неоднозначности решений для ударно-волновых структур маховского отражения (включая «отрицательные» тройные конфигурации), которые необходимо учитывать при газодинамическом конструировании различных технических устройств [149, 151, 157]. В частности, сосуществование решений для «отрицательных» конфигураций маховского отражения, регулярного отражения и решения с отошедшими скачками уплотнения может привести к практической нереализуемости или неустойчивости «отрицательных» конфигураций [144]. Личное участие автора в получении данных результатов: анализ литературы, численные и аналитические расчеты, интерпретация результатов, написание статей.

в) Приближенно-аналитическая модель ударно-волновой структуры течения с маховским отражением [143, 145, 162, 167, 169], в том числе при наличии импульсного энерговыделения и изменения химического состава газовой смеси на главном скачке [146, 147, 161, 163, 164], которая позволяет достаточно точно и достоверно оценить основные параметры течения, включая размер главного (маховского) скачка, и может быть использована для

газодинамического конструирования различных технических устройств, в том числе перспективных прямоточных воздушно-реактивных двигателей [150, 152, 153-156, 165] (все аналитические вычисления проведены лично автором диссертации, общий вклад составляет не менее 80%).

г) Наличие импульсного энерговыделения (в установленных пределах существования решения) приводит к существенному увеличению размеров маховского скачка [147, 158-160], а также к реализации маховского отражения в условиях, когда при отсутствии импульсного энерговыделения реализуется только регулярное отражение [146, 169]. Влияние изменения химического состава смеси на высоту главного скачка и другие параметры ударно-волновой структуры является существенно более слабым [146, 147]. Личное участие автора в получении данных результатов: анализ литературы, численные и аналитические расчеты, интерпретация результатов, написание статей (личный вклад составляет не менее 80%).

Положения, выносимые на защиту:

а) приближенно-аналитическая модель ударно-волновой структуры течения с маховским отражением, в том числе при наличии импульсного энерговыделения и изменения химического состава газовой смеси на главном скачке;

б) наличие импульсного энерговыделения приводит к существенному увеличению размеров маховского скачка, а также к реализации маховского отражения в условиях, когда при невозможности импульсного энерговыделения кривой скачок может отражаться только регулярно.

в) результаты анализа неоднозначности решений для ударно-волновых структур маховского отражения (включая «отрицательные» тройные конфигурации). В частности, сосуществование решений для «отрицательных» конфигураций маховского отражения, регулярного отражения и решения с отошедшими скачками уплотнения;

г) результаты оптимизации ударно-волновой структуры регулярного отражения;

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект «Создание и научное обоснование методологии аэрогазодинамического проектирования общего облика двигательных и энергетических установок, технологий разработки и массового производства беспилотной аэрокосмической техники для решения задач в экстремальных условиях и чрезвычайных ситуациях», № FZWF-2024-0003).

## Глава 1. Математические модели и основные соотношения

Современные достижения теории интерференции газодинамических разрывов [1, 18, 20, 44, 50, 62, 69], теории оптимальных ударно-волновых систем и структур [23, 78, 79, 83] позволяют аналитически и численно решать сложные задачи исследования и управления течениями с разнообразными видами отражения газодинамических разрывов и их взаимодействия. В гл. 1 приводятся основные термины и соотношения, применяемые в данной работе и составляющие основу математического аппарата решаемых задач. При этом используется термодинамическая модель совершенного газа, который также (за исключением расчетов модельных течений методами вычислительной гидрогазодинамики) полагается невязким и нетеплопроводным.

### 1.1. Скачок уплотнения

Прямой или косой скачок уплотнения (рис. 1.1) представляет собой поверхность газодинамического разрыва, расположенную под ненулевым углом к направлению потока перед ней (поверхность нормального разрыва). На скачке уплотнения происходит конечный разрыв ряда параметров течения. Используемые в дальнейшем соотношения, связывающие форму скачка уплотнения и изменение параметров течения на его сторонах, приведены ниже.

Одним из основных параметров скачка уплотнения является его интенсивность  $J$  – отношение статических давлений в потоке за скачком ( $p_1$ ) и перед ним ( $p$ ), которая связана с углом  $\sigma$  наклона скачка к вектору скорости течения перед ним известным соотношением

$$J_1 = p_1/p = (1 + \varepsilon)M^2 \sin^2 \sigma - \varepsilon. \quad (1.1)$$

Здесь  $\varepsilon = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ , а  $\gamma$  – показатель адиабаты газа (всюду, где это не оговорено отдельно, примеры расчетов соответствуют значению  $\gamma = 1.4$ ). В частности, интенсивность  $J_m$  прямого (нормального к набегающему потоку) скачка уплотнения составляет

$$J_m = (1 + \varepsilon)M^2 - \varepsilon, \quad (1.2)$$

а скачок уплотнения, вырождающийся в слабое возмущение ( $J \rightarrow 1$ ) направлен под углом Маха

$$\alpha = \arcsin(1/M). \quad (1.3)$$

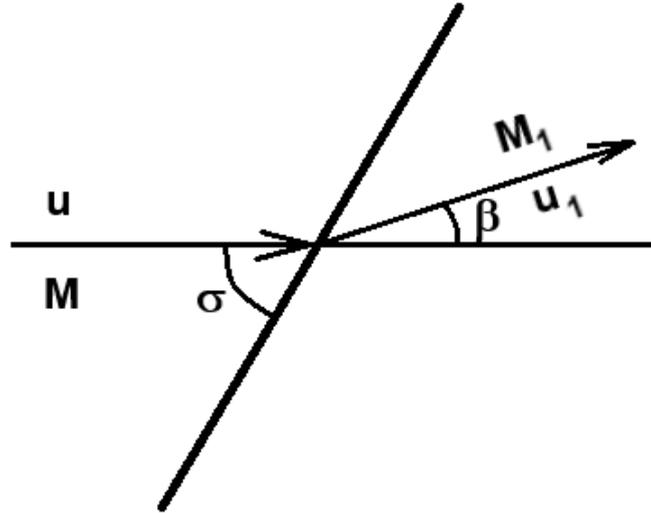


Рисунок 1.1 – Схема течения со скачком уплотнения

Угол  $\beta$  поворота потока на поверхности скачка также определяется его интенсивностью:

$$|\beta| = \arctg \left[ \sqrt{\frac{J_m(M) - J}{J + \varepsilon} \frac{(1 - \varepsilon)(J - 1)}{(1 + \varepsilon)M^2 - (1 - \varepsilon)(J - 1)}} \right]. \quad (1.4)$$

Соотношение (1.4) графически отображается на плоскости  $(\beta; \Lambda = \ln J)$  в виде ударной поляры (например, сердцевидной кривой I на рис. 1.2). Максимальный угол поворота потока с данным фиксированным числом Маха  $M$  на одиночном скачке уплотнения достигается при его интенсивности

$$J_l = \frac{M^2 - 2}{2} + \sqrt{\left(\frac{M^2 - 2}{2}\right)^2 + (1 + 2\varepsilon)(M^2 - 1) + 2} \quad (1.5)$$

и соответствует крайним левой и правой точкам  $l$  на ударной поляре I. Эти точки разделяют ударную поляру на ее верхнюю (соответствующую так называемым сильным скачкам уплотнения) и нижнюю (соответствующую слабым скачкам) ветви.

Число Маха  $M_1$  течения за скачком определяется соотношением

$$M_1 = \sqrt{\frac{[(J + \varepsilon)M^2 - (1 - \varepsilon)(J^2 - 1)]}{[J(1 + \varepsilon J)]}}. \quad (1.6)$$

Полученная из (1.6) при  $M_1 = 1$  зависимость

$$J_*(M) = \frac{M^2 - 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{M^2 - 1}{2}\right)^2 + \varepsilon(M^2 - 1) + 1} \quad (1.7)$$

определяет интенсивность косо́го скачка с критической скоростью течения за ним. Течение за скачком уплотнения является сверхзвуковым при  $J < J_*$  и дозвуковым в противоположном случае (в частности, за всеми «сильными» скачками, поскольку  $J_* < J_l$  при одном и том же числе Маха, и точка “\*” на ударной поляре всегда располагается несколько ниже точки  $l$ , соответствующей максимальному повороту потока).

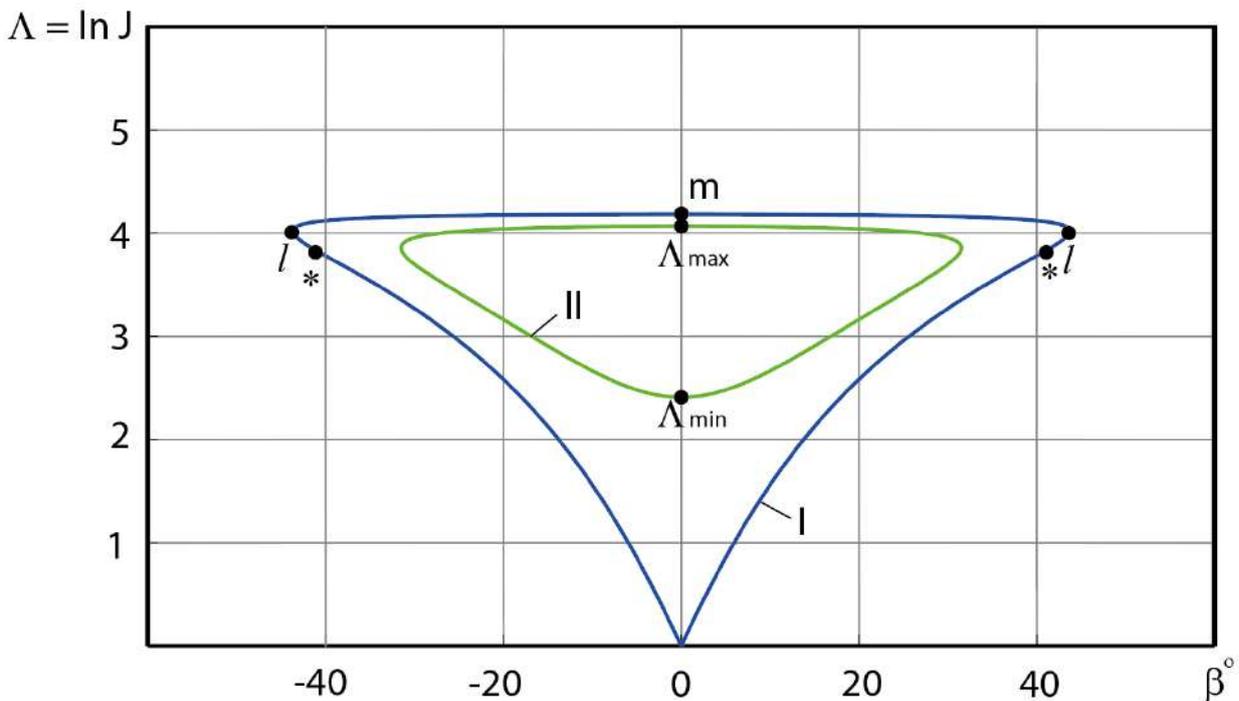


Рисунок 1.2 – Графическое представление скачков уплотнения на плоскости ударных поляр

Адиабата Ренкина-Гюгонио, связывающая изменения плотности ( $\rho$ ) и давления на скачке уплотнения, для совершенного газа записывается в форме

$$E = \rho / \rho_1 = (1 + \varepsilon J) / (J + \varepsilon)$$

и определяет изменение статической температуры ( $T$ ) газа

$$\Theta = T_1/T = J(1 + \varepsilon J)/(J + \varepsilon), \quad (1.8)$$

скорости звука, акустического импеданса и других термодинамических параметров. Отношение давлений торможения ( $p_0$ ) газового потока (коэффициент потерь, или коэффициент восстановления полного давления на скачке уплотнения) определяется соотношением

$$I = p_{01}/p_0 = (JE^\gamma)^{\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}}, \quad (1.9)$$

и является монотонно убывающей функцией интенсивности скачка.

Дифференциальные условия динамической совместности [1, 61-63] позволяют в наиболее удобной форме связать между собой градиенты параметров течения в неравномерном газовом потоке (так называемые основные неравномерности  $N_1 = \partial \ln p / \partial s$  – неизобаричность течения,  $N_2 = \partial \theta / \partial s$  – кривизна линии тока,  $N_3 = \partial \ln p_0 / \partial n$  – показатель завихренности изоэнергетического потока):

$$\tilde{N}_i = C_i \sum_{j=1}^5 A_{ij} N_j.$$

Здесь  $\tilde{N}_i$  ( $i = 1..3$ ) – основные неравномерности потока за скачком,  $N_j$  – перед ним,  $N_4 = \delta/y$  – показатель симметрии течения,  $N_5 \equiv K_\sigma$  – геометрическая кривизна скачка (в общем случае ненулевая),  $\delta = 0$  в плоском течении и  $\delta = 1$  в осесимметричном,  $y$  – расстояние от оси симметрии,  $\theta$  – угол течения,  $(s, n)$  – «естественные» координаты, связанные с направлением газового потока.

## 1.2. Скачок уплотнения с импульсным энерговыделением и изменением химического состава газа

Значительное повышение температуры на сильном скачке уплотнения способно привести к детонации реакционноспособной газовой смеси с соответствующим импульсным энерговыделением и изменением химического состава. Простейшей моделью, допускающей качественное аналитическое исследование отражения и взаимодействия скачков уплотнения с импульсным

энерговывделением, являются соотношения Чепмена-Жуге для стационарной детонации:

$$\rho u_n = \rho_1 u_{1n}, \quad p + \rho u_n^2 = p_1 + \rho_1 u_{1n}^2, \quad u_\tau = u_{1\tau}, \quad (1.10)$$

$$\frac{u_n^2 + u_\tau^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \phi = \frac{u_{1n}^2 + u_{1\tau}^2}{2} + \frac{\gamma_1}{\gamma_1-1} \frac{p_1}{\rho_1},$$

где индексы « $n$ » и « $\tau$ » относятся к нормальной и касательной (к поверхности скачка) составляющим скорости  $u$ , показатель адиабаты газовой смеси за волной (продуктов стационарной детонации) принимает значение  $\gamma_1$ , а  $\phi$  – импульсное энерговывделение к единице массы газовой смеси, определяемый удельной теплотой  $\lambda$  сгорания горючего, отнесенной ко всей смеси в набегающем потоке.

Импульсное энерговывделение  $\phi$  может быть представлено безразмерной величиной

$$\bar{\phi} = \frac{\phi}{(p/\rho)} = \frac{\gamma\phi}{(\gamma-1)c_p T}, \quad (1.11)$$

где значения температуры  $T$  и удельной изобарной теплоёмкости  $c_p$  относятся к смеси в набегающем потоке.

Использование модели (1.10) трансформирует соотношения (1.1-1.9) на скачках уплотнения. В частности, формула [88]

$$|\beta| = \arctg \left[ \frac{(J-1)\sqrt{F-1}}{\gamma M^2 - (J-1)} \right], \quad F = \frac{2\gamma M^2 [(\gamma - \gamma_1) + (\gamma - 1)((J-1) - (\gamma_1 - 1)\bar{\phi})]}{(\gamma - 1)(J-1)[(\gamma_1 + 1)(J-1) + 2\gamma_1]} \quad (1.12)$$

описывает поворот потока на сильном скачке с энерговывделением, трансформируясь при  $\gamma_1 = \gamma$  и  $\bar{\phi} = 0$  в формулу (1.4).

Как показано в [146], достаточно большое импульсное энерговывделение  $\bar{\phi}$  смещает «детонационную» поляру II ([21], рис. 1.2), отображаемую соотношением (1.12), внутрь ударной поляры I, соответствующей уравнению (1.4). При этом интенсивность  $J$  скачка  $j$  (стационарной детонационной волны) должна принадлежать промежутку

$$J_{\min} \leq J \leq J_{\max}, \quad (1.13)$$

где значение  $J = J_{\max}$  соответствует прямому скачку уплотнения с импульсным энерговыделением. Значения  $J_{\min}$  и  $J_{\max}$  определяются формулой [146]

$$J_{\min, \max} = \frac{\gamma + 1}{\gamma_3 + 1} \cdot \frac{J_m(M) + 1}{2} \mp \frac{\sqrt{\gamma^2 M^4 + \gamma_3^2 - 2\gamma M^2 \left[ (\gamma_3^2 - 1)\bar{\phi} + (\gamma_3^2 - \gamma)/(\gamma - 1) \right]}}{\gamma_3 + 1}, \quad (1.14)$$

где  $J_m(M) = (1 + \varepsilon)M^2 - \varepsilon$ .

Число Маха  $M_1$  за скачком уплотнения с энерговыделением, вместо (1.6), определяется соотношением

$$M_1 = \sqrt{\frac{\gamma M^2 (E^2 \sin^2 \sigma + \cos^2 \sigma)}{\gamma_1 E J}}, \quad (1.15)$$

где зависимость

$$\sigma = \arcsin \sqrt{\frac{J - 1}{\gamma(1 - E)M^2}} \quad (1.16)$$

определяет угол наклона скачка к потоку перед ним вместо (1.1), а

$$E = 1 - \frac{2[J - (\gamma_1 - 1)/(\gamma - 1) - (\gamma_1 - 1)\bar{\phi}]}{(\gamma_1 - 1) + (\gamma_1 + 1)J} \quad (1.17)$$

– обратное отношение плотностей газов на сторонах скачка, сводящееся при  $\bar{\phi} = 0$  и  $\gamma_1 = \gamma$  к обычной адиабате Ренкина-Гюгонно.

### 1.3. Тройные конфигурации скачков уплотнения

Тройные конфигурации (ТК) скачков уплотнения представляют собой ударно-волновые структуры, состоящие из трех скачков ( $j_1 - j_3$  на рис. 1.3,а-е), имеющих общую (тройную) точку ( $T$ ) и тангенциального разрыва ( $\tau$ ), исходящего из тройной точки.

Условия совместности на тангенциальном разрыве (равенство статических давлений и коллинеарность векторов скорости потока на его сторонах) связывают интенсивности скачков и углы поворота потока на их сторонах системой

$$J_1 J_2 = J_3, \quad \beta_1 + \beta_2 = \beta_3 \quad (1.18)$$

или

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 = \Lambda_3, \quad \beta_1 + \beta_2 = \beta_3, \quad (1.19)$$

где  $\Lambda_i = \ln J_i$ ,  $i = 1..3$ ,  $J_i$  – интенсивность скачка  $j_i$ ,  $\beta_i$  – угол поворота потока на его поверхности, определяемый формулой вида (1.4).

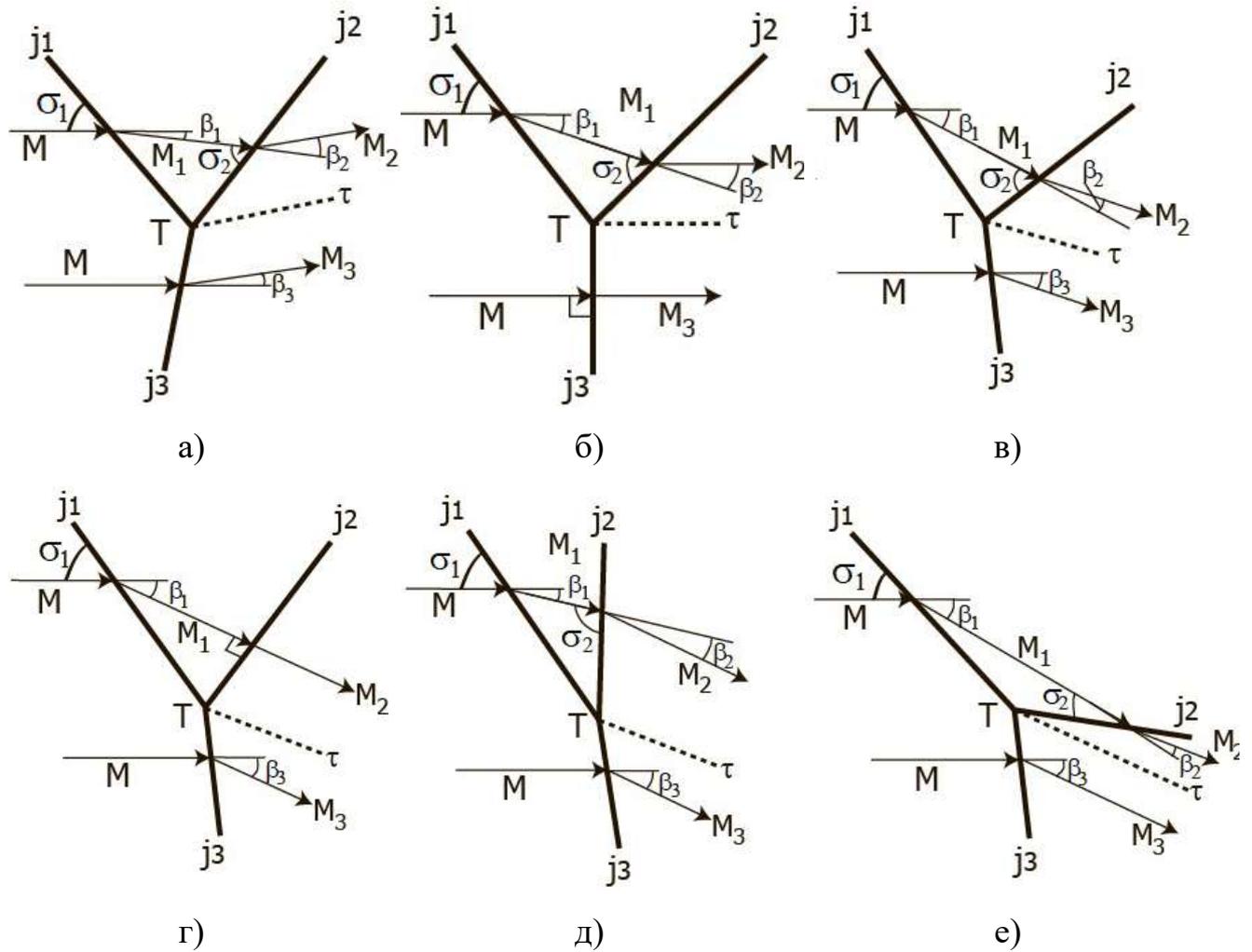


Рисунок 1.3 – Классификация тройных конфигураций скачков уплотнения: а) тройная конфигурация первого типа (ТК-1); б) стационарная маховая конфигурация (СМК); в) ТК-2; г) переходные ТКП-2-3; д) ТК-3; е) «отрицательная» тройная конфигурация (ОТК)

В зависимости от направлений поворота потока на отдельных скачках, различают [1, 10] тройные конфигурации первого (ТК-1,  $\beta_1\beta_2 < 0$ ,  $\beta_1\beta_3 < 0$ , рис. 1.3,а), второго (ТК-2,  $\beta_1\beta_2 < 0$ ,  $\beta_1\beta_3 > 0$ , рис. 1.3,в) и третьего (ТК-3,  $\beta_1\beta_2 > 0$ ,  $\beta_1\beta_3 > 0$ , рис. 1.3,д) типа. Обычно предполагается, что тройные конфигурации первого типа образуются в частных случаях взаимодействия встречных, третьего типа – догоняющих скачков, а второго типа – при

нерегулярном (маховском) отражении скачка  $j_1$ . Однако в сложных сверхзвуковых течениях, имеющих место в реальных газодинамических устройствах, зачастую образуются сильно разветвленные ударно-волновые структуры с тройными конфигурациями всех типов.

Тройная конфигурация с прямым главным скачком  $j_3$  (стационарная маховская конфигурация, или СМК), изображенная на рис. 1,б, является пограничной между ТК-1 и ТК-2. Согласно традиционно используемому для установившихся сверхзвуковых течений критерию фон Неймана смены вида отражения скачков уплотнения, образование СМК соответствует переходу от маховского отражения к регулярному, а главный скачок  $j_3$  при этом уменьшается в размерах и исчезает. Интенсивность  $J_1 = J_N$  падающего скачка  $j_1$ , образующего СМК при своем отражении, определяется уравнением [79]

$$\sum_{n=0}^3 E_n J_N^n = 0, \quad (1.20)$$

$$E_3 = 1 - \varepsilon, \quad E_2 = -\left[ (1 + \varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon^3) M^2 + (1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon + \varepsilon^2) \right],$$

$$E_1 = \varepsilon \left[ (1 + \varepsilon) M^2 + 1 - \varepsilon \right] \cdot \left[ (1 - \varepsilon) M^2 - 2 + \varepsilon \right], \quad E_0 = (1 - \varepsilon)(M^2 - 1) \left[ (1 + \varepsilon) M^2 - \varepsilon \right]$$

Согласно результатам работ [62, 76, 78, 79], температура потока за главным скачком маховского отражения (в ТК-2 или СМК) значительно больше, чем в потоке за отраженным скачком на другой стороне тангенциального разрыва. Особенно ярко этот эффект проявляется при уменьшенных показателях адиабаты газа и больших числах Маха набегающего потока. Значительное повышение температуры на главном скачке способно привести к импульсному энерговыделению и изменению химического состава реакционноспособной газовой смеси. В этом случае угол  $\beta_3$  поворота потока на скачке  $j_3$  в системах (1.18) или (1.19) определяется соотношением вида (1.12), а не (1.4), а число Маха  $M_3$  за его поверхностью – формулой вида (1.15), а не (1.6), как за падающим ( $j_1$ ) и отраженным ( $j_2$ ) скачками.

Переходная тройная конфигурация с прямым скачком  $j_2$  (ТКП-2-3, рис. 1.3,г) ограничивает область существования конфигураций ТК-2, образующихся при маховском отражении, с другой стороны. Интенсивность  $J_1 = J_T$  скачка  $j_1$ , образующего ТКП-2-3, определяется соотношением [79]

$$M^4 - rM^2 + (J_T - 1)(J_T + 2 - \varepsilon)/(1 - \varepsilon) = 0, \quad (1.21)$$

$$r = (J_T - 1)(J_T + 2 - \varepsilon)/(J_T + \varepsilon) + (J_T + \varepsilon)/(1 + \varepsilon) + (1 + \varepsilon J_T)^2 / \left[ (1 - \varepsilon)(J_T + \varepsilon)^2 \right]$$

Возможность реализации маховского отражения с образованием ТК-1 или ТК-3 в данной работе не рассматривается.

В статье [69] обнаружены для стационарных сверхзвуковых течений и впоследствии [70-77] исследованы тройные конфигурации маховского отражения с отрицательным (по отношению к набегающему потоку) углом наклона отраженного скачка («отрицательные» ТК, или ОТК, см. рис. 1.3,е). Из [75] известно, что ОТК образуются при больших числах Маха набегающего потока и пониженных (по сравнению с  $\gamma = 1.4$ ) показателях адиабаты газа. При наличии высокотемпературных эффектов не исключено образование ОТК в потоках не только многоатомных, но и двухатомных газов и их смесей. Действительно, результаты работы [76] свидетельствуют о весьма высокой температуре течения за главным скачком ОТК (по сравнению с температурой за падающим и отраженным скачками). Вместе с тем, вопрос об устойчивости ОТК, однозначности решений для них и условиях их реализации требует дополнительного тщательного исследования. В частности, условия существования и однозначности решения для тройных конфигураций и некоторых других ударно-волновых структур рассматриваются в § 2.3 данной диссертационной работы.

#### 1.4. Область квазиодномерного течения

Неоднократно показано [40, 52-58, 62], что поток за главным скачком маховского отражения (например, за скачком  $j_3$  на рис. 1.3,в) в сопловых, струйных и канальных течениях с удовлетворительной точностью описывается

моделью квазиодномерного течения (КОТ). Условие постоянства массового расхода газа  $Q$  через произвольное поперечное сечение  $F$  такого течения

$$Q = \rho u F = \text{const}$$

вместе с изоэнтропическими функциями [94] приводят к уравнению, связывающему ширину  $y(x)$  канала и число Маха  $M$  течения по нему:

$$q(M) \cdot y(x) = \text{const}, \quad (1.22)$$

или

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{y(x_1)}{y(x_2)} = \frac{q(M_2)}{q(M_1)},$$

или

$$y(x) = q(M) \cdot y_*,$$

где значения  $y(x)$ ,  $y_1 = y(x_1)$  и  $y_2 = y(x_2)$  соответствуют ширине канала с числом Маха течения, равным, соответственно,  $M$ ,  $M_1$  и  $M_2$ ,  $y_*$  – ширина «критического» сечения с числом Маха потока, равным единице, а

$$q(M) = M \cdot [1 + \varepsilon(M^2 - 1)]^{-1/2\varepsilon}$$

– безразмерная изоэнтропическая функция расхода. Изменение числа Маха вдоль канала определяет соответствующее изменение статического давления:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{p(x_1)}{p(x_2)} = \frac{\pi(M_1)}{\pi(M_2)}, \quad (1.23)$$

где

$$\pi(M) = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\gamma/(\gamma - 1)}$$

– изоэнтропическая функция давления.

В работах [62, 64, 65, 143, 145, 147] неоднократно показано, что применение квазиодномерной модели течения к каналу переменной ширины  $y(x)$  (например, к «виртуальному соплу Лавалья», образуемому за маховским скачком уплотнения) эквивалентно следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений для описания изменения параметров потока:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta, \quad (1.24)$$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{\mu(M)M^2 \operatorname{tg} \theta}{(1-\varepsilon)(M^2-1)y}, \quad (1.25)$$

непосредственно вытекающих из соотношений (1.22) и (1.23). Здесь  $\mu(M) = 1 + \varepsilon(M^2 - 1)$  – функция числа Маха  $M$  течения по каналу;  $\theta(x)$  – положительный или отрицательный угол наклона границы канала к плоскости симметрии течения. Если в качестве независимой переменной рассматривать число Маха (что имеет смысл, если интегрирование ведется вплоть до значения  $M = 1$ ), уравнения (1.24) и (1.25) принимают форму

$$\frac{dx}{dM} = \frac{(1-\varepsilon)(M^2-1)y}{\mu(M)M^2 \operatorname{tg} \theta}, \quad (1.26)$$

$$\frac{dy}{dM} = \frac{(1-\varepsilon)(M^2-1)y}{\mu(M)M^2}. \quad (1.27)$$

При этом, как следует из (1.23-1.25), основная неравномерность  $N_1 = \partial \ln p / \partial s$  (неизобаричность течения вдоль границы области КОТ) описывается выражением

$$N_1 = \frac{\partial \ln p}{\partial s} = -\frac{\gamma M^3 \sin \theta}{(M^2 - 1)y}. \quad (1.28)$$

### 1.5. Волна Прандтля-Майера

При выполнении некоторых условий [94, 95] в плоском сверхзвуковом потоке совершенного газа образуется течение Прандтля-Майера (волна разрежения или сжатия) с прямолинейными акустическими характеристиками первого или второго семейства (рис. 1.4). Число Маха  $M_2$  на произвольной акустической характеристике такого течения, равно как и число Маха  $M_1$  за волной, связано с числом Маха  $M$  перед волной Прандтля-Майера и углом поворота потока на волне или ее соответствующей части:

$$\nu(M_2) = \nu(M) + \chi(\theta_2 - \theta), \quad (1.29)$$

или

$$v(M_1) = v(M) + \chi(\theta_1 - \theta) = v(M) - \chi\beta, \quad (1.30)$$

где  $v(M) = 1/\sqrt{\varepsilon} \arctg \sqrt{\varepsilon(M^2 - 1)} - \arctg \sqrt{M^2 - 1}$  – функция Прандтля-Майера,  $\theta$  – угол течения перед волной,  $\theta_1$  – за ней,  $\theta_2$  – на произвольной акустической характеристике с числом Маха  $M_2$ ,  $\chi = 1$  и  $\chi = -1$  для волн с прямолинейными акустическими характеристиками первого и второго семейства, соответственно;  $\beta$  – угол поворота потока на волне (в частности,  $\beta < 0$  на волне разрежения с прямолинейными акустическими характеристиками первого семейства, показанной на рис. 1.4).

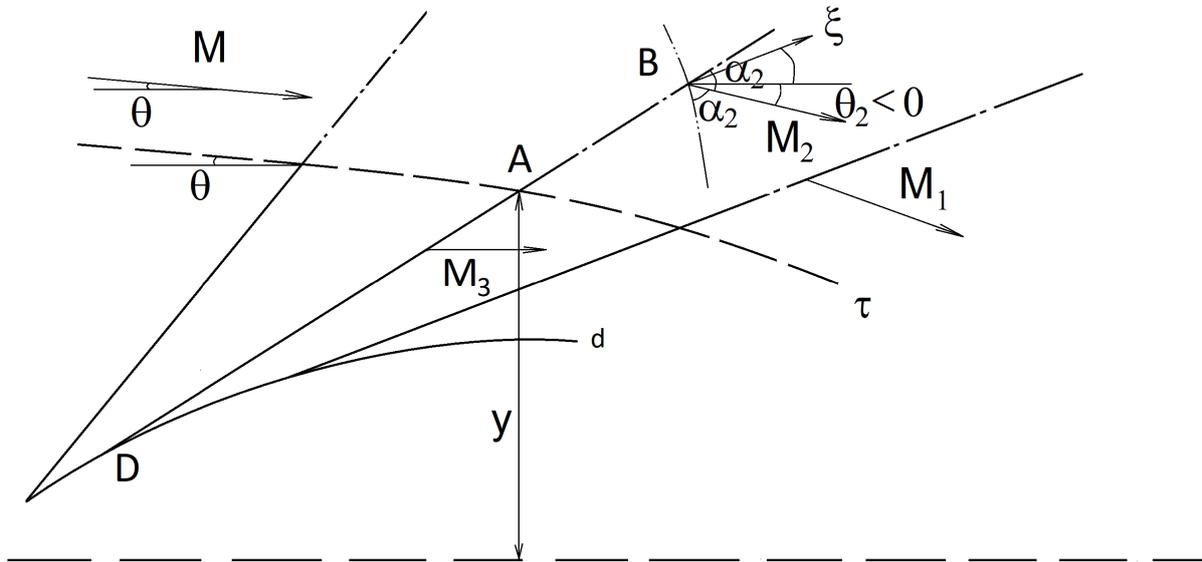


Рисунок 1.4 – Параметры течения в волне Прандтля-Майера, граничащей с областью КОТ

Статическое давление  $p_2$  на произвольной прямолинейной акустической характеристике, равно как и давление  $p_1$  за волной в целом, связано с давлением  $p$  перед волной соответствующей изоэнтропической функцией:

$$p_2/p = \pi(M_2)/\pi(M), \quad (1.31)$$

или

$$p_1/p = \pi(M_1)/\pi(M). \quad (1.32)$$

При этом произвольная прямолинейная характеристика располагается под углом  $\theta_2 + \chi\alpha_2 = \theta_2 + \chi\alpha(M_2)$  к горизонтали, а замыкающая (последняя,

хвостовая) характеристика – под углом  $\theta_1 + \chi\alpha(M_1)$ , где  $\alpha(M) = \arcsin(1/M)$  – угол Маха.

Неоднократно показано [1] и впоследствии использовано в работах [2, 56, 61-65], что градиенты течения (в частности, его неизобаричность  $N_1$  в волне Прандтля-Майера) обратно пропорциональны расстоянию  $r$  до центра волны (если волна центрированная) или до дискриминантной кривой  $d$  её прямолинейных характеристик (см. рис. 1.4):

$$|N_1| = \left| \frac{\partial \ln p}{\partial s} \right| = \frac{(1-\varepsilon)\sqrt{M_2^2-1}}{rM_2}. \quad (1.33)$$

Это значение неизобаричности отрицательно или положительно на волнах разрежения или сжатия, соответственно. Аналогичным соотношением описывается геометрическая кривизна  $N_2$  произвольной линии тока, пересекающей прямолинейную акустическую характеристику:

$$|N_2| = \left| \frac{\partial \theta_2}{\partial s} \right| = \frac{(1-\varepsilon)(M_2^2-1)}{rM_2^3}. \quad (1.34)$$

При этом основные неравномерности  $N_1$  и  $N_2$  в поле течения Прандтля-Майера связаны соотношением [1]:

$$N_1 - \chi\Gamma(M_2)N_2 = 0,$$

где  $\Gamma(M) = \gamma M^2 / \sqrt{M^2-1}$  – так называемый характеристический комплекс.

Во многих случаях маховского отражения [40, 52-58, 62, 143, 145, 147] поток за отраженным скачком (например, в области II на рис. 1.4) с удовлетворительной точностью описывается моделью течения в волне Прандтля-Майера, а поток за главным скачком (в области III) – моделью квазиодномерного течения. При этом параметры течения в областях II и III связаны условием равенства давлений на сторонах тангенциального разрыва  $\tau$ , описывающегося уравнением  $y(x)$ . Можно предположить также, что газ в области II имеет показатель адиабаты  $\gamma_2$ , а газ в области III – отличающийся от него показатель адиабаты  $\gamma_3$  (например, в силу реакций, изменивших

химический состав газа непосредственно за главным скачком). В этом случае при  $\chi=1$  форма  $y(x)$  тангенциального разрыва, угол  $\theta_2(x)$  его наклона и изменение чисел Маха  $M_2(x)$  и  $M_3(x)$  на его сторонах описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями [147], вытекающими из (1.22), (1.23), (1.29) и (1.31):

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta_2, \quad (1.35)$$

$$\frac{d\theta_2}{dx} = -\frac{\gamma_3 M_3^2 \sqrt{M_2^2 - 1} \operatorname{tg} \theta_2}{\gamma_2 M_2^2 (M_3^2 - 1) y}, \quad (1.36)$$

$$\frac{dM_2}{dx} = \frac{\gamma_3 M_3^2 [1 + \varepsilon_2 (M_2^2 - 1)] \operatorname{tg} \theta_2}{(1 + \varepsilon_2) M_2 (M_3^2 - 1) y}, \quad (1.37)$$

$$\frac{dM_3}{dx} = \frac{M_3^2 [1 + \varepsilon_3 (M_3^2 - 1)] \operatorname{tg} \theta_2}{(1 - \varepsilon_3) (M_3^2 - 1) y}. \quad (1.38)$$

(при этом уравнения (1.35) и (1.38) соответствуют ранее полученным соотношениям (1.24) и (1.25) для области квазиодномерного течения).

Если рассматривать в качестве независимой переменной число Маха  $M_3$  снизу от тангенциального разрыва, уравнения (1.35-1.38) имеют вид

$$\frac{dx}{dM_3} = \frac{(1 - \varepsilon_3) (M_3^2 - 1) y}{M_3^2 [1 + \varepsilon_3 (M_3^2 - 1)] \operatorname{tg} \theta_2}, \quad (1.39)$$

$$\frac{dy}{dM_3} = \frac{(1 - \varepsilon_3) (M_3^2 - 1) y}{M_3^2 [1 + \varepsilon_3 (M_3^2 - 1)]}, \quad (1.40)$$

$$\frac{d\theta_2}{dM_3} = -\frac{(1 + \varepsilon_3) M_3 \sqrt{M_2^2 - 1}}{\gamma M_2^2 [1 + \varepsilon_3 (M_3^2 - 1)]}, \quad (1.41)$$

$$\frac{dM_2}{dM_3} = \frac{(1 + \varepsilon_3) M_3 [1 + \varepsilon (M_2^2 - 1)]}{(1 + \varepsilon) M_2 [1 + \varepsilon_3 (M_3^2 - 1)]}. \quad (1.42)$$

(при этом уравнения (1.39) и (1.40) повторяют соотношения (1.26) и (1.27), соответственно).

Условие  $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma$  равенства показателей адиабаты газа на сторонах тангенциального разрыва упрощает систему (1.35-1.38), приводя её к виду [56, 62, 64, 65, 143, 145]

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta_2, \quad (1.43)$$

$$\frac{d\theta_2}{dx} = -\frac{M_3^2 \sqrt{M_2^2 - 1} \operatorname{tg} \theta_2}{M_2^2 (M_3^2 - 1) y}, \quad (1.44)$$

$$\frac{dM_2}{dx} = \frac{M_3^2 [1 + \varepsilon (M_2^2 - 1)] \operatorname{tg} \theta_2}{(1 - \varepsilon) M_2 (M_3^2 - 1) y}, \quad (1.45)$$

$$\frac{dM_3}{dx} = \frac{[1 + \varepsilon (M_3^2 - 1)] M_3^2 \operatorname{tg} \theta_2}{(1 - \varepsilon) (M_3^2 - 1) y}, \quad (1.46)$$

а систему (1.39-1.42) – к форме

$$\frac{dx}{dM_3} = \frac{(1 - \varepsilon) (M_3^2 - 1) y}{M_3^2 [1 + \varepsilon (M_3^2 - 1)] \operatorname{tg} \theta_2}, \quad (1.47)$$

$$\frac{dy}{dM_3} = \frac{(1 - \varepsilon) (M_3^2 - 1) y}{M_3^2 [1 + \varepsilon (M_3^2 - 1)]}, \quad (1.48)$$

$$\frac{d\theta_2}{dM_3} = -\frac{(1 - \varepsilon) M_3 \sqrt{M_2^2 - 1}}{M_2^2 [1 + \varepsilon (M_3^2 - 1)]}, \quad (1.49)$$

$$\frac{dM_2}{dM_3} = \frac{M_3 [1 + \varepsilon (M_2^2 - 1)]}{M_2 [1 + \varepsilon (M_3^2 - 1)]}. \quad (1.50)$$

Соотношения (1.34) и (1.36) определяют расстояние  $r_A$  от точки  $A$  на тангенциальном разрыве до соответствующей точки  $D$  на дискриминантной кривой:

$$r_A = \frac{(1 + \varepsilon_2) \sqrt{M_2^2 - 1} (M_3^2 - 1) y_A}{\gamma_3 M_2 M_3^2 \sin \theta_2}, \quad (1.51)$$

так что

$$x_D = x_A - r_A \cos(\alpha_2 + \theta_2), \quad (1.52)$$

$$y_D = y_A - r_A \sin(\alpha_2 + \theta_2). \quad (1.53)$$

Соотношения (1.34), (1.51-1.53) позволяют определить неравномерность  $N_{2B}$  течения Прандтля-Майера в произвольной точке  $B$  с координатами  $(x_B, y_B = y_A + (x_B - x_A)\text{tg}(\alpha_2 + \theta_2))$  на прямолинейной характеристике  $AB$  с числом Маха  $M_2$ :

$$N_{2B} = \left( \frac{\partial \theta_2}{\partial s} \right)_B = \frac{(1 - \varepsilon)(M_2^2 - 1)}{r_B M_2^3} = \frac{(1 - \varepsilon)(M_2^2 - 1)}{r_A M_2^3} \cdot \frac{r_A}{r_B} = \frac{y_A - y_D}{y_B - y_D} \cdot N_{2A}, \quad (1.54)$$

где

$$N_{2A} = - \frac{M_3^2 \sqrt{M_2^2 - 1} \sin \theta_2}{M_2^2 (M_3^2 - 1) y_A}. \quad (1.55)$$

Благодаря (1.54) и (1.55), определяются производные от угла течения  $\theta_2$  в точке  $B$  по произвольному направлению  $\xi$  к горизонтали:

$$\left( \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} \right)_B = \frac{\sin(\alpha_2 + \theta_2 - \xi)}{\sin(\alpha_2 + \theta_2)} N_{2B}, \quad (1.56)$$

и, в частности, по направлению  $(\xi = \theta_2 - \alpha_2)$  падения криволинейной акустической характеристики:

$$\frac{d\theta_2}{d\xi} = \frac{\sin 2\alpha_2}{\sin(\alpha_2 + \theta_2)} N_{2B} = \frac{2\sqrt{M_2^2 - 1}}{M_2^2 \cdot \sin(\alpha_2 + \theta_2)} N_{2B}. \quad (1.57)$$

Условие (1.29), вместе с (1.56) и (1.57), позволяет определить изменение числа Маха течения  $M_2$  по произвольному направлению  $\xi$ :

$$\left( \frac{\partial M_2}{\partial \xi} \right)_B = - \frac{M [1 + \varepsilon_2 (M_2^2 - 1)]}{(1 - \varepsilon_2) \sqrt{M_2^2 - 1}} \cdot \left( \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} \right)_B, \quad (1.58)$$

в частности, если  $\xi$  – направление падения криволинейной характеристики:

$$\frac{dM_2}{d\xi} = - \frac{M_2 [1 + \varepsilon_2 (M_2^2 - 1)]}{(1 - \varepsilon_2) \sqrt{M_2^2 - 1}} \cdot \frac{d\theta_2}{d\xi}. \quad (1.59)$$

Соотношения (1.39-1.42) или (1.47-1.50) позволяют, вместе с изменением значений  $\theta_2$  и  $M_2$  по произвольному направлению в волне Прандтля-Майера, «сопряженной» с областью квазиодномерного течения, установить изменение

числа Маха  $M_3$  с другой стороны разрыва  $\tau$  и форму  $y(x)$  соответствующей части этого тангенциального разрыва. Благодаря этому поле течения в «сопряжённой» волне оказывается полностью определенным.

При равенстве показателей адиабаты газа на сторонах тангенциального разрыва ( $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma$ ) соотношения (1.51-1.59) несколько упрощаются.

### **Выводы по главе 1**

Основные понятия и соотношения, приведенные в § 1.1-1.5, предоставляют необходимый понятийный и математический аппарат для аналитического исследования ударно-волновой структуры течений газа с маховским отражением, в том числе при наличии импульсного энерговыделения и изменении химического состава газа на отдельных скачках.

## Глава 2. Теоретический анализ ударно-волновых систем и структур в потоках газа с высокой сверхзвуковой скоростью

### 2.1. Экстремальное регулярное отражение косых скачков уплотнения и бегущих ударных волн

#### *2.1.1. Схема течения с регулярным отражением скачка уплотнения*

Простейшая ударно-волновая структура (совокупность газодинамических разрывов, имеющих общую точку) образуется при регулярном отражении косога скачка уплотнения или бегущей ударной волны в сверхзвуковом потоке совершенного газа. В работе [148] аналитически определены условия экстремумов статического давления и температуры газа за точкой отражения скачка заданной интенсивности в зависимости от числа Маха набегающего потока. Полученные результаты применены к решению эквивалентной задачи об отражении бегущей ударной волны заданной интенсивности от наклонной преграды. Показано немонотонное изменение тепловой и механической нагрузки на преграду в зависимости от угла ее наклона, аналитически определены углы наклона, соответствующие экстремумам давления за точкой отражения ударной волны.

Регулярное отражение скачков уплотнения и бегущих ударных волн от твердой поверхности или плоскости симметрии газового течения известно, начиная с XIX века [4-7]. Аналитическое решение [96] для параметров отраженного скачка или волны графически представимо на плоскости ударных поляр [97, 98]. Хорошо изучены условия существования регулярного отражения и критерии перехода к нерегулярному (маховскому) как в установившихся, так и в нестационарных течениях [8, 15, 18, 44]. Если значение  $\gamma$  показателя адиабаты газа в установившемся течении известно и фиксировано, то свойства отраженного скачка уплотнения являются [1] функциями числа Маха  $M$  потока перед падающим скачком (рис. 2.1,а) и одного из параметров этого скачка (например, интенсивности  $J_1$  – отношения статических давлений на его

сторонах или амплитуды  $\Delta p_1$  – разности этих давлений, особенно важной в задачах отражения взрывной ударной волны [19, 44, 99, 100] с обращением движения, преобразующим ее передний фронт в неподвижный скачок уплотнения).

Зависимости, определяющие интенсивность отраженного скачка  $J_2(M, J_1)$  или его амплитуду  $\Delta p_2(M, \Delta p_1)$ , монотонны относительно  $J_1$  (или величины  $\Delta p_1$ ): при увеличении интенсивности  $J_1$  (амплитуды  $\Delta p_1$ ) падающего возмущения увеличивается интенсивность (амплитуда) отраженного скачка. В работе [148] аналитически показано, что параметры отраженного скачка уплотнения являются (при фиксированных значениях  $J_1$  или  $\Delta p_1$ ) немонотонными функциями числа Маха  $M$  набегающего потока; определены условия возникновения экстремумов давления за отраженным скачком.

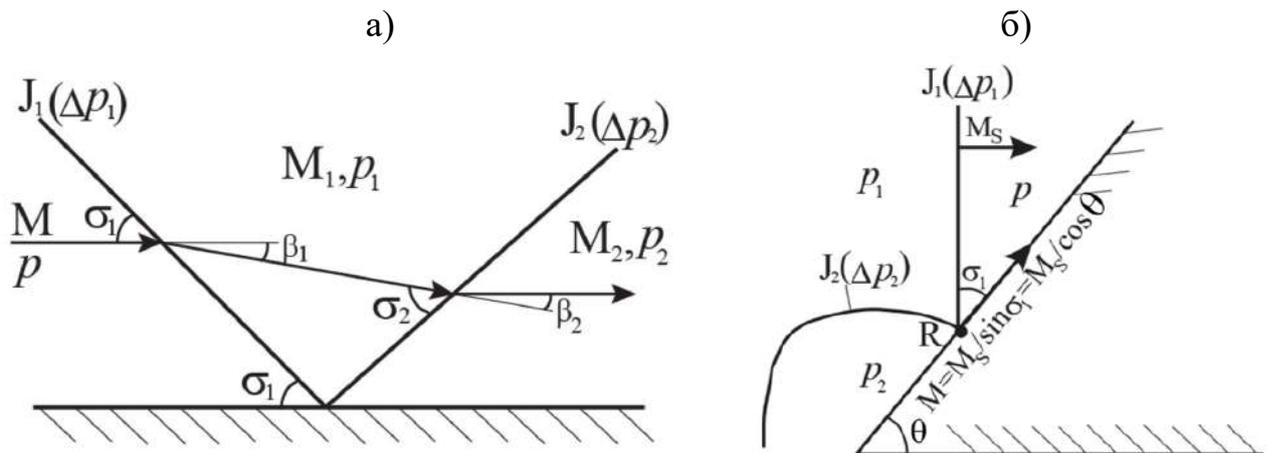


Рисунок 2.1 – Регулярное отражение косога скачка уплотнения (а) и механически эквивалентный случай отражения бегущей ударной волны от наклонной преграды (б)

Практическая ценность полученных в [148] аналитических решений определяется их использованием в эквивалентных задачах о косом отражении бегущих ударных (в частности, взрывных) волн (рис. 2.1,б). Давление и температура газа за точкой регулярного отражения косога скачка уплотнения с углом наклона  $\sigma_1$  (рис. 2.1,а) равны давлению и температуре за точкой отражения бегущей ударной волны той же интенсивности (амплитуды) от клина, расположенного под углом  $\theta = \pi/2 - \sigma_1$  к направлению ее распространения (рис. 2.1,б). Изменение числа Маха потока  $M$  в задаче

о стационарном отражении скачка соответствует изменению угла  $\theta$  раствора клина в задаче о нестационарном отражении бегущей волны той же интенсивности. Из немонотонного изменения давления и температуры за отраженным скачком уплотнения следует немонотонная зависимость механической и тепловой нагрузки за отраженной ударной волной от угла наклона преграды.

Далее, в первую очередь, рассматривается регулярное отражение скачка уплотнения (рис. 2.1,а), падающего на твердую поверхность или плоскость симметрии течения в сверхзвуковом потоке невязкого совершенного газа. Параметры набегающего потока (число Маха  $M$ , давление  $p$ , показатель адиабаты газа  $\gamma$ ) и угол  $\sigma_1$  падения скачка определяют его интенсивность (1.1):

$$J_1 = p_1/p = (1 + \varepsilon)M^2 \sin^2 \sigma_1 - \varepsilon,$$

амплитуду (1.2):

$$\Delta p_1 = p_1 - p = p \cdot (J_1 - 1)$$

и угол  $\beta_1$  поворота потока на его поверхности (1.4):

$$|\beta_1| = \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{\frac{(1 + \varepsilon)M^2 - \varepsilon - J_1}{J_1 + \varepsilon}} \frac{(1 - \varepsilon)(J_1 - 1)}{(1 + \varepsilon)M^2 - (1 - \varepsilon)(J_1 - 1)} \right]. \quad (2.1)$$

Число Маха  $M_1$  течения за скачком определяется соотношением (1.6) в виде

$$M_1 = \sqrt{\frac{(J_1 + \varepsilon)M^2 - (1 - \varepsilon)(J_1^2 - 1)}{J_1(1 + \varepsilon J_1)}}, \quad (2.2)$$

а угол  $\beta_2$  поворота потока на отраженном скачке зависит от его интенсивности и числа Маха  $M_1$  потока перед ним:

$$\beta_2 = \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{\frac{(1 + \varepsilon)M_1^2 - \varepsilon - J_2}{J_2 + \varepsilon}} \frac{(1 - \varepsilon)(J_2 - 1)}{(1 + \varepsilon)M_1^2 - (1 - \varepsilon)(J_2 - 1)} \right]. \quad (2.3)$$

Условие реализации регулярного отражения

$$\beta_1 + \beta_2 = 0 \quad (2.4)$$

приводит, с учетом соотношений (2.1-2.3), к следующему уравнению относительно интенсивности  $J_2 = p_2/p_1$  отраженного скачка:

$$\sum_{n=0}^3 C_n J_2^n = 0, \quad (2.5)$$

$$C_3 = [(1 + \varepsilon J_1) J_1 M]^2, \quad C_2 = -J_1(1 + \varepsilon J_1) \cdot x_2,$$

$$C_1 = (1 + \varepsilon)(J_1 + \varepsilon) \left( 1 + (1 + 2\varepsilon) J_1^2 \right) M^4 - x_1 M^2 + (1 - \varepsilon)(J_1 + \varepsilon)(J_1 + 1)(J_1 - 1)^3,$$

$$C_0 = -(1 + \varepsilon)(J_1 + \varepsilon) \left( (1 + 2\varepsilon) J_1 - \varepsilon \right) M^4 + x_0 M^2 - (1 - \varepsilon)(J_1 + \varepsilon)^2 (J_1 - 1)^2,$$

$$x_2 = (1 + \varepsilon)(J_1 + \varepsilon) M^4 + \left( \varepsilon(2 - \varepsilon) J_1^2 - \varepsilon(1 - 2\varepsilon) J_1 + 2(1 - \varepsilon^2) \right) M^2 - (1 - \varepsilon)(J_1 + \varepsilon)(J_1 - 1)^2,$$

$$x_1 = 2(1 + \varepsilon(1 - \varepsilon)) J_1^4 - 2(1 - 2\varepsilon^2) J_1^3 - \varepsilon(4 - \varepsilon - 2\varepsilon^2) J_1^2 + 2\varepsilon(1 - \varepsilon) J_1 - (1 - 2\varepsilon^2),$$

$$x_0 = 2(1 + \varepsilon - \varepsilon^2) J_1^3 - (2 - 6\varepsilon^2 + \varepsilon^3) J_1^2 - 2\varepsilon(1 - \varepsilon)(1 + 2\varepsilon) J_1 + \varepsilon(1 - 2\varepsilon^2),$$

впервые записанному в [97] относительно угла  $\sigma_2$  его наклона.

Тепловые нагрузки, воздействующие на преграду со стороны потоков за обоими скачками, характеризуются отношениями температур  $\Theta_1 = T_1/T$  и  $\Theta_2 = T_2/T_1$ . Здесь  $T$ ,  $T_1$  и  $T_2$  – температуры в невозмущенном потоке, за первым и вторым скачками. Согласно адиабате Ренкина-Гюгонио и уравнению состояния совершенного газа, отношение температур (1.8) на сторонах скачка уплотнения или ударной волны является монотонной функцией интенсивности:

$$\Theta_i = J_i(1 + \varepsilon J_i) / (J_i + \varepsilon), \quad i = 1, 2. \quad (2.6)$$

По этой причине температура газа за точкой отражения

$$T_2 = \Theta_1 \Theta_2 T = J_1 J_2 (1 + \varepsilon J_1) (1 + \varepsilon J_2) T / [(J_1 + \varepsilon)(J_2 + \varepsilon)],$$

также является монотонной функцией интенсивности отраженного возмущения. В результате, если интенсивность падающего скачка или волны фиксирована, максимумы и минимумы температуры за отраженным возмущением совпадают с максимумами и минимумами давления за ним.

Алгебраическое уравнение (2.5) имеет не более двух вещественных корней, принадлежащих диапазону  $[1; J_m(M_1))$ , где  $J_m(M_1)$  – интенсивность

прямого скачка уплотнения в потоке с числом Маха  $M_1$ . Эти решения существуют, если интенсивность падающего скачка удовлетворяет условию

$$1 \leq J_1 \leq J_d(M), \quad (2.7)$$

где интенсивность  $J_d(M)$  соответствует так называемому критерию максимального угла отражения (“detachment criterion” [9-11]) и определяется из уравнения

$$\sum_{n=0}^5 D_n J_d^n = 0, \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} D_5 &= (1 - \varepsilon)^2, \quad D_4 = -(1 - \varepsilon) \cdot \left[ (3 + 4\varepsilon - \varepsilon^2)M^2 + (4 - 5\varepsilon + \varepsilon^2) \right], \\ D_3 &= (3 + 4\varepsilon + 2\varepsilon^2)M^4 + 4(1 - \varepsilon)(1 + 2\varepsilon - \varepsilon^2)M^2 + 2(3 - 2\varepsilon)(1 - \varepsilon)^2, \\ D_2 &= -(1 + \varepsilon)M^6 + \varepsilon(1 + 2\varepsilon^2)M^4 - 4\varepsilon(1 - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon)M^2 - 2(2 - 3\varepsilon)(1 - \varepsilon)^2, \\ D_1 &= -\left[ 1 + \varepsilon(M^2 - 1) \right] \cdot \left[ 2(1 + \varepsilon)M^4 + \varepsilon(1 + 4\varepsilon)M^2 - (1 - 5\varepsilon + 4\varepsilon^2) \right], \\ D_0 &= -\left[ (1 + \varepsilon)M^2 - \varepsilon \right] \cdot \left[ 1 + \varepsilon(M^2 - 1) \right]^2 \end{aligned}$$

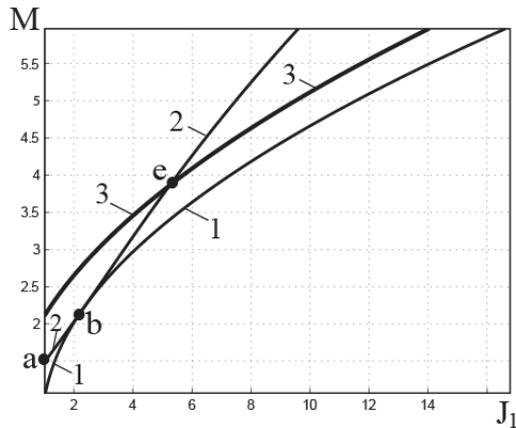
(кривая 1 на рис. 2.2,а; здесь и далее все примеры расчета соответствуют показателю адиабаты газа  $\gamma = 1.4$ ).

Практика работы газодинамических устройств [20], а также анализ регулярного отражения на устойчивость к малым возмущениям [41, 45], показывают, что при регулярном отражении скачков уплотнения и ударных волн реализуется меньший из двух упомянутых корней уравнения (2.5), соответствующий так называемой слабой ветви поляры отраженного скачка.

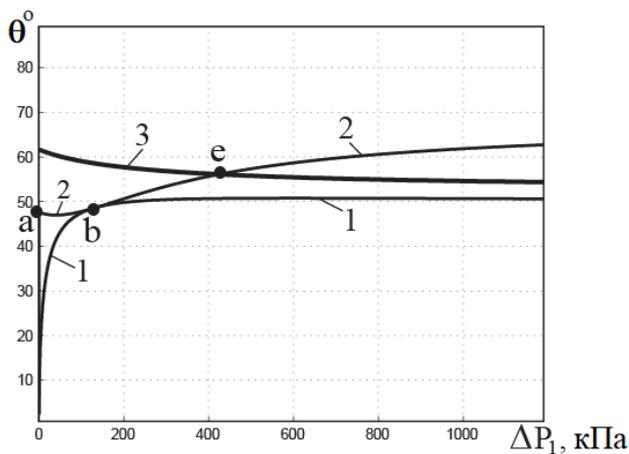
При умеренных и больших числах Маха ( $M > M_a$ , где  $M_a = \sqrt{(2 - \varepsilon)/(1 - \varepsilon)} = 1.483$ ) используется также критерий фон Неймана (он же – «критерий механического равновесия») смены вида отражения косога скачка (ударной волны). Интенсивность  $J_N(M)$ , соответствующая этому критерию, определяется уравнением (1.20) (кривая 2 на рис. 2,а). В области параметров падающего скачка, расположенной между кривыми 1 и 2 («области

неоднозначности решения», dual solution domain), существуют решения и для регулярного, и для маховского отражения.

а)



б)



в)

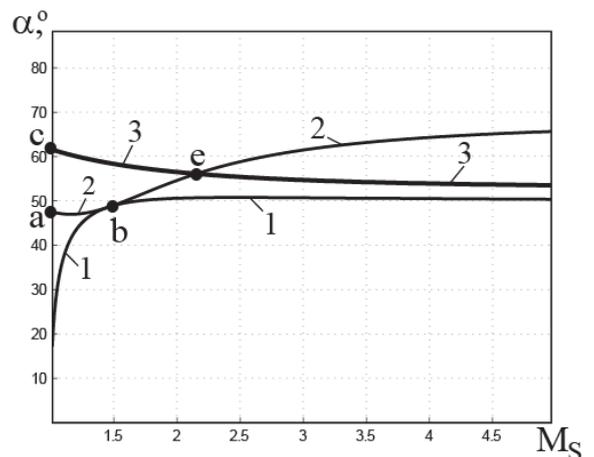


Рисунок 2.2 – Условия реализуемости регулярного отражения, экстремумов механической и тепловой нагрузки за отраженными скачками и волнами: кривые 1 – нижние границы области регулярного отражения согласно критерию «максимального угла поворота потока», кривые 2 соответствуют смене вида отражения согласно критерию фон Неймана («механического равновесия»), кривые 3 – локальным минимумам амплитуды отраженного скачка (а) или бегущей ударной волны (б, в), давления и температуры за ними

Многочисленные эксперименты [11, 21] показывают, что «критерий механического равновесия» (1.20) предпочтителен при анализе установившихся течений, особенно в области неоднозначности решения, расположенной выше точки  $b$  касания кривых 1 и 2, где число Маха  $M_b = 2.202$  определяется из уравнения [79, 101]

$$\sum_{n=0}^4 F_n M_b^{2n} = 0,$$

$$F_4 = (1 - \varepsilon)(2 - 4\varepsilon + 2\varepsilon^3 - \varepsilon^4), F_3 = -10 + 20\varepsilon - 10\varepsilon^2 - 10\varepsilon^3 + 12\varepsilon^4 - 4\varepsilon^5,$$

$$F_2 = 12 - 24\varepsilon + 10\varepsilon^2 + 16\varepsilon^3 - 18\varepsilon^4 + 6\varepsilon^5, F_1 = -2(1 + \varepsilon)(3 - 4\varepsilon + 2\varepsilon^2)(1 - \varepsilon)^2,$$

$$F_0 = (1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon)^4.$$

Однако решения, полученные для установившихся течений, в дальнейшем (после соответствующего обращения движения [102]) применяются для анализа нестационарного отражения ударных волн от элементов конструкций, в котором может быть использован другой критерий перехода. Поэтому далее рассматривается весь диапазон (2.6) теоретически возможных параметров падающих скачков.

### 2.1.2. Схема эквивалентного нестационарного течения с регулярным отражением ударной волны

Регулярному отражению скачка уплотнения, падающему на твёрдую поверхность (плоскость симметрии) под углом  $\sigma_1$  в потоке с числом Маха  $M$  (рис. 2.1,а) эквивалентно, после обращения движения, отражение ударной волны той же интенсивности

$$J_1 = p_1/p = (1 + \varepsilon)M^2 \sin^2 \sigma_1 - \varepsilon = (1 + \varepsilon)M^2 \cos^2 \theta - \varepsilon, \quad (2.9)$$

распространяющейся по неподвижной среде и отражающейся от клина под углом  $\theta = \pi/2 - \sigma_1$  (рис. 2.1,б). Точка  $R$  отражения ударной волны движется вдоль поверхности с тем числом Маха  $M$ . Данный метод обращения движения с отражением скачков уплотнения и бегущих ударных волн был использован, в частности, в [102] для анализа маховского отражения. Число Маха, характеризующее нормальную (по отношению к собственному фронту) скорость распространения падающей волны на рис. 2.1,б, составляет  $M_S = M \sin \sigma_1 = M \cos \theta = \sqrt{(J_1 + \varepsilon)/(1 + \varepsilon)}$ , так что  $J_1 = (1 + \varepsilon)M_S^2 - \varepsilon$ . При этом интенсивность  $J_2$  отраженной волны и статическое давление за ней таковы же, как и в эквивалентном случае стационарного отражения скачка.

В задачах нестационарного отражения ударных (в особенности – взрывных) волн особую важность имеют перепады давления на этих волнах (их амплитуды) и значения избыточного давления за точкой отражения, характеризующие механическую нагрузку на преграду. Амплитуда падающей ударной волны составляет

$$\Delta p_1 = p_1 - p = p \cdot (J_1 - 1), \quad (2.10)$$

амплитуда отраженной волны

$$\Delta p_2 = p_2 - p_1 = p J_1 \cdot (J_2 - 1),$$

а избыточное давление за точкой отражения

$$\Delta p_\Sigma = p_2 - p = p \cdot (J_1 J_2 - 1).$$

При фиксированных значениях давления  $p$  в невозмущенной среде и интенсивности  $J_1$  (амплитуды  $\Delta p_1$ ) амплитуда  $\Delta p_2$  отраженной волны и избыточное давление  $\Delta p_\Sigma$  за ней линейно зависят от ее интенсивности  $J_2$ , которая, в свою очередь, зависит от угла клина  $\theta$  при нестационарном отражении или от числа Маха  $M$  в эквивалентном стационарном случае. Немонотонная зависимость  $J_2(M)$  при регулярном отражении стационарного скачка фиксированной интенсивности означает, что избыточное давление  $\Delta p_\Sigma$  и температура  $T_2$  за точкой отражения бегущей ударной волны с заданной амплитудой немонотонно зависят от угла наклона отражающей поверхности. Данный факт не является внешне очевидным (скорее, наоборот) и требует аналитического доказательства.

Увеличение давления на преграду за отраженной ударной волной может быть, кроме того, охарактеризовано коэффициентом давления

$$K_2 = \Delta p_2 / \Delta p_1 = (J_2 - 1) / (J_1 - 1) \quad (2.11)$$

или коэффициентом усиления волны

$$K_\Sigma = \Delta p_\Sigma / \Delta p_1 = (J_1 J_2 - 1) / (J_1 - 1). \quad (2.12)$$

Эти коэффициенты минимальны ( $K_2 = 0$ ,  $K_\Sigma = 1$ ), если волна скользит параллельно поверхности (рис. 2.3,а), и отраженная волна отсутствует (вырождается в слабое возмущение,  $J_2 = 1$ ).

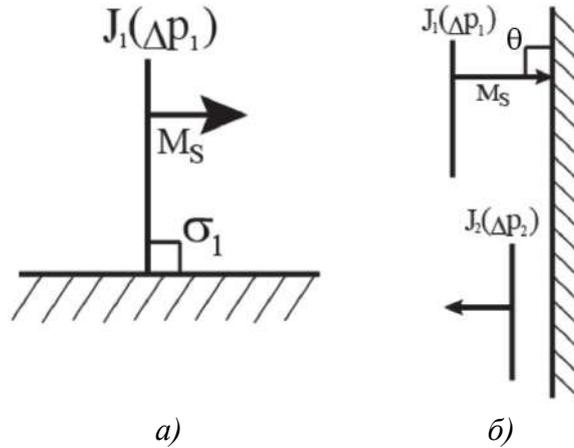


Рисунок 2.3 – Предельные случаи взаимодействия бегущей ударной волны с поверхностью: а) параллельное скольжение ( $\sigma_1 = 90^\circ$ ,  $\theta = 0$ ); б) нормальное отражение ( $\sigma_1 = 0$ ,  $\theta = 90^\circ$ ): движение падающей (сверху) и отраженной (снизу) волн

При нормальном ( $\theta = 90^\circ$ ,  $\sigma_1 = 0$ ) отражении ударной волны с амплитудой  $\Delta p_1$  (рис. 2.3,б) амплитуда  $\Delta p_2$  отраженной волны рассчитывается по формуле Измайлова-Крюссара [99, 103]

$$\Delta p_2 = \Delta p_1 \cdot [1 + \Delta p_1 / (\varepsilon \Delta p_1 + (1 + \varepsilon) p_0)],$$

откуда коэффициенты давления и усиления отраженной волны

$$K_2 = 1 + \Delta p_1 / (\varepsilon \Delta p_1 + (1 + \varepsilon) p_0) = 1 + (J_1 - 1) / (1 + \varepsilon J_1), \quad (2.13)$$

$$K_\Sigma = 2 + \Delta p_1 / (\varepsilon \Delta p_1 + (1 + \varepsilon) p_0) = 2 + (J_1 - 1) / (1 + \varepsilon J_1). \quad (2.14)$$

После обратного перехода к установившемуся течению нормальное отражение ударной волны эквивалентно отражению скачка уплотнения той же интенсивности  $J_1$  в потоке с числом Маха  $M \rightarrow \infty$ . Таким образом, анализ отражения скачков уплотнения в потоках совершенного газа с большими числами Маха без рассмотрения дополнительных («гиперзвуковых») физических эффектов приобретает очевидный практический смысл. Это явление механически эквивалентно отражению ударных волн вполне умеренной интенсивности от преград, близких к нормальным. Таково, например, отражение фронта ударной волны при приповерхностном взрыве,

когда точка регулярного отражения распространяется вдоль поверхности с очень большой (в первый момент нормального отражения при касании поверхности – с бесконечно большой) скоростью (рис. 2.4, [104]).

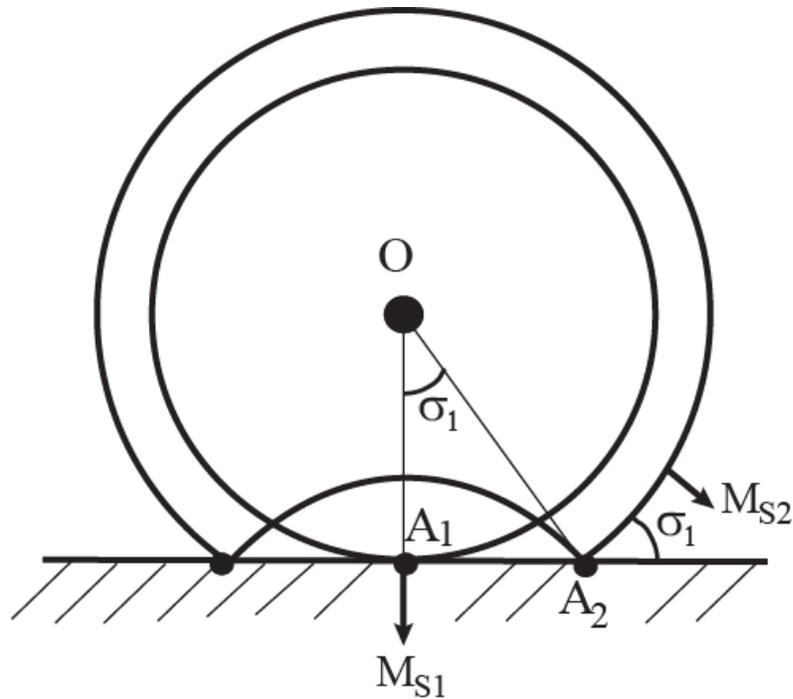


Рисунок 2.4 – Начальные стадии отражения фронта ударной волны при приповерхностном взрыве. Скорость движения точки отражения вдоль поверхности бесконечно велика в начальный момент нормального отражения (точка  $A_1$ ) и соответствует числу Маха  $M = M_s / \sin \sigma_1$  при регулярном отражении (точка  $A_2$ ). При этом число Маха  $M_s$  ( $M_{s1}$ ,  $M_{s2}$ ) движения фронта волны, как правило, переменна и уменьшается по мере удаления от источника взрыва  $O$

Аналогично скачкам давления (амплитудам ударных волн), скачки температуры на поверхностях падающих и отраженных возмущений могут быть определены следующим образом:

$$\Delta T_1 = T_1 - T = T \cdot (\Theta_1 - 1), \Delta T_2 = T_2 - T_1 = T \cdot \Theta_1 (\Theta_2 - 1), \Delta T_\Sigma = T_2 - T = T \cdot (\Theta_1 \Theta_2 - 1).$$

При этом отношения  $\Theta_i$  ( $i=1,2$ ) статических температур выражаются через интенсивности соответствующих волн и скачков с помощью соотношений (2.6).

Аналогично отношению  $K_2$  амплитуд отраженной и падающей волн (2.11) и коэффициенту  $K_\Sigma$  роста давления (2.12), далее вводятся отношение  $H_2$  скачков температуры и коэффициент  $H_\Sigma$  увеличения тепловых нагрузок:

$$H_2 = \Delta T_2 / \Delta T_1 = \Theta_1 \cdot (\Theta_2 - 1) / (\Theta_1 - 1), \quad (2.15)$$

$$H_{\Sigma} = \Delta T_{\Sigma} / \Delta T_1 = (\Theta_1 \Theta_2 - 1) / (\Theta_1 - 1). \quad (2.16)$$

2.1.3. Аналитические результаты, определяющие экстремальное отражение скачков уплотнения и бегущих ударных волн

Равенство нулю частной производной ( $\partial J_2 / \partial M = 0$ ), примененное к решению (2.5), определяет условия экстремальной интенсивности отраженного возмущения. Эти условия записываются в форме кубического уравнения относительно интенсивности падающего скачка:

$$\sum_{n=0}^3 G_n J_1^n = 0, \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} G_3 &= (1 - \varepsilon)^2, \quad G_2 = -3(1 - \varepsilon) \cdot [(1 + \varepsilon)M^2 + 1 - \varepsilon], \\ G_1 &= (1 - \varepsilon) \cdot [(1 + \varepsilon)(3 + 2\varepsilon)M^4 + 2(1 + \varepsilon)(1 - 2\varepsilon)M^2 + (1 - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon)], \\ G_0 &= -[(1 + \varepsilon)M^4 + 1 - \varepsilon] \cdot [(1 + \varepsilon)(1 - 2\varepsilon)M^2 - (1 - \varepsilon)(1 + 2\varepsilon)], \end{aligned}$$

или аналогичного уравнения, записанного относительно числа Маха потока:

$$\sum_{n=0}^3 H_n M^{2n} = 0, \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} H_3 &= (1 - 2\varepsilon)(1 + \varepsilon)^2, \quad H_2 = -(1 - \varepsilon^2) \cdot [(3 + 2\varepsilon)J_1 + 1 + 2\varepsilon], \\ H_1 &= (1 - \varepsilon^2) \cdot [3J_1^2 - 2(1 - 2\varepsilon)J_1 + 1 - 2\varepsilon], \quad H_0 = -(1 - \varepsilon)^2 \cdot (J_1 - 1) \cdot (J_1^2 - 2J_1 - 1 - 2\varepsilon). \end{aligned}$$

Расчеты показывают, что регулярному отражению соответствуют решения уравнений (2.17) или (2.18), показанные на рис. 2.1,а кривой 3.

Эквивалентное отражение бегущей ударной волны уместно рассматривать на плоскости  $(\Delta p_1, \theta)$ , показанной на рис. 2.2,б. Амплитуда падающей волны связана с ее интенсивностью соотношением (2.11), а угол наклона преграды с числом Маха и интенсивностью – соотношением (2.10) при условии  $\theta = 90^\circ - \sigma_1$ . Здесь и далее для определенности принято, что ударная волна распространяется по невозмущенной среде с давлением  $p = 100$  кПа.

Решение для регулярного отражения падающей волны существует в диапазоне  $\theta \in [\theta_d, 90^\circ)$ , где  $\theta_d$  – угол раствора клина, соответствующий

критерию (2.7) максимального поворота потока (т.е. переходу к нерегулярному отражению). Этот предельный угол (2.8) показан кривой 1 на рис. 2.2,б. Угол, соответствующий критерию фон Неймана (1.20), показан там же кривой 2. Кривая 3 соответствует минимумам давления на преграду в зависимости от угла ее наклона при различных фиксированных амплитудах падающей волны.

Экстремумы параметров отраженной ударной волны показаны также на рис. 2,с в координатах  $(M_S, \theta)$ . Кривая 3 соответствует минимумам давления за точкой отражения ударной волны с определенным числом Маха  $M_S$  движения ее фронта. Она позволяет установить углы наклона элементов конструкций, доставляющие минимальные значения механических нагрузок при заданном числе Маха распространения ударной волны.

Углы наклона преграды, соответствующие минимумам давления за отраженной волной, в координатах  $(M_S, \theta)$  описываются уравнением

$$\sum_{n=0}^3 Z_n z^n = 0, \quad (2.19)$$

где

$$\begin{aligned} z &= \sin^2 \sigma_1 = \cos^2 \theta, \quad Z_3 = (1 - \varepsilon)^2 (M_S^2 - 1) \cdot [(1 + \varepsilon)M_S^4 - 2(1 + \varepsilon)M_S^2 - (1 - \varepsilon)], \\ Z_2 &= -(1 - \varepsilon)M_S^2 \cdot [3(1 + \varepsilon)M_S^4 - 2(1 + \varepsilon)M_S^2 + (1 - \varepsilon)], \\ Z_1 &= -(1 - \varepsilon) \cdot [(3 + 2\varepsilon)M_S^2 + 1 - 2\varepsilon], \quad Z_0 = (2\varepsilon - 1)M_S^6. \end{aligned}$$

Согласно (2.19), в предельном случае слабых ударных волн ( $M_S \rightarrow 1$ ) минимум давления за отраженной волной достигается при

$$z = (\sqrt{2 - 2\varepsilon} - 1) / \sqrt{2 - 2\varepsilon} = 0.225,$$

что соответствует  $\theta_c = \arcsin(2 - 2\varepsilon)^{-1/4} = \arcsin[(\gamma + 1)/4]^{1/4} = 61.656^\circ$  (точка  $c$  на кривой 3). При  $M_S = 2.175$  минимум давления соответствует критерию фон Неймана перехода от маховского отражения к регулярному (точка  $e$  пересечения кривых 2 и 3). Соответствующее значение ( $\theta_e = 56.105^\circ$ ) угла наклона преграды определяется соотношением

$$z_e = \cos^2 \theta_e = \frac{(1-\varepsilon)(3-\varepsilon)(1-2\varepsilon)^2 - \sqrt{3-20\varepsilon+49\varepsilon^2-52\varepsilon^3+20\varepsilon^4}}{(1-\varepsilon)(3-2\varepsilon)(1-5\varepsilon+2\varepsilon^2)} = 0.311.$$

В дальнейшем (при  $M_S > 2.175$ ) оптимальный (доставляющий минимум давления на преграду) угол раствора клина соответствует области неоднозначности вида отражения, расположенной между кривыми 1 и 2. При данных параметрах нестационарного взаимодействия ударной волны с наклонной преградой (в отличие от случая стационарного отражения скачка уплотнения), как правило, [17], реализуется именно регулярное отражение.

В предельном случае отражения сильных ударных волн ( $M_S \rightarrow \infty$ ) оптимальный угол наклона преграды определяется следующим уравнением асимптоты кривой 3:

$$(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)z^3 - 3(1-\varepsilon^2)z^2 + (1-\varepsilon)(3+2\varepsilon)z + 2\varepsilon - 1 = 0,$$

откуда  $z = 0.367$ ,  $\theta = 52.715^\circ$ . Кривая 3 лежит между горизонтальными асимптотами кривых 1 и 2, соответствующих различным критериям смены типа отражения сильных ударных волн. Горизонтальная асимптота кривой 1, соответствующей критерию максимального угла поворота на отраженном возмущении, определяется уравнением

$$(1-\varepsilon^2)z^3 - (1-\varepsilon^2)z^2 - (1+2\varepsilon)z + 1 = 0$$

( $z = 0.413$ ,  $\theta = 50.029^\circ$ ), а горизонтальная асимптота кривой 2, соответствующей критерию «механического равновесия» фон Неймана, – соотношением

$$z = \frac{1+\varepsilon-\varepsilon^2+\varepsilon^3 - \sqrt{1-2\varepsilon+3\varepsilon^2+4\varepsilon^3-2\varepsilon^5+\varepsilon^6}}{2(1-\varepsilon^2)} = 0.138.$$

( $\theta = 68.231^\circ$ ). Таким образом, угол наклона преграды, соответствующий минимуму механических и тепловых нагрузок, у сильных ударных волн смещается в сторону нижней границы области существования регулярного отражения.

### 2.1.4. Результаты вычислений и их обсуждение

На рис. 2.5,а показано изменение коэффициента (2.11) отражения ударных волн различной амплитуды (кривые 1-10) в зависимости от угла  $\theta$  наклона преграды. Диапазон изменения угла  $\theta$  простирается от кривой 11, соответствующей смене типа отражения согласно критерию (2.7-2.8), до величины  $\theta = 90^\circ$ , соответствующей нормальному отражению как предельному случаю регулярного. В последнем случае значения коэффициента отражения соответствуют соотношению Измайлова-Крюссара в форме (2.13).

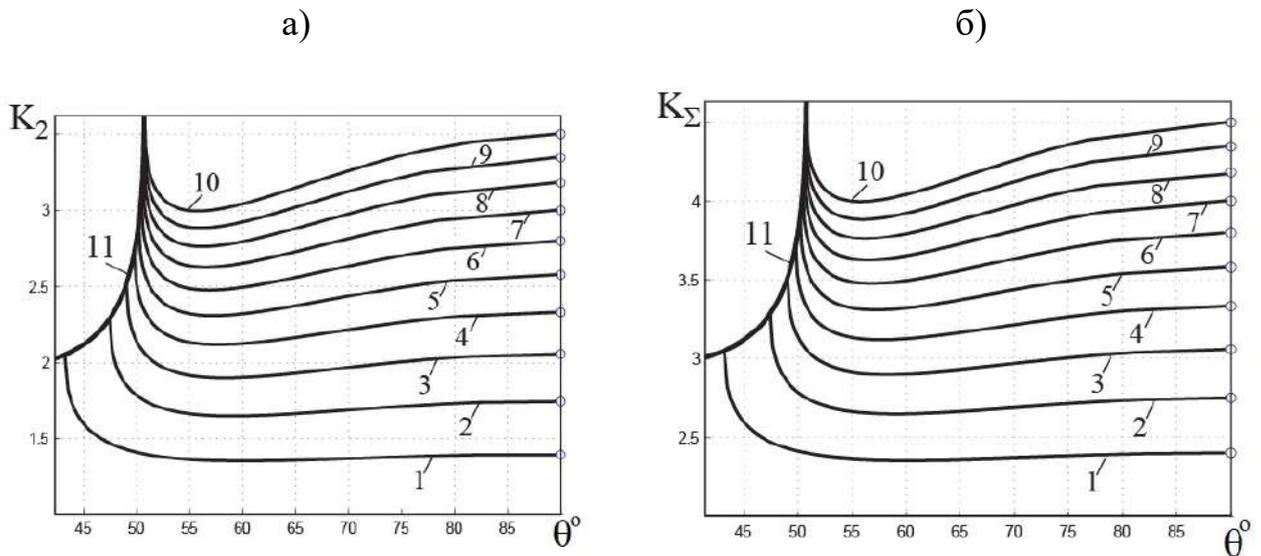


Рисунок 2.5 – Изменение коэффициентов отражения (а) и усиления (б) регулярно отраженной волны в зависимости от угла наклона преграды при различных амплитудах падающей волны:

$\Delta p_1 = 50$  кПа (кривые 1), 100 кПа (2), 150 кПа (3), 200 кПа (4), 250 кПа (5), 300 кПа (6), 350 кПа (7), 400 кПа (8), 450 кПа (9), 500 кПа (10). Кривые 11 ограничивают область существования регулярного отражения согласно критерию максимального угла поворота потока

Как видно из рис. 2.5,а, уменьшение давления на отраженной ударной волне при оптимальной постановке преграды может быть весьма существенным. При отражении слабых ударных волн амплитуда  $\Delta p_2$  при соответствующем выборе угла  $\theta$  почти на 50% меньше, чем на левой границе области существования регулярного отражения. При  $\Delta p_1 = 50$  кПа (амплитуда падающей волны, соответствующая нижнему порогу баротравмы согласно [100, 105]) увеличение угла клина с  $\theta = 43.2^\circ$  до  $\theta = 60.1^\circ$  приводит к уменьшению давления на отраженной волне с  $\Delta p_2 = 102.5$  кПа до  $\Delta p_2 = 67.7$  кПа, т.е. на

33.9% (кривая 1). Для более сильных падающих волн диапазон углов, внутри которого наблюдается снижение давления отраженной волны, постепенно сокращается. Уменьшается и относительное падение величины  $\Delta p_2$ , однако оно по-прежнему составляет заметную величину (17.4% при  $\Delta p_1 = 400$  кПа или 12-15% при  $\Delta p_1 = 700 - 4000$  кПа), которую необходимо учитывать при инженерных расчетах взрывостойких конструкций.

Согласно рис. 2.5,а (см. кривую 1), амплитуда отраженной волны в точке найденного минимума ненамного меньше, чем амплитуда нормально отраженной волны, описываемая формулой Измайлова-Крюссара (крайние правые точки на кривых 1-10). В упомянутом примере ( $\Delta p_1 = 50$  кПа, минимальное давление отраженной волны  $\Delta p_2 = 67.7$  кПа при  $\theta = 60.1^\circ$ ) нормальное отражение ( $\theta = 90^\circ$ ) приводит к образованию волны с амплитудой  $\Delta p_2 = 69.7$  кПа. При усилении падающей волны относительная разность между давлениями оптимально и нормально отраженных волн становится заметнее (кривые 2-10 на рис. 5,а) и составляет около 20-22% при  $\Delta p_1 > 1000$  кПа.

Изменение коэффициента (2.12) усиления падающей волны при тех же условиях показано на рис. 2.5,б. На правой границе расчётной области ( $\theta = 90^\circ$ ) коэффициенты усиления соответствуют соотношению Измайлова-Крюссара в форме (2.14). Максимальный эффект снижения коэффициента  $K_\Sigma$  на промежутке от левой границы расчетной области (кривой 11) до точки минимума составляет 30-32% и наблюдается при отражении слабых ударных волн ( $\Delta p_1 < 10$  кПа). При отражении достаточно сильных волн ( $\Delta p_1 > 1000$  кПа) эффект снижения нагрузки на преграду составляет около 10%. Давление на преграду при нормальном отражении больше, чем при ее оптимальной постановке: незначительно – для слабых ударных волн и примерно на 20% – для сильных волн ( $\Delta p_1 > 1000$  кПа).

Таким образом, в достаточно широкой области параметров задачи, примыкающей к границе области существования регулярного отражения, давление за отраженной волной падает при увеличении угла наклона преграды.

В частности, при  $\Delta p_1 = 100$  кПа (амплитуда падающей волны, соответствующая нижнему порогу летальных исходов согласно [100, 105]) амплитуда отраженной волны и избыточное давление за точкой отражения уменьшаются от  $\Delta p_2 = 228.8$  кПа ( $\Delta p_\Sigma = 328.8$  кПа) в точке локального максимума ( $\theta = 47.5^\circ$ ) до  $\Delta p_2 = 165.1$  кПа ( $\Delta p_\Sigma = 265.1$  кПа) при  $\theta = 59.1^\circ$ . При нормальном отражении такой волны ( $\theta = 90^\circ$ ) избыточные давления составляют  $\Delta p_2 = 174.0$  кПа и  $\Delta p_\Sigma = 274.0$  кПа.

Следует отметить, что значения давления за отраженной волной на левой границе рассматриваемой расчетной области при падении ударных волн малой и умеренной интенсивности оказываются выше, чем на правой границе (т.е. при нормальном отражении).

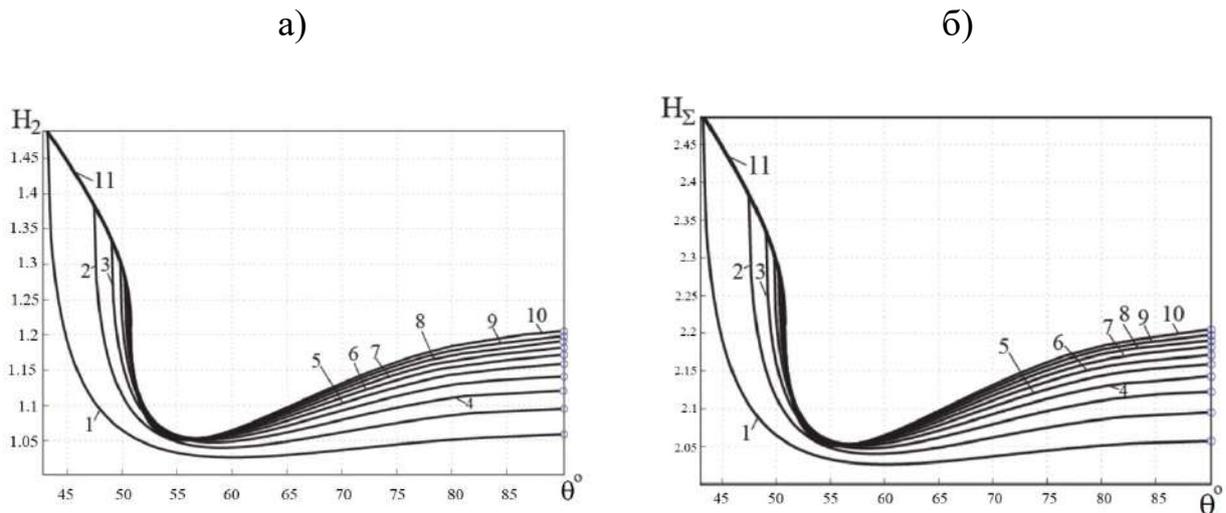


Рисунок 2.6 – Изменение отношения скачков температуры на отраженной и падающей волнах (а) и коэффициента повышения тепловых нагрузок (б) волны в зависимости от угла наклона преграды при различных амплитудах падающей волны:  $\Delta p_1 = 50$  кПа (кривые 1), 100 кПа (2), 150 кПа (3), 200 кПа (4), 250 кПа (5), 300 кПа (6), 350 кПа (7), 400 кПа (8), 450 кПа (9), 500 кПа (10). Кривые 11 ограничивают область существования регулярного отражения согласно критерию максимального угла поворота потока

Отношение скачков температуры  $H_2$  (2.15) и коэффициент повышения тепловых нагрузок  $H_\Sigma$  (2.16) изменяются аналогично (см. рис. 2.6,а-б). Как показано ранее, условия экстремумов (минимумов) температуры за отраженной волной также описываются уравнением (2.19). Однако разница между значениями температурных коэффициентов в найденных точках минимума по

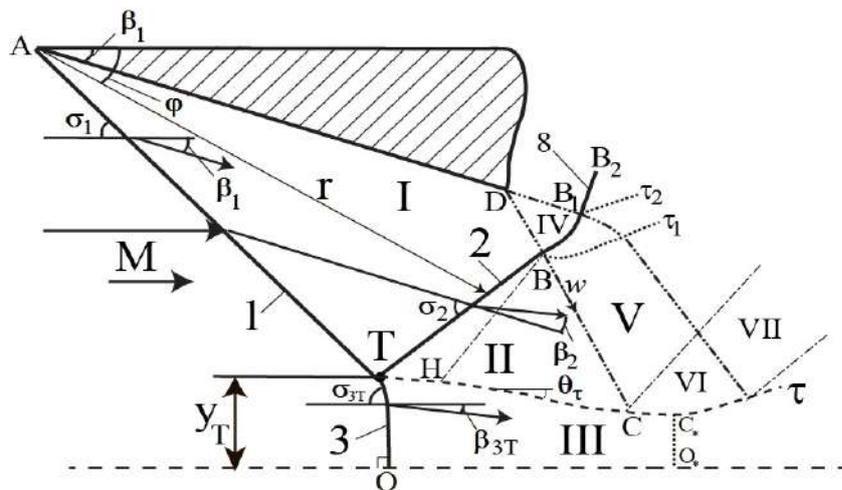
сравнению с нормальным отражением или предельным случаем перехода регулярного отражения в маховское чуть меньше. К примеру, разница значений  $\Delta T_2$  при нормальном отражении и в найденной точке минимума составляет 2.92% при  $\Delta p_1 = 50$  кПа и 12.8% при  $\Delta p_1 = 500$  кПа. Аналогично, разница значений  $\Delta T_2$  в точке перехода к маховскому отражению и в найденной точке минимума равна 31.0% при  $\Delta p_1 = 50$  кПа и 14.3% при  $\Delta p_1 = 500$  кПа. При увеличении интенсивности (амплитуды) падающей волны, разность температур за отраженной волной монотонно возрастает, но иногда более слабо, чем разность температур на падающей волне, что приводит к пересечению некоторых кривых на рис. 2.6,а-б.

Таким образом, параметры падающих скачков уплотнения, обеспечивающих минимум статического давления и температуры газа за отраженным скачком, описываются кубическим уравнением (2.15) или (2.16) в переменных «интенсивность скачка – число Маха набегающего потока». Аналогичное кубическое уравнение (2.17), впервые полученное в работе [93], аналитически определяет углы наклона преграды, при которых минимально статическое давление за точкой регулярного отражения бегущей ударной волны заданной амплитуды. Эти оптимальные углы наклона отражающей поверхности существуют при всех теоретически возможных параметрах падающей волны. При этом оптимальное отражение ударной волны отличается как от нормального отражения, так и от другого предельного случая перехода от регулярного отражения к маховскому. Расчеты показывают, что геометрическая оптимизация взаимодействия ударных (в частности, взрывных) волн с преградами позволяет существенно уменьшить механические и тепловые нагрузки на элементы конструкций. По этой причине полученные теоретические результаты могут быть использованы при проектировании взрывостойких сооружений, разработке средств взрывозащиты, в авиационном и ракетном двигателестроении, сверхзвуковой аэродинамике и во многих других приложениях.

## 2.2. Приближенно-аналитическая модель ударно-волновой структуры течения с маховским отражением скачков уплотнения

Постепенно усложняя задачу исследования, рассмотрим течение с маховским отражением косых скачков уплотнения от плоскости симметрии в невязком установившемся сверхзвуковом потоке совершенного невязкого газа, которое имеет место в сужающемся канале между двумя клиньями (рис. 2.7,а) или при истечении плоской перерасширенной струи из сверхзвукового сопла (рис. 2.7,б). Первый из рассматриваемых случаев является модельным для газодинамического проектирования сверхзвуковых воздухозаборников, второй – для струйных течений из сопел реактивных двигателей, а также при разработке аппаратов струйных технологий.

а)



б)

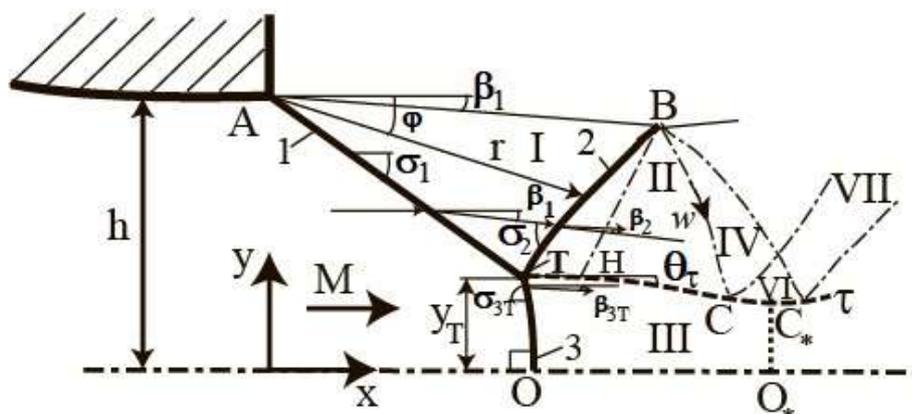


Рисунок 2.7 – Схемы течений с маховским отражением: а) в сужающемся канале между двумя клиньями; б) в перерасширенной газовой струе

На рис. 2.7 приняты следующие обозначения:  $M$  – число Маха невозмущенного потока; 1 ( $AT$ ) – косой скачок уплотнения, падающий с кромки сопла или передней кромки клина; 2 ( $TB$ ) – отраженный скачок уплотнения; 3 ( $TO$ ) – главный (маховский) скачок;  $T$  – тройная точка маховского отражения, общая для падающего, отраженного и главного скачков;  $\tau$  – тангенциальный разрыв, исходящий из тройной точки и разделяющий потоки за отраженным и маховским скачками (как правило, сверхзвуковой и дозвуковой, соответственно);  $\theta_\tau$  – переменный местный угол наклона тангенциального разрыва  $\tau$  (в общем случае искривленного) к горизонтальной плоскости симметрии течения;  $\beta_1$  и  $\beta_2$  – углы поворота потока на скачках уплотнения 1 (падающем) и 2 (отраженном);  $\beta_{3T} \equiv \theta_{3T}$  – угол поворота потока на главном скачке 3 в тройной точке  $T$ , равный углу наклона тангенциального разрыва, исходящего из этой точки;  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  – углы наклона скачков 1 и 2 к векторам скорости потока перед ними;  $\sigma_{3T}$  – угол наклона скачка 3 в тройной точке  $T$ ;  $h$  – ширина выходного сечения струи или канала между клиньями;  $y_T$  – искомый размер главного скачка (высота тройной точки);  $(r, \varphi)$  – расстояние и полярный угол, отсчитываемый от горизонтального направления, в цилиндрической системе координат с центром в точке  $A$ ;  $NB$  – акустическая характеристика первого семейства, которая попадает в точку  $B$  выхода отраженного скачка на границу струи или начала его взаимодействия с хвостовой волной разрежения; I – область течения за падающим скачком уплотнения 1; II ( $BTC$ ) – область потока за отраженным скачком уплотнения (как показано в [56, 62], она может быть аппроксимирована простой волной разрежения Прандтля-Майера с прямыми акустическими характеристиками первого семейства); III – область течения за маховским скачком уплотнения 3 («виртуальное сопло» с критическим сечением  $C_*O_*$ , согласно терминологии [52]); IV – веер характеристик волны разрежения, сходящий с границы струи (из точки её пересечения с отраженным скачком 2) или с задней кромки обтекаемого клина; V – веер характеристик волны разрежения, образующейся

в результате взаимодействия волны IV с криволинейным скачком уплотнения  $BB_1$ ; VI – зона отражения волны разрежения IV или V от тангенциального разрыва  $\tau$ , разворачиваемого этой волной в горизонтальном направлении и далее; VII – отраженная волна Прандтля-Майера (в работе [62] доказывалось, что это волна сжатия); BC – головная акустическая характеристика первого семейства волны разрежения IV или V;  $\tau_1$  и  $\tau_2$  (рис. 2.7,а) – слабые тангенциальные разрывы, ограничивающие сдвиговый слой переменной энтропии, образующийся в результате встречного взаимодействия отраженного скачка уплотнения 2 с центрированной волной разрежения IV; 8 ( $B_1B_2$ , рис. 2.7,а) – результирующий скачок уплотнения после взаимодействия отраженного скачка уплотнения с волной разрежения IV.

### 2.2.1 Локальное решение задачи о маховском отражении

Предполагается, что отражение скачка 1 является маховским согласно критерию фон Неймана. Это означает, что интенсивность  $J_1$  падающего скачка уплотнения (отношение статических давлений за скачком и перед ним) находится в диапазоне

$$J_N \leq J_1 \leq J_T. \quad (2.20)$$

Интенсивность  $J_N$ , минимальная для реализации маховского отражения скачка 1, соответствует образованию так называемой «стационарной маховской конфигурации» с прямым главным скачком и определяется уравнением (1.20). Наибольшая допустимая интенсивность  $J_1 = J_T$  соответствует тройной конфигурации скачков уплотнения с прямым отраженным скачком 2 ( $TB$ ). Это значение переходной интенсивности удовлетворяет уравнению (1.21).

Ударно-волновые структуры, возникающие при отражении скачков с интенсивностью  $J_1 > J_T$ , известны как отражения Гудерлея и Васильева [20, 104]; обычно они не реализуются в установившихся потоках, особенно при умеренных и больших числах Маха. Как правило, вместо них возникают течения с отошедшим головным скачком (при входе в сверхзвуковой воздухозаборник) или с сильным скачком уплотнения, запирающим течение по

соплу (при чрезмерном расширении газовой струи). Вопрос о неоднозначности реализуемых ударно-волновых структур рассматривается далее в § 2.3.

При выполнении неравенства (2.20) в тройной точке  $T$  возникает маховское отражение с образованием тройной конфигурации второго типа согласно классификации [1, 10, 79]. Условия сонаправленности потоков и равенства статических давлений на сторонах тангенциального разрыва, исходящего из тройной точки, приводят к следующей системе уравнений, определяющей параметры отраженного скачка 2 ( $TB$ ) и главного (маховского) скачка 3 ( $TO$ ):

$$\beta_1 + \beta_{2T} = \beta_{3T}, \quad J_1 J_{2T} = J_{3T}, \quad (2.21)$$

Здесь  $J_{2T}$  и  $J_{3T}$  – интенсивности скачков 2 и 3 в точке  $T$ . Следующие соотношения (1.4) определяют углы отклонения потока  $\beta_{2T}$  и  $\beta_{3T}$  от горизонтального направления в тройной точке:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}|\beta_{2T}| &= \sqrt{\frac{(1+\varepsilon)M_1^2 - J_{2T} - \varepsilon}{J_{2T} + \varepsilon}} \frac{(1-\varepsilon)(J_{2T} - 1)}{(1+\varepsilon)M_1^2 - (1-\varepsilon)(J_{2T} - 1)}, \\ \operatorname{tg}|\beta_{3T}| &= \sqrt{\frac{(1+\varepsilon)M^2 - J_{3T} - \varepsilon}{J_{3T} + \varepsilon}} \frac{(1-\varepsilon)(J_{3T} - 1)}{(1+\varepsilon)M^2 - (1-\varepsilon)(J_{3T} - 1)}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Углы отклонения потока считаются положительными, когда поток поворачивает противоположно ходу часовой стрелки. Числа Маха потока ( $M_1$  – после падающего скачка 1, а также  $M_{2T}$  и  $M_{3T}$  – после соответствующих скачков в окрестности тройной точки) удовлетворяют формулам (1.6):

$$\begin{aligned} M_1 &= \sqrt{\frac{(J_1 + \varepsilon)M^2 - (1-\varepsilon)(J_1^2 - 1)}{J_1(1 + \varepsilon J_1)}}, \\ M_{2T} &= \sqrt{\frac{(J_{2T} + \varepsilon)M_1^2 - (1-\varepsilon)(J_{2T}^2 - 1)}{J_{2T}(1 + \varepsilon J_{2T})}}, \\ M_{3T} &= \sqrt{\frac{(J_{3T} + \varepsilon)M^2 - (1-\varepsilon)(J_{3T}^2 - 1)}{J_{3T}(1 + \varepsilon J_{3T})}}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Как обычно при маховском отражении косых скачков уплотнения в установившемся сверхзвуковом течении, предполагается, что поток за отраженным скачком 2 является сверхзвуковым (то есть  $M_2 \geq 1$ ). Это приводит к следующему ограничению для интенсивности падающего скачка:

$$J_N \leq J_1 \leq J_S, \quad (2.24)$$

которое немного строже, чем (2.20). Интенсивность падающего скачка  $J_S$  соответствует критической скорости потока за нерегулярно отраженным скачком. Его значение определяется алгебраическим уравнением 10-го порядка относительно  $M^2$  и 14-го порядка относительно  $J_S$ , численное решение и анализ которого даны в работах [109, 145].

Углы  $\sigma_1$ ,  $\sigma_{2T}$  и  $\sigma_{3T}$  наклона соответствующих скачков к направлению потока перед ними связаны с их интенсивностями формулой (1.1):

$$\begin{aligned} J_1 &= (1 + \varepsilon)M^2 \sin^2 \sigma_1 - \varepsilon, \quad J_{2T} = (1 + \varepsilon)M_1^2 \sin^2 \sigma_{2T} - \varepsilon, \\ J_{3T} &= (1 + \varepsilon)M^2 \sin^2 \sigma_{3T} - \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Поскольку отраженный (2) и главный (3) скачки имеют ненулевую геометрическую кривизну, их интенсивности ( $J_2$  и  $J_3$ ) являются переменными функциями, которые изменяются от значений  $J_{2T}$  и  $J_{3T}$  в тройной точке до значений  $J_{2B}$  и  $J_{3O}$  в точках В и О соответственно. Согласно (1.4), углы  $\beta_2$  и  $\beta_3$  отклонения потока в произвольных точках на фронтах скачков 2 и 3 таковы, что

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_2 &= \sqrt{\frac{(1 + \varepsilon)M_1^2 - J_2 - \varepsilon}{J_2 + \varepsilon}} \frac{(1 - \varepsilon)(J_2 - 1)}{(1 + \varepsilon)M_1^2 - (1 - \varepsilon)(J_2 - 1)}, \\ \operatorname{tg} |\beta_3| &= \sqrt{\frac{(1 + \varepsilon)M^2 - J_3 - \varepsilon}{J_3 + \varepsilon}} \frac{(1 - \varepsilon)(J_3 - 1)}{(1 + \varepsilon)M^2 - (1 - \varepsilon)(J_3 - 1)}, \end{aligned}$$

а углы  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  наклона скачков уплотнения 2 и 3 по отношению к потоку перед ними в произвольных точках скачков определяются уравнениями (1.1)

$$J_2 = (1 + \varepsilon)M_1^2 \sin^2 \sigma_2 - \varepsilon, \quad J_3 = (1 + \varepsilon)M^2 \sin^2 \sigma_3 - \varepsilon,$$

Аналогично (1.6), рассчитываются и числа Маха  $M_{2T}$  и  $M_{3T}$  в областях II и III сразу за этими искривленными скачками:

$$M_2 = \sqrt{\frac{(J_2 + \varepsilon)M_1^2 - (1 - \varepsilon)(J_2^2 - 1)}{J_2(1 + \varepsilon J_2)}}, \quad M_3 = \sqrt{\frac{(J_3 + \varepsilon)M^2 - (1 - \varepsilon)(J_3^2 - 1)}{J_3(1 + \varepsilon J_3)}}.$$

Таким образом, соотношения (2.21-2.23) при дополнительном ограничении (2.20) или (2.24) позволяют рассчитать параметры всех скачков и потока за ними в окрестности тройной точки маховского отражения. При заданных параметрах набегающего потока и интенсивности падающего скачка, решение в тройной точке является единственным и точным для течения невязкого газа. Оно хорошо изучено параметрически [83, 107-109] и часто используется в различных аналитических моделях [52, 53, 56-58, 66-68, 110]. В то же время, оно не определяет геометрический размер маховского скачка и, соответственно, форму других образующихся скачков и разрывов. Следовательно, остаются неустановленными и интегральные характеристики потока в целом. Эта проблема достаточно долго остается нерешенной [16].

*2.2.2. Аналитическое описание и выбор начального приближения для параметров течения по «виртуальному соплу» за главным скачком*

Тангенциальный разрыв  $\tau$ , который направлен под углом  $\theta_{3T} = \beta_{3T} = \beta_1 + \beta_{2T}$  к горизонтальной плоскости в тройной точке  $T$  маховского отражения, ограничивает сверху область III течения за сильным главным (маховским) скачком, которое изначально (непосредственно за главным скачком) является дозвуковым. Согласно критерию фон Неймана, маховское отражение существует при  $\theta_{3T} < 0$ . Так называемое отражение фон Неймана, которое теоретически может возникать при  $\theta_{3T} > 0$ , в реальных установившихся течениях неустойчиво и фактически не образуется [21, 45].

Из-за малых поперечных градиентов параметров течения в области III этот поток обычно рассматривают как изоэнтропный и квазиодномерный, аналогичный квазиодномерному течению по классическому сверхзвуковому соплу («соплу Лавалья») с небольшими углами раствора. Аналогия со

сверхзвуковым соплом еще более полна, поскольку под воздействием веера характеристик волны разрежения IV (рис. 2.7,б) или V (рис. 2.7,а) тангенциальный разрыв  $\tau$  разворачивается вверх, в результате чего угол его наклона  $\beta_\tau$  в некоторой точке  $C_*$  становится равным нулю. Как свидетельствуют лабораторные [21, 24, 36-38] и численные [32, 34] исследования, скорость потока в дозвуковой области  $TOO_*C_*$  за некоторой линией  $O_*C_*$  («критическим сечением») становится сверхзвуковой. Таким образом, термин «виртуальное сопло» является адекватной характеристикой потока в области III за главным скачком.

Совпадение разворота тангенциального разрыва и перехода течения за маховским скачком к сверхзвуковым скоростям является ключевым условием в разнообразных аналитических моделях [40, 52-58, 66-68, 110, 145] и численных исследованиях, позволяющих оценить высоту  $y_T$  маховского скачка. Если предполагаемая высота  $y_T$  слишком мала, поток газа в области III достигает критической скорости раньше, чем происходит разворот тангенциального разрыва до горизонтального направления; в противном случае, если оценка высоты  $y_T$  слишком велика, тангенциальный разрыв поворачивается до горизонтального направления, а скорость течения снизу от него остаётся дозвуковой ( $\beta_\tau = 0$  при  $M_3 < 1$ ).

В рамках квазиодномерной модели течения в области III за маховским скачком 3, ширина  $y$  произвольного поперечного сечения этой области течения определяет число Маха  $M_{3\tau}$  потока в соответствующем сечении через соотношение расходных функций типа (1.22):

$$y_*/y = q(M_{3\tau}), \quad (2.26)$$

поэтому

$$y/y_T = q(M_3)/q(M_{3\tau}). \quad (2.27)$$

Здесь  $q(M) = M \cdot [1 + \varepsilon(M^2 - 1)]^{-1/2\varepsilon}$  – безразмерная изоэнтропическая функция расхода,  $y_*$  в (2.26) – ширина области III в ее «критическом сечении»  $O_*C_*$ ,

а  $M_3$  – усредненное число Маха потока непосредственно за криволинейным скачком уплотнения 3 (в первом приближении  $M_3 = M_{3T}$ ). Статическое давление  $p$ , равное на обеих сторонам тангенциального разрыва, как и другие параметры течения на нижней стороне этого разрыва, определяется формулами изоэнтропного течения (1.23):

$$p/p_T = \pi(M_{3\tau})/\pi(M_3) = \pi(M_{2\tau})/\pi(M_{2T}). \quad (2.28)$$

Здесь  $\pi(M) = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\gamma/(\gamma-1)}$  – изоэнтропическая функция давления, а  $M_{2\tau}$  – число Маха потока в рассматриваемой точке, но на верхней стороне тангенциального разрыва.

Если высота маховского скачка достаточно велика по сравнению с размером поперечного сечения потока в целом, и нельзя пренебречь поперечными градиентами потока в области III, то могут применяться методы усреднения параметров потока [111]. В первую очередь, вместо числа Маха  $M_{3T}$  за главным скачком в окрестности тройной точки, в (2.26-2.28) можно использовать число Маха  $M_0$  за прямым главным скачком в точке O. Аналогичным образом могут быть использованы некоторые усредненные (между  $M_0$  и  $M_{3T}$ ) значения (например, полусумма этих чисел Маха). Однако, поскольку именно число Маха  $M_{3T}$  в действительности точно характеризует начальное (в окрестности тройной точки) состояние потока с нижней стороны тангенциального разрыва, приближение  $M_3 \equiv M_0$  является более спорным. В качестве компромисса, начальное статическое давление на левой границе дозвуковой зоны III может быть оценено как усредненное согласно [52] интегральное значение:

$$p_3 = \int_0^{y_T} p_3^l(y) dy / y_T, \quad (2.29)$$

дополненное параболической аппроксимацией формы главного скачка.

Оригинальный метод усреднения потока в дозвуковой зоне предложен и применен в [58] и [67]. Основываясь на приближении первого порядка для потока за главным скачком, в [58, 67] выводится следующее соотношение для оценки начального среднего числа Маха в области III:

$$M_3 = \frac{2(\rho_{3T}u_{3T} \cos \sigma_{3T} + \rho_0 u_0)}{(\rho_{3T} + \rho_0)(a_{3T} + a_0)}. \quad (2.30)$$

В (2.30)  $\rho_{3T}$ ,  $u_{3T}$  и  $a_{3T}$  – плотность газа, скорость потока и скорость звука в зоне III сразу после тройной точки;  $\rho_0$ ,  $u_0$  и  $a_0$  – параметры за прямым скачком в точке O;  $\sigma_{3T}$  – угол наклона маховского скачка в тройной точке.

### 2.2.3. Аппроксимация потока за отраженным скачком

Уже в первой работе [52], посвященной приближенно-аналитическому описанию течения с маховским отражением, предположено, что головная акустическая характеристика BC второго семейства волны разрежения падает на тангенциальный разрыв  $\tau$  в критическом сечении области III (т.е.  $C \equiv C_*$  на рис. 2.7,а-б), причем разрыв  $\tau$  является прямолинейным и имеет тот же угол наклона, что и за тройной точкой. При условии постоянства всех углов наклона сильных и слабых разрывов, составляющих треугольник BTC, несложно определить длину дозвуковой части «виртуального сопла» III и, следовательно, высоту тройной точки.

Однако сравнение с экспериментальными результатами [21, 24] выявляет большие (до 50–100%) ошибки в оценках [52]. Основные причины недопустимых ошибок следующие:

- тангенциальный разрыв  $\tau$  в действительности является криволинейным. Угол его наклона переменный, и изначально (в тройной точке) он довольно мал. Поэтому даже небольшая количественная ошибка в оценке угла наклона тангенциального разрыва существенно влияет на оценку длины и ширины дозвуковой зоны. Представим, например, изменение угла наклона  $\theta_\tau$  от  $\theta_{3T} = -2^\circ$  к  $\theta_\tau = -10^\circ$  в точке C. Если считать угол  $\theta_\tau$  постоянным, как в [52-55], то возникает ошибка в длине и ширине дозвуковой зоны в несколько

раз. Таким образом, пренебрежение изменением угла наклона приводит к очень сильному занижению размера маховского скачка;

- поворот тангенциального разрыва  $\tau$  под воздействием падающей волны разрежения IV или V происходит не мгновенно, а вдоль конечного сектора  $CC_*$ . Пренебрежение конечной длиной сектора  $CC_*$  также приводит к значительным расхождениям.

Аппроксимация [53] течения в области II методом Гриба-Рябинина [112] на основе касательного преобразования Лежандра существенно усложняет математическую модель, но разница между результатами [52] и [53] составляет всего 2-4%, как показано в [56], поэтому погрешности определения размеров ножки Маха в основном сохраняются.

Впервые предложено в [56, 62] (последующее применение – в [57, 58, 68, 145]) рассматривать течение в области II за отраженным скачком как простую волну Прандтля-Майера с прямыми акустическими характеристиками первого семейства. Предлагаемая модель напоминает «метод скачков и волн», он же “shock-expansion method” [113, 114], но применяется не только для оценки давления, но и для восстановления формы и соответствующих характеристик всех разрывов в поле течения. Согласно инварианту Прандтля-Майера и условию равенства давлений на тангенциальном разрыве  $\tau$ , имеют место следующие соотношения вида (1.35-1.38), доказанные в [62, 64, 65]:

$$\frac{dy_\tau}{dx} = \operatorname{tg} \theta_\tau, \quad (2.31)$$

$$\frac{d\theta_\tau}{dx} = -\frac{\chi M_{3\tau}^2 \sqrt{M_{2\tau}^2 - 1} \operatorname{tg} \theta_\tau}{M_{2\tau}^2 (M_{3\tau}^2 - 1) y_\tau}, \quad (2.32)$$

$$\frac{dM_{2\tau}}{dx} = \frac{\mu(M_{2\tau}) \operatorname{tg} \theta_\tau}{(1 - \varepsilon) M_{2\tau} (M_{3\tau}^2 - 1) y_\tau}, \quad (2.33)$$

$$\frac{dM_{3\tau}}{dx} = \frac{\mu(M_{3\tau}) M_{3\tau}^2 \operatorname{tg} \theta_\tau}{(1 - \varepsilon) (M_{3\tau}^2 - 1) y_\tau}. \quad (2.34)$$

Здесь  $M_{2\tau}$  и  $M_{3\tau}$  – локальные числа Маха сверху и снизу от тангенциального разрыва, соответственно;  $\mu(M) = 1 + \varepsilon(M^2 - 1)$ ;  $y_\tau(x)$  – уравнение формы тангенциального разрыва;  $\theta_\tau(x)$  – местный угол наклона тангенциального разрыва;  $\chi = +1$  – коэффициент направления волны. Соотношения (2.31) и (2.34), описывающие область квазидномерного течения, аналогичны уравнениям (1.24) и (1.25), соответственно.

Уравнения (2.31-2.34) следует интегрировать до точки пересечения тангенциального разрыва с падающей характеристикой  $BC$ . Как показано в [65] и вытекает из уравнений (1.51-1.59), форма этой криволинейной падающей характеристики определяется интегрированием уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_w}{dw} &= \frac{2\sqrt{M_{2w}^2 - 1}}{M_{2w}^2} \cdot N_2, \\ \frac{dM_{2w}}{dw} &= -\frac{2\chi(1 + \varepsilon(M_{2w}^2 - 1))}{(1 - \varepsilon)M_{2w}} \cdot N_2, \\ \frac{d\alpha_{2w}}{dw} &= \frac{2\chi(1 + \varepsilon(M_{2w}^2 - 1))}{(1 - \varepsilon)M_{2w}^2 \sqrt{M_{2w}^2 - 1}} \end{aligned} \quad (2.35)$$

по направлению  $w$  ее падения (см. рис. 2.7,а-б). Здесь  $\beta_w$  – локальный угол потока;  $M_{2w}$  – местное число Маха;  $\alpha_{2w} = \arcsin(1/M_{2w})$  – угол Маха;  $N_2$  – локальная кривизна линии тока. Соотношение, следующее из (1.54),

$$N_2 = -\frac{\psi(1 - \varepsilon)(M_{2w}^2 - 1)M_{3w}^2 \sin(\theta_w + \chi\alpha_{2w}) \sin\theta_w}{M_{2w}^2 \left[ M_{2w} M_{3w}^2 \sin\theta_w \cdot \Omega + \chi\psi(1 - \varepsilon)\sqrt{M_{2w}^2 - 1}(M_{3w}^2 - 1)\sin(\theta_w + \chi\alpha_{2w}) \right]},$$

где  $\Omega = y_{C_1} - y_\tau q(M_{3\tau})/q(M_{3w})$ , определяет кривизну линии тока в некоторой произвольной точке  $C_1$  простой волны. Здесь  $\psi = +1$ , поскольку область течения II рассматривается как волна разрежения (а не сжатия, так как она через тангенциальный разрыв  $\tau$  смежна с областью III, статическое давление в которой уменьшается вниз по потоку). Числа Маха  $M_{3w}$  зависит от  $M_{2w}$  аналогично тому, как  $M_{3\tau}$  зависит от  $M_{2\tau}$ , см. соотношения (2.26-2.28).

Результаты интегрирования (2.31-2.34) показывают, что тангенциальный разрыв всегда является выпуклым вверх. Поэтому его наклон к горизонтальной плоскости увеличивается вдоль всего сектора  $ТС$ . Характеристика  $ВС$  является слабым разрывом, и поэтому мгновенный поворот тангенциального разрыва в точке  $C$  от конечного (по абсолютной величине – большего, чем в тройной точке) угла наклона до нулевого значения этого угла невозможен. Как известно, пересечение тангенциального и слабого разрывов приводит в скачку кривизны тангенциального разрыва, а не к его излому [1, 56].

#### 2.2.4. Кривизна отраженного скачка и аппроксимация его формы

Поскольку расширяющийся поток в области  $\Pi$  влияет на предшествующий отраженный скачок  $TВ$ , форма этого скачка криволинейна, а его интенсивность ( $J_2$ ) и угол наклона к набегающему потоку ( $\sigma_2$ ) переменны. Но, как показано, например, в [9, 112], возмущения, отражаемые при взаимодействии косого скачка с последующей догоняющей волной разрежения очень малы (третьего порядка по сравнению с аналогичными параметрами догоняющей волны, которая сама по себе в данном случае довольно слаба), и их влиянием можно пренебречь. Следовательно, форму отраженного скачка допустимо восстановить следующим образом: направление потока в любой точке за скачком должно соответствовать полю течения в последующей догоняющей волне разрежения  $\Pi$ . Основы этого метода и соответствующие соотношения можно найти в [9, 62].

В большинстве практически важных случаев изменение угла наклона отраженного скачка  $TВ$  не превышает  $1^\circ$ . Например, при  $M = 5$  и  $\sigma_{1T} = 36^\circ$ ,  $\gamma = 1.4$  в задаче о струйном обтекании (безразмерная высота маховского скачка  $y_T/h = 0.390$  согласно расчетам сверхзвуковой части поля течения методом характеристик [115]) угол наклона отраженного скачка уплотнения  $\sigma_{2T} = 40.857^\circ$ , а угол наклона этого же скачка в точке  $B$  его выхода на границу струи  $\sigma_{2B} = 40.395^\circ$ . При  $M = 5$  и  $\sigma_{1T} = 40^\circ$ , когда  $y_T/h = 0.589$ , соответствующие углы наклона скачков равны  $\sigma_{2T} = 47.492^\circ$  и  $\sigma_{2B} = 47.043^\circ$ .

По этой причине, если рассматривать отраженный скачок уплотнения  $TB$  как поверхность с постоянным углом наклона, равным углу его наклона в тройной точке, как это принято в многочисленных исследованиях [52-55, 57, 58, 66-68], это не приводит к существенной погрешности в определении размеров маховского скачка и при оценке других параметров потока.

Если не пренебрегать кривизной отраженного косоугольного скачка уплотнения, можно предложить метод его сопряжения с последующей догоняющей волной разрежения, рассмотренный в [62, 145]. Форму скачка 2 определяют в полярной системе координат  $(r, \varphi)$ , связанной с точкой  $A$ , путём решения уравнений:

$$\frac{dr}{d\varphi} = r \cdot \operatorname{ctg}(\sigma_2 + \beta_1 - \varphi), \quad (2.36)$$

$$\frac{d\sigma_2}{d\varphi} = \frac{r}{\sin(\sigma_2 + \beta_1 - \varphi)} \cdot \Theta \cdot \frac{\partial \sigma_2}{\partial \beta_2}. \quad (2.37)$$

Здесь  $r$  – расстояние от точки  $A$  до текущей точки на поверхности скачка;  $\sigma_2$  – угол наклона скачка уплотнения к потоку перед ним в данной точке;  $\Theta = M_2 \cdot K_s \cdot \sin(\alpha_2 - \sigma_2 + \beta_2)$ ;  $\alpha_2 = \arcsin(1/M_2)$ ;  $M_2$  – текущее число Маха за скачком уплотнения;  $\beta_2$  – угол поворота потока на поверхности скачка;  $K_s$  – соответствующая (1.56) кривизна линии тока в рассматриваемой точке за скачком:

$$K_s = - \frac{(1 - \varepsilon)(M_2^2 - 1)M_3^2 \sin(\theta + \alpha_2) \sin \theta}{M_2^2 \left[ M_2 M_3^2 \sin \theta \cdot \Omega + (1 - \varepsilon) \sqrt{M_2^2 - 1} (M_3^2 - 1) \sin(\theta + \alpha_2) \right]};$$

где

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial \theta} = \frac{M_1^4 \left( (1 - \varepsilon) \cos^4 \sigma_2 - (1 - 2\varepsilon^2) \cos^2 \sigma_2 - \varepsilon^2 \right) - 2\varepsilon(1 - \varepsilon) M_1^2 \sin^2 \sigma_2 - (1 - \varepsilon)^2}{(1 - \varepsilon) \left[ M_1^4 \left( (1 + \varepsilon) \cos^4 \sigma_2 - (1 + 2\varepsilon) \cos^2 \sigma_2 + \varepsilon \right) - M_1^2 \left( 2(1 - \varepsilon) \cos^2 \sigma_2 - (1 - 2\varepsilon) \right) - (1 - \varepsilon) \right]},$$

$\theta = \beta_1 + \beta_2$  – угол течения за скачком в данной точке,  $q(M_3)$  – расходная функция,  $M_3$  зависит от  $M_2$  согласно соотношениям (2.26-2.28),  $\Omega = y - y_T q(M_{3T}) / q(M_3)$ , а  $M_{3T}$  – число Маха потока за главным скачком в окрестности тройной точки.

Уравнения (2.36-2.37) интегрируются от значения  $\varphi_T = -\sigma_1$  в тройной точке  $T$  (другие начальные условия также соответствуют тройной точке) до отрицательного значения  $\varphi_B = \theta_1$ , соответствующего точке  $B$ .

Результаты, достигнутые путем интегрирования уравнений (2.36) и (2.37), совершенно несущественно (обычно на  $0,01-0,02^\circ$  для значения угла  $\sigma_{2B}$ ) отличаются от результатов расчетов сверхзвуковой части течения методом характеристик, асимптотически получаемых при максимальном сгущении расчетной сетки. Одновременно определяются и все параметры потока (например, угол течения  $\theta_{2B}$  и число Маха  $M_{2B}$ ) за отраженным скачком на всём его протяжении.

#### *2.2.5. Взаимодействие отраженного скачка со встречной волной разрежения*

Существует, по крайней мере, два способа построения формы отраженного скачка уплотнения в области его взаимодействия с волной разрежения IV противоположного направления (см. рис. 2.7,а, и 2.8, на котором отдельно рассматривается этот тип взаимодействия). Первый из них был предложен в [60, 61] и применен в [54-56] и дальнейших исследованиях. Он предполагает равенство статического давления и сонаправленность векторов скорости потока за исходящим скачком  $B_1B_2$  и преломленной волной разрежения V, которая затем попадает на тангенциальный разрыв  $\tau$ . Второй вариант [61, 63] предполагает, что исходящий скачок  $B_1B_2$  за точкой  $B_2$  прямолинеен (т.е. имеет нулевую геометрическую кривизну). Оба метода приводят к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для определения формы скачка  $BB_1$  в области взаимодействия. Кроме того, они позволяют определять параметры потока в волне разрежения V.

Реализация первого метода [60, 61] выглядит следующим образом. Так называемый сдвиговый слой, ограниченный слабыми тангенциальными разрывами  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , разделяет потоки, прошедшие: с одной стороны слоя – центрированную волну разрежения IV и результирующий (исходящий) скачок



В соотношениях (2.38-2.42)  $M_4$  и  $M_5$  – числа Маха потоков за волнами IV и V;  $J_8$  и  $\beta_8$  – интенсивность исходящего скачка 8 в точке  $B_1$  и соответствующий угол отклонения потока на его поверхности. В результате решения (2.38-2.42) определяется интенсивность  $J_8$  образовавшегося скачка уплотнения и угол его наклона, а также интенсивность  $J_5$  отражённой волны V, число Маха  $M_5$  течения за ней и угол наклона её хвостовой прямолинейной акустической характеристики, поскольку она наклонена под углом Маха к вектору скорости потока перед ней.

На рис. 2.8, иллюстрирующем встречное взаимодействие косого скачка с волной Прандтля-Майера, I – область течения за падающим скачком уплотнения ( $M_1$  – число Маха потока в этой зоне); II – область течения за отраженным скачком уплотнения 2, приходящим в область взаимодействия; IV – веер характеристик волны разрежения, приходящей с задней кромки обтекаемого клина ( $D$  – её центр;  $\xi$  – произвольная прямолинейная характеристика второго семейства); V – веер характеристик исходящей волны разрежения ( $\zeta$  – её произвольная характеристика второго семейства);  $BB_1$  – криволинейный скачок уплотнения, находящийся под воздействием волны IV; 8 ( $B_1B_2$ ) – исходящий скачок уплотнения, возникающий в результате этого воздействия;  $\tau_1$  и  $\tau_2$  – слабые тангенциальные разрывы, ограничивающие сдвиговый слой переменной энтропии между ними;  $\sigma_2$  и  $\beta_2$  – соответственно, угол наклона и угол отклонения потока на скачке 2;  $M_{2B}$  – число Маха потока в точке B сразу за этим скачком.

Без дополнительных оговорок можно рассматривать взаимодействие скачка уплотнения не со всей волной разрежения противоположного направления (встречной волной), а с ее частью вплоть до произвольной прямолинейной характеристики  $\xi$ . Эта характеристика с местным числом Маха  $M_\xi$  направлена под углом  $\beta_1 + \nu(M_\xi) - \nu(M_1) - \alpha(M_\xi)$  к горизонтальной оси.

Решая систему, полностью аналогичную выражениям (2.38-2.42), вплоть до характеристики  $\xi$ , можно получить: числа Маха потока по обе стороны взаимодействующего скачка уплотнения  $BB_1$  в произвольной точке; угол наклона, который приводит к уравнению для  $y'_{BB_1}(x)$ , определяющему форму скачка; угол наклона произвольной характеристики  $\zeta$  отражённой волны V (см. рис. 2.8); направление потока и число Маха течения на этой характеристике. Как показано в [61-63], полученные решения практически неразличимо близки к точному.

Второй метод анализа [61-63] основан на предположении, что исходящий косой скачок уплотнения практически прямолинеен (имеет нулевую кривизну) непосредственно перед точкой  $B$  входа в веер характеристик (скачок 2) и сразу после точки  $B_1$  выхода из этого веера (скачок 8). Дифференциальные условия динамической совместности [1, 63] вместе с точным решением задачи о взаимодействии косого скачка и слабого разрыва [1] позволяют точно оценить геометрическую кривизну скачка  $BB_1$  в его произвольной точке. Это приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка, которое определяет форму, интенсивность, числа Маха и другие переменные параметры потока на обеих сторонах взаимодействующего и исходящего скачков с, как показано в [62, 63], почти такой же или немного лучшей точностью.

*2.2.6. Отражение веера характеристик волны разрежения, приводящее к развороту тангенциального разрыва*

Поворот тангенциального разрыва  $\tau$  в горизонтальном направлении в точке  $C_*$  (см. рис. 2.7,а-б) происходит под воздействием волны разрежения IV (рис. 2.7,б) или преломленной волны разрежения V (рис. 2.7,а).

Аналитический метод исследования отражения волны разрежения от тангенциального разрыва описан и обсуждается в [56, 62, 145]. Ограничиваясь отражением центрированной волны и сохраняя номенклатуру обозначений, показанную на рис. 2.9, обсудим аналитический метод, который

можно обобщить на отражение нецентрированной («простой») преломленной волны в потоке между двумя клиньями.

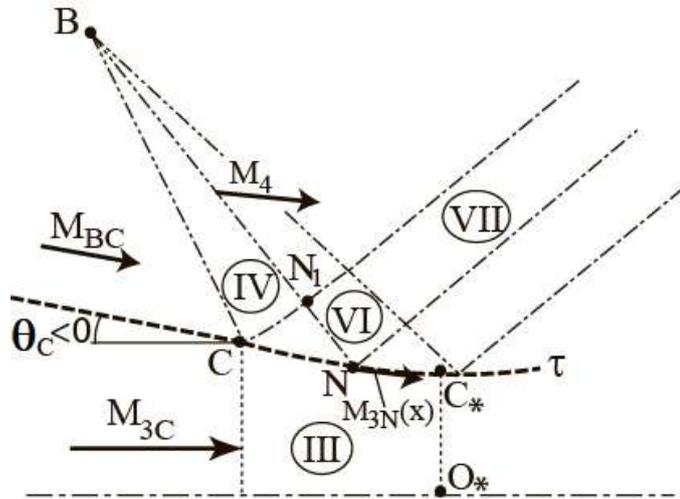


Рисунок 2.9 – Падение волны разрежения IV на тангенциальный разрыв – границу области квазиодномерного течения III (фрагмент рис. 2.7,б с дополнительными обозначениями)

Здесь  $\tau$  – тангенциальный разрыв ( $\theta_c$  – его угол наклона в точке С падения головной характеристики волны разрежения); III – «виртуальное сопло» ( $C_*O_*$  – его «критическое сечение»;  $M_{3C}$  – число Маха потока непосредственно под точкой С;  $M_{3N}$  – число Маха потока в произвольной точке N непосредственно под тангенциальным разрывом); IV – падающая волна разрежения (BC – ее головная характеристика второго семейства;  $M_{BC}$  – число Маха на характеристике BC;  $M_4$  – число Маха потока на произвольной падающей характеристике  $BN_1$ ); VI – область взаимодействия; VII – отраженная волна.

Расчеты сверхзвуковой части течения показывают, что градиенты газодинамических переменных в области за отраженным скачком уплотнения малы по сравнению с интенсивным изменением параметров потока в области IV (см. рис. 2.7). Например, участок TC медленного отклонения потока на тангенциальном разрыве в несколько раз длиннее сектора  $CC_*$  его разворота в противоположном направлении на несколько бóльший (по абсолютной величине) угол. Таким образом, позволительно рассматривать параметры

потока на характеристике  $BC$  как усредненные и одинаковые. Саму характеристику  $BC$  при этом следует рассматривать как прямолинейную, а течение в области  $IV$  – как центрированную волну Прандтля-Майера с прямолинейными характеристиками второго семейства.

Граничная характеристика  $BC$  также является слабым разрывом: линии тока претерпевают конечный разрыв кривизны при пересечении этой линии. В частности, кривизна тангенциального разрыва  $\tau$  изменяется резко и, как правило, скачкообразно становится положительной в точке  $C$ . Таким образом, тангенциальный разрыв  $\tau$  становится выпуклым вниз.

Среднее число Маха потока  $M_{BC}$  на характеристике  $BC$  определяется следующим образом:

$$M_{BC} = 1/\sin(\theta_C + \text{arctg} \Delta_{xy} + n\pi). \quad (2.43)$$

Здесь  $n = 0$  при  $x_C > x_B$ ;  $n = 1$  в противоположном случае;

$\Delta_{xy} = (y_C - y_B)/(x_C - x_B)$ ;  $\theta_C$  – угол течения в точке  $C$ .

Следующее соотношение справедливо для произвольной внутренней прямолинейной характеристики  $BN_1$  волны разрежения  $IV$ :

$$(y_{N_1} - y_B)/(x_{N_1} - x_B) = \text{tg}(\theta_C + \nu(M_4) - \nu(M_{BC}) - \alpha(M_4)). \quad (2.44)$$

Здесь  $\nu(M)$  – функция Прандтля-Майера.

Соотношение (2.44) определяет число Маха потока  $M_4$  на этой произвольной характеристике, а также угол наклона и параметры течения на ней не только в области  $IV$ , но и на участке  $N_1N$  внутри зоны  $VI$ . Связав углы отклонения потока в падающей ( $IV$ ) и в отраженной ( $VII$ ) волнах Прандтля-Майера, легко получить следующее уравнение для формы сектора  $DC$  тангенциального разрыва  $\tau$ :

$$y'_\tau(x_\tau) = \text{tg}(\theta_C + 2\nu(M_4) - \nu(M_{BC}) - \nu(M_N)), \quad (2.45)$$

в то время как уравнение, аналогичное (2.45),

$$(y_\tau - y_B)/(x_\tau - x_B) = \text{tg}(\theta_C + \nu(M_4) - \nu(M_{BC}) - \alpha(M_4)), \quad (2.46)$$

определяет число Маха потока  $M_4$  в падающей волне. Число Маха  $M_N$  на верхней стороне тангенциального разрыва определяется из условия равенства статических давлений аналогично (2.28):

$$\pi(M_N)/\pi(M_{BC}) = \pi(M_{3N})/\pi(M_{3C}), \quad (2.47)$$

а число Маха  $M_{3N}$  на его нижней стороне определяется законом сохранения массы в следующей форме, аналогичной (1.22):

$$y_N/y_C = q(M_{3N})/q(M_{3C}). \quad (2.48)$$

Уравнение (2.45) с ограничениями (2.43, 2.44, 2.46-2.48) позволяет построить тангенциальный разрыв  $\tau$  за точкой  $C$  по крайней мере до тех пор, пока поток снизу от него не достигнет критической скорости (т.е. пока не выполнится условие  $M_{3N} = 1$ ).

Применяя решение о взаимодействии косога скачка уплотнения с веером характеристик встречной волны разрежения, легко обобщить уравнения (2.43-2.48) на случай воздействия преломленной нецентрированной волны.

### *2.2.7. Общий алгоритм расчета ударно-волновой структуры течения с маховским отражением*

Рассмотренные выше уравнения позволяют рассчитать ударно-волновую структуру всего исследуемого потока, если заданы определяющие условия (значения числа Маха невозмущенного потока  $M$ , угол наклона  $\sigma_1$  падающего скачка и показатель адиабаты газа). Одна неизвестная величина (высота  $y_T$  главного скачка) назначается в первом приближении достаточно произвольно и уточняется итерационно. Для точной оценки высоты ножки Маха в струйных [56, 62, 145] и внутренних (сопловых, канальных) [62, 145] течениях был предложен следующий алгоритм:

1. Задаются значения  $M$ ,  $\sigma_1$  и  $\gamma$ , соответствующие рассматриваемому случаю. Решается задача локального расчета тройной конфигурации, возникающей при маховском отражении скачка 1. Полученное решение

определяет интенсивности  $J_2$  и  $J_3$  отраженного и главного скачков в окрестности тройной точки, а также числа Маха  $M_{2T}$  и  $M_{3T}$  течения за этими скачками и начальный угол  $\theta_{3T}$  наклона тангенциального разрыва  $\tau$ .

2. Назначается некоторое начальное оценочное значение  $y_T$  (высота тройной точки, она же размер маховского скачка) на первой итерации.

3. Форма отраженного скачка уплотнения 2 на участке  $TB$  определяется уравнениями (2.36) и (2.37). Эти уравнения необходимо интегрировать вплоть до границы перерасширенной струи или точки пересечения скачка уплотнения с первой характеристикой веера характеристик встречной волны разрежения (т.е. до точки  $B$ ). Таким образом, определяются число Маха потока  $M_{2B}$  и угол поворота потока  $\beta_{2B}$  на скачке уплотнения 2 в точке  $B$ .

4. Интегрируются уравнения (2.31-2.34), определяющие форму тангенциального разрыва  $\tau$  в секторе  $TC$  (а также параметры течения с обеих его сторон). Одновременно решаются уравнения (2.35), определяющие форму первой падающей характеристики  $BC$  (и параметры течения вдоль неё) вплоть до точки  $C$  её пересечения с тангенциальным разрывом.

5. При анализе маховского отражения в сужающемся канале между клиньями решается также задача о взаимодействии косога скачка уплотнения с веером характеристик волны разрежения. Применяя методы, разработанные Ли и Бен-Дором [60] или Мешковым и Омельченко [61], восстанавливается форма взаимодействующего скачка  $BB_1$  и параметры течения в исходящей преломленной волне разрежения  $V$ .

6. Параметры течения на первой граничной характеристике волны разрежения, падающей на тангенциальный разрыв, усредняются. Уравнения (2.43-2.48) определяют форму тангенциального разрыва на участке  $CC_*$ . Эти уравнения интегрируются до тех пор, пока не будет выполнено одно из двух следующих условий: полный горизонтальный поворот разрыва  $\tau$  (выражающийся условием  $\theta_\tau = 0$ ) или увеличение скорости потока с его

нижней стороны до критического значения ( $M_{3r} = 1$ ). В первом случае высота  $y_T$  тройной точки, рассматриваемая на данной итерации, считается слишком большой, во втором случае – слишком малой.

7. На основе вышеупомянутого вывода о значении высоты тройной точки, корректируется значение  $y_T$  высоты маховского скачка и происходит возврат к п. 3. Результат последней итерации (при достижении достаточной точности) считается окончательным.

Таким образом, задача вычисления высоты тройной точки (с соответствующим анализом всего поля течения и его ударно-волновой структуры) сводится к краевой задаче для нескольких обыкновенных дифференциальных уравнений.

Расчет показал отсутствие численных неустойчивостей при разумно заданных параметрах течения, по крайней мере, в сверхзвуковом струйном течении с числом Маха  $M > 2$ , когда интенсивность падающего скачка удовлетворяет неравенству (2.20). Итерационный расчет размера маховского скачка с помощью обычного ПК и выбранного широко распространенного программного обеспечения (MATLAB 2017) занимает около десяти секунд, в том время как решение аналогичной задачи при расчёте сверхзвуковой части течения методом характеристик второго порядка точности занимает несколько минут на каждой итерации (итого – не менее нескольких часов). Прямой расчет поля течения методами вычислительной газовой динамики с использованием хорошо известных кодов (например, ANSYS Fluent, примененного в [150, 151, 152] к аналогичным задачам) занимает около двух часов на одном компьютере, но не позволяет оценить размер маховского скачка и форму других газодинамических разрывов из-за их недостаточного разрешения, а также применить дифференциальные анализаторы ударных волн [116] к полученным полям течений.

### 2.2.8. Результаты применения предлагаемой аналитической модели и её экспериментальная верификация

Результаты расчета высоты тройной точки  $y_T$  (отнесенной к половине ширины выходного сечения сопла  $h$ ) в перерасширенном струйном течении представлены в таблице 2.1 (см. также рис. 2.10) для числа Маха потока  $M = 5$  и разных углов  $\sigma_1$  падения скачка уплотнения 1 [145]. Результаты, полученные методом характеристик для всей сверхзвуковой части поля течения [115], представлены в последней строке табл. 2.1. Аналитические и численные данные различаются примерно на 0.5-1%; результаты их сравнения представлены на рис. 2.10. Следовательно, предложенный приближенно-аналитический метод имеет очень большую точность, вполне достаточную для быстрого решения соответствующих задач, возникающих в авиационном и ракетном двигателестроении. Расчет аналогичных характеристик ударно-волновой структуры при числах Маха  $M = 3$  и  $M = 4$  продемонстрировал даже бóльшую точность, чем представлено в табл. 2.1.

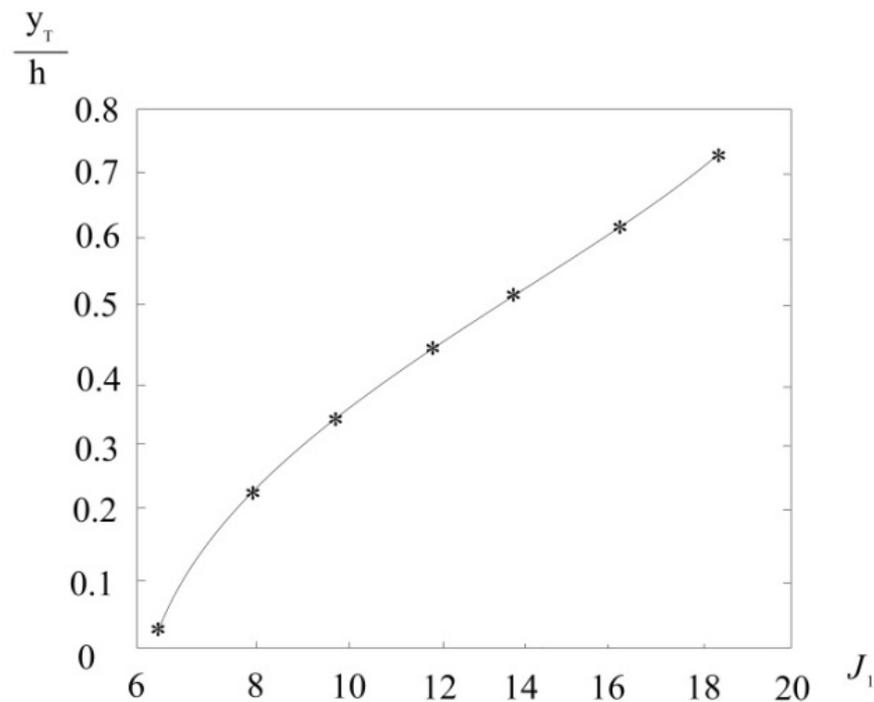


Рисунок 2.10 – Значения безразмерной высоты тройной точки ( $y_T/h$ ), определенные аналитически (сплошная линия) и численно (звездочки) в зависимости от интенсивности  $J_1$  падающего скачка

Таблица 2.1

Результаты расчёта размера маховского скачка  $y_T/h$ , полученные двумя методами

$\sigma_1, ^\circ$	31	35	39	43	47	51	55	59
$y_T/h$ , предлагаемый метод	0.046	0.243	0.363	0.455	0.532	0.602	0.673	0.753
$y_T/h$ , метод характеристик	0.046	0.245	0.364	0.457	0.536	0.607	0.677	0.756

Как показано на рис. 2.10, размер главного (маховского) скачка является непрерывной функцией угла  $\sigma_1$ , начиная со значения  $y_T = 0$  при  $\sigma_1 = 30.796^\circ$ , соответствующего критерию фон Неймана маховского отражения.

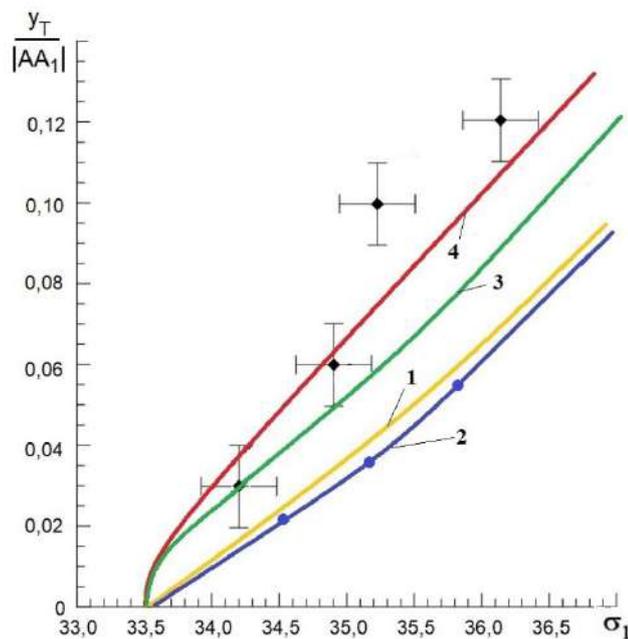


Рисунок 2.11 – Значения безразмерной высоты главного скачка уплотнения ( $y_T/|AA_1|$ ) при маховском отражении в сужающемся канале в зависимости от угла  $\sigma_1$  наклона падающего скачка

Отметим, что при больших значениях интенсивности падающего скачка (при  $\sigma_1 = 57^\circ$  и более), веер характеристик волны разрежения IV не полностью поворачивает поток в горизонтальном направлении с одновременным переходом потока в области III через критическую скорость. Представленные решения основаны на искусственном удлинении веера характеристик волны разрежения. Предполагается, что течение газа по «виртуальному соплу» может оставаться дозвуковым при столь глубоком перерасширении (отрыв потока

внутри сопла, а также возникновение отошедшего скачка при входе в сверхзвуковой воздухозаборник здесь не исследуются).

Значения безразмерной высоты маховского скачка, возникающего в сужающемся канале (тракте сверхзвукового воздухозаборника), приведены на рис. 2.11 в зависимости от угла наклона падающего скачка ( $\sigma_1$ ) в потоке с числом Маха  $M = 3.98$ . Результаты, показанные на рис. 2.11, лежат в пределах ошибок измерения экспериментальных данных [21], тогда как результаты применения аналитической модели [58] отличаются от них на 20-25%, а приближенной модели [52] – даже в большей степени (40-90%).

На рис. 2.11 число Маха потока  $M = 3.98$ ; большие крестики соответствуют экспериментальным данным [21]; кривая 1 получена при применении инженерного подхода [52]; кружки и аппроксимирующая кривая 2 – при использовании метода [53]; кривая 3 – результаты использования метода [58]; 4 – данные [145], полученные путем применения предлагаемого аналитического метода.

Таким образом, на основе полученных ранее результатов решения отдельных задач взаимодействия газодинамических разрывов и волн, включая решение для тройной конфигурации маховского отражения, сопряжение волны Прандтля-Майера с предшествующим догоняющим скачком уплотнения, встречным скачком и квазиодномерным потоком, взаимодействие падающей центрированной или простой волны разрежения с тангенциальным разрывом, разработана новая комплексная аналитическая модель ударно-волновой структуры сверхзвукового течения с маховским отражением. На основе результатов, полученных для сверхзвукового перерасширенного струйного течения или течения в сужающемся канале, показана его высокая точность, особенно при определении размера главного (маховского) скачка.

Следующим необходимым шагом для адаптации этой аналитической модели к реальным потокам является учет возможного импульсного подвода тепла на маховском скачке, а также эффектов реального газа, существенных при нерегулярном отражении в потоках с большими числами Маха.

### **2.3. Неоднозначность решений для ударно-волновых структур, образующихся в высокоскоростных потоках газа с малым показателем адиабаты**

Аналитическая модель, изложенная в § 2.2, позволяет с высокой точностью оценить высоту тройной точки, другие параметры ударно-волновой структуры и поля течения с маховским отражением в целом. Как показывают многочисленные экспериментальные и численно полученные данные [25-29, 32-37, 40-44], эти параметры (включая размер главного скачка) являются единственными реализуемыми, если маховское отражение действительно возникает.

В то же время решение с маховским отражением падающего скачка уплотнения заданной интенсивности, как известно, является не единственным при заданных граничных условиях. Например, в обширной области параметров задачи (dual solution domain) сосуществуют решения для стационарного регулярного и маховского отражения косоугольного скачка [1, 17-20, 44]. По современным представлениям о гистерезисе, маховское отражение сохраняется внутри этой области, например, при струйном истечении перерасширенной струи из сверхзвукового сопла взлетающей ракеты или при входе в сверхзвуковой воздухозаборник ускоряющегося летательного аппарата, но не в процессах обратной направленности.

Как показано далее, с решением для маховского отражения скачка уплотнения заданной интенсивности могут сосуществовать решения для поля течения с отошедшим («выбитым») скачком или для тройной конфигурации догоняющих скачков уплотнения (см., например, [144]).

Вопросы устойчивости и неоднозначности решений для маховского отражения скачков уплотнения особенно актуальны в связи с развитием аэрокосмической техники, совершающей полеты с большими сверхзвуковыми скоростями; при этом образуются сильные скачки уплотнения, более адекватно описываемые математическими моделями течений газа со сниженным (по сравнению с двухатомным газом) «эффективным» показателем адиабаты.

Именно для таких высокоскоростных течений газа с уменьшенным соотношением удельных теплоемкостей были найдены [69] и теоретически исследованы [70-77] тройные конфигурации маховского отражения с отрицательным (по отношению к набегающему потоку) углом наклона отраженного скачка. Возможность реализации таких («отрицательных») тройных конфигураций, их устойчивость и однозначность соответствующих решений традиционно представляются сомнительными. Решения, соответствующие формированию «отрицательных» конфигураций, обычно всегда весьма неоднозначны [144], и необходимо подтверждать их реализуемость (как и устойчивость возникающих ударно-волновых структур) в каждом отдельном практически важном случае.

Таким образом, для теории взаимодействия газодинамических разрывов и ее практических приложений важно определить области неоднозначности решения для ударно-волновых структур, которые могут возникнуть при одних и тех же параметрах сверхзвукового стационарного течения и ветвящегося скачка уплотнения [144, 166].

Если не указано иное, во всех примерах расчета, приведенных в § 2.3, рассматриваются течения газа с показателем адиабаты  $\gamma = 1,2$ .

### *2.3.1. Математический аппарат исследования тройных конфигураций скачков уплотнения*

Тройные конфигурации представляют собой ударно-волновые системы, состоящие из трех скачков уплотнения и тангенциального разрыва, исходящего из их общей (тройной) точки ( $T$  на рис. 1.3, а-е). Такие конфигурации возникают во многих сверхзвуковых течениях: в сопловых аппаратах, струях и воздухозаборниках, при сверхзвуковом обтекании тел, при взаимодействии сверхзвуковых струй с преградами, в струйных технологиях и других приложениях сверхзвуковой аэрогазодинамики.

Скачки  $j_i$  ( $i = 1..3$ , рис. 1.3,а-е), составляющие тройную конфигурацию, могут быть прямыми и косыми; в последнем случае они осуществляют поворот

сверхзвукового потока перед ними на ненулевой угол  $\beta_i$ . В зависимости от взаимного соотношения углов поворота потока на скачках, различают конфигурации первого (ТК-1,  $\beta_1\beta_2 < 0$ ,  $\beta_1\beta_3 < 0$ , рис. 1.3,а), второго (ТК-2,  $\beta_1\beta_2 < 0$ ,  $\beta_1\beta_3 > 0$ , рис. 1.3,в) и третьего (ТК-3,  $\beta_1\beta_2 > 0$ ,  $\beta_1\beta_3 > 0$ , рис. 1.3,д) типа. Стационарная маховская конфигурация (СМК) с прямым главным («маховским») скачком  $j_3$  ( $\beta_3 = 0$ , рис. 1.3,б) является переходной между структурами первого и второго типа и соответствует также известному критерию «механического равновесия» фон Неймана [8, 16] смены вида отражения скачка  $j_1$  от плоскости симметрии или твердой поверхности. Конфигурация ТКП-2-3 с прямым скачком  $j_2$  ( $\beta_2 = 0$ , рис. 1.3,г) занимает промежуточное положение между ТК-2 и ТК-3.

Принято считать, что конфигурации второго типа образуются при нерегулярном (маховском) отражении скачков уплотнения, а ТК-1 и ТК-3 – в частных случаях регулярного взаимодействия встречных и догоняющих скачков. Виды маховского отражения скачков уплотнения с образованием ТК-1 и ТК-3, названные именами Гудерля, фон Неймана, Васильева, крайне редко реализуются в установившихся течениях с большими сверхзвуковыми скоростями [20, 44]. Однако при нерегулярном взаимодействии догоняющих и встречных скачков возможно образование разветвленных ударно-волновых структур с несколькими тройными конфигурациями всех трех типов [1, 18, 20].

Условия совместности на тангенциальном разрыве  $\tau$  позволяют связать интенсивности  $J_i$  скачков и углы  $\beta_i$  поворота потока соотношениями (1.18). При этом выражение  $J_1J_2 = J_3$  записывается в виде (1.19)

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 = \Lambda_3 \quad (2.49)$$

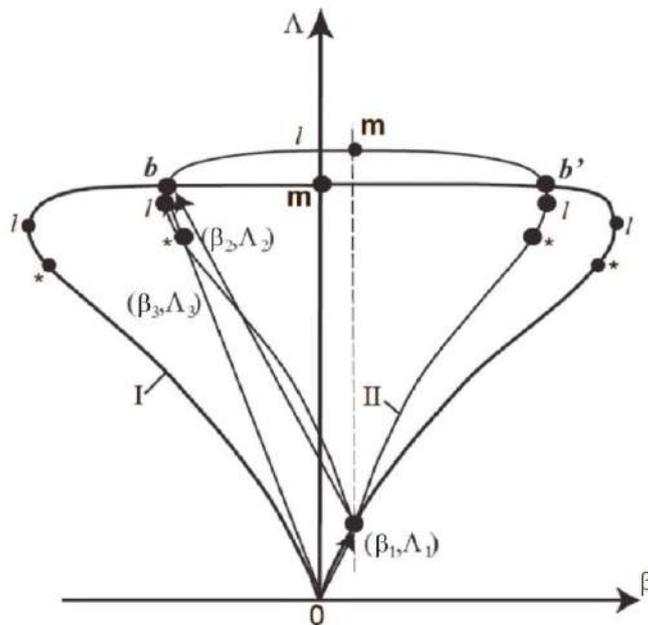
где  $\Lambda_i = \ln J_i$  ( $i = 1..3$ ), а углы  $\beta_i$  поворота потока и числа Маха  $M_i$  за скачками связаны с интенсивностями  $J_i$  скачков и числами Маха  $M_{i-1}$  перед ними формулами вида (1.4) и (1.6):

$$\operatorname{tg}|\beta_i| = \sqrt{\frac{(1+\varepsilon)M_{i-1}^2 - J_i - \varepsilon}{J_i + \varepsilon}} \frac{(1-\varepsilon)(J_i - 1)}{(1+\varepsilon)M_{i-1}^2 - (1-\varepsilon)(J_i - 1)}. \quad (2.50)$$

$$M_i = \sqrt{\frac{[(J_i + \varepsilon)M_{i-1}^2 - (1-\varepsilon)(J_i^2 - 1)]}{[J_i(1 + \varepsilon J_i)]}} \quad (2.51)$$

( $M_{i-1} \equiv M$  для скачков  $j_1$  и  $j_3$ ).

Для расчета тройной конфигурации должны быть заданы параметры невозмущенного потока (его число Маха  $M$  и показатель адиабаты  $\gamma$ ) и какой-либо параметр ветвящегося скачка  $j_1$  (например, его интенсивность). Получаемое решение наглядно представляется на плоскости ударных поляр  $(\beta; \Lambda)$ , показанной на рис. 2.12. Сердцевидная кривая (поляра) I на рис. 2.12,а-е представляет множество скачков уплотнения, способных образоваться в потоке с числом Маха  $M$ , поляра II – в потоке с числом Маха  $M_1$ , предварительно повернутом на угол  $\beta_1$  на поверхности скачка  $j_1$ . Точка  $a$  на поляре I соответствует заданным параметрам первого скачка, точка  $b$  пересечения поляр определяет параметры других скачков. Возможное наличие нескольких точек пересечения ударных поляр (точки  $b, b', b''$  на рис. 2.12,б-в) указывает на неоднозначность решения системы (2.21, 2.49-2.51) при заданных  $M, J_1$  и



а)

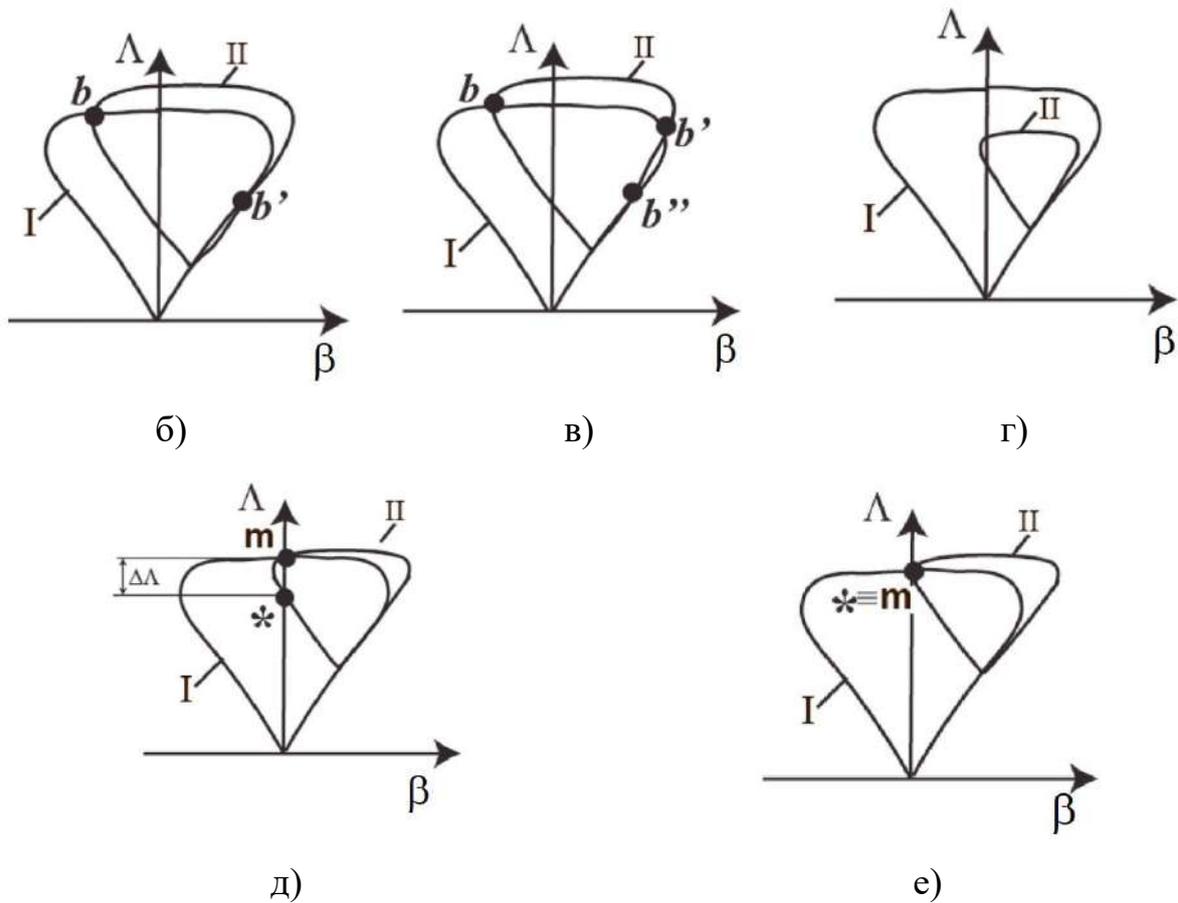


Рисунок 2.12 – Графическое решение тройных конфигураций на плоскости ударных полях: а) основное решение; б) «основное» решение и «альтернативное»; в) «основное» решение и два «альтернативных»; г) отсутствие решения; д) дуализм регулярного/маховского отражения при  $M = M_{h2}$ ; е) дуализм регулярного/маховского отражения при  $M = M_{h1}$

Среди множества точек на ударных полях, соответствующих особым свойствам скачков уплотнения и потоков за ними, в данном случае наиболее существенны:

- точка  $m$ , соответствующая образованию прямого скачка  $j_i$  с нулевым углом поворота ( $\beta_i = 0$ ) и интенсивностью  $J_m = (1 + \varepsilon)M_{i-1}^2 - \varepsilon$ ;

- точка  $l$ , соответствующая косому скачку с углом поворота  $\beta_l(M_{i-1}, \gamma)$ , максимальным для одиночного скачка (суммарный угол поворота на нескольких скачках уплотнения, согласно [62, 118-120], может быть существенно больше). Интенсивность  $J_l(M_{i-1}, \gamma)$  такого скачка определяется соотношением (1.5):

$$J_i = \frac{M^2 - 2}{2} + \sqrt{\left(\frac{M^2 - 2}{2}\right)^2 + (1 + 2\varepsilon)(M^2 - 1) + 2};$$

- точка “\*”, соответствующая косому скачку  $j_i$  с критической скоростью течения за ним ( $M_i = 1$ ). Зависимость (1.7) в виде

$$J_*(M) = \frac{M^2 - 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{M^2 - 1}{2}\right)^2 + \varepsilon(M^2 - 1) + 1}$$

определяет «критическую» интенсивность  $J_*(M_{i-1}, \gamma)$  такого скачка.

### 2.3.2. Условия существования и неоднозначность решений для тройных конфигураций

Необходимость реализации сверхзвукового течения за скачком  $j_1$  ограничивает сверху диапазон углов поворота потока  $\beta_1$  областью под кривой 1 (рис. 2.13), соответствующей условию  $\beta_1 = \beta_*(M_{i-1}, \gamma)$ . При больших числах Маха ( $M \rightarrow \infty$ ) угол поворота на скачке уплотнения с критической скоростью за ним стремится к конечному пределу:

$$|\beta_1| = \arctg \left[ (1 - \varepsilon) / 2\sqrt{\varepsilon} \right] = 56.443^\circ. \quad (2.52)$$

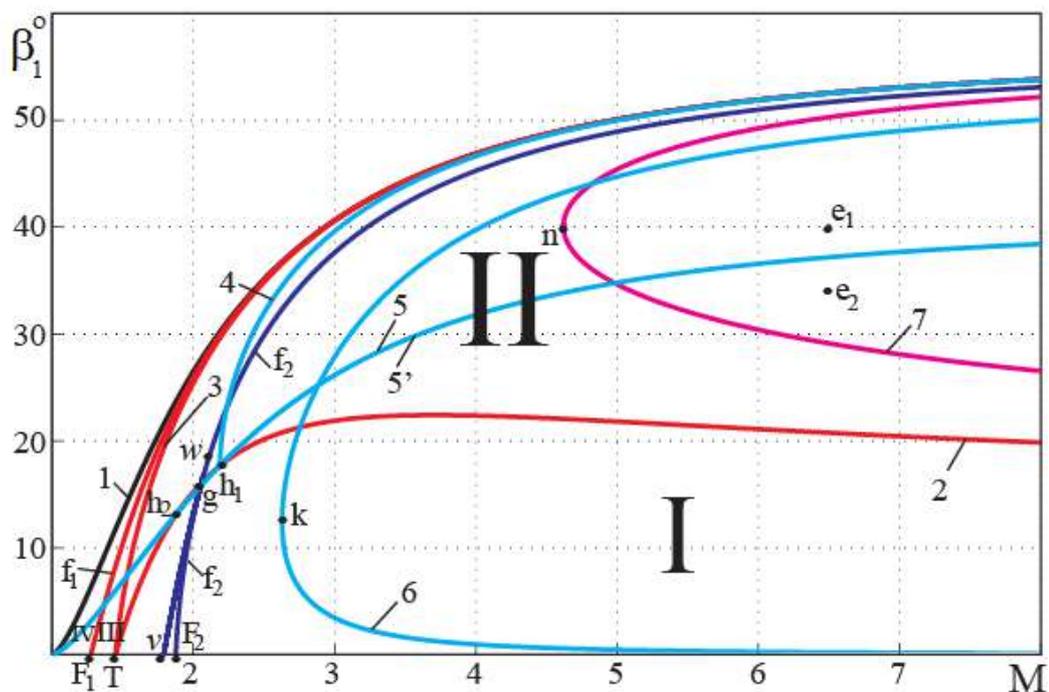


Рисунок 2.13 – Области неоднозначности решения на плоскости «число Маха невозмущенного течения – угол поворота потока на падающем скачке уплотнения»

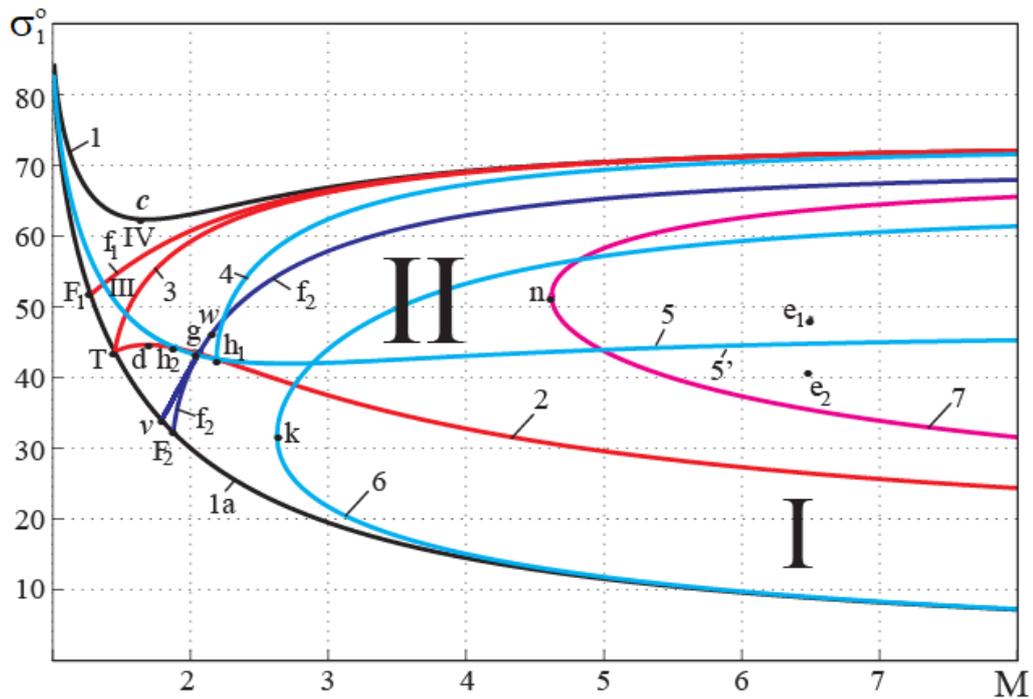


Рисунок 2.14 – Области неоднозначности решения на плоскости «число Маха невозмущенного потока – угол наклона падающего скачка»

Параметрический анализ ударно-волновых структур традиционно производится на плоскости  $(M; \sigma_1)$ , показанной на рис. 2.14. Угол  $\sigma_i$  ( $i=1..3$ ) наклона скачка  $j_i$  к вектору скорости набегающего потока перед ним связан с интенсивностью скачка соотношением (1.1)

$$|\sigma_i| = \arcsin \sqrt{(J_i + \varepsilon) / [(1 + \varepsilon) M_{i-1}^2]}.$$

Кривая 1 на рис. 2.14 соответствует скачкам с «критической» интенсивностью и ограничивает сверху область существования тройных конфигураций. Координаты нижней точки  $c$  на этой кривой соответствуют следующим параметрам ветвящегося скачка:

$$M_c = \sqrt{\frac{5-4\varepsilon}{2(1-2\varepsilon)}} = 1.683, \quad \sigma_c = \arcsin \sqrt{\frac{4(1-\varepsilon)}{5-4\varepsilon}} = 62.327^\circ,$$

а горизонтальная асимптота кривой 1 описывается соотношением

$$\sigma_1 = \arcsin(1/\sqrt{1+\varepsilon}) = 73.221^\circ. \quad (2.53)$$

Кривая 2, определяемая соотношением  $\sigma_1 = \arcsin(1/M) = \alpha(M)$ , где  $\alpha(M)$  – угол Маха, служит на рис. 2.14 нижней границей области

существования тройных конфигураций. Интенсивности  $J_2 = J_3 = J$  скачков  $j_2$  и  $j_3$  в этом предельном ( $J_1 \rightarrow 1$ ) случае определяются из решения задачи о взаимодействии косого скачка уплотнения с предшествующим слабым возмущением (догоняющей или встречной разрывной акустической характеристикой) и описываются соотношением [62, 63, 121]:

$$\sum_{i=0}^3 A_i M^{2i} = 0,$$

$$A_3 = J^2(1 + \varepsilon)^2 - 4\varepsilon(J + \varepsilon)^2,$$

$$A_2 = 4\varepsilon(1 - \varepsilon)(J + \varepsilon)(J^2 - 1) - 2(1 - \varepsilon^2)J^2(J - 1) - 4(1 - 2\varepsilon)(J + \varepsilon)^2, \quad (2.54)$$

$$A_1 = (1 - \varepsilon) \cdot \left[ 4(1 - 2\varepsilon)(J^2 - 1)(J + \varepsilon) + 4(J + \varepsilon)^2 + (1 - \varepsilon)J^2(J - 1)^2 \right],$$

$$A_0 = -4(1 - \varepsilon)^2(J + \varepsilon)(J^2 - 1).$$

Условие реализации сверхзвукового течения за скачком  $j_1$  не является достаточным для существования тройной конфигурации при заданных значениях  $M$ ,  $J_1$  и  $\gamma$ . Тройные конфигурации образуются только при параметрах скачка  $j_1$ , соответствующих областям I-III на рис. 2.13 и 2.14 (в области IV решения не существует). Одно («основное») из решений системы (2.21, 2.49-2.51) непрерывно во всей зоне I-III. Оно соответствует конфигурациям первого типа – в области I, второго типа – в области II, третьего типа – в области III.

Кривая 2, разделяющая области I и II, соответствует стационарным маховским конфигурациям и описывается соотношением вида (1.20). Начало этой кривой соответствует числу Маха  $M_T = \sqrt{(2 - \varepsilon)/(1 - \varepsilon)} = 1.449$ , крайняя верхняя точка  $d$  – параметрам ( $M_d = 1.687$ ,  $\sigma_{1d} = 44.684^\circ$ ), определяемым из соотношения (1.20) и уравнения

$$\sum_{i=0}^5 D_i M_d^{2i} = 0,$$

$$D_5 = (1 - \varepsilon) \cdot (2 - 2\varepsilon^2 + \varepsilon^3 + 2\varepsilon^4 + 2\varepsilon^5 + 3\varepsilon^6 + \varepsilon^7),$$

$$D_4 = -(1-\varepsilon)(10 + 12\varepsilon - 17\varepsilon^2 - 9\varepsilon^3 + 12\varepsilon^4 + 17\varepsilon^5 - 18\varepsilon^6 + 5\varepsilon^7),$$

$$D_3 = 12 + 37\varepsilon - 65\varepsilon^2 - 49\varepsilon^3 + 74\varepsilon^4 + 40\varepsilon^5 - 97\varepsilon^6 + 52\varepsilon^7 - 10\varepsilon^8,$$

$$D_2 = 1 - 46\varepsilon - 4\varepsilon^2 + 139\varepsilon^3 - 64\varepsilon^4 - 103\varepsilon^5 + 131\varepsilon^6 - 28\varepsilon^7 + 10\varepsilon^8,$$

$$D_1 = -\varepsilon(1-\varepsilon)(4 - 50\varepsilon + 20\varepsilon^2 + 47\varepsilon^3 - 59\varepsilon^4 + 27\varepsilon^5 - 5\varepsilon^6),$$

$$D_0 = \varepsilon^2(1-\varepsilon)^4(4 - 3\varepsilon + \varepsilon^2).$$

Горизонтальная асимптота кривой 2 соответствует значению

$$\sigma_1 = \arcsin \sqrt{\frac{2\varepsilon(1-\varepsilon)}{1 + \varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \sqrt{(1+\varepsilon)^2 - \varepsilon(1-\varepsilon)[2(1+\varepsilon)(2-\varepsilon) - \varepsilon^3(1-\varepsilon)]}}} = 16.694^\circ.$$

Область II между кривыми 2 и 3 соответствует тройным конфигурациям второго типа, образуемым при маховском отражении (рис. 1.3,в). Течение за результирующим (маховским) скачком  $j_3$  в таких конфигурациях является дозвуковым; течение за отраженным скачком  $j_2$  может быть как дозвуковым, так и (в подавляющем большинстве случаев) сверхзвуковым. Кривая 4 на рис. 2.13 и 2.14 разделяет область II на подобласти, соответствующие маховскому отражению с дозвуковым (ниже кривой 4) или сверхзвуковым (выше неё) течением за отраженным скачком. Кривая 4 начинается в точке  $h_1$ , соответствующей стационарной маховской конфигурации с критической скоростью течения за отраженным скачком. Координаты точки  $h_1$  ( $M_{h_1} = 2.188$ ,  $\sigma_{1h_1} = 42.593^\circ$ ,  $\beta_{1h_1} = 17.664^\circ$ ) определяются из уравнений для СМК и следующего соотношения:

$$\sum_{i=0}^3 H_i M_{h_1}^{2i} = 0,$$

$$H_3 = (1-\varepsilon)(1-\varepsilon - 2\varepsilon^2 + \varepsilon^4), \quad H_2 = -(4 - 6\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 + 5\varepsilon^4 - 3\varepsilon^5),$$

$$H_1 = \varepsilon(4 - 4\varepsilon - 3\varepsilon^2 + 7\varepsilon^3 - 3\varepsilon^4), \quad H_0 = -\varepsilon^2(1-\varepsilon)^3.$$

Горизонтальные асимптоты кривой 4 ( $\sigma_1 \rightarrow 72.937^\circ$ ,  $\beta_1 \rightarrow 56.439^\circ$ ) аналитически описываются громоздкими алгебраическими уравнениями высоких степеней и не совпадают с асимптотами других кривых.

Образование СМК, соответствующей кривой 2, удовлетворяет критерию фон Неймана смены типа (регулярного или маховского) отражения скачка уплотнения  $j_1$ . Критерий фон Неймана наиболее часто применяется для установившихся течений, в особенности при умеренных и больших числах Маха. При анализе нестационарных течений и установившихся сверхзвуковых течений с небольшими числами Маха широко используется критерий максимального угла поворота потока (“detachment criterion”). Согласно этому критерию, регулярное отражение скачка  $j_1$  сохраняется до тех пор, пока существует решение уравнения

$$\beta_1(M, J_1) + \beta_2(M_1, J_2) = 0, \quad (2.55)$$

где  $M_1$  – число Маха за падающим скачком, определяемое соотношением (2.51). Решение уравнения (2.55) при  $J_2 = J_1(M_1)$  определяет кривую 5 на рис. 2.13 и 2.14, в области выше которой не существует решения для регулярного отражения. Кривые 2 и 5, описывающие два критерия смены типа отражения, не пересекаются, но имеют единственную точку касания  $g$  ( $M_g = 2.030$ ,  $\sigma_{1g} = 43.516^\circ$ ,  $\beta_{1g} = 15.683^\circ$ ), определяемую уравнениями

$$\sum_{n=0}^4 G_n M_g^{2n} = 0,$$

$$G_4 = (1 - \varepsilon)(2 - 4\varepsilon + 2\varepsilon^3 - \varepsilon^4),$$

$$G_3 = -10 + 20\varepsilon - 10\varepsilon^2 - 10\varepsilon^3 + 12\varepsilon^4 - 4\varepsilon^5,$$

$$G_2 = 12 - 24\varepsilon + 10\varepsilon^2 + 16\varepsilon^3 - 18\varepsilon^4 + 6\varepsilon^5,$$

$$G_1 = -2(1 + \varepsilon)(3 - 4\varepsilon + 2\varepsilon^2)(1 - \varepsilon)^2, \quad G_0 = (1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon)^4.$$

Горизонтальная асимптота кривой 5 описывается теми же соотношениями (2.52) и (2.53), что и асимптота кривой 1.

В обширной области между кривыми 2 и 5 (“dual solution domain”) при одних и тех же параметрах скачка  $j_1$  сосуществуют решения, описывающие как регулярное, так и маховское его отражение. Вид отражения скачка в каждом

конкретном случае может зависеть от многих факторов, в том числе от предыстории течения (иметь гистерезисный характер).

Если реализуется регулярное отражение скачка  $j_1$ , то течение за отраженным скачком  $j_2$ , как правило, является сверхзвуковым, исключая тонкую область между кривыми 5 и 5'. Кривая 5' определяется из уравнения (2.55) при  $J_2 = J_*(M_1)$  и соответствует критической скорости течения за регулярно отраженным скачком.

Кривые 2 и 5' имеют две точки пересечения ( $h_1$  и  $h_2$ ). Точка  $h_1$ , такая, что  $M_{h_1} = 2.188$ ,  $\sigma_{1h_1} = 44.183^\circ$ ,  $\beta_{1h_1} = 13.299^\circ$ , определяется уравнением для соответствующего числа Маха:

$$\sum_{i=0}^6 H_i M_{h_1}^{2i} = 0,$$

$$H_6 = -(1 - \varepsilon)(1 - 6\varepsilon + 3\varepsilon^2 + 8\varepsilon^3 - \varepsilon^4 - 2\varepsilon^5 + \varepsilon^6),$$

$$H_5 = 10 - 44\varepsilon + 26\varepsilon^2 + 42\varepsilon^3 - 42\varepsilon^4 - 12\varepsilon^5 + 18\varepsilon^6 - 6\varepsilon^7,$$

$$H_4 = -31 + 85\varepsilon - 16\varepsilon^2 - 113\varepsilon^3 + 78\varepsilon^4 + 39\varepsilon^5 - 45\varepsilon^6 + 15\varepsilon^7,$$

$$H_3 = (1 - \varepsilon)(36 - 44\varepsilon - 55\varepsilon^2 + 93\varepsilon^3 + 16\varepsilon^4 - 40\varepsilon^5 + 20\varepsilon^6),$$

$$H_2 = -(1 - \varepsilon)(23 - 29\varepsilon - 48\varepsilon^2 + 57\varepsilon^3 + 9\varepsilon^4 - 30\varepsilon^5 + 15\varepsilon^6),$$

$$H_1 = (1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2)(11 - 9\varepsilon - 6\varepsilon^2 + 12\varepsilon^3 - 6\varepsilon^4), \quad H_0 = -(1 - \varepsilon)^5 \cdot (1 + \varepsilon)^2.$$

При параметрах падающего скачка, соответствующих точкам  $h_1$  и  $h_2$ , могут образоваться как стационарная маховская конфигурация, так и регулярное отражение с критической скоростью течения за отраженным скачком. Если при этом смена типа отражения соответствует точке  $h_2$ , происходит скачкообразное изменение параметров отраженного скачка, соответствующее величине  $\Delta\Lambda$  (см. рис. 2.12,д). Если же она наблюдается при параметрах падающего скачка, соответствующих точке  $h_1$ , скачок  $j_2$  не меняет своей интенсивности (рис. 2.12,е).

Горизонтальные асимптоты близко расположенных кривых 5 и 5' совпадают.

Кривая 3, соответствующая переходным конфигурациям ТКП-2-3, описывается уравнением (1.21). Она начинается в точке  $T$  и имеет горизонтальные асимптоты, описываемые уравнениями (2.52), (2.53) и совпадающие с асимптотами кривой 1.

Кривая  $f_1$ , ограничивающая сверху область существования тройных конфигураций, определяется из решения задачи взаимодействия скачка уплотнения с последующим догоняющим слабым разрывом без образования отраженных возмущений. Она характеризуется следующей зависимостью, общей для кривых  $f_1$  и  $f_2$  [62, 79, 120, 122]:

$$M = \sqrt{[A(B \mp C) - 1 + \varepsilon] / \varepsilon},$$

$$A = (1 + \varepsilon J_1) / [(1 + \varepsilon)(J_1(1 - 3\varepsilon) - 4\varepsilon^2)], \quad B = J_1(1 - 2\varepsilon - \varepsilon^2) - 2\varepsilon^2, \quad (2.56)$$

$$C = 2\varepsilon \sqrt{\varepsilon(1 + \varepsilon J_1)(J_1 + \varepsilon)}.$$

Точки  $F_1$  и  $F_2$ , служащие началами соответствующих кривых, описываются соотношением  $M_{F_{1,2}} = \sqrt{2(1 \pm \sqrt{\varepsilon}) / (1 \pm 2\sqrt{\varepsilon})}$  ( $M_{F_1} = 1.274$ ,  $M_{F_2} = 1.876$ ). Асимптоты кривых 1, 3 и  $f_1$  при больших числах Маха совпадают.

В ряде случаев одним и тем же параметрам задачи (значениям  $M$ ,  $J_1$  и  $\gamma$ ) соответствует не только вышеописанное «основное» решение (точка  $b$  на рис. 2.12, б-г), но и «альтернативные» решения (точки  $b'$  и  $b''$ ), описывающие тройную конфигурацию третьего типа. При параметрах, соответствующих области между кривыми 2 и  $f_2$  на рис. 2.14 (а также области под кривой  $f_2$  на рис. 2.13), существует одно решение для «альтернативной» ТК-3, а в криволинейном треугольнике  $F_2vw$  – два таких решения, образующихся на кривой  $vw$  из точки касания ударных поляр. Параметры тройной конфигурации, соответствующие точке  $v$ , определяются уравнениями (2.56) для числа Маха ( $M_v = 1.790$ ) и следующего уравнения для интенсивностей скачков  $j_2$  и  $j_3$  ( $J_2 = J_3 = J$ ):

$$\sum_{i=0}^8 V_i J^i = 0,$$

$$V_8 = (1 - \varepsilon)^4, \quad V_7 = -2(1 - \varepsilon)^2(1 - 3\varepsilon + 11\varepsilon^2 - \varepsilon^3),$$

$$V_6 = -2\varepsilon(9 - 44\varepsilon + 72\varepsilon^2 - 64\varepsilon^3 + 35\varepsilon^4),$$

$$V_5 = 4\varepsilon(7 - 26\varepsilon + 62\varepsilon^2 - 78\varepsilon^3 + 31\varepsilon^4 - 20\varepsilon^5),$$

$$V_4 = 3 - 18\varepsilon + 114\varepsilon^2 - 304\varepsilon^3 + 275\varepsilon^4 - 326\varepsilon^5 + 48\varepsilon^6 - 32\varepsilon^7,$$

$$V_3 = -2 + 14\varepsilon - 100\varepsilon^2 + 156\varepsilon^3 - 378\varepsilon^4 + 118\varepsilon^5 - 128\varepsilon^6,$$

$$V_2 = -4\varepsilon(3 - 6\varepsilon + 41\varepsilon^2 - 20\varepsilon^3 + 42\varepsilon^4),$$

$$V_1 = -8\varepsilon^2(3 - 2\varepsilon + 11\varepsilon^2), \quad V_0 = -16\varepsilon^3.$$

Координаты точки  $w$  определяются из уравнения

$$\sum_{i=0}^5 W_i M_w^{2i} = 0,$$

$$W_5 = 4\varepsilon^2(1 - 3\varepsilon - 6\varepsilon^2),$$

$$W_4 = -(1 - 7\varepsilon + 18\varepsilon^2 + 14\varepsilon^3 + 53\varepsilon^4 + 113\varepsilon^5 - 64\varepsilon^6),$$

$$W_3 = 2(1 - \varepsilon)(2 - 4\varepsilon + \varepsilon^2 - 83\varepsilon^3 - 115\varepsilon^4 - 13\varepsilon^5 - 172\varepsilon^6),$$

$$W_2 = -(1 - \varepsilon)^2(5 - 13\varepsilon + 113\varepsilon^2 + 249\varepsilon^3 + 230\varepsilon^4 + 824\varepsilon^5 + 256\varepsilon^6),$$

$$W_1 = 4(1 - \varepsilon)^3(1 - 6\varepsilon - 41\varepsilon^2 - 56\varepsilon^3 - 154\varepsilon^4 - 128\varepsilon^5),$$

$$W_0 = -4(1 - \varepsilon)^4(1 + 8\varepsilon + 21\varepsilon^2 + 34\varepsilon^3 + 64\varepsilon^4)$$

для соответствующего числа Маха ( $M_w = 2.074$ ) и соотношения (2.56), связывающего параметры тройной конфигурации на кривой  $f_2$ .

При  $\gamma \geq 1.25$  кривая  $f_2$ , ограничивающая область существования «альтернативных» ТК-3, имеет крайнюю левую точку  $u$  ( $M_u = 2.462$ ,  $J_u = 1.515$  при  $\gamma = 1.4$ ), определяемую соотношениями

$$\sum_{i=0}^3 U_i M_u^{2i} = 0,$$

$$U_3 = (1 - 3\varepsilon)^2, \quad U_2 = -(3 - 7\varepsilon)(1 - 2\varepsilon + 5\varepsilon^2),$$

$$U_1 = (1 - \varepsilon)(3 - 23\varepsilon + 25\varepsilon^2 + 27\varepsilon^3), \quad U_0 = -(1 - \varepsilon)^2(1 + 10\varepsilon - 27\varepsilon^2),$$

$$\sum_{i=0}^3 u_i J_u^i = 0,$$

$$u_3 = 1 - 3\varepsilon, \quad u_2 = \varepsilon(1 - 11\varepsilon), \quad u_1 = -\varepsilon(4 + \varepsilon + 9\varepsilon^2), \quad u_0 = -\varepsilon(1 + 5\varepsilon).$$

При  $\gamma < 1.25$  крайняя левая точка отсутствует, и кривая  $f_2$  соответствует единственному решению при любом числе Маха, превосходящем  $M_{F2}$ . Горизонтальная асимптота кривой  $f_2$  описывается следующим образом:

$$\sigma_1 = \arcsin \frac{\sqrt{1-3\varepsilon}}{1-\varepsilon} = 69.732^\circ, \quad \beta_1 = \arctg \sqrt{\frac{(1+\varepsilon)(1-3\varepsilon)}{4\varepsilon}} = 55.902^\circ.$$

Течение за скачками  $j_1$  и  $j_2$ , приходящими в тройную точку «альтернативной» конфигурации, сверхзвуковое. Течение за результирующим скачком  $j_3$  является дозвуковым при параметрах скачка  $j_1$ , соответствующих области справа от кривой 6 на рис. 2.13 и 2.14. Крайняя левая точка  $k$  кривой 6 соответствует значениям  $M_k = 2.628$ ,  $\sigma_{1k} = 31.772^\circ$ ,  $\beta_{1k} = 12.463^\circ$ . Верхняя ветвь кривой 6 имеет горизонтальную асимптоту, определяемую, исходя из условия  $J_1/M^2 \rightarrow C$ , где значение  $C$  является корнем уравнения

$$\sum_{i=0}^3 E_i C^i = 0,$$

$$E_3 = (1-\varepsilon)^2(1-2\varepsilon+9\varepsilon^2), \quad E_2 = -(1-\varepsilon)(3-7\varepsilon+19\varepsilon^2+11\varepsilon^3+6\varepsilon^4),$$

$$E_1 = (1+\varepsilon)(3-11\varepsilon+22\varepsilon^2-6\varepsilon^3+7\varepsilon^4+\varepsilon^5), \quad E_0 = -(1+\varepsilon)^2(1-\varepsilon)^4,$$

откуда

$$\sigma_1 = \arcsin \sqrt{C/(1+\varepsilon)} = 64.109^\circ \text{ и } \beta_1 = \arctg \left[ \sqrt{C(1+\varepsilon-C)} / (\gamma - C) \right] = 53.501^\circ.$$

Нижняя ветвь кривой 6 при больших числах Маха соответствует слабому скачку  $j_1$  ( $J_1 \rightarrow 1$ ,  $\beta_1 \rightarrow 0$ ,  $\sigma_1 \rightarrow \alpha(M)$ ).

Таким образом, существует обширная область параметров задачи, внутри которой для одного и того же ветвящегося скачка уплотнения  $j_1$  сосуществуют:

- маховское отражение с дозвуковым течением за главным скачком;
- течение за отраженным скачком при этом может быть как сверхзвуковым, так и дозвуковым;

- регулярное отражение (как правило, со сверхзвуковым течением за отраженным скачком);

- «альтернативная» тройная конфигурация третьего типа. При этом течение за результирующим скачком  $j_3$  в большинстве случаев является дозвуковым.

Дозвуковой характер течения за исходящими скачками в условиях неоднозначности решения указывает на возможную неустойчивость и зависимость вида образующейся ударно-волновой структуры от внешних возмущений, расположенных ниже по потоку, а также от начальных условий её образования.

### *2.3.3. Неоднозначность решения для тройных конфигураций второго типа с отрицательным углом наклона отраженного скачка*

При больших числах Маха течения и уменьшенных (по сравнению с  $\gamma = 1.4$ ) показателях адиабаты газа возможно образование тройных конфигураций с отрицательным (по отношению к набегающему потоку) углом наклона скачка  $j_2$  (рис. 1.3,е). Полеты с большими сверхзвуковыми скоростями, использование многоатомных углеводородных топлив, а также снижение «эффективного» показателя адиабаты газа на сильных скачках уплотнения и ударных волнах [8, 17-19] делают анализ реализуемости и устойчивости таких («отрицательных») тройных конфигураций (ОТК) особенно актуальным.

«Отрицательные» тройные конфигурации теоретически и численно исследованы в [69-77, 92, 123, 124]; аналитическое описание области существования ОТК впервые дано в [75]. Согласно результатам [75], ОТК всегда относятся к тройным конфигурациям второго типа (ТК-2) и образуются при маховском отражении скачков, параметры которых соответствуют области справа от кривой 7 на рис. 2.13 и 2.14, в газах с пониженными показателями адиабаты ( $\gamma < 1.392$ ). Число Маха  $M_n$ , начиная с которого возможно образование ОТК (точки  $n$  на рис. 2.13 и 2.14), растет от умеренных значений (

$M_n = 3.064$  при  $\gamma \rightarrow 1$ ) до больших ( $M_k = 4.621$ ,  $\sigma_{1k} = 51.486^\circ$ ,  $\beta_{1k} = 40.087^\circ$  при  $\gamma = 1.2$ ) и бесконечно больших (при  $\gamma \rightarrow 1.392$ ). Зависимость этого, а также других характерных значений чисел Маха, от показателя адиабаты газа представлена на рис. 2.15. Она показывает, что отмеченное здесь наложение областей существования различных ударно-волновых структур имеет место при всех малых показателях адиабаты.

Верхняя и нижняя ветви кривой 7, ограничивающей область существования ОТК, имеют горизонтальные асимптоты, описываемые соотношениями

$$\sigma_1 = \arcsin \sqrt{S_1} = 76.562^\circ, \quad \beta_1 = \operatorname{arctg} \frac{(1-\varepsilon)\sqrt{S_1(1-S_1)}}{1-(1-\varepsilon)S_1} = 55.731^\circ$$

для верхней ветви, и

$$\sigma_1 = \arcsin \sqrt{S_2} = 21.901^\circ, \quad \beta_1 = \operatorname{arctg} \frac{(1-\varepsilon)\sqrt{S_2(1-S_2)}}{1-(1-\varepsilon)S_2} = 19.808^\circ$$

для нижней ветви. Здесь  $S_1$  и  $S_2$  – соответственно, больший и меньший из корней уравнения

$$(1-\varepsilon)^3 S^5 - (1-\varepsilon^2)(4-5\varepsilon)S^4 + (1+\varepsilon)(6-2\varepsilon-7\varepsilon^2)S^3 - 2\gamma^2(2-2\varepsilon-\varepsilon^2)S^2 + \gamma^3(1+\varepsilon-\varepsilon^2-3\varepsilon^3)S - \varepsilon\gamma^4(1-\varepsilon+2\varepsilon^2) = 0,$$

лежащих на промежутке  $(0;1)$ .

Многие параметры течения (давления торможения, температуры, скорости, скоростные напоры) на сторонах тангенциального разрыва  $\tau$ , исходящего из тройной точки ОТК, различаются тем сильнее, чем ближе параметры падающего скачка соответствуют нижней ветви кривой 7. Например, согласно [76], отношения давлений торможения ( $I_{p0}$ ) и скоростных напоров потоков ( $I_d$ ) в предельном ( $M \rightarrow \infty$ ) случае на верхней ветви кривой 7 стремятся к значениям

$$I_{p0} = \left[ \frac{1+\varepsilon-S_1}{\varepsilon(2\gamma-S_1)} \right]^{\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}} = 1.736, \quad I_d = P_1 / [(2\gamma-S_1)R_1] = 3.430,$$

а на нижней ветви этой границы области существования ОТК – к значениям

$$I_{p_0} = \left[ \frac{1 + \varepsilon - S_2}{\varepsilon(2\gamma - S_2)} \right]^{\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}} = 9861.0, \quad I_d = P_2 / [(2\gamma - S_2)R_2] = 437.447.$$

Здесь

$$P_{1,2} = \gamma(1 + \varepsilon) - \gamma(3 - 2\varepsilon - 4\varepsilon^2)S_{1,2} + (1 + \varepsilon)(3 - 4\varepsilon)S_{1,2}^2 - (1 - \varepsilon)^2 S_{1,2}^3,$$

$$R_{1,2} = \gamma\varepsilon - (1 + \varepsilon)(1 - 2\varepsilon)S_{1,2} + (1 - \varepsilon)^2 S_{1,2}^2.$$

Таким образом, за «отрицательной» конфигурацией формируется течение с большим различием механических свойств потока в различных его частях. Вопрос об устойчивости такого течения требует дополнительных исследований, особенно при параметрах ОТК, соответствующих нижней части области существования на рис. 2.13 и 2.14. В этом случае различия параметров потока за тройной точкой особенно велики и, кроме того, имеет место «дуализм» решений для маховского (с образованием ОТК) и для регулярного отражения.

Течение за главным (маховским) скачком ОТК является дозвуковым. Кривая 4, разделяющая подобласти существования маховского отражения с дозвуковым и сверхзвуковым течением за отраженным скачком, проходит выше области существования ОТК. Таким образом, поток газа за отраженным скачком ОТК всегда сверхзвуковой.

Область существования ОТК при любых показателях адиабаты вложена в область под кривой  $f_2$ . Это означает, что любой скачок  $j_1$ , отражающийся с образованием ОТК, может формировать также «альтернативную» тройную конфигурацию третьего типа (т.е. конфигурацию догоняющих скачков) со сверхзвуковым (в области над верхней ветвью кривой б) или дозвуковым (в противоположном случае) течением за результирующим скачком  $j_3$ . При этом сосуществование ОТК с «альтернативной» ТК-3, течение за результирующим скачком которой дозвуковое, имеет место в большей части области существования ОТК.

Кривая 5, соответствующая известному критерию максимального угла поворота потока при смене типа отражения скачков уплотнения и ударных волн, разделяет область существования ОТК на две подобласти. В нижней из них (заштрихованной на рис. 2.13 и 2.14) имеет место дуализм регулярного и маховского отражения: скачок  $j_1$  может отражаться как нерегулярно (с отрицательным углом наклона отраженного скачка), так и регулярно. В верхней подобласти не существует решения для регулярного отражения скачка уплотнения с соответствующими параметрами.

Дуализм маховского отражения с образованием ОТК и регулярного отражения был численно продемонстрирован в [77]. Скачок уплотнения с параметрами, соответствующими точке  $p_1$  на рис. 2.13 и 2.14 ( $M = 6.5$ ,  $\beta_1 = 40^\circ$ ), не мог отражаться регулярно. Однако его ослабление под влиянием последующей волны разрежения Прандтля-Майера до интенсивности, по расчетам соответствующей  $\beta_1 = 35.519^\circ$  (точка  $p_2$ ), сделала такое отражение возможным и реализуемым в ходе вычислительного эксперимента.

Кроме трех указанных решений (маховское отражение с отрицательным углом наклона отраженного скачка; регулярное отражение; образование тройной конфигурации догоняющих скачков), при взаимодействии высокоскоростного газового потока с обтекаемыми телами возможны и другие, связанные с коренной перестройкой поля течения. К примеру, наши расчеты показывают, что изменение угла  $\beta_1$  поворота потока в системе из двух симметричных клиньев, описанной в [77], с  $43^\circ$  до  $45^\circ$  при  $M = 6.5$  приводит к образованию отошедшего скачка уплотнения, хотя решение с «отрицательной» ТК теоретически существует в обоих случаях. Иногда (при тех же параметрах задачи) в ходе численного эксперимента не удается добиться установления течения с образованием ОТК (в этих случаях предполагается реализация нестационарного (возможно, автоколебательного) режима [70]). В некоторых случаях [71] расчет показывает существование более сложных,

разветвленных конфигураций, напоминающих двойное маховское отражение в нестационарных течениях.

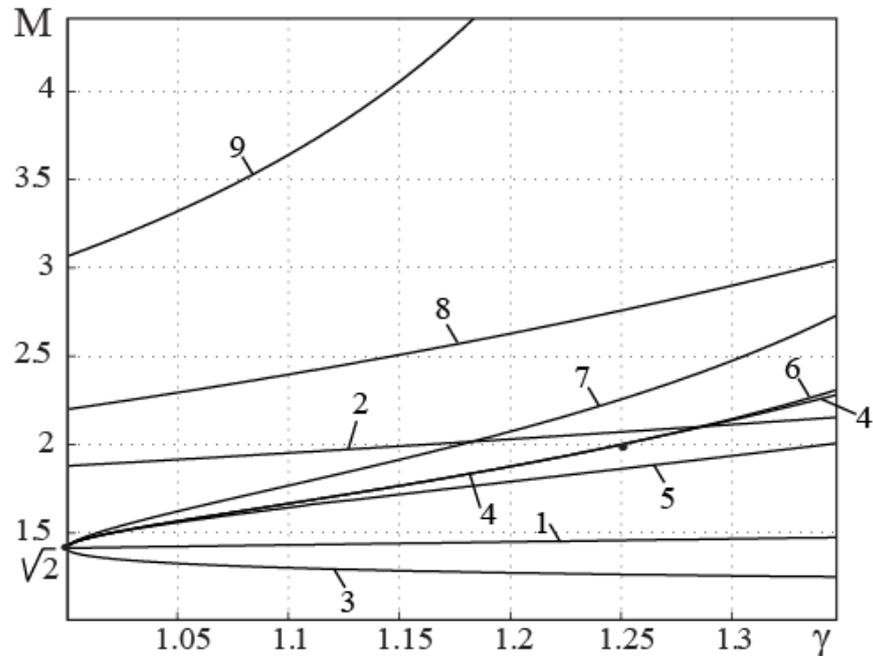


Рисунок 2.15 – Зависимость некоторых важных для рассматриваемой задачи чисел Маха от значения показателя адиабаты газа: 1)  $M_T(\gamma)$ ; 2)  $M_g(\gamma)$ ; 3)  $M_{F_1}(\gamma)$ ; 4)  $M_{F_2}(\gamma)$ ; 5)  $M_v(\gamma)$ ; 6)  $M_u(\gamma)$ ; 7)  $M_w(\gamma)$ ; 8)  $M_k(\gamma)$ ; 9)  $M_n(\gamma)$

Перекрывание областей существования различных ударно-волновых структур, отмеченное в данной работе, имеет место при всех малых показателях адиабаты. Например, все особые числа Маха, найденные аналитически в этом исследовании, существуют при всех соотношениях удельных теплоемкостей газа (см. рис. 2.15).

Таким образом, при всех параметрах ветвящегося скачка и набегающего потока, которые соответствуют «отрицательным» конфигурациям, могут образоваться также тройные конфигурации догоняющих скачков (в большинстве случаев – с дозвуковым течением за главным (результатирующим) скачком). Во многих случаях те же параметры падающего скачка соответствуют и его регулярному отражению (дуализм решения), как правило, со сверхзвуковым течением за отраженным скачком. Кроме того, при аналогичных параметрах задачи в реальных газодинамических устройствах (например, при обтекании сверхзвуковых воздухозаборников) не исключено образование отошедших скачков, формирование неустановившихся течений,

а также более сложных и разветвленных конфигураций. Таким образом, решения, соответствующие образованию «отрицательных» конфигураций, всегда являются сильно неоднозначными, и их реализуемость (как и устойчивость возникающих ударно-волновых структур) должна подтверждаться в каждом отдельном практически важном случае.

#### **2.4. Выводы по главе 2**

Исследование ударно-волновых систем и структур с помощью математического аппарата, развитого в работах В.Н. Ускова, А.В. Омельченко, М.В. Чернышова, П.В. Булата, П.С. Мостовых и других авторов, позволяет получить теоретически важные и практически ценные аналитические результаты.

В частности, в гл. 2 данной работы определены параметры падающих скачков уплотнения, обеспечивающих минимум статического давления и температуры газа за отраженным скачком, описываемые кубическим уравнением в переменных «интенсивность скачка – число Маха набегающего потока». Аналогичное кубическое уравнение аналитически определяет углы наклона преграды, при которых минимальны статическое давление и температура за точкой регулярного отражения бегущей ударной волны заданной амплитуды. Эти оптимальные углы наклона отражающей поверхности существуют при всех теоретически возможных параметрах падающей волны. При этом оптимальное отражение ударной волны отличается как от нормального отражения, так и от другого предельного случая перехода от регулярного отражения к маховскому. Расчеты показывают, что геометрическая оптимизация взаимодействия ударных (в частности, взрывных) волн с преградами позволяет существенно уменьшить механические и тепловые нагрузки на элементы конструкций. По этой причине полученные теоретические результаты могут быть использованы при проектировании взрывостойких сооружений, разработке средств взрывозащиты, в авиационном

и ракетном двигателестроении, сверхзвуковой аэродинамике и многих других приложениях.

Кроме того, на основе полученных ранее результатов решения отдельных задач взаимодействия газодинамических разрывов и волн, включая решение для тройной конфигурации маховского отражения, сопряжения волны Прандтля-Майера с предшествующим догоняющим скачком уплотнения, встречным скачком и квазиодномерным потоком, взаимодействия падающей централизованной или простой волны разрежения с тангенциальным разрывом, в гл. 2 разработана новая аналитическая модель ударно-волновой структуры сверхзвукового течения с маховским отражением. На основе результатов, полученных для сверхзвуковой перерасширенной струи или течения в сужающемся канале, показана её высокая точность, особенно при определении размера главного (маховского) скачка.

При анализе ударно-волновых структур, возникающих при одних и тех же параметрах набегающего сверхзвукового потока и ветвящегося скачка, установлено, что существует обширная область параметров задачи, внутри которой для одного и того же ветвящегося скачка уплотнения  $j_1$  сосуществуют:

- маховское отражение с дозвуковым течением за главным скачком; течение за отраженным скачком при этом может быть как сверхзвуковым, так и дозвуковым;

- регулярное отражение (как правило, со сверхзвуковым течением за отраженным скачком);

- «альтернативная» тройная конфигурация третьего типа. При этом течение за результирующим скачком  $j_3$  в большинстве случаев является дозвуковым.

Дозвуковой характер течения за исходящими скачками в условиях неоднозначности решения указывает на возможную неустойчивость и зависимость вида образующейся ударно-волновой структуры от внешних

возмущений, расположенных ниже по потоку, а также от начальных условий её образования.

При всех параметрах ветвящегося скачка и набегающего потока, которые соответствуют «отрицательным» конфигурациям (тройным конфигурациям маховского отражения с отрицательным углом наклона отраженного скачка), могут образоваться также тройные конфигурации догоняющих скачков (в большинстве случаев – с дозвуковым течением за главным (результатирующим) скачком). Во многих случаях те же параметры падающего скачка соответствуют и его регулярному отражению («дуализм» решения), как правило, со сверхзвуковым течением за отраженным скачком. Кроме того, при аналогичных параметрах задачи в реальных газодинамических устройствах (например, при обтекании сверхзвуковых воздухозаборников) не исключено образование отошедших скачков, формирование неустановившихся течений, а также более сложных и разветвленных конфигураций. Таким образом, решения, соответствующие образованию «отрицательных» конфигураций, всегда неоднозначны, и их реализуемость (как и устойчивость возникающих ударно-волновых структур) должна подтверждаться в каждом отдельном практически важном случае.

Следующим необходимым шагом для адаптации полученных теоретических результатов к потребностям инженерной практики является учет возможного импульсного энерговыделения на маховском скачке, а также эффектов реального газа, существенных при нерегулярном отражении в потоках с большими числами Маха.

### Глава 3. Анализ маховского отражения в сверхзвуковых течениях газа с возможностью импульсного энерговыделения на главном скачке

#### 3.1. Стационарные маховские конфигурации с импульсным энерговыделением и изменением химического состава газа на главном скачке

##### 3.1.1. Предпосылки к исследованию стационарной маховской конфигурации с энерговыделением на главном скачке

Теорию тройных конфигураций скачков уплотнения, образующихся в сверхзвуковых потоках совершенного газа, в настоящее время следует считать практически завершенной [92]. Подробно разработана классификация тройных конфигураций [1, 10], проведен их параметрический анализ [1, 79, 106-108], выявлены конфигурации с особыми свойствами отдельных скачков [79] и экстремальными соотношениями параметров на сторонах исходящего тангенциального разрыва [76, 79]; полученные решения обобщены для тройных конфигураций подвижных ударных волн [125]. Возможные в будущем дополнительные исследования по этому направлению могут быть связаны с проблемами реализуемости тройных конфигураций маховского отражения с отрицательным углом наклона отраженного скачка [69-71, 76] или с анализом дифференциальных характеристик поля течения с помощью условий динамической совместности [1, 126].

В работах [76, 79, 127] показано, что температура газа за главным (маховским) скачком  $j_3$  тройной конфигурации (в области III на рис. 3.1) может многократно превосходить температуру потока, прошедшего последовательность из падающего ( $j_1$ ) и отраженного ( $j_2$ ) скачков, в области II на другой стороне тангенциального разрыва  $\tau$ . Отношение температур на сторонах тангенциального разрыва  $I_T = T_{III}/T_{II}$  особенно значительно при больших числах Маха  $M$  набегающего потока. В частности, в экстремальных

тройных конфигурациях (доставляющих максимум этого отношения при фиксированных значениях  $M$ ) это отношение при  $M \rightarrow \infty$  стремится к пределу

$$I_T = 1/\varepsilon = 6, \quad (3.1)$$

а в стационарных маховских конфигурациях СМК (конфигурациях с прямым главным скачком  $j_3$ , см. рис. 3.1) – к величине [79, 127]

$$I_T = \frac{1 + 2\varepsilon - 2\varepsilon^3 + \varepsilon^4 + (1 - \varepsilon)D}{2\varepsilon(2 - \varepsilon)} = 3.363, \quad (3.2)$$

где

$$D = \sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - \varepsilon(1 - \varepsilon)[2(1 + \varepsilon)(2 - \varepsilon) - \varepsilon^3(1 - \varepsilon)]}.$$

(здесь и далее по умолчанию принято, что  $\gamma = 1.4$ ). Физико-химические эффекты, свойственные движению с большими сверхзвуковыми скоростями и температурами, обычно приводят к уменьшению «эффективного» показателя адиабаты потока, проходящего через главный скачок, и дальнейшему увеличению значений  $I_T$ .

Резкое повышение температуры в сверхзвуковом потоке горючей смеси газов, происходящее, прежде всего, на главном (маховском) скачке, способно инициировать горение или детонацию с соответствующим импульсным энерговыделением. Как показывают, в частности, соотношения (3.1) и (3.2), возбуждение детонации на главном скачке (а не за системой из падающего и отраженного скачков) наиболее эффективно при полете с большими сверхзвуковыми скоростями, что соответствует современным тенденциям развития аэрокосмической техники. Поток в области II за отраженным скачком  $j_2$  (на другой стороне тангенциального разрыва), обладает существенно меньшей температурой, но многократно более значительным полным давлением. Отношение  $I_{p_0} = p_{0II}/p_{0III}$  давлений торможения на сторонах тангенциального разрыва за «экстремальными» конфигурациями [79] при больших числах Маха стремится к пределу

$$I_{p_0} = \varepsilon^{\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}} = 529.1, \quad (3.3)$$

а за СМК – к значению

$$I_{p_0} = \left[ \frac{1 + 2\varepsilon - 2\varepsilon^3 + \varepsilon^4 + (1 - \varepsilon)D}{2\varepsilon(2 - \varepsilon)} \right]^{\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}} = 69,72. \quad (3.4)$$

Соотношения (3.1-3.4) показывают целесообразность использования потока горючих газов за главным (маховским) скачком по схеме детонационных (в том числе прямоточных) двигателей (в термодинамическом цикле Фикетта-Джейкобса), а периферийного потока за отраженным скачком – по схеме «классического» прямоточного воздушно-реактивного двигателя (в термодинамическом цикле Брайтона) с торможением потока без энерговыделения и его последующей подачей в камеру сгорания [86, 150, 152].

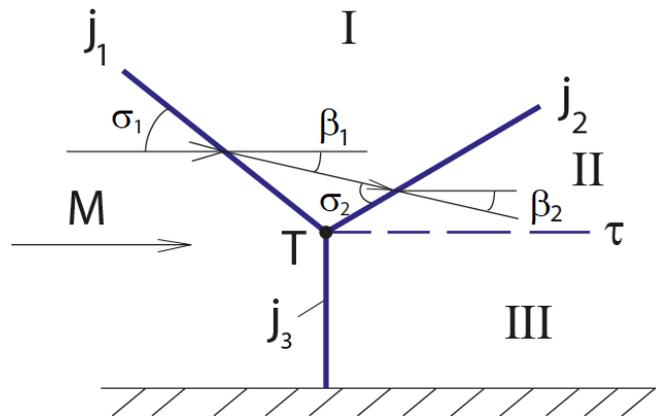


Рисунок 3.1 – Стационарная маховская конфигурация. Здесь  $M$  – число Маха невозмущенного течения,  $j_1$  – падающий,  $j_2$  – отраженный,  $j_3$  – главный (маховский) скачок уплотнения, I, II и III – области течения за соответствующими скачками,  $T$  – тройная точка,  $\tau$  – тангенциальный разрыв,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  – углы наклона падающего и отраженного скачков,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  – углы поворота потока на падающем и отраженном скачках

Для дальнейших попыток практической реализации реактивных двигателей смешанного типа, предложенных в [86, 150, 152], необходим теоретический анализ условий существования, устойчивости и параметров течения за тройными конфигурациями, возникающими при нерегулярном (маховском) отражении скачков уплотнения с импульсным энерговыделением на главном скачке. Модельным примером такой структуры, наиболее простым и доступным теоретическому анализу, является СМК с прямым главным скачком (рис. 3.1). Образование СМК соответствует известному критерию фон

Неймана («критерию механического равновесия») перехода от маховского отражения к регулярному [44] и, таким образом, соответствует минимальной интенсивности падающего скачка  $j_1$ , при которой возникает маховское отражение (нижней границе области существования маховского отражения), в том числе при наличии импульсного энерговыделения и «эффектов реального газа» на главном скачке  $j_3$ .

### 3.1.2. Основные соотношения, описывающие стационарную маховскую конфигурацию

Условия совместности на тангенциальном разрыве  $\tau$ , исходящем из тройной точки  $T$  (рис. 3.1), приводят к системе уравнений (1.18), связывающей параметры скачков  $j_1$ ,  $j_2$  и  $j_3$ :

$$\beta_1 + \beta_2 = \beta_3, \quad (3.5)$$

$$J_1 J_2 = J_3, \quad (3.6)$$

решаемой при  $\beta_3 = 0$  для СМК с прямым главным скачком  $j_3$ .

Углы  $\beta_1$  и  $\beta_2$  поворота потока на падающем и отраженном скачках связаны с их интенсивностями соотношениями (1.4):

$$\operatorname{tg}|\beta_1| = \sqrt{\frac{(1 + \varepsilon_{12})M^2 - \varepsilon_{12} - J_1}{J_1 + \varepsilon_{12}}} \cdot \frac{(1 - \varepsilon_{12})(J_1 - 1)}{(1 + \varepsilon_{12})M^2 - (1 - \varepsilon_{12})(J_1 - 1)}, \quad (3.7)$$

$$\operatorname{tg}|\beta_2| = \sqrt{\frac{(1 + \varepsilon_{12})M_1^2 - \varepsilon_{12} - J_2}{J_2 + \varepsilon_{12}}} \cdot \frac{(1 - \varepsilon_{12})(J_2 - 1)}{(1 + \varepsilon_{12})M_1^2 - (1 - \varepsilon_{12})(J_2 - 1)}. \quad (3.8)$$

Здесь  $M$  – число Маха потока перед тройной конфигурацией,  $M_1$  – в области I за скачком  $j_1$  (в дальнейшем нижние индексы «I-III» соответствуют различным параметрам течения в областях I-III за скачками  $j_1 - j_3$ ),  $\varepsilon_{12} = (\gamma_{12} - 1)/(\gamma_{12} + 1)$ , а  $\gamma_{12}$  – показатель адиабаты газа в верхней части течения (над тангенциальным разрывом). Значения чисел Маха  $M_I$  и  $M_{II}$  за скачками  $j_1$  и  $j_2$  определяются соотношениями (1.6):

$$M_{I} = \sqrt{\frac{(J_1 + \varepsilon_{12})M^2 - (1 - \varepsilon_{12})(J_1^2 - 1)}{J_1(1 + \varepsilon_{12}J_1)}}, \quad M_{II} = \sqrt{\frac{(J_2 + \varepsilon_{12})M_1^2 - (1 - \varepsilon_{12})(J_2^2 - 1)}{J_2(1 + \varepsilon_{12}J_2)}}. \quad (3.9)$$

Соотношения (3.7) и (3.8) отображаются на плоскости  $(\beta; \Lambda = \ln J)$ , рис. 3.2, а-в) ударными полярами (I и II), разделяемыми на две части («сильную» и «слабую») точками  $l$ , соответствующими максимальным углам поворота скачка. Согласно (1.5), интенсивность  $J_l$  такого скачка с максимальным углом поворота потока определяется числом Маха  $M$  течения перед ним:

$$J_l(M) = \frac{M^2 - 2}{2} + \sqrt{\left(\frac{M^2 - 2}{2}\right)^2 + (1 + 2\varepsilon_{12})(M^2 - 1) + 2}$$

(кривая 1 на рис. 3.3),

$$J_l(M_1) = \frac{M_1^2 - 2}{2} + \sqrt{\left(\frac{M_1^2 - 2}{2}\right)^2 + (1 + 2\varepsilon_{12})(M_1^2 - 1) + 2}.$$

Течение газа за скачками, соответствующими верхней ветви поляры (при  $J_l \leq J < J_m$ , где  $J_m = (1 + \varepsilon_{12})M^2 - \varepsilon_{12}$  – интенсивность прямого скачка), является дозвуковым, а за скачками, соответствующим слабой ветви (при  $1 < J < J_l$ ) – как правило, сверхзвуковое.

Классические соотношения, описывающие термодинамические параметры совершенного газа на скачках уплотнения, определяют плотность, температуру, давление торможения, скорость звука, акустический импеданс в области II за отраженным скачком:

$$\rho_{II} = \rho / (E_1 E_2), \quad T_{II} = E_1 E_2 J_1 J_2 T, \quad p_{0II} = \left( J_1 J_2 E_1^{\gamma_{12}} E_2^{\gamma_{12}} \right)^{\frac{1 - \varepsilon_{12}}{2\varepsilon_{12}}} p_0,$$

$$a_{II} = a \cdot \sqrt{E_1 E_2 J_1 J_2}, \quad z_{II} = \rho_{II} a_{II} = z \cdot \sqrt{J_1 J_2 / (E_1 E_2)},$$

где  $E_i = (1 + \varepsilon_{12} J_i) / (J_i + \varepsilon_{12})$  – обратное отношение плотностей газа на сторонах падающего или отраженного скачка. Аналогично определяются скорость течения в области II и другие зависимые от нее параметры: удельный расход

через единицу площади поперечного сечения  $q = \rho v$ , скоростной напор (динамическое давление)  $d = \rho v^2 / 2$ , импульс потока  $f = p + \rho v^2$ :

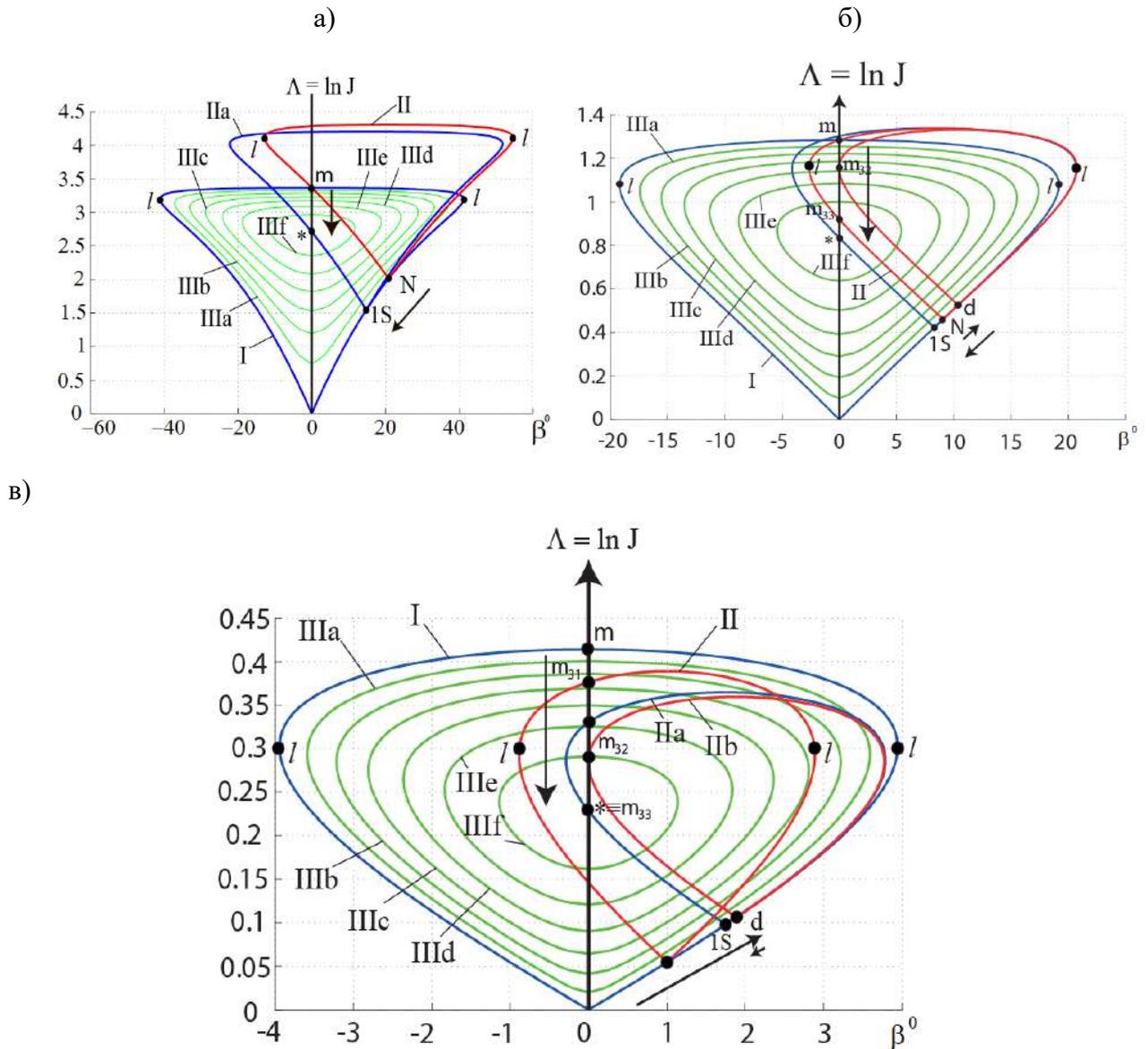


Рисунок 3.2 – Графическое решение на плоскости ударных поляр: а) при  $M > M_b$  (в данном случае  $M = 5$ ); б) при  $M_a < M < M_b$  (здесь  $M = 1.8$ ); в) при  $M < M_a$  (здесь  $M = 1.2$ ). Поляры IIIa-IIIf соответствуют энерговыделению за главным скачком, равному, соответственно, 15, 30, 45, 60, 75 и 90% от максимального значения  $\phi_*$ ; точка “\*” соответствует этому максимальному значению. Вертикальные стрелки показывают изменение интенсивности главного скачка (при увеличении энерговыделения она уменьшается). Наклонные стрелки показывают изменение интенсивности падающего скачка в СМК при увеличении энерговыделения (она монотонно уменьшается при  $M > M_b$ , но при  $M < M_b$  сначала увеличивается, а уменьшается только при дальнейшем росте энерговыделения). Точки  $l$  соответствуют скачкам с максимальным отклонением потока, точка  $N$  – критерию фон Неймана, точка  $d$  – критерию максимального поворота потока на отраженном скачке, точка  $1s$  – падающему скачку, формирующему СМК при максимальном теоретически возможном энерговыделении

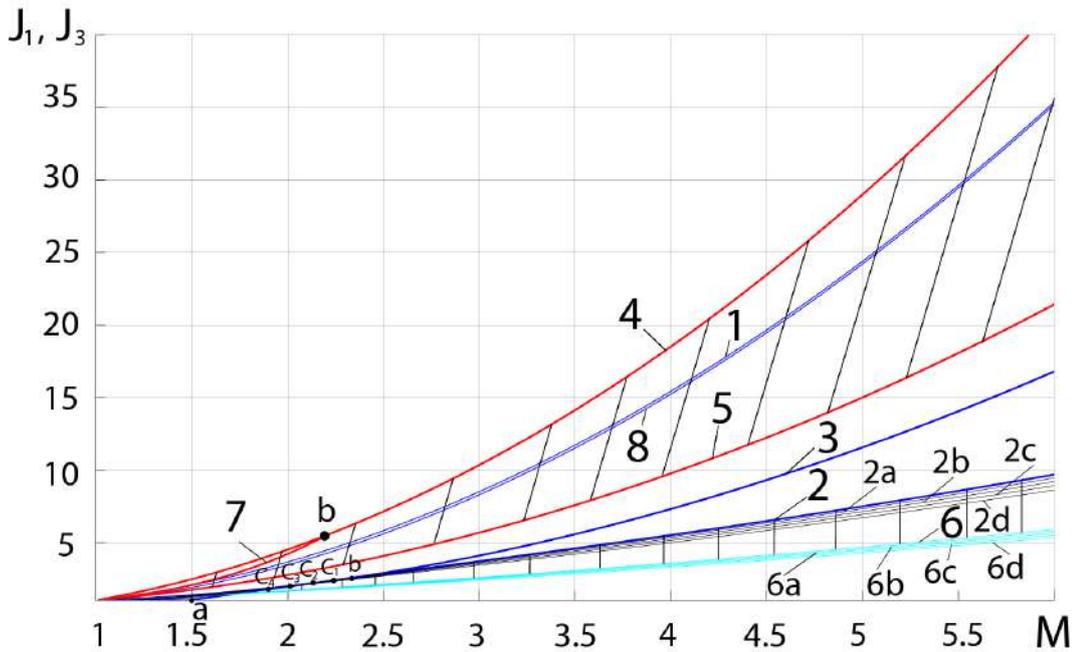


Рисунок 3.3 – Особые интенсивности скачков уплотнения. Кривая 1 соответствует скачкам с максимальным поворотом потока:  $J_1 = J_l(M)$ , кривая 2 – критерию фон Неймана:  $J_1 = J_N(M)$ , кривая 3 – критерию максимального поворота потока на отраженном скачке:  $J_1 = J_d(M)$ , кривая 4 – прямым скачкам уплотнения без энерговыделения:  $J_3 = J_m(M)$ , кривая 5 – прямым скачкам с максимально возможным энерговыделением:  $J_3 = J_*(M)$ , кривая 6 – падающим скачкам, формирующим СМК при максимально возможном энерговыделении:  $J_1 = J_{1S}(M)$ , кривая 7 – главным скачкам в СМК, когда интенсивность падающего скачка максимальна, кривая 8 – падающим скачкам с критической скоростью течения за ними. Кривые 2a-2d и 6a-6d соответствуют максимальным и минимальным значениям интенсивности падающего скачка в СМК с энерговыделением при различных значениях «эффективного» показателя адиабаты на главном скачке. Точки  $c_1$ - $c_4$  показывают изменение числа Маха  $M_b$ , при котором два основных критерия смены типа отражения скачков совпадают, при изменении показателя адиабаты на главном скачке.

$$v_{II} = M_{II} a_{II} = M_{II} a \sqrt{E_1 E_2 J_1 J_2}, \quad q_{II} = \rho_{II} v_{II} = \rho a \cdot M_{II} \sqrt{J_1 J_2 / (E_1 E_2)},$$

$$d_{II} = \rho_{II} v_{II}^2 / 2 = \gamma_{12} J_1 J_2 M_{II}^2 p / 2, \quad f_{II} = p_{II} + \rho_{II} v_{II}^2 = J_1 J_2 p (1 + \gamma_{12} M_{II}^2).$$

Зависимости, связывающие импульсное энерговыделение на скачке  $j_3$  с его формой, изменением свойств течения и поворотом потока на его поверхности, приведены в [87, 88, 91, 128, 129]. В частности, согласно [88], угол  $\beta_3$  поворота потока зависит от интенсивности  $J_3$  скачка уплотнения (отношения статических давлений на его сторонах) следующим образом (1.12):

$$\operatorname{tg} |\beta_3| = \frac{(J_3 - 1) \sqrt{F - 1}}{\gamma_{III} M^2 - (J_3 - 1)}, \quad (3.10)$$

где

$$F = \frac{2\gamma M^2}{(\gamma-1)(J_3-1)} \frac{(\gamma-\gamma_{III})+(\gamma-1)[(J_3-1)-(\gamma_{III}-1)\bar{\phi}]}{(\gamma_{III}+1)(J_3-1)+2\gamma_{III}}.$$

Здесь  $\bar{\phi} = \phi\rho/p = \gamma\phi/(\gamma-1)c_pT$ , согласно (1.11);  $\phi$  – удельное импульсное энерговыделение на скачке уплотнения. Значения  $c_p$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$ ,  $\gamma$  и  $M$  характеризуют, соответственно, удельную изобарную теплоемкость, давление, плотность, температуру, показатель адиабаты и число Маха потока газа перед скачком;  $\gamma_{III}$  – показатель адиабаты, соответствующий термодинамическим свойствам газа в потоке за поверхностью сильного скачка.

Отношение плотностей газа на сторонах скачка с энерговыделением записывается в форме (1.17)

$$E_3 = \frac{\rho}{\rho_{III}} = 1 - 2 \frac{J_3 - 1 + (\gamma - \gamma_{III})/(\gamma - 1) - (\gamma_{III} - 1)\bar{\phi}}{2\gamma_{III} + (\gamma_{III} + 1)(J_3 - 1)}, \quad (3.11)$$

а отношение температур – в виде [88]

$$T_{III}/T = M_{III}^2 (\cos^2 \sigma_3 + E_3^2 \sin^2 \sigma_3) / M^2. \quad (3.12)$$

При этом угол  $\sigma_3$  наклона скачка уплотнения к вектору скорости потока перед ним определяется соотношением (1.16):

$$\operatorname{ctg} \sigma_3 = [\gamma M^2 - (J_3 - 1)] \operatorname{tg} |\beta_3| / (J_3 - 1), \quad (3.13)$$

а скорость  $v_{III}$  течения в области III за главным скачком – зависимостью [88]

$$v_{III} = v \cdot \sqrt{E_3^2 \sin^2 \sigma_3 + \cos^2 \sigma_3}. \quad (3.14)$$

При введении усредненного (между  $\gamma$  и  $\gamma_{III}$ ), «эффективного» показателя адиабаты  $\gamma_3$ , в первом приближении описывающего свойства газа на скачке уплотнения с энерговыделением при проявлении «эффектов реального газа», соотношения (3.10-3.14) и подобные им заметно упрощаются:

$$\operatorname{tg} |\beta_3| = \sqrt{\frac{J_{m3} - J_3 - \xi}{J_3 + \varepsilon_3}} \cdot \frac{(1 - \varepsilon_3)(J_3 - 1)}{(1 + \varepsilon_3)M^2 - (1 - \varepsilon_3)(J_3 - 1)}, \quad (3.15)$$

$$\xi = \frac{2\varepsilon_3\gamma_3 M^2 \bar{\phi}}{J_3 - 1}, \quad J_{m3} = (1 + \varepsilon_3)M^2 - \varepsilon_3,$$

$$E_3 = \rho / \rho_{\text{III}} = (1 + \varepsilon_3 J_3 + 2\varepsilon_3 \bar{\phi}) / (J_3 + \varepsilon_3),$$

$$a_{\text{III}} / a = \sqrt{\gamma_{\text{III}} / \gamma} \cdot \sqrt{J_3 \cdot (1 + \varepsilon_3 J_3 + 2\varepsilon_3 \bar{\phi}) / (J_3 + \varepsilon_3)},$$

$$\text{ctg } \sigma_3 = \sqrt{(J_m - J_3 - \xi) / (J_3 + \varepsilon_3)},$$

$$v_{\text{III}} = a \sqrt{\frac{(J_3 + \varepsilon_3)M^2 - (1 - \varepsilon_3)(J_3^2 - 1) - 2\varepsilon_3(J_3 - 1)\bar{\phi} / \gamma_3}{J_3 + \varepsilon_3}},$$

$$M_{\text{III}} = \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_{\text{III}}}} \cdot \sqrt{\frac{(J_3 + \varepsilon_3)M^2 - (1 - \varepsilon_3)(J_3^2 - 1) - 2\varepsilon_3(J_3 - 1)\bar{\phi} / \gamma_3}{J_3(1 + \varepsilon_3 J_3 + 2\varepsilon_3 \bar{\phi})}}.$$

(здесь  $\varepsilon_3 = (\gamma_3 - 1) / (\gamma_3 + 1)$ ).

Соотношение (3.15) описывает детонационную ударную поляру, название которой предполагает, что импульсное энерговыделение на скачке или в непосредственной близости от него происходит в результате детонации, инициированной повышением температуры на поверхности скачка. На рисунке 3.2,а-в показано семейство детонационных поляр IIIa-IIIg, соответствующих эффективному показателю адиабаты  $\gamma_3 = \gamma_{12} = 1.4$  и различным значениям энерговыделения. В дальнейших примерах расчетов по умолчанию полагается, что  $\gamma_3 = \gamma_{12} = 1.4$ .

Интенсивность  $J_3$  скачка уплотнения  $j_3$  с положительным импульсным энерговыделением ( $\bar{\phi} > 0$ ) при фиксированном значении числа Маха перед скачком находится в диапазоне

$$J_{\min} \leq J_3 \leq J_{\max}, \quad (3.16)$$

где

$$J_{\min} = 1 + \delta, \quad J_{\max} = J_{m3} - \delta, \quad \delta = \frac{(1 + \varepsilon_3)(M^2 - 1)}{2} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{8\varepsilon_3 M^2 \bar{\phi}}{(1 - \varepsilon_3^2)(M^2 - 1)^2}} \right]. \quad (3.17)$$

Как очевидно из соотношений (3.17), диапазон (3.16) более узок, чем промежуток  $1 \leq J_3 \leq J_m$  возможного изменения интенсивности скачка уплотнения при отсутствии энерговыделения. Это подтверждается визуальным сравнением ударной (при  $\bar{\phi} = 0$ ) поляры I и детонационных (при  $\bar{\phi} > 0$ ) поляр Ша-Шф, соответствующих одному и тому же числу Маха потока перед скачком. Зависимости  $J_{\min}(\bar{\phi})$  и  $J_{\max}(\bar{\phi})$  для различных чисел Маха даны на рис. 4, соответственно, нижней и верхней ветвями кривых 1-5.

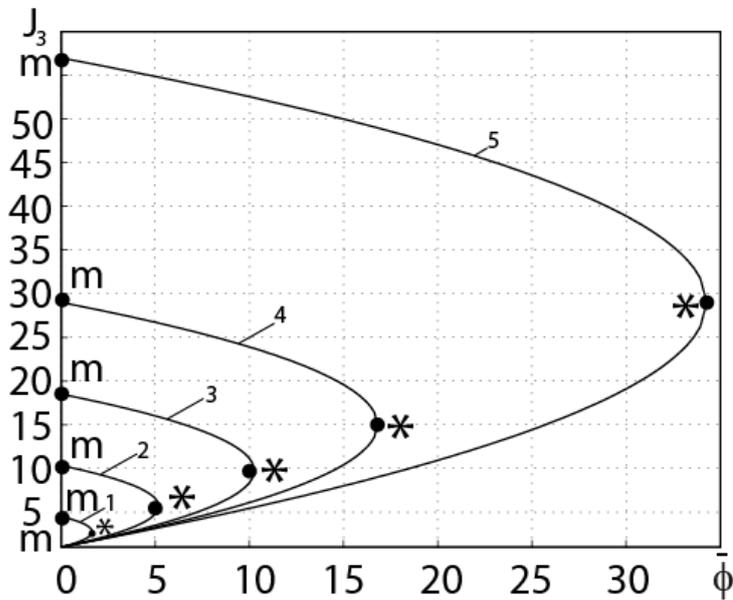


Рисунок 3.4 – Минимальные (показанные нижними ветвями кривых 1-5) и максимальные (показанные верхними ветвями) значения интенсивностей скачков уплотнения при различных числах Маха потока (кривые 1-5 соответствуют значениям  $M=2, 3, 4, 5$  и  $7$ ) в зависимости от величины энерговыделения. Точки “\*” соответствуют максимальному энерговыделению и вырождению ударной поляры в единственную точку (см. рис. 3.2)

При предельном безразмерном значении энерговыделения

$$\bar{\phi}_* = (1 - \varepsilon_3^2)(M^2 - 1)^2 / (8\varepsilon_3 M^2), \quad (3.18)$$

соответствующем размерной величине

$$\phi_* = (1 - \varepsilon_3)(M^2 - 1)^2 c_p T / (4M^2),$$

значения  $J_{\min}$  и  $J_{\max}$  совпадают:

$$J_* = J_{\min} = J_{\max} = (1 + J_m) / 2. \quad (3.19)$$

Детонационная поляра (3.15) при этом вырождается в точку “\*” (см. рисунок 3.2,а-в, а также рис. 3.4), для которой характерна критическая скорость потока

за прямой детонационной волной ( $M_{III}=1$ ). Дальнейшее увеличение энерговыделения приводит к потере устойчивости скачка  $j_3$  и тройной конфигурации в целом.

Таким образом, система уравнений (3.5-3.9, 3.15), решаемая при  $\beta_3 = 0$  и  $J_3 = J_{\max}$ , позволяет найти углы поворота потока и интенсивности скачков, составляющих СМК. Параметры потоков за тройной точкой, определяемые соотношениями для ударных и детонационных волн [1, 88], в дальнейших работах должны быть сопоставлены с целью оптимизации разнообразных газодинамических устройств, включая детонационные двигатели [130-133].

### *3.1.3. Аналитическое описание области существования стационарной маховской конфигурации*

Три основных параметра (число Маха  $M$  набегающего потока, импульсное тепловыделение  $\phi$  и изменение показателя адиабаты  $\gamma_3$  на главном скачке по сравнению со значением  $\gamma$  в потоке перед тройной точкой) влияют на область существования СМК. Способ и степень влияния двух последних факторов подробно исследуется в работе [146].

Условия существования стационарной маховской конфигурации в потоке газа с постоянным показателем адиабаты без физико-химических превращений подробно исследованы в [1, 79, 144]. Стационарная маховская конфигурация существует, если  $M > M_a$ , где  $M_a = \sqrt{(2-\varepsilon)/(1-\varepsilon)} = 1.483$ . При этом параметры отраженного скачка при  $M > M_b$  ( $M_b = 2.202$  при  $\gamma = 1.4$ ) соответствуют нижней (слабой) ветви ударной поляры II (рис. 3.2,а), а при  $M_a < M < M_b$  – её верхней (сильной) ветви (рис. 3.2,б). Параметры главного (прямого) скачка  $j_3$  соответствуют точке  $m$  на рис. 3.2,а-б. При  $M < M_a$  решения, описывающие СМК без энерговыделения на её скачках, отсутствуют (см. рис. 3.2,в).

Интенсивность  $J_1 = J_N$  падающего скачка уплотнения, приводящего к образованию СМК при  $M > M_a$ , определяется уравнением (1.20) и

соответствует широко известному критерию фон Неймана смены вида отражения косого скачка (кривая 2 на рис. 3.3). Другой широко известный критерий смены типа отражения (критерий максимального угла поворота, “detachment criterion”) соответствует следующему уравнению для интенсивности  $J_1 = J_d$  падающего скачка при всех  $M > 1$ :

$$\sum_{n=0}^5 D_n J_d^n = 0, \quad (3.20)$$

$$D_5 = (1 - \varepsilon)^2, \quad D_4 = -(1 - \varepsilon) \cdot \left[ (3 + 4\varepsilon - \varepsilon^2)M^2 + (4 - 5\varepsilon + \varepsilon^2) \right],$$

$$D_3 = (3 + 4\varepsilon + 2\varepsilon^2)M^4 + 4(1 - \varepsilon)(1 + 2\varepsilon - \varepsilon^2)M^2 + 2(3 - 2\varepsilon)(1 - \varepsilon)^2,$$

$$D_2 = -(1 + \varepsilon)M^6 + \varepsilon(1 + 2\varepsilon^2)M^4 - 4\varepsilon(1 - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon)M^2 - 2(2 - 3\varepsilon)(1 - \varepsilon)^2,$$

$$D_1 = -\left[ 1 + \varepsilon(M^2 - 1) \right] \cdot \left[ 2(1 + \varepsilon)M^4 + \varepsilon(1 + 4\varepsilon)M^2 - (1 - 5\varepsilon + 4\varepsilon^2) \right],$$

$$D_0 = -\left[ (1 + \varepsilon)M^2 - \varepsilon \right] \cdot \left[ 1 + \varepsilon(M^2 - 1) \right]^2$$

(кривая 3 на рис. 3.3). Единственная точка  $b$  касания кривых 1 и 2 соответствует числу Маха  $M = M_b$ , определяемому уравнением

$$\sum_{n=0}^4 F_n M_b^{2n} = 0, \quad (3.21)$$

$$F_4 = (1 - \varepsilon)(2 - 4\varepsilon + 2\varepsilon^3 - \varepsilon^4), \quad F_3 = -10 + 20\varepsilon - 10\varepsilon^2 - 10\varepsilon^3 + 12\varepsilon^4 - 4\varepsilon^5,$$

$$F_2 = 12 - 24\varepsilon + 10\varepsilon^2 + 16\varepsilon^3 - 18\varepsilon^4 + 6\varepsilon^5, \quad F_1 = -2(1 + \varepsilon)(3 - 4\varepsilon + 2\varepsilon^2)(1 - \varepsilon)^2,$$

$$F_0 = (1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon)^4.$$

При всех иных числах Маха неравенство  $J_N < J_d$  определяет дуализм (существование решений, описывающих и регулярное, и маховское отражение при одних и тех же параметрах падающего скачка) в области между кривыми 2 и 3 на рис. 3.4.

Влияние энерговыделения на область существования стационарной маховской конфигурации проявляется следующим образом. Согласно соотношениям (3.16) и (3.17), увеличение энерговыделения на главном скачке

от нуля до предельного значения  $\bar{\phi} = \bar{\phi}_*$  (3.18) приводит к монотонному уменьшению интенсивности  $J_3 = J_{\max}$  главного скачка в СМК от значения  $J_m(M)$  при  $\bar{\phi} = 0$  (кривая 4 на рис. 3.3) до величины  $J_*(M)$ , определяемой выражением (3.19), при  $\bar{\phi} = \bar{\phi}_*$  (кривая 5). Если число Маха потока умеренно или велико ( $M \geq M_b$ ), интенсивность  $J_1$  падающего скачка при этом также монотонно уменьшается. В предельном случае ( $\bar{\phi} = \bar{\phi}_*$ ) минимальная интенсивность  $J_1 = J_{1s}$  падающего скачка, образующего СМК, при  $\gamma_3 = \gamma$  определяется уравнением

$$\sum_{k=0}^5 S_k J_{1s}^k = 0, \quad (3.22)$$

$$S_5 = 4(1 - \varepsilon), \quad S_4 = (8 + 6\varepsilon - 8\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3)M^2 + 2(4 - \varepsilon)(1 - \varepsilon)^2,$$

$$S_3 = -2(1 + \varepsilon)(2 + 4\varepsilon - 2\varepsilon^2 + \varepsilon^3)M^4 - (10 - 4\varepsilon - 28\varepsilon^2 + 14\varepsilon^3 - 4\varepsilon^4)M^2 - 2(1 - \varepsilon)(3 - 11\varepsilon + 5\varepsilon^2 - \varepsilon^3),$$

$$S_2 = (J_m + 1) \left[ \varepsilon(1 + \varepsilon)(2 - \varepsilon)M^4 + \varepsilon(4 - 15\varepsilon + 5\varepsilon^2)M^2 + 4(1 - \varepsilon)(1 - 3\varepsilon + \varepsilon^2) \right],$$

$$S_1 = y_3 M^6 + y_2 M^4 + y_1 M^2 + y_0, \quad y_3 = 2(1 - \varepsilon + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon)^2,$$

$$y_2 = 2(1 + \varepsilon)(1 - 4\varepsilon + 7\varepsilon^2 - 3\varepsilon^3),$$

$$y_1 = -2 + 4\varepsilon + 10\varepsilon^2 - 22\varepsilon^3 + 6\varepsilon^4, \quad y_0 = -2(1 - \varepsilon)(1 - 3\varepsilon + 5\varepsilon^2 - \varepsilon^3),$$

$$S_0 = -(M^2 - 1)(J_m + 1) \left[ (1 + \varepsilon)(1 - 2\varepsilon)M^2 - 2\varepsilon(1 - \varepsilon) \right],$$

решение которого соответствует кривой 6 на рис. 3.4. При  $M \geq M_b$  отраженный скачок в СМК с энерговыведением всегда соответствует слабой ветви ударной поляры (например, на кривой Па, рис. 3.2,а), и течение за ним, как правило, сверхзвуковое.

При малых числах Маха ( $M < M_b$ ) небольшое импульсное энерговыведение на главном скачке приводит к возникновению СМК с сильным отраженным скачком (см., например, поляры Па на рис. 3.2,б и 3.2,в, поляру Па на рис. 3.2,в и решение, соответствующее точке  $m_{31}$  на том же

рисунке). При постепенном увеличении энерговыделения интенсивность главного скачка уменьшается от  $J_m(M)$  (кривая 4 на рис. 3) до значений, соответствующих кривой 6; интенсивность  $J_1$  падающего скачка возрастает от единицы (при  $M \leq M_a$ ) или от  $J_N(M)$  (кривая 2 на рис. 3.3, при  $M_a < M < M_b$ ) до  $J_d(M)$  (кривая 3). При дальнейшем увеличении энерговыделения отраженный скачок в СМК становится слабым (решения, соответствующие точке  $m_{33}$  на рис. 3.2,б-в). Интенсивность  $J_3$  маховского скачка продолжает уменьшаться (от кривой 4 на рис. 3.3 до значений  $J_*(M)$ , показанных кривой 5), а интенсивность  $J_1$  уменьшается от  $J_d(M)$  (кривая 3 на рис. 3.3) до минимального значения  $J_1 = J_{1s}$  при  $\bar{\phi} = \bar{\phi}_*$  (кривая 6).

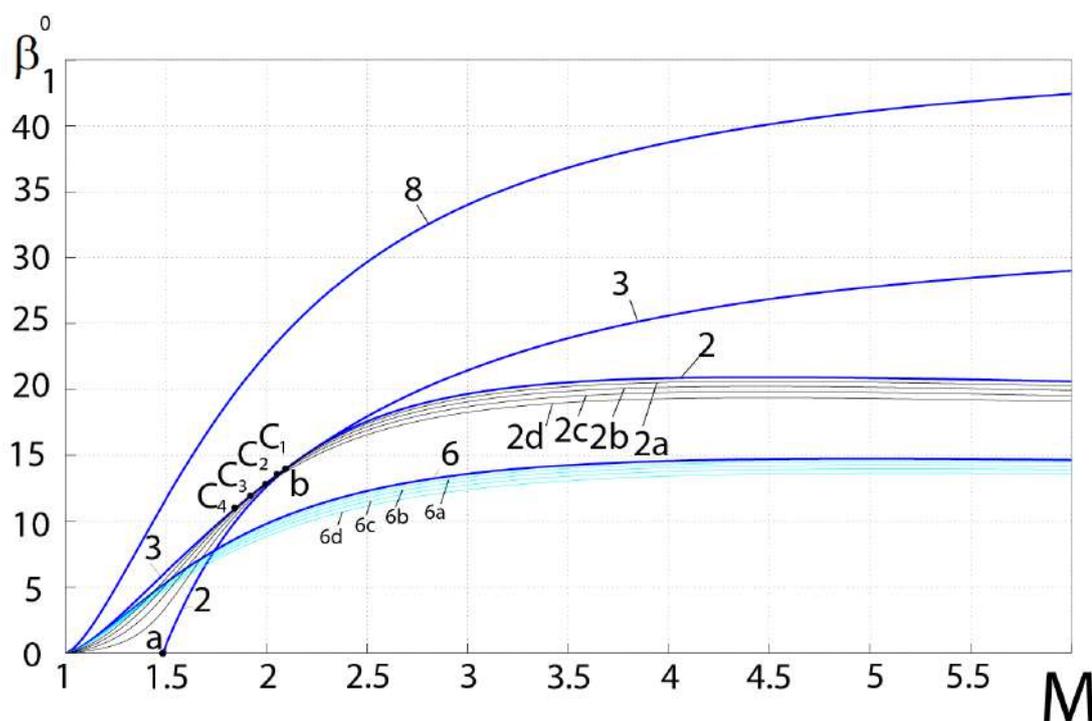


Рисунок 3.5 – Углы поворота потока на особых падающих скачках. Как и на рис. 3.3, кривая 2 соответствует критерию фон Неймана, кривая 3 – критерию максимального угла поворота потока, кривая 6 – падающим скачкам, формирующим СМК при максимальном энерговыделении, кривая 8 – скачкам с критической скоростью течения за ними. Кривые 2a-2d и 6a-6d описывают изменение свойств падающего скачка при уменьшении «эффективного» показателя адиабаты на главном скачке. Точки  $c_1$ - $c_4$  показывают сдвиг точки совпадения двух критериев смены типа отражения при уменьшении «эффективного» показателя адиабаты

Таким образом, возникновение энерговыделения за главным (маховским) скачком приводит к расширению области существования СМК, которые образуются при всех числах Маха сверхзвукового течения в широком диапазоне параметров падающего и главного скачков (на рис. 3 они отмечены прямой и косой штриховкой, соответственно).

Углы наклона ( $\sigma_1$ ) и поворота потока ( $\beta_1$ ) на падающих скачках, интенсивности которых соответствуют кривым 1, 2 и 5 на рис. 3.3, показаны также соответствующими кривыми на рис. 3.5 и 3.6 (кроме того, кривой 8 показаны параметры падающего скачка с критической скоростью течения за ним, а кривой 9 на рис. 3.6 – углы наклона скачка, вырождающегося в слабый разрыв, т.е. углы Маха). При больших числах Маха потока ( $M \rightarrow \infty$ ) значения, соответствующие критерию фон Неймана смены типа отражения скачка  $j_1$ , стремятся к следующим пределам [76]:

$$\sigma_{1N} \rightarrow \arcsin \sqrt{\frac{2\varepsilon(1-\varepsilon)}{1+\varepsilon-\varepsilon^2+\varepsilon^3+\sqrt{1-2\varepsilon+3\varepsilon^2+4\varepsilon^3-\varepsilon^4-2\varepsilon^5+\varepsilon^6}}} = 21.769^\circ,$$

$$\beta_{1N} \rightarrow \arctg \frac{\sqrt{2\varepsilon(1-\varepsilon)^3(1-\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\sqrt{1-2\varepsilon+3\varepsilon^2+4\varepsilon^3-\varepsilon^4-2\varepsilon^5+\varepsilon^6})}}{1-\varepsilon+3\varepsilon^2-\varepsilon^3+\sqrt{1-2\varepsilon+3\varepsilon^2+4\varepsilon^3-\varepsilon^4-2\varepsilon^5+\varepsilon^6}} = 17.961^\circ.$$

Значения, соответствующие критерию полного угла поворота потока, при больших числах Маха определяются соотношениями

$$(1-\varepsilon^2)\sin^3 \sigma_{1d} - (1-\varepsilon^2)\sin^2 \sigma_{1d} - (1+2\varepsilon)\sin \sigma_{1d} + 1 = 0,$$

$$\operatorname{tg}|\beta_{1d}| = (1-\varepsilon)\sin \sigma_{1d} \cos \sigma_{1d} / [1 - (1-\varepsilon)\sin^2 \sigma_{1d}],$$

откуда  $\sigma_{1d} = 39.971^\circ$ ,  $|\beta_{1d}| = 32.018^\circ$ . Наименьшие значения параметров падающего скачка, при которых возможно образование СМК с энерговыделением, при  $M \rightarrow \infty$  описываются пределами

$$J_{1s}/M^2 \rightarrow C, \quad \sigma_{1s} \rightarrow \arcsin\left(\sqrt{C/(1+\varepsilon)}\right) = 14.815^\circ,$$

$$|\beta_{1s}| \rightarrow \arctg\left(\sqrt{C(1+\varepsilon-C)}/(\gamma-C)\right) = 12.291^\circ,$$

где коэффициент  $C=0.076$  определяется как положительный вещественный корень уравнения

$$4(1-\varepsilon)C^3 - 2(4+3\varepsilon-4\varepsilon^2+\varepsilon^3)C^2 + 2(1-\varepsilon)(2+4\varepsilon-2\varepsilon^2+\varepsilon^3)C - \varepsilon(2-\varepsilon)(1+\varepsilon)^2 = 0.$$

Импульсное энерговыделение и другие физико-химические явления, как правило, приводят к уменьшению «эффективного» показателя адиабаты, описывающего изменение параметров течения на сильном главном скачке.

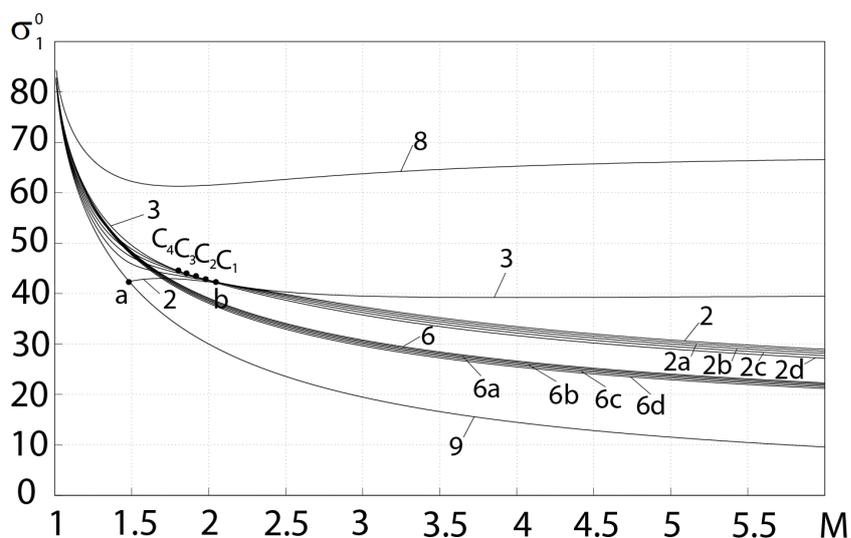


Рисунок 3.6 – Углы наклона падающих скачков. Как и на рис. 3.3 и 3.5, кривая 2 соответствует критерию фон Неймана, кривая 3 – критерию максимального поворота потока, кривая 6 – падающим скачкам, формирующим СМК при максимальном энерговыделении на главном скачке, кривая 8 – скачкам с критической скоростью течения за ними. Кривая 9 показывает углы Маха, кривые 2а-2д и 6а-6д – изменение свойств падающего скачка при уменьшении показателя адиабаты на главном скачке, точки  $c_1-c_4$  – сдвиг точки совпадения двух критериев смены типа отражения

Влияние показателя адиабаты на область существования СМК проявляется следующим образом. Согласно соотношению (3.17), уменьшение показателя адиабаты  $\gamma_3$  и, соответственно, значения  $\varepsilon_3 = (\gamma_3 - 1)/(\gamma_3 + 1)$  ведет к уменьшению интенсивности  $J_{\max}$ , соответствующей максимально возможному импульсному энерговыделению. Вместе с этим уменьшается и минимальная интенсивность  $J_{1s}$  падающего скачка, образующего СМК (определяемая соотношением (3.22) при  $\gamma_3 = \gamma$ ). На рис. 3.3, 3.5 и 3.6 кривыми 6а-6д показаны, соответственно, минимальные интенсивности, углы наклона падающих скачков и углы поворота потока на их поверхности при уменьшении

значения  $\gamma_3$  от  $\gamma_3 = \gamma = 1.4$  (кривые б) до  $\gamma_3 = 1.3$  (кривые ба),  $\gamma_3 = 1.2$  (6б),  $\gamma_3 = 1.1$  (6с),  $\gamma_3 \rightarrow 1$  (6д). В предельном случае ( $\gamma_3 \rightarrow 1$ ) асимптотические (при  $M \rightarrow \infty$ ) минимальные параметры падающего скачка описываются соотношениями

$$J_{1s}/M^2 \rightarrow C_1, \quad \sigma_{1s} \rightarrow \arcsin\left(\sqrt{C_1/(1+\varepsilon)}\right) = 13.646^\circ,$$

$$|\beta_{1s}| \rightarrow \arctg\left(\sqrt{C_1(1+\varepsilon-C_1)}/(\gamma-C_1)\right) = 11.329^\circ,$$

где коэффициент  $C_1=0.065$  определяется из уравнения

$$4(1-\varepsilon)C_1^3 - 2(4+3\varepsilon-3\varepsilon^2)C_1^2 + 2(2+6\varepsilon+2\varepsilon^2+\varepsilon^3)C_1 - \varepsilon(2-\varepsilon) = 0.$$

Параметры  $J_1$ ,  $\sigma_1$  и  $|\beta_1|$  падающего скачка уплотнения, образующего СМК при отсутствии энерговыделения, с уменьшением  $\gamma_3$  также изменяются от значений, соответствующих критерию фон Неймана (кривые 2 на рис. 3, 5 и 6) до значений, показанных кривыми 2а-2д для  $\gamma_3 = 1.3$ ,  $\gamma_3 = 1.2$ ,  $\gamma_3 = 1.1$  и  $\gamma_3 \rightarrow 1$ , соответственно. В частности, интенсивность  $J_1$  скачка  $j_1$  и число Маха потока в данном случае связаны уравнением

$$\sum_{k=0}^3 N_k M^{2k} = 0, \quad (3.23)$$

$$N_3 = (1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon J_1) \left[ J_1(1-\varepsilon\varepsilon_3) - 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon_3 \right], \quad N_2 = \sum_{l=0}^3 x_l J_1^l, \quad N_1 = \sum_{l=0}^4 y_l J_1^l,$$

$$N_0 = -(1-\varepsilon)(J_1+\varepsilon)(J_1-1)^2 \left[ J_1^2 + \varepsilon J_1(1-\varepsilon_3) - \varepsilon_3 \right],$$

$$x_3 = -1 - 3\varepsilon + \varepsilon^2(2\varepsilon_3 - \varepsilon - \varepsilon\varepsilon_3), \quad x_2 = \varepsilon \left[ 2 + \varepsilon_3 - 5\varepsilon + \varepsilon_3 + 2\varepsilon\varepsilon_3(\varepsilon + \varepsilon_3) \right],$$

$$x_1 = -\varepsilon - \varepsilon_3 + 3\varepsilon^2 + 2\varepsilon\varepsilon_3 - \varepsilon^3 + 4\varepsilon\varepsilon_3^2 + \varepsilon^2\varepsilon_3(1-3\varepsilon),$$

$$x_0 = 1 + 3\varepsilon_3 - 2\varepsilon^2 - \varepsilon\varepsilon_3 + 2\varepsilon_3^2 - 3\varepsilon^2\varepsilon_3,$$

$$y_4 = 2 + \varepsilon(1 - \varepsilon - \varepsilon_3 + \varepsilon\varepsilon_3), \quad y_3 = -3 + 3\varepsilon - \varepsilon_3 + \varepsilon(3\varepsilon + \varepsilon_3 - 5\varepsilon\varepsilon_3 + 2\varepsilon^2\varepsilon_3),$$

$$\begin{aligned}
y_2 &= 2 - 6\varepsilon + 2\varepsilon_3 + 2\varepsilon^2 - 6\varepsilon\varepsilon_3 + 2\varepsilon^3 + 7\varepsilon^2\varepsilon_3 - \varepsilon^2\varepsilon_3(\varepsilon_3 + 4\varepsilon), \\
y_1 &= -1 + 4\varepsilon - \varepsilon_3 - 3\varepsilon^2 + 4\varepsilon\varepsilon_3 - \varepsilon^3 - 2\varepsilon\varepsilon_3^2 - 5\varepsilon^2\varepsilon_3 + 3\varepsilon^3\varepsilon_3, \\
y_0 &= -\varepsilon - \varepsilon_3 + \varepsilon^2 - \varepsilon\varepsilon_3 - \varepsilon_3 - \varepsilon_3(\varepsilon + \varepsilon_3).
\end{aligned}$$

которое при  $\gamma_3 = \gamma$  сводится к соотношению (1.20), описывающему критерий фон Неймана. Значения интенсивности скачка, соответствующего уравнению (3.23), монотонно уменьшаются при уменьшении показателя адиабаты, если  $M > M_b$  (т.е. при умеренных и больших числах Маха потока). В предельном случае ( $\gamma_3 \rightarrow 1$ ) уравнение (3.23) трансформируется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^3 Z_k M^{2k} &= 0, \\
Z_3 &= (1 + \varepsilon J_1)(J_1 - 1 + \varepsilon + \varepsilon^2), \\
Z_2 &= -(1 + 3\varepsilon + \varepsilon^3)J_1^3 + \varepsilon(2 - 5\varepsilon)J_1^2 - \varepsilon(1 - 3\varepsilon + \varepsilon^2)J_1 + 1 - 2\varepsilon^2, \\
Z_1 &= (1 + \varepsilon)(2 - \varepsilon)J_1^4 - 3(1 - \varepsilon - \varepsilon^2)J_1^3 + 2(1 - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon - \varepsilon^2)J_1^2 - (1 - 4\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3)J_1 - \varepsilon(1 - \varepsilon), \\
Z_0 &= -(1 - \varepsilon)J_1(J_1 - 1)^2(J_1 + \varepsilon)^2,
\end{aligned}$$

а соответствующие этому решению асимптотические (при  $M \rightarrow \infty$ ) параметры скачка  $j_1$  описываются соотношениями

$$\begin{aligned}
J_1/M^2 &\rightarrow C_2, \quad \sigma_{1s} \rightarrow \arcsin\left(\sqrt{C/(1 + \varepsilon)}\right) = 19.682^\circ, \\
|\beta_{1s}| &\rightarrow \arctg\left(\sqrt{C(1 + \varepsilon - C)}/(\gamma - C)\right) = 16.271^\circ,
\end{aligned}$$

где коэффициент  $C_2 = 0.132$  определяется из уравнения

$$(1 - \varepsilon)C_2^3 - (1 + \varepsilon)(2 - \varepsilon)C_2^2 + (1 + 3\varepsilon + \varepsilon^3)C_2 - \varepsilon = 0.$$

Уменьшение «равновесного» показателя адиабаты в высокоскоростном течении без энерговыделения может быть связано, например, с ионизацией и рекомбинацией, возбуждением дополнительных степеней свободы микрочастиц.

При небольших и малых числах Маха ( $M < M_b$ ) параметры падающего скачка, определяемые уравнением (3.23) при  $\gamma_3 < \gamma$ , больше, чем соответствующие критерию фон Неймана (1.20). Получаемое решение соответствует сильному отраженному скачку  $j_2$  при  $1 < M \leq M_c$  или слабому скачку  $j_2$  – при  $M_c < M \leq M_b$ . Здесь  $M_c$  – число Маха, соответствующее совпадению решения уравнения (2.21) с критерием (2.20) максимального угла поворота потока на отраженном скачке (см. точки  $c_1, c_2, c_3, c_4$  на рис. 3.3, 3.5 и 3.6). Оно определяется алгебраическим уравнением пятой степени относительно  $M_c^2$  с коэффициентами, зависящими от  $\gamma$  и  $\gamma_3$ . При  $\gamma_3 = \gamma$  это уравнение приводится к форме (3.21), и  $M_c = M_b$ . При  $\gamma_3 \rightarrow 1$  уравнение, определяющее особое число Маха  $M_c$ , приводится к форме

$$\sum_{k=0}^5 A_k M_c^{2k} = 0,$$

$$A_5 = (1 - \varepsilon)(4 - 4\varepsilon + 2\varepsilon^2 - \varepsilon^4), \quad A_4 = -(1 - \varepsilon)(20 - 22\varepsilon + 5\varepsilon^3 - 11\varepsilon^4 - 4\varepsilon^5),$$

$$A_3 = 24 - 58\varepsilon + 36\varepsilon^2 + 18\varepsilon^3 - 37\varepsilon^4 + \varepsilon^5 + 16\varepsilon^6 + 4\varepsilon^7,$$

$$A_2 = -12 + 30\varepsilon - 16\varepsilon^2 - 23\varepsilon^3 + 22\varepsilon^4 + 23\varepsilon^5 - 16\varepsilon^6 - 12\varepsilon^7$$

$$A_1 = (1 - \varepsilon)(2 - 2\varepsilon - 5\varepsilon^2 + 8\varepsilon^3 + 13\varepsilon^4 - 12\varepsilon^5 - 12\varepsilon^6), \quad A_0 = -\varepsilon \left[ (1 - \varepsilon^2)(1 - 2\varepsilon) \right]^2,$$

(в частности,  $M_{c_4} = 1.861$  при  $\gamma = 1.4$ ). Число Маха  $M_c$  соответствует совпадению двух основных критериев смены вида отражения скачков уплотнения при изменении показателя адиабаты на главном скачке.

Сравнение численных данных, показанных на рис. 3.3, 3.5 и 3.6, приводит к выводу, что уменьшение показателя адиабаты на главном скачке – фактор, действующий сонаправленно импульсному энерговыделению, но на порядок более слабый. Благодаря уменьшению показателя адиабаты, при умеренных и больших числах Маха становится теоретически возможным маховое отражение косых скачков, более слабых, чем скачки, соответствующие критерию фон Неймана. При малых числах Маха ( $1 < M < M_c$ ) уменьшение

показателя адиабаты приводит к решениям, описывающим маховское отражение со слабым падающим и сильным отраженным скачками.

Увеличение показателя адиабаты на главном скачке по сравнению с его значением в набегающем потоке (теоретически возможное, например, при диссоциации молекул газа) приводит к обратному эффекту: расширению диапазона чисел Маха потока, при котором образование СМК невозможно (по сравнению с промежутком  $1 < M < M_a$  при  $\gamma_3 = \gamma$ ), а также промежутка чисел Маха  $M_a \leq M < M_b$ , соответствующего образованию СМК со слабым падающим и сильным отраженным скачками.

Таким образом [146], импульсное энерговыделение за главным (маховским) скачком, а также, в значительно меньшей степени, уменьшение «эффективного» показателя адиабаты, вызванное физико-химическими эффектами, приводят к расширению области существования стационарных маховских конфигураций, которые при наличии энерговыделения и физико-химических эффектов образуются при всех числах Маха сверхзвукового течения. Возможность энерговыделения за главным скачком способствует маховскому отражению относительно слабых падающих скачков, которые при отсутствии горения, детонации и других физико-химических эффектов отражаются только регулярно.

Полный параметрический анализ всех видов тройных конфигураций скачков уплотнения с возможностью импульсного энерговыделения, который планируется провести в дальнейшем, может представлять интерес при анализе и проектировании газодинамических импульсных устройств, двигательных установок аэрокосмической техники. В частности, необходим теоретический анализ соотношений параметров потоков, образующихся за тройной точкой и разделенных тангенциальным разрывом, и выявление тройных конфигураций, оптимальных для решения поставленных инженерных задач. Не меньший интерес представляет анализ градиентов поля течения в окрестности тройной точки с помощью дифференциальных условий динамической совместности.

При дальнейших исследованиях тройных конфигураций с энерговыведением и существенными изменениями физико-химических свойств газа следует учитывать:

- существование современных моделей детонационных превращений, приходящих на смену использованной здесь модели Чепмена – Жуге;

- более сложный характер физико-химических превращений на сильных скачках уплотнения, не всегда описываемый однопараметрической моделью «эффективного показателя адиабаты» с достаточной степенью точности и достоверности;

- обуждаемую в § 2.3 неоднозначность решения для тройных конфигураций скачков уплотнения, образующихся при больших числах Маха течения газа с уменьшенным показателем адиабаты.

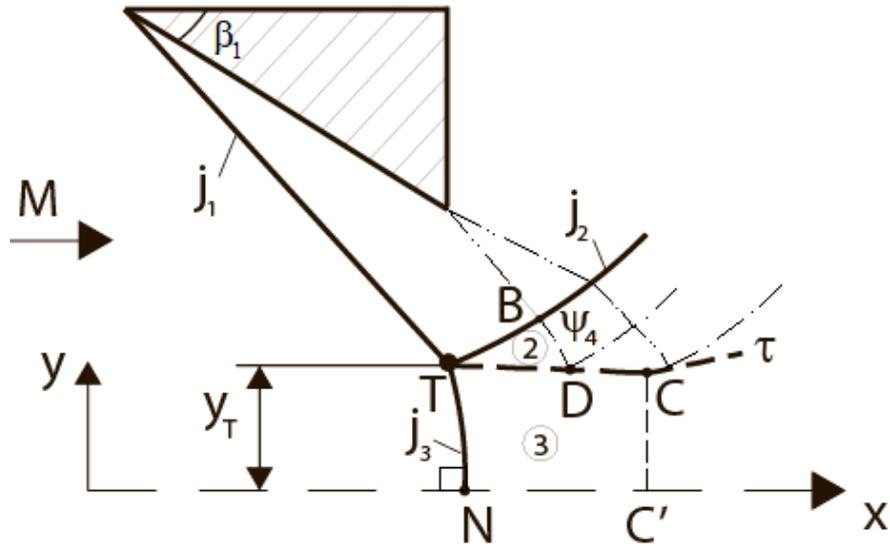
### **3.2. Аналитическая модель ударно-волновой структуры сверхзвукового течения с маховским отражением и импульсным энерговыведением на главном скачке**

Анализ течений с нерегулярным (маховским) отражением скачков уплотнения важен при газодинамическом конструировании и оптимизации сверхзвуковых воздухозаборников [134, 135], сопловых блоков, аппаратов струйных технологий, стартовых комплексов, а также при разработке взрывных технологий и средств подавления поражающего действия взрыва [92]. Согласно [76, 79, 92], разнообразные параметры течения (давления торможения, скорости, скоростные напоры и т.д.) в потоках, разделенных тангенциальным разрывом за тройной точкой маховского отражения, могут значительно различаться (при больших сверхзвуковых скоростях – в десятки раз), что может определять проектный облик газодинамических устройств. К примеру, в работах [86, 150, 152] предложена и теоретически обоснована идея нового комбинированного прямоточного реактивного двигателя. Согласно этой концепции, поток газа за отраженным скачком  $j_2$  (в области 2 на рис. 3.7,а-б), обладающий существенно бóльшим давлением, чем поток за главным

(маховским) скачком  $j_3$  (в области 3), может быть использован в термодинамическом цикле классического прямого воздушного реактивного двигателя. В то же время поток за главным скачком обладает значительно более высокой температурой, особенно при полете с большими сверхзвуковыми скоростями, что способствует детонации газовой смеси, благодаря чему он может быть использован в термодинамическом цикле детонационного двигателя. Для успешного разделения двух потоков за тройной точкой  $T$  маховского отражения определить необходимо высоту  $y_T$  тройной точки и форму  $y(x)$  исходящего из неё тангенциального разрыва  $\tau$ , а для оценки интегральных характеристик перспективного комбинированного двигателя – форму и размеры всех других газодинамических разрывов.

Одна из первых приближенно-аналитических моделей плоского сверхзвукового течения с маховским отражением сформулирована в работе [52]. В рамках этой модели вполне обоснованно [136] предполагалось, что течение в области 3 формирует так называемое «виртуальное сопло Лавалья» (“virtual nozzle”) с ускорением дозвукового течения за скачком  $j_3$  до критической скорости ( $M_3 = 1$ ) в наиболее узком сечении ( $CC'$  на рис. 3.7,б). Достижение критической скорости звука совпадает с разворотом тангенциального разрыва  $\tau$  в горизонтальном направлении (угол течения  $\theta = 0$  в точке  $C$ ) под воздействием волны разрежения  $\psi_4$ , падающей с задней кромки клина (рис. 3.7,а), или с границы струи (рис. 3.7,б), или формирующейся другим способом. Однако, как обсуждалось в § 2.3, в работе [52] необоснованно предложено, что тангенциальный разрыв  $\tau$  прямолинеен, а критическое сечение «виртуального сопла» 3 соответствует точке падения первой характеристики  $BD$  волны разрежения  $\psi_4$ , что привело к большим (50-90%) ошибкам в определении высоты тройной точки и других параметров течения. Применение преобразования Гриба-Рябинина [112] к области 2 сверхзвукового течения, осуществленное в работе [53], привело к незначительному уточнению результатов при одновременном усложнении математической модели.

a)



б)

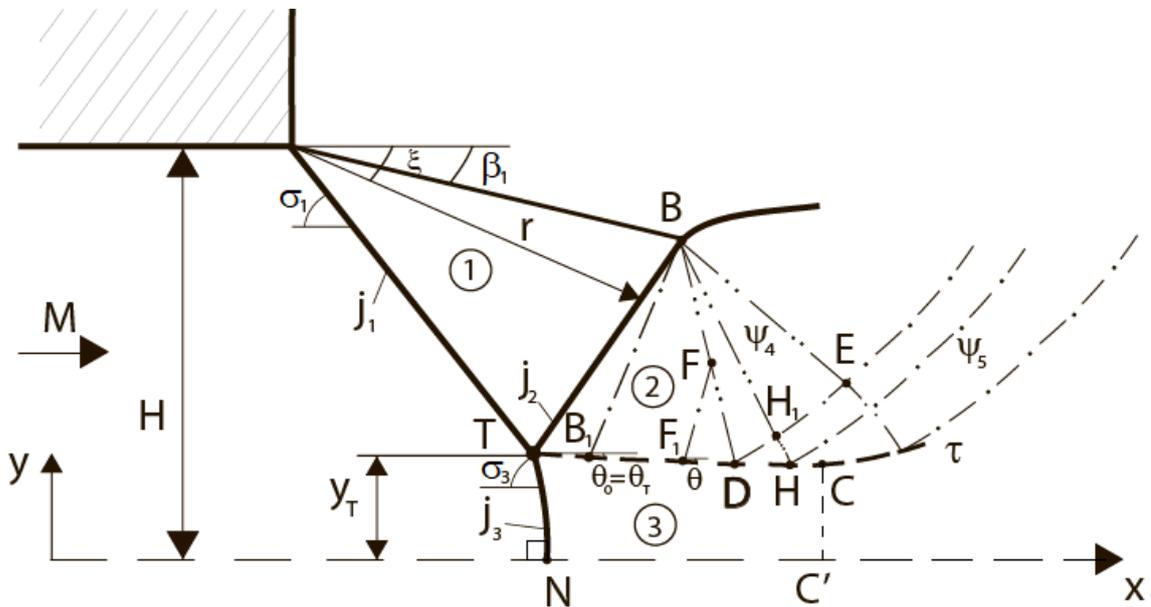


Рисунок 3.7 – Схема течения с маховским отражением в сужающемся канале между клиньями (а) и в сильноперерасширенной струе (б)

Аналитическая модель, подробно изложенная в [56, 62, 145] и материалах § 2.3, рассматривает область 2 как простую волну разрежения Прандтля-Майера, сопряженную с областью 3 условием равенства давлений на сторонах выпуклого вверх на отрезке  $TD$  разрыва  $\tau$  (задача сопряжения решена в [64, 65]). Учет изменения угла  $\theta$  наклона тангенциального разрыва значительно улучшает точность расчётов сверхзвуковой части течения (как показано в [56, 62, 145], ошибка определения высоты тройной точки составляет величину порядка 0,5-1% по сравнению с результатами расчётов методом характеристик).

Обратный разворот разрыва  $\tau$  осуществляется на конечном отрезке  $DC$  и рассчитывается, исходя из решения задачи о падении волны разрежения  $\psi_4$  на тангенциальный разрыв.

Интерес к методикам быстрой оценки параметров ударно-волновой структуры плоских, в том числе асимметричных [66-68], течений с маховским отражением заметно возрос в последнее время [58, 66-68], что, по-видимому, связано с развитием авиационной и ракетной техники, совершающей полёты с большими сверхзвуковыми скоростями в атмосфере. Именно при таких условиях наличие сильных скачков уплотнения в сверхзвуковом потоке реакционноспособной газовой (топливно-воздушной) смеси способно инициировать химические реакции и детонационные эффекты. В связи с этим требуется обобщение аналитической модели [145], хорошо зарекомендовавшей себя для течений совершенного нереагирующего газа, на случай изменения химического состава и импульсного энерговыделения на возникающих скачках. В работах [88, 89, 91] классические соотношения на скачках уплотнения обобщаются на случай изменения химического состава и наличия импульсного энерговыделения, описываемого в рамках модели Чепмена-Жуге. В частности, вместо классических ударных поляр построены «детонационные» поляры [91, 146]; выведены обобщенные критерии смены типа (регулярного или маховского) отражения косых скачков и проанализировано их смещение по сравнению с течением без энерговыделения и изменения химического состава.

Численные и теоретические результаты, достигнутые в работах [88, 89, 91, 128, 129, 146], не всегда напрямую применимы на практике. В частности, важные аналитические соотношения, полученные в [88], основаны на предположении наличия детонационных эффектов на падающем ( $j_1$ ) и главном ( $j_3$ ) скачках. В то же время, как показано в [150, 152], заметно более высокая температура газовой смеси инициирует детонационные эффекты, в первую очередь, на главном скачке (см. также рис. 3.8). При этом ни на падающем скачке, ни на отраженном не наблюдается ни изменения химического состава,

ни энерговыделения, что учтено в работе [146]. Необходимость расчёта химической кинетики происходящих реакций [128, 129] также не способствует разработке приближенно-аналитической методики быстрых вычислений.

В работах [143, 147] и, частично, в [161, 163, 164, 167, 169] приближенно-аналитическая модель течения с маховским отражением [56, 145], изложенная также в § 2.3, обобщается на случай изменения химического состава газовой смеси и импульсного энерговыделения на главном скачке. На примере сильноперерасширенной струи метано-воздушной или водородо-воздушной смеси изложен алгоритм расчёта параметров ударно-волновой структуры и показаны первичные результаты его применения, проведено сравнение с аналогичными данными для перерасширенной струи нереагирующего газа.

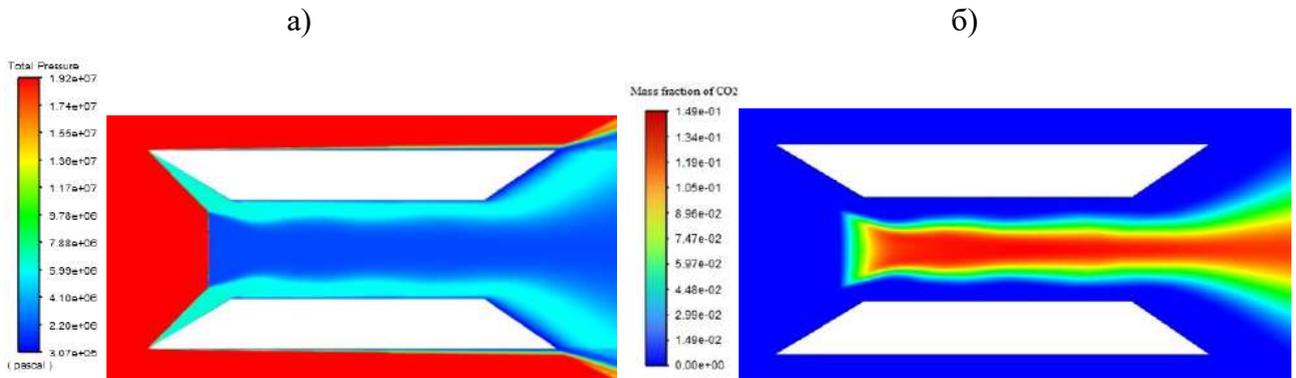


Рисунок 3.8 – Распределение полного давления (а) и массовой доли углекислого газа (б) в поле течения стехиометрической метановоздушной смеси. Число Маха невозмущенного потока  $M = 6$ , угол при вершине клиньев, формирующих вход в сужающийся канал,  $\beta_1 = 24^\circ$ . Давление торможения сверху от тангенциального разрыва заметно больше, но химические реакции с образованием  $\text{CO}_2$  происходят только за главным скачком

### 3.2.1. Математическая модель течения и алгоритм её применения

*Расчет параметров в окрестности тройной точки.* При падении достаточно сильного косога скачка уплотнения  $j_1$  в потоке с числом Маха  $M$  (рис. 3.7) образуется тройная конфигурация второго типа (ТК-2) согласно классификации [1, 10]. Параметры скачков  $j_1 - j_3$  в их общей (тройной) точке  $T$  связаны условиями равенства статических давлений и сонаправленности потоков на сторонах тангенциального разрыва  $\tau$  в виде (1.18):

$$J_1 J_2 = J_3, \quad (3.24)$$

$$\beta_1 + \beta_2 = \beta_3. \quad (3.25)$$

Здесь  $J_1 = p_1/p$ ,  $J_2 = p_2/p_1$ ,  $J_3 = p_3/p$  – интенсивности падающего ( $j_1$ ), отраженного ( $j_2$ ) и главного ( $j_3$ ) скачков (соотношения статических давлений на их сторонах),  $p$  – статическое давление в набегающем потоке,  $p_1 - p_3$  – давления за скачками  $j_1 - j_3$ , а  $\beta_1 - \beta_3$  – углы поворота потока на этих скачках в окрестности тройной точки, связанные с их интенсивностями формулами вида (1.4):

$$|\beta_1| = \text{arctg} \left[ \sqrt{\frac{(1+\varepsilon)M^2 - J_1 - \varepsilon}{J_1 + \varepsilon}} \cdot \frac{(1-\varepsilon)(J_1 - 1)}{(1+\varepsilon)M^2 - (1-\varepsilon)(J_1 - 1)} \right], \quad (3.26)$$

$$|\beta_2| = \text{arctg} \left[ \sqrt{\frac{(1+\varepsilon)M_1^2 - J_2 - \varepsilon}{J_2 + \varepsilon}} \cdot \frac{(1-\varepsilon)(J_2 - 1)}{(1+\varepsilon)M_1^2 - (1-\varepsilon)(J_2 - 1)} \right] \quad (3.27)$$

на падающем и отраженном скачках [1], и соотношением (1.12)

$$|\beta_3| = \text{arctg} \left[ \frac{(J_3 - 1)\sqrt{F - 1}}{\gamma M^2 - (J_3 - 1)} \right], \quad F = \frac{2\gamma M^2 [(\gamma - \gamma_3) + (\gamma - 1)((J_3 - 1) - (\gamma_3 - 1)\bar{\phi})]}{(\gamma - 1)(J_3 - 1)[(\gamma_3 + 1)(J_3 - 1) + 2\gamma_3]} \quad (3.28)$$

на главном скачке [88]. Здесь  $\varepsilon = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ ;  $\varepsilon_3 = (\gamma_3 - 1)/(\gamma_3 + 1)$ ;  $\gamma$  – показатель адиабаты газовой смеси в набегающем потоке,  $\gamma_3$  – продуктов сгорания за главным скачком. Безразмерная величина (1.11)

$$\bar{\phi} = \frac{\phi}{(p/\rho)} = \frac{\gamma\phi}{(\gamma - 1)c_p T} \quad (3.29)$$

характеризует импульсный энерговыделение  $\phi$  к единице массы смеси; значения плотности  $\rho$ , температуры  $T$ , изобарной удельной теплоёмкости  $c_p$ . Значение  $\phi$  определяется удельной теплотой сгорания горючего  $\lambda$ , отнесенной ко всей смеси в набегающем потоке.

Числа Маха  $M_1$  и  $M_{2T}$  течения за падающим и отраженным скачками определяются соотношениями вида (1.6):

$$M_1 = \sqrt{\frac{(J_1 + \varepsilon)M^2 - (1 - \varepsilon)(J_1^2 - 1)}{J_1(1 + \varepsilon J_1)}}, \quad (3.30)$$

$$M_{2T} = \sqrt{\frac{(J_2 + \varepsilon)M_1^2 - (1 - \varepsilon)(J_2^2 - 1)}{J_2(1 + \varepsilon J_2)}}. \quad (3.31)$$

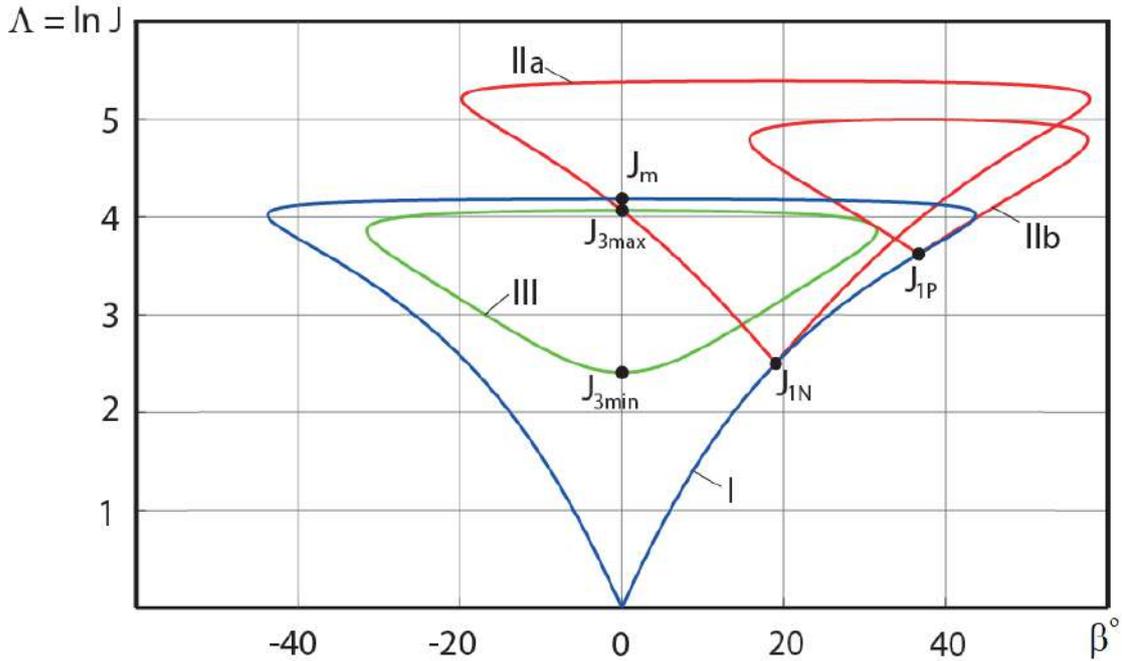


Рисунок 3.9 – Решение задачи о маховом отражении на плоскости «интенсивность скачка – угол поворота потока»: I – поляра падающего скачка; IIa – поляра отраженного скачка при минимальной ( $J_{1N}$ ); IIb – при максимально допустимой интенсивности ( $J_{1P}$ ) падающего; III – поляра главного (махового) скачка с импульсным энерговыделением

Соотношения (1.10) модели стационарной детонации Чепмена-Жуге

$$\rho u_n = \rho_3 u_{3n}, \quad p + \rho u_n^2 = p_3 + \rho_3 u_{3n}^2, \quad u_\tau = u_{3\tau},$$

$$\frac{u_n^2 + u_\tau^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \phi = \frac{u_{3n}^2 + u_{3\tau}^2}{2} + \frac{\gamma_3}{\gamma_3 - 1} \frac{p_3}{\rho_3},$$

где индексы «n» и «τ» относятся к нормальной и касательной (к поверхности скачка) составляющим скорости, определяют число Маха  $M_{3T}$  (1.15) в окрестности тройной точки:

$$M_{3T} = \sqrt{\frac{\gamma M^2 (E_3^2 \sin^2 \sigma_3 + \cos^2 \sigma_3)}{\gamma_3 E_3 J_3}}, \quad (3.32)$$

где, согласно (1.16),

$$\sigma_3 = \arcsin \sqrt{\frac{J_3 - 1}{\gamma(1 - E_3)M^2}}$$

– угол наклона скачка к потоку перед ним, а

$$E_3 = 1 - \frac{2[J_3 - (\gamma_3 - 1)/(\gamma - 1) - (\gamma_3 - 1)\bar{\phi}]}{(\gamma_3 - 1) + (\gamma_3 + 1)J_3}$$

– обратное отношение плотностей газов на сторонах скачка (1.17), сводящееся при  $\bar{\phi} = 0$  и  $\gamma_3 = \gamma$  к обычной адиабате Ренкина-Гюгонио.

Как показано в [146] и § 3.1, достаточно большой импульсный энерговыделение  $\bar{\phi}$  смещает «детонационную» полярю III (рис. 3.9), отображающую соотношение (3.28), внутрь ударной поляры I, соответствующей уравнению (3.26). При этом интенсивность неподвижного скачка  $j_3$  должна принадлежать промежутку (1.13)

$$J_{3\min} \leq J_3 \leq J_{3\max}, \quad (3.33)$$

где значение  $J_3 = J_{3\max}$  соответствует прямому скачку уплотнения с импульсным энерговыделением, а тройная конфигурация с  $J_3 = J_{3\max}$  и  $J_1 = J_{1N}$  (рис. 3.9) – установленному в § 3.1 аналогу критерия фон Неймана смены типа отражения скачка  $j_1$ . Значения  $J_{3\min}$  и  $J_{3\max}$ , согласно [146], определяются формулой (1.14):

$$J_{3\min,\max} = \frac{\gamma + 1}{\gamma_3 + 1} \cdot \frac{J_m(M) + 1}{2} \mp \frac{\sqrt{\gamma^2 M^4 + \gamma_3^2 - 2\gamma M^2 \left[ (\gamma_3^2 - 1)\bar{\phi} + (\gamma_3^2 - \gamma)/(\gamma - 1) \right]}}{\gamma_3 + 1}, \quad (3.34)$$

где  $J_m(M) = (1 + \varepsilon)M^2 - \varepsilon$ .

Единственное решение системы (3.25-3.26) в рассматриваемом диапазоне достаточно больших чисел Маха существует в диапазоне интенсивностей

$$J_{1N} \leq J_1 \leq J_{1P}, \quad (3.35)$$

где величина  $J_1 = J_{1P}$  соответствует предельному положению поляры Пв отраженного скачка (его касанию с полярю III, см. рис. 3.9). Течение за отраженным скачком  $j_2$  при этом является сверхзвуковым ( $M_{2T} > 1$ ), а за главным скачком  $j_3$  – дозвуковым ( $M_{3T} < 1$ ).

Как правило, для приближенно-аналитического описания потока в области 3 (рис. 3.7,а-б) используется модель квазиодномерного течения

с некоторым начальным числом Маха  $M_{30}$  непосредственно за прямым скачком. Значение  $M_{30}$  может быть определено формулой (9), тогда  $M_{30} = M_{3T}$ , или аналогичным соотношением при  $J_3 = J_{3\max}$ , что соответствует течению в точке  $N$  за прямым скачком (тогда  $M_{30} = M_{3N}$ ), или полусуммой этих значений: тогда

$$M_{30} = (M_{3T} + M_{3N})/2, \quad (3.36)$$

что соответствует подходу, принятому в работах [145, 58], или на основе более сложных методов осреднения параметров потока [5, 111]. Далее для определения начального числа Маха течения по «виртуальному соплу» 3 используется приближение (3.36).

Таким образом, применение предлагаемой модели позволяет установить начальный угол течения ( $\theta_0 = \beta_3$ ) и числа Маха ( $M_{20} = M_{2T}$  и  $M_{30}$ ) в областях 2 и 3 за отраженным и главным скачками.

*Течение в волне разрежения за отраженным скачком.* Соотношения для угла  $\theta$  течения в волне Прандтля-Майера 2 с прямолинейными характеристиками первого семейства

$$\theta = \theta_0 + \nu(M_{20}) - \nu(M_2),$$

где  $\nu(M) = 1/\sqrt{\varepsilon} \arctg \sqrt{\varepsilon(M^2 - 1)} - \arctg \sqrt{M^2 - 1}$  – функция Прандтля-Майера, вместе с условием вида (1.22)

$$y/y_T = q(M_{30})/q(M_3),$$

где  $q(M) = M [1 + \varepsilon_3 (M_3^2 - 1)]^{-1/2\varepsilon_3}$  – изоэнтروпная функция расхода, и равенством (1.23) давлений на сторонах тангенциального разрыва  $\tau$  в форме

$$\pi(M_2)/\pi(M_{20}) = \pi_3(M_3)/\pi_3(M_{30}),$$

где  $\pi(M) = [1 + (\gamma - 1)M^2/2]^{-\gamma/(\gamma-1)}$  и  $\pi_3(M) = [1 + (\gamma_3 - 1)M^2/2]^{-\gamma_3/(\gamma_3-1)}$  – изоэнтропные функции давления, записанные для газов сверху и снизу от тангенциального разрыва, приводят к уравнениям вида (1.35-1.38),

описывающим форму  $y(x)$  разрыва  $\tau$  и изменение параметров течения на его сторонах:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta, \quad \frac{d\theta}{dx} = -\frac{\gamma_3 M_3^2 \sqrt{M_2^2 - 1} \operatorname{tg} \theta}{\gamma M_2^2 (M_3^2 - 1) y}, \quad (3.37)$$

$$\frac{dM_2}{dx} = \frac{\gamma_3 M_3^2 [1 + \varepsilon (M_2^2 - 1)] \operatorname{tg} \theta}{(1 + \varepsilon) M_2 (M_3^2 - 1) y}, \quad \frac{dM_3}{dx} = \frac{M_3 [1 + \varepsilon_3 (M_3^2 - 1)] \operatorname{tg} \theta}{(1 - \varepsilon_3) (M_3^2 - 1) y}.$$

Если рассматривать число Маха  $M_3$  снизу от тангенциального разрыва в качестве независимой переменной, уравнения (3.37) принимают форму (1.39-1.42):

$$\frac{dx}{dM_3} = \frac{(1 - \varepsilon_3) (M_3^2 - 1) y}{M_3 [1 + \varepsilon_3 (M_3^2 - 1)] \operatorname{tg} \theta}, \quad \frac{dy}{dM_3} = \frac{(1 - \varepsilon_3) (M_3^2 - 1) y}{M_3 [1 + \varepsilon_3 (M_3^2 - 1)]},$$

$$\frac{d\theta}{dM_3} = -\frac{(1 + \varepsilon_3) M_3 \sqrt{M_2^2 - 1}}{\gamma M_2^2 [1 + \varepsilon_3 (M_3^2 - 1)]}, \quad \frac{dM_2}{dM_3} = \frac{(1 + \varepsilon_3) M_3 [1 + \varepsilon (M_2^2 - 1)]}{(1 + \varepsilon) M_2 [1 + \varepsilon_3 (M_3^2 - 1)]}. \quad (3.38)$$

При одинаковом химическом составе потоков на сторонах разрыва  $\tau$  соотношения (3.37) и (3.38) приобретают вид (2.31-2.34), известный из [64, 65, 145]. Интегрирование уравнений (3.37) или (3.38) производится вплоть до точки  $D$  пересечения разрыва  $\tau$  с граничной характеристикой  $BD$  второго семейства, падающей из точки выхода отраженного скачка  $j_2$  ( $TB$ ) на границу струи (рис. 3.7,б). Течение снизу от тангенциального разрыва при этом должно оставаться дозвуковым ( $M_3 < 1$ ); достижение критической скорости свидетельствует о том, что предлагаемая высота  $y_T$  тройной точки значительно занижена.

Как показывают расчёты, угол разворота тангенциального разрыва  $\tau$  на участке  $TD$  обычно невелик по абсолютной величине, но может в 1.5-2 раза превышать начальный угол  $\theta_0$  наклона этого разрыва на выходе из тройной точки. Поэтому игнорирование кривизны тангенциального разрыва приводит к существенному занижению получаемой высоты главного скачка (значения  $y_T$ ).

Анализ дифференциальных характеристик течения в волне Прандтля-Майера, подобный проведенному в [64, 65, 145] при  $\gamma = \gamma_3$ , приводит к следующим уравнениям для определения формы  $y_F(x_F)$  граничной акустической характеристики второго семейства  $BD$  и изменения параметров течения вдоль направления  $\varphi$  её падения:

$$\frac{dx_F}{d\varphi} = \cos(\theta - \alpha_2), \quad \frac{dy_F}{d\varphi} = \sin(\theta - \alpha_2), \quad \frac{d\theta}{d\varphi} = -\frac{2\gamma_3 M_3^2 (M_2^2 - 1) \sin \theta}{\gamma M_2^3 (M_3^2 - 1) y_{F_1}} \cdot \left[ \frac{y_F - y_{F_1}}{\Delta y} + 1 \right]^{-1}$$

$$\frac{dM_2}{d\varphi} = \frac{2\gamma_3 M_3^2 [1 + \varepsilon (M_2^2 - 1)] \sqrt{M_2^2 - 1} \sin \theta}{(1 + \varepsilon) M_2^2 (M_3^2 - 1) y_{F_1}} \cdot \left[ \frac{y_F - y_{F_1}}{\Delta y} + 1 \right]^{-1}, \quad (3.39)$$

$$\frac{dM_3}{d\varphi} = \frac{2M_3 [1 + \varepsilon_3 (M_3^2 - 1)] \sqrt{M_2^2 - 1} \sin \theta}{(1 - \varepsilon_3) M_2 (M_3^2 - 1) y_{F_1}} \cdot \left[ \frac{y_F - y_{F_1}}{\Delta y} + 1 \right]^{-1},$$

согласующимися с уравнениями (1.51-1.59). Здесь  $\alpha_2 = \arcsin(1/M_2)$  – угол Маха,  $M_2$  – число Маха течения в произвольной точке  $F$  на характеристике  $BD$ ,  $M_3$  – число Маха течения с другой стороны тангенциального разрыва  $\tau$  в точке  $F_1$  его пересечения с соответствующей прямолинейной характеристикой  $FF_1$ . Координата  $y_{F_1}$  точки  $F_1$  определяется формулой

$$y_{F_1} = y_T q(M_{30}) / q(M_3),$$

а расстояние  $\Delta y$  от этой точки до огибающей семейства прямолинейных характеристик – соотношением

$$\Delta y = \frac{(1 + \varepsilon) \sqrt{M_2^2 - 1} (M_3^2 - 1) y_{F_1} \sin(\theta + \alpha_2)}{\gamma_3 M_2 M_3^2 \sin \theta}.$$

Интегрирование системы уравнений (3.39) производится, начиная от точки  $B$  пересечения отраженного скачка с границей струи и заканчивая точкой  $D$  падения характеристики  $BD$  на тангенциальный разрыв. Если принять расстояние  $L$  между криволинейной характеристикой  $BD$  и тангенциальным

разрывом в качестве независимой переменной, то уравнения (3.39) записываются в форме

$$\frac{dx_F}{dL} = \frac{dx_F/d\varphi}{dL/d\varphi}, \quad \frac{dy_F}{dL} = \frac{dy_F/d\varphi}{dL/d\varphi}, \quad \frac{d\theta}{dL} = \frac{d\theta/d\varphi}{dL/d\varphi}, \quad \frac{dM_2}{dL} = \frac{dM_2/d\varphi}{dL/d\varphi}, \quad \frac{dM_3}{dL} = \frac{dM_3/d\varphi}{dL/d\varphi}, \quad (3.40)$$

где значение

$$\frac{dL}{d\varphi} = \sin(\alpha_2 - \theta) + \frac{2\sqrt{M_2^2 - 1}\sin\theta}{M_2} \cdot \left[ \frac{y_F - y_{F_1}}{\Delta y} + 1 \right]^{-1}$$

характеризует уменьшение расстояния  $L$  по мере приближения криволинейной характеристики  $BD$  к тангенциальному разрыву. Интегрирование уравнений (3.40) производится, начиная со значения  $L$  и параметров течения, соответствующих точке  $B$  за отраженным скачком, вплоть до значения  $L=0$ , соответствующего точке  $D$ .

*Уравнение формы отраженного скачка.* Неоднократно показано [113, 137], что коэффициент отражения возмущений разрежения или сжатия, догоняющих предшествующий косой скачок уплотнения, весьма мал (если течение за скачком не является околосзвуковым, что в данном случае не имеет места). Кроме того, интенсивность волны разрежения, воздействующей на отраженный скачок  $j_2$  в треугольнике  $TBB_1$  (рис. 3.7,б), сама по себе невелика. Поэтому, согласно методу, впервые предложенному в [9], форма отраженного скачка определяется, исходя из условия сопряжения потоков по направлению (т.е. углы течения за каждой точкой отраженного скачка  $j_2$  и в соответствующих точках волны разрежения Прандтля-Майера 2 должны совпадать). Анализ дифференциальных характеристик поля течения в волне 2 [64, 65, 145] совместно с условиями совместности на косом скачке определяют форму отраженного скачка в полярных координатах  $(r, \xi)$ :

$$\frac{dr}{d\xi} = r \operatorname{ctg}(\sigma_2 - \beta_1 - \xi), \quad (3.41)$$

$$\frac{d\theta_2}{d\xi} = \frac{K_s M_2 r \sin(\alpha_2 + \beta_2 - \sigma_2)}{\sin(\sigma_2 - \theta_1 - \xi)}. \quad (3.42)$$

Здесь  $r$  – расстояние от кромки сопла до рассматриваемой точки на скачке,  $\xi$  – полярный угол, отсчитываемый от горизонтали (см. рис. 3.7,б), а  $\alpha_2 = \arcsin(1/M_2)$  – угол Маха. При этом угол  $\beta_2$  поворота потока на отраженном скачке связан с его интенсивностью  $J_2$  соотношением (3.27), а угол  $\sigma_2$  наклона скачка к потоку перед ним – зависимостью (1.1)

$$J_2 = (1 + \varepsilon)M_1^2 \sin^2 \sigma_2 - \varepsilon.$$

Число Маха  $M_2$  в соответствующей точке волны разрежения за скачком определяется зависимостью

$$\nu(M_2) = \nu(M_{20}) + \theta_0 - \beta_2,$$

где  $\nu(M)$  – функция Прандтля-Майера, а соответствующее ей число Маха  $M_3$  на другой стороне тангенциального разрыва – из соотношения

$$\pi(M_3) = \pi(M_2) \cdot \pi_3(M_{30}) / \pi(M_{20}).$$

Присутствующая в (3.42) кривизна  $K_S$  линии тока за произвольной точкой скачка определяется следующим образом согласно результатам анализа [65]:

$$K_S = \frac{\gamma_3 M_3^2 \sqrt{M_2^2 - 1} \sin \theta}{\gamma M_2^2 (M_3^2 - 1) y_A} \cdot \frac{y_A - y_{A_1}}{y - y_{A_1}},$$

где  $y = H + r \sin \xi$  – ордината данной точки за скачком,  $\theta = \theta_0 + \nu(M_{20}) - \nu(M_2)$  – угол течения в этой точке,  $y_A = y_T q(M_{30}) / q(M_3)$ ,  $y_{A_1} = y_A \left[ 1 - (1 + \varepsilon) \sqrt{M_2^2 - 1} (M_3^2 - 1) \sin(\alpha_2 + \theta) / (\gamma_3 M_2 M_3^2 \sin \theta) \right]$ ,  $H$  – полуширина выходного сечения сопла.

Интегрирование уравнений (3.41-3.42) производится от значения  $\xi = -\sigma_1$  в тройной точке  $T$  до значения  $\xi = -|\beta_1|$  в точке  $B$  выхода скачка  $j_2$  на границу струи с последующим отражением волны разрежения  $\psi_4$ .

*Падение волны разрежения на тангенциальный разрыв.* Многие современные приближенные модели течений с маховским отражением [66-68] фактически заменяют быструю аналитическую оценку взаимодействия волны разрежения  $\psi_4$  (рис. 3.7,а-б) с тангенциальным разрывом  $\tau$  на расчёт методом

характеристик. Однако, с другой стороны, и сведение области  $DCE$  этого взаимодействия к единственной точке  $D$ , игнорирующее конечность промежутка  $DC$  разворота тангенциального разрыва в горизонтальном направлении [52, 53], также приводит к существенным ошибкам при определении параметров ударно-волновой структуры.

По аналогии с моделью [145], изложенной в § 2.3, расчет взаимодействия волны  $\psi_4$  с разрывом  $\tau$  выполняется следующим образом. Предполагается, что в волне  $\psi_4$  реализуется течение Прандтля-Майера, причем число Маха  $M_{2BD}$  потока перед этой волной соответствует среднему углу наклона характеристики  $BD$  в области 2:

$$v(M_{2BD}) + \alpha(M_{2BD}) = [v(M_{2B}) + \alpha(M_{2B}) + v(M_{2D}) + \alpha(M_{2D})]/2. \quad (3.43)$$

Начальное число Маха  $M_{3D}$  и ширина  $y_D$  области 3 течения по «виртуальному соплу» определяются из ранее полученных решений задач о форме тангенциального разрыва на участке  $TD$ , граничной характеристики  $BD$  и изменении параметров течения вдоль них.

Произвольному числу Маха  $M_{3H} \in [M_{3D}; 1]$  с нижней стороны тангенциального разрыва соответствует число Маха  $M_{2H}$  с его верхней стороны, определяемой соотношением

$$\pi(M_{2H})/\pi_3(M_{3H}) = \pi(M_{2BD})/\pi_3(M_{3D}), \quad (3.44)$$

и ширина  $y_H$  области 3 такая, что

$$y_H/y_D = q(M_{3D})/q(M_{3H}). \quad (3.45)$$

При этом абсцисса  $x_H$  точки  $H$  приближенно определяется из условия прямолинейности падающей характеристики  $BH_1H$ :

$$(y_H - y_B)/(x_H - x_B) = \operatorname{tg}[\zeta + v(M_{2BD}) + \alpha(M_{2BD}) - v(M_{2H_1}) - \alpha(M_{2H_1})], \quad (3.46)$$

где  $\operatorname{tg} \zeta = (y_D - y_B)/(x_D - x_B)$ , а наклон  $y'_H(x_H)$  тангенциального разрыва в этой точке – из условия

$$y'_H(x_H) = \operatorname{tg}[\theta_D + 2v(M_{2H_1}) - v(M_{2BD}) - v(M_{2H})], \quad (3.47)$$

учитывающего поворот линий тока в падающей на разрыв  $\tau$  ( $\psi_4$ ) и отраженной от него ( $\psi_5$ ) волнах. Здесь  $M_{2H_1}$  – число Маха на характеристике  $BH_1$ ,  $\theta_D$  – определенный ранее угол наклона тангенциального разрыва в точке  $D$ .

Система уравнений (3.44-3.47) определяет форму  $y_H(x_H)$  тангенциального разрыва  $\tau$  и интегрируется до достижения значения  $M_{3H} = 1$ .

Если волна разрежения  $\psi_4$  перед падением на тангенциальный разрыв испытывает преломление на отраженном скачке  $j_2$  (см., например, рис. 3.7,а), то к системе (3.44-3.47) добавляются аналитические решения задачи о взаимодействии скачка уплотнения со встречной волной разрежения, полученные в [60, 61].

*Алгоритм применения приближенно-аналитической модели.* Для быстрой оценки параметров ударно-волновой структуры сверхзвукового потока с маховским отражением, импульсным энерговыделением и изменением химического состава на главном скачке в первую очередь задаются параметры набегающего течения начальной смеси (значения  $M$  и  $\gamma$ ), а также показатель адиабаты  $\gamma_3$  продуктов сгорания, безразмерный импульсный энерговыделение  $\bar{\phi}$  и интенсивность  $J_1$  падающего скачка, удовлетворяющая неравенству (3.35). Далее параметры течения определяются следующим образом:

1. Задается значение  $y_T$  высоты тройной точки в первом приближении.
2. Решается задача (3.24-3.30) расчета параметров течения в окрестности тройной точки. Соотношения (3.25), (3.31), (3.32) и (3.36) определяют числа Маха  $M_{2T} = M_{20}$  и  $M_{3T}$  на сторонах тангенциального разрыва, а также начальное число Маха  $M_{30}$  течения по «виртуальному соплу» 3 и угол  $\theta_0 = \theta_3$  наклона разрыва  $\tau$  в окрестности тройной точки.
3. Соотношения (3.41-3.42) устанавливают форму слегка искривленного (выпуклого вверх) отраженного скачка уплотнения  $j_2$  ( $TB$ ), а также координаты точки  $B$  и параметры течения за скачком в этой точке.

4. Совместно определяются форма граничной характеристики  $BD$  (3.39-3.40), тангенциального разрыва  $\tau$  (3.38) и параметры течения на их сторонах. Интегрирование уравнений (3.38) и (3.39-3.40) завершается в точке  $D$  пересечения граничной характеристики с тангенциальным разрывом. Течение по «виртуальному соплу» 3 может достигнуть критической скорости ( $M_3 = 1$ ) до этой точки, что свидетельствует о существенном приуменьшении значения  $y_T$  в принятом приближении.

5. Решается задача (3.43-3.48) о падении волны разрежения  $\psi_4$ , вызывающем разворот тангенциального разрыва  $\tau$ . Если обнаруживается, что критическая скорость течения в области 3 достигается до разворота разрыва в горизонтальном направлении ( $M_{3H} = 1$  при  $y'_H(x_H) < 0$ ), предлагаемая высота  $y_T$  недостаточна, в противном случае – избыточна.

6. По результатам проведенной итерации значение  $y_T$  уточняется, после чего расчеты производятся в следующем приближении.

*3.2.2. Результаты применения приближенно-аналитической модели ударно-волновой структуры течения с импульсным энерговыделением и изменением химического состава газа на главном скачке*

В качестве примера использования представленной модели рассчитывается истечение равномерной (в выходном сечении) плоской струи топливно-воздушной газовой смеси. Показатели адиабаты смеси в набегающем потоке и за главным скачком уплотнения принимались равными  $\gamma = 1.396$  и  $\gamma_3 = 1.290$ , что примерно соответствует стехиометрической метановоздушной смеси (массовые доли – 4.856%  $\text{CH}_4$ , 74.212%  $\text{N}_2$ , 19.980%  $\text{O}_2$ , 0.951% других примесей) и продуктам ее полного сгорания, включающим углекислый газ и водяной пар. Удельная теплота сгорания горючего принималась равной  $\lambda = 55.266$  МДж/кг, что соответствует значению  $\phi = 2.684$  МДж/кг в пересчете на всю газовую смесь и безразмерной величине (3.29) импульсного

энерговыведения  $\bar{\phi} = 30.045$  при  $T=300$  К. Это значение удельного энерговыведения на порядок превосходит рассматриваемое в работе [88].

Ввиду достаточно большой величины импульсного энерговыведения, решение системы (3.24-3.30), описывающей стационарное маховское отражение, в рассматриваемых условиях существует лишь при  $M > 5.436$ . Согласно неравенству (3.33), ограничивающему диапазон возможных интенсивностей главного скачка уплотнения с энерговодводом, при  $M = 5.436$  детонационная поляра III (рис. 3.9) сжимается в точку

$$J_{3\min} = J_{3\max} = \frac{\gamma + 1}{\gamma_3 + 1} \cdot \frac{J_m(M) + 1}{2} = \frac{\gamma + 1}{\gamma_3 + 1} \cdot \frac{(1 + \varepsilon)M^2 + (1 - \varepsilon)}{2} = \frac{\gamma M^2 + 1}{\gamma_3 + 1},$$

а при меньших числах Маха – исчезает. Решение, описывающее тройную конфигурацию маховского отражения, при  $M < 5.436$  следует искать, допустив движение главной ударной волны  $j_3$  вверх по потоку, т.е. нестационарность возникающего течения.

На рис. 3.10 приведены примеры расчета безразмерной (отнесенной к полуширине выходного сечения) высоты тройной точки  $y_T$  в зависимости от интенсивности  $J_1$  падающего скачка (при условии, что осуществляется безотрывное истечение рассматриваемой сильноперерасширенной струи). Кривые 1-6 соответствуют истечению с числами Маха  $M=6; 6.5; 7; 8; 9$  и  $10$  во всём диапазоне (3.33) интенсивностей падающего скачка.

Для сравнения кривыми 1а-6а показаны значения  $y_T(J_1)$ , рассчитанные при тех же параметрах истечения, но при отсутствии энерговыведения ( $\phi = 0$ ) и изменения химического состава смеси ( $\gamma_3 = \gamma = 1.396$ ), то есть согласно алгоритму [145] (§ 2.3), обобщение которого представлено в данном параграфе. Из сравнения кривых 1-6 и 1а-6а очевидно, что значительный импульсный энерговыведение заметно смещает условия возникновения маховского отражения (из точек  $vN_1-vN_6$ , соответствующих «классическому» критерию фон Неймана, в точки  $N_1-N_6$ ), что полностью соответствует выводам и соотношениям, полученным в § 3.1. Кроме того, энерговыведение приводит к

существенному увеличению размеров главного (маховского) скачка и ширины области дозвукового течения за ним.

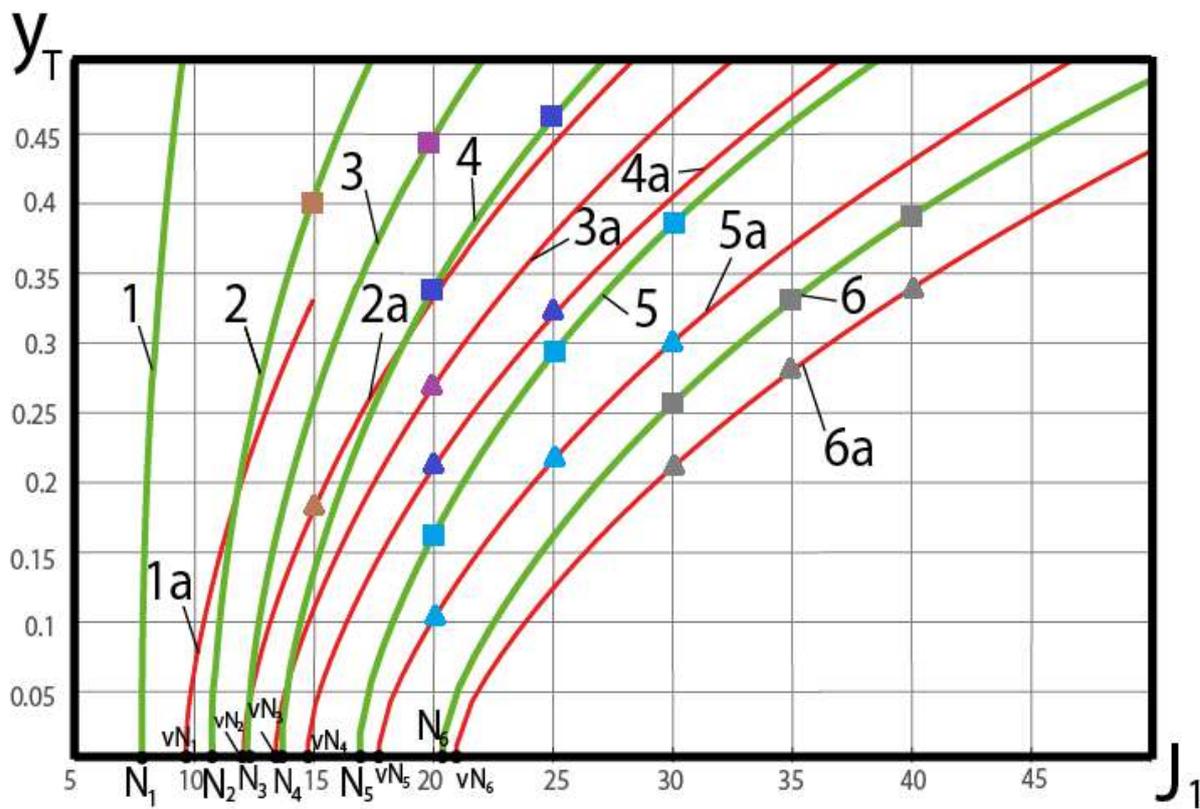


Рисунок 3.10 – Значения высоты тройной точки в зависимости от интенсивности падающего скачка при наличии (кривые 1-6) и отсутствии (кривые 1a-6a) импульсного энерговыделения и изменения химического состава метановоздушной смеси. Квадраты и треугольники соответствуют результатам расчётов в программе ANSYS Fluent

Следующий пример верификации разработанной аналитической модели представлен на рис. 3.8. С помощью программного пакета ANSYS Fluent 2020 R2 рассчитывалось плоское течение стехиометрической метановоздушной смеси в симметричном сужающемся канале между клиньями. Углы при вершинах клиньев составляли  $\beta_1 = 24^\circ$ , расстояние между их передними кромками – 200 мм, минимальная ширина канала – 100 мм. Набегающий поток имел нормальные атмосферные параметры, динамическая вязкость газа изменялась по формуле Сазерленда, применялась  $k-\omega$  SST-модель турбулентности. Расчеты проводились на неструктурированной сетке, насчитывавшей  $2 \cdot 10^6$  ячеек. При этом химические реакции, инициированные высокой температурой за маховским скачком, рассчитывались с помощью

модели конечной кинетики. Результаты проведенных расчетов сравнивались с полученными в аналогичных условиях для нереагирующей смеси аналогичного состава. Вычисленные значения безразмерной (отнесенной к ширине входного сечения канала) длины главного (маховского) скачка составили примерно 0.377 (при наличии экзотермических реакций) и 0.207 (при их запрещении). Из рис. 3.8,б очевидно, что в данном случае химические реакции инициируются только за главным (маховским) скачком, но не за падающим и отраженным скачками (поскольку углекислый газ, являющийся их продуктом, присутствует только в области течения за главным скачком).

Применение изложенной здесь (а также в [143, 147]) приближенно-аналитической модели позволило получить значения  $y_r = 0.412$  (в первом) и  $y_r = 0.215$  (во втором случае). Таким образом, сравнение численных (также показанный на рис. 3.10 квадратами и треугольниками) и аналитических результатов представляется удовлетворительным.

На следующем шаге верификации проводилось сравнение результатов применения предлагаемой аналитической модели и вычислений, приведенных в [138]. Сначала рассчитывалось истечение бедной водородовоздушной смеси ( $0.4 \text{ H}_2 + 4.772 \text{ Air}$ ) с числами Маха  $M=3.0$  и  $M=3.15$ . Согласно [138], в обоих случаях не получалось численного решения для установившегося течения с маховским отражением (происходил переход к регулярному отражению, или начинались осцилляционные движения маховского скачка с химическими реакциями за ним). Предполагая полное сгорание водорода с удельной теплотой  $\lambda = 141.8$  МДж/кг, несложно установить, что энерговыделение, отнесенное к единице массы газовой смеси, составит  $\phi = 0.821$  МДж/кг. Это существенно больше, чем критическое значение, соответствующее максимальному безразмерному энерговыделению  $\bar{\phi}_*$  (3.18) и составляющее 0.538 МДж/кг при  $M=3.0$  и 0.477 МДж/кг при  $M=3.15$ . При указанных значениях «детонационная поляра» главного скачка [24] вырождается в точку и исчезает, что приводит к отсутствию решения для стационарной ударно-

волновой структуры (по крайней мере, при  $\gamma = 1.403$  в набегающем потоке и  $\gamma_3 = 1.322$  в смеси за главным скачком). Таким образом, получено «негативное» (сводящееся к отсутствию как аналитического, так и численного решения) совпадение численных и аналитических результатов. Более «позитивные» результаты (выражающиеся в наличии стационарного решения с маховским отражением и импульсным энерговыделением) для смеси данного состава следует искать, например, при  $M=4.0$ .

В последнюю очередь, рассчитывались течения стехиометрической смеси водорода и кислорода ( $2\text{H}_2 + \text{O}_2$ ), также рассмотренные в работе [138]. При  $M=4.0$  предполагаемый энерговыделение также превосходит критическое значение (3.18). Поэтому численный результат, полученный в [138] при  $\beta_1 = 25^\circ$  (неустановившийся режим течения) вполне согласуется с предлагаемой моделью.

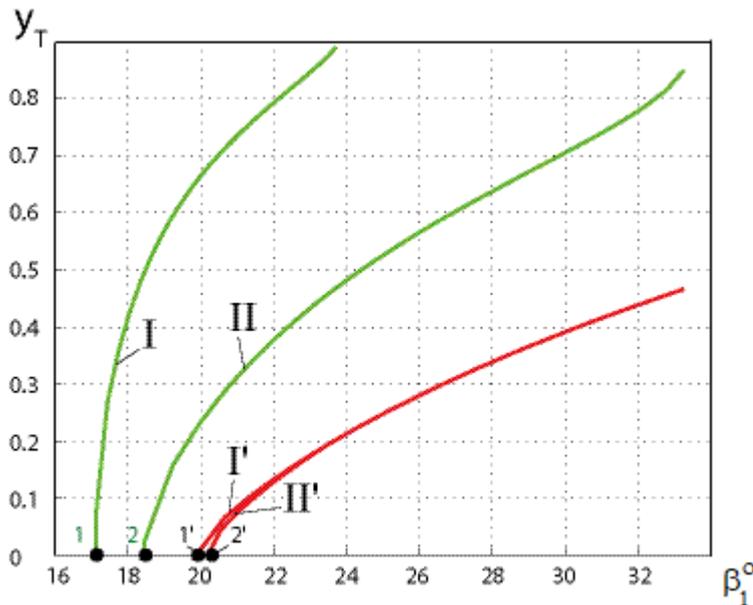


Рисунок 3.11 – Безразмерная высота тройной точки в зависимости от угла поворота потока на падающем скачке при наличии (кривые I, II) или отсутствии (кривые I', II') энерговыделения и изменения химического состава смеси за главным скачком в струе стехиометрической смеси водорода и кислорода при  $M=7.0$  (кривые I, I') и  $M=8.0$  (кривые II, II')

При числе Маха  $M=7.0$ , согласно данным [138], стационарная детонация имела место только в узком диапазоне углов поворота потока на падающем скачке (между  $\beta_1 = 20^\circ$  и  $\beta_1 = 23.5^\circ - 24^\circ$ ). Верхний предел полностью

соответствует данным предлагаемой модели, в частности, уравнению (3.34):  $J_1 = J_{1P}$  при  $\beta_1 = 23.824^\circ$ . Согласно численным экспериментам в [138] и аналитическим результатам применения предлагаемой модели, при  $J_1 = J_{1P}$  маховский скачок занимает почти всё поперечное сечение канала, постепенно превращаясь в головной отошедший скачок.

Нижняя граница ( $\beta_1 = 20^\circ$ ) области существования стационарной детонации в стехиометрической смеси водорода и кислорода при  $M=7.0$  соответствует образованию «классической» стационарной маховской конфигурации в совершенном двухатомном газе ( $\beta_1 = 19.716^\circ$ ), т.е. критерию фон Неймана. Согласно результатам § 3.1, при наличии импульсного энергоподвода эта граница сдвигается до значения  $\beta_1 = 17.104^\circ$  (из точки 1' на рис. 3.11 в точку 1). Следует заметить, что при  $M=7.0$  широкий диапазон значений углов  $\beta_1$  (вплоть до  $\beta_1 = 30.245^\circ$ ) принадлежит области «дуализма решений» для маховского и регулярного отражений. Поэтому в ряде случаев численные решения с регулярным отражением получаются, например, при  $\beta_1 = 22^\circ$ , хотя в случае реализации маховского отражения высота главного скачка должна быть достаточно велика (см., например, кривую на рис. 3.11). Кроме того, при  $M=7.0$  или  $M=8.0$  и нормальной температуре набегающего потока химические реакции в стехиометрической смеси водорода и кислорода имеют место не только за главным, но и за падающим скачком.

Зависимость  $y_t(\beta_1)$  безразмерной высоты тройной точки от угла поворота потока на падающем скачке в сверхзвуковой струе стехиометрической смеси водорода и воздуха показаны на рис. 3.11 для чисел Маха  $M=7.0$  (кривые I и I') и  $M=8.0$  (кривые II и II'). При этом кривые I и II соответствуют смеси с изменением химического состава и импульсным энерговыделением на главном скачке (результатам применения модели, изложенной в пп. 3.2.1). Кривые I' и II' соответствуют маховскому отражению в нереагирующей смеси того же химического состава (результатам применения модели, изложенной в § 2.3).

Таким образом, температура потока за главным скачком маховского отражения, образующегося в высокоскоростных сверхзвуковых потоках газа, значительно выше, чем за падающим и отраженным скачками. По этой причине детонационные эффекты (импульсное энерговыделение и изменение химического состава реакционноспособной газовой смеси) инициируются, в первую очередь, за главным (маховским) скачком. Анализ возникающих тройных конфигураций с применением модели стационарной детонации Чемпена – Жуге к главному (маховскому) скачку уплотнения показывает, что значительное импульсное выделение энергии приводит к смещению критериев вида отражения косых скачков. Скачки уплотнения, регулярно отражающиеся согласно классической теории, могут отражаться с образованием тройной точки, если допустить импульсное энерговыделение на маховском скачке.

Представленная приближенно-аналитическая модель для быстрого расчёта параметров ударно-волновой структуры течения реакционноспособной газовой смеси с маховским отражением впервые учитывает изменение химического состава и импульсное энерговыделение на главном скачке. Первичные результаты, полученные при расчете сверхзвукового струйного течения стехиометрического состава метановоздушной, водородовоздушной или водородокислородной газовой смеси, показывают не только более раннее возникновение маховского отражения по сравнению с аналогичным течением без химических реакций, но и значительное увеличение геометрических размеров главного скачка уплотнения.

### **3.3. О возможности применения полученных результатов в конструкции комбинированного реактивного двигателя**

#### *3.3.1. Идея комбинированного двигателя*

Реактивные двигатели традиционных схем, работающие на химическом топливе, во многом достигли предела своей эффективности. Существует мнение, что для значительного прироста тяги и повышения эффективности необходимо разработать принципиально новые типы реактивных двигателей, в

том числе путем комбинации термодинамических циклов, лежащих в основе традиционно используемых конструкций.

Концепция прямоточного детонационного воздушно-реактивного двигателя ранее обсуждалась в работах [86, 89, 150, 152, 153-156]. Несмотря на теоретическую простоту устройства, его функционирование на практике затруднено из-за образования сложных ударно-волновых структур с различной температурой газовой смеси, в результате чего химические реакции (например, газовая детонация) возбуждаются только в части течения, имеющей наибольшую температуру [76, 79, 92]. В частности, при стационарном маховском отражении температура потока за главным (маховским) скачком всегда (особенно при больших числах Маха течения) значительно выше, чем за системой из падающего и отраженного скачков. В результате в первую очередь детонирует только часть топливно-воздушной смеси в потоке за маховским скачком. Именно эту часть потока целесообразно использовать в термодинамическом цикле прямоточного детонационного двигателя (цикле Фикетта-Джейкобса).

В свою очередь, как показывают теоретические и численные исследования течений в сверхзвуковых воздухозаборниках, потери полного давления (давления торможения) в системе из падающего и отраженного скачков существенно меньше, чем на маховском [76, 78, 79, 92]. Эта часть потока предпочтительна для последующего применения в камере сгорания «классического» прямоточного воздушно-реактивного двигателя (использования в термодинамическом цикле Брайтона).

Существенные различия (по крайней мере, в несколько раз, но иногда – в десятки раз) в давлениях и температурах потоков газа, разделенных тангенциальными разрывами за тройными конфигурациями (ТК) разных типов (например, при маховском отражении) обсуждается в [9, 10]. Экстремальные свойства ударно-волновых систем и структур применялись ранее для оптимизации форм обтекаемых тел [118, 119], сверхзвуковых

воздухозаборников [80-83], в струйных технологиях и других приложениях газовой динамики.

На основании отмеченных особенностей возникновения ударно-волновых структур в работах [86, 150, 152] предложена концепция комбинированного реактивного двигателя с детонацией реакционноспособной газовой смеси за маховским скачком и с использованием потока за косым отраженным скачком по схеме «классического» воздушно-реактивного двигателя.

Практическое воплощение идеи комбинированного двигателя требует разделения потоков с различными значениями температуры, давления торможения (а при возбуждении химических реакций – и с различными химическим составом), разделенных тангенциальным разрывом за тройной точкой. Условия существования маховского отражения при наличии экзотермических реакций и изменения химического состава газовой смеси на главном скачке могут быть определены, исходя из материалов § 3.1. Размеры областей течения, используемых в различных термодинамических циклах, определяются, исходя из алгоритма расчета высоты тройной точки, изложенного в § 3.2. Тот же алгоритм определяет форму тангенциального разрыва, вдоль которого должно быть произведено разделение потоков.

Далее приводятся несколько примеров расчета идеализированной (до уровня течения с маховским отражением в сужающемся канале между клиньями) модели воздухозаборника перспективного комбинированного реактивного двигателя, как при наличии импульсного энерговыделения на главном скачке, так и без такового.

### *3.3.2. Течение без химических реакций в идеализированном воздухозаборнике перспективного двигателя*

Для анализа работы идеализированного (модельного) воздухозаборника перспективной двигательной установки потребовалось провести серию газодинамических расчётов в стандартных и наиболее распространенных пакетах вычислительной гидрогазодинамики.

В первом расчёте решается стационарная задача о плоскопараллельном втекании сверхзвукового потока воздуха в сужающийся канал между клиньями. Воздух рассматривается как совершенный газ, химические реакции отсутствуют.

В ходе численного моделирования рассматриваемого процесса лежат осредненные уравнения Навье-Стокса [139] для сжимаемого совершенного газа, которые представлены следующей системой (знаки осреднения опущены):

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \\ \frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\tau_m + \tau_t) + \rho \vec{g} + \vec{F} \\ \frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} H) = \nabla \cdot \left[ \alpha_{эф} \nabla T - \sum_j h_j \vec{J}_j + \vec{u} \cdot (\tau_m + \tau_t) \right] + S_h \end{cases} \quad (3.48)$$

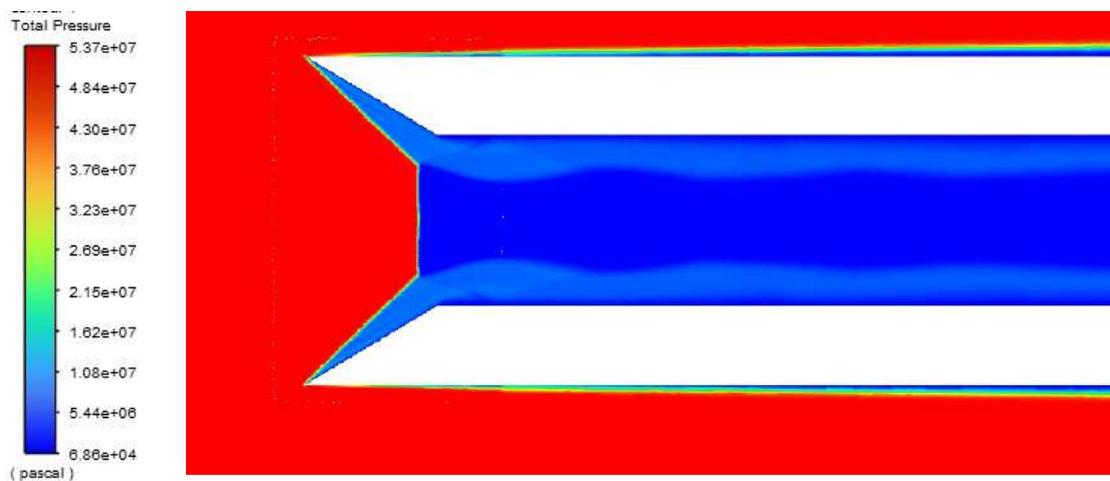
В (3.48)  $\vec{u}$  – вектор скорости осредненного течения с проекциями  $u, v$  и  $w$  на оси координат,  $\tau_m + \tau_t$  – молекулярная и турбулентная составляющие тензора вязких напряжений,  $E = C_v T + 0.5(u^2 + v^2 + w^2)$  – полная энергия газа,  $H = E + p / \rho = C_p T + 0.5(u^2 + v^2 + w^2)$  – его полная энтальпия,  $T$  – температура,  $C_v = (C_p - R)$  – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме,  $C_p$  – удельная теплоемкость газа при постоянном давлении,  $R$  – газовая постоянная,  $\rho \vec{g}$  – гравитационная сила, приходящаяся на единицу объема (пренебрежимо мала),  $\vec{F}$  – внешние силы,  $\alpha_{эф} = \alpha + \alpha_t$  – эффективный коэффициент теплоотдачи,  $\vec{J}_j$  – диффузионный член,  $h_j$  – энтальпия образования компонента,  $S_h$  – количественная характеристика источника энергии (позволяет учесть процесс образования и поглощения тепловой энергии).

Связь между турбулентными напряжениями и параметрами осредненного течения можно определить с помощью различных моделей турбулентности. В этих моделях принимаются определенные допущения, на основе которых

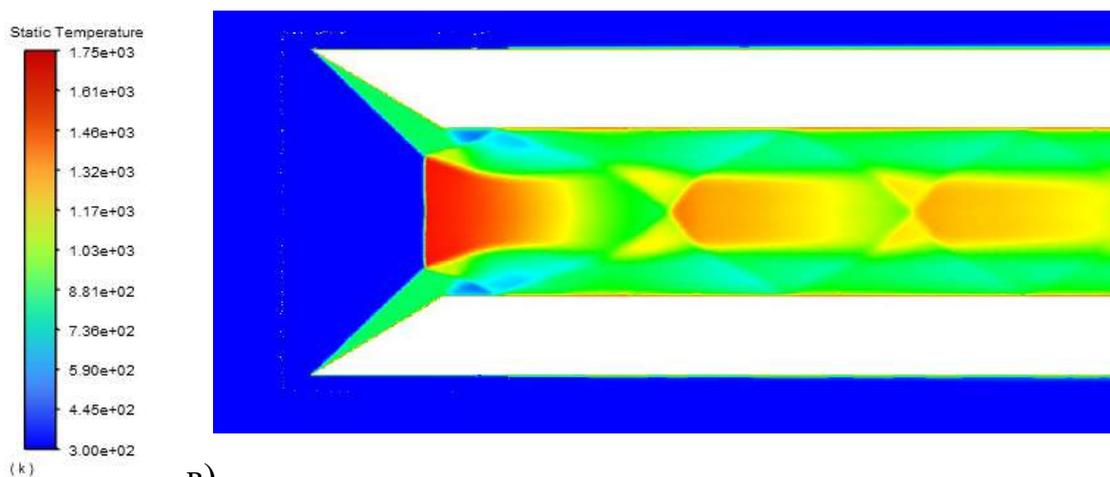
вводится недостающее число уравнений, что позволяет найти все неизвестные.

В работе используется модель турбулентности  $k - \varepsilon$  Realizable [139].

а)



б)



в)

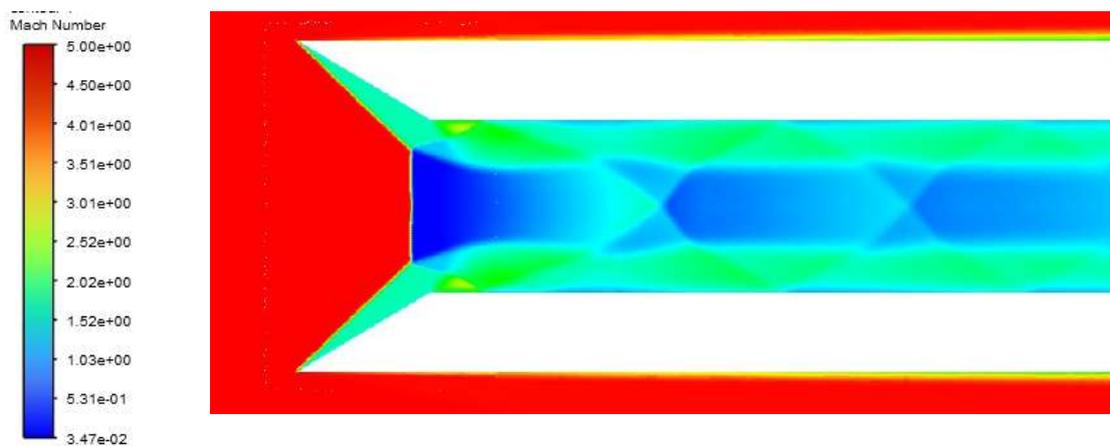


Рисунок 3.12,а-в – Поле давлений торможения (а), температур (б) и чисел Маха (в) при втекании воздуха в сужающийся канал перспективного двигателя

Параметры набегающего потока соответствуют числу Маха  $M=5$  и показателю адиабаты  $\gamma=1,4$ . Критерию фон Неймана перехода от маховского отражения к регулярному при данных параметрах течения соответствуют следующие параметры падающего скачка: угол поворота (угол при вершине клиньев, показанных на рис. 3.12,а-в)  $\beta_1=20.862^\circ$ , или интенсивность  $J_1=7.479$ , или угол наклона (угол падения скачка)  $\sigma_1=30.796^\circ$ .

Чтобы получить маховское отражение с достаточно большой высотой главного скачка, угол при вершине клина соответствовал значению  $\beta_1=31^\circ$ . Расстояние между клиньями составляло 200 мм, внутреннее сечение – 100 мм.

Образовавшийся главный, или маховский скачок уплотнения занимает примерно половину входного сечения. Можно заметить, что поток за маховским скачком напоминает квазиодномерное течение по соплу Лавалья с переходом от дозвукового течения к сверхзвуковому («виртуальное сопло» Лавалья). Поворот тангенциального разрыва происходит под влиянием волны разрежения, падающей с задней кромки клина.

На рис. 3.12,а показано распределение полного давления газа (давления торможения газового потока). Из приведенной диаграммы очевидно, что течение за отраженным косым скачком имеет давление торможения, в несколько раз большее, чем поток за «маховской ножкой» (главным скачком). Такое течение со значительно большей эффективностью может быть использовано в камере сгорания «классического» прямоточного воздушно-реактивного двигателя.

Согласно данным рис. 3.12,б, за главным (маховским) скачком температура газа увеличивается до 1750 К, что создаёт хорошие условия для зажигания или детонации топливно-воздушной смеси, проходящей через этот скачок, по сравнению с потоком, преодолевающим систему из падающего и отраженного косых скачков уплотнения, где температура газа заметно меньше. Таким образом, поток в этой части воздухозаборника может быть задействован в детонационном двигателе.

### 3.3.3. Влияние импульсного энерговыделения на параметры ударно-волновой структуры

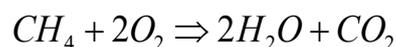
В случае подачи на сильный скачок уплотнения реакционноспособной топливно-воздушной смеси, резкое повышение температуры способствует её зажиганию и может инициировать детонационные превращения.

В примере, рассмотренном на рис. 3.13 и 3.14, в сужающийся канал, образованный двумя клиньями и подобный рассмотренному на рис. 3.12, затекает воздух с тем же числом Маха ( $M=5$ ). Через некоторое время, когда расчёт устанавливается, происходит подача топлива (стехиометрической смеси метана с воздухом) в центральную часть канала через отверстие (щель) шириной 10 мм.

На рис. 3.13 представлены размеры входной части и расчётной области. Расчётная область – прямоугольник с размерами 5 м на 10 м. Все размеры на рис. 3.13 указаны в миллиметрах.

Задача решается в двухмерной плоской симметричной постановке.

Моделируется одностадийная химическая реакция горения стехиометрической смеси метана с воздухом:



Для решения химических реакций используется модель конечно-скоростной химии (Finite-Rate/No TCI), которая подразумевает, что используемый пакет прикладной гидрогазодинамики учитывает конечную скорость химических реакций, решая уравнения химической кинетики с использованием констант скорости реакций Аррениуса, без попытки дополнительно учесть влияние турбулентности.

При моделировании потока газовой смеси необходимо учитывать её многокомпонентность. Уравнение изменения концентрации каждой  $i$ -ой компоненты газовой смеси записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial(\rho_i C_i)}{\partial t} + \nabla(\rho_i \vec{u} C_i) = -\nabla \vec{g}_i + \omega_i + S_i, \quad (3.49)$$

В (3.49)  $\omega_i$  – скорость образования  $i$ -й компоненты в химических реакциях, которая определяется по формуле (3.50):

$$\omega_i = \mu_{mwi} \sum_{r=1}^{N_R} R_{ir}, \quad (3.50)$$

где  $\mu_{mwi}$  – молярная масса  $i$ -й компоненты смеси,  $N_R$  – количество химических реакций,  $R_{ir}$  – мольная скорость образования/распада  $i$ -й компоненты в реакции  $r$ , вычисленная по уравнению (3.51) химической кинетики для скорости образования  $i$ -ой компоненты в ходе неравновесной химической реакции:

$$R_{ir} = \Gamma (v_{jr}'' - v_{jr}') \left( k_{fr} \prod_{j=1}^N [X_{jr}]^{\eta_{jr}'} - k_{br} \prod_{j=1}^N [X_{jr}]^{v_{jr}''} \right). \quad (3.51)$$

Здесь  $\Gamma = \sum_j \gamma_{ir} X_j$  – коэффициент, учитывающий влияние третьих тел на скорость химических реакций,  $v_{jr}''$  – показатель степени для продукта  $j$  в реакции  $r$ ,  $v_{jr}'$  – стехиометрический коэффициент для реагента  $j$  в реакции  $r$ ,  $k_{fr}$  и  $k_{br}$  – константы скорости прямой и обратной реакций, соответственно,  $X_{jr}$  – мольная концентрация компонента  $j$  в реакции  $r$ ,  $\eta_{jr}'$  – показатель степени для реагента  $j$  в реакции  $r$ ,  $\gamma_{ir}$  – эффективность компонента  $j$  в реакции  $r$  как третьего тела.

Константы скорости прямой и обратной реакций вычисляются по закону Аррениуса:

$$k_{f,r} = A_r T^{\beta_r} e^{-E_r/RT} \quad (3.52)$$

где  $A_r$  – предэкспоненциальный коэффициент,  $\beta_r$  – степенной показатель при температуре  $T$  (безразмерный),  $E_r$  – энергия активации (Дж/кмоль),  $R$  – универсальная газовая постоянная (Дж/кмоль·К)

Используется модель горения Species Transport, Finite-Rate/No TCI, программно реализованная разработчиками пакета вычислительной газовой динамики ANSYS Fluent.

В модели «Species Transport» рассчитывается локальная масса каждого из реагентов путём решения уравнения конвекции-диффузии (3.53):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Y_i) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} Y_i) = -\nabla \cdot \vec{J}_i + R_i + S_i, \quad (3.53)$$

где  $R_i$  – скорость дополнительного производства реагента  $i$  в процессе химической реакции,  $S_i$  – скорость производства реагента из дисперсной фазы или заданная пользователем скорость производства реагента. Данное уравнение решается для  $N-1$  реагентов, где  $N$  – число всех реагентов в жидкой фазе, входящих в решаемую систему. Масса реагента  $N$  равна разности суммарной массы системы и массы остальных рассчитанных  $N-1$  реагентов. Во избежание численных ошибок рекомендуется задавать  $N$ -м реагентом вещество с максимальной массовой долей в системе, например, азот для реакции, в которой окислителем является воздух [26].

Диффузия массы в турбулентных течениях описывается уравнением:

$$\vec{J}_i = -\left(\rho D_{i,m} + \frac{\mu_t}{Sc_t}\right) \nabla Y_i - D_{T,i} \frac{\nabla T}{T}, \quad (3.54)$$

где  $Sc_t$  – турбулентное число Шмидта,  $\mu_t$  – турбулентная вязкость.

Плотность смеси:

$$\rho_{см} = \frac{P_{см}}{R_{см} T} \quad (3.55)$$

где давление смеси

$$P_{см} = \sum_{i=1}^n P_i, \quad (3.56)$$

$$M_{см} = \sum_{i=1}^n C_i P_i$$

а  $C_i = \rho_i / \rho_{см}$  – массовая концентрация  $i$ -й компоненты в смеси [11].

Термодинамическая энтальпия смеси:

$$i = \sum_{i=1}^n C_i \cdot i_i, \quad (3.57)$$

где  $i_i = \int_{T_1}^{T_2} c_{p,i} \cdot dT$  – энтальпия  $i$ -ой компоненты.

Удельная теплоёмкость  $c_{p,i}$  каждой  $i$ -ой компоненты задана по кусочно-линейному закону в виде функции температуры и давления. Таким образом, средняя удельная теплоёмкость газовой смеси вычисляется с использованием соотношения

$$c_{p,i} = \sum_{i=1}^n C_i \cdot c_{p,i} \quad (3.58)$$

где  $c_{p,i}$  – удельная изобарная теплоёмкость каждого компонента [11].

Теплопроводность  $\lambda_i$  каждой  $i$ -й компоненты определяется с использованием соотношения из кинетической теории газов:

$$\lambda_i = \frac{15}{4} \frac{R_\mu}{M_i} \cdot \mu_i \left[ \frac{4}{15} \frac{c_{p,i} M_i}{R_\mu} + \frac{1}{3} \right] \quad (3.59)$$

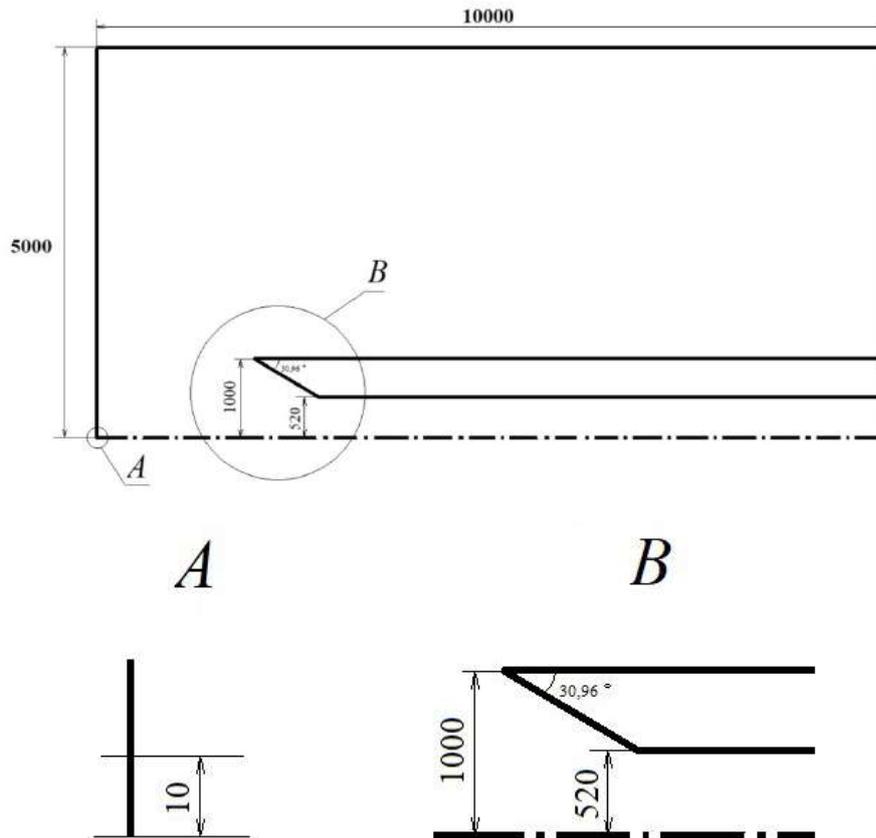


Рисунок 3.13 – Геометрические параметры расчетной области

Теплопроводность газовой смеси определяется формулой

$$\lambda_{см} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i \lambda_i}{\sum_j X_j \phi_{i,j}} \quad (3.60)$$

где  $X_i$  – мольная концентрация  $i$ -го компонента; параметр  $\varphi_{i,j}$  рассчитывается с использованием соотношения

$$\varphi_{i,j} = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{\mu_i}{\mu_j} \right)^{1/2} \left( \frac{M_{w,i}}{M_{w,j}} \right)^{1/4} \right]^2}{\left[ 8 \left( 1 + \frac{M_{w,i}}{M_{w,j}} \right) \right]^{1/2}} \quad (3.61)$$

Вязкость каждого  $i$ -го компонента вычислялась по формуле Сатерленда:

$$\mu_i = \mu_{0i} \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_{норм} + S}{T + S} \quad (3.62)$$

где  $\mu_{0i}$  – динамическая вязкость  $i$ -ого компонента при нормальных условиях,  $S$  – эффективная температура (константа Сатерленда).

Динамическая вязкость газовой смеси вычисляется следующим образом:

$$\mu_{см} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i \mu_i}{\sum_{j=1}^m X_j \varphi_{ij}} \quad (3.63)$$

На рис. 3.14 показана подача топливно-воздушной смеси (стехиометрической смеси метана воздухом). Топливо подаётся справа под углом в  $90^\circ$  к главному (маховскому) скачку, так как таким образом легче проверить возможность его зажигания. Видно, что происходит перемешивание метана с воздухом в процессе перемещения его к воздухозаборнику.

На рис. 3.15,а-в показаны результаты расчета поля течения с подачей топлива в центральную часть маховского скачка уплотнения, полученные с использованием модели (3.49-3.63). Из полученных результатов видно, что на сильном скачке происходит зажигание смеси, в результате чего образуется углекислый газ (рис. 3.15,а). При этом поверхность горения не соприкасается с корпусом канала, что способствует минимизации термической нагрузки на стенки аппарата.

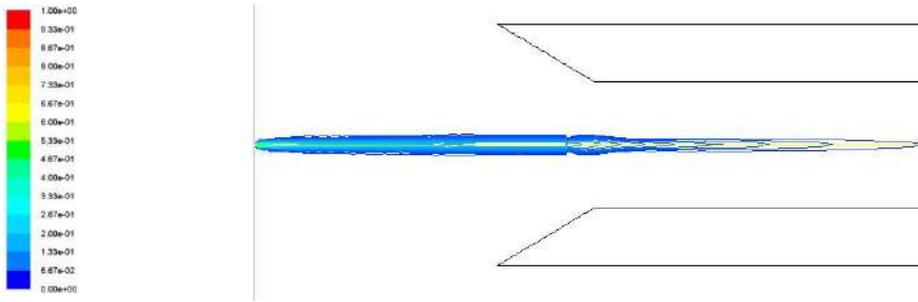
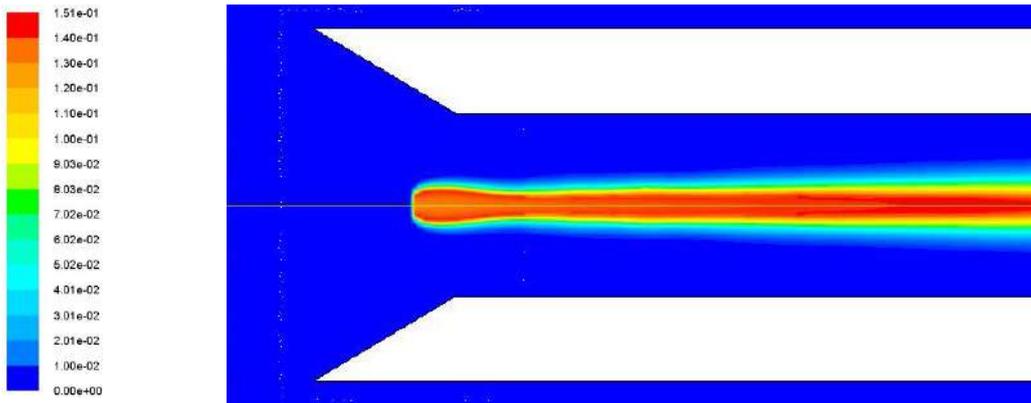
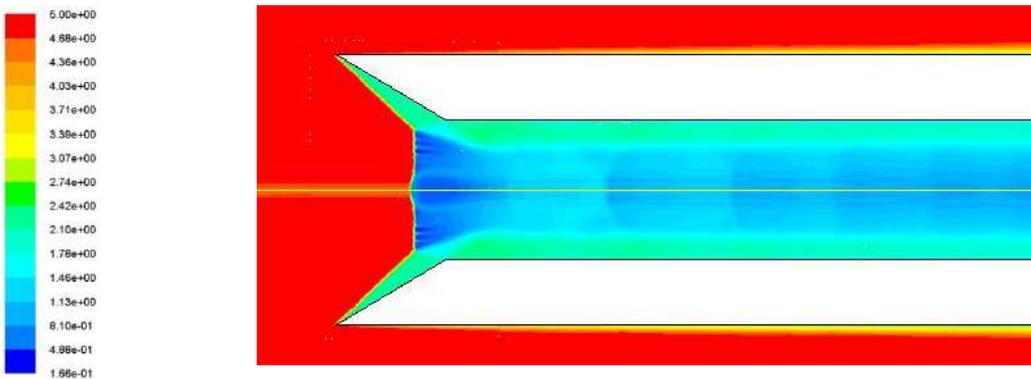


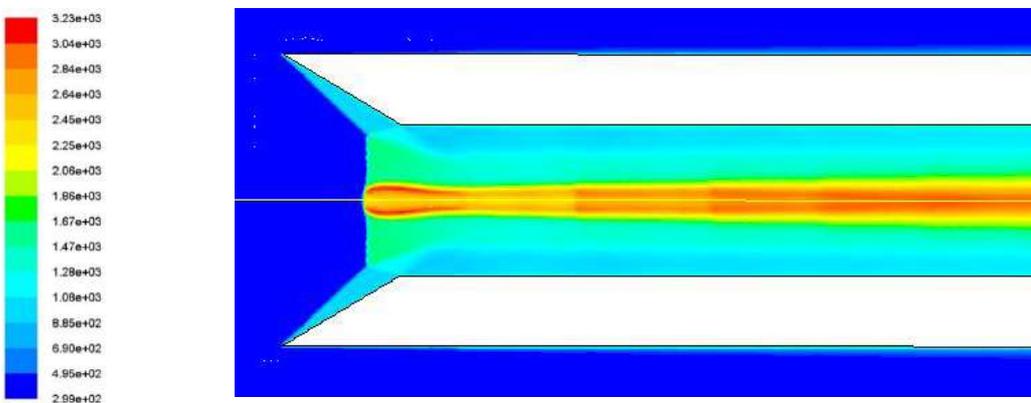
Рисунок 3.14 – Распределение (массовая доля) метана в поле течения



*a)*



*б)*



*в)*

Рисунок 3.15 – Распределение массовой доли углекислого газа (*a*), чисел Маха (*б*) и температуры (*в*) течения (К) в потоке с подачей реакционноспособной смеси в центральную часть канала

Картина течения, отображенная на рис. 3.15,б-в, показывает, что главный (маховский) скачок выгибается вверх по потоку (в левую сторону), чего не наблюдается без химических реакций [1, 20, 44]. Таким образом, главный скачок при маховском отражении становится выпуклым вперед по отношению к набегающему потоку – факт, не свойственный течениям нереагирующих газов и требующий дополнительного анализа с помощью дифференциальных условий динамической совместности [1, 140-142].

Из-за относительно малого размера форсунки, из которой подаётся метан, происходит заметное перемешивание смеси, подаваемой через щель, с окружающим воздухом. Расстояние от форсунки до маховского скачка составляет 2,6 м. На этой дистанции поток метана рассеивается, и на главный скачок уплотнения попадает уже перемешанная смесь с концентрацией метана гораздо меньшей, чем стехиометрическая. Тем не менее, концентрации метана хватает для возбуждения химических реакций на главном скачке.

Также заметно изменение положения конфигурации скачков. Отражённый скачок приближается к кромке клина, а главный скачок смещается вверх по потоку на 1 см, тем самым заметно увеличиваясь в размерах.

Таким образом, путем численного моделирования установлено, что наличие энерговыделения, получаемого в результате возбуждения химических реакций на сильном главном скачке уплотнения, существенно увеличивает размеры этого скачка (высоту тройной точки), что хорошо согласуется с материалами § 3.2. Этот факт повышает значимость области течения за маховским скачком, для которой предполагается использование в термодинамическом цикле прямоточного детонационного двигателя.

### **3.4. Выводы по главе 3**

Импульсное энерговыделение за главным (маховским) скачком, а также, в значительно меньшей степени, уменьшение показателя адиабаты газа, вызванное физико-химическими эффектами, приводят к расширению области существования маховского отражения, которое при наличии энерговыделения

и физико-химических эффектов теоретически может возникать при всех числах Маха сверхзвукового течения. Возможность энергосыделения за главным скачком способствует маховскому отражению относительно слабых падающих скачков, которые при отсутствии горения, детонации и других физико-химических эффектов отражаются только регулярно.

В представленной диссертационной работе предложена новая приближенно-аналитическая модель для быстрого расчёта параметров ударно-волновой структуры течения реакционноспособной газовой смеси с маховским отражением, которая впервые учитывает изменение химического состава и импульсный энергосыделение на главном скачке. Первичные результаты, полученные при расчете сверхзвукового струйного течения метановоздушной, водородовоздушной или водородокислородной газовой смеси, показывают не только более раннее возникновение маховского отражения по сравнению с аналогичным течением без химических реакций, но и значительное увеличение геометрических размеров главного скачка. Эти первичные результаты находят своё подтверждение данными численного моделирования.

В ряде работ автора диссертации и его научного руководителя высказана идея комбинированного прямоточного воздушно-реактивного двигателя, использующих потоки газа, разделенные тангенциальным разрывом за тройной точкой маховского отражения, в разных термодинамических циклах. Разработка такого двигателя – одно из возможных практических применений результатов диссертационной работы.

## Заключение

Исследование и оптимизация ударно-волновых систем и структур с помощью математического аппарата современной теории взаимодействия газодинамических разрывов, позволяет получить теоретически важные и практически ценные результаты.

В представленной диссертационной работе проведен анализ ударно-волновых структур, возникающих при отражении косых скачков уплотнения, в том числе в условиях импульсного энерговыделения и изменения химического состава газа на главном скачке, возникающей при маховском отражении. Разработан математический аппарат для быстрой и точной оценки параметров образующейся ударно-волновой структуры и интегральных характеристик поля течения в целом.

Для регулярного отражения скачков уплотнения получены аналитические соотношения, описывающие структуры с минимальным динамическим и термическим нагружением объекта воздействия. Кубическое уравнение в переменных интенсивность скачка – число Маха набегающего потока» определяет как параметры падающих скачков с минимальным значением давления и температуры газа за ними, так и углы наклона преграды, при которых минимальны статическое давление и температура за точкой регулярного отражения бегущей ударной волны заданной амплитуды. Геометрическая оптимизация взаимодействия ударных (в частности, взрывных) волн с преградами позволяет существенно уменьшить механические и тепловые нагрузки на элементы конструкций.

Для более сложных ударно-волновых структур (в частности, тройных конфигураций скачков уплотнения с отрицательным углом наклона отраженного скачка, возникающих при нерегулярном отражении в потоках с большими числами Маха и пониженным показателем адиабаты) выявлены области неоднозначности решения. Аналитически и численно установлено, что

имеет место обширная область параметров задачи, внутри которой для одного и того же падающего (ветвящегося) скачка уплотнения сосуществуют:

- маховское отражение с дозвуковым течением за главным скачком; течение за отраженным скачком при этом может быть как сверхзвуковым, так и дозвуковым;

- регулярное отражение (как правило, со сверхзвуковым течением за отраженным скачком);

- тройная конфигурация третьего типа, в большинстве случаев – с дозвуковым течением за результирующим скачком.

Кроме того, при аналогичных параметрах задачи в реальных газодинамических устройствах не исключено образование отошедших скачков, формирование неустановившихся течений, а также более сложных и разветвленных конфигураций. В частности, решения, соответствующие образованию тройных конфигураций маховского отражения с отрицательным углом наклона отраженного скачка, всегда неоднозначны. Их реализуемость (как и устойчивость возникающих ударно-волновых структур) должна подтверждаться в каждом отдельном практически важном случае.

В представленной работе выявлены условия существования и проведен параметрический анализ тройных конфигураций скачков уплотнения, возникающих при маховском отражении с импульсным энерговыделением и изменением химического состава газовой смеси на главном скачке. Причиной импульсного энерговыделения и изменения химического состава могут служить, например, детонационные явления, возбужденные сильным повышением температуры на главном скачке. Автором работы аналитически и численно показано, что импульсное энерговыделение за главным (маховским) скачком, а также, в значительно меньшей степени, уменьшение показателя адиабаты газа, вызванное физико-химическими эффектами, приводят к расширению области существования маховского отражения. Возможность энерговыделения за главным скачком делает допустимым маховское отражение

относительно слабых скачков, которые при отсутствии горения, детонации и других физико-химических эффектов отражаются только регулярно.

Решения отдельных задач интерференции газодинамических разрывов и волн, полученные ранее в теории взаимодействия стационарных газодинамических разрывов (решение для тройной конфигурации маховского отражения, сопряжения волны Прандтля-Майера с предшествующим догоняющим скачком уплотнения, встречным скачком и квазиодномерным потоком, взаимодействия падающей центрированной или простой волны разрежения с тангенциальным разрывом и др.), способствовали разработке новой аналитической модели ударно-волновой структуры сверхзвукового течения с маховским отражением. На основе результатов, полученных для сверхзвуковой перерасширенной струи или течения в сужающемся канале, показана её высокая точность, особенно при определении размера главного (маховского) скачка.

Разработанная аналитическая модель ударно-волновой структуры сверхзвукового течения с маховским отражением обобщена на случай возможного импульсного энерговыделения на маховском скачке, а также эффектов реального газа, существенных при нерегулярном отражении в потоках с большими числами Маха. Таким образом получена приближенно-аналитическая модель для быстрого расчёта параметров ударно-волновой структуры течения реакционноспособной газовой смеси с маховским отражением, которая впервые учитывает изменение химического состава и импульсный энерговыделение на главном скачке. Первичные результаты, полученные при расчете сверхзвукового течения метановоздушной, водородовоздушной или водородокислородной газовой смеси, показывают не только более раннее возникновение маховского отражения по сравнению с аналогичным течением без химических реакций, но и значительное увеличение геометрических размеров главного скачка. Эти первичные результаты находят своё подтверждение данными численного моделирования.

В ряде работ автора диссертации и его научного руководителя высказана идея комбинированного прямоточного воздушно-реактивного двигателя, использующих потоки газа, разделенные тангенциальным разрывом за тройной точкой маховского отражения, в разных термодинамических циклах. В частности, поток за отраженным скачком, обладающий относительно высоким давлением торможения, целесообразно, после дальнейшего торможения в системе из нескольких скачков, использовать в цикле Брайтона прямоточного воздушно-реактивного двигателя. В течении за маховским скачком, благодаря очень высоким значениям температуры, могут инициироваться детонационные эффекты, и этот поток целесообразнее использовать в цикле Фикетта-Джейкобса прямоточного детонационного двигателя. Разработка комбинированного двигателя, сочетающего выгоды от достоинств двух газовых потоков – одно из возможных практических применений результатов диссертационной работы. Несложно заметить, что разработанная аналитическая модель течений с маховским отражением при наличии импульсного энерговыделения и изменения химического состава газа на главном скачке, может быть использована для газодинамического конструирования таких перспективных устройств.

С точки зрения теоретической газовой динамики, продолжение проводимых исследований может включать полный параметрический анализ всех видов тройных конфигураций скачков уплотнения с возможностью импульсного энерговыделения на отдельных скачках. В частности, необходим анализ соотношений параметров потоков, образующихся за тройной точкой и разделенных тангенциальным разрывом, и выявление тройных конфигураций, оптимальных для решения поставленных инженерных задач. Не меньший интерес представляет анализ градиентов поля течения в окрестности тройной точки с помощью дифференциальных условий динамической совместности.

При дальнейших исследованиях тройных конфигураций с энерговыделением и существенными изменениями физико-химических свойств газа следует учитывать:

- наличие более современных моделей детонационных превращений, пришедших на смену использованной здесь модели Чепмена – Жуге;

- более сложный характер физико-химических превращений на сильных скачках уплотнения, не всегда описываемый однопараметрической моделью «эффективного показателя адиабаты» смеси за главным скачком с достаточной степенью точности и достоверности.

### Список литературы

1. Адрианов А.Л., Старых А.Л., Усков В.Н. Интерференция стационарных газодинамических разрывов. Новосибирск: Наука, 1995. 180 с.
2. Омельченко А.В. Нелинейные экстремальные задачи газовой динамики: дис. ... доктора физико-математических наук. СПб.: СПбГУ, 2002. 366 с.
3. Мостовых П.С. Теория ударно-волновых структур: дис. ... кандидата физико-математических наук. СПб.: СПбГУ, 2012. 149 с.
4. Mach E. Über den Verlauf von Funkenwellen in der Ebene und im Raume // Sitzungsbr. Akad. Wiss. Wien. 1878. Vol. 78. Pp. 819-838. (in German)
5. Mach E., Salcher P. Optische Untersuchung der Luftstrahlen // Sitzungsbr. Akad. Wiss. Wien. 1889. Vol. 98. Pp. 1303-1309. (in German)
6. Reichenbach H. Contribution of Ernst Mach to fluid mechanics // Annual Review of Fluid Mechanics. 1983. Vol. 15. Pp. 1-28.
7. Krehl P.O.K. Hystory of Shock Waves, Explosions and Impact. A Chronological and Biographical Reference. Springer Science & Business Media, 2008. 1288 p.
8. von Neumann J. Oblique reflection of shock waves // Collected Works. London: Pergamon Press, 1963. Vol. 6. Pp. 238-299.
9. Курант Р., Фридрихс К.О. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: Иностран. лит-ра, 1950. 420 с.
- Courant R., Friedrichs K.O. Supersonic Flow and Shock Waves. New York: Springer, 1976. 464 p.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
- Landau L.D., Lifshitz E.M. Course of Theoretical Physics. Vol. 6. Fluid Mechanics. Oxford: Pergamon Press, 1987. 552 p.
11. Зельдович Я.Б. Теория ударных волн и введение в газодинамику. М.: ЛЕНАНД, 2014. 192 с.
12. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Физматгиз, 1963. 420 с.
13. Pack D.C. The reflection and diffraction of shock waves // Journal of Fluid Mechanics. 1964. Vol. 18. Issue 4. Pp. 549-576.
14. Гриффитс У. Ударные волны / Современная гидродинамика. Успехи и проблемы. М.: Мир, 1984. С. 120-146.
15. Hornung H.G. Regular and Mach reflection of shock waves // Annual Review of Fluid Mechanics. 1986. Vol. 18. Pp. 33-58.
16. Ben-Dor G., Takayama K. The phenomena of shock wave reflection – a review of unsolved problems and future research needs // Shock Waves. 1992. Vol. 2. Issue 4. Pp. 211-223.

17. Арутюнян Г.М., Карчевский Л.В. Отраженные ударные волны. М.: Машиностроение, 1973. 376 с.
18. Баженова Т.В., Гвоздева Л.Г. Нестационарные взаимодействия ударных волн. М.: Наука, 1977. 274 с.
19. Ляхов В.Н., Подлубный В.В., Титаренко В.В. Воздействие ударных волн и струй на элементы конструкций. М.: Машиностроение, 1989. 392 с.
20. Ben-Dor G. Shock Wave Reflection Phenomena. 1<sup>st</sup> Edition. New York: Springer, 1992. 307 p.
21. Hornung H.G., Oertel H., Sandeman R.J. Transition to Mach reflexion of shock waves in steady and pseudosteady flow with and without relaxation // Journal of Fluid Mechanics. 1979. Vol. 90. Part 3. Pp. 541-560.
22. Henderson L.F., Lozzi A. Experiments on transition to Mach reflection // Journal of Fluid Mechanics. 1975. Vol. 68. Part 1. Pp. 139-155.
23. Henderson L.F., Lozzi A. Further experiments on transition to Mach reflection // Journal of Fluid Mechanics. 1979. Vol. 94. No. 3. Pp. 541-560.
24. Hornung H.G., Robinson M.I. Transition from regular to Mach reflection of shock waves. Part 2: The steady-flow criterion // Journal of Fluid Mechanics. 1982. Vol. 123. No. 1. Pp. 155-164.
25. Chpoun A., Ben-Dor G. Numerical confirmation of the hysteresis phenomenon in the regular to Mach reflection transition in steady flows // Shock Waves. 1995. Vol. 5. Issue 4. Pp. 199-204.
26. Ivanov M.S., Gimelshein S.F., Beylich A.E. Hysteresis effect in stationary reflection of shock waves // Physics of Fluids. 1995. Vol. 7. Issue 4. Pp. 685-687.
27. Ben-Dor G., Elperin T., Li H., Vasiliev E. Downstream pressure induced hysteresis in the regular ↔ Mach reflection transition in steady flows // Physics of Fluids. 1997. Vol. 9. Issue 10. Pp. 3096-3098.
28. Ivanov M.S., Gimelshein S.F., Markelov G.N. Statistical Simulation of the Transition between Regular and Mach reflection in Steady Flows // Computer Math. Applic. 1998. Vol. 35. No. 1/2. Pp. 113-125.
29. Ivanov M.S., Markelov G.N., Kudryavtsev A.N., Gimelshein S.F. Numerical Analysis of Shock Wave Reflection Transition in Steady Flows // AIAA Journal. 1998. Vol. 36. No. 11. Pp. 2079-2086.
30. Gimelshein S.F., Markelov G.N., Ivanov M.S. Real Gas Effects on the Transition Between Regular and Mach Reflection in Steady Flows // AIAA Paper 98-0877. 9 p.
31. Kudryavtsev A.N., Khotyanovsky D.V., Ivanov M.S., Hadjadj A., Vandromme D. Transition Between Regular and Mach Reflections in Plane Overexpanded Jets // AIAA Paper 2002-0977. 11 p.

32. Hadjadj A., Kudryavtsev A.N., Ivanov M.S. Numerical Investigation of Shock-Reflection Phenomena in Overexpanded Supersonic Jets // *AIAA Journal*. 2004. Vol. 42. No. 3. Pp. 570-577.
33. Shimshi E., Ben-Dor G., Levy A. Viscous simulation of shock-reflection hysteresis in overexpanded planar nozzles // *Journal of Fluid Mechanics*. 2009. Vol. 635. Pp. 189-206.
34. Ivanov M.S., Vandromme D., Fomin V.M., Kudryavtsev A.N., Hadjadj A., Khotyanovsky D.V. Transition between regular and Mach reflection of shock waves: new numerical and experimental results // *Shock Waves*. 2001. Vol. 11. Pp. 199-207.
35. Chpoun A., Passerel D., Li H., Ben-Dor G. Reconsideration of the oblique shock wave reflection in steady flows. I. Experimental investigation // *Journal of Fluid Mechanics*. 1995. Vol. 301. Pp. 37-50.
36. Ivanov M.S., Kudryavtsev A.N., Nikiforov S.B., Khotyanovsky D.V., Pavlov A.A. Experiments on shock wave reflection transition and hysteresis in low-noise wind tunnel // *Physics of Fluids*. 2003. Vol. 15. Pp. 1807-1810.
37. Mouton C.A., Hornung H.G. Experiments on the mechanism of inducing transition between regular and Mach reflection // *Physics of Fluids*. 2008. Vol. 20. Paper No. 126103. 11 p.
38. Skews B.W. Aspect ratio effects in wind tunnel studies of shock wave reflection transition // *Shock Waves*. 1997. Vol. 8. Pp. 373-383.
39. Sudani N., Sato M., Karasawa T., Noda J., Tate A., Watanabe M. Irregular effects on the transition from regular to Mach reflection of shock waves in wind tunnel flows // *Journal of Fluid Mechanics*. 2002. Vol. 459. Pp. 167-185
40. Mouton C.A., Hornung H.G. Mach Stem Height and Growth Rate Predictions // *AIAA Journal*. 2007. Vol. 45. No. 8. Pp. 1977-1987.
41. Hornung H.G. On the stability of steady-flow regular and Mach reflection // *Shock Waves*. 1997. Vol. 7. Pp. 123-125.
42. Ben-Dor G. Hysteresis phenomena in shock wave reflection in steady flows // *Journal of Materials Processing Technology*. 1999. Vol. 85. Pp. 15-19.
43. Ben-Dor G., Ivanov M., Vasilev E., Elperin T. Hysteresis processes in the regular reflection ↔ Mach reflection transition in steady flows // *Progress in Aerospace Sciences*. 2002. Vol. 38. Pp. 347-387.
44. Ben-Dor G. *Shock Wave Reflection Phenomena*. 2<sup>nd</sup> Edition. Berlin – Heidelberg – NewYork: Springer, 2007. 342 p.
45. Тешуков В.М. Об устойчивости регулярного отражения ударных волн // *Журнал прикладной механики и технической физики*. 1989. Т. 30. № 2. С. 26-33.

46. Иванов М.С., Кудрявцев А.Н., Хотяновский Д.В. Численное моделирование перехода между регулярным и маховским отражением ударных волн под действием локальных возмущений // Доклады Академии Наук. 2000. Т. 373. № 3. С. 332-336.
47. Kudryavtsev A.N., Khotyanovsky D.V., Ivanov M.S., Hadjadj A., Vandromme D. Numerical investigations of transition between regular and Mach reflections caused by free-stream disturbances // Shock Waves. 2002. Vol. 12. Pp. 157-165.
48. Henderson L.F., Menikoff R. Triple-shock entropy theorem and its consequences // Journal of Fluid Mechanics. 1995. Vol. 366. Pp. 179-210.
49. Булат П.В. Стационарные газодинамические разрывы и ударно-волновые структуры: дис. доктора физико-математических наук. СПб.: СПбГУ, 2017. 361 с.
50. Булат П.В. Перестройки и трансформации ударно-волновых структур при интерференции косых скачков уплотнения в условиях неоднозначности и гистерезиса // Аэрокосмическая техника и технологии. 2023. Т. 1. № 2. С. 12-32.
51. Ben-Dor G., Elperin T., Li H., Vasiliev E., Chpoun A., Zeitoun D. Dependence of Steady Mach Reflections on the Reflecting-Wedge Trailing-Edge Angle // AIAA Journal. 197. Vol. 35. No. 11. Pp. 1780-1782.
52. Azevedo D.J., Liu C.S. Engineering approach to the prediction of shock patterns in bounded high-speed flows // AIAA Journal. 1993. Vol. 31. No. 1. Pp. 83-90.
53. Медведев А.Е., Фомин В.М. Приближенно-аналитический расчет маховской конфигурации стационарных ударных волн в плоском сужающемся канале // Прикладная механика и техническая физика. 1998. Т. 39. № 3. С.52-58.
54. Schotz M., Levy A., Ben-Dor G., Igra O. Analytical prediction of the wave configuration size in steady Mach reflection // Shock Waves. 1997. Vol. 7. Pp. 363-372.
55. Li H., Ben-Dor G. A parametric study of Mach reflection in steady flows // Journal of Fluid Mechanics 1997. Vol. 341. Pp. 101-125.
56. Омельченко А.В., Усков В.Н., Чернышов М.В. Об одной приближенной аналитической модели течения в первой бочке перерасширенной струи // Письма в Журнал технической физики. 2003. Т. 29. Вып. 6. С. 56-62.
57. Bai C.-Y., Wu Z.-N. Size and shape of shock waves and slipline for Mach reflection in steady flow // Journal of Fluid Mechanics. 2017. Vol. 818. Pp. 116-140.
58. Choe S.-G. A method for predicting Mach stem height in steady flows // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part G: Journal of Aerospace Engineering. 2021. Vol. 236. Issue 1. 095441002110015. 8 p.

59. Ivanov M.S., Ben-Dor G., Elperin T., Kudryavtsev A.N., Khotyanovsky D.V. Flow-Mach-Number-Variation-Induced Hysteresis in Steady Shock Wave Reflections // *AIAA Journal*. 2001. Vol. 39. No. 5. Pp. 972-974.
60. Li H., Ben-Dor G. Oblique Shock – Expansion Fan Interaction – Analytical Solution // *AIAA Journal*. 1996. Vol. 43. No. 2. Pp. 418-421.
61. Мешков В.Р., Омельченко А.В., Усков В.Н. Взаимодействие скачка уплотнения со встречной волной разрежения // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика, механика, астрономия*. 2002. Т. 2. № 9. С. 99-106.
62. Чернышов М.В. Взаимодействия элементов ударно-волновых систем между собой и с различными поверхностями. Дис. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. СПб.: БГТУ «Военмех», 2002. 173 с.
63. Silnikov M.V., Chernyshov M.V., Uskov V.N. Analytical solutions for Prandtl-Meyer wave – oblique shock overtaking interaction // *Acta Astronautica*. 2014. Vol. 99. Pp. 175-183.
64. Усков В.Н., Чернышов М.В. Сопряжение волны Прандтля-Майера с областью квазиодномерного течения // *Математическое моделирование*. 2003. Т. 15. № 6. С. 111-119.
65. Silnikov M.V., Chernyshov M.V. The interaction of Prandtl-Meyer wave and quasi-one-dimensional flow region // *Acta Astronautica*. 2015. Vol. 109. Pp. 248-253.
66. Tao Y., Liu W., Fan X., Xiong B., Yu J., Sum M. A study of the asymmetric shock reflection configurations in steady flows // *Journal of Fluid Mechanics*. 2017. Vol. 825. Pp. 1-15.
67. Roy S., Gopalapillai R. An analytical model for asymmetric Mach reflection configuration in steady flows // *Journal of Fluid Mechanics*. 2019. Vol. 863. Pp. 242-268.
68. Lin J., Bai C.-Y., Wu Z.-N. Study of asymmetrical shock wave reflection in steady supersonic flow // *Journal of Fluid Mechanics*. 2019. Vol. 864. Pp. 848-875.
69. Гвоздева Л.Г., Гавренков С.А. Возникновение тройных конфигураций с отрицательным углом отражения в стационарном потоке струи // *Письма в Журнал технической физики*. 2012. Т. 38. Вып. 8. С. 39-45.
70. Гавренков С.А., Гвоздева Л.Г. Численное исследование возникновения неустойчивости трехударных конфигураций в стационарном сверхзвуковом потоке газа // *Письма в Журнал технической физики*. 2012. Т. 38. № 12. С. 74-80.
71. Gvozdeva L.G., Silnikov M.V., Gavrenkov S.A. Triple shock configurations with negative angle of reflection // *Acta Astronautica*. 2015. Vol. 116. Pp. 36-42.
72. Gvozdeva L., Gavrenkov S., Nesterov A. A study of slipstreams in triple shock wave configurations // *Shock Waves*. 2015. Vol. 25. Issue 3. Pp. 283-291.
73. Gvozdeva L.G., Gavrenkov S.A. New configuration of irregular reflection of shock waves // *Progress in Flight Physics*. 2015. Vol. 7. Pp. 437-452.

74. Азарова О.А., Гвоздева Л.Г. Нестационарные трехударные конфигурации и контактно-вихревые структуры, инициированные взаимодействием источника энергии с ударным слоем в газах // Письма в Журнал технической физики. 2016. Т. 42. Вып. 15. С. 59-66.
75. Сильников М.В., Чернышов М.В., Гвоздева Л.Г. Аналитическое описание области существования тройных конфигураций с отрицательным углом наклона отраженного скачка // Журнал технической физики. 2016. Том 86. Вып. 11. С. 30-34.
76. Чернышов М.В. Экстремальные тройные конфигурации с отрицательным углом наклона отраженного скачка // Известия вузов. Авиационная техника. 2019. № 2. С. 82-88.
77. Шоев Г.В., Иванов М.С. Численное исследование взаимодействия ударных волн в стационарных потоках вязкого теплопроводного газа с низким показателем адиабаты // Теплофизика и аэромеханика. 2016. № 3. С. 359–370.
78. Тао Ган. Тройные конфигурации скачков уплотнения в неравномерных сверхзвуковых потоках: дис. ... кандидата технических наук. СПб.: БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова, 2000. 162 с.
79. Усков В.Н., Чернышов М.В. Особые и экстремальные тройные конфигурации скачков уплотнения // Прикладная механика и техническая физика. 2006. Т. 47. № 4. С. 39-53.
80. Петров Г.И., Ухов Е.П. Расчёт восстановления давления при переходе от сверхзвукового потока к дозвуковому при различных системах плоских скачков уплотнения // Технические записки НИИ-1. 1947. № 1. С. 1-7.
81. Петров Г.И. Аэромеханика больших скоростей и космические исследования: Избр. труды. М.: Наука, 1992. 306 с.
82. Герман Р. Сверхзвуковые входные диффузоры. М.: Физматгиз, 1960. 290 с.
83. Омельченко А.В., Усков В.Н. Оптимальные ударно-волновые системы // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1995. № 6. С.118-126.
84. Булат П.В., Ильина Е.Е. О проблеме создания детонационного двигателя – термодинамический цикл // Фундаментальные исследования. 2013. № 10 (часть 10). С. 2143-2146.
85. Булат П.В., Денисенко П.В., Волков К.Н. Тенденции разработки детонационных двигателей для высокоскоростных воздушно-космических летательных аппаратов и проблема тройных конфигураций ударных волн. Часть I. Исследования детонационных двигателей // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2016. Т. 16. № 1. С. 1-21.
86. Иванов М.С., Кудрявцев А.Н., Троцюк А.В., Фомин В.М. Способ организации детонационного режима горения в камере сгорания сверхзвукового прямого воздушного

- реактивного двигателя. Заявка на выдачу патента на изобретение № 2004136236/06 от 10.12.2004, номер патента RU 2285143 С2 от 10.10.2006.
87. Li H., Ben-Dor G., Grönig H. Analytical Study of the Oblique Reflection of Detonation Waves // *AIAA Journal*. 1997. Vol. 35. No. 11. Pp. 1712-1720.
88. Медведев А.Е. Отражение косо́й ударной волны в реагирующем газе с конечной длиной зоны реакции // *Прикладная механика и техническая физика*. 2001. Т. 42. Вып. 2. С. 33-41.
89. Trotsyuk A.V., Kudryavtsev A.N., Ivanov M.S. Mach Reflection and Detonation Waves in Steady Supersonic Chemically Reacting Flows // *Proceedings of International Conference on Recent Advances in Space Technologies (IEEE Cat. No.03EX743)*. 2003. Pp. 495-503.
90. Троцюк А.В., Кудрявцев А.Н., Иванов М.С. Численное исследование стационарных детонационных волн // *Вычислительные технологии*. 2006. Т. 11. № 52. С. 37-44.
91. Денисов Ю.Н. Газодинамика детонационных структур. М.: Машиностроение, 1989. 176 с.  
Denisov Yu.N. Gas Dynamics of Detonation Structures. Moscow: Mashinostroenie, 1989. 176 p. (in Russian)
92. Чернышов М.В., Гвоздева Л.Г. Тройные конфигурации скачков уплотнения и бегущих ударных волн // *Известия вузов. Авиационная техника*. 2022. № 2. С. 87-110.
93. Рыжов О.С., Христианович С.А. О нелинейном отражении слабых ударных волн // *Прикладная математика и механика*. 1958. Т. 22. № 5. С. 589-599.
94. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
95. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
96. Henderson L.F. Exact Expressions for Shock Reflection Transition Criteria in a Perfect Gas // *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1982. Vol. 62. No. 6. Pp. 258-261.
97. Вюст В. К теории разветвленных скачков уплотнения // Сб. статей «Газовая динамика». М.: Иностран. лит-ра, 1950. С. 131-143.
98. Kawamura R., Saito H. Reflection of shock waves – 1. Pseudo-stationary case // *Journal of the Physical Society of Japan*. 1956. Vol. 11. No. 5. Pp. 584-592.
99. Балаганский И.А., Мержиевский Л.А. Действие средств поражения и боеприпасов. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. 408 с.
100. Silnikov M.V., Mikhaylin A.I. Protection of flying vehicles against blast loads // *Acta Astronautica*. 2014. Vol. 97. Issue 1. P. 30-37.
101. Mölder S. Particular conditions for the termination of regular reflection of shock waves // *Canadian Aeronautics and Space Institute Transactions*. 1979. Vol. 25. Pp. 44–49.
102. Ben-Dor G., Takayama K. Application of Steady Shock Polars to Unsteady Shock Wave Reflections // *AIAA Journal*. 1985. Vol. 24. No. 4. Pp. 682-684.

103. Silnikov M.V., Chernyshov M.V., Mikhaylin A.I. Blast wave parameters at diminished ambient pressure // *Acta Astronautica*. 2015. Vol. 109. Pp. 235-240.
104. Bulat P.V., Silnikov M.V., Chernyshev M.V. Spherical Shock Wave – 2D Surface Interaction // *Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology*. 2015. Vol. 9. No. 6. Pp. 428-433.
105. Гельфанд Б.Е., Сильников М.В. Баротермическое действие взрывов. СПб.: Астерион, 2006. 658 с.
106. Васильев Е.И. Четырехволновая схема слабого маховского взаимодействия ударных волн в условиях парадокса Неймана // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 1999. № 3. С. 144-152.
107. Nekiri H., Emanuel G. Shock wave triple point morphology // *Shock Waves*. 2011. Vol. 21. No. 6. Pp. 511-521.
108. Nekiri H., Emanuel G. Structure and morphology of a triple point // *Physics of Fluids*. 2015. Vol. 27. Issue 5. Article number 056102.
109. Henderson L.F. On the confluence of three shock waves in a perfect gas // *Aeronautical Quarterly*. 1964. Vol. 15. Pp. 181-197.
110. Gounko Yu.P. Patterns of steady axisymmetric supersonic compression flows with a Mach disk // *Shock Waves*. 2017. Vol. 27. Issue 3. Pp. 495-506.
111. Седов Л.И., Черный Г.Г. Об осреднении неравномерных потоков газа в каналах // *Теоретическая гидромеханика*. 1954. № 12. Вып. 4. С. 27-45.
112. Гриб А.А., Рябинин А.Г. К вопросу о приближенном интегрировании уравнений плоского установившегося сверхзвукового движения газа // *Докл. АН СССР*. 1955. Т. 100. № 3. С. 425-428.
113. Черный Г.Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: ФИЗМАТГИЗ, 1959. 220 с.
114. Хейз У.Д., Пробстин Р.Ф. Теория гиперзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 608 с.
115. Кацкова О.Н., Наумова И.Н., Шмыглевский Ю.Д., Шулиншина Н.П. Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик. М.: ВЦ АН СССР, 1961. 60 с.
116. Ворожцов Е.В., Яненко Н.Н. Методы локализации особенностей при численном решении задач газодинамики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985. 224 с.
117. Ben-Dor G. Reconsideration of the State-of-the-Art of the Shock Wave Reflection Phenomena in Steady Flows // *JSME International Journal. Series B*. 1995. Vol. 38. No. 3. Pp. 325-334.

118. Омельченко А.В., Усков В.Н. Максимальные углы поворота потока в ударно-волновых системах // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1998. № 3. С. 148-156.
119. Чернышов М.В. Теоретический анализ ударно-волновых систем на пластине со щитком в сверхзвуковом потоке // Вестник молодых ученых. Сер. Прикладная математика и механика. 2000. Вып. 3. № 2. С. 105-110.
120. Усков В.Н., Чернышов М.В. Экстремальные ударно-волновые системы в задачах внешней аэродинамики // Теплофизика и аэромеханика. 2014. Т. 21. № 1. С. 15-31.
121. Омельченко А.В., Усков В.Н. Экстремальная система «волна разрежения – скачок уплотнения» в стационарном потоке газа // Прикладная механика и техническая физика. 1997. Т. 38. № 2. С. 59-68.
122. Омельченко А.В., Усков В.Н. Оптимальные ударно-волновые системы при ограничениях на суммарный угол поворота потока // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1996. № 4. С. 142-150.
123. Azarova O.A., Gvozdeva L.G. Control of triple-shock configurations and vortex structures forming in high speed flows of gaseous media past an AD body under the action of external energy sources // Aerospace. 2017. Vol. 4. No. 1. 9 p.
124. Азарова О.А. Численные эксперименты по моделированию стационарных структур в задачах сверхзвукового обтекания с несимметричным подводом энергии // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50. № 10. С. 1840-1853.
125. Усков В.Н., Мостовых П.С. Тройные конфигурации бегущих ударных волн в потоках невязкого газа // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 3. С. 347-353.
126. Uskov V.N., Mostovykh P.S. The flow gradients in the vicinity of a shock wave for a thermodynamically imperfect gas // Shock Waves. 2016. Vol. 26. Issue 6. Pp. 693-708.
127. Усков В.Н., Чернышов М.В. Стационарные маховские конфигурации, их особенности и оптимальность // Вопросы оборонной техники. Сер. 16. Технические средства противодействия терроризму. 2008. Вып. 11-12. С. 22-25.
128. Li J., Ning J., Le J.H.S. Mach reflection of ZDN detonation wave // Shock Waves. 2015. Vol. 25. Issue 3. Pp. 293-304.
129. Jing T., Ren H., Li J. Onset of the Mach reflection of Zel'dovich – von Neumann – Döring detonations // Entropy. 2021. Vol. 23. Issue 3. Paper No. 314. Pp. 1-20.
130. Smirnov N.N., Betelin V.B., Nikitin V.F., Phylippov Yu.G., Koo J. Detonation engine fed by acetylene-oxygen mixture // Acta Astronautica. 2014. Vol. 104. Pp. 134-146.
131. Smirnov N.N., Penyazkov O.G., Sevrouk K.L., Nikitin V.F., Stamov L.I., Tyurenkova V.V. Detonation onset following shock wave focusing // Acta Astronautica. 2017. Vol. 135. Pp. 114-130.

132. Bulat P.V., Volkov K.N. Detonation jet engine. Part I – Thermodynamic cycle // International Journal of Environmental and Science Education. 2016. Vol. 11. Issue 12. Pp. 5009-5019.
133. Bulat P.V., Volkov K.N. Detonation jet engine. Part II – Construction features // International Journal of Environmental and Science Education. 2016. Vol. 11. Issue 12. Pp. 5020-5033.
134. Щепановский В.А. Газодинамическое конструирование. Новосибирск: Наука, 1991. 200 с.
135. Щепановский В.А., Готов Б.И. Газодинамическое конструирование сверхзвуковых воздухозаборников. Новосибирск: Наука, 1993. 228 с.
136. Аверенкова Г.И., Ашратов Э.А., Волконская Т.Г. и др. Сверхзвуковые струи идеального газа. Ч. 2. М.: Изд-во МГУ, 1971. 170 с.
137. Lighthill M.J. Higher Approximations. In book: General Theory of High Speed Aerodynamics. Princeton University Press, 1954. Pp. 345-489.
138. Троцюк А.В., Кудрявцев А.Н., Иванов М.С. Численное исследование стационарных детонационных волн // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11. № 52. С. 37-44.
139. Коркодинов Я.А. Обзор семейства k-ε моделей для моделирования турбулентности // Вестник ПНИПУ. Машиностроение, материаловедение. 2013. Т. 15. № 2. С. 5-16.
140. Русанов В.В. Производные газодинамических функций за искривленной ударной волной. М.: Ин-т прикл. матем. АН СССР им. М.В.Келдыша, 1973. 18 с.
142. Emanuel G. Shock Waves Dynamics: Derivatives and Related Topics. Boca Raton: CRC Press, 2012. 232 p.
142. Emanuel G. Analytical extension of curved shock theory // Shock Waves. 2018. Vol. 28. Issue 2. Pp. 417-425.

**Приложение А****Публикации по теме диссертации**

*Публикации в изданиях, индексируемых в международных базах научного цитирования SCOPUS и Web of Science*

143. Чернышов М.В., Савелова К.Э. Приближенно-аналитическая модель струйного течения с маховским отражением и импульсным энерговыделением на главном скачке // Известия вузов. Авиационная техника. 2023. № 1. С. 49-60.

144. Chernyshov M.V., Kapralova A.S., Savelova K.E. Ambiguity of solution for triple configurations of stationary shocks with negative reflection angle // Acta Astronautica. 2021. Vol. 179. Pp. 382-390. (SCOPUS Q1, WoS Q1)

145. Chernyshov M.V., Savelova K.E., Kapralova A.S. Approximate Analytical Models of Shock-Wave Structure at Steady Mach Reflection // Fluids. 2021. Vol. 6. Issue 9. Paper No. 305. 18 p. (SCOPUS Q2)

146. Chernyshov M.V., Kapralova A.S., Matveev S.A., Savelova K.E. Stationary Mach Configurations with Pulsed Energy Release on the Normal Shock // Fluids. 2021. Vol. 6. Issue 12. Paper No. 439. 16 p. (SCOPUS Q2)

147. Chernyshov M.V., Savelova K.E. An Approximate Analytical Model of a Jet Flow with Mach Reflection and Pulsed Energy Supply at the Main Shock // Fluids. 2023. Vol. 8. Issue 4. Paper No. 132. 16 p.

*Прочие публикации по теме диссертации*

148 Чернышов М.В., Савелова К.Э., Федосенко Н.Б. Экстремальное регулярное отражение косых скачков уплотнения и бегущих ударных волн // Вопросы оборонной техники. Сер. 16. Технические средства противодействия терроризму. 2019. Вып. 3-4. С. 96-104.

149 Лаптинская М.М., Савелова К.Э., Чернышов М.В. Методы управления ударно-волновыми структурами во входном сечении высокоскоростного воздухозаборника летательного аппарата // Инженерный журнал: наука и инновации. 2023. № 2 (134). 12 с.

150 Chernyshov M.V., Murzina (Savelova) K.E., Matveev S.A., Yakovlev V.V. Shock-wave structures of prospective combined ramjet engine // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2019. Vol. 618. Paper No. 012068. 10 pp.

151 Alekseeva M.M., Matveev S.A., Savelova K.E., Chernyshov M.V. Interaction of Steady Gasodynamic Discontinuities and Waves on Supersonic Gas Jet Flows from Rocket Engines //

XLIV Academic Space Conference dedicated to Sergey Korolev. Moscow, 2020. AIP Conference Proceedings, 2021. Vol. 2318. Pp. 060004-1 – 060004-8.

152. Savelova K.E., Alekseeva M.M., Matveev S.A., Chernyshov M.V. Shock-wave structure of prospective combined jet engine // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1959. Paper No. 012043. 9 p. (The International Scientific Conference on Mechanics “The Ninth Polyakhov’s Readings” (ISCM), 9-12 March 2021, Saint Petersburg, Russian Federation)

153. Мурзина (Савелова) К.Э., Савелов В.А., Чернышов М.В. Моделирование процессов в перспективном детонационном двигателе // Материалы общероссийской молодежной научно-технической конференции «Старт-2018». Библиотека журнала «ВОЕНМЕХ. Вестник БГТУ». 2018. № 51. Т. 1. С. 58.

154. Мурзина (Савелова) К.Э., Чернышов М.В. Перспективный реактивный двигатель комбинированного типа // Восьмые Уткинские чтения: труды общерос. науч.-техн. конф. / СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2019. С. 110-116.

155. Чернышов М.В., Матвеев С.А., Мурзина (Савелова) К.Э. Теоретическое обоснование реактивного двигателя комбинированного типа // Всероссийская молодежная научная конференция «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики». 26–28 ноября 2018 г. Материалы конференции. Томск: Изд-во «Красное знамя», 2019. С. 118-120.

156. Чернышов М.В., Савелова К.Э., Алексеева М.М. Концепция и теоретическое обоснование реактивного двигателя комбинированного типа // Актуальные проблемы защиты и безопасности: Труды XXII Всероссийской научно-практической конференции РАРАН. Т. 1. Вооружение и военная техника. СПб., 2019. С. 420-425.

157. Алексеева М.М., Савелова К.Э., Чернышов М.В. Интерференция стационарных газодинамических разрывов и волн в сверхзвуковых газовых струях ракетных двигателей // XLIV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых – пионеров освоения космического пространства: сборник тезисов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019. Т. 1. С. 317-319.

158. Савелова К.Э., Савелов В.А., Чернышов М.В. Моделирование горения топлива на ударной волне в воздухозаборнике двигателя комбинированного типа // Актуальные проблемы защиты и безопасности: Труды XXIII Всероссийской научно-практической конференции РАРАН. Т. 1. Вооружение и военная техника. СПб., 2020. С. 185-191.

159. Савелова К.Э., Чернышов М.В., Савелов В.А., Алексеева М.М., Капралова А.С. Анализ ударно-волновых структур в канале воздухозаборника перспективного воздушно-реактивного двигателя // 19-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». 23-27 ноября 2020 года, Москва. Тезисы. М.: Издательство «Перо», 2020. С. 187.

160. Савелова К.Э., Алексеева М.М., Чернышов М.В., Яценко А.А. Ударно-волновые структуры перспективного комбинированного реактивного двигателя // IX Поляховские чтения: Материалы международной научной конференции по механике. СПб.: Изд-во ВВМ, 2021. С. 233-234.
161. Матвеев С.А., Савелова К.Э., Чернышов М.В. Аналитические модели сверхзвуковых течений с маховским отражением и импульсным энерговыделением // XLV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых – пионеров освоения космического пространства: сборник тезисов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021. Т. 2. С. 50-52.
162. Гвоздева Л.Г., Матвеев С.А., Савелова К.Э., Чернышов М.В. Особые и экстремальные тройные конфигурации скачков уплотнения в сверхзвуковых газовых струях // Материалы XXII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2021), 4-13 сентября 2021 г., Алушта. М.: Изд-во МАИ, 2021. С. 333-334.
163. Савелова К.Э., Савелов В.А., Чернышов М.В. Ударно-волновые структуры внутренних сверхзвуковых течений с химическими реакциями // Материалы XXII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2021), 4-13 сентября 2021 г., Алушта. М.: Изд-во МАИ, 2021. С. 450-452.
164. Савелова К.Э., Чернышов М.В. Приближенно-аналитическая модель сверхзвукового течения с маховским отражением при наличии импульсного энергоподвода // 20-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». М.: МАИ, 22-26 ноября 2021 года. Тезисы докл. М.: Изд-во «Перо», 2021. С. 140-141.
165. Савелова К.Э., Чернышов М.В. Анализ ударно-волновых структур в канале воздухозаборника комбинированного воздушно-реактивного двигателя // Научные чтения памяти академика В.П. Глушко. Вторая Общероссийская научно-практическая конференция. СПб.: Изд-во «Инфо-Да», БГТУ «ВОЕНМЕХ», 2021. С. 126-135.
166. Чернышов М.В., Савелова К.Э. Неоднозначность решений для ударно-волновых структур // XXVI Всероссийский семинар с международным участием по струйным, отрывным и нестационарным течениям. СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2022. С. 196-197.
167. Чернышов М.В., Савелова К.Э. Новые аналитические модели сверхзвуковых течений с маховским отражением и энергоподводом на главном скачке // XXVI Всероссийский семинар с международным участием по струйным, отрывным и нестационарным течениям. СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2022. С. 197-198.

168. Савелова К.Э., Чернышов М.В. Ударно-волновые структуры в сверхзвуковой аэродинамике и газовой динамике // Материалы XXXIII научно-технической конференции по аэродинамике. Тезисы. Жуковский: ЦАГИ им. проф. Н.Е. Жуковского, 2022. С. 89-91.
169. Савелова К.Э., Чернышов М.В. Аналитическое исследование тройных конфигураций скачков уплотнения с возможностью импульсного энергоподвода // XLVII Академические чтения по космонавтике 2023. Сборник тезисов, посвященный памяти С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых – пионеров освоения космического пространства: сборник тезисов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2023. Т. 1. С. 349-350.

### **Личный вклад автора в публикации**

В совместных публикациях научному руководителю М.В. Чернышову принадлежат основная идея работы, постановка задачи и обсуждение результатов, часть теоретических моделей и алгоритмов быстрой оценки параметров ударно-волновой структуры, образующейся при маховском отражении скачка уплотнения без энергосыделения на главном скачке. В статье [148] Н.Б. Федосенко принадлежит интерпретация результатов, полученных при анализе регулярного отражения косога скачка уплотнения, на случай рефракции ударной волны на наклонной поверхности (клине) при условии соответствующего обращения движения. В работах [149, 151, 152, 156, 157, 159, 160] М.М. Лаптинской (Алексеевой) принадлежит анализ сеточной сходимости и подбор моделей турбулентности при численном моделировании в пакетах вычислительной газовой динамики. В работах [144, 145, 146, 159] А.С. Капраловой принадлежит часть работы по выводу аналитических соотношений, описывающих особые свойства, область существования и неоднозначность рассматриваемых ударно-волновых структур, методами символической математики. В публикациях [151, 152, 146, 155, 161] С.А. Матвееву принадлежит анализ реализуемости и прикладной применимости предлагаемого типа комбинированных воздушно-реактивных двигателей в инженерных разработках. В работе [150] В.В. Яковлеву принадлежит исторический обзор и анализ современной литературы по применению тройных конфигураций скачков уплотнения в газодинамических устройствах. В работе [162] Л.Г. Гвоздевой принадлежит открытие существования тройных конфигураций с отрицательным углом наклона отраженного скачка в установившихся сверхзвуковых газовых течениях. В публикациях [158, 159, 163] В.А. Савёлову принадлежит верификация моделей химической кинетики в численном эксперименте. В работе [160] А.А. Яценко принадлежит анализ современных тенденций создания детонационных двигателей.

Во всех работах автору диссертации принадлежат:

- идея управляемого комбинированного использования потоков за ударно-волновыми структурами, обладающих различными термогазодинамическими параметрами, в различных термодинамических циклах;

- вывод, аналитическое и численное решение уравнений, описывающих область существования изучаемых ударно-волновых структур, в том числе в условиях неоднозначности решения, и анализ их реализуемости в установившихся течениях;

- аналитическое и численное описание изменения критерия смены типа отражения, аналогичного критерию фон Неймана, при наличии импульсного энерговыделения и изменения химического состава газовой смеси на главном (маховском) скачке уплотнения;

- обобщение приближенно-аналитических решений, описывающих ударно-волновую структуру струйных и канальных течений с маховским отражением, на случай наличия импульсного энерговыделения на главном (маховском) скачке;

- численное подтверждение эффекта трансформации ударно-волновой структуры (в частности, увеличения размеров главного (маховского) скачка) при наличии импульсного энерговыделения, и определение области существования исследуемого вида отражения при стационарной детонации на главном скачке.