

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Нестерчук Григорий Анатольевич

**Колебания и устойчивость тонкостенной упругой
цилиндрической оболочки, сопряженной с пластинами
разных форм**

Научная специальность 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

Диссертация

на соискание учёной степени кандидата

физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физ.-мат. наук

Филиппов Сергей Борисович

Санкт-Петербург

2024 г.

2 Содержание

Введение	4
1 Собственные колебания тонкой цилиндрической оболочки, подкреплённой шпангоутами разной жёсткости	15
1.1 Собственные колебания подкреплённой цилиндрической оболочки	16
1.1.1 Постановка задачи	16
1.1.2 Момент инерции шпангоута	18
1.1.3 Оптимальное расположение шпангоутов	21
1.1.4 Нахождение собственных значений частот колебаний балки, подкреплённой пружинами	23
1.1.5 Нахождение собственных значений в задаче о колебаниях подкреплённой оболочки	25
1.2 Оптимизация параметров подкреплённой цилиндрической оболочки с целью максимального увеличения первой частоты	29
1.3 Аналитическое определение фундаментальной частоты колебаний подкреплённой оболочки	33
1.4 Собственные колебания кольцевой пластины	36
1.5 Аналитическое и численное определение фундаментальной частоты колебаний конструкции	41
2 Собственные колебания цилиндрической оболочки, сопряжённой с пластиной на краю	49
2.1 Численные результаты	49
2.2 Постановка задачи	51
2.3 Частоты колебаний первого типа (крышечные)	54
2.4 Частоты колебаний первого типа для круглой пластины	62
2.5 Частоты колебаний второго типа (оболочечные)	68

2.6	Частоты колебаний третьего типа (балочные)	71
2.7	Однопараметрическая оптимизация спектра собственных частот	73
2.8	Двупараметрическая оптимизация спектра собственных частот . .	75
3	Устойчивость тонкой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами разной жесткости	81
3.1	Потеря устойчивости подкрепленной цилиндрической оболочки .	81
3.1.1	Постановка задачи	81
3.1.2	Колебания подкрепленной балки	84
3.1.3	Нахождение собственных значений в задаче о потере устойчивости подкрепленной оболочки	88
3.2	Максимальное увеличение критического давления цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами разной жесткости	91
3.3	Нахождение критического давления конструкции аналитическими и численными методами	95
3.4	Минимизация массы цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами разной жесткости	98
3.5	Аналитическое и численное определение минимальной массы конструкции с заданным критическим давлением	102
	Заключение	104
	Список использованных источников	105

Введение

Тонкостенные оболочки и конструкции, состоящие из них, широко применяются в современной промышленности и технике. Основной толчок в развитии теории оболочек пришелся на середину прошлого века, когда перед наукой был поставлен ряд прикладных задач. Свое применение тонкие оболочки нашли в нефтяной и газовой отрасли, где конструкции из тонких оболочек используются для хранения и транспортировки жидкостей и газов; в аэрокосмической промышленности — для создания корпусов ракет и космических модулей; в строительстве — для создания водонапорных башен и труб; в автомобилестроении — при проектировании корпусов, топливных баков, газовых цилиндров и других компонентов. Обычно конструкции, состоящие из тонкостенных оболочек, используются в условиях высоких динамических нагрузок, которые вызывают колебания оболочек и приводят к их деформации.

Общая теория пластин и оболочек была развита в исследованиях С.П. Тимошенко [1, 2, 3, 4], В.З. Власова [5, 6, 7], А.И. Лурье [8], В.Т. Койтера [9, 10], А.Л. Гольденвейзера [11, 12, 13], А.П. Филина [14], Э. Рейснера [15], Л.Г. Доннелла [16], В.В. Новожилова [17, 18], Х.М. Муштари [19], Д. Арбоша [20, 21] и др. Они внесли значительный вклад в разработку основных принципов моделирования, используемых в современной теории оболочек.

Колебаниям тонкостенных конструкций посвящены книги В.В. Болотина [22, 23, 24], А.Л. Гольденвейзера [11], В.Б. Лидского [11], П.Е. Товстик [11, 25, 26, 27], В. Зёделя [28], И.А. Биргера [29]. В них рассматриваются основные теоретические и практические положения динамики оболочек и пластин, включающие различные методы анализа, численного моделирования и экспериментальных исследований.

Особую важность имеют исследования, посвященные структуре спектра частот свободных колебаний конструкций — информация критически необходимая при проектировании конструкций, содержащих тонкостенные элементы, для исключения опасных резонансов. Этому вопросу посвящены многочисленные исследования, приведенные в справочнике [24]. В [11] А.Л. Гольденвейзером, В.Б. Лидским и П.Е. Товстиком исследованы свойства спектра собственных частот колебаний тонких оболочек вращения.

Уравнения, описывающие колебания рассматриваемых в диссертации конструкций сложны для получения точных аналитических решений. Наличие малого параметра тонкостенности позволяет использовать асимптотические методы для вывода асимптотических формул для собственных частот колебаний. В данной работе особое внимание уделяется влиянию различных способов подкрепления цилиндрической оболочки на собственные частоты колебаний конструкции. Для исследования собственных колебаний цилиндрической оболочки в диссертации используются асимптотический метод, развитый в работах С.Б. Филиппова [30, 31], метод Релея-Ритца и метод конечных элементов. Сравнительный анализ показал хорошее совпадение результатов, что свидетельствует о надежности и эффективности использованного подхода, особенно в контексте анализа различных конфигураций подкрепления цилиндрических оболочек.

Конструкции, состоящие из тонкостенных элементов при определенных нагрузках могут терять устойчивость, переходя из начального напряженно-деформированного состояния в смежное равновесное состояние. Отсюда возникает необходимость решения задач о потере устойчивости таких конструкций. Вопросам устойчивости тонких оболочек посвящены работы П.Е. Товстика [25], Э.И. Григолюка [32], А.С. Вольмира [33], В.З. Власова [5], Л.Г. Доннелла [16], Р.Саусвелла [34], П.Ф. Папковича [35], В.Койтера [9, 10], Э.Рейснера [15], Н.А. Ал-

футова [36], В.В. Болотина [22], А.Н. Динника [37], А.Р. Ржаницина [38], Р. Лоренца [39], П.М. Огибалова [40], И.И. Воровича [41], В.И. Феодосьева [42], В. Флюгге [43], А.В. Погорелова [44] .

Чаще всего на практике применяются круговые цилиндрические оболочки, прочность которых увеличивается за счет подкрепления ребрами жесткости. В зависимости от сферы применения, это могут быть продольные ребра жесткости — стрингеры, или поперечные круговые ребра — шпангоуты. Подкрепленные оболочки выдерживают большее критическое давление по сравнению с аналогичными гладкими оболочками той же массы.

Наряду с подкрепленными оболочками в практике часто используются конструкции, включающие в себя несколько сопряженных оболочек или оболочек, сопряженных с пластинами. В работах [45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 63] рассматриваются задачи о колебаниях цилиндрической оболочки, сопряженной со сферической и конической оболочками. Задачи о потере устойчивости таких конструкции исследованы П.Е. Товстиком [25] и С.Б. Филипповым [30, 31, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62].

Кроме аналитических и асимптотических методов исследования тонкостенных конструкций активно применяются численные методы. С развитием вычислительной техники стали возможны исследования сложных составных конструкций. В работах [64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76] представлены исследования подкрепленных цилиндрических оболочек методом конечных элементов.

Данная диссертация посвящена улучшению эффективности конструкций путем оптимизации их геометрических параметров. Целью является исследование возможности снижения массы конструкций без уменьшения критического давления и фундаментальной частоты. Предложены методы эффективного вычисле-

ния оптимальных параметров подкрепленной цилиндрической оболочки. Проведен анализ точности предложенных моделей и методов исследования.

В диссертации рассматриваются некоторые частные задачи свободных колебаний и устойчивости подкрепленных оболочек, которые имеют практическое применение. Для анализа таких задач используется классическая (линейная) система уравнений теории оболочек, основанная на гипотезах Кирхгофа–Лява. Гипотезы Кирхгофа–Лява предполагают, что прямые, перпендикулярные к срединной поверхности оболочки остаются недеформированными и ортогональными к деформированной поверхности, а толщина пластины при деформации не изменяется. Эти гипотезы позволяют упростить математическую модель оболочки, что удобно для вывода аналитических приближенных формул. Использование классической системы уравнений теории оболочек с гипотезами Кирхгофа–Лява обеспечивает достаточную точность при решении задач, поставленных в данной работе и позволяет получить приближенные формулы, которые могут быть использованы в практических расчетах при проектировании тонкостенных конструкций.

Структура работы

Во введении обосновывается актуальность исследований, посвященных колебаниям и потере устойчивости тонкостенных упругих цилиндрических оболочек. Представлен анализ существующей литературы, связанной с тематикой, рассматриваемой в диссертации.

В первой главе диссертации рассматривается задача о собственных колебаниях круговой подкрепленной цилиндрической оболочки. Исследование данной задачи имеет важное практическое значение для промышленности, поскольку фундаментальная частота собственных колебаний конструкций является ключевым показателем их надежности и безопасности. Для увеличения фундамен-

ной частоты колебаний на оболочку устанавливаются поперечные ребра жесткости — шпангоуты. В большинстве работ рассматриваются случаи подкрепления оболочки одинаковыми шпангоутами. В диссертации исследуются колебания и устойчивость оболочки, подкрепленной ребрами разной высоты. Для моделирования конструкции используется классическая система уравнений теории оболочек, основанная на гипотезах Кирхгофа–Лява. Система уравнений для случая подкрепления оболочки ребрами жесткости, чьи высоты изменяются вдоль образующей оболочки, исследуется асимптотическим методом. Проведено сравнение фундаментальных частот колебаний указанных конструкций, найденных методом Рэлея–Ритца и методом конечных элементов. Исследуется влияние закона распределения жесткостей шпангоутов на фундаментальные частоты и формы колебаний конструкции. В рамках исследования выделены два типа колебаний конструкции и получены формулы для вычисления приближенных значений фундаментальных частот конструкции для различных условий опирания краев оболочки. Решается однопараметрическая оптимизационная задача, в качестве параметра выбрана относительная высота шпангоутов. Для конструкции фиксированной массы находится значения параметра, при котором конструкция имеет наибольшую фундаментальную частоту. При увеличении высоты шпангоутов они превращаются в кольцевые пластины, что приводит к необходимости решать задачу о собственных колебаниях пластины. В этом случае оптимизация достигается для такого набора параметров, при котором фундаментальная частота подкрепленного цилиндра совпадает с фундаментальной частотой колебаний пластины с наибольшим радиусом.

Во второй главе диссертации рассматриваются цилиндрические оболочки, сопряженные со сферическими торцевыми сегментами. Исследуется спектр частот собственных колебаний конструкции, состоящей из цилиндрической обо-

лочки, у которой один край жестко закреплен, а второй край сопряжен с краем сферического сегмента. В случае неограниченно увеличивающейся кривизны сферический сегмент вырождается в круглую пластину. При численном исследовании задачи о колебаниях в конечноэлементном пакете *Comsol* было обнаружено, что колебания можно разделить на три группы. Частоты и формы колебаний первой группы ("оболочечной") близки к частотам и формам колебаний цилиндрической оболочки один край которой жестко закреплен, а второй — шарнирно оперт. У второй группы ("крышечной в вырожденном случае — "пластиночной") частоты и формы близки к частотам и формам собственных колебаний сферического сегмента с жестко закрепленным краем. В третьей группе ("балочной") частоты и формы колебаний мало отличаются от частот и форм балки, один конец которой защемлен, а на втором сосредоточена масса. Асимптотическое и численное решения показывают, что для цилиндрической оболочки торцевая крышка на краю играет роль упругой заделки.

Третья глава диссертации посвящена исследованию потери устойчивости конструкции, состоящей из цилиндрической оболочки, сопряженной с круговыми шпангоутами разной жесткости, под действием нормального внешнего давления. Получено приближенное аналитическое решение задачи о потере устойчивости конструкции. Проведено сравнение решений для нескольких наборов параметров функции распределения высот шпангоутов вдоль образующей оболочки. Решены две оптимизационные задачи. В первой задаче найдены параметры конструкции фиксированной массы, имеющей наибольшее критическое давление. Во второй задаче для заданного критического давления найдены геометрические параметры конструкции с наименьшей массой.

В конце каждой главы приведены результаты исследований и сделаны краткие выводы.

В заключении диссертации описаны общие выводы и положения.

Общая характеристика работы

Актуальность темы обусловлена потребностью разработки методов для исследования и оптимизации конструкций, состоящих из цилиндрических оболочек, подкрепленных кольцевыми пластинами и цилиндрических оболочек, сопряженных со сферическими торцевыми крышками. В условиях активной урбанизации критическое значение приобретает оптимизация конструкций трубопроводов и цистерн еще на этапе проектирования, что обеспечивает их стойкость и долговечность при любых динамических нагрузках и условиях эксплуатации. Эффективное моделирование и анализ таких сложных систем способствует созданию безопасных и эффективных инженерных решений.

Цель работы:

- Разработка эффективного метода аналитического расчета фундаментальной частоты собственных колебаний цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами разной жесткости.
- Оценка влияния кривизны и толщины торцевой крышки на фундаментальную частоту собственных колебаний конструкции, состоящей из цилиндрической оболочки, сопряженной с торцевой крышкой на краю.
- Разработка метода определения фундаментальных частот составных конструкций для разных форм колебаний конструкции.
- Моделирование разных условий сопряжения оболочки с пластинами.
- Решение задачи о потере устойчивости цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами разной жесткости.

Достоверность результатов определяется использованием уравнений технической теории оболочек и уравнениями полубезмоментной теории; использованием апробированных численных и аналитических методов решения систем дифференциальных уравнений; сравнением результатов, полученных с помощью аналитического, асимптотического и численного анализа; систематическими оценками погрешности и порядков точности аппроксимационных формул и результатов, полученных с использованием метода конечных элементов; согласием результатов моделирования с результатами других авторов.

Научная ценность диссертации состоит в следующем:

— Разработан алгоритм для исследования колебаний и потери устойчивости цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами разной жесткости, причём функция распределения жесткостей шпангоутов вдоль образующей оболочки может быть произвольной.

— Предложен и проверен способ оценки фундаментальных частот описанных конструкций через разбиение спектра колебаний на типы. Исследовано изменение формы колебаний при совпадении частот разных типов.

— Предложены разные варианты постановки задач об оптимизации конструкций: минимизация массы конструкции при фиксированном критическом давлении, максимизация фундаментальной частоты конструкции при фиксированной массе. Приведены примеры их решения.

Практическая ценность диссертации состоит в следующем

— Использование приближенных формул для оценки фундаментальной частоты цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми пластинами, приводит к значительному ускорению процесса проектирования.

— Даны рекомендации по проектированию подкрепленных цилиндрических оболочек средней длины, позволяющие уменьшить их массу без потери прочности.

— Разработан метод вычисления геометрических параметров подкрепленной цилиндрической оболочки с заданным критическим давлением.

Публикации. Основные результаты, представленные в диссертации, опубликованы в следующих журналах:

— «Вестник Санкт-Петербургского Университета. Математика. Механика. Астрономия» [77, 78, 79];

— «Vestnik of St.Petersburg University. Mathematics» [80, 81, 82];

— В книге из серии «Advanced Structured Materials» [83, 84];

— В книге из серии «AIP Conference Proceedings» [85];

— Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» [86, 87].

Из них 3 в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК, 6 — в рецензируемых изданиях, индексируемых в международной базе цитирования *Scopus*, 2 — в сборниках, индексируемых в РИНЦ.

Апробация результатов. Результаты исследования докладывались на следующих международных и Всероссийских конференциях:

— «Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике» [88];

— «Актуальные проблемы механики (АРМ)» [89];

— «29th Nordic Seminar on Computational Mechanics» [90];

— VIII и IX Поляховские чтения [91, 92];

— Секция теоретической механики в Доме ученых им. М. Горького (Санкт-Петербург) [93].

Личный вклад автора в подготовку публикаций. В совместных публикациях научному руководителю С.Б. Филиппову принадлежат постановка задачи и обсуждение результатов. В работах [78, 79, 81, 82, 84] А.Л. Смирнову принадлежат результаты асимптотического анализа задачи о колебаниях цилиндрической оболочки с крышкой.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Объем диссертационной работы составляет 116 страниц, включая 25 рисунков и 20 таблиц. Список литературы содержит 93 наименования.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 19-01-00208), РФФИ (проект 3-21-00111).

Основные научные результаты:

— Впервые метод Рэлея-Ритца применен для нахождения фундаментальной частоты цилиндрической оболочки, сопряженной со шпангоутами разной жесткости. Рассмотрены разные случаи распределения жесткостей шпангоутов вдоль образующей оболочки [85, 86, 87].

— Исследована возможность применения модели кольцевой пластины для исследования колебания поперечных шпангоутов [85, 86, 87].

— При решении задач колебания и устойчивости проведено исследование влияния цилиндрической оболочки на сопряженные с ней пластины [77, 78, 79, 80, 81, 82].

— Решены задачи о колебаниях и потере устойчивости для цилиндрических оболочек, подкрепленных шпангоутами разной жесткости, с разными краевыми условиями [77, 80].

— Исследовано влияние кривизны и толщины торцевой пластины на фундаментальную частоту конструкции [78, 79, 81, 82, 84].

Положения, выносимые на защиту:

— Получены уравнения, описывающие собственные колебания тонких цилиндрических оболочек, подкрепленных шпангоутами разной жесткости. Получены приближенные формулы для фундаментальных частот колебаний конструкции. В качестве примера рассмотрена оптимизационная задача о максимизации фундаментальной частоты колебаний конструкции заданной массы.

— Получены приближенные формулы для низших частот собственных колебаний цилиндрической оболочки, сопряженной со сферическим сегментом или круглой пластиной. Исследовано влияние кривизны и толщины сферического сегмента на фундаментальную частоту конструкции.

— Получены асимптотические формулы для критического внешнего нормального давления цилиндрической оболочки, сопряженной с кольцевыми пластинами. В качестве примера решена: задача о максимизации критического давления при заданной массе конструкции; задача о минимизации массы конструкции при фиксированном значении критического давления.

1 Собственные колебания тонкой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами разной жесткости

В главе исследуются низшие частоты и формы колебаний конструкции, состоящей из тонкостенной упругой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами разной жесткости. Пример такой оболочки изображен на рисунке 1.1.

Выделены два типа колебаний конструкции. Формы собственных колебаний первого типа имеют большое число волн в окружном направлении и сходны с формами собственных колебаний неподкрепленной цилиндрической оболочки. Формы и частоты колебаний второго типа близки к формам и частотам колебаний кольцевой пластины. С помощью численных и асимптотических методов исследуется влияние изменения закона распределения жесткостей шпангоутов вдоль образующей на низшую частоту оболочки. Получены формулы для вычисления приближенных значений фундаментальных частот конструкций для случаев шарнирного опирания и жесткой заделки краев оболочки.

Решается оптимизационная задача о нахождении значений коэффициентов функции распределения высот шпангоутов для конструкции фиксированной массы, при котором значение фундаментальной частоты достигает наибольшего значения.

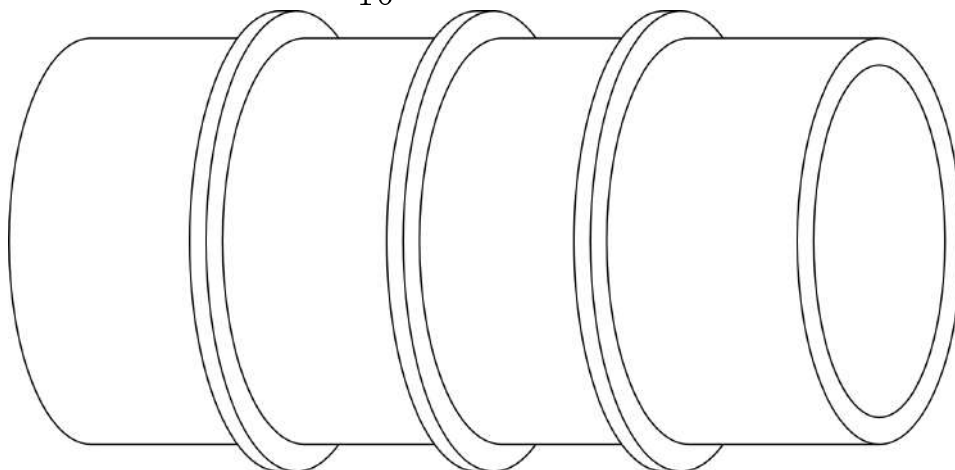


Рисунок 1.1 — Цилиндрическая оболочка, подкреплённая шпангоутами.

1.1 Собственные колебания подкреплённой цилиндрической оболочки

1.1.1 Постановка задачи

Рассматривается задача о колебаниях тонкостенной упругой цилиндрической оболочки, на которую, для увеличения первой собственной частоты, установлены n_s поперечных ребер жесткости с нулевым эксцентриситетом. После разделения переменных безразмерная система уравнений, описывающих малые свободные колебания цилиндрической оболочки, принимает вид [11, 14]:

$$\mu^4 \cdot \Delta^2 w - \sigma \Delta_k \Phi - \lambda w = 0, \quad \Delta^2 \Phi + \Delta_k w = 0, \quad (1.1)$$

где

$$\Delta w = \frac{d^2 w}{ds^2} - m^2 w, \quad \Delta_k w = \frac{d^2 w}{ds^2}, \quad \sigma = 1 - \nu^2.$$

Здесь s — координата, направленная по образующей, Φ — функция усилий, w — проекция перемещения на направление нормали, m — число волн по параллели, ν — коэффициент Пуассона, $\mu^4 = h^2/12$ — малый параметр, h — толщина оболочки, $\lambda = \sigma \rho \omega^2 R^2 E^{-1}$, ρ — плотность материала, E — модуль Юнга, ω —

частота собственных колебаний. За единицу длины выбран радиус R основания цилиндра.

Ограничимся определением низших частот колебаний. Предположим, что граничные условия не допускают изгибания срединной поверхности оболочки. Представим решение системы уравнений (1.1) в виде суммы основного полубезмоментного состояния и простого краевого эффекта вблизи краев оболочки. Тогда низшим частотам соответствуют $\lambda \sim \mu^2$, $m \sim \mu^{-1/2}$ [11]. Исключая из системы функцию усилий Φ и считая, что $\Delta \sim m^2$, в первом приближении получим уравнение

$$w_0^{IV} - \alpha^4 w_0 = 0, \quad \alpha^4 = \frac{m^4 \lambda_0 - \mu^4 m^8}{\sigma}, \quad (1.2)$$

где w_0 — описывает полубезмоментное состояние, λ_0 — приближенное значение λ , $w' = dw/ds$ (см. [11, 14]). В дальнейшем рассматривается только приближенное решение, и вместо w_0 и λ_0 используются обозначения w и λ соответственно.

В случае шарнирного опирания краев оболочки граничные условия для уравнения (1.2) имеют вид:

$$w(0) = w''(0) = w(l) = w''(l) = 0, \quad (1.3)$$

а в случае их жесткой заделки:

$$w(0) = w'(0) = w(l) = w'(l) = 0, \quad (1.4)$$

где l — безразмерная длина оболочки.

Если оболочка подкреплена по параллелям с координатами $s = s_i, i = 1, 2, \dots, n - 1$ круговыми стержнями (шпангоутами), то $w = w^{(i)}$ при $s \in [s_{i-1}, s_i], i = 1, 2, \dots, n$, причем $s_0 = 0, s_n = l$:

$$w^{(i)IV} - \alpha^4 w^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.5)$$

Предположим, что характерный размер поперечного сечения шпангоута $a_i \ll \mu$. Тогда на параллелях, подкрепленных шпангоутами, которые могут иметь разные высоты и жесткости, выполняются условия сопряжения [30]:

$$\begin{aligned} w^{(i)} &= w^{(i+1)}, & w^{(i)'} &= w^{(i+1)'}, \\ w^{(i)''} &= w^{(i+1)''}, & w^{(i)'''} - w^{(i+1)'''} &= -c_i w^{(i+1)}, \\ s &= s_i, & i &= 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$c_i = \frac{m^8 \mu^4 l \eta_i}{\sigma n}, \quad \eta_i = \frac{12 \sigma n E_c J_i}{h^3 E l}.$$

Здесь E_c — модуль Юнга материала шпангоутов, η_i — безразмерная жесткость i -го шпангоута, пропорциональная отношению изгибных жесткостей шпангоута и оболочки, введенная в [36], J_i — момент инерции поперечного сечения i -го шпангоута относительно образующей цилиндра.

Приближенное значение параметра частоты подкрепленной оболочки определяется по формуле:

$$\lambda = \frac{\sigma \alpha^4(\mathbf{c})}{m^4} + \mu^4 m^4, \quad \mathbf{c} = \{c_i\}_{i=1}^n,$$

где $\alpha(\mathbf{c})$ - собственное значение краевой задачи (1.5), (1.6) с граничными условиями (1.3) или (1.4).

1.1.2 Момент инерции шпангоута

На рисунке 1.2 изображена оболочка со шпангоутами в разрезе вдоль образующей оболочки. Будем считать, что оболочка и шпангоуты выполнены из одного материала. Предположим, что все шпангоуты имеют одинаковую ширину равную a , а высота первого шпангоута $b = ka$. Введем $f(i)$ — функцию, описывающую распределения высот шпангоутов вдоль образующей цилиндра: $b_i = bf(i) = kaf(i)$.

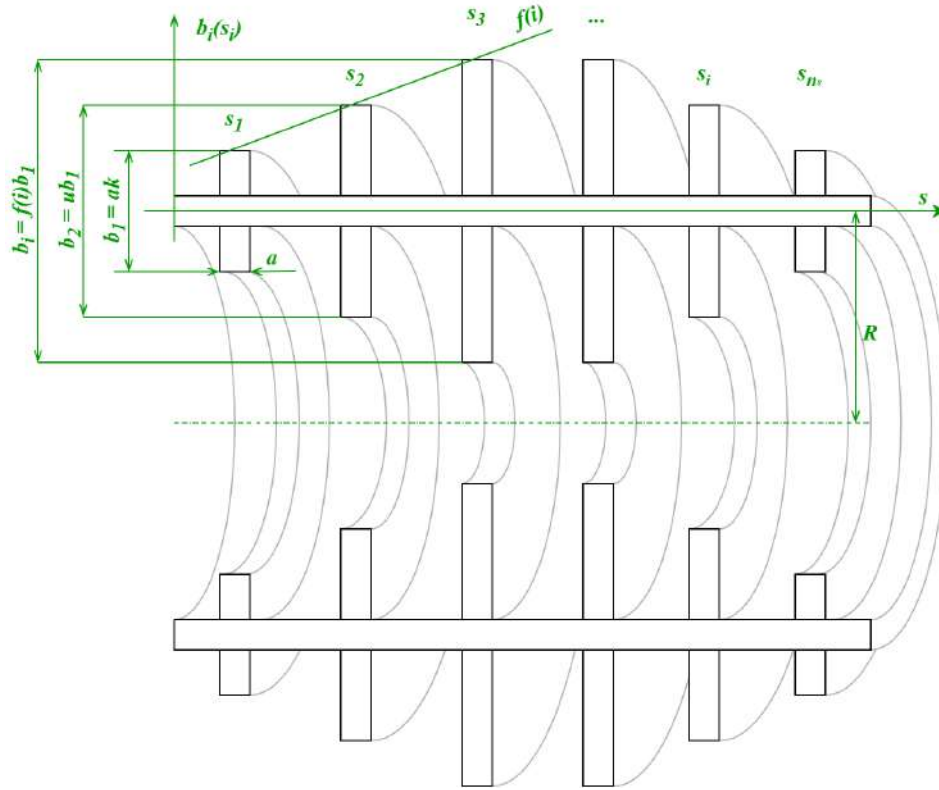


Рисунок 1.2 — Осевое сечение оболочки, подкрепленной шпангоутами.

Эксцентриситетом шпангоута называется расстояние между центром тяжести поперечного сечения шпангоута и срединной поверхностью оболочки. Для случая шпангоута с нулевым эксцентриситетом момент инерции i -го шпангоута рассчитывается по формуле:

$$J_i = \frac{ab_i^3}{12} = \frac{a^4k^3}{12}f^3(i) = Jf^3(i), \quad J = \frac{a^4k^3}{12}.$$

Тогда безразмерную жесткость шпангоута можно записать в виде:

$$c_i = \frac{m^8\mu^4l\eta_i}{\sigma n} = \frac{m^8\mu^4l\eta}{\sigma n} \cdot f^3(i) = c \cdot f^3(i), \quad (1.7)$$

$$\eta_i = \frac{12\sigma n E_c J_i}{h^3 E l} = \frac{12\sigma n J}{h^3 l} \cdot f^3(i) = \eta \cdot f^3(i),$$

где

$$c = \frac{m^8\mu^4l\eta}{\sigma n}, \quad \eta = \frac{12\sigma n J}{h^3 l}. \quad (1.8)$$

На практике чаще применяются шпангоуты с ненулевым эксцентриситетом, когда весь шпангоут находится либо внутри оболочки, либо снаружи оболоч-

ки. В случае, когда эксцентриситет шпангоута равен $b_i/2$, для получения оценки первой частоты оболочки сверху можно взять момент инерции $J = ab^3/3$.

Функция профиля конструкции $f(i)$ может иметь произвольный вид, однако целесообразно подкреплять оболочку шпангоутами, высоты которых симметричны относительно середины. В частности, для линейного распределения высот шпангоутов, изображенного на рисунке 1.3 (а), функция $f(i)$ имеет вид

$$f_{lin}(i) = (\kappa(i) - 1)(u - 1) + 1, \quad u = \frac{b_2}{b_1}. \quad (1.9)$$

Для случая распределения высот шпангоутов по параболе, изображенного на рисунке 1.3 (б),

$$f_{parab}(i) = a_p \kappa^2(i) - n a_p \kappa(i) + n a_p - a_p + 1, \quad \text{где} \quad a_p = \frac{1 - u}{n - 3}. \quad (1.10)$$

Для случая экспоненциального распределения высот шпангоутов, изображенного на рисунке 1.3 (в), в

$$f_{exp}(i) = \frac{u - 1}{e^2 - e} e^{\kappa(i)} + \frac{e - u}{e - 1}. \quad (1.11)$$

Соответственно, для случая подкрепления оболочки одинаковыми шпангоутами

$$f_0(i) = 1. \quad (1.12)$$

В формулах (1.9, 1.10, 1.11) функция

$$\kappa(i) = \frac{n}{2} - \left| \frac{n}{2} - i \right| = \begin{cases} i, & i < \frac{n}{2} \\ n - i, & i \geq \frac{n}{2} \end{cases}$$

гарантирует симметричность функций профиля конструкции, а параметр $u = b_2/b_1$ характеризует амплитуду функции распределения.

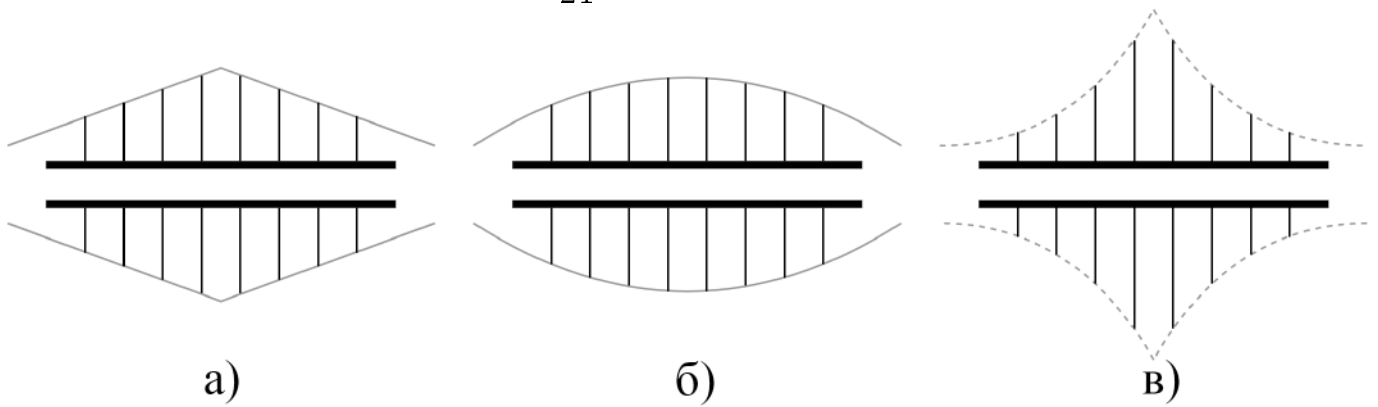


Рисунок 1.3 — Профили конструкции для случая
 а). линейной б). параболической в). экспоненциальной
 функций распределения высот шпангоутов.

1.1.3 Оптимальное расположение шпангоутов

Краевые задачи (1.3, 1.5, 1.6) и (1.4, 1.5, 1.6) эквивалентны задачам об определении низших частот поперечных колебаний соответственно шарнирно опертой и жестко закрепленной балок (рисунок 1.4), подкреплённых пружинами жесткости c_i в точках $s = s_i$. Случай шарнирного опирания концов балки при условии равномерного расположения ($s_i = l/n \cdot i$) одинаковых ($c_i = c$) пружин исследован в монографии [30].

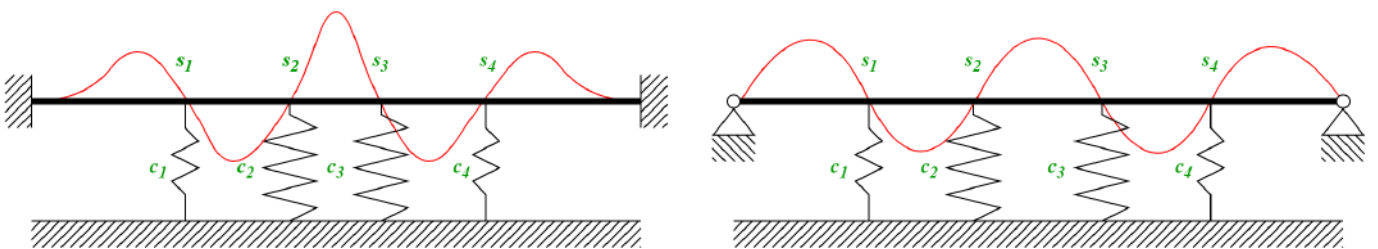


Рисунок 1.4 — Формы колебаний балки, подкреплённой пружинами с
 а). зацементированными, б). шарнирно опертыми
 концами.

В работе [63] проанализированы случаи неравномерного расположения пружин. Путём перебора вариантов определены оптимальные расположения пружин.

жин, которым соответствует максимум величины первого собственного значения $\alpha_1(c)$ краевых задач (1.3, 1.5, 1.6) и (1.4, 1.5, 1.6). Установлено, что при $c \rightarrow \infty$ координаты точек оптимального расположения пружин $s_i(c)$ стремятся к некоторым предельным значениям s_i^* . Оптимальное расположение пружин в точках s_i^* , соответствующее $c = \infty$, названо предельным оптимальным расположением.

В статье [63] для $n = 3, 5, 7$ показано, что при шарнирном опирании концов балки предельным оптимальным расположением пружин является их равномерное расположение, т.е. $s_i^* = l/n \cdot i$. Точки $s_i^* = l/n \cdot i$ являются узлами формы колебаний неподкрепленной балки

$$w_n(s) = \sin(\alpha_n s), \quad \alpha_n = \frac{n}{l} \cdot \pi. \quad (1.13)$$

В работе [56] показано, что и в случае жесткой заделки узлы формы колебаний неподкрепленной балки совпадают с точками предельного оптимального расположения пружин. Решение уравнения (1.2) с граничными условиями (1.4) имеет вид

$$w_n(s) = [U(\alpha_n s) - \varkappa_n V(\alpha_n s)] \quad (1.14)$$

где

$$S(x) = \operatorname{ch} x + \cos x, \quad T(x) = \operatorname{sh} x + \sin x,$$

$$U(x) = \operatorname{ch} x - \cos x, \quad V(x) = \operatorname{sh} x - \sin x,$$

$$S(x) = T'(x) = U''(x) = V'''(x) = S''''(x)$$

— система функций Крылова,

$$\alpha_n = \frac{z_n}{l}, \quad \varkappa_n = \frac{\operatorname{ch} z_n - \cos z_n}{\operatorname{sh} z_n - \sin z_n},$$

а величины

$$z_n \simeq \pi(2n + 1)/2, \quad n = 1, 2, \dots$$

являются корнями уравнения $\operatorname{ch} z \cdot \cos z = 1$. При этом точки оптимального расположения пружин совпадают с корнями уравнения $w_n(s) = 0$.

В дальнейшем для упрощения записи вместо $\alpha_0 = \frac{\pi}{2l}$ используется α , вместо $\varkappa_1 = U(\frac{3\pi}{2})/V(\frac{3\pi}{2})$ используется \varkappa , а первая форма колебаний неподкрепленной балки $w_1(s)$ обозначается $w(s)$.

Если $c \gg 1$, то оптимальное расположение шпангоутов мало отличается от предельного оптимального расположения.

1.1.4 Нахождение собственных значений частот колебаний балки, подкрепленной пружинами

Рассмотрим краевую задачу (1.5, 1.6) о колебаниях балки, подкрепленной пружинами. Приближенное решение этой задачи в случае шарнирного опирания концов балки и равномерного расположения одинаковых пружин получено в [30] методом осреднения упругих характеристик. Формула для оценки первого собственного значения α_1 имеет вид:

$$\alpha_1^4 = \frac{\pi^4}{l^4} + c \frac{n}{l}. \quad (1.15)$$

Метод осреднения применим только для случая равномерного расположения одинаковых пружин. Рассмотрим краевую задачу о колебаниях балки, подкрепленной пружинами разной жесткости. Вместо метода осреднения будем использовать метод Релея. Формулу Релея для подкрепленной пружинами балки можно записать в следующем безразмерном виде:

$$\alpha_1^4 = \frac{I_1 + I_2}{I_0}, \quad (1.16)$$

Здесь I_0 — кинетическая энергия балки (работа сжимающей оболочку силы), I_1 — энергия деформации балки (потенциальная энергия изгиба оболочки),

I_1 — энергия деформации пружин (деформация подкрепляющих оболочку шпангоутов).

$$I_1 = \int_0^l (w''(s))^2 ds, \quad I_2 = \sum_{i=1}^{n-1} c_i w^2(s_i), \quad I_0 = \int_0^l w^2(s) ds.$$

Для I_1 можно провести следующие преобразования:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^l (w''(s))^2 ds = (w''(s)w'(s)) \Big|_0^l - \int_0^l w'(s)w'''(s) ds = \\ &= (w''(s)w'(s) - w'''(s)w(s)) \Big|_0^l + \int_0^l w(s)w''''(s) ds. \end{aligned}$$

И для случая шарнирного опирания (1.3), и для случая жесткого защемления (1.4) концов балки внеинтегральный член обращается в ноль, следовательно

$$I_1 = \alpha^4 \int_0^l w^2(s) ds = \alpha^4 I_0.$$

В случае шарнирного опирания (1.3) краев балки подставим в (1.16) $w = w_1$, где функция w_1 определяется по формуле (1.13). Получим

$$I_0 = \int_0^l \left(\sin \left(\frac{\pi s}{l} \right) \right)^2 ds = \frac{1}{2} \int_0^l \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi s}{l} \right) \right) ds = \frac{l}{2},$$

$$I_1 = \alpha^4 I_0 = \frac{\pi^4}{l^4} \cdot \frac{l}{2}.$$

С учётом (1.7)

$$I_2 = \sum_{i=1}^{n-1} c_i w^2(s_i) = c \sum_{i=1}^{n-1} f^3(i) \cdot w^2(s_i).$$

Тогда для случая шарнирного опирания краев (1.3) балки формула для оценки первого собственного значения имеет вид:

$$\alpha_s^4 = \frac{I_1}{I_0} + \frac{I_2}{I_0} = \frac{\pi^4}{l^4} + c \frac{2T_s(n)}{l}, \quad T_s(n) = \sum_{i=1}^{n-1} f^3(i) \sin^2 \left(\frac{\pi i}{n} \right). \quad (1.17)$$

Для случая подкрепления балки пружинами одинаковой жесткости (1.12) метод осреднения и метод Релея дает одну и ту же приближенную формулу (1.15) для первого собственного значения:

$$T_s^0(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \sin^2 \left(\frac{\pi i}{n} \right) = \frac{n}{2}, \quad \alpha_s^4 = \frac{\pi^4}{l^4} + c \frac{n}{l}.$$

Проведем аналогичные вычисления для случая жесткой заделки (1.4) краев балки: подставим в (1.16) $w = w_1$, где функция w_1 определяется по формуле (1.14). Тогда, значения I_0 , I_1 и I_2 вычисляются по следующим формулам:

$$I_0 = \int_0^l (U(\alpha s) - \varkappa \cdot V(\alpha s))^2 ds, \quad I_1 = \int_0^l (S(\alpha s) - \varkappa \cdot T(\alpha s))^2 ds,$$

$$I_2 = \sum_{i=1}^{n-1} c_i w^2(s_i) = c \sum_{i=1}^{n-1} f^3(i) \cdot w^2(s_i).$$

Следовательно, значение приближенного параметра первой частоты колебаний балки с заземленными концами может быть вычислено по формуле

$$\alpha_c^4 = \frac{I_1}{I_0} + \frac{I_2}{I_0} = \left(\frac{3\pi}{2l} \right)^4 + c \frac{T_c(n)}{I_0}, \quad T_c(n) = \sum_{i=1}^{n-1} f^3(i) w^2(s_i). \quad (1.18)$$

1.1.5 Нахождение собственных значений в задаче о колебаниях подкрепленной оболочки

Рассмотрим задачу об определении наименьшего значения параметра частоты λ_1 для цилиндрической оболочки с шарнирно опертыми краями (1.3). Оболочка подкрепляется шпангоутами жесткости c_i по параллелям с координатами s_i , являющимися узлами формы колебаний неподкрепленной шарнирно опертой оболочки (1.13).

Обозначим за $\alpha_s(\eta, m)$ собственное значение краевой задачи для случая шарнирного опирания (1.3, 1.5, 1.6), которому соответствует наименьшее значение

параметра частоты. Соответствующее значение параметра частоты $\lambda_1(\eta)$ обозначим за $\lambda^s(\eta)$

$$\lambda^s(\eta) = \lambda_1(\eta) = \min_m \left[\frac{\sigma \alpha_s^4(\eta, m)}{m^4} + \mu^4 m^4 \right]. \quad (1.19)$$

С учетом (1.8) и (1.17)

$$\alpha_s^4 = \frac{\pi^4}{l^4} + c \frac{2T_s(n)}{l} = \frac{\pi^4}{l^4} + \frac{m^8 \mu^4 l \eta 2T_s(n)}{\sigma n l} = \frac{\pi^4}{l^4} + \frac{2T_s(n) \mu^4 \eta}{\sigma n} m^8.$$

Подстановка полученного значения α_s^4 в (1.19) даёт следующее выражение

$$\begin{aligned} \lambda^s(\eta) &= \min_m \left[\frac{\sigma}{m^4} \left(\frac{\pi^4}{l^4} + \frac{2T_s(n) \mu^4 \eta}{\sigma n} m^8 \right) + \mu^4 m^4 \right] = \\ &= \min_m \left[\frac{\sigma \pi^4}{l^4} m^{-4} + \frac{2T_s(n) \mu^4 \eta}{n} m^4 + \mu^4 m^4 \right] \end{aligned}$$

В общем виде минимизируемая функция $\lambda(\eta, m)$ имеет вид

$$\lambda(\eta, m) = X m^{-4} + Y m^4, \quad (1.20)$$

где

$$X = \frac{\sigma \pi^4}{l^4}, \quad Y = \left(1 + \frac{2T_s(n)}{n} \eta \right) \mu^4.$$

Минимизируем полученную функцию $\lambda(\eta, m)$ по m :

$$\frac{d}{dm} \lambda(\eta, m) = -4X m^{-5} + 4Y m^3, \quad -4X m_0^{-5} + 4Y m_0^3 = 0,$$

тогда

$$m_0^4 = \sqrt{\frac{X}{Y}}, \quad \min_m [X m^{-4} + Y m^4] = 2\sqrt{XY}.$$

Следовательно, для наименьшего значения параметра частоты имеем

$$\lambda^s(\eta) = 2\sqrt{\frac{\sigma \pi^4}{l^4} \cdot \left(1 + \frac{2T_s(n)}{n} \eta \right) \mu^4} = \frac{2\pi^2 \mu^2 \sqrt{\sigma}}{l^2} \sqrt{1 + \frac{2T_s(n)}{n} \eta}$$

Поскольку $\mu^4 = h^2/12$, значение λ^s для случая шарнирного опирания краев оболочки записывается как:

$$\lambda^s(\eta) = \lambda^s(0) \sqrt{1 + \frac{2T_s(n)}{n} \eta}, \quad \text{где} \quad \lambda^s(0) = \frac{\pi^2 h \sqrt{\sigma}}{l^2 \sqrt{3}}. \quad (1.21)$$

С увеличением η увеличивается и $\lambda^s(\eta)$, однако формулой (1.21) нельзя пользоваться при больших значениях η . Дело в том, что существует частота колебаний, значение которой не зависит от η . Действительно, собственное значение α_n краевой задачи (1.3), (1.5) одновременно является собственным значением краевой задачи (1.3), (1.5), (1.6), так как форма колебаний неподкрепленной оболочки $w_n(s)$ удовлетворяет граничным условиям (1.6). Для параметра λ_n^s , соответствующего этому собственному значению α_n , справедливо

$$\begin{aligned}\lambda_n^s &= \min_m \left[\frac{\sigma \alpha_n^4}{m^4} + \mu^4 m^4 \right] = 2\sqrt{\sigma \alpha_n^4 \mu^4} = 2\alpha_n^2 \mu^2 \sqrt{\sigma} = \\ &= \frac{2\pi^2 n^2}{l^2} \frac{h}{\sqrt{12}} \sqrt{\sigma} = \frac{\pi^2 h \sqrt{\sigma}}{l^2 \sqrt{3}} n^2 = \lambda^s(0) n^2.\end{aligned}$$

Как мы видим, этот параметр не зависит от η .

Параметр η_s^* , являющийся корнем уравнения

$$\lambda^s(0) \sqrt{1 + \frac{2T_s(n)}{n} \eta} = \lambda_n^s$$

называется *эффективной жесткостью шпангоута*. Увеличение жесткости шпангоута η после достижения значения η_s^* не приводит к увеличению наименьшего параметра частоты. Следовательно,

$$\frac{\lambda^s(\eta)}{\lambda^s(0)} = \begin{cases} \sqrt{1 + \frac{2T_s(n)}{n} \eta}, & \eta \leq \eta_s^* \\ n^2, & \eta > \eta_s^* \end{cases}, \quad \eta_s^* = \frac{n(n^4 - 1)}{2T_s(n)}. \quad (1.22)$$

Рассмотрим аналогичную задачу об определении наименьшего значения параметра частоты λ^c для цилиндрической оболочки с жестко закрепленными (1.4) краями. В этом случае координаты параллелей, на которых оболочка подкрепляется шпангоутами жесткости c_i являются узлами формы колебаний неподкрепленной жестко заделанной оболочки (1.14).

Подставим (1.8) в собственное значение (1.18) краевой задачи (1.4, 1.5, 1.6):

$$\begin{aligned}\alpha_c^4 &= \left(\frac{3\pi}{2l}\right)^4 + c \frac{T_c(n)}{I_0} = \left(\frac{3\pi}{2l}\right)^4 + \frac{m^8 \mu^4 l \eta T_c(n)}{\sigma n I_0} = \\ &= \left(\frac{3\pi}{2l}\right)^4 + \frac{l T_c(n) \mu^4 \eta}{\sigma n I_0} m^8\end{aligned}$$

Тогда наименьшее значение параметра собственной частоты жестко закрепленной цилиндрической оболочки (1.19) имеет следующий вид

$$\begin{aligned}\lambda^c(\eta) &= \min_m \left[\frac{\sigma}{m^4} \left(\left(\frac{3\pi}{2l}\right)^4 + \frac{l T_c(n) \mu^4 \eta}{\sigma n I_0} m^8 \right) + \mu^4 m^4 \right] = \\ &= \min_m \left[\frac{\sigma (3\pi)^4}{(2l)^4} m^{-4} + \frac{l T_c(n) \mu^4 \eta}{n I_0} m^4 + \mu^4 m^4 \right].\end{aligned}$$

После минимизации этого выражения по m аналогично (1.20) получаем

$$\lambda^c(\eta) = 2 \sqrt{\frac{\sigma (3\pi)^4}{(2l)^4} \cdot \left(1 + \frac{l T_c(n) \eta}{n I_0}\right)} \mu^4 = \frac{9\pi^2 \mu^2 \sqrt{\sigma}}{2l^2} \sqrt{1 + \frac{l T_c(n) \eta}{n I_0}}.$$

или

$$\lambda^c(\eta) = \lambda^c(0) \sqrt{1 + \frac{l T_c(n) \eta}{n I_0}} \quad \text{где} \quad \lambda^c(0) = \frac{3\pi^2 h \sqrt{3\sigma}}{4l^2}. \quad (1.23)$$

С увеличением η увеличивается и $\lambda^c(\eta)$, однако, так же, как и в случае шарнирного опирания краев оболочки, формулой (1.23) нельзя пользоваться при больших значениях η , так как существует параметр частоты λ_n^c , который не зависит от η и для которого имеет место приближенная формула

$$\begin{aligned}\lambda_n^c &= \min_m \left[\frac{\sigma \alpha_n^4}{m^4} + \mu^4 m^4 \right] = 2 \sqrt{\sigma \alpha_n^4 \mu^4} = \frac{(2n+1)^2 \pi^2 h \sqrt{\sigma}}{4l^2 \sqrt{3}} = \\ &= \frac{3\pi^2 h \sqrt{3\sigma}}{4l^2} \frac{(2n+1)^2}{3^2} = \lambda^c(0) \cdot \left(\frac{2n+1}{3}\right)^2.\end{aligned}$$

Значение эффективной жесткости шпангоута η_c^* в этом случае является корнем уравнения

$$\lambda^c(0) \sqrt{1 + \frac{l T_c(n) \eta_c^*}{n I_0}} = \lambda^c(0) \cdot \left(\frac{2n+1}{3}\right)^2$$

Увеличение жесткости шпангоута η после достижения ею значения η_c^* не приводит к увеличению наименьшего параметра частоты. Следовательно,

$$\frac{\lambda^c(\eta)}{\lambda^c(0)} = \begin{cases} \sqrt{1 + \frac{lT_c(n)\eta}{nI_0}}, & \eta \leq \eta_c^* \\ \left(\frac{2n+1}{3}\right)^2, & \eta > \eta_c^* \end{cases}, \quad \eta_c^* = \frac{nI_0}{lT_c(n)} \left(\left(\frac{2n+1}{3}\right)^4 - 1 \right). \quad (1.24)$$

1.2 Оптимизация параметров подкрепленной цилиндрической оболочки с целью максимального увеличения первой частоты

Пусть масса подкрепленной оболочки фиксирована. Рассмотрим задачу об определении оптимального распределения массы между шпангоутами и оболочкой (обшивкой), которому соответствует наибольшее значение первой частоты.

Наименьшую частоту колебаний ω_0 цилиндрической оболочки с шарнирно опертыми краями, имеющей безразмерную длину l и толщину h_0 , можно определить с помощью приближенной формулы, полагая $\lambda = \lambda_s(0)$ (1.21)

$$\omega_s^0 = \sqrt{\frac{E\lambda^s(0)}{\rho R^2 \sigma}} = \sqrt{\frac{E}{\rho R^2 \sigma} \frac{\pi^2 h_0 \sqrt{\sigma}}{l^2 \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{E h_0 \pi^2}{\rho R^2 l^2 \sqrt{3} \sigma}}. \quad (1.25)$$

Предположим, что за счет уменьшения толщины оболочки до величины h на ней установлен $n - 1$ шпангоут. Полагаем, что сечение шпангоутов имеет прямоугольную форму, шпангоуты имеют одинаковую ширину a и высоту b_i ($i = 1, \dots, n - 1$). Масса подкрепленной оболочки, в таком случае,

$$M^s = M(h) + M^r, \quad (1.26)$$

где $M(h) = \rho 2\pi R \cdot Rh \cdot Rl$ — масса обшивки, а масса шпангоутов

$$M^r = \sum_{i=1}^{n-1} \rho 2\pi R \cdot aR \cdot b_i R = 2\pi R^3 \rho \cdot a^2 k \cdot P(n), \quad P(n) = \sum_{i=1}^{n-1} f(i).$$

Пусть масса подкрепленной оболочки совпадает с массой гладкой оболочки $M_0 = M(h_0)$.

Для определения первой частоты колебаний подкрепленной оболочки ω_s воспользуемся формулами (1.21) и (1.25). Введем функцию отношения первой частоты колебаний подкрепленной оболочки к первой частоте колебаний гладкой оболочки, В случае шарнирного опирания краев оболочки с учетом (1.22) получим следующее выражение

$$f_s = \frac{\omega_s}{\omega_s^0} = \begin{cases} \sqrt[4]{1 + \frac{2T_s(n)}{n}\eta \cdot \sqrt{d}}, & \eta \leq \eta_s^*, \\ n \cdot \sqrt{d}, & \eta_s^* < \eta, \end{cases}, \quad \eta_s^* = \frac{n(n^4 - 1)}{2T_s(n)}, \quad d = \frac{h}{h_0}.$$

Преобразуем второй член подкоренного выражения с учетом значения η из (1.8)

$$\frac{2T_s(n)}{n}\eta = \frac{2T_s(n)}{n} \frac{12\sigma n}{h^3 l} J = \frac{2T_s(n)}{n} \frac{12\sigma n a^4 k^3 h_0^3}{h^3 l \cdot 12 h_0^3} = \frac{2T_s(n)\sigma k^3}{lh_0^3} \cdot \frac{a^4}{d^3}.$$

Следовательно

$$f_s = \begin{cases} n \cdot \sqrt{d}, & 0 < d \leq d_s \\ \sqrt[4]{1 + \frac{B_s a^4}{d^3}} \cdot \sqrt{d}, & d_s < d \leq 1 \end{cases}, \quad B_s = \frac{2\sigma k^3}{lh_0^3} \cdot T_s(n). \quad (1.27)$$

Рассмотрим условие равенства массы подкрепленной оболочки массе гладкой оболочки (1.26):

$$2\pi R^3 \rho (hl + a^2 k P(n)) = 2\pi R^3 \rho h_0 l,$$

$$hl + a^2 k P(n) = h_0 l.$$

Откуда

$$a^2 = \frac{1-d}{A}, \quad \text{где} \quad A = \frac{k}{h_0 l} P(n).$$

Используя выражение для a^2 , функцию $f_s^2(d)$ можно представить в следующем виде:

$$f_s(d) = \begin{cases} n \cdot \sqrt{d}, & 0 < d \leq d_s \\ \sqrt[4]{1 + \frac{B_s}{A^2} \cdot \frac{(1-d)^2}{d^3}} \cdot \sqrt{d}, & d_s < d \leq 1 \end{cases},$$

Из условия непрерывности функции f_s в d_s имеем

$$n^4 - 1 = \frac{B_s}{A^2} \cdot \frac{(1 - d_s)^2}{d_s^3},$$

откуда

$$d_s^3 - \frac{B_s}{A^2(n^4 - 1)}(1 - d_s)^2 = 0,$$

или

$$d_s^3 - \frac{2\sigma kl}{h_0} \cdot \frac{T_s(n)}{P^2(n)(n^4 - 1)} \cdot (d_s - 1)^2 = 0. \quad (1.28)$$

Значение d_s определяется как корень этого уравнения из отрезка $[0, 1]$, который соответствует максимальной первой частоте колебаний шарнирно опертой оболочки, подкрепленной шпангоутами разной жесткости.

При этом безразмерная ширина шпангоутов a_s и значение целевой функции f_s^* , соответствующие d_s , находятся по формулам:

$$a_s = \sqrt{\frac{1 - d_s}{A}}, \quad f_s^* = n \cdot \sqrt{d_s}.$$

В задаче о колебаниях подкрепленной цилиндрической оболочки с жестко закрепленными краями может быть произведена аналогичная оптимизация по массе. Наименьшую частоту колебаний ω_0 цилиндрической оболочки с заделанными краями, имеющей безразмерную длину l и толщину h_0 , можно определить по приближенной формуле (при $\lambda = \lambda_c(0)$ по (1.23))

$$\omega_c^0 = \sqrt{\frac{E\lambda^c(0)}{\rho R^2 \sigma}} = \sqrt{\frac{E}{\rho R^2 \sigma} \frac{3\pi^2 h_0 \sqrt{3\sigma}}{4l^2}} = \sqrt{\frac{9Eh_0\pi^2}{4\rho R^2 l^2 \sqrt{3\sigma}}}. \quad (1.29)$$

Для определения первой частоты колебаний подкрепленной оболочки w_c можно воспользоваться формулами (1.23) и (1.29). С учетом соотношения (1.24) функция отношения первой частоты колебаний подкрепленной оболочки к первой частоте колебаний гладкой оболочки f_c будет иметь следующий вид:

$$f_c = \frac{\omega_c}{\omega_c^0} = \begin{cases} \sqrt[4]{1 + \frac{lT_c(n)\eta}{nI_0}} \cdot \sqrt{d}, & \eta \leq \eta_c^* \\ \frac{2n+1}{3} \cdot \sqrt{d}, & \eta > \eta_c^* \end{cases}, \quad \eta_c^* = \frac{nI_0}{lT_c(n)} \left(\left(\frac{2n+1}{3} \right)^4 - 1 \right).$$

Проведем аналогичные преобразования второго члена подкоренного выражения:

$$\frac{lT_c(n)\eta}{nI_0} = \frac{lT_c(n)}{nI_0} \frac{12\sigma n}{h^3 l} J = \frac{lT_c(n)}{nI_0} \frac{12\sigma n a^4 k^3}{h_0^3 d^3 l} \frac{1}{12} = \frac{T_c(n)\sigma k^3 a^4}{I_0 h_0^3 d^3},$$

тогда

$$f_c = \begin{cases} \frac{2n+1}{3} \cdot \sqrt{d}, & 0 < d \leq d_c \\ \sqrt[4]{1 + \frac{B_c a^4}{k^3}} \cdot \sqrt{d}, & d_c < d \leq 1 \end{cases}, \quad B_c = \frac{\sigma k^3}{I_0 h_0^3} \cdot T_c(n).$$

С учетом равенства массы оболочки, подкрепленной шпангоутами и гладкой оболочки

$$f_c = \begin{cases} \frac{2n+1}{3} \cdot \sqrt{d}, & 0 < d \leq d_c \\ \sqrt[4]{1 + \frac{B_c}{A^2} \cdot \frac{(1-d)^2}{d^3}} \cdot \sqrt{d}, & d_c < d \leq 1 \end{cases}, \quad a^2 = \frac{1-d}{A}, \quad A = \frac{kP(n)}{h_0 l}.$$

Где d_c удовлетворяет следующему уравнению:

$$\left(\frac{2n+1}{3} \right)^4 = 1 + \frac{B_c}{A^2} \cdot \frac{(1-d_c)^2}{d_c^3},$$

откуда

$$d_c^3 - \frac{B_c}{A^2 \left(\left(\frac{2n+1}{3} \right)^4 - 1 \right)} (1-d_c)^2 = 0,$$

или

$$d_c^3 - \frac{\sigma k l^2}{I_0 h_0} \frac{T_c(n)}{P^2(n) \left(\left(\frac{2n+1}{3} \right)^4 - 1 \right)} (1-d_c)^2 = 0. \quad (1.30)$$

При этом a_c и f_c^* , соответствующие d_c , можно найти по следующим формулам:

$$a_c = \sqrt{\frac{1 - d_c}{A}}, \quad f_c^* = \frac{2n + 1}{3} \cdot \sqrt{d_c}.$$

1.3 Аналитическое определение фундаментальной частоты колебаний подкрепленной оболочки

С помощью численных и асимптотических методов получен спектр частот собственных колебаний подкрепленной оболочки. Выделены два типа колебаний. Формы собственных колебаний первого типа сходны большим числом волн в окружном направлении с формами собственных колебаний неподкрепленной цилиндрической оболочки. Собственные частоты и формы колебаний второго типа мало отличаются от частот и форм колебаний кольцевой пластины.

В этом параграфе «оболочечные» частоты находятся аналитически и численно. В качестве примера рассматривается медная цилиндрическая оболочка длины $l = 4$ и толщины $h_0 = 0,01$ с модулем Юнга $E = 11 \cdot 10^{10}$ Па, коэффициентом Пуассона $\nu = 0,35$ и плотностью $\rho = 8920$ кг/м³. Приближенное значение фундаментальной частоты колебаний (ω_0) неподкрепленной оболочки вычисляется по формуле (1.25) в случае шарнирного опирания краев, и по формуле (1.29) в случае жесткой заделки. Соответствующие значения ω_s^0 и ω_c^0 таковы

$$\omega_s^0 = \sqrt{\frac{Eh_0}{R^2 l^2 \sqrt{3\sigma}}} \simeq 216,5 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \quad \omega_c^0 = \sqrt{\frac{9Eh_0}{4R^2 l^2 \sqrt{3\sigma}}} \simeq 324,8 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

В случае подкрепления оболочки n_s шпангоутами с шириной a и высотами $b_i = kaf(i)(i = 1 \dots n_s)$ функция $f(i)$ определяет распределение высот шпангоутов вдоль образующей оболочки и, следовательно, распределение жесткостей

шпангоутов и профиль конструкции. Для случая линейного распределения

$$f_{lin}(i) = (\kappa(i) - 1)(u - 1) + 1, \quad u = \frac{b_2}{b_1},$$

где

$$\kappa(i) = \frac{n}{2} - \left| \frac{n}{2} - i \right| = \begin{cases} i, & i < \frac{n}{2} \\ n - i, & i \geq \frac{n}{2} \end{cases}, \quad n = n_s + 1.$$

Для случая параболического распределения

$$f_{parab}(i) = a_p \kappa^2(i) - n a_p \kappa(i) + n a_p - a_p + 1, \quad \text{где} \quad a_p = \frac{1 - u}{n - 3},$$

и для случая экспоненциального распределения

$$f_{exp}(i) = \frac{u - 1}{e^2 - e} e^{\kappa(i)} + \frac{e - u}{e - 1}.$$

Для оболочки подкрепленной шпангоутами одинаковой высоты $u = 1$.

Приближенное значение «оболочечной» частоты колебаний такой конструкции может быть получено по формуле $\omega_s = \omega_s^0 f_s$ в случае шарнирного опирания краев, и по формуле $\omega_c = \omega_c^0 f_c$ в случае жесткой заделки краев. Значения f_s и f_c для разных профилей конструкции приведены в таблицах 1.1 и 1.2. На рисунках 1.5 и 1.6 изображены зависимости функций f_s и f_c от числа шпангоутов при различных отношениях ширины и высоты шпангоутов.

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что использование неодинаковых шпангоутов для подкрепления цилиндрической оболочки приводит к более значительному увеличению ее первой собственной частоты по сравнению с подкреплением равными шпангоутами. Из трех рассмотренных профилей конструкции наибольшее увеличение первой частоты дает профиль с экспоненциальным законом распределения высот шпангоутов. Кроме того, можно заметить, что защемление краев оболочки приводит к более высоким фундамен-

Таблица 1.1 — Значение функции f_s шарнирно опертой оболочки, подкрепленной n_s шпангоутами.

		$f_{lin}(i)$			$f_{parab}(i)$			$f_{exp}(i)$		
		u								
n_s		1	2	3	1	2	3	1	2	3
$k = 1$	4	3,16	3,41	3,51	3,16	3,41	3,51	3,16	3,41	3,51
	5	3,36	3,66	3,90	3,36	3,66	3,82	3,36	3,66	4,13
	6	3,51	3,85	4,17	3,51	3,85	4,08	3,51	3,85	4,45
	7	3,64	4,00	4,47	3,64	4,00	4,30	3,64	4,00	5,32
	8	3,74	4,13	4,68	3,74	4,13	4,50	3,74	4,13	5,64
$k = 1,5$	4	3,61	3,66	3,64	3,61	3,66	3,64	3,61	3,66	3,64
	5	4,02	4,14	4,14	3,94	4,02	3,99	4,25	4,45	4,49
	6	4,31	4,45	4,44	4,22	4,32	4,29	4,60	4,82	4,84
	7	4,63	4,83	4,83	4,46	4,59	4,56	5,49	5,82	5,86
	8	4,86	5,07	5,07	4,68	4,83	4,79	5,83	6,17	6,20
$k = 2$	4	3,77	3,73	3,95	3,77	3,73	3,95	3,77	3,73	3,95
	5	4,31	4,27	4,55	4,16	4,10	4,40	4,65	4,63	4,89
	6	4,65	4,59	4,94	4,50	4,43	4,78	5,04	5,00	5,33
	7	5,06	5,00	5,40	4,79	4,71	5,11	6,08	6,04	6,40
	8	5,33	5,26	5,71	5,05	4,97	5,41	6,46	6,40	6,83

тальным частотам, чем при шарнирном опирании краев. Эти результаты подчеркивают важность учета как типа профиля конструкции, так и граничных условий при усовершенствовании конструкций с цилиндрическими оболочек.

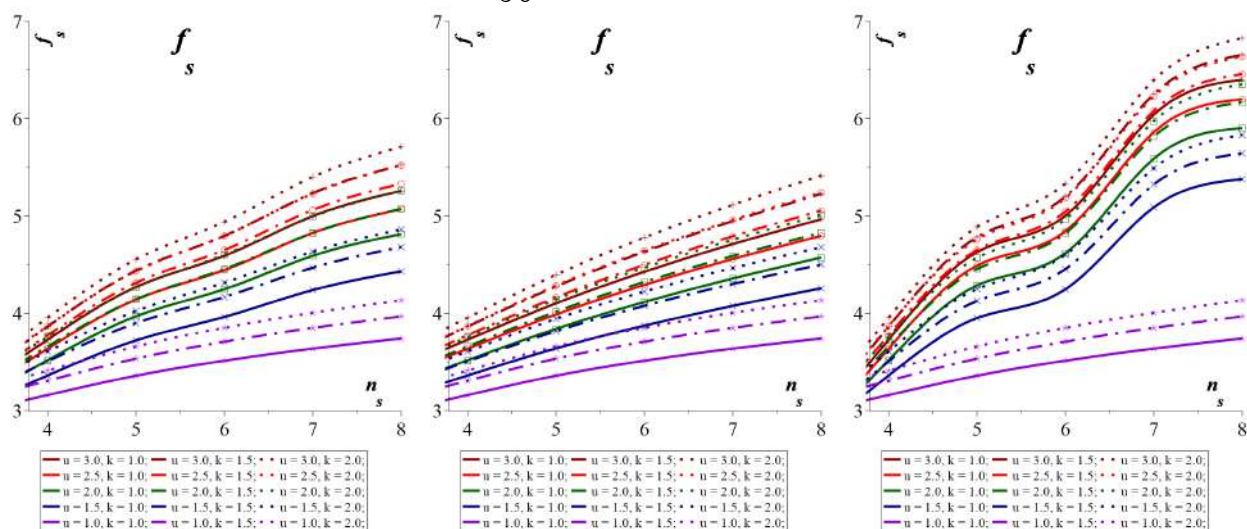


Рисунок 1.5 — Значения функции f_s для а). линейного, б). параболического, в). экспоненциального профилей конструкции.

1.4 Собственные колебания кольцевой пластины

Как можно видеть из результатов предыдущего параграфа, с увеличением высоты шпангоутов растет первая частота колебаний оболочки. В большинстве работ, посвященных исследованию колебаний цилиндрических оболочек, подкрепленных шпангоутами, используется стержневая модель шпангоута, поскольку при малой высоте собственная частота колебаний шпангоута превышает собственную частоту колебаний оболочки. Однако, с увеличением высоты собственная частота колебаний шпангоута падает, что ведёт к уменьшению частоты колебаний всей конструкции. Поэтому, когда отношение высоты шпангоута к его ширине $k = b/a$ велико, для получения более точных результатов вместо использования модели кольцевого стержня следует рассматривать шпангоуты как кольцевые пластины. Оптимальным является использование таких шпангоутов, у которых первая частота колебаний совпадает с первой частотой колебаний оболочки.

Таблица 1.2 — Значение функции f_c жестко закрепленной оболочки, подкрепленной n_s шпангоутами.

		$f_{lin}(i)$			$f_{parab}(i)$			$f_{exp}(i)$																								
		<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;">u</td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> </tr> <tr> <td style="border: none;">n_s</td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">1,5</td> <td style="border: none;">2</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">1,5</td> <td style="border: none;">2</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">1,5</td> <td style="border: none;">2</td> </tr> </table>										u										n_s		1	1,5	2	1	1,5	2	1	1,5	2
	u																															
n_s		1	1,5	2	1	1,5	2	1	1,5	2																						
$k = 1$	4	2,67	2,77	2,84	2,67	2,77	2,84	2,67	2,77	2,84																						
	5	2,86	2,99	3,08	2,86	2,99	3,08	2,86	2,99	3,08																						
	6	3,01	3,16	3,26	3,01	3,16	3,26	3,01	3,16	3,26																						
	7	3,13	3,30	3,42	3,13	3,30	3,42	3,13	3,30	3,42																						
	8	3,23	3,41	3,54	3,23	3,41	3,54	3,23	3,41	3,54																						
$k = 1,5$	4	2,82	2,91	2,98	2,82	2,91	2,98	2,82	2,91	2,98																						
	5	3,14	3,26	3,35	3,08	3,20	3,29	3,31	3,42	3,50																						
	6	3,37	3,52	3,62	3,30	3,45	3,55	3,58	3,72	3,82																						
	7	3,63	3,80	3,91	3,50	3,66	3,78	4,25	4,40	4,50																						
	8	3,81	4,00	4,13	3,67	3,85	3,99	4,52	4,70	4,82																						
$k = 2$	4	2,93	3,01	3,07	2,93	3,01	3,07	2,93	3,01	3,07																						
	5	3,32	3,43	3,50	3,22	3,34	3,42	3,52	3,62	3,69																						
	6	3,58	3,72	3,82	3,48	3,62	3,72	3,84	3,96	4,05																						
	7	3,89	4,05	4,17	3,71	3,88	3,99	4,56	4,70	4,78																						
	8	4,11	4,29	4,42	3,91	4,10	4,23	4,87	5,03	5,14																						

На рисунке 1.7 изображена цилиндрическая оболочка, подкрепленная в середине кольцевой пластиной. Как и ранее, радиус цилиндрической оболочки выбран за единицу длины $R = 1$.

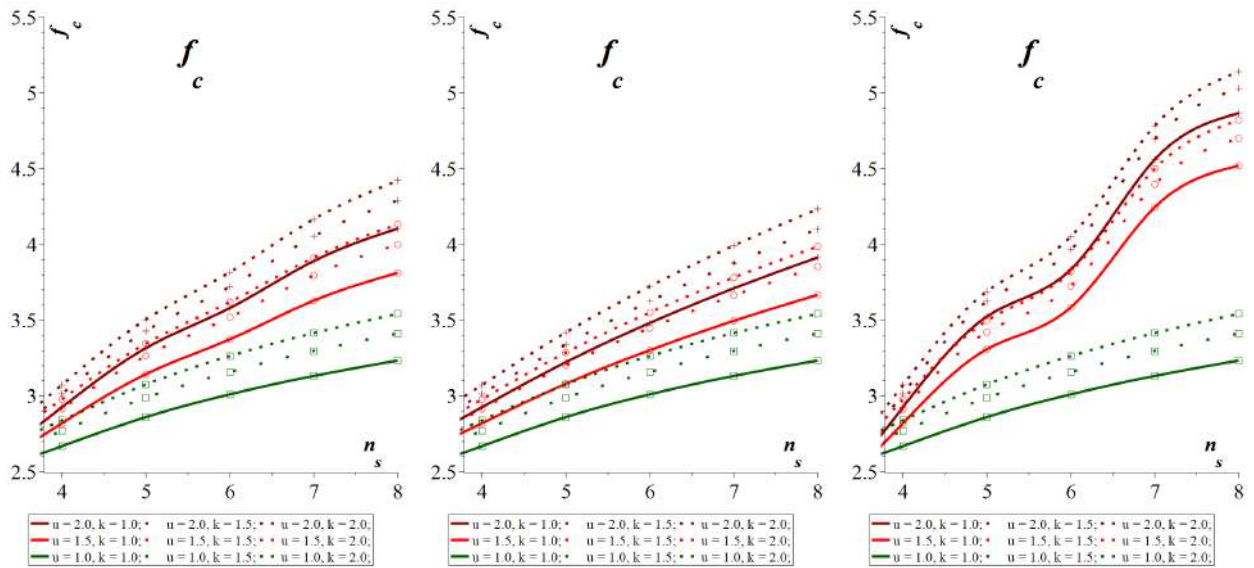


Рисунок 1.6 — Значения функции f_c для а). линейного, б). параболического, в). экспоненциального профилей конструкции.

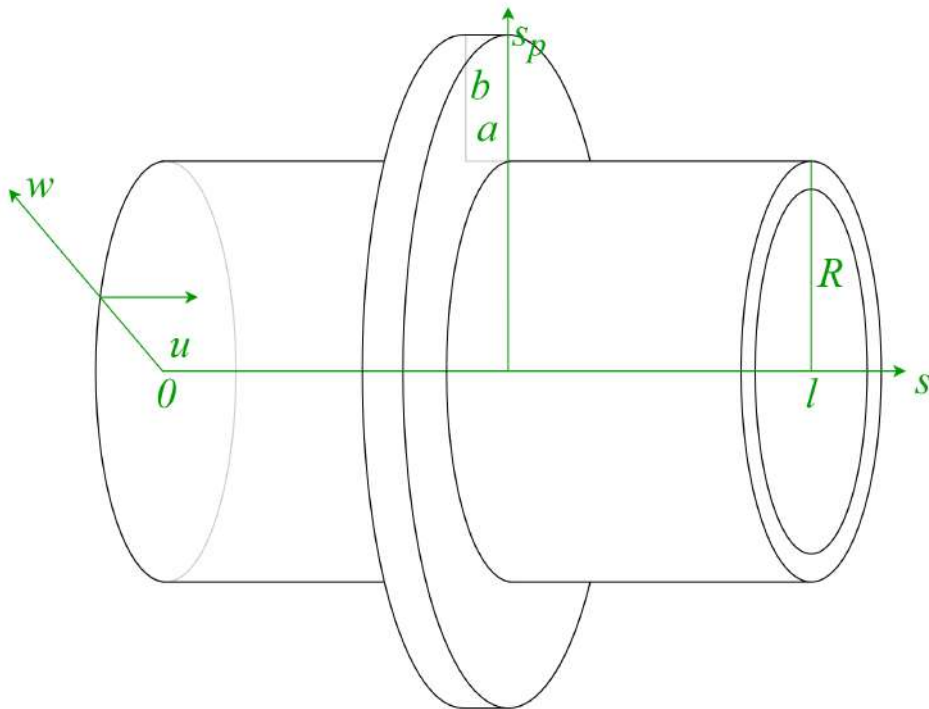


Рисунок 1.7 — Цилиндрическая оболочка, сопряженная с кольцевой пластиной.

Численные результаты показывают, что для больших значений k низкочастотные колебания осесимметричны и нижние частоты подкрепленной оболочки мало отличаются от частот, соответствующих изгибным колебаниям пластины.

Безразмерные уравнения, описывающие осесимметрические колебания цилиндрической оболочки, имеют следующий вид

$$\mu^4 \frac{d^4 w}{ds^4} + \nu \frac{du}{ds} + w = \lambda w, \quad \frac{d^2 u}{ds^2} + \nu \frac{dw}{ds} = -\lambda u, \quad (1.31)$$

Здесь $s \in [0, l]$ — продольная координата, (u, w) — компоненты перемещения (u — осевое, w — нормальное), $\mu^4 = h^2/12$ — малый параметр, h — толщина оболочки, ν — коэффициент Пуассона, $\lambda = \rho \omega^2 R^2 E^{-1}$, — частотный параметр.

Осесимметричные колебания кольцевой пластины описываются безразмерным уравнением

$$\Delta^2 w_p = \gamma^4 \cdot w_p, \quad \Delta w_p = \frac{1}{s_p} \frac{d}{ds_p} \left(s_p \frac{dw_p}{ds_p} \right), \quad \gamma^4 = \frac{12\lambda}{a^2}, \quad (1.32)$$

где $s_p \in [1, 1+b]$ — радиальная координата, а w_p — перемещение вдоль нормали.

Полагая, что край пластины ($s_p = 1+b$) свободен, запишем краевые условия в следующем виде:

$$M_p = Q_p = 0 \quad \text{при} \quad s_p = 1+b, \quad (1.33)$$

где для изгибающего момента M_p и перерезывающего усилия Q_p определяются как

$$M_p = \frac{d^2 w_p}{ds_p^2} + \frac{\nu}{s_p} \frac{dw_p}{ds_p}, \quad Q_p = \frac{d^3 w_p}{ds_p^3} + \frac{1}{s_p} \frac{d^2 w_p}{ds_p^2} - \frac{1}{s_p^2} \frac{dw_p}{ds_p}.$$

В работе [57] показано, что в случае, когда ширина шпангоута близка к толщине оболочки $a \sim h$, в первом приближении граничные условия сопряжения (1.34) можно записать в виде

$$w_p(1) = 0, \quad \frac{dw_p}{ds_p}(1) = 0. \quad (1.34)$$

В общем виде точное решение системы (1.32), (1.33), (1.34) представляется через функции Бесселя

$$w_p = C_1 J_0(\gamma s_p) + C_2 Y_0(\gamma s_p) + C_3 I_0(\gamma s_p) + C_4 K_0(\gamma s_p), \quad (1.35)$$

где $\{C_i\}_{i=1}^4$ — произвольные константы, J_0, Y_0 — функции Бесселя первого и второго рода, I_0, K_0 — модифицированные функции Бесселя. В общем случае для нахождения параметра γ следует подставить решение (1.35) в граничные условия (1.33) и (1.34). Условием существования нетривиального решения является равенство нулю главного определителя системы линейных уравнений. Получившееся громоздкое уравнение может быть решено только численно.

Однако, в случае сопряжения с достаточно узкой ($b \ll 1$) пластиной, для γ можно получить простую приближенную формулу.

После замены переменной $s_p = 1 + bx$ в уравнении (1.32) и граничных условиях (1.33), (1.34) и пренебрежения малыми членами получим задачу на собственные значения:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \beta^4 w = 0, \quad \text{где } \beta = b\gamma, \quad (1.36)$$

$$w(0) = \frac{dw}{dx}(0) = \frac{d^2 w}{dx^2}(1) = \frac{d^3 w}{dx^3}(1) = 0. \quad (1.37)$$

Решение уравнения (1.36) имеет вид

$$w = D_1 \sin(\beta x) + D_2 \cos(\beta x) + D_3 \operatorname{sh}(\beta x) + D_4 \operatorname{ch}(\beta x). \quad (1.38)$$

Подстановкой (1.38) в (1.37) можно получить систему однородных уравнений относительно $\{D_i\}_{i=1}^4$ у которой есть нетривиальные решения, когда главный определитель равен нулю:

$$\operatorname{sh}(\beta) \cos(\beta) + 1 = 0.$$

Наименьший корень этого уравнения $\beta_0 \simeq 1.875$ соответствует первой частоте. Приближенное значение параметра γ может быть найдено по формуле $\gamma_0 = 1.875/b$.

При $a \ll b \ll 1$ и $a \sim h$ приближенное значение частотного параметра λ_1 , используя (1.32) (1.5),

$$\beta = b\gamma, \quad 12\lambda = \gamma^4 a^2,$$

может быть получено по формуле

$$\lambda_1 \simeq 1.03 \frac{a^2}{b^4}. \quad (1.39)$$

Далее будем использовать полученную формулу при решении задачи о выборе оптимальных коэффициентов функции распределения.

1.5 Аналитическое и численное определение фундаментальной частоты колебаний конструкции

Нижняя часть частотного спектра цилиндрической оболочки с кольцевыми ребрами жесткости образована собственными значениями (1.21) и (1.39) в случае шарнирного опирания краев оболочки и собственными значениями (1.23) и (1.39) — в случае жесткой заделки. Численные результаты, приведенные в таблицах 1.1 и 1.2, показывают, что с увеличением параметра u , увеличивается и первая «оболочечная» частота конструкции. Соответствующая форма колебаний показана на рисунке 1.8.

Однако, как следует из приближенной формулы (1.39), первая «пластиночная» частота при этом уменьшается. Форма колебаний, соответствующая первой «пластиночной» частоте показана на рисунке 1.9.

Оптимальным будет то значение параметра u , при котором первые «оболочечная» и «пластиночная» частоты совпадают.

Асимптотические формулы (1.22) и (1.24) для собственного значения первой частоты колебаний оболочки дают хорошее приближение для тонких ($h \sim 0.01$) оболочек средней длины ($3 < l < 15$).

С увеличением длины оболочки минимальной становится частота, соответствующая «балочным» колебаниям оболочки. То есть длинную цилиндрическую оболочку следует моделировать как стержень постоянного поперечного сечения,

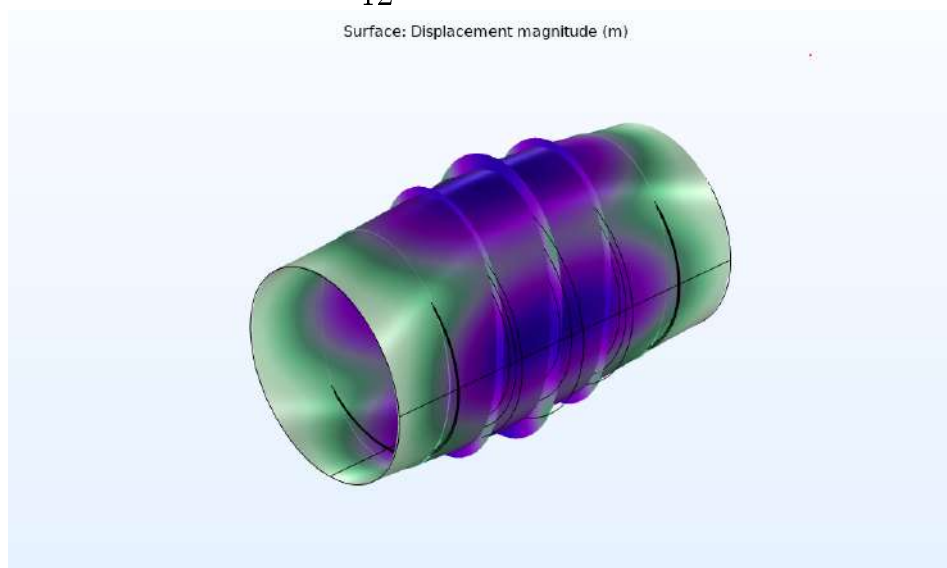


Рисунок 1.8 — «Оболочечная» форма колебаний цилиндрической оболочки толщины $h = 0.01$, длины $l = 4$, подкреплённая 5 шпангоутами для случая линейной функции распределения с $u = 7$.

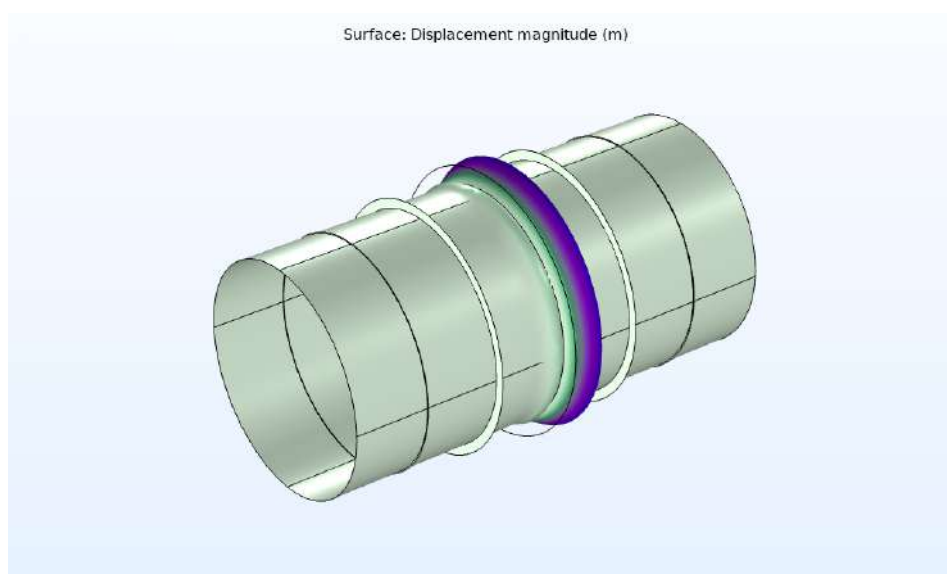


Рисунок 1.9 — «Пластиночная» форма колебаний цилиндрической оболочки толщины $h = 0.01$, длины $l = 4$, подкреплённая 5 шпангоутами для случая линейной функции распределения с $u = 8$.

подкреплённый пружинами. Форма колебаний, соответствующая фундаментальной «балочной» частоте показана на рисунке 1.10).

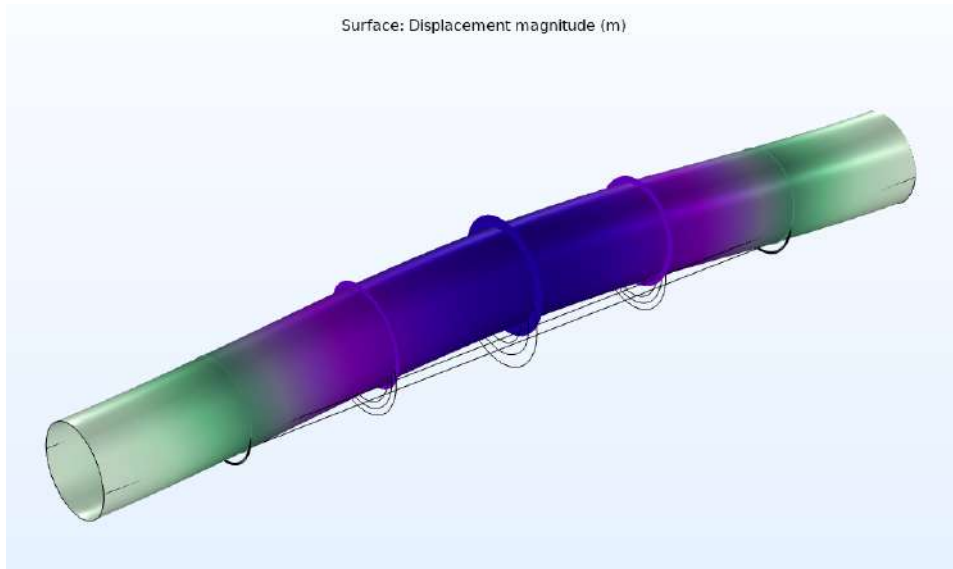


Рисунок 1.10 — «Балочная» форма колебаний цилиндрической оболочки толщины $h = 0.01$, длины $l = 20$, подкреплённая 5 шпангоутами для случая линейной функции распределения с $u = 7$.

При малых длинах оболочки (1.21) и (1.23) теряют свою точность, поскольку колебания на промежутках между установленными шпангоутами не затухают к краям промежутка.

При большой изменчивости профиля конструкции (u), в зависимости от толщины и длины оболочки, форма колебаний оболочки локализуется в окрестности первого шпангоута (рисунок 1.11). В этом случае фундаментальной частотой конструкции будет первая частота колебаний сегмента оболочки, подкреплённого первым шпангоутом с упругой заделкой на месте второго шпангоута. Условие упругой заделки занимает промежуточное положение между жесткой заделкой и шарнирным опиранием, в дальнейшем оно будет выбираться таким же, как и на краю оболочки.

Ниже приведены оптимальные значения параметра u для некоторых значений геометрических параметров конструкции (k, n_s). В качестве примера рассматривается медная цилиндрическая оболочка длины $l = 4$ и толщины $h_0 = 0,01$

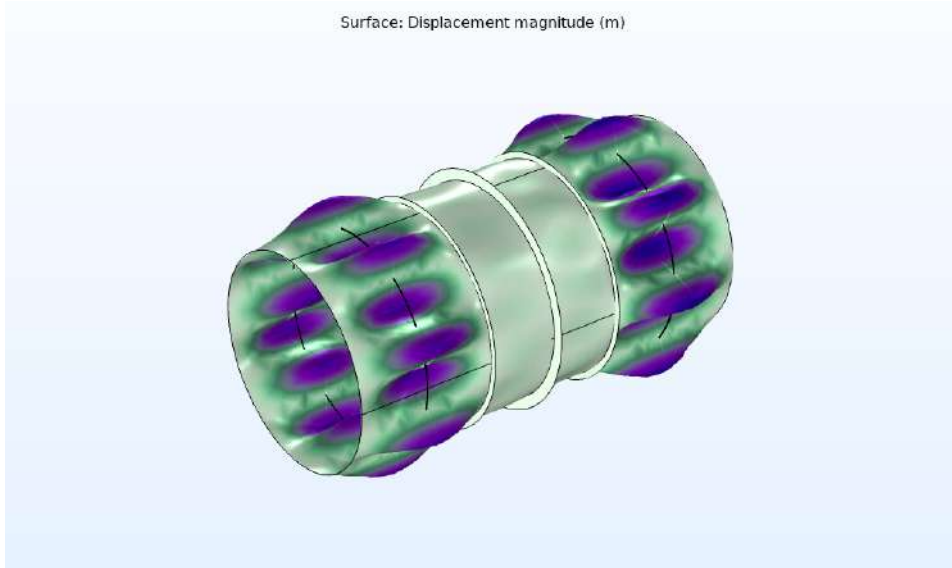


Рисунок 1.11 — Локализация «оболочечной» формы колебаний конструкции с высокой изменяемостью профиля u .

с модулем Юнга $E = 11 \cdot 10^{10}$ Па, коэффициентом Пуассона $\nu = 0.35$ и плотностью $\rho = 8920$ кг/м³. Численные результаты были получены методом конечных элементов в пакетах *Ansys* и *Comsol*.

Для разных профилей конструкции оптимальные значения параметра u и соответствующие им значения функции f_s (для случая шарнирного опирания краев оболочки) и функции f_c (для случая жесткой заделки) приведены в таблицах 1.3 и 1.4.

В Таблице 1.5 для оптимального значения параметра u приведены значения циклических частот колебаний ω_{asympt} , полученные описанным в главе асимптотическим методом, и соответствующие значения ω_{fea} , полученные методом конечных элементов в пакете *Ansys* для линейного, параболического и экспоненциального профилей конструкции. Заметим, что при $n_s = 3$ и $n_s = 4$ профили совпадают.

На рисунке 1.12 для случая подкрепления оболочки тремя шпангоутами изображена форма колебаний оптимальной конструкции, соответствующая ее

фундаментальной частоте. Как видно, колебаниям подвержена как оболочка, так и самый большой шпангоут, то есть дальнейшее уменьшение толщины оболочки приведет к уменьшению первой частоты «оболочечной» серии частот, а уменьшение толщины или увеличение высоты шпангоута — к уменьшению первой частоты «пластиночной» серии частот. Максимизация фундаментальной частоты

Таблица 1.3 — Оптимальные значения параметра u и соответствующие ему значения функции f_s для шарнирно опертой оболочки при линейном (f_{lin}), параболическом (f_{parab}) и экспоненциальном (f_{exp}) распределения высот n_s шпангоутов.

		u	f_s	u	f_s	u	f_s	u	f_s	u	f_s
	n_s	$k = 1$		$k = 1,5$		$k = 2$		$k = 2,5$		$k = 3$	
f_{lin}	4	14,52	4,32	9,74	4,31	7,35	4,29	5,92	4,28	4,96	4,27
	5	6,57	4,72	4,61	4,69	3,63	4,67	3,03	4,65	2,64	4,63
	6	6,59	5,12	4,60	5,10	3,61	5,07	3,02	5,05	2,62	5,03
	7	4,43	5,33	3,22	5,30	2,61	5,27	2,25	5,25	2,00	5,23
	8	4,50	5,63	3,26	5,60	2,64	5,58	2,26	5,55	2,01	5,53
f_{parab}	4	14,52	4,32	9,74	4,31	7,35	4,29	5,92	4,28	4,96	4,27
	5	9,93	4,72	6,77	4,70	5,18	4,69	4,23	4,67	3,60	4,66
	6	8,69	5,10	5,95	5,08	4,59	5,06	3,77	5,04	3,22	5,03
	7	7,17	5,35	4,97	5,34	3,88	5,32	3,22	5,30	2,77	5,29
	8	6,51	5,61	4,55	5,59	3,57	5,57	2,97	5,55	2,58	5,54
f_{exp}	4	14,52	4,32	9,74	4,31	7,35	4,29	5,92	4,28	4,96	4,27
	5	3,81	4,78	2,82	4,74	2,33	4,71	2,03	4,67	1,83	4,65
	6	3,87	5,19	2,85	5,16	2,35	5,12	2,04	5,10	1,84	5,07
	7	1,81	5,44	1,53	5,37	1,39	5,31	1,30	5,26	1,25	5,22
	8	1,85	5,79	1,55	5,72	1,40	5,67	1,31	5,62	1,25	5,58

важна по ряду причин. Во-первых, минимизируется вероятность резонанса, возникающего при совпадении частоты приложенной нагрузки с собственной частотой конструкции, что может привести к чрезмерным вибрациям и разрушению конструкции. Во-вторых, наличие одинаковых собственных частот для разных форм колебаний может привести к более сбалансированной реакции конструкции

Таблица 1.4 — Оптимальные значения параметра u и соответствующие ему значения функции f_c для жестко закрепленной оболочки при линейном (f_{lin}), параболическом (f_{parab}) и экспоненциальном (f_{exp}) распределения высот n_s шпангоутов.

		u	f_c	u	f_c	u	f_c	u	f_c	u	f_c
	n_s	$k = 1$		$k = 1,5$		$k = 2$		$k = 2,5$		$k = 3$	
f_{lin}	4	15,64	3,39	10,47	3,38	7,88	3,38	6,33	3,37	5,29	3,36
	5	6,76	3,78	4,72	3,76	3,70	3,75	3,09	3,74	2,68	3,73
	6	6,60	4,14	4,60	4,13	3,61	4,11	3,01	4,10	2,61	4,09
	7	4,31	4,38	3,14	4,36	2,55	4,34	2,19	4,32	1,95	4,30
	8	4,32	4,66	3,13	4,63	2,54	4,61	2,18	4,60	1,94	4,58
f_{parab}	4	15,64	3,39	10,47	3,38	7,88	3,38	6,33	3,37	5,29	3,36
	5	10,21	3,77	6,94	3,76	5,31	3,75	4,33	3,74	3,67	3,74
	6	8,68	4,12	5,94	4,11	4,57	4,10	3,74	4,09	3,20	4,08
	7	6,97	4,38	4,83	4,37	3,77	4,36	3,12	4,34	2,70	4,33
	8	6,22	4,63	4,35	4,62	3,41	4,60	2,85	4,59	2,47	4,57
f_{exp}	4	15,64	3,39	10,47	3,38	7,88	3,38	6,33	3,37	5,29	3,36
	5	3,93	3,82	2,90	3,80	2,38	3,77	2,07	3,76	1,86	3,74
	6	3,90	4,19	2,87	4,17	2,35	4,15	2,04	4,13	1,83	4,11
	7	1,79	4,46	1,52	4,41	1,38	4,37	1,29	4,33	1,23	4,30
	8	1,82	4,77	1,53	4,73	1,38	4,69	1,30	4,65	1,24	4,62

на внешние нагрузки, что может привести к повышению устойчивости и долговечности конструкции, снижая риск разрушения. Наконец, равные или почти равные собственные частоты также могут привести к улучшению динамических характеристик, например, снижению уровня колебаний и шума. Это особенно важно в таких приложениях, как аэрокосмическая промышленность, транспорт и промыш-

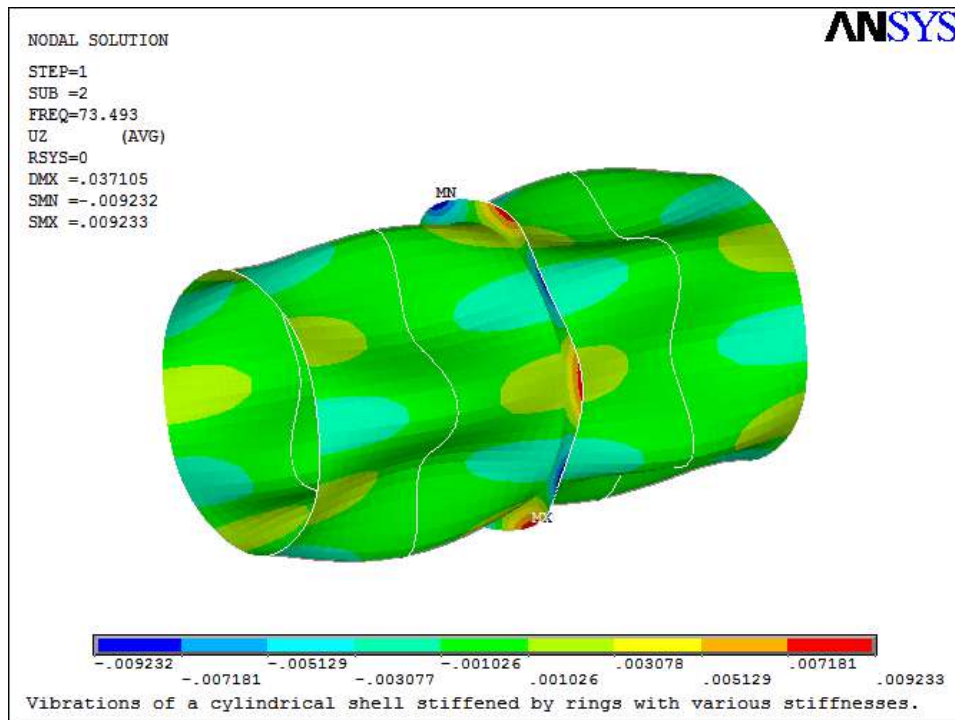


Рисунок 1.12 — Форма колебаний цилиндрической оболочки, подкреплённой тремя неодинаковыми шпангоутами.

Таблица 1.5 — Аналитические и численные значения частот колебаний ω подкреплённых оболочек.

	$n_s = 3$		$n_s = 4$		$n_s = 5$		$n_s = 6$	
	ω_{asympt}	ω_{fea}	ω_{asympt}	ω_{fea}	ω_{asympt}	ω_{fea}	ω_{asympt}	ω_{fea}
f_{lin}	67,01	73,49	72,72	78,07	76,59	82,02	80,16	86,71
f_{parab}	67,01	73,49	72,72	78,07	76,54	84,16	79,94	87,06
f_{exp}	67,01	73,49	72,72	78,07	77,2	82,58	80,72	87,97

ленное оборудование, где конструкции должны работать надежно и бесшумно в условиях высоких нагрузок.

Полученные параметры функций распределения могут быть использованы для первичного проектирования. Уточнение параметров может быть проведено методом конечных элементов.

2 Собственные колебания цилиндрической оболочки, сопряженной с пластиной на краю

В этой главе исследуются низшие собственные частоты и формы колебаний конструкции, состоящей из замкнутой круговой цилиндрической оболочки с присоединенной к ней концевой крышкой. С помощью численных и асимптотических методов исследуются крышки, имеющие форму круглой пластины и пологого сферического сегмента. Выделены три типа собственных колебаний конструкции. Собственные частоты и формы колебаний первого типа близки к частотам и формам колебаний пологой сферической оболочки, второго типа — к частотам и формам цилиндрической оболочки, а третьего типа — к частотам и формам колебаний консольной балки с грузом на конце. Асимптотическими методами найдены приближенные значения для частот всех типов.

Решаются две оптимизационные задачи. В первой оценивается оптимальное соотношение толщин пластины и оболочки, обеспечивающее максимальное значение фундаментальной частоты конструкции при заданной массе. Во второй оптимизационной задаче найдены значения относительной толщины элементов конструкции и кривизны концевой крышки, при которых фундаментальная собственная частота конструкции максимальна.

2.1 Численные результаты

В главе асимптотическим и численным методами определяются частоты и формы колебаний конструкции, состоящей из тонкой круговой цилиндрической оболочки радиуса R , длины L и толщины H_s с жестко присоединенной концевой крышкой в форме сферического сегмента толщины H_p и радиуса кривизны R_p . Второй край оболочки жестко заделан. Оболочка и крышка изготовлены из изотропного ма-

териала с модулем Юнга E , коэффициентом Пуассона ν и плотностью ρ . При $R_p = \infty$ оболочка вырождается в пластину, при $R_p = R$ — в оболочку полусферической формы.

Начнем решение задачи с численного исследования, которое будет служить ориентиром для асимптотического анализа. Численный анализ конструкции, был выполнен в пакете конечных элементов *Comsol v5.6* для следующих параметров: $R = 1$ м, $L = 4$ м, $H = 0,01$ м — толщина оболочек, $R_p = 10$ м, $E = 110$ ГПа, $\nu = 0,35$, $\rho = 8960$ кг/м³. Рассматривалась сходимость метода на различных сетках. Лучшую сходимость обеспечивает разбиение на прямоугольные элементы (mapped mesh) с характерными размерами элемента в промежутке $[0,008, 0,08]$. Дальнейшее уменьшение размера элемента слабо влияет на результаты: относительное изменение частот спектра не превышает 1%.

Значения параметра частот собственных колебаний

$$\Omega = \sqrt{\omega} \left(\frac{12\rho\sigma R^4}{EH^2} \right)^{1/4},$$

где $\sigma = 1 - \nu^2$ и f , $\omega = 2\pi f$ — соответственно частота и циклическая частота колебаний, показаны на рисунке 2.1 для крышек в форме круглой пластины ($1/R_p = 0$) и в форме сферического сегмента ($R_p = 10$ м).

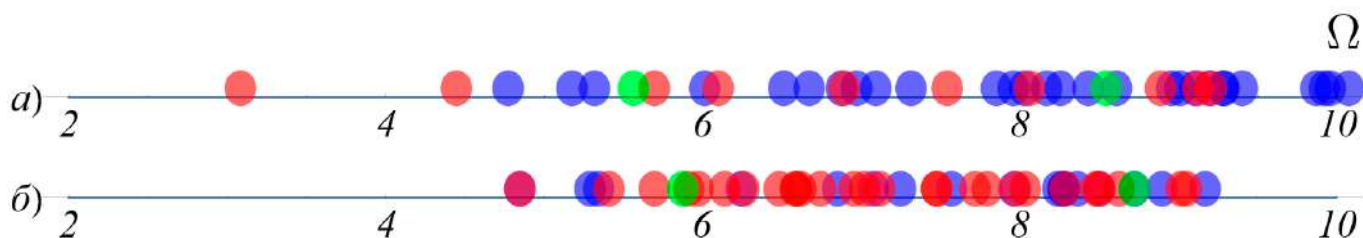


Рисунок 2.1 — Низшие собственные частоты конструкции крышкой в форме а). пластины, б). сферического сегмента.

«Оболочечные» частоты отмечены синим, частоты крышки — красным, и «балочные» частоты — зеленым.

Соответствующие формы колебаний для конструкции с крышкой в форме сферического сегмента показаны на рисунке 2.2

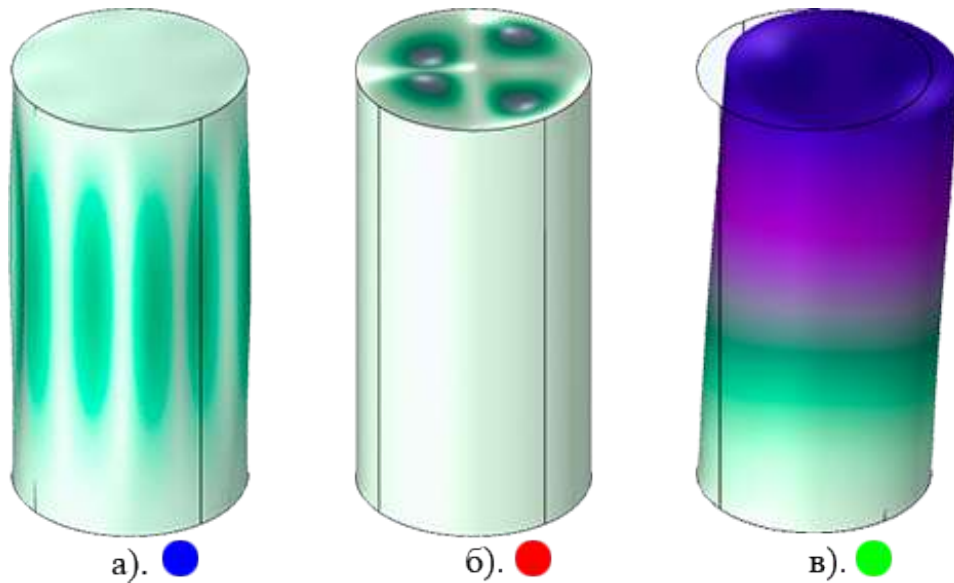


Рисунок 2.2 — Типы форм собственных колебаний:

а) «оболочечные», б) «крышечные», в) «балочные».

2.2 Постановка задачи

Рассмотрим малые свободные низкочастотные колебания тонкой круговой цилиндрической оболочки, сопряженной по краю с пологой сферической оболочкой. Далее используются безразмерные параметры, связанные с размерными следующим образом: $l = L/R$, $r_p = R_p/R$, $h_s = H_s/R$, $h_p = H_p/R$, где H_s и H_p размерные толщины цилиндрической и сферической оболочек соответственно.

На рисунке 2.3 изображено сечение данной конструкции плоскостью, проходящей через ее ось симметрии. За единицу длины выбран радиус R цилиндрической оболочки.

После разделения переменных безразмерные дифференциальные уравнения, описывающие свободные колебания цилиндрической оболочки, принимают

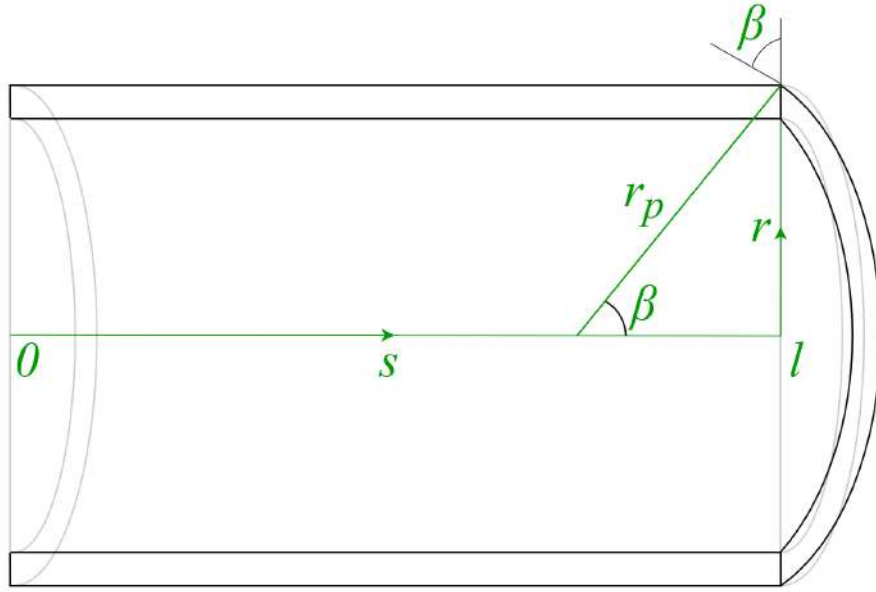


Рисунок 2.3 — Сечение конструкции плоскостью.

вид [30]

$$\begin{aligned}
 T_1' + mS + \lambda u &= 0, & S' - mT_2 + Q_2 + 2H' + \lambda v &= 0, \\
 Q_1' + mQ_2 - T_2 + \lambda w &= 0, & Q_1 &= M_1' + mH, & Q_2 &= -mM_2 + H', \\
 T_1 = u' + \nu(w + mv), & & T_2 &= w + mv + \nu u', & 2S &= (1 - \nu)(v' - mu), \\
 M_1 = \mu^4(\vartheta_1' + \nu m\vartheta_2), & & M_2 &= \mu^4(m\vartheta_2 + \nu\vartheta_1'), & H &= \mu^4(1 - \nu)\vartheta_2', \\
 \vartheta_1 &= -w', & \vartheta_2 &= mw + v,
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где (\prime) обозначает производную по безразмерной продольной координате $s \in [0, l]$, m — число волн по параллели, u , v и w — компоненты перемещения, T_1 , T_2 , S , Q_1 , Q_2 — усилия, M_1 , M_2 , H — моменты, ϑ_1 и ϑ_2 — углы поворота, ν — коэффициент Пуассона, $\sigma = 1 - \nu^2$, E — модуль Юнга, ρ — плотность, f — частота колебаний, $\omega = 2\pi f$ — угловая частота, $\lambda = \omega^2 \sigma \rho R^2 E^{-1}$ — частотный параметр, $\mu^4 = h_s^2/12$ — малый параметр.

Уравнения колебаний пологой сферической оболочки [14] в безразмерных переменных имеют вид

$$\begin{aligned}
(rT_{1p})' - T_{2p} + \frac{m}{r}S_p &= 0, & (rS_p)' + S_p - mT_{2p} &= 0, \\
(rQ_{1p})' + mQ_{2p} - \frac{r}{r_p}(T_{1p} + T_{2p}) + \lambda rw_p &= 0, \\
rQ_{1p} = (rM_{1p})' - M_{2p} + mH_p, & rQ_{2p} = -mM_{2p} + (rH_p)' + H_p, \\
T_{1p} = \varepsilon_{1p} + \nu\varepsilon_{2p}, & T_{2p} = \varepsilon_{2p} + \nu\varepsilon_{1p}, & 2S_p &= (1 - \nu)\varepsilon_{12p}, \\
\varepsilon_{1p} = u_p' + \frac{w_p}{r_p}, & \varepsilon_{2p} = \frac{u_p}{r} + m\frac{v_p}{r} + \frac{w_p}{r_p}, & \varepsilon_{12p} &= v_p' - \frac{v_p}{r} - \frac{m}{r}u_p, \\
M_{1p} = \mu^4 \left(\vartheta_{1p}' + \nu\frac{m}{r}\vartheta_{2p} + \frac{\nu}{r}\vartheta_{1p} \right), & M_{2p} = \mu^4 \left(\frac{m}{r}\vartheta_{2p} + \frac{1}{r}\vartheta_{1p} + \nu\vartheta_{1p}' \right), \\
H_p = \mu^4(1 - \nu)\vartheta_{2p}', & \vartheta_{1p} = -w_p', & \vartheta_{2p} &= \frac{m}{r}w_p.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь (\prime) обозначает производную по безразмерной радиальной координате $r \in [0, 1]$, u_p , v_p и w_p — компоненты перемещения, T_{1p} , T_{2p} , S , Q_{1p} , Q_{2p} — усилия, M_{1p} , M_{2p} , H_p — моменты, ϑ_{1p} и ϑ_{2p} — углы поворота, $\mu_p^4 = h_p^2/12$ — малый параметр. Если безмоментные усилия выразить через безразмерную функцию Φ по формулам

$$T_{1p} = r_p\mu^4 \left(\frac{\Phi'}{r} - \frac{m^2}{r^2}\Phi \right), \quad T_{2p} = r_p\mu^4\Phi'', \quad S_p = -\frac{r_p\mu^4}{r} \left(m\Phi' - \frac{\Phi}{r} \right),$$

то систему уравнений (2.2) можно записать в следующем компактном виде [14, 24]:

$$\Delta^2 w_p + \Delta\Phi - \Omega_p^4 w = 0, \quad \Delta^2\Phi = k^2\Delta w_p, \tag{2.3}$$

где

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2}, \quad \Omega_p^4 = \frac{\lambda}{\mu_p^4}, \quad k^2 = \frac{\sigma}{\mu_p^4 r_p^2}.$$

Предположим, что оболочка и пластина изготовлены из одного материала.

В этом случае на параллели сопряжения $s = l$, $r = 1$ должны быть выполнены

следующие 8 условий непрерывности [30]:

$$\begin{aligned} u_p &= -u \sin \beta + w \cos \beta, & w_p &= -w \sin \beta - u \cos \beta, \\ h_p T_{1p} &= h_s (T_1 \sin \beta - Q_1 \cos \beta), & h_p Q_{1p} &= h_s (Q_1 \sin \beta + T_1 \cos \beta), \\ v_p &= v, & \vartheta_{1p} &= \vartheta_1, & h_p S_p &= h_s S, & h_p M_{1p} &= -h_s M_1, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\sin \beta = 1/r_p$ (см. рис. 2.3).

Для пологой сферической оболочки $r_p \gg 1$. Следовательно, $\sin \beta \ll 1$, $\beta \ll 1$ и условия сопряжения (2.4) можно заменить приближенными условиями

$$\begin{aligned} u_p &= w, & w_p &= -u, & h_p T_{1p} &= -h_s Q_1, & h_p Q_{1p} &= h_s T_1, \\ v_p &= v, & \vartheta_{1p} &= \vartheta_1, & h_p S_p &= h_s S, & h_p M_{1p} &= -h_s M_1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

На краю оболочки $s = 0$ должны быть заданы четыре однородных граничных условия. В качестве примера рассмотрим условия жесткой заделки:

$$u = w = v = \vartheta_1 = 0 \quad \text{при} \quad s = 0. \quad (2.6)$$

Если при $\lambda = \lambda_k$ уравнения (2.1), (2.2) имеют нетривиальное решение, удовлетворяющее граничным условиям (2.5), (2.6), то λ_k является собственным значением соответствующей краевой задачи. Наименьшее положительное собственное значение λ_1 соответствует первой частоте колебаний.

2.3 Частоты колебаний первого типа (крышечные)

Для приближенного вычисления частот колебаний первого типа, близких к частотам колебаний пологой сферической оболочки, воспользуемся аналогией из книги [14] между упруго подкрепленной пластиной и пологой оболочкой. Заменяем пологую сферическую оболочку круглой пластиной, лежащей на упругом основании с безразмерной жесткостью

$$k^2 = \frac{\sigma}{\mu_p^4 r_p^2}.$$

При этом исходная задача о колебаниях цилиндрической оболочки, сопряженной с пологой сферической оболочкой, сводится к задаче о колебаниях цилиндрической оболочки, сопряженной круглой пластиной на винклеровском основании. С помощью асимптотического подхода, который использовался в задаче о колебаниях цилиндрической оболочки, соединенной с кольцевой пластиной [57, 90], получаем, что в первом приближении частоты колебаний первого типа могут быть найдены путем решения задачи о колебаниях круглой пластины с жестко заделанным краем.

Уравнение, описывающее поперечные колебания круглой пластины, лежащей на винклеровском основании с жесткостью k^2 , имеет вид

$$\Delta^2 w_p - \varkappa^4 w_p = 0, \quad \varkappa^4 = \Omega_p^4 - k^2. \quad (2.7)$$

Подстановка точного решения этого уравнения

$$w_p = C_1 J_m(\varkappa s_p) + C_2 I_m(\varkappa s_p),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, J_m — функция Бесселя, I_m — модифицированная функция Бесселя, в граничные условия жесткой заделки

$$w_p(1) = w_p'(1) = 0$$

дает систему линейных алгебраических уравнений для определения C_1 и C_2 . Равенство нулю определителя этой системы

$$J_m(\varkappa)I_{m-1}(\varkappa) - J_{m-1}(\varkappa)I_m(\varkappa) = 0, \quad (2.8)$$

служит уравнением для определения параметров $\varkappa(m, n)$, где n номер положительного корня уравнения (2.8). Корни нумеруются в порядке возрастания. Из второй формулы (2.7) следует, что приближенное значение параметра частоты Ω_p можно найти по формуле Зеделя [28].

$$\Omega_p^4 = \varkappa^4 + k^2. \quad (2.9)$$

При $k = 0$ получаем частоты колебаний $\Omega_p = \varkappa$, соответствующие частотам колебаний первого типа для цилиндрической оболочки, сопряженной с круглой пластиной. Эти частоты оказываются меньше, чем частоты колебаний оболочки, сопряженной с пологим сферическим сегментом. С увеличением радиуса кривизны сферического сегмента r_p параметр k убывает и разница между частотами уменьшается.

Рассмотрим конструкцию со следующими значениями параметров: $h_p = h_s = h = 0,01$, $r_p = 20$, $\nu = 0,35$. В третьем и четвертом столбцах таблицы 2.1 для разных значений m и n приведены значения параметра \varkappa и приближенные значения параметра частоты Ω_p , полученные по формуле (2.9). В пятом столбце содержатся значения Ω_p , найденные с помощью МКЭ, а в шестом — погрешность приближенного значения частоты

Таблица 2.1 — Параметры частоты $\Omega_p(m,n)$

m	n	\varkappa	Формула (2.9)	МКЭ (<i>Comsol</i>)	Погрешность, %
0	1	3,20	4,38	3,94	11
1	1	4,61	5,17	4,97	4
2	1	5,91	6,20	6,03	3
0	2	6,31	6,55	6,36	3
3	1	7,14	7,32	7,11	3
1	2	7,80	7,93	7,71	3

Для рассматриваемого примера погрешность вычисления низших частот по формуле Зеделя невелика, за исключением низшей частоты, которой соответствует осесимметричная форма колебаний. Рассмотрим осесимметричные колеба-

ния цилиндрической оболочки с крышкой в виде пологой сферической оболочки с целью получить более точные приближенные формулы для низших частот первого типа.

Уравнения осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки следуют из уравнений (2.1), если положить в них $m = 0$:

$$\begin{aligned} T_1' + \lambda u = 0, \quad Q_1' - T_2 + \lambda w = 0, \quad Q_1 = M_1' \\ T_1 = u' + \nu w, \quad T_2 = w + \nu u', \quad M_1 = \mu^4 \vartheta_1', \quad \vartheta_1 = -w'. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из уравнений (2.2) при $m = 0$ получаем уравнения осесимметричных колебаний пологой сферической оболочки

$$\begin{aligned} (rT_{1p})' - T_{2p} = 0, \quad T_{1p} = \varepsilon_{1p} + \nu\varepsilon_{2p}, \quad T_{2p} = \varepsilon_{2p} + \nu\varepsilon_{1p}, \\ \varepsilon_{1p} = u_p' + \frac{w_p}{r_p}, \quad \varepsilon_{2p} = \frac{u_p}{r} + \frac{w_p}{r_p}, \\ (rQ_{1p})' - \frac{r}{r_p}(T_{1p} + T_{2p}) + \lambda r w_p = 0, \quad rQ_{1p} = (rM_{1p})' - M_{2p}, \\ M_{1p} = \mu_p^4 \vartheta_{1p}', \quad M_{2p} = \mu^4 \left(\frac{1}{r} \vartheta_{1p} + \nu \vartheta_{1p}' \right), \quad \vartheta_{1p} = -w_p' \end{aligned} \quad (2.11)$$

Введем функцию Φ такую, что

$$T_{1p} = \frac{r_p \mu^4 \Phi'}{r}, \quad T_{2p} = r_p \mu^4 \Phi''.$$

Тогда систему уравнений (2.11) можно записать в виде

$$\Delta^2 w_p + \Delta \Phi - \Omega_p^4 w = 0, \quad \Delta^2 \Phi = k^2 \Delta w_p, \quad (2.12)$$

где

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}, \quad \Omega_p^4 = \frac{\lambda}{\mu_p^4}, \quad k^2 = \frac{\sigma}{\mu_p^4 r_p^2}.$$

При $k = 0$ уравнения (2.12) превращаются в уравнения осесимметричных колебаний круглой пластины.

Исключение из уравнений (2.12) неизвестной функции Φ приводит к уравнению для определения w_p :

$$\Delta(\Delta^2 w_p - \varkappa^4 w_p) = 0, \quad \varkappa^4 = \Omega_p^4 - k^2.$$

Для осесимметричной краевой задачи при $s = l$, $r = 1$ из восьми приближенных условий сопряжения (2.5) остаются шесть:

$$\begin{aligned} u_p = w, \quad w_p = -u, \quad h_p T_{1p} = -h_s Q_1, \\ h_p Q_{1p} = h_s T_1, \quad \vartheta_{1p} = \vartheta_1, \quad h_p M_{1p} = -h_s M_1, \end{aligned} \quad (2.13)$$

а условия жесткой заделки приобретают вид

$$u = w = \vartheta_1 = 0 \quad \text{при} \quad s = 0. \quad (2.14)$$

Предположим, что $\mu_p \sim \mu \ll 1$, $\lambda \sim \mu^4$, и будем искать решение системы уравнений (2.11) в виде суммы безмоментного решения y_0 и функций краевого эффекта y_1, y_2 :

$$y = \mu^{I_0(y)} y_0 + \mu^{I_1(y)+2} y_1 + \mu^{I_1(y)} y_2, \quad (2.15)$$

Здесь буква y заменяет любую из неизвестных функций, входящую в систему (2.11), $I_1(y)$ и $I_2(y)$ — показатели интенсивности, приведенные в таблице 2.2. При их выборе принимались во внимание результаты [11].

Таблица 2.2 — Показатели интенсивности

Показатели	Функции					
	u	w	ϑ	T_1	M_1	Q_1
I_0	2	4	6	4	∞	∞
I_1	3	2	1	4	4	3

Функции y_0 являются решениями безмоментных уравнений, которые получаются из уравнений (2.10) при $\mu = 0$:

$$T_1' + \lambda u = 0, \quad T_2 = \lambda w, \quad T_1 = u' + \nu w, \quad T_2 = w + \nu u'. \quad (2.16)$$

Функции краевого эффекта y_1 и y_2 имеют вид

$$y_1 = \sum_{j=1}^2 D_j \hat{y}_j \exp\left(\frac{r_j s}{\mu}\right), \quad y_2 = \sum_{j=3}^4 D_j \hat{y}_j \exp\left(\frac{r_j (s-l)}{\mu}\right), \quad (2.17)$$

где $D_j \sim 1$ — произвольные постоянные,

$$r_{1,2} = \frac{\sigma^{1/4}(-1 \pm i)}{\sqrt{2}}, \quad r_{3,4} = \frac{\sigma^{1/4}(1 \pm i)}{\sqrt{2}}.$$

В частности, $\hat{w}_j = 1$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Функция y_1 быстро убывает при увеличении s от 0 до l , а функция y_2 — при уменьшении s от l до 0. Полагая $l \gg \mu$, получим $y_1(l) \ll 1$, а $y_2(0) \ll 1$.

В уравнения (2.10) и (2.11) входят два малых параметра μ , μ_p и один большой параметр r_p . Асимптотические разложения решений краевой задачи зависят от соотношения порядков этих параметров. При получении асимптотики решений системы (2.10) было сделано предположение $\mu \sim \mu_p$, которое означает, что толщины оболочек не слишком сильно отличаются друг о друга. Предположим дополнительно, что

$$\frac{1}{r_p} \sim \mu^2,$$

и рассмотрим случай, когда переменные, входящие в систему (2.11), имеют следующие порядки

$$w_p \sim \vartheta_{1p} \sim 1, \quad u_p \sim T_{1p} \sim \mu^2, \quad M_{1p} \sim Q_{1p} \sim \mu^4.$$

Подставив решения (2.15) в условия (2.13) и (2.14), получим граничные условия первого приближения

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, & w_1 &= -w_0, & \vartheta_{11} &= 0, & s &= 0, \\ w_2 &= -u_p, & w_p &= 0, & T_{1p} &= 0, & h_p Q_{1p} &= h_s T_1, \\ \vartheta_{1p} &= 0, & h_p M_{1p} &= -h_s M_{12}, & s &= l, & r &= 1. \end{aligned}$$

В первом приближении краевая задача для уравнений (2.10) и (2.11) или (2.12) с граничными условиями (2.13) и (2.14) сводится к решению четырех независимых задач:

1. Краевая задача на собственные значения для уравнений (2.11) или (2.12) с граничными условиями

$$w_p(1) = 0, \quad w'_p(1) = 0, \quad T_{1p}(1) = 0, \quad \text{или} \quad \Phi' = 0.$$

2. Система линейных алгебраических уравнений

$$w_2(l) = -u_p(1), \quad h_s M_{12}(l) = -h_p M_{1p}(1)$$

для определения постоянных D_3 и D_4 .

3. Система линейных алгебраических уравнений

$$w_1(0) = -w_0, \quad \vartheta_{11} = 0$$

для определения постоянных D_1 и D_2 .

4. Неоднородная краевая задача для безмоментной системы (2.16) с граничными условиями

$$u_0(0) = 0, \quad h_s T_{10} = h_p Q_{1p}(1) - h_s T_{11}(0).$$

Рассмотрим только задачу 1, так как ее решение позволяет найти приближенное значение параметра λ и основную часть формы колебаний. Перемещения

цилиндрической оболочки $u \sim w \sim \mu^2$ малы по сравнению с нормальным перемещением сферической оболочки $w_p \sim 1$, что подтверждают и расчеты МКЭ (см. рис. 2.2).

Решение системы уравнений (2.12) с граничными условиями

$$w_p = 0, \quad w'_p = 0, \quad \Phi' = 0 \quad r = 1 \quad (2.18)$$

приведено в справочнике [24]. После подстановки ее общего решения

$$w_p = C_1 + C_2 J_0(\varkappa r) + C_3 I_0(\varkappa r), \quad \Phi = C_1 \frac{r^2}{4} \Omega^4 - \frac{k^2}{\varkappa^2} (C_2 J_0(\varkappa r)) - C_3 I_0(\varkappa r)$$

в граничные условия (2.18) и приравнивания нулю определителя системы линейных однородных уравнений для произвольных постоянных C_1 , C_2 и C_3 получаем следующее уравнение для определения приближенного значения параметра \varkappa

$$(\varkappa^4 + k^2)[J_0(\varkappa)I_1(\varkappa) + I_0(\varkappa)J_1(\varkappa)] - \frac{k^2}{\varkappa} I_1(\varkappa)J_1(\varkappa) = 0. \quad (2.19)$$

Корень \varkappa уравнения (2.19) связан с параметром частоты Ω_p формулой (2.9).

В таблице 2.3 приведено сравнение значений параметров двух первых частот осесимметричных колебаний $\Omega_p(0, 1) = 4,03$ и $\Omega_p(0, 2) = 6,52$, найденных с помощью уравнения (2.19), с приведенными в таблице 2.1 результатами МКЭ и приближением, полученным при использовании уравнения (2.9) для разных значений радиуса кривизны крышки.

При $r_p = 20$ для $\Omega_p(0, 1)$ использование уравнения (2.19) вместо уравнения (2.9) уменьшает погрешность с 11 до 2 процентов. Для $\Omega_p(0, 2)$ замена уравнения (2.9) уравнением (2.19) приводит к незначительному уменьшению погрешности, составляющей 3%. При $r_p = 10$ для $\Omega_p(0, 1)$ погрешность обоих уравнений возрастает до 13% и 16%, а для $\Omega_p(0, 2)$ погрешность уравнений не увеличивается, составляя 2% и 3% соответственно.

Таблица 2.3 — Частотный параметр для двух низших частот осесимметричных колебаний сферической крышки с разными радиусами кривизны, найденный аналитически и численно

r_p	(2.19)		(2.9)		<i>Comsol</i>	
	$\Omega_p(0, 1)$	$\Omega_p(0, 2)$	$\Omega_p(0, 1)$	$\Omega_p(0, 2)$	$\Omega_p(0, 1)$	$\Omega_p(0, 2)$
∞	3,196	6,306	3,196	6,306	3,196	6,303
20	4,028	6,517	4,379	6,554	3,939	6,364
10	5,696	7,076	5,833	7,164	5,003	6,971

2.4 Частоты колебаний первого типа для круглой пластины

Особый интерес представляет исследование случая $1/r_p = 0$, когда сегмент сферической оболочки вырождается в круглую пластину (рисунок 2.4). После разделения переменных безразмерные дифференциальные уравнения, описывающие свободные колебания цилиндрической оболочки [62], записываются в виде (2.1).

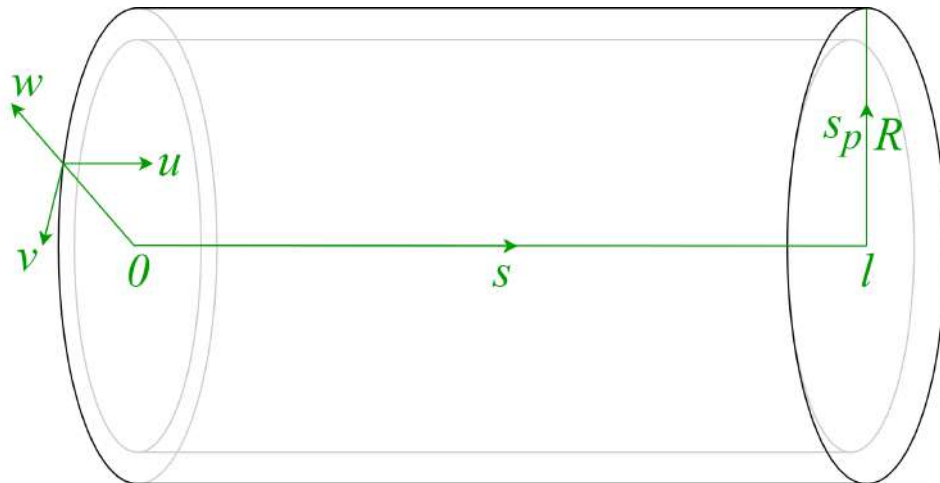


Рисунок 2.4 — Оболочка, сопряженная с круглой пластиной.

Безразмерные дифференциальные уравнения, описывающие свободные колебания круглой пластины могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
& (s_p Q_{1p})' + m Q_{2p} + \lambda s_p w_p = 0, \\
& s_p Q_{1p} = (s_p M_{1p})' - M_{2p} + 2m H_p, \quad s_p Q_{2p} = -m M_{2p} + 2H_p, \\
& s_p M_{1p} = \mu_p^4 [s_p \vartheta_{1p}' + \nu (m \vartheta_{2p} + \vartheta_{1p})], \quad s_p M_{2p} = \mu_p^4 (m \vartheta_{2p} + \vartheta_{1p} + \nu s_p \vartheta_{1p}'), \\
& H_p = \mu_p^4 (1 - \nu) \vartheta_{2p}', \quad \vartheta_{1p} = -w_p', \quad s_p \vartheta_{2p} = m w_p.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Здесь (\prime) — производная по радиальной координате, $s_p \in [0,1]$, w_p — поперечный прогиб, Q_{1p} , Q_{2p} , M_{1p} , M_{2p} , H_p — безразмерные результирующие напряжения и пары напряжений, ϑ_{1p} и ϑ_{2p} — углы поворота нормали, h_p — безразмерная толщина пластины, $\mu_p^4 = h_p^2/12$ — малый параметр.

Из следующих уравнений [62] можно найти тангенциальную (в плоскости) деформацию пластины

$$\begin{aligned}
& (s_p T_{1p})' - T_{2p} + m S_p + \lambda s_p u_p = 0, \quad s_p S_p' + 2S_p - m T_{2p} + \lambda v_p = 0, \\
& s_p T_{1p} = s_p u_p' + \nu (m v_p + u_p), \quad s_p T_{2p} = u_p + m v_p + \nu s_p u_p', \\
& 2s_p S_p = (1 - \nu) (s_p v_p' - m u_p - v_p),
\end{aligned} \tag{2.21}$$

здесь u_p и v_p — тангенциальные компоненты смещения, T_{1p} , T_{2p} , S_p — безразмерные результирующие напряжения.

Если оболочка и пластина выполнены из одного и того же материала, то должны выполняться следующие 8 условий сопряжения по окружности $s = l$, $s_p = 1$

$$\begin{aligned}
& w = u_p, \quad u = -w_p, \quad v = v_p, \quad \vartheta_1 = \vartheta_{1p}, \\
& h_s Q_1 = -h_p T_{1p}, \quad h_s T_1 = h_p Q_{1p}, \quad h_s S = -h_p S_p, \quad h_s M_1 = -h_p M_{1p}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

На краю оболочки $s = 0$ необходимо ввести четыре однородных граничных условия. В качестве примера рассмотрим оболочку с заземленным краем, т.е.

$$u = w = v = \vartheta_1 = 0 \quad \text{при} \quad s = 0. \tag{2.23}$$

Как и в случае с полой оболочкой предположим, что $\mu_p \sim \mu$, $\lambda \sim \mu^4$ и будем искать приближенное решение системы (2.1) в виде суммы безмоментного состояния и функций краевого эффекта:

$$y = \mu^{I_0(y)} y_0 + \mu^{I_1(y)+1} y_1 + \mu^{I_1(y)} y_2, \quad (2.24)$$

Здесь y также обозначает любую неизвестную функцию, $I(y)$ и $I_1(y)$ – индексы интенсивности. Соответствующий выбор индексов интенсивности позволяет удовлетворить граничным условиям в первом и последующих приближениях и обеспечивает существование нетривиальных решений соответствующих задач на собственные значения. Обычно оценка показателей интенсивности основывается на одном из методов перебора и/или на интуитивных соображениях.

Функции u_0 , v_0 , T_{10} и S_0 удовлетворяют безмоментным уравнениям, полученным из уравнений (2.1) в предположении $\mu = 0$ и без учета малых членов λu , λv и λw :

$$T'_{10} + mS_0 = 0, \quad S'_0 = 0, \quad 2S_0 = (1 - \nu)(v'_0 - tu_0), \quad T_{10} = \sigma u'_0. \quad (2.25)$$

Функции краевого эффекта y_1 и y_2 имеют вид (2.17) с показателями интенсивности, приведенными в таблице 2.4.

Таблица 2.4 – Показатели интенсивности для формы колебаний первого (пластичного) типа

Показатели	Функции							
	u	v	w	ϑ	T_1	S	M_1	Q_1
I_0	3	3	3	3	3	3	7	7
I_1	3	4	2	1	4	3	4	3

Мы предполагаем, что

$$w_p \sim \vartheta_{1p} \sim 1, \quad M_{1p} \sim Q_{1p} \sim \mu^4, \quad u_p \sim v_p \sim T_{1p} \sim S_p \sim \mu^3. \quad (2.26)$$

Подставляя решения (2.24) и (2.17) в уравнения (2.1, 2.20, 2.21), условия непрерывности (2.22) и граничные условия (2.23) задача на собственные значения (2.1, 2.20–2.23) в первом приближении может быть разбита на пять отдельных задач:

1) Задача на собственные значения для уравнений (2.20), описывающих деформацию поперечного изгиба пластины с граничными условиями

$$w_p = \vartheta_{1p} = 0, \quad s_p = 1. \quad (2.27)$$

2) Линейные алгебраические уравнения

$$w_2(l) = 0, \quad h_s M_{12}(l) = -h_p M_{1p}(1) \quad (2.28)$$

для неизвестных констант D_3, D_4 . Решая эти уравнения, получаем функции краевого эффекта на параллели $s = l$.

3) Неоднородная краевая задача для безмоментных уравнений оболочек (2.25) с граничными условиями

$$u_0(0) = v_0(0), \quad T_{10}(l) = 0, \quad h_s [S_0(l) + S_2(l)] = -h_p S_p(1). \quad (2.29)$$

4) Линейные алгебраические уравнения

$$w_1(0) = -w_0(0), \quad \vartheta_{11}(0) = 0. \quad (2.30)$$

для неизвестных констант D_1 и D_2 .

5) Неоднородная краевая задача для уравнений пластины (2.21) с граничными условиями

$$v_p(1) = v_0(l), \quad h_p T_{1p}(1) = -h_s Q_{12}(l).$$

Таким образом, приближенное решение задачи на собственные значения (2.1, 2.20–2.23) сводится к последовательному решению пяти простых задач.

Сначала необходимо решить задачу на собственные значения 1) для деформации изгиба пластины. Затем решение уравнений (2.28) используется для

нахождения функций краевого эффекта на параллели $s = s_k$. Далее можно получить решение безмоментной задачи 3), используя граничные условия (2.29), и найти интегралы краевого эффекта на параллелях $s = 0$ и $s = l$ с помощью уравнений (2.30). Наконец, может быть решена краевая задача 5), описывающая тангенциальные перемещения пластины.

Мы рассматриваем только задачу 1), так как при ее решении находится частотный параметр λ и главный член формы колебаний. Перемещения цилиндрической оболочки и тангенциальные перемещения пластины очень малы по сравнению с прогибом пластины (см. соотношение (2.26) и таблицу 2.4).

Для получения улучшенного первого приближения решение задачи 1) можно уточнить, заменив граничное условие (2.27) более точным условием. Из соотношений

$$w_2(l) = 0, \quad \vartheta_{1p}(1) = \vartheta_{12}(l), \quad h_s M_{12}(l) = -h_p M_{1p}(1)$$

найдем

$$D_3 + D_4 = 0, \quad \vartheta_{1p}(1) = -\mu(r_3 D_3 + r_4 D_4), \quad h_p M_{1p}(1) = \mu^4 h(r_3^2 D_3 + r_4^2 D_4). \quad (2.31)$$

Из (2.31) следует, что

$$M_{1p}(1) = -\sqrt{2} g \mu^3 \frac{h_s}{h_p} \vartheta_{1p}(1).$$

Уточненное значение частотного параметра λ получается при использовании следующего условия

$$w_p(1) = 0, \quad M_{1p}(1) = -\sqrt{2} g \mu^3 \frac{h_s}{h_p} \vartheta_{1p}(1) \quad (2.32)$$

вместо граничного условия (2.27).

В результате уравнения (2.20), описывающие свободные поперечные колебания круглой пластины, сводятся к следующему уравнению

$$\Delta^2 w - \beta^4 w = 0, \quad \beta^4 = \frac{\lambda}{\mu_p^4}, \quad (2.33)$$

где

$$\Delta = \frac{1}{s_p} \frac{d}{ds_p} \left(s_p \frac{d}{ds_p} \right) - \frac{m^2}{s_p^2}.$$

Точное решение уравнения (2.33) имеет вид

$$w = C_1 J_m(\beta s_p) + C_2 I_m(\beta s_p), \quad (2.34)$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы, J_m — функция Бесселя, а I_m — модифицированная функция Бесселя. Подстановка решения (2.34) в граничные условия (2.32) приводит к системе линейных алгебраических уравнений для неизвестных C_1 и C_2 . Система имеет нетривиальные решения, если ее определитель обращается в ноль:

$$J_m(\beta) I_{m-1}(\beta) - J_{m-1}(\beta) I_m(\beta) - \frac{2\beta J_m(\beta) I_m(\beta)}{1 - \nu - k} = 0, \quad (2.35)$$

где

$$k = \frac{\sqrt{2}\sigma^{1/4}}{\mu\delta^3}, \quad \delta = \frac{h_p}{h_s}.$$

Для пластины, соединенной с оболочкой, корни $\beta(m, n)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$, $n = 1, 2, \dots$) уравнения (2.35) являются первым приближением безразмерной частоты колебаний пластины. При $m = 0$ колебания осесимметричны. Случай $k = 0$ соответствует колебаниям пластины с шарнирно опертым краем. Случай $1/k = 0$ соответствует колебаниям пластины с защемленным краем. При этом уравнение (2.35) превращается в

$$J_m(\beta) I_{m-1}(\beta) - J_{m-1}(\beta) I_m(\beta) = 0. \quad (2.36)$$

Рассмотрим конструкцию со следующими параметрами: $h_p = h_s = h = 0,01$, $\nu = 0,35$. Первые корни уравнений (2.36) и (2.35) и значения частотного параметра, полученные методом конечных элементов (МКЭ) для пластины, соединенной с цилиндрической оболочкой, приведены в таблице 2.5. Последний столбец

содержит значения β для пластины с шарнирно опертым краем. Для зависимости угловой частоты от частотного параметра справедлива формула

$$\omega^2 = \beta^4 \frac{h^2 E}{12\sigma\rho R^2} \quad (2.37)$$

Таблица 2.5 — Частотный параметр β низших частот «пластиночной» формы колебаний

m	n	(2.36)	(2.35)	МКЭ	$k = 0$
0	1	3,196	3,086	3,070	2,238
1	1	4,611	4,460	4,422	3,736
2	1	5,906	5,722	5,658	5,067
0	2	6,306	6,111	6,058	5,457
3	1	7,144	6,932	6,835	6,326
1	2	7,799	7,570	7,480	6,967
4	1	8,347	8,111	7,978	7,543
2	2	9,197	8,939	8,805	8,377
0	3	9,439	9,176	9,002	8,615

2.5 Частоты колебаний второго типа (оболочечные)

Для низкочастотных колебаний второго типа формы колебаний цилиндрической оболочки с крышкой сходны с формами колебаний неподкрепленной оболочки большим числом волн по параллели ($m \sim \mu^{-1/2}$). Следуя [11] решение системы (2.1) будем искать в виде суммы полубезмоментного решения и краевого эффекта

$$y = \mu^{I_0(y)} y_0 + \mu^{I_1(y)} (y_1 + y_2), \quad (2.38)$$

Значения показателей интенсивности I_0 и I_1 приведены в таблице 2.6.

Таблица 2.6 — Показатели интенсивности

Показатели	Функции							
	u	v	w	ϑ	T_1	S	M_1	Q_1
I_0	1	1/2	0	0	1	3/2	3	3
I_1	2	5/2	1	0	2	3/2	3	2

Функция v_0 удовлетворяет полубезмоментному уравнению

$$\frac{d^4 v_0}{ds^4} - \alpha_s^4 v_0 = 0, \quad (2.39)$$

где

$$\alpha_s^4 = \frac{\lambda m^4 - \mu^4 m^8}{\sigma},$$

$$w_0 = -v_0, \quad u_0 = \frac{dv_0}{ds}, \quad T_{10} = \frac{d^2 v_0}{ds^2}, \quad S_0 = -\sigma \frac{d^3 v_0}{ds^3}. \quad (2.40)$$

Функции краевого эффекта y_1 и y_2 имеют вид (2.17).

Предположим, что

$$h \sim h_p, \quad \frac{1}{r_p} \sim \mu^2, \quad v_p \sim \mu^5, \quad u_p \sim \mu^2, \quad M_{1p} \sim Q_{1p} \sim \mu^4.$$

Учитывая соотношения

$$v \sim \mu^{1/2}, \quad w \sim 1, \quad T_1 \sim \mu, \quad M_1 \sim \mu^3,$$

и отбрасывая второстепенные члены в первом, четвертом, пятом и восьмом условиях сопряжения (2.5), получаем приближенные граничные условия на краю $s = l$ для уравнений колебаний цилиндрической оболочки (2.1):

$$v = w = T_1 = M_1 = 0. \quad (2.41)$$

Эти условия соответствуют шарнирному опиранию края оболочки.

Таким образом, в первом приближении для цилиндрической оболочки с крышкой мы имеем краевую задачу на собственные значения для системы уравнений (2.1) с граничными условиями жесткой заделки (2.6) и шарнирного опирания (2.41). В монографии [11] показано, что граничные условия (2.6) и (2.41) для уравнения (2.39) вырождаются в условия

$$v_0(0) = \frac{dv_0}{ds}(0) = 0, \quad v_0(l) = \frac{d^2v_0}{ds^2}(l) = 0. \quad (2.42)$$

Краевая задача (2.39), (2.42) описывает колебания балки с заземленным краем $s = 0$ и шарнирно опертым краем $s = l$. Решение этой задачи хорошо известно (см. [3]). Собственные значения для задачи (2.39), (2.42) задаются формулой $\alpha_{sn} = \varkappa_n/l$, где \varkappa_n — корни уравнения

$$\operatorname{tg} \varkappa = \operatorname{th} \varkappa. \quad (2.43)$$

причем $\varkappa_1 = 3,927$, $\varkappa_2 = 7,069$

Параметр частоты

$$\lambda(m, n) = \frac{\sigma \varkappa_n^4}{m^4 l^4} + \mu^4 m^4 \quad (2.44)$$

принимает минимальное значение, соответствующее фундаментальной частоте, если $n = 1$ и m близко к m_0 где

$$m_0^4 = \frac{\sqrt{\sigma} \varkappa_1^2}{\mu^2 l^2}.$$

Рассмотрим цилиндрическую оболочку толщины $h = 0,01$, к которой присоединена плоская крышка той же толщины.

Значения параметра

$$\eta = \frac{(12\lambda)^{1/4}}{\sqrt{h}} \quad (2.45)$$

приведены в таблице 2.7 для $\nu = 0,35$ и трех значений длины оболочки.

Таблица 2.7 — Сравнение численных и асимптотических низших значений частотного параметра для собственных колебаний оболочечного типа.

$l = 4$				$l = 6$				$l = 8$			
n	m	Числ.	Асимпт.	n	m	Числ.	Асимпт.	n	m	Числ.	Асимпт.
1	4	4,770	5,026	1	3	3,933	4,228	1	3	3,315	3,537
1	5	5,173	5,287	1	4	4,106	4,267	1	4	3,926	4,090
1	3	5,315	5,991	1	5	4,940	5,061	1	2	3,962	4,466
1	6	6,010	6,086	1	2	5,044	5,914	2	4	4,561	4,744
2	5	6,508	6,901	2	4	5,353	5,690	1	5	4,888	5,019
2	6	6,669	6,760	2	5	5,434	5,551	2	3	4,978	5,436
1	2	6,872	8,848	1	6	5,917	6,017	2	5	5,095	5,194
2	4	7,089	8,082	2	6	6,124	6,173	3	5	5,599	5,722
1	7	6,968	7,030	2	3	6,249	7,061	3	4	5,676	6,058
2	7	7,311	7,293	3	5	6,408	6,719	1	6	5,898	6,005
1	8	7,956	8,012	3	6	6,610	6,668	2	6	5,985	6,057

2.6 Частоты колебаний третьего типа (балочные)

Среди низших собственных частот оболочки могут быть и частоты балочных колебаний, при которых конструкция совершает колебания подобно консольной балке с нагрузкой на конце (см. рисунок 2.2). Уравнение поперечных колебаний балки с одним заземленным концом и нагруженной концентрированной массой на другом, имеет вид

$$w^{(IV)}\left(\frac{s}{l}\right) - \alpha^4 w\left(\frac{s}{l}\right) = 0, \quad \alpha^4 = \frac{\rho S l^4 R^4}{EJ} \omega^2, \quad 0 \leq s \leq l, \quad (2.46)$$

а граничные условия таковы:

$$w(0) = w'(0) = 0, \quad w''(1) = 0, \quad \frac{EJw'''(1)}{l^3} = -m\omega^2 w(1).$$

Здесь J — момент инерции сечения оболочки вокруг ее диаметра, $m = \pi R^2 h_p \rho$ — масса крышки (пластины), $S = 2\pi Rh$ — площадь поперечного сечения оболочки.

Подставляя решение уравнения (2.46)

$$w\left(\frac{s}{l}\right) = C_1 \sin \frac{\alpha s}{l} + C_2 \cos \frac{\alpha s}{l} + C_3 \sinh \frac{\alpha s}{l} + C_4 \cosh \frac{\alpha s}{l}$$

в граничные условия и приравнявая определитель однородной линейной системы к нулю, получаем уравнение для нахождения величины α

$$\gamma \alpha (\cos(\alpha) \sinh(\alpha) - \cosh(\alpha) \sin(\alpha)) + \cosh(\alpha) \cos(\alpha) + 1 = 0, \quad (2.47)$$

где $\gamma = \frac{m}{M} = \frac{h_p}{2lh}$, M — масса оболочки.

В случае, когда крышка является круглой пластиной $\gamma = 1/(2l)$. Для таких конструкций результаты аналитического и конечноэлементного анализа при различных длинах оболочек приведены в таблице 2.8, где частотный параметр Ω связан с α соотношением

$$\Omega = \frac{3\sigma\alpha}{l} \sqrt[4]{1 + \frac{4}{h^2}}.$$

Таблица 2.8 — Зависимость частного параметра Ω от длины оболочки l для «балочных» колебаний оболочки

l	Аналитическое	МКЭ	Ошибка
4	6,411	5,561	15,3 %
8	3,357	3,203	4,8 %
12	2,277	2,223	2,3 %
16	1,723	1,701	1,8 %
20	1,387	1,375	0,8 %

Для оболочек небольшой относительной длины решение уравнения (2.47) дает сильно завышенные частоты, но точность аналитической формулы увеличивается с длиной оболочки. Следует отметить, что по мере увеличения длины

оболочки частоты балочных колебаний быстро уменьшаются и для оболочек при $l > 8$ фундаментальной частотой конструкции является первая частота «балочных» колебаний.

2.7 Однопараметрическая оптимизация спектра собственных частот

Полученные результаты для спектра могут быть использованы при решении оптимизационных задач. Наиболее распространенной задачей оптимизации спектра является максимизация значения наименьшей собственной частоты колебаний при изменении параметров системы, как геометрических, так и физических.

Для начала ограничимся рассмотрением влияния толщины пластины ($1/r_p = 0$) на собственные частоты при условии сохранения массы конструкции. Поскольку низшие собственные частоты конструкции принадлежат к серии «пластиночных» частот, для увеличения фундаментальной собственной частоты необходимо увеличить толщину пластины так, чтобы ее низшая частота совпадала с низшей частотой оболочки.

Для оболочки и пластины толщиной h и $h_p = \delta h$ соответственно, для угловой частоты ω справедлива формула аналогичная (2.37):

$$\omega^2 = \beta_\delta^4 \frac{h^2 E}{12\sigma\rho R^2}, \quad \beta_\delta^4 = (\beta\sqrt{\delta})^4. \quad (2.48)$$

Во второй строке таблицы 2.9 указан первый корень β уравнения (2.36), а в третьей строке — значение β_δ . Четвертая строка содержит значения β_δ , соответствующие основной частоте, найденной с помощью МКЭ. Разница между асимптотическими и численными результатами составляет менее 1,1%.

Таблица 2.9 — Зависимость частотного параметра фундаментальной частоты от толщины пластины.

δ	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
β	3,086	2,906	2,715	2,565	2,461	2,393	2,348
β_δ	3,086	3,560	3,840	4,055	4,263	4,477	4,697
МКЭ	3,069	3,537	3,815	4,028	4,231	4,439	4,648

Условие сохранения массы конструкции позволяет определить толщину оболочки h_s , которая уменьшается с увеличением толщины пластины. Действительно, из условия сохранения объема

$$2\pi hl + \pi h = 2\pi h_s l + \pi h \delta$$

толщина оболочки

$$h_s = \left(1 + \frac{1 - \delta}{2l}\right) h = \delta_s h.$$

При $\delta = 1$ толщины пластины и оболочки равны $h_s = h_p = h$.

На рисунке 2.5 а) показаны аналитические зависимости частотного параметра Ω от δ для низшей «пластиночной» частоты ($m = 0$), двух низших «оболочечных» частот ($m = 4$ и $m = 5$) и первой «балочной» частоты при $h = 0,01, l = 4$. Частотный параметр Ω связан с параметрами α , β и η следующим образом:

$$\Omega = \begin{cases} \beta_\delta & \text{для «пластиночных» частот (см. (2.48)),} \\ \sqrt[4]{\frac{12\lambda}{h_s^2}} & \text{для «оболочечных» частот (см. (2.45)),} \\ \frac{3\sigma\alpha}{l} \sqrt[4]{1 + \frac{4}{h_s^2}} & \text{для «балочных» частот (см. (2.46)).} \end{cases}$$

При $\delta = 1$ фундаментальной является низшая частота «пластиночной» серии колебаний. С увеличением δ уменьшается h_s и увеличивается масса пластины, следовательно, уменьшаются как первая «оболочечная», так и первая «балочная»

частоты. С увеличением длины оболочки l низшая «балочная» частота уменьшается и при $l > 8$ становится фундаментальной частотой конструкции.

При изменении параметра δ частоты могут становиться кратными. При столкновении пластинчатых и оболочечных частот искажения соответствующих форм колебаний пренебрежимо малы. Когда «пластиночная» и «балочная» частоты близки, форма колебаний представляет собой суперпозицию «балочной» и «пластиночной» формы колебаний, что не позволяет определить тип колебаний. Столкновение первой «балочной» и второй «пластиночной» частот объясняет немоноктонность зеленой линии на рисунке 2.5.

В таблице 2.10 приведены значения оптимальных толщин элементов конструкции и соответствующие им значения частотного параметра, найденные аналитически и методом конечных элементов.

2.8 Двупараметрическая оптимизация спектра собственных частот

Рассмотрим задачу о колебаниях конструкции, состоящей из цилиндрической оболочки длины l , радиуса 1 и толщины h_s , сопряженной со сферическим сегментом радиуса r_p толщины $h_p = h_s/\delta$. При $r_p \rightarrow \infty$ сферическая оболочка превращается в плоскую круглую пластину.

Уменьшение радиуса кривизны сферического сегмента приводит к быстрому росту его собственных частот, в то время как уменьшение толщины сферического сегмента приводит к не столь значительному снижению его собственных частот. При этом для сохранения массы конструкции «лишний» материал может быть использован для увеличения толщины цилиндрической оболочки, что приводит к повышению ее собственных частот.

Условие сохранения массы конструкции имеет вид

$$2\pi hLR + \pi hR^2 = 2\pi h_sLR + \pi h_p R_p \left(R_p - \sqrt{R_p^2 - R^2} \right),$$

откуда при $h_s = \delta h_p$ следует формула для безразмерных параметров

$$h_p = h \cdot \frac{2l + 1}{2l\delta + 2r_p^2 - 2r_p\sqrt{r_p^2 - 1}}.$$

В первой оптимизационной задаче для заданной массы конструкции найдем кривизну крышки $k(k = 1/r_p)$ и отношение толщин δ , при котором фундаментальная частота конструкции является наибольшей.

Для конструкции фиксированной массы на рисунке 2.6 построены полученные аналитически зависимости низших собственных частот от параметров $\delta(1 < \delta < 5)$ и $k(0,01 < k < 0,15)$. На графике значения частот «пластиночного» типа обозначены зеленым цветом, «оболочечного» типа — желтым, а низшей собственной частоты цилиндрической оболочки в предельном случае, когда толщина крышки стремится к нулю, — красным. Заметим, что при увеличении кривизны крышки, низшая собственная частота колебаний «оболочечного» типа быстро приближается к предельному значению.

Рисунок 2.7 демонстрирует хорошее совпадение значений низших собственных частот колебаний, полученных аналитически (зеленая, желтая и красная поверхности) и численно (точки) в пакете *Comsol* для разных значений параметров δ и k .

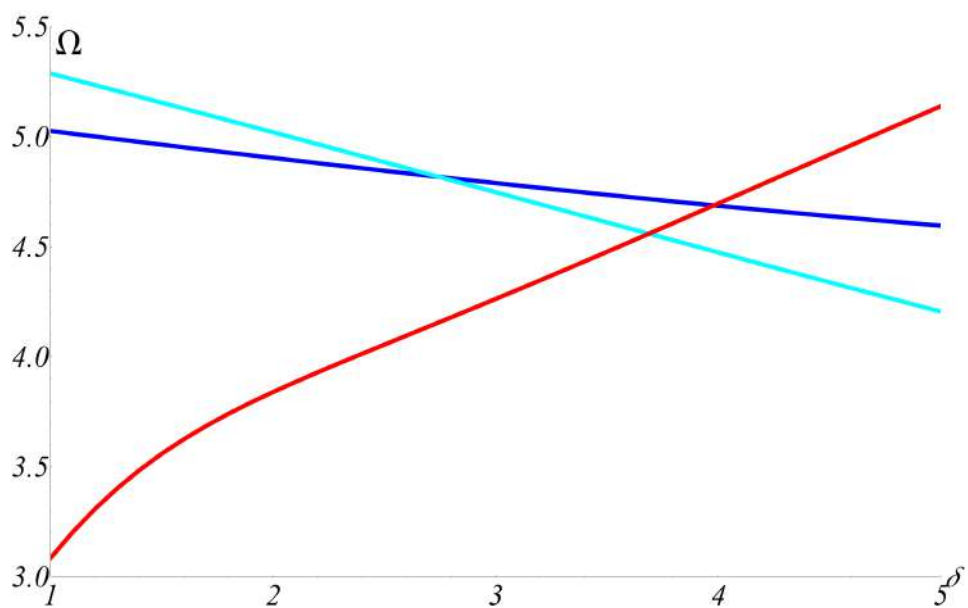
В таблице 2.11 приведены значения первых частот конструкций для разных значений δ и r_p .

Оптимальное решение, при котором фундаментальная частота достигает максимального значения при условии сохранения массы конструкции, достигается при значении параметров $r_p = 9,851$ и $\delta = 30$. Такая постановка не является

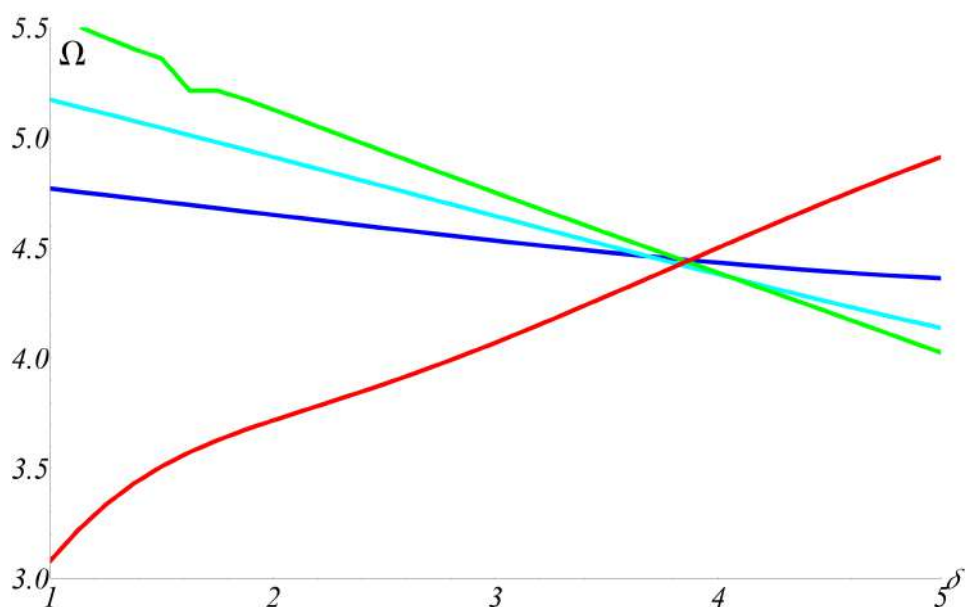
оправданной, так как для цилиндрической оболочки радиуса $R = 1$ м и толщины $H = 1$ см крышка будет иметь толщину $H_p = 0,3$ мм, что недопустимо для реальных конструкций. В частности, в большинстве инженерных нормативов, например, для проектирования железнодорожных цистерн, указывается минимальная толщина торцевой крышки в 3 мм.

Поэтому рассмотрим вторую оптимизационную задачу: при заданной массе конструкции и заданной минимальной толщине крышки $H_p = 3$ мм найти радиус кривизны крышки, при котором фундаментальная частота конструкции является наибольшей.

Для конструкции с параметрами определенными выше максимум фундаментальной частоты 40,36 Гц достигается при $R_p = 9,851$ м, что существенно превышает фундаментальную частоту конструкции с плоской крышкой 16,318 Гц.



а)



б)

Рисунок 2.5 — Зависимость частотного параметра низших собственных частот от толщины пластины при сохранении общей массы конструкции.

а) аналитические результаты, б) численные (МКЭ).

«Пластиночная» частота — красным, «балочная» частота — зеленым, «оболочечные» частоты: для $m = 4$ — синим, $m = 5$ — голубым.

Таблица 2.10 — Оптимальные толщины элементов конструкции и соответствующий частотный параметр

	Аналитика	МКЭ
Ω	4,50	4,43
h_p	3,90	3,83
h_s	0,64	0,65

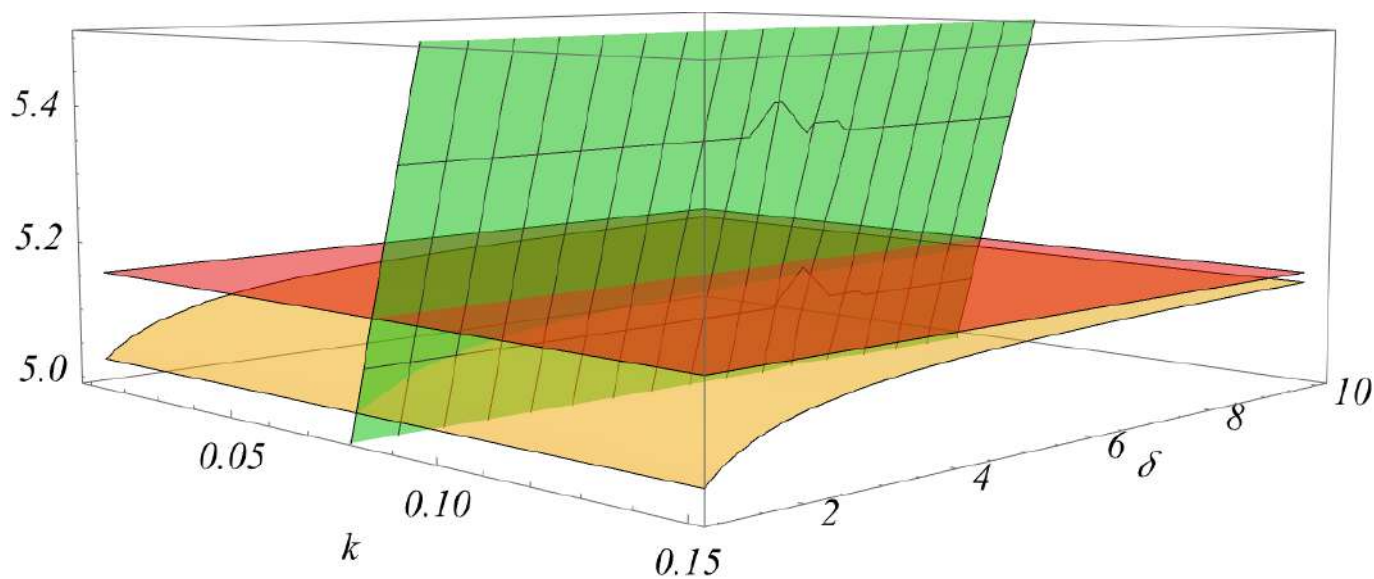


Рисунок 2.6 — Аналитические зависимости от параметров δ и k низших собственных частот «пластинчатого» (зеленый) и «оболочечного» (желтый) типов, а также низшей собственной частоты цилиндрической оболочки (красный) в предельном случае.

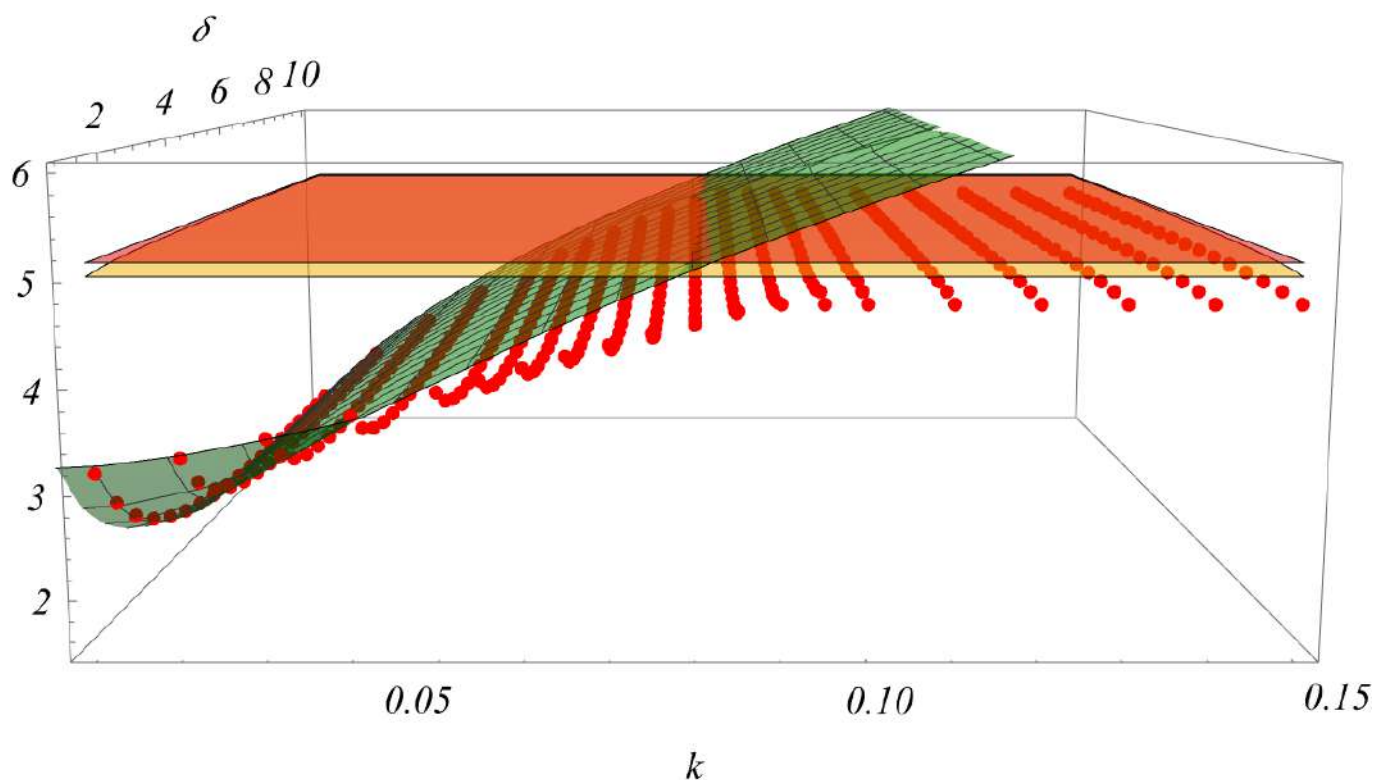


Рисунок 2.7 — Низшие собственные частоты колебаний, найденные аналитически (зеленая, желтая и красная поверхности) и численно (точки).

Таблица 2.11 — Частотный параметр оболочки, сопряженной с пологим сферическим сегментом

$\delta \backslash \rho$	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09	0,11	0,13
1	3,162	3,500	3,940	4,386	4,768	4,768	4,767
2	2,446	3,032	3,640	4,171	4,633	4,823	4,823
3	2,122	2,892	3,564	4,118	4,594	4,843	4,842
4	1,957	2,850	3,554	4,127	4,619	4,852	4,852
5	1,869	2,845	3,573	4,164	4,673	4,858	4,857

3 Устойчивость тонкой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами разной жесткости

В главе исследуется задача о потере устойчивости конструкции, состоящей из тонкостенной упругой цилиндрической оболочки, подкрепленной на параллелях шпангоутами разной жесткости. Пример такой подкрепленной оболочки изображен на рисунке 1.1.

Методом Рэлея–Ритца получена асимптотическая формула для вычисления значения критической нагрузки конструкции. С помощью численных и асимптотических методов исследуется влияние изменения закона распределения жесткостей шпангоутов вдоль образующей на критическое давление оболочки.

Решаются две оптимизационные задачи. В первой выбираются коэффициенты функций распределения, при которых конструкция заданной массы достигает максимального критического давления. Во второй задаче минимизируется масса конструкции при заданном критическом давлении.

3.1 Потеря устойчивости подкрепленной цилиндрической оболочки

3.1.1 Постановка задачи

Рассматривается задача о потере устойчивости тонкостенной упругой цилиндрической оболочки под действием равномерного внешнего давления p . Для увеличения критического давления, оболочка подкреплена n_s поперечными ребрами разной жесткости (шпангоутами) с нулевым эксцентриситетом.

Рассматриваются шпангоуты, жесткость которых изменяется вдоль образующей оболочки. Предполагается, что при оптимальном выборе жесткостей

шпангоутов произойдет максимальное увеличение критического давления конструкции. Решение оптимизационной задачи подразумевает нахождение геометрических параметров шпангоутов, соответствующих максимальному критическому давлению при заданной массе конструкции.

Для исследования потери устойчивости воспользуемся безразмерными уравнениями технической теории оболочек [25]:

$$\varepsilon^8 \Delta^2 w^{(i)}(s) - \Delta_k \Phi^{(i)}(s) - \lambda m^2 w^{(i)}(s) = 0, \quad \Delta^2 \Phi^{(i)}(s) + \Delta_k w^{(i)}(s) = 0, \quad (3.1)$$

где

$$\Delta_k = \frac{d^2}{ds^2}, \quad \Delta = \Delta_k - m^2, \quad \sigma = 1 - \nu^2, \quad \lambda = \frac{p}{Eh}, \quad \varepsilon^8 = \frac{h^2}{12\sigma}.$$

Здесь ε — малый параметр, s — координата, направленная вдоль образующей цилиндра, $w^{(i)}(s)$ — проекция перемещения на направление нормали к срединной поверхности на промежутке между шпангоутами, $\Phi^{(i)}(s)$ — функция усилий, m — число волн по параллели, h — безразмерная толщина оболочки, l — безразмерная длина оболочки, ν — коэффициент Пуассона, а E — модуль Юнга. За единицу длины выбран радиус R срединной поверхности цилиндра.

Представим решение системы уравнений (3.1) в виде суммы основного полубезмоментного состояния и простого краевого эффекта вблизи краев оболочки и параллелей, на которых установлены шпангоуты. В первом приближении получим

$$\left(w_0^{(i)}\right)^{IV} - \alpha^4 w_0^{(i)} = 0, \quad \alpha^4 = m^6 \lambda_0 - \varepsilon^8 m^8, \quad (3.2)$$

где $w_0^{(i)}$ — приближенное решение системы (3.1), λ_0 — приближенное значение λ (см. [14]). В дальнейшем рассматривается только первый член асимптотического разложения решения, и вместо $w_0^{(i)}$ и λ_0 используются обозначения $w^{(i)}$ и λ .

Граничные условия для уравнения (3.2) в случае шарнирного опирания краев оболочки имеют вид:

$$\begin{aligned} w^{(1)} = 0, \quad \frac{d^2}{ds^2} w^{(1)} = 0, \quad \text{при } s = 0, \\ w^{(n)} = 0, \quad \frac{d^2}{ds^2} w^{(n)} = 0, \quad \text{при } s = l, \end{aligned} \quad (3.3)$$

а в случае жесткой заделки

$$\begin{aligned} w^{(1)} = 0, \quad \frac{d}{ds} w^{(1)} = 0, \quad \text{при } s = 0, \\ w^{(n)} = 0, \quad \frac{d}{ds} w^{(n)} = 0, \quad \text{при } s = l. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Предположим, что характерный размер поперечного сечения шпангоута $a \ll \varepsilon$. Тогда на параллелях, подкрепленных шпангоутами, выполняются условия сопряжения [30]:

$$\begin{aligned} w^{(i)} = w^{(i+1)}, \quad w^{(i)'} = w^{(i+1)'}, \\ w^{(i)''} = w^{(i+1)''}, \quad w^{(i)'''} - w^{(i+1)'''} = -c_i w^{(i+1)}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

для $s = s_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$

где

$$c_i = \frac{m^8 \varepsilon^8 l \eta_i}{n}, \quad \eta_i = \frac{12 \sigma n E_c J_i}{h^3 E l}.$$

Здесь E_c — модуль Юнга материала шпангоута, η_i — эффективная жесткость i -го шпангоута, пропорциональная отношению изгибных жесткостей шпангоута и оболочки, J_i — момент инерции поперечного сечения i -го шпангоута относительно образующей цилиндра.

Приближенное значение параметра критического давления λ для подкрепленной оболочки определяется по формуле [14]:

$$\lambda(\eta) = \min_m \left[\frac{\alpha^4(\mathbf{c})}{m^6} + \varepsilon^8 m^2 \right], \quad \mathbf{c} = \{c_i\}_{i=1}^n, \quad (3.6)$$

где $\alpha(\mathbf{c})$ — собственное значение краевой задачи (3.2), (3.5) с граничными условиями (3.3) в случае шарнирного опирания краев оболочки и (3.4) — в случае их жесткой заделки.

3.1.2 Колебания подкрепленной балки

Способ подкрепления оболочки шпангоутами подробно рассмотрен в разделе 2 первой главы диссертации. На рисунке 3.1 изображена оболочка со шпангоутами в разрезе вдоль образующей оболочки.

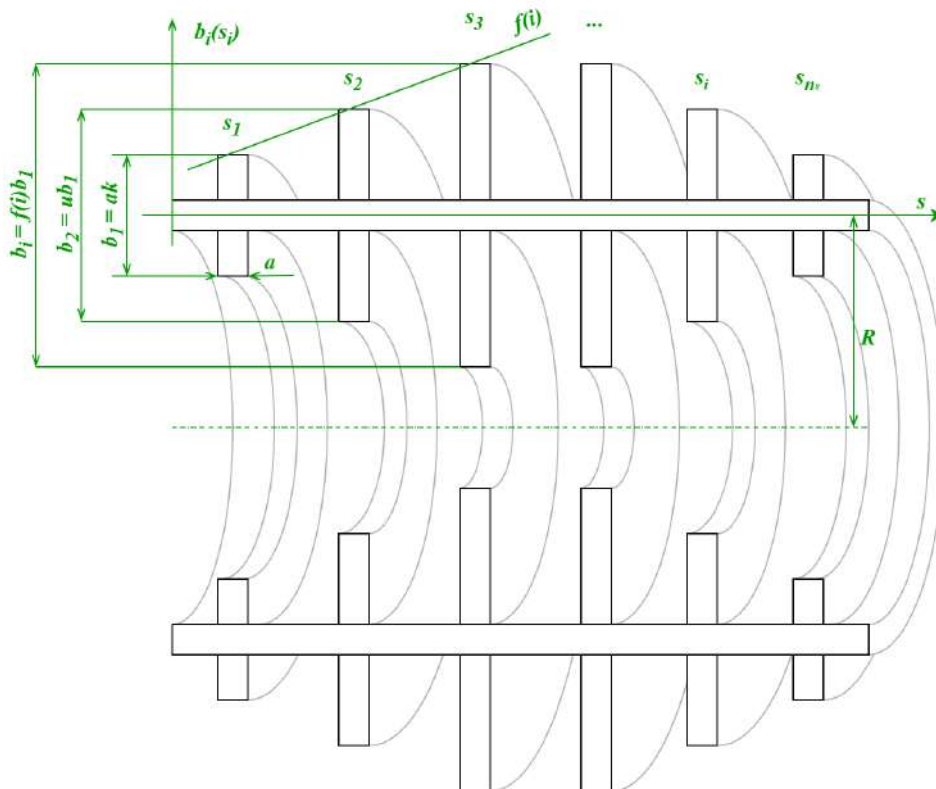


Рисунок 3.1 — Осевое сечение оболочки, подкрепленной шпангоутами с нулевым эксцентриситетом.

Эксцентриситетом шпангоута называется расстояние между центром тяжести поперечного сечения шпангоута и срединной поверхностью оболочки. Для случая подкрепления шпангоутами с нулевым эксцентриситетом момент инерции i -го шпангоута рассчитывается по формуле:

$$J_i = J f^3(i), \quad J = \frac{a^4 k^3}{12}.$$

где a — ширина шпангоутов, $k = b/a$ — отношение высоты первого шпангоута к его ширине, $f(i)$ — функция, описывающая профиль конструкции. Тогда без-

размерную жесткость (c_i) и относительную жесткость (η_i) i -го шпангоута можно записать в виде:

$$c_i = c \cdot f^3(i), \quad \eta_i = \eta \cdot f^3(i), \quad \text{где} \quad c = \frac{m^8 \varepsilon^8 l \eta}{n}, \quad \eta = \frac{12 \sigma n J}{h^3 l}. \quad (3.7)$$

Функция профиля конструкции $f(i)$ может иметь произвольный вид, однако целесообразно подкреплять оболочку шпангоутами, высоты которых симметричны относительно середины.

В частности:

- для линейного распределения высот шпангоутов (рисунок 3.2 (а)), функция $f(i)$ имеет вид

$$f_{lin}(i) = (\kappa(i) - 1)(u - 1) + 1, \quad u = \frac{b_2}{b_1}, \quad (3.8)$$

- для распределения высот шпангоутов по параболе, (рисунок 3.2 (б))

$$f_{parab}(i) = a_p \kappa^2(i) - n a_p \kappa(i) + n a_p - a_p + 1, \quad \text{где} \quad a_p = \frac{1 - u}{n - 3}, \quad (3.9)$$

- для экспоненциального распределения высот шпангоутов, (рисунок 3.2 (в))

$$f_{exp}(i) = \frac{u - 1}{e^2 - e} e^{\kappa(i)} + \frac{e - u}{e - 1}. \quad (3.10)$$

- при подкреплении оболочки одинаковыми шпангоутами

$$f_0(i) = 1. \quad (3.11)$$

В формулах (3.8, 3.9, 3.10) функция

$$\kappa(i) = \frac{n}{2} - \left| \frac{n}{2} - i \right| = \begin{cases} i, & i < \frac{n}{2} \\ n - i, & i \geq \frac{n}{2} \end{cases}$$

гарантирует симметричность функций профиля конструкции, а параметр $u = b_2/b_1$ характеризует амплитуду функции распределения.

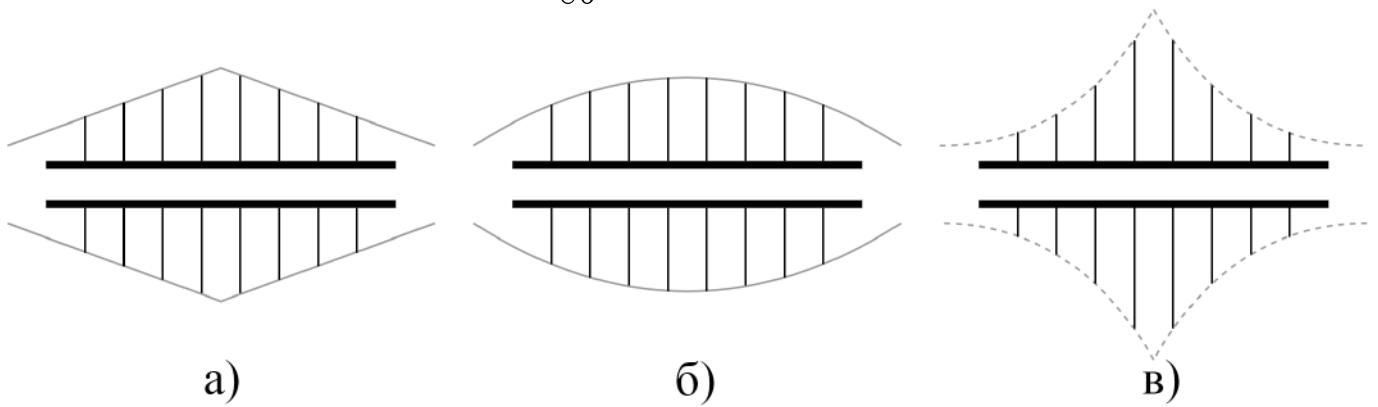


Рисунок 3.2 — Профили конструкции для случая
 а). линейной б). параболической в). экспоненциальной
 функций распределения высот шпангоутов.

Краевые задачи (3.2, 3.3, 3.5) и (3.2, 3.4, 3.5) эквивалентны задачам об определении низших частот поперечных колебаний шарнирно опертой и жестко закрепленной балок (рисунок 3.3), подкрепленных пружинами жесткости c_i в точках $s = s_i$.

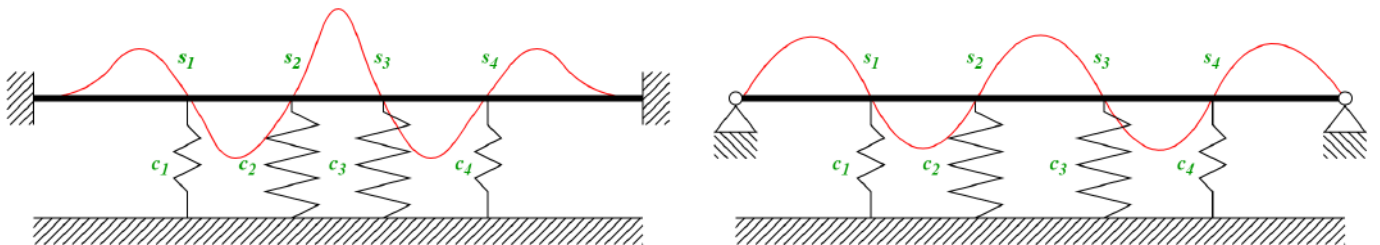


Рисунок 3.3 — Формы колебаний балки, подкрепленной пружинами с
 а). жестко закрепленными, б). шарнирно опертыми
 концами.

Выбор оптимальных координат установки пружин s_i рассмотрен в первой главе диссертации. Пружины следует устанавливать в узлах форм колебаний неподкрепленной балки:

- при шарнирном опирании краев (3.2, 3.3, 3.5)

$$w_n(s) = \sin(\alpha_n s), \quad \alpha_n = \frac{n}{l} \cdot \pi, \quad (3.12)$$

- при защемлении краев (3.2, 3.4, 3.5)

$$w_n(s) = U(\alpha_n s) - \varkappa_n V(\alpha_n s), \quad \alpha_n = \frac{z_n}{l}, \quad \varkappa_n = \frac{U(z_n)}{V(z_n)}, \quad (3.13)$$

где

$$U(x) = \operatorname{ch} x - \cos x, \quad V(x) = \operatorname{sh} x - \sin x$$

— функции Крылова, а величины

$$z_n \simeq (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

являются корнями уравнения $\operatorname{ch} z \cdot \cos z = 1$. При этом точки оптимального расположения пружин совпадают с корнями уравнения $w_n(s) = 0$.

В дальнейшем для упрощения записи опускаем индексы и при этом $\alpha = \frac{\pi}{2l}$, $\varkappa = U(\frac{3\pi}{2})/V(\frac{3\pi}{2})$, а первая форма колебаний неподкрепленной балки обозначается $w(s)$.

Формула оценки первого собственного значения методом Рэлея–Ритца краевой задачи (3.2, 3.5) с граничными условиями шарнирного опирания (3.3) концов балки имеет вид

$$\alpha_s^4 = \frac{\pi^4}{l^4} + c \frac{2T_s(n)}{l}, \quad T_s(n) = \sum_{i=1}^{n-1} f^3(i) \sin^2 \left(\frac{\pi i}{n} \right), \quad (3.14)$$

а значение приближенного параметра первой частоты колебаний балки с защемленными концами (3.4) может быть вычислено по формуле

$$\alpha_c^4 = \left(\frac{3\pi}{2l} \right)^4 + c \frac{T_c(n)}{I_0}, \quad (3.15)$$

где

$$I_0 = \int_0^l \left(U \left(\frac{\pi s}{2l} \right) - \varkappa \cdot V \left(\frac{\pi s}{2l} \right) \right)^2 ds, \quad T_c(n) = \sum_{i=1}^{n-1} f^3(i) w^2(s_i).$$

3.1.3 Нахождение собственных значений в задаче о потере устойчивости подкрепленной оболочки

Рассмотрим задачу об определении значения параметра критического давления λ_1 для цилиндрической оболочки с шарнирно опертыми (3.3) краями. Оболочка подкрепляется шпангоутами жесткости c_i по параллелям с координатами s_i , которые являются узлами формы колебаний неподкрепленной шарнирно опертой оболочки (3.12). Обозначим за $\alpha_s(\eta, m)$ собственное значение краевой задачи для случая шарнирного опирания (3.2, 3.3, 3.5), которому соответствует критическое давление. Соответствующее значение параметра критического давления $\lambda_1(\eta)$ определим из формулы (3.6) и обозначим за $\lambda^s(\eta)$

$$\lambda^s(\eta) = \min_m \left[\frac{\alpha_s^4(\eta, m)}{m^6} + \varepsilon^8 m^2 \right]. \quad (3.16)$$

С учетом значения жесткости шпангоута c , которое определено в (3.7), собственное значение α_s с учетом формулы (3.14) можно записать в виде

$$\alpha_s^4 = \frac{\pi^4}{l^4} + c \frac{2T_s(n)}{l} = \frac{\pi^4}{l^4} + \frac{m^8 \varepsilon^8 l \eta 2T_s(n)}{n l} = \frac{\pi^4}{l^4} + \frac{2T_s(n) \eta \varepsilon^8}{n} m^8.$$

Подстановка полученного α_s^4 в (3.16) дает следующее выражение для собственного значения параметра критического давления шарнирно опертой оболочки

$$\begin{aligned} \lambda^s(\eta) &= \min_m \left[\left(\frac{\pi^4}{l^4} + \frac{2T_s(n) \varepsilon^8 \eta}{n} m^8 \right) m^{-6} + \varepsilon^8 m^2 \right] = \\ &= \min_m \left[\frac{\pi^4}{l^4} m^{-6} + \frac{2T_s(n) \varepsilon^8 \eta}{n} m^2 + \varepsilon^8 m^2 \right] \end{aligned}$$

В общем виде минимизируемая функция $\lambda^s(\eta, m)$ имеет вид

$$\lambda(\eta, m) = X m^{-6} + Y m^2, \quad \text{где} \quad X = \frac{\pi^4}{l^4}, \quad Y = \varepsilon^8 \left(1 + \frac{2T_s(n) \eta}{n} \right). \quad (3.17)$$

Минимизируем полученную функцию $\lambda(\eta, m)$ по m :

$$-6X m^{-7} + 2Y m = 0, \quad m^2 = \sqrt[4]{\frac{3X}{Y}}, \quad \lambda_{min} = \sqrt[4]{\frac{256}{27} X Y^3}. \quad (3.18)$$

тогда

$$\lambda^s(\eta) = \sqrt[4]{\frac{256 \pi^4}{27 l^4} \left(\varepsilon^8 \left(1 + \frac{2T_s(n)\eta}{n} \right) \right)^3} = \frac{4\pi\varepsilon^6}{l\sqrt[4]{27}} \sqrt[4]{\left(1 + \frac{2T_s(n)\eta}{n} \right)^3}.$$

Поскольку $\varepsilon^8 = h^2/(12\sigma)$ значение λ^s для случая шарнирного опирания краев оболочки можно записать в виде

$$\lambda^s(\eta) = \lambda^s(0) \sqrt[4]{\left(1 + \frac{2T_s(n)\eta}{n} \right)^3}, \quad \text{где} \quad \lambda^s(0) = \frac{\sqrt{6}\pi h^{3/2}}{9l\sigma^{3/4}}. \quad (3.19)$$

В случае шарнирного опирания концов оболочки краевая задача (3.2, 3.4) имеет собственное значение, не зависящее от η , которое также является собственным значением краевой задачи (3.2, 3.3, 3.5). Для нахождения предельного значения η подставим собственное значение α_n из (3.12) краевой задачи (3.2, 3.3) в выражение (3.6):

$$\lambda_n^s = \min_m \left[\frac{\alpha_n^4}{m^6} + \varepsilon^8 m^2 \right] = \sqrt[4]{\frac{256}{27} \alpha_n^4 \varepsilon^{24}} = \alpha_n \varepsilon^6 \frac{4}{\sqrt[4]{27}} = \frac{\pi n}{l} \frac{h^{3/2}}{12^{3/4} \sigma^{3/4}} \frac{4}{\sqrt[4]{27}} = \lambda^s(0) n.$$

Параметр η_s^* , являющийся корнем уравнения

$$\lambda^s(0) \sqrt[4]{\left(1 + \frac{2T_s(n)\eta_s^*}{n} \right)^3} = \lambda_n^s,$$

называется *эффективной жесткостью шпангоута*. Параметр критического давления не увеличивается при значениях жесткости шпангоута η больших η_s^* . Следовательно,

$$\frac{\lambda^s(\eta)}{\lambda^s(0)} = \begin{cases} \sqrt[4]{\left(1 + \frac{2T_s(n)\eta}{n} \right)^3}, & \eta \leq \eta_s^* \\ n, & \eta > \eta_s^* \end{cases}, \quad \eta_s^* = \frac{n(n^{4/3} - 1)}{2T_s(n)}. \quad (3.20)$$

Рассмотрим задачу об определении значения параметра критического давления λ^c для других граничных условий, а именно, для цилиндрической оболочки с жестко закрепленными (3.4) краями. В этом случае координаты параллелей,

на которых оболочка подкрепляется шпангоутами жесткости c_i являются узлами формы колебаний неподкрепленной жестко заделанной оболочки (3.13). С учетом выражения для c (3.7) собственное значение краевой задачи (3.2, 3.4, 3.5) можно записать в виде:

$$\alpha_c^4 = \left(\frac{3\pi}{2l}\right)^4 + c \frac{T_c(n)}{I_0} = \left(\frac{3\pi}{2l}\right)^4 + \frac{m^8 \varepsilon^8 l \eta T_c(n)}{n I_0} = \left(\frac{3\pi}{2l}\right)^4 + \frac{\varepsilon^8 l T_c(n) \eta}{n I_0} m^8.$$

Соответствующее значение параметра критического давления $\lambda^s(\eta)$ с учетом минимального значения функции (3.18) равно

$$\begin{aligned} \lambda^c &= \min_m \left[\frac{\alpha_c^4}{m^6} + \varepsilon^8 m^2 \right] = \min_m \left[\left(\frac{3\pi}{2l}\right)^4 m^{-6} + \frac{\varepsilon^8 l T_c(n) \eta}{n I_0} m^2 + \varepsilon^8 m^2 \right] = \\ &= \sqrt[4]{\frac{256}{27} \left(\frac{3\pi}{2l}\right)^4 \varepsilon^{24} \left(1 + \frac{l T_c(n) \eta}{n I_0}\right)^3} = \frac{6\pi \varepsilon^6}{l^{3/4}} \sqrt[4]{\left(1 + \frac{l T_c(n) \eta}{n I_0}\right)^3} \end{aligned}$$

С учетом выражения для малого параметра $\varepsilon^8 = h^2/(12\sigma)$ значение λ^c для случая заземления краев оболочки можно записать в виде

$$\lambda^c(\eta) = \lambda^c(0) \sqrt[4]{\left(1 + \frac{l T_c(n) \eta}{n I_0}\right)^3}, \quad \text{где} \quad \lambda^c(0) = \frac{\pi h^{3/2}}{\sqrt{6} l \sigma^{3/4}}. \quad (3.21)$$

Как и в случае шарнирного опирания краев оболочки, краевая задача (3.2, 3.4) имеет собственное значение, не зависящее от η , которое также является собственным значением краевой задачи (3.2, 3.4, 3.5). Для нахождения предельного значения η подставим собственное значение α_n из (3.13) краевой задачи (3.2, 3.4) в выражение (3.6):

$$\lambda_n^c = \min_m \left[\frac{\alpha_n^4}{m^6} + \varepsilon^8 m^2 \right] = \sqrt[4]{\frac{256}{27} \alpha_n^4 \varepsilon^{24}} = \frac{4}{3^{3/4}} \frac{(2n+1)\pi}{2l} \frac{h^{3/2}}{12^{3/4} \sigma^{3/4}} = \frac{2n+1}{3} \lambda^c(0).$$

Эффективная жесткость шпангоута η_c^* в этом случае является корнем уравнения

$$\lambda^c(0) \sqrt[4]{\left(1 + \frac{l T_c(n) \eta_c^*}{n I_0}\right)^3} = \lambda_n^c.$$

Увеличение жесткости шпангоута η после достижения ею значения η_c^* не приводит к увеличению параметра критического давления. Следовательно,

$$\frac{\lambda^c(\eta)}{\lambda^c(0)} = \begin{cases} \sqrt[4]{\left(1 + \frac{lT_c(n)\eta}{nI_0}\right)^3}, & \eta \leq \eta_c^* \\ \frac{2n+1}{3}, & \eta > \eta_c^* \end{cases}, \quad \eta_c^* = \frac{nI_0}{lT_c(n)} \left(\left(\frac{2n+1}{3} \right)^{4/3} - 1 \right). \quad (3.22)$$

3.2 Максимальное увеличение критического давления цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами разной жесткости

Пусть масса подкрепленной оболочки фиксирована. Рассмотрим задачу об определении оптимального распределения массы между шпангоутами и оболочкой (обшивкой), которому соответствует наибольшее значение критического давления.

Критическое давление p_0 для гладкой оболочки длиной l и толщиной h_0 можно найти по приближенной формуле Саусвелла (Southwell)-Папковича [30] :

$$p = \lambda E h_0, \quad (3.23)$$

где в случае шарнирного опирания краев оболочки

$$\lambda = \lambda^s(0) = \frac{\sqrt{6}\pi h_0^{3/2}}{9l\sigma^{3/4}}, \quad p_0^s = \frac{\sqrt{6}\pi h_0^{5/2} E}{9l\sigma^{3/4}}. \quad (3.24)$$

а в случае жесткой заделки краев

$$\lambda = \lambda^c(0) = \frac{\sqrt{6}\pi h_0^{3/2}}{6l\sigma^{3/4}}, \quad p_0^c = \frac{\sqrt{6}\pi h_0^{5/2} E}{6l\sigma^{3/4}}. \quad (3.25)$$

Предположим, что за счет уменьшения толщины оболочки до величины h на ней установлен $n - 1$ шпангоут прямоугольного поперечного сечения шириной a и высотой b_i , $i = 1 \dots n - 1$. Пусть масса оболочки

$$M(h) = \rho \cdot 2\pi R \cdot Rh \cdot Rl,$$

масса шпангоутов

$$M_r = \rho \sum_{i=1}^{n-1} 2\pi R \cdot Ra \cdot Rak f(i),$$

где $k = b/a$ — отношение высоты первого шпангоута к его ширине, а $f(i)$ — функция профиля конструкции. Тогда из условия равенства массы подкрепленной оболочки массе гладкой оболочки

$$\rho \cdot 2\pi R \cdot Rh_0 \cdot Rl = \rho \cdot 2\pi R \cdot Rh \cdot Rl + \rho \sum_{i=1}^{n-1} 2\pi R \cdot Ra \cdot Rak f(i)$$

можно выразить зависимость ширины шпангоутов a от отношения толщин подкрепленной и гладкой оболочки $d = h/h_0$:

$$a^2 = \frac{1-d}{A}, \quad \text{где} \quad A = \frac{kP(n)}{h_0 l}, \quad P(n) = \sum_{i=1}^{n-1} f(i). \quad (3.26)$$

Для оптимального распределения массы конструкции между оболочкой и шпангоутами, для случая шарнирного опирания краев, введем функцию f_s отношения критического давления подкрепленной оболочки к критическому давлению гладкой оболочки. С учетом соотношения (3.20) запишем f_s в виде

$$f_s = \frac{p^s}{p_0^s} = \frac{\lambda^s(\eta) Eh}{\lambda^s(0) Eh_0} = \begin{cases} d^{5/2} \sqrt[4]{\left(1 + \frac{2T_s(n)}{n} \eta\right)^3}, & 0 \leq \eta \leq \eta_s^* \\ d^{5/2} n, & \eta > \eta_s^* \end{cases}, \quad (3.27)$$

и найдем максимальное значение этой функции.

Преобразуем второе слагаемое подкоренного выражения с учетом значения относительной жесткости шпангоута η (3.7):

$$\frac{2T_s(n)}{n} \eta = \frac{2T_s(n)}{n} \frac{12\sigma n J}{h^3 l} = \frac{24T_s(n)\sigma a^4 k^3}{h^3 l} = B_s \frac{a^4}{d^3}, \quad \text{где} \quad B_s = \frac{2T_s(n)\sigma k^3}{h_0^3 l}.$$

Тогда функцию f_s можно записать в виде

$$f_s = \begin{cases} d^{5/2} n, & 0 \leq d \leq d_* \\ d^{5/2} \sqrt[4]{\left(1 + B_s \frac{a^4}{d^3}\right)^3}, & d_* < d \leq 1 \end{cases}, \quad (3.28)$$

где d_* — оптимальное отношение толщин подкрепленной и гладкой оболочек, при котором достигается максимальное значение функции f_s . С учетом условия равенства масс подкрепленной и гладкой оболочек (3.26)

$$f_s = \begin{cases} d^{5/2}n, & 0 \leq d \leq d_* \\ d^{5/2} \sqrt[4]{\left(1 + \frac{B_s(1-d)^2}{A^2 d^3}\right)^3}, & d_* < d \leq 1 \end{cases}. \quad (3.29)$$

Значение d_* находится из условия непрерывности функции f_s в точке d_* , которое запишем в виде

$$d^3 = C_s(d-1)^2, \quad (3.30)$$

где

$$C_s = \frac{B_s}{A^2(n^{4/3} - 1)} = \frac{2T_s(n)k^3\sigma}{lh_0^3} \frac{h_0^2 l^2}{k^2 P^2(n)} \frac{1}{n^{4/3} - 1} = \frac{2kl\sigma}{h_0} \frac{T_s(n)}{P^2(n)(n^{4/3} - 1)}.$$

Поскольку $C_s > 0$, уравнение (3.30) имеет единственный вещественный корень на интервале $(0, 1)$. Функция $g_s(d) = f_s^{4/3}$ возрастает при $d \in [0; d_*]$, следовательно, максимум функции находится на промежутке $[d_*; 1]$. На этом промежутке функцию $g_s(d)$ можно записать в виде:

$$g_s(d) = d^{1/3} \left(d^3 + \frac{B_s}{A^2}(d-1)^2 \right).$$

Корни уравнения $g'_s(d) = 0$ лежат вне отрезка $[d_*; 1]$ (см. [60]), значит максимум функции $f_s(d)$ достигается на одном из краев $[d_*; 1]$.

$$f_s^* = \max \left[d_*^{5/2}n; 1 \right].$$

Для малых h_0 выполняется неравенство $d_*^{5/2}n > 1$, поскольку $d_* \rightarrow 1$ при $h_0 \rightarrow 0$.

Таким образом, получено кубическое уравнение, корень которого соответствует максимальному критическому давлению жестко закрепленной оболочки, подкрепленной шпангоутами разной жесткости:

$$d_*^3 - \frac{2kl\sigma}{h_0} \frac{T_s(n)}{P^2(n)(n^{4/3} - 1)} (d_* - 1)^2 = 0.$$

При этом оптимальную толщину шпангоутов a^* и максимальное значение функции f_s , соответствующие d_* , можно вычислить по формулам

$$a^* = \sqrt{\frac{1-d_*}{A}}, \quad f_s^* = d_*^{5/2} n.$$

В завершении, рассмотрим случай жесткого закрепления краев оболочки. Для этого введем функцию f_c отношения критического давления подкрепленной оболочки с защемленными краями к критическому давлению гладкой оболочки с защемленными краями. Воспользуемся для этого отношением (3.22):

$$f_c = \frac{p^c}{p_0^c} = \frac{\lambda^c(\eta)h}{\lambda^c(0)h_0} = \begin{cases} d^{5/2} \sqrt[4]{\left(1 + \frac{lT_c(n)}{I_0 n} \eta\right)^3}, & 0 \leq \eta \leq \eta_c^* \\ d^{5/2} \left(\frac{2n+1}{3}\right), & \eta_c^* < \eta \end{cases}.$$

С учетом условия равенства масс подкрепленной и гладкой оболочки (3.26), а также выражения для относительной жесткости шпангоутов η (3.7) второе слагаемое подкоренного выражения можно записать в виде

$$\frac{lT_c(n)}{I_0 n} \eta = \frac{lT_c(n)}{I_0 n} \frac{12\sigma n a^4 k^3}{h^3 l} = \frac{B_c (1-d)^2}{A^2 d^3}, \quad \text{где } B_c = \frac{\sigma T_c(n) k^3}{I_0 h_0^3},$$

тогда

$$f_c = \begin{cases} d^{5/2} \left(\frac{2n+1}{3}\right), & 0 \leq d \leq d_* \\ d^{5/2} \sqrt[4]{\left(1 + \frac{B_c (1-d)^2}{A^2 d^3}\right)^3}, & d_* < d \leq 1 \end{cases}. \quad (3.31)$$

где d_* - корень кубического уравнения

$$d_*^3 = C_c (d_* - 1)^2,$$

где

$$\begin{aligned} C_c &= \frac{B_c}{\left(\left(\frac{2n+1}{3}\right)^{4/3} - 1\right) A^2} = \frac{\sigma T_c(n) k^3}{I_0 h_0^3} \frac{h_0^2 l^2}{k^2 P^2(n)} \frac{1}{\left(\frac{2n+1}{3}\right)^{4/3} - 1} = \\ &= \frac{\sigma k l^2}{h_0 I_0} \frac{T_c(n)}{P^2(n) \left(\left(\frac{2n+1}{3}\right)^{4/3} - 1\right)}. \end{aligned}$$

Данное уравнение имеет один корень на интервале $(0, 1)$.

Функция $g_c = f_c^{4/3}$ возрастает при $d \in [0; d_*]$, следовательно, максимум функции находится на промежутке $[d_*; 1]$. На этом промежутке функцию g можно записать в виде:

$$g_c(d) = d^{1/3} (d^3 + B_c A^{-2} (d-1)^2).$$

Корни уравнения $g'_c(d) = 0$ лежат вне отрезка $[d_*; 1]$, значит максимум функции $f_c(d)$ достигается на одном из краев $[d_*; 1]$.

$$f_c^* = \max \left[\frac{2n+1}{3} d_*^{\frac{5}{2}}; 1 \right].$$

Для малых h_0 выполняется неравенство $d_*^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{2n+1}{3} > 1$, поскольку $d \rightarrow 1$ при $h_0 \rightarrow 0$.

Таким образом, получено кубическое уравнение, корень которого соответствует максимальному критическому давлению жестко закрепленной оболочки, подкрепленной шпангоутами разной жесткости:

$$d_*^3 - \frac{\sigma k l^2}{h_0 I_0} \frac{T_c(n)}{P^2(n) \left(\left(\frac{2n+1}{3} \right)^{4/3} - 1 \right)} (d_* - 1)^2 = 0,$$

При этом a_* и f_c^* , соответствующие d_* , можно найти по следующим формулам:

$$a_* = \sqrt{\frac{1-d_*}{A}}, \quad f_c^* = \left(\frac{2n+1}{3} \right) \sqrt{d_*^5}.$$

3.3 Нахождение критического давления конструкции аналитическими и численными методами

В этом параграфе аналитически и численно исследуется потеря устойчивости цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами, под действием нормального внешнего давления. В качестве примера рассматривается медная цилиндрическая оболочка длины $l = 4$ и толщины $h_0 = 0,01$ с модулем Юнга $E = 11 \cdot 10^{10}$ Па, коэффициентом Пуассона $\nu = 0,35$ и плотностью $\rho = 8920$ кг/м³. Приближенное

значение критического давления гладкой неподкрепленной оболочки (p_0) вычисляется по формуле (3.24) в случае шарнирного опирания краев, и по формуле (3.25) в случае жесткой заделки. Соответствующие значения p_s^0 и p_c^0 таковы

$$p_s^0 = \frac{\sqrt{6}Eh_0^{5/2}}{9l\sigma^{3/4}} \simeq 259,3 \text{ кПа}, \quad p_c^0 = \frac{\sqrt{6}Eh_0^{5/2}}{6l\sigma^{3/4}} \simeq 389 \text{ кПа}.$$

Для оболочки, подкрепленной n_s шпангоутами шириной a и высотами $b_i = kaf(i) (i = 1, \dots, n_s)$, функция $f(i)$ определяет распределение высот шпангоутов вдоль образующей оболочки и, следовательно, распределение жесткостей шпангоутов и профиль конструкции. Эти функции для линейного, параболического и экспоненциального распределений задаются формулами (3.8—3.11).

Приближенное значение критического давления такой конструкции может быть получено по формуле $p_s = p_s^0 f_s$ в случае шарнирного опирания краев, и по формуле $p_c = p_c^0 f_c$ в случае жесткой заделки краев. Значения f_s и f_c для разных профилей конструкции приведены в таблицах 3.1 и 3.2. На рисунках 3.4 и 3.5 изображены зависимости функций f_s и f_c от числа шпангоутов при различных отношениях ширины и высоты шпангоутов.

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что использование неодинаковых шпангоутов для подкрепления цилиндрической оболочки приводит к более значительному увеличению ее критического давления по сравнению с подкреплением одинаковыми шпангоутами. Из трех рассмотренных профилей конструкции наибольшее увеличение критического давления дает профиль с экспоненциальным законом распределения высот шпангоутов. Кроме того, можно заметить, что защемление краев оболочки приводит к более высоким значениям критического давления, чем при шарнирном опирании краев. Эти результаты подчеркивают важность учета как типа профиля конструкции, так и граничных условий при усовершенствовании конструкций с цилиндрическими оболочек.

Таблица 3.1 — Значение функции f_s шарнирно опертой оболочки, подкрепленной n_s шпангоутами.

	u	$f_{lin}(i)$			$f_{parab}(i)$			$f_{exp}(i)$		
		1	1,5	2	1	1,5	2	1	1,5	2
$k = 1$	4	2,94	3,37	3,67	2,94	3,37	3,67	2,94	3,37	3,67
	5	3,11	3,78	4,24	3,11	3,70	4,12	3,11	4,00	4,56
	6	3,22	4,08	4,67	3,22	3,98	4,52	3,22	4,40	5,10
	7	3,28	4,42	5,18	3,28	4,22	4,89	3,28	5,49	6,38
	8	3,32	4,66	5,56	3,32	4,44	5,23	3,32	6,00	7,01
$k = 1,5$	4	3,20	3,53	3,78	3,20	3,53	3,78	3,20	3,53	3,78
	5	3,43	3,98	4,38	3,43	3,91	4,26	3,43	4,19	4,68
	6	3,60	4,33	4,85	3,60	4,24	4,71	3,60	4,64	5,25
	7	3,72	4,72	5,39	3,72	4,53	5,11	3,72	5,74	6,52
	8	3,80	5,01	5,81	3,80	4,78	5,49	3,80	6,29	7,18
$k = 2$	4	3,37	3,64	3,86	3,37	3,64	3,86	3,37	3,64	3,86
	5	3,65	4,14	4,49	3,65	4,07	4,38	3,65	4,33	4,77
	6	3,87	4,53	4,99	3,87	4,43	4,85	3,87	4,82	5,37
	7	4,03	4,94	5,55	4,03	4,76	5,29	4,03	5,92	6,63
	8	4,15	5,27	6,00	4,15	5,05	5,69	4,15	6,51	7,31

В таблице 3.3 проведено сравнение критических давлений, полученных аналитическим методом (p), описанным в параграфе 3.3, и методом конечных элементов (p_{fem}) с помощью пакета *Comsol*. В качестве примера рассматриваются несколько разных значений параметров u и k , характеризующих профиль конструкции. Анализируется описанная выше жестко закрепленная оболочка с ли-

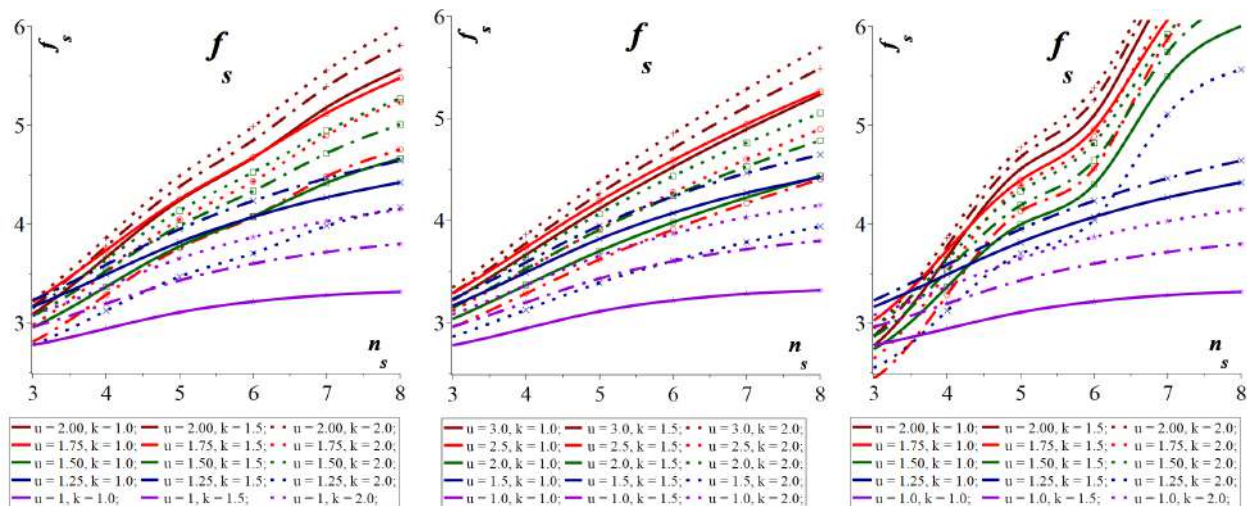


Рисунок 3.4 — Значения функции f_s для а). линейного, б). параболического, в). экспоненциального профилей конструкции.

нейной функцией распределения жесткостей. Для жестко закрепленной гладкой оболочки толщины $h = 0,01$ значение критического давления, полученного методом конечных элементов равно $p_{max} = 384840$ Па.

Хорошее совпадение результатов аналитического и численного решения показывает, что изложенный выше аналитический подход может быть использован для приближенного подбора параметров перед началом проектирования.

3.4 Минимизация массы цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами разной жесткости

Рассмотрим конструкцию, которая состоит из цилиндрической оболочки и подкрепляющих ее круговых шпангоутов разной жесткости. Будем искать параметры, при которых конструкция имеет наименьшую массу и которая не теряет устойчивость под действием внешнего давления p , где p — критическое давление гладкой цилиндрической оболочки толщины h_0 .

Таблица 3.2 — Значение функции f_c жестко закрепленной оболочки, подкрепленной n_s шпангоутами.

		$f_{lin}(i)$			$f_{parab}(i)$			$f_{exp}(i)$																								
		<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 10%;"></td> <td style="width: 10%; text-align: center;">u</td> <td style="width: 10%;"></td> <td style="width: 10%;"></td> <td style="width: 10%;"></td> <td style="width: 10%;"></td> <td style="width: 10%;"></td> <td style="width: 10%;"></td> <td style="width: 10%;"></td> <td style="width: 10%;"></td> <td style="width: 10%;"></td> </tr> <tr> <td style="width: 10%;"></td> <td style="width: 10%;"></td> <td style="width: 10%; text-align: center;">1</td> <td style="width: 10%; text-align: center;">1,5</td> <td style="width: 10%; text-align: center;">2</td> <td style="width: 10%; text-align: center;">1</td> <td style="width: 10%; text-align: center;">1,5</td> <td style="width: 10%; text-align: center;">2</td> <td style="width: 10%; text-align: center;">1</td> <td style="width: 10%; text-align: center;">1,5</td> <td style="width: 10%; text-align: center;">2</td> </tr> </table>										u												1	1,5	2	1	1,5	2	1	1,5	2
	u																															
		1	1,5	2	1	1,5	2	1	1,5	2																						
	n_s																															
$k = 1$	4	2,42	2,71	2,91	2,42	2,71	2,91	2,42	2,71	2,91																						
	5	2,57	3,04	3,34	2,57	2,99	3,26	2,57	3,20	3,55																						
	6	2,68	3,30	3,69	2,68	3,23	3,58	2,68	3,52	3,96																						
	7	2,75	3,59	4,09	2,75	3,44	3,89	2,75	4,30	4,82																						
	8	2,80	3,80	4,40	2,80	3,63	4,17	2,80	4,70	5,28																						
$k = 1,5$	4	2,59	2,81	2,97	2,59	2,81	2,97	2,59	2,81	2,97																						
	5	2,79	3,17	3,43	2,79	3,12	3,35	2,79	3,32	3,62																						
	6	2,94	3,46	3,79	2,94	3,39	3,70	2,94	3,67	4,05																						
	7	3,06	3,78	4,21	3,06	3,64	4,03	3,06	4,45	4,90																						
	8	3,15	4,03	4,55	3,15	3,87	4,33	3,15	4,87	5,38																						
$k = 2$	4	2,70	2,89	3,02	2,70	2,89	3,02	2,70	2,89	3,02																						
	5	2,94	3,27	3,49	2,94	3,22	3,42	2,94	3,40	3,67																						
	6	3,13	3,58	3,88	3,13	3,52	3,79	3,13	3,78	4,12																						
	7	3,28	3,92	4,31	3,28	3,79	4,13	3,28	4,55	4,96																						
	8	3,40	4,20	4,67	3,40	4,04	4,46	3,40	5,00	5,45																						

Масса конструкции M , состоящей из цилиндрической оболочки длины l и толщины h , на которую установлен $n - 1$ шпангоут толщины a и ширины $b_i (i = 1, \dots, n - 1)$, такова

$$M = 2\pi\rho R^3lh + 2\pi\rho R^3 \sum_{i=1}^{n-1} ab_i = 2\pi\rho R^3 \left(lh + a^2k \sum_{i=1}^{n-1} f(i) \right),$$

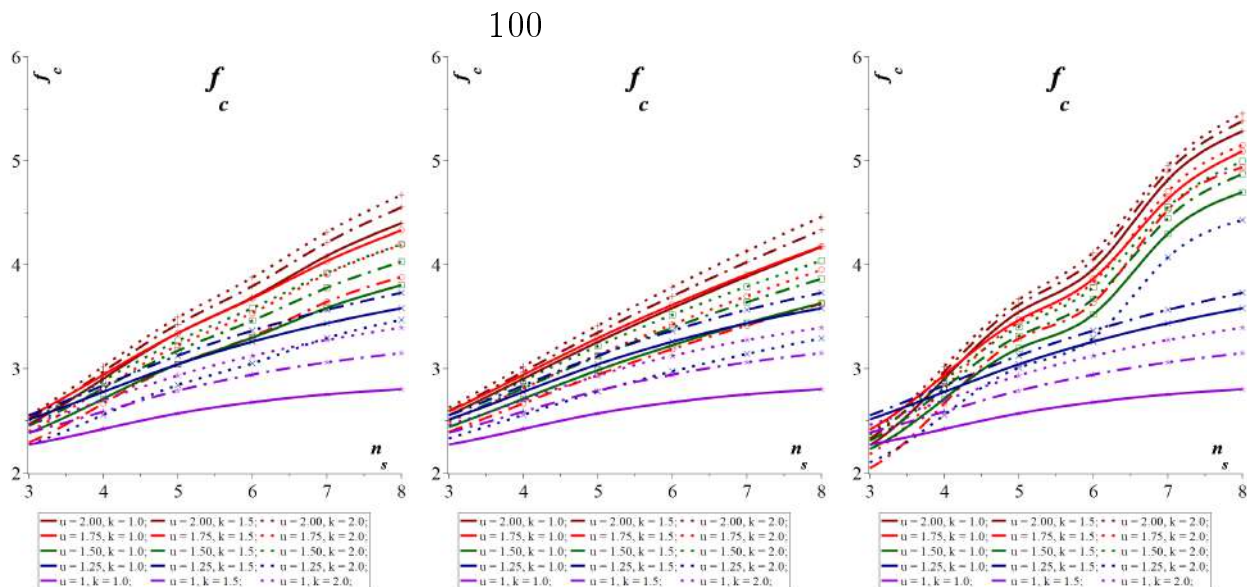


Рисунок 3.5 — Значения функции f_c для а). линейного, б). параболического, в). экспоненциального профилей конструкции.

Таблица 3.3 — Значения критического давления, полученного аналитическим методом p и методом конечных элементов p_{fem} .

	$k = 1$				$k = 2$			
	n_s	$p, \text{Па}$	$p_{fem}, \text{Па}$	d_*	n_s	$p, \text{Па}$	$p_{fem}, \text{Па}$	d_*
$u = 1$	3	628199	609440	0.918	3	666391	645430	0.9399
	4	700574	688990	0.8850	4	760599	747720	0.9145
	5	757109	755760	0.8539	5	839855	839140	0.89
$u = 1.5$	3	658402	614370	0.9354	3	689856	642590	0.9530
	4	754081	717130	0.9114	4	803660	762560	0.9349
	5	863682	804290	0.9	5	927847	861660	0,9262
$u = 2$	3	681002	616760	0.9481	3	707084	637890	0.9625
	4	787950	733720	0.9276	4	830211	770330	0.9471
	5	918921	811080	0.9226	5	971589	851530	0.9434

а масса гладкой оболочки M_0 :

$$M_0 = 2\pi\rho R^3lh_0,$$

где ρ — плотность материала, $k = b/a$ — отношение высоты первого шпангоута к его ширине, $f(i)$ — функция профиля конструкции. Тогда отношение массы подкрепленной оболочки к массе гладкой оболочки $F(a, d)$ запишем в виде

$$F(a, d) = \frac{M}{M_0} = d + Aa^2, \quad \text{где} \quad d = \frac{h}{h_0}, \quad A = \frac{kP(n)}{h_0 l}, \quad P(n) = \sum_{i=1}^{n-1} f(i). \quad (3.32)$$

Для случая шарнирного опирания краев цилиндрической оболочки (3.3) воспользуемся функцией отношения критического давления подкрепленной оболочки к критическому давлению гладкой оболочки (3.27)

$$f_s = \begin{cases} d^{5/2} \sqrt[4]{\left(1 + \frac{2T_s(n)}{n} \eta\right)^3}, & 0 \leq \eta \leq \eta_s^* \\ d^{5/2} n, & \eta > \eta_s^* \end{cases}, \quad \text{где} \quad \eta_s^* = \frac{n(n^{4/3} - 1)}{2T_s(n)},$$

которую, для удобства анализа, запишем в виде (3.28)

$$f_s = \begin{cases} d^{5/2} n, & 0 \leq d \leq d_* \\ d^{5/2} \sqrt[4]{\left(1 + \frac{B_s a^4}{d^3}\right)^3}, & d_* < d \leq 1 \end{cases},$$

где

$$B_s = \frac{2\sigma k^3}{lh_0^3} T_s(n), \quad T_s(n) = \sum_{i=1}^{n-1} f^3(i) \sin^2\left(\frac{\pi i}{n}\right).$$

Оптимальным значением отношения толщин подкрепленной и гладкой оболочек d_* будет корень уравнения $f_s = 1$ при $\eta = \eta_s^*$:

$$d_*^s = n^{-2/5},$$

при этом высота первого шпангоута

$$a_*^s = \sqrt[4]{\frac{(n^{4/3} - 1) \cdot d_*^3}{B_s}}.$$

Подставив полученные оптимальные значения a_*^s и d_*^s в (3.32), получим отношение масс подкрепленной оболочки и гладкой оболочки с равными значениями

критического давления для случая шарнирного опирания краев:

$$F_s(n) = n^{-2/5} + \frac{A}{\sqrt{B_s}} \sqrt{n^{2/15} - n^{-6/5}}.$$

Тем же методом может быть решена задача о минимизации массы конструкции в случае жесткой заделки краев цилиндрической оболочки.

3.5 Аналитическое и численное определение минимальной массы конструкции с заданным критическим давлением

В таблице 3.4 приведены значения функции отношения масс F_s для описанной выше конструкции с шарнирно опертыми краями. С увеличением числа шпангоутов n_s уменьшается масса конструкции. То же самое наблюдается и при увеличении отношения высоты первого шпангоута к его ширине ($k = b/a$). Параметр u , отвечающий за амплитуду функции распределения ($u = b_2/b_1$), для каждой из функций распределения выбран таким образом, чтобы оптимальное отношение толщины подкрепленной оболочки к толщине гладкой оболочки ($d_* = h/h_0$) было одинаковым, таким образом представляется возможным оценить влияние выбора функции профиля конструкции на уменьшение массы. При всех рассмотренных значениях n_s и k наибольшее уменьшение массы конструкции наблюдается при использовании экспоненциальной функции распределения.

Таблица 3.4 — Значения функции F_s для случая подрепления оболочки одинаковыми шпангоутами (f_0), а так же для линейного (f_{lin}), параболического (f_{parab}) и экспоненциального (f_{exp}) профилей конструкции

	$k = 1$				$k = 2$			
	n_s	d_*	a_*	M_s/M_0	n_s	d_*	a_*	M_s/M_0
$f_0(i)$	4	0,525	0,031	0,623	4	0,525	0,019	0,595
	5	0,488	0,030	0,603	5	0,488	0,018	0,570
	7	0,435	0,029	0,580	7	0,435	0,017	0,537
	9	0,398	0,028	0,568	9	0,398	0,016	0,518
$f_{lin}(i), u = 2$	n_s	d_*	a_*	M_s/M_0	n_s	d_*	a_*	M_s/M_0
	4	0,525	0,020	0,585	4	0,525	0,012	0,568
	5	0,488	0,016	0,545	5	0,488	0,010	0,529
	7	0,435	0,012	0,496	7	0,435	0,007	0,478
	9	0,398	0,010	0,461	9	0,398	0,006	0,443
$f_{parab}(i), u = 2$	n_s	d_*	a_*	M_s/M_0	n_s	d_*	a_*	M_s/M_0
	4	0,525	0,010	0,556	4	0,525	0,006	0,547
	5	0,488	0,007	0,517	5	0,488	0,004	0,508
	7	0,435	0,005	0,460	7	0,435	0,002	0,453
	9	0,398	0,002	0,420	9	0,398	0,001	0,414
$f_{exp}(i), u = 1.2$	n_s	d_*	a_*	M_s/M_0	n_s	d_*	a_*	M_s/M_0
	4	0,525	0,008	0,551	4	0,525	0,005	0,544
	5	0,488	0,004	0,503	5	0,488	0,002	0,498
	7	0,435	0,002	0,445	7	0,435	0,001	0,442
	9	0,398	0,001	0,404	9	0,398	0,001	0,403

В контексте дальнейших исследований, представленные в диссертации результаты предоставляют основу для ряда перспективных направлений.

Для задач о колебаниях и потере устойчивости оболочки, подкрепленной шпангоутами разной жесткости, следует рассмотреть шпангоуты с ненулевым эксцентриситетом: на практике шпангоут находится либо снаружи, либо внутри оболочки.

В задаче о колебаниях цилиндрической оболочки, сопряженной с полой крышкой особое внимание может быть уделено случаям, когда материалы крышки и оболочки различаются, возможно, имеют неоднородную структуру или используются различные методы крепления. А также случаям, когда крышка оболочки имеет форму эллипсоида вращения или какие-либо геометрические особенности.

Подробный анализ данных сценариев потребует разработки более сложных математических моделей и, вероятно, новых методов исследования. Эти направления открывают перспективы для глубокого понимания влияния различных параметров на общую прочность и устойчивость конструкции.

В дополнение, дальнейшие исследования могут сфокусироваться на анализе эффективности различных методов укрепления соединений между крышкой и оболочкой, что в конечном итоге способствует более широкому практическому применению полученных результатов в прикладных проектах.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. ОГИЗ, М.Л., 1946.
2. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. ГИТТЛ, 1955.
3. Timoshenko, S. Vibration problems in engineering. Van Nostrand, 1955.
4. Тимошенко, С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. Наука, 1971.
5. Власов, В.З. Общая теория оболочек и её приложение в технике. Гостехиздат, 1949.
6. Власов В.З. Избранные труды. Т.2: Тонкостенные упругие стержни. Изд-во АН СССР, 1963.
7. Власов В.З. Избранные труды. Т.3: Тонкостенные пространственные системы. Изд-во АН СССР, 1964.
8. Лурье, А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, 1947.
9. Коитер В. Устойчивость и закритическое поведение упругих систем //Механика, 1960, С. 99-110
10. Koiter, W.T. On the nonlinear theory of thin elastic shells //Proc. Koninkl. Nederl. Acad. Westenschap, 1966, 69, С. 1-54
11. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. Москва: Наука, 1979.
12. Гольденвейзер, А.Л. Теория упругих тонких оболочек. Наука, 1976.
13. Гольденвейзер А.Л. Асимптотический метод в теории оболочек //Успехи механики, 1982, 5, С. 137-182
14. Филлин, А.П. Элементы теории оболочек. Ленинград: Стройиздат, 1975. 256 с.

15. *Рейснер Э.* Некоторые проблемы теории оболочек // Упругие оболочки, 1962, С. 7-65
16. *Доннелл Л.Г.* Балки, пластины и оболочки. Наука, 1982.
17. *Новожилов В.В.* Теория упругости. Судпромгиз, 1958.
18. *Новожилов, В.В.* Теория упругих тонких оболочек. Судпромгиз, 1962.
19. *Муштару Х.М., Галимов Х.З.* Нелинейная теория упругих оболочек. Таткнигоиздат, 1957.
20. *Arbocz J. and Badcock C. D.* The effect of general imperfections on the buckling of cylindrical shells. 1969. 28–38 с.
21. *Арбош И., Бабель Г. В.* Тонкостенные оболочечные конструкции. Теория, эксперимент и проектирование. Машиностроение, 1980.
22. *Болотин, В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, 1956.
23. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. Физматгиз, 1961.
24. *Болотин В.В.* Вибрации в технике. Машиностроение, 1978.
25. *Товстик, П.Е.* Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы. Наука, 1995.
26. *Tovstik, P.E., Smirnov, A.L.* Asymptotic methods in the buckling theory of elastic shells. World Scientific Publishing Co Ltd., 2001.
27. *Михасев Г.И., Товстик П.Е.* Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы. Наука. Физматлит, 2009.
28. *Werner Soedel* Vibrations of Shells and Plates. Marcel Dekker Inc., 2004.
29. *Бургер И.А., Пановко Я.Г.* Прочность. Устойчивость. Колебания. Машиностроение, 1968.

30. *Филиппов С.Б.* Теория сопряженных и подкрепленных оболочек. Изд. СПбГУ, 1999. 196 с.
31. *Filippov, S.B.* Buckling, vibrations and optimal design of ring-stiffened thin cylindrical shells //Advances in Mechanics of Solids. С. 17–48
32. *Григолоук Э. И., Кабанов В. В.* Устойчивость оболочек. Наука, 1978.
33. *Вольмир, А.С.* Устойчивость деформируемых систем. Наука, 1967. 984 с.
34. *Саусвелл Р.В.* Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. Государственное издательство иностранной литературы. 1948
35. *Папкович П. Ф.* Труды по строительной механике корабля. В. 4 т. Судостроение, 1963.
36. *Алфутов Н.А.* Основы расчета на устойчивость упругих систем. Машиностроение, 1978.
37. *Динник А.Н.* Устойчивость упругих систем. 1935.
38. *Ржаницын А.Р.* Устойчивость равновесия упругих систем. М.:1955.
39. Lorenz R. “Die nicht achsensymmetrische Knickung dünnwandiger Hohlzylinder,” Physik-Zeitschrift, 12, No. 7, 241–260 (1911).
40. *Огибалов П.М.* Вопросы динамики и устойчивости оболочек. М.:Изд-во Московского университета, 1963.
41. *Ворович И. И., Александров В. М. (ред.)* Механика контактных взаимодействий. М.: Физматлит, 2001.
42. *Феодосьев В.И.* Расчеты на прочность в машиностроении. М.: Машгиз, 1950—1959.
43. *Flügge* Statik und Dynamik der Schalen, Springer Berlin Heidelberg. 1962.
44. *Погорелов А.В.* Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек. Наука. 1967.

45. *Bagheri, Hamed and Kiani, Yaser and Bagheri, Nasser and Eslami, M.*, Free vibration of joined cylindrical–hemispherical FGM shells //Archive of Applied Mechanics, 2020
46. *Kun Xie, Meixia Chen, Li Zuhui* Free and Forced Vibration Analysis of Ring-Stiffened Conical-Cylindrical-Spherical Shells Through a Semi-Analytic Method //Journal of Vibration and Acoustics, 2016
47. *Qu, Y., Chen, Y., Long, X., Hua, H., Meng, G.* A variational method for free vibration analysis of joined cylindrical-conical shells //J. Vib. Control, 2013, 19, C. 2319–2334
48. *Sarkheil, S., Foumani, M.S.* Free vibrational characteristics of rotating joined cylindrical-conical shells //Thin-walled Struct., 2016, 107, C. 657–670
49. *Lee, Y.S., Yang, M.S., Kim, H.S., Kim, J.H.* A study on the free vibration of the joined cylindrical-spherical shell structures //Comput. Struct., 2002, 80, C. 2405–2414
50. *Ma, X., Jin, G., Xiong, Y., Liu, Z.* Free and forced vibration analysis of coupled conical-cylindrical shells with arbitrary boundary conditions //Int. J. Mech. Sci., 2014, 88, C. 122–137
51. *Kang, J.H.* Vibrations of a cylindrical shell closed with a hemi-spheroidal dome from a three-dimensional analysis //Acta Mech., 2017, 228, C. 531–545
52. *Caresta, M., Kessissoglou, N.* Free vibrational characteristics of isotropic coupled cylindrical-conical shells //J. Sound Vib., 2010, 329, C. 733–751
53. *Shakouri, M., Kochakzadeh, M.A.* Free vibration analysis of joined conical shells analytical and experimental study //Thin Walled Struct., 2014, 85, C. 350–358
54. *Filippov, S.B., Naumova, N.V.* Axisymmetric vibrations of thin shells of revolution joint at a small angle //Technische Mechanik, 1998, 18, C. 285–290

55. *Filippov, S.B.* Asymptotic analysis of ring-stiffened shells vibrations //ENOC 2011, С. 24–29

56. *Лопатухин А.Л., Филиппов С.Б.* Низкочастотные колебания и устойчивость тонкой цилиндрической оболочки подкрепленной шпангоутами //Вестник СПбГУ. Сер. 1, 2001, Вып. 2, С. 84–90

57. *Filippov, S.B.* Asymptotic approximations for frequencies and vibration modes of cylindrical shell stiffened by annular plates //Analysis of Shells, Plates, and Beams - A State of the Art Report, 2020, 123, С. 123–140

58. *Bauer, S.M., Filippov, S.B., Smirnov, A.L., Tovstik, P.E., Vaillancourt, R.* Asymptotic methods in mechanics of solids. Springer International Publishing, 2015.

59. *Filippov, S.B.* Low-frequency vibration of cylindrical shells. Part II: Connected shells //Asymptotic methods in mechanics, CRM Proc and Lect Notes, AMS, 1993, С. 205–216

60. *Filippov, S.B.* Buckling, vibrations and optimal design of ring-stiffened thin cylindrical shells. 2006.

61. *Filippov, S.B.* Theory of connected and stiffened shells. St. Petersburg State University Press, 1999.

62. *Filippov, S.B.* Optimal Design of Stiffened Cylindrical Shells Based on an Asymptotic Approach //Technische Mechanik, 2004, 24, С. 221–230

63. *Шарыпов Д.В.* Низкочастотные колебания цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами //Вестник С.-Петербур. Ун-та, 1997, Вып. 3, С. 102–108

64. *Montes Roger, Pedroso Lineu, Silva, Frederico* Analysis of the nonlinear vibration of a clamped cylindrical shell considering the influence of the internal fluid and oceanic waves, 2022

65. *Moneim Abdullah, Ahmed Tarifm, Ahmed, Khondaker* Simplified Solution for Thin Plates Responses Using Beams Theory with Repetitive Boundary Conditions, 2023
66. *Zhang Dong, Liu Mingkun, Wang Jun, Liang Wei*, The Effect of the Ring on the Buckling of Stiffened Cylindrical Shells //IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2022
67. *Pasternak, Hartmut and Li, Zheng and Juozapaitis, Algirdas and Daniūnas, Alfonsas*, Ring Stiffened Cylindrical Shell Structures: State-of-the-Art Review //Applied Sciences, 2022
68. *Cao, Xiaoming and Wang, Lei and Li, Zhao and Zhang, Hao and Wang, Xinliang*, An analytical approach to global buckling of ring-stiffened sandwich cylindrical shells //Frontiers in Materials, 2022
69. *Bader, Qasim and Zuhra, Israa*, Buckling and stress analysis of stiffened cylindrical shell structure under hydrostatic pressure //Kufa Journal of Engineering, 2021
70. *Lu, Sheng-zhuo and Ma, Jing-xin and Liu, Lan and Xu, Chun-long and Wu, Shi-bo and Chen, Wei-dong*, Effect prediction of stiffened-ring cylindrical shells subjected to drop mass impact //Defence Technology, 2021
71. *Yang, Yang and Li, Jun-Jian and Zhang, Yu and He, Qi and Dai, Hong-Liang*, A semi-analytical analysis of strength and critical buckling behavior of underwater ring-stiffened cylindrical shells //Engineering Structures, 2021
72. *Hoshide, K and Chun, Pang-jo and Ohga, M and Shigematsu, T*, Buckling strength of thin-walled steel cylindrical shells with stiffened plates //IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2019
73. *Temami, Oussama and Ayoub, Ashraf and Hamadi, Djamal and Bennoui, Imed*, Effect of Boundary Conditions on the Behavior of Stiffened and Un-Stiffened

74. *Li, Xueqin and Song, Lu-Kai and Bai, Guangchen*, Nonlinear Vibration Analysis for Stiffened Cylindrical Shells Subjected to Electromagnetic Environment //Shock and Vibration, 2021

75. *Tian, J., Wang, C.M., Swaddiwudhipohg, S.* Elastic buckling analysis of ring-stiffened cylindrical shell under general pressure loading via Ritz method //Thin Walled Structures, 1999, 35, С. 1–24

76. *Мяченков В.И., Григорьев И.В.* Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ: Справочник. Машиностроение, 1981. 216 с.

77. *Нестерчук, Г.А.* Потеря устойчивости жестко заделанной подкрепленной цилиндрической оболочки //Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия, 2021, 8, С. 247–254

78. *Филиппов С.Б., Смирнов А.Л., Нестерчук Г.А.* Собственные колебания цилиндрической оболочки с крышкой. I. Асимптотический анализ //Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия, 2023, 10, С. 109–120

79. *Филиппов С.Б., Смирнов А.Л., Нестерчук Г.А.* Собственные колебания цилиндрической оболочки с крышкой. II. Анализ спектра //Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия, 2023, 10, С. 334–343

80. *Nesterchuk, G.A.* Buckling of a Clamped Stiffened Cylindrical Shell //Vestnik St.Petersb. Univ.Math., 2021, 54, С. 145–150

81. *Filippov S.B., Smirnov A.L., Nesterchuk G.A.* Natural Vibrations of a Cylindrical Shell with an End Cap. I. Asymptotic Analysis //Vestnik St.Petersb. Univ.Math., 2023, 56, С. 84–92

82. *Filippov S.B., Smirnov A.L., Nesterchuk G.A.* Free Vibrations of a Cylindrical Shell with a Cap. II. Analysis of the Spectrum //Vestnik St.Petersb. Univ.Math., 2023, 56, С. 245–251

83. *Filippov S.B., Nesterchuk G.A.* Buckling of a Ring-Stiffened Cylindrical Shell Under the External Pressure //Advanced Structured Materials, 2022, 151.

84. *Filippov S.B., Smirnov A.L., Nesterchuk G.A.* Free Vibrations of a Cylindrical Shell Closed with the Cap //Advanced Structured Materials, 2022, 180.

85. *Nesterchuk, G. A.* Vibrations of a thin cylindrical shell stiffened by rings with various stiffness //AIP Conference Proceedings, 2018, 1959, С. 070027

86. *Нестерчук, Г.А.* Колебания и устойчивость цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами с разной жесткостью //Труды семинара "Компьютерные методы в механике сплошной среды". 2012-2013 гг., 2013, С. 53-64

87. *Нестерчук, Г.А.* Собственные колебания тонкой заземленной цилиндрической оболочки, сопряженной с кольцевыми пластинами //Труды семинара "Компьютерные методы в механике сплошной среды". 2022-2023 гг., 2023, С. 78-98

88. Низкочастотные колебания сопряженных оболочек и пластин / С.Б. Филиппов, Г.А. Нестерчук // XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике : сборник тезисов докладов : в 4 т., Санкт-Петербург, 21–25 августа 2023 года / Министерство науки и высшего образования РФ; Российская академия наук; Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого. Том 1. – Санкт-Петербург: Политех-Пресс, 2023. – С. 10-12.

89. *Filippov S.B., Smirnov A.L., Nesterchuk G.A.* Vibrations of a cylindrical shell with the end plate //APM 2022, 2022, С. 56–56

90. *Filippov S.B., Nesterchuk G.A.* Buckling of a thin ring-stiffened cylindrical shells under uniform pressure //Proceedings of 29th Nordic Seminar on Computational Mechanics – NSCM29, 2016.

91. *Nesterchuk G.A.* Колебания тонкой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами разной жесткости //Восьмые Поляховские чтения : международная научная конференция по механике, 2018, С. 219–220

92. *Nesterchuk, Grigory A.* Устойчивость тонкой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами разной жесткости //Международная научная конференция по механике «IX Поляховские чтения», 2021, С. 330–331

93. *Нестерчук Г.А.* Заседание секции теоретической механики им. Н.Н. Поляхова Дома ученых им. М. Горького РАН 23 марта 2022 года //Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия, 2022, 9, С. 601