

Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Литвинов Николай Николаевич

**Построение алгоритмов управления для нелинейных
управляемых систем**

Научная специальность: 2.3.1.

Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Квитко Александр Николаевич

Санкт-Петербург — 2024

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Решение локальной граничной задачи в классе дискретных управлений для нелинейной нестационарной системы	12
1.1 Краткий обзор литературы	12
1.2 Постановка задачи и основная теорема	13
1.3 Построение вспомогательной системы	15
1.4 Решение задачи стабилизации вспомогательной системы	18
1.5 Продолжение доказательства теоремы	23
1.6 Оценка области достижимости	29
1.7 Выводы по главе 1	30
Глава 2. Построение, анализ и применение алгоритма дискретного управления	32
2.1 Описание алгоритма дискретного управления	32
2.2 Анализ вычислительной сложности алгоритма	34
2.2.1 Краткий обзор литературы	34
2.2.2 Теоретическая оценка вычислительной сложности алгоритма	35
2.2.3 Анализ вычислительной сложности	36
2.3 Дискретное управление однозвенным роботом-манипулятором	38
2.4 Дискретное управление однозвенным роботом-манипулятором при действии возмущений	42
2.5 Оптимальное управление однозвенным роботом-манипулятором при действии возмущений	45
2.6 Сравнение построенных алгоритмов управления	48
2.7 Выводы по главе 2	49
Глава 3. Решение локальной граничной задачи управления для нелинейных стационарных систем с учетом контроля вычислительных комплексов	50
3.1 Введение	50

	Стр.	
3.2	Постановка задачи и основная теорема	51
3.3	Формулировки вспомогательных задач и построение вспомогательных систем	53
3.4	Формулировка и доказательство вспомогательной леммы	62
3.5	Доказательство теоремы	66
3.6	Описание алгоритма	69
3.7	Решение задачи межорбитального перелета	71
3.8	Выводы по главе 3	75
 Глава 4. Решение задачи управления массивом Джозефсоновских переходов		 76
4.1	Введение	76
4.2	Описание модели	77
4.2.1	Модель массива идентичных Джозефсоновских переходов	77
4.2.2	Массив неидентичных Джозефсоновских переходов	79
4.3	Постановка задачи и ее решение	80
4.4	Результаты численного моделирования и их анализ	82
 Заключение		 86
 Список литературы		 88
 Приложение А. Программный код решения задачи дискретного управления роботом–манипулятором		 96
 Приложение Б. Программный код решения задачи оптимального управления роботом – манипулятором		 101

Введение

Актуальность работы.

Одним из направлений развития математической теории управления является исследование граничных задач для управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Впервые решение указанных задач для линейных нестационарных систем в классе управляющих функций, суммируемых с квадратом, получено Р. Калманом [1].

Существует несколько основных направлений исследований граничных задач управляемых систем ОДУ.

Первое связано с нахождением необходимых и достаточных условий, наложенных на правую часть управляемых систем, гарантирующих перевод систем управления в заданную точку фазового пространства. Указанным исследованиям посвящены работы Зубова В. И., Красовского Н. Н., Потапова А. П., Лепса Н. Л., Комарова В. А., Walczak S., Ohta Y. и Maeda H., Dirk A., Jersy S., Nistri P. и др.

Второе включает исследование множества конечных состояний, в которые возможен перевод управляемой системы из некоторого начального состояния. Основные результаты этого направления изложены в трудах Калмана Р., Черноушко Ф. Л., Панасюка А. И., Бердышева Ю. И. и др.

Третье направление касается разработки точных или приближенных методов построения управляющих функций и соответствующих им траекторий, соединяющих заданные точки в фазовом пространстве. Наиболее значимые результаты данного направления исследований приведены в работах Красовского Н.Н., Зубова В.И., Черноушко Ф. Л., Крищенко А. П., Квитко А. Н. и др.

Все упомянутые выше аспекты исследования управляемых систем достаточно хорошо изучены для линейных стационарных, нестационарных и нелинейных систем специального вида.

Отметим некоторые методы, применяемые для решения задач управления нелинейными системами:

- принцип максимума Понтрягина [2] и др.;
- дифференциально-геометрический подход [3–6] и др.;
- метод обратной задачи динамики [7–9] и др.;
- метод решения обратной спектральной задачи [10] и др.;

- приближенные методы решения [11; 12] и др.;
- методы интеллектуального управления [13] и др.;
- нейросетевые методы [14] и др.;
- обучение с подкреплением [15] и др.;
- классические методы теории управления [16–21] и др.

Вышеизложенное показывает, что проблема решения граничных задач для нелинейных систем общего вида является фундаментальной и далека от полного решения.

Анализ публикационной активности в реферативной базе данных рецензируемой научной литературы Scopus с 2012 по 2022 гг. по теме управления нелинейными системами, представленный на рис. 1, показывает рост количества публикаций. А общее число публикаций за указанный период составляет 114 997 (дата обращения - 13 декабря 2022 года).

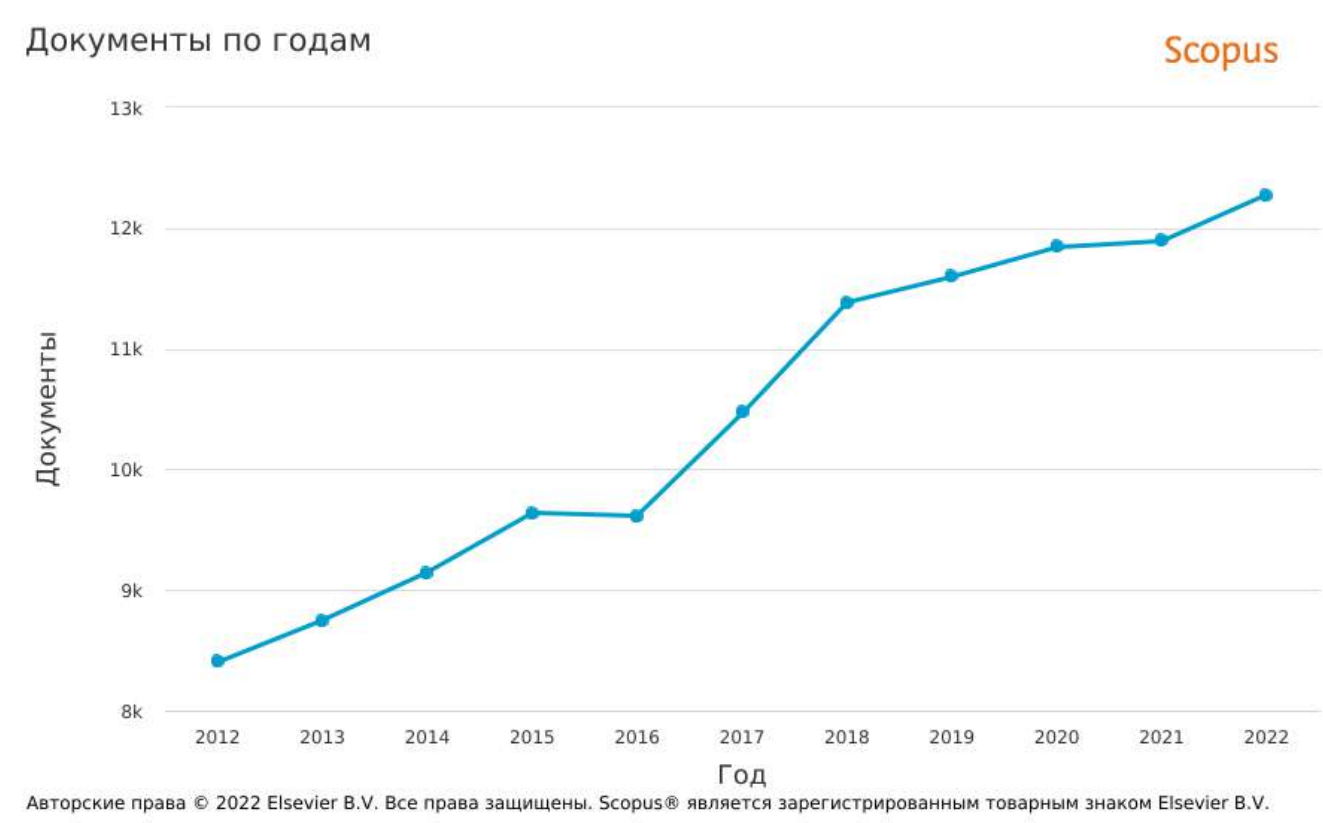


Рисунок 1 — Анализ публикационной активности по управлению нелинейными системами в Scopus с 2012 по 2022 гг. Ключевые слова: "control" и "nonlinear system" (дата обращения - 13 декабря 2022 года).

Таким образом, создание методов построения управляющих функций для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, а так-

же разработка на основе указанных методов алгоритмического и программного обеспечения являются актуальными задачами теории управления.

Цели и задачи. Основными целями настоящей работы являются:

1. разработка достаточно простого для численной реализации и устойчивого к погрешностям вычислений метода построения управляющих функций, гарантирующих перевод объекта управления из начального состояния в заданное конечное состояние на конечном промежутке времени с учетом дискретности и ограниченности управляющего воздействия;
2. разработка алгоритма построения управляющей функции, гарантирующей перевод широкого класса нелинейных стационарных управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений из начального состояния в начало координат с учетом возможности контроля исправности функционирования вычислительных комплексов;
3. изучение динамики управляемых систем нелинейных уравнений, описывающих массивы идентичных и неидентичных Джозефсоновских переходов, при помощи известного метода оптимального управления.

Для достижения поставленных целей необходимо получить решение следующих задач:

1. разработка алгоритма построения ограниченной по норме дискретной управляющей функции, обеспечивающей перевод из начального состояния в заданное конечное для достаточно широкого класса нелинейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений;
2. разработка алгоритма контроля вычислительных комплексов на основе построения управляющей функции, обеспечивающей перевод из начального состояния в начало координат для широкого класса нелинейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений;
3. реализация алгоритма построения дискретных управлений для нелинейной задачи в виде набора функций на языке Python;
4. апробация построенных алгоритмов на конкретных примерах и их анализ;
5. решение и численное моделирование задачи оптимального управления массивами идентичных и неидентичных Джозефсоновских переходов.

Методы исследования. В работе применяются методы математической теории управления, теории устойчивости, теории дифференциальных

уравнений, математического и функционального анализа, линейной алгебры, численные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, теории сложности вычислений и информационных технологий.

Теоретическая и практическая значимость. Разработан новый метод построения ограниченной по норме дискретной управляющей функции, обеспечивающей перевод из начального состояния в заданное конечное для достаточно широкого класса нелинейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Кроме того, получено конструктивное достаточное условие калмановского типа, при котором возможен указанный перевод.

Для реализации алгоритма дискретного управления разработана библиотека программных модулей, которая может быть применена для создания пакетов прикладных программ, предназначенных для решения задач управления, а также в учебном процессе.

Предложен алгоритм построения управляющей функции, которая гарантирует перевод широкого класса нелинейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений из начального состояния в начало координат с учетом возможности контроля исправности функционирования вычислительных комплексов. Найдены конструктивные достаточные условия, гарантирующие существование решения указанной задачи.

Применение алгоритма контроля вычислительных комплексов возможно на этапе разработки системы управления, а также в процессе формирования управляющего сигнала. Предлагаемый метод контроля может дополнить, а иногда и заменить традиционные инженерно-технические подходы. Кроме того, указанный алгоритм может быть использован при решении практической задачи выбора шага интегрирования в процессе решения задачи Коши для системы ОДУ, которая описывает математическую модель объекта управления.

Джозефсоновские переходы весьма перспективны для построения квантовых битов (кубитов). В настоящее время эта область достаточно активно развивается. Решение задачи управления массивом Джозефсоновских контактов может найти применение при решении технической задачи конструирования кубитов.

Достоверность полученных результатов обеспечивается корректным применением методов математической теории управления, вычислительной математики и информационных технологий. Основные положения подтверждаются численным моделированием конкретных практических задач.

Апробация результатов исследований. На основе результатов, изложенных в настоящей диссертационной работе, выполнен ряд устных докладов на конференциях:

1. Litvinov N. Global variables control of a Josephson junctions array. The 10th International Scientific Conference on Physics and Control PHYSCON'2021, Fudan University, Shanghai, China, 04.10.2021-08.10.2021
2. Литвинов Н. Н. Дискретное управление однозвенным роботом-манипулятором при действии возмущений. // Конференция СПИСОК-2022, 27–29 апреля 2022 г.
3. Литвинов Н. Н. Оптимальное управление однозвенным роботом-манипулятором при действии возмущений. // Конференция СПИСОК-2022, 27–29 апреля 2022 г.
4. Литвинов Н. Н. О вычислительной сложности одного алгоритма дискретного управления. // LIV Международная конференция аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» Control Processes and Stability (CPS'23), 4 - 7 апреля 2023 г. [22]

Публикации автора по теме диссертации. По теме диссертации опубликованы две статьи в периодических изданиях, включенных в библиографическую и реферативную базу данных рецензируемой научной литературы Scopus, а также в перечень ВАК, одна статья принята в печать, получено два свидетельства о регистрации программ для ЭВМ:

1. Квитко А. Н., Литвинов Н. Н. Решение локальной граничной задачи в классе дискретных управлений для нелинейной нестационарной системы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 1. С. 18–36. [23]
2. Litvinov N. Control of global variables for identical and non-identical Josephson junctions arrays // Cybernetics and Physics, vol. 10, No 3, pp. 138-142, 2021 <https://doi.org/10.35470/2226-4116-2021-10-3-138-142>. [24]
3. Литвинов Н. Н., Квитко А. Н. «Библиотека функций для решения задач дискретного управления» (DiscrControlLib). Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2023616889, 03.04.2023. Заявка № 22023615862 от 24.03.2023. [25]

4. Литвинов Н. Н., «Библиотека функций для решения ЛК-задач оптимального управления» (OptRicControlLib). Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2023616890, 03.04.2023. Заявка № 2023615863 от 24.03.2023. [26]
5. Kvitko, A. N. Solution of the Local-Boundary-Value Problem of Control for a Nonlinear Stationary System Taking into Account Computer System Verification. / A. N. Kvitko, N. N. Litvinov // Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy. — 2024. — Vol. 57, no. 2. — P. 202–212. Принята в печать. [27]

Личный вклад автора в подготовку публикаций. В совместных публикациях научному руководителю А. Н. Квитко принадлежат постановка задачи, предложение концепции решения и обсуждение результатов.

Краткое содержание. Во **введении** обосновывается актуальность диссертационной работы, приведен краткий обзор литературы, изложены основные цели, задачи, методы и результаты исследования. Обсуждается научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы.

Первая глава диссертации посвящена решению задачи дискретного управления нелинейной нестационарной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведены формулировка и доказательство теоремы, обосновывающей метод решения задачи. Получено конструктивное достаточное условие, при котором возможен перевод для широкого класса нелинейных нестационарных систем ОДУ из начального состояния в заданное конечное. Кроме того, проведена оценка множества достижимости для рассматриваемой задачи.

Во **второй главе** приведены анализ вычислительной сложности алгоритма дискретного управления, численное моделирование различных вариантов управления роботом-манипулятором при помощи алгоритма дискретного управления. Также выполнено сравнение построенного алгоритма с методом оптимального управления.

В **третьей главе** настоящей работы приведен алгоритм построения управляющей функции, гарантирующей перевод широкого класса стационарных нелинейных управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений из начального состояния в начало координат с учетом возможности контроля функционирования вычислительных комплексов. Найдены конструктивные достаточные условия, гарантирующие существование решения поставленной задачи. Даны рекомендации по построению алгоритма и приведена теоретическая

оценка вычислительной сложности. Работоспособность алгоритма продемонстрирована при помощи численного моделирования задачи межорбитального перелета.

Четвертая глава посвящена решению задачи оптимального управления системами ОДУ, которые описывают массивы идентичных и неидентичных Джозефсоновских переходов, численному моделированию и анализу динамики указанных моделей при наличии управления.

В **заключении** приведено краткое обсуждение полученных результатов и возможных направлений дальнейших исследований.

В **приложениях** представлен программный код решения задач дискретного и оптимального управления роботом-манипулятором.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и 2 приложений. Полный объем диссертации составляет 104 страницы, включая 27 рисунков. Список литературы содержит 82 наименования.

Основные научные результаты.

1. Разработан алгоритм построения дискретных управляющих функций для достаточно широкого класса нелинейных нестационарных систем [23].
2. Получено конструктивное достаточное условие, при котором возможен перевод для широкого класса нелинейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений из начального состояния в заданное конечное в классе непрерывных и дискретных управлений [23].
3. Разработан программный модуль для решения задач дискретного управления на языке программирования Python [25].
4. Разработан алгоритм решения граничной задачи управления для широкого класса нелинейных стационарных систем ОДУ с учетом контроля вычислительных комплексов [27].
5. Изучена динамика систем уравнений, описывающих массивы идентичных и неидентичных Джозефсоновских переходов при наличии управляющего воздействия, полученного при помощи метода оптимального управления [24].

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Алгоритм построения кусочно-постоянных управляющих функций, обеспечивающих перевод системы ОДУ из начального состояния в заданное конечное для достаточно широкого класса нелинейных нестационарных систем на конечном промежутке времени.
2. Алгоритм решения граничной задачи для нелинейной стационарной системы с учетом контроля вычислительных комплексов.
3. Нахождение конструктивных достаточных условий, обеспечивающих перевод нелинейной стационарной системы в начало координат из некоторой окрестности начала координат в классе непрерывных и дискретных управлений.
4. Пакет прикладных программ для решения задач дискретного управления на языке программирования Python.
5. Решение задачи оптимального управления массивами идентичных и неидентичных Джозефсоновских переходов.

Глава 1. Решение локальной граничной задачи в классе дискретных управлений для нелинейной нестационарной системы

1.1 Краткий обзор литературы

Применение цифровой вычислительной техники при формировании управляющего воздействия диктует необходимость решения задач управления системами ОДУ при помощи построения кусочно-постоянных или дискретных управляющих функций. Это обстоятельство обосновывает актуальность исследования граничных задач для управляемых систем ОДУ в классе указанных управлений.

Основные подходы к решению граничных задач в классе дискретных управлений на конечном промежутке времени включают в себя вопросы, связанные с нахождением необходимых и достаточных условий, гарантирующих существование их решений [28–34], построения или оценки множества достижимости, а также разработки точных или приближенных методов построения искомого управляющих функций [30; 31; 34–38].

Значительный практический интерес представляют задачи стабилизации линейных и нелинейных систем ОДУ в классе дискретных управлений. Эти задачи можно рассматривать как граничные на бесконечном интервале времени [37–42].

В настоящее время локальные и глобальные граничные задачи в классе дискретных управлений достаточно хорошо изучены для линейных, квазилинейных и нелинейных систем специального вида [28–53].

Решения задач кусочно-постоянной стабилизации и управления с учетом неполной информации на бесконечном промежутке времени представлены в работах [17; 37].

В монографии [52] рассматривается метод синтеза дискретных алгоритмов управления для нелинейных нестационарных систем на основе дискретизации непрерывных алгоритмов (рассматриваемых в указанной работе).

В публикации [53] предложены необходимые и достаточные условия локальной оптимальности в классе кусочно-постоянных управлений.

Построение алгоритмов для решения задач управления нелинейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений при помощи кусочно-постоянных функций Ляпунова различного вида представлено в работах [54; 55] и др.

В [54] предлагается метод определения устойчивости нелинейных систем при помощи кусочно-полиномиальных функций Ляпунова.

В статье [55] рассмотрен алгоритм стабилизации нелинейных систем с помощью построения кусочно-гладких функций Ляпунова.

Результаты настоящей главы опубликованы в статье [23] и были включены в выпускную квалификационную работу [56].

1.2 Постановка задачи и основная теорема

Рассмотрим управляемую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad (1.1)$$

в которой $x \in R^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $u \in R^r$, $u = (u_1, \dots, u_r)^T$, $r \leq n$, $t \in [0, 1]$,
 $f = (f_1, \dots, f_n)^T$, $f \in C^{(n)}(R^n \times R^r \times R^1; R^n)$;

$$\|u\| \leq N, N > 0, N = \text{const}. \quad (1.2)$$

В дальнейшем под нормой вектора x будем понимать величину $\|x\| = \sqrt{\sum x_i^2}$, а под нормой матрицы – норму, согласованную с нормой вектора x .

Правая часть системы (1.1) удовлетворяет условиям

$$f(0, 0, t) \equiv 0, \quad (1.3)$$

$$A_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 1), B_0 = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0, 1), S_0 = (B_0, A_0 B_0, \dots, A_0^{n-1} B_0),$$

$$\text{rank } S_0 = n. \quad (1.4)$$

Введем в рассмотрение матрицы вида

$$\begin{aligned} P &= \alpha e^{-\alpha\tau} A_0 + \alpha e^{-2\alpha\tau} A_1 + \dots + \alpha e^{-(n-1)\alpha\tau} A_{n-2}, \\ Q &= \alpha e^{-\alpha\tau} B_0 + \alpha e^{-2\alpha\tau} B_1 + \dots + \alpha e^{-(n-1)\alpha\tau} B_{n-2}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $A_i = \frac{(-1)^i}{i!} \frac{\partial^{i+1} f}{\partial x \partial t^i}(0,0,1)$, $i = 1, \dots, n-1$, $B_i = \frac{(-1)^i}{i!} \frac{\partial^{i+1} f}{\partial u \partial t^i}(0,0,1)$, $i = 1, \dots, n-1$.

Построим матрицу: $S = \{L_1(\tau), \dots, L_n(\tau)\}$, здесь $L_1(\tau) = Q(\tau)$, $L_i(\tau) = P(\tau)L_{i-1}(\tau) - \frac{dL_{i-1}}{d\tau}$, $i = 2, \dots, n$. Пусть

$$\text{rank } S(\tau) = n, \quad \tau \in [0, \infty), \quad \alpha > 0. \quad (1.6)$$

Рассмотрим разбиение интервала $[0, 1]$ на бесконечное число точек:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < 1,$$

где $t_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$.

Определение 1.1. *Управление $u(t)$ называется дискретным, если $u(t) = u_k$, $u_k \in R^r$, $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, \dots$*

Задача 1.1. Найти дискретное управление $u(t)$, определенное на бесконечном разбиении интервала $[0, 1]$ и абсолютно непрерывную функцию $x(t)$, которые почти всюду удовлетворяют системе (1.1) и условиям

$$x(0) = x_0, \quad x(1) = 0, \quad x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)^T. \quad (1.7)$$

Задача 1.2. Найти дискретное управление $u(t)$, определенное на конечном разбиении $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < 1$ интервала $[0, 1]$, $t \in [0, t_m]$ и абсолютно непрерывную функцию $x(t)$, почти всюду удовлетворяющую системе (1.1) и условиям

$$x(0) = x_0, \quad \|x(t_m)\| \leq \varepsilon_1, \quad |t_m - 1| < \varepsilon_2, \quad (1.8)$$

где t_m – неизвестное значение времени, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ – фиксированные числа.

Теорема 1.1. *Пусть для правой части системы уравнений (1.1) выполнены условия (1.3), (1.4), (1.6), тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, когда для всех x_0 , таких, что $\|x_0\| < \varepsilon$, существуют решения задач 1.1 и 1.2, которые могут быть найдены при помощи решения задачи стабилизации линейной нестационарной системы ОДУ с экспоненциальными коэффициентами и последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы.*

1.3 Построение вспомогательной системы

Рассмотрим задачу.

Найти абсолютно непрерывную функцию $x(t)$ и дискретную управляющую функцию $\bar{u}(t)$, которые почти всюду удовлетворяют системе (1.1) и условиям

$$x(0) = x_0, x(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow 1. \quad (1.9)$$

Указанную пару функций $x(t)$, $\bar{u}(t)$ будем называть решением задачи (1.1), (1.9).

Очевидно, имея решение задачи (1.1), (1.9), с помощью предельного перехода при $t \rightarrow 1$ можно получить решение задачи 1.1.

Для решения задачи (1.1), (1.9) выполним в системе (1.1) преобразование независимой переменной t по формуле

$$t(\tau) = 1 - e^{-\alpha\tau}, \tau \in [0, \infty), \quad (1.10)$$

где $\alpha > 0$ – некоторая постоянная, которая подлежит определению.

Тогда исходная система (1.1) и условия (1.9) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dc}{d\tau} &= \alpha e^{-\alpha\tau} f(c, d, t(\tau)), \\ c(0) &= x_0, c(\tau) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$c(\tau) = x(t(\tau)), c = (c_1 \dots c_n)^T, d(\tau) = u(t(\tau)), d = (d_1 \dots d_r)^T. \quad (1.12)$$

Рассмотрим дискретную управляющую функцию вида

$$\bar{d}(\tau) = d(kh), \tau \in [kh, (k+1)h), h > 0, k = 0, 1, \dots$$

Задача 1.3. Найти дискретное управление $\bar{d}(\tau)$ и абсолютно непрерывную функцию $c(\tau)$, которые удовлетворяют почти всюду системе (1.11) и следующим условиям:

$$c(0) = x_0, c(\tau) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow \infty. \quad (1.13)$$

Искомую пару функций $c(\tau)$, $\bar{d}(\tau)$ назовем решением задачи (1.11), (1.13).

Введем обозначения: $\tilde{x} = \theta_i c$, $\tilde{d} = \theta_i d$, $\tilde{t}(\tau) = 1 - \theta_i e^{-\alpha\tau}$, $\theta_i \in [0, 1]$.

Пусть $k_1, \dots, k_n, m_1, \dots, m_r$ – произвольные натуральные числа, тогда

$$|k| = \sum_{j=1}^n k_j, |m| = \sum_{j=1}^r m_j, k! = k_1! \dots k_n!, m! = m_1! \dots m_r!.$$

Представим правую часть системы (1.11) в окрестности точки $(0,0,1)$ в виде ряда Тейлора:

$$\begin{aligned} \frac{dc_i}{d\tau} &= \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0,1)c_j + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^r \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(0,0,1)d_j + \\ &+ \frac{1}{2} \alpha e^{-\alpha\tau} \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(0,0,1)c_j c_k + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial u_k}(0,0,1)d_j d_k + \right. \\ &+ 2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial u_k}(0,0,1)c_j d_k - 2\alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial t}(0,0,1)c_j - \\ &\left. - 2\alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^r \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial t}(0,0,1)d_j \right) + \dots + \\ &+ \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{\substack{|k|+|m|+l=n-1, \\ |k|+|m|\geq 1}} \frac{1}{k!m!l!} \frac{\partial f_i^{|k|+|m|+l}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \dots \partial u_r^{m_r} \partial t^l}(0,0,1) \times \\ &\quad \times c_1^{k_1} \dots c_n^{k_n} d_1^{m_1} \dots d_r^{m_r} (-1)^l e^{-l\alpha\tau} + \\ &+ \alpha e^{-\alpha\tau} \times \sum_{\substack{|k|+|m|+l=n, \\ |k|+|m|\geq 1}} \frac{1}{k!m!l!} \frac{\partial f_i^{|k|+|m|+l}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \dots \partial u_r^{m_r} \partial t^l}(\tilde{c}, \tilde{d}, \tilde{t}(\tau)) \times \\ &\quad \times c_1^{k_1} \dots c_n^{k_n} d_1^{m_1} \dots d_r^{m_r} (-1)^l e^{-l\alpha\tau}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Все рассуждения, приведенные ниже, будем проводить с учетом ограничений на функцию $c(\tau)$:

$$\|c(\tau)\| < C_1, C_1 > 0, \tau \in [0, \infty). \quad (1.15)$$

Объединяя в правой части системы (1.14) все слагаемые, линейные по компонентам векторов c и d с коэффициентами $e^{-i\alpha\tau}$, $i = 1, \dots, n$, систему (1.14) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dc}{d\tau} &= P \cdot c + Q \cdot d + R_1(c, d, \tau) + R_2(c, d, \tau) + R_3(c, d, \tau), \\ R_1 &= (R_1^1 \dots R_1^n)^T; \quad R_2 = (R_2^1 \dots R_2^n)^T, \quad R_3 = (R_3^1 \dots R_3^n)^T, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где P и Q определяются по формулам (1.5). Через R_i^1 обозначены слагаемые правой части системы (1.16), которые линейно зависят от компонент вектора c с коэффициентами $e^{-n\alpha\tau}$, R_i^2 - слагаемые, линейно зависящие от компонент вектора d с коэффициентами $e^{-n\alpha\tau}$. В R_i^3 входят все слагаемые, нелинейные по компонентам векторов c и d .

Из построения функций R_1, R_2, R_3 с учетом (1.2), (1.15) следуют оценки

$$\|R_1(c, d, \tau)\| \leq e^{-n\alpha\tau} L_1 \|c\|, L_1 > 0, \quad (1.17)$$

$$\|R_2(c, d, \tau)\| \leq e^{-n\alpha\tau} L_2 \|d\|, L_2 > 0, \quad (1.18)$$

$$\|R_3(c, d, \tau)\| \leq e^{-\alpha\tau} L_3 (\|c\|^2 + \|d\|^2), L_3 > 0. \quad (1.19)$$

Введем вспомогательную управляющую функцию $\mathbf{v}(\tau)$, связанную с $d(\tau)$ следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dd(\tau)}{d\tau} = \mathbf{v}(\tau), \quad \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r)^T. \quad (1.20)$$

Пусть

$$d(0) = 0. \quad (1.21)$$

Тогда система (1.16), (1.20) и начальные условия (1.13), (1.21) могут быть записаны так

$$\frac{d\bar{c}}{d\tau} = \bar{P} \cdot \bar{c} + \bar{Q} \cdot \mathbf{v} + \bar{R}_1(c, d, \tau) + \bar{R}_2(c, d, \tau) + \bar{R}_3(c, d, \tau), \quad (1.22)$$

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} P & Q \\ O_1 & O_2 \end{pmatrix}_{n+r \times n+r}, \quad \bar{Q} = \begin{pmatrix} O_3 \\ E \end{pmatrix}_{n+r \times r}, \quad (1.23)$$

здесь $\bar{c} = (c, d)_{n+r \times 1}^T$, $\bar{R}_1 = (R_1^1, \dots, R_1^n, 0, \dots, 0)_{n+r \times 1}^T$, $\bar{R}_2 = (R_2^1, \dots, R_2^n, 0, \dots, 0)_{n+r \times 1}^T$, $\bar{R}_3 = (R_3^1, \dots, R_3^n, 0, \dots, 0)_{n+r \times 1}^T$, O_1, O_2, O_3 - матрицы соответствующих размерностей, состоящие из нулевых элементов, E - единичная матрица,

$$\bar{c}(0) = \bar{c}_0, \quad \bar{c}_0 = (c(0), 0, \dots, 0)_{n+r \times 1}^T. \quad (1.24)$$

1.4 Решение задачи стабилизации вспомогательной системы

Рассмотрим линейную часть системы (1.22):

$$\frac{d\bar{c}}{d\tau} = \bar{P} \cdot \bar{c} + \bar{Q} \cdot \mathbf{v}. \quad (1.25)$$

Лемма 1.1. Пусть для системы дифференциальных уравнений (1.1) выполнены условия (1.4), (1.6), тогда существует вспомогательная управляющая функция $\mathbf{v}(\tau)$ вида

$$\mathbf{v}(\tau) = M(\tau)\bar{c}, \quad (1.26)$$

$$\|M(\tau)\| = O(e^{n\alpha\tau}) \text{ при } \tau \rightarrow \infty, \quad (1.27)$$

которая обеспечивает экспоненциальное убывание фундаментальной матрицы системы (1.25), замкнутой функцией (1.26).

Приведем краткое описание основных этапов решения поставленной задачи.

После решения задачи стабилизации системы (1.25), находим решение задачи Коши для системы (1.22) с начальными условиями (1.24), замкнутую найденным вспомогательным управлением (1.26). В итоге получим функции $c(\tau)$, $d(\tau)$, $\mathbf{v}(\tau)$ при $\tau \in [0, \infty)$. Далее, построим функцию

$$\bar{d}(\tau) = d(kh), \tau \in [kh, (k+1)h), k = 0, 1, \dots, \quad (1.28)$$

и решим задачу Коши для системы (1.22) с начальными условиями (1.24) после подстановки функции $\bar{d}(\tau)$ в ее правую часть первых n уравнений. В результате получим функцию $\bar{c}(\tau)$. В свою очередь, первая компонента $\bar{c}(\tau)$ даст функции $c(\tau)$. Если в функциях $c(\tau)$, $\bar{d}(\tau)$ перейти к исходным независимым переменным по формулам (1.10), (1.12), то из построения системы (1.22) будем иметь функции $x(t)$, $\bar{u}(t)$, которые являются решением задачи 3. Переходя к пределу в функциях $x(t)$, $\bar{u}(t)$ при $t \rightarrow 1$ получим решение задачи 1. При этом точки переключения дискретного управления t_k определяются по формуле

$$t_k = 1 - e^{-\alpha kh}, k = 0, 1, \dots \quad (1.29)$$

Если выбрать в решении задачи 1 значения t_m такие, что $\|x(t_m)\| \leq \varepsilon_1$, $1 - t_m < \varepsilon_2$, то сужения функций $x(t)$, $\bar{u}(t)$ на промежутке $[0, t_m]$ дадут решение задачи 2.

Доказательство леммы. Обозначим через $L_1^j, j = 1, \dots, r$ j -й столбец матрицы \bar{Q} . Рассмотрим матрицу

$$S_1 = \{L_1^1, L_2^1, \dots, L_{k_1}^1, L_1^2, L_2^2, \dots, L_{k_2}^2, \dots, L_1^r, L_2^r, \dots, L_{k_r}^r\},$$

$$L_i^j = \bar{P}L_i^{j-1} - \frac{dL_i^{j-1}}{d\tau}, \quad j = 1, \dots, r, \quad i = 2, \dots, k_j, \quad (1.30)$$

где $k_j, j = 1, \dots, r$, – максимальное количество столбцов матрицы $L_1^j, \dots, L_{k_j}^j, j = 1, \dots, r$, таких, что векторы $L_1^1, L_2^1, \dots, L_{k_1}^1, L_1^2, L_2^2, \dots, L_{k_2}^2, \dots, L_1^r, L_2^r, \dots, L_{k_r}^r$ линейно независимы.

Замечание 1.1. Легко видеть, что матрица S_1 с точностью до перестановки столбцов имеет следующую структуру:

$$S_1 = \begin{pmatrix} O_{n \times r} & L_1 & \dots & L_n \\ E_{r \times r} & O_{r \times r} & \dots & O_{r \times r} \end{pmatrix},$$

где $O_{r \times r}$ – матрица размера $r \times r$, состоящая из нулевых элементов,

$$L_1 = Q, \quad L_i = PL_i - \frac{dL_i}{d\tau}, \quad i = 2, \dots, n.$$

Пусть $\bar{L}_1^j, j = 1, \dots, r$, – j -й столбец матрицы $\alpha e^{-\alpha\tau} B_0$. Рассмотрим матрицу

$$S_2 = \{\bar{L}_1^1, \bar{L}_2^1, \dots, \bar{L}_{k_1}^1, \bar{L}_1^2, \bar{L}_2^2, \dots, \bar{L}_{k_2}^2, \dots, \bar{L}_1^r, \bar{L}_2^r, \dots, \bar{L}_{k_r}^r\},$$

$$\bar{L}_i^j = \alpha e^{-\alpha\tau} A_0 \bar{L}_i^{j-1} - \frac{d\bar{L}_i^{j-1}}{d\tau}, \quad j = 1, \dots, r, \quad i = 2, \dots, k_j.$$

С одной стороны, при помощи рассуждения от противного и принимая во внимание (1.4), можно убедиться в справедливости условия

$$\text{rank } S_2 = n, \quad \tau \in [0, \infty). \quad (1.31)$$

С другой стороны

$$A_0 + e^{-\alpha\tau} A_1 + \dots + e^{-(n-2)\alpha\tau} A_{n-2} \rightarrow A_0, \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty,$$

$$B_0 + e^{-\alpha\tau} B_1 + \dots + e^{-(n-2)\alpha\tau} B_{n-2} \rightarrow B_0, \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty. \quad (1.32)$$

Из (1.31), (1.32) следует оценка

$$\|S_2^{-1}\| = O(e^{n\alpha\tau}), \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (1.33)$$

Из условия (1.6) и структуры матрицы S_1 (см. Замечание 1.1) вытекает условие

$$\text{rank } S_1 = n + r, \quad \tau \in [0, \infty). \quad (1.34)$$

Из построения столбцов матрицы S_2 следует, что ее элементы убывают со скоростью не выше $e^{-n\alpha\tau}$. Отсюда и из структуры матриц \bar{P} и \bar{Q} следует, что элементы матрицы S_2^{-1} будут возрастать со скоростью не выше, чем $e^{n\alpha\tau}$ (см. (1.33)). В результате имеем оценку

$$\|S_1^{-1}\| = O(e^{n\alpha\tau}), \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (1.35)$$

Используя (1.34) выполним замену переменных:

$$\bar{c} = S_1(\tau)y. \quad (1.36)$$

В итоге система (1.25) примет вид:

$$\frac{dy}{d\tau} = S_1^{-1} \left(\bar{P}S_1 - \frac{dS_1}{d\tau} \right) y + S_1^{-1} \bar{Q}v. \quad (1.37)$$

В соответствии с [57] матрицу правой части системы (1.37) запишем следующим образом:

$$S_1^{-1} \left(\bar{P}S_1 - \frac{dS_1}{d\tau} \right) = \{e_2, \dots, e_{k_1}, \varphi_{k_1}(\tau), \dots, e_{k_1+\dots+k_{r-1}+2}, \dots, e_{k_1+\dots+k_r}, \varphi_{k_r}(\tau)\}. \quad (1.38)$$

В (1.38) $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)_{n+r \times 1}^T$ – столбец матрицы, в котором 1 стоит на i -м месте.

Компоненты вектора $\varphi_{k_j}(\tau)$ имеют вид:

$$\varphi_{k_j}(\tau) = (-\varphi_{k_1}^1(\tau), \dots, -\varphi_{k_1}^{k_1}(\tau), \dots, -\varphi_{k_j}^1(\tau), \dots, -\varphi_{k_j}^{k_j}(\tau), 0, \dots, 0)_{n+r \times 1}^T,$$

где $-\varphi_{k_j}^i(\tau)$ – коэффициенты разложения вектора $L_{k_j+1}^j$ по векторам L_i^1 ,

$i = 1, \dots, k_1$; L_i^2 , $i = 1, \dots, k_2$; L_i^j , $i = 1, \dots, k_j$, $j = 1, \dots, r$, $\sum_{j=1}^r k_j = n + r$.

$$L_{k_j+1}^j = - \sum_{i=1}^{k_1} \varphi_{k_1}^i(\tau) L_i^1 - \dots - \sum_{i=1}^{k_j} \varphi_{k_j}^i(\tau) L_i^j, \quad (1.39)$$

$$S_1^{-1}Q = \{e_1, \dots, e_{k_j+1}, \dots, e_{\gamma+1}\}, \quad \gamma = \sum_{i=1}^{r-1} k_i.$$

Рассмотрим задачу стабилизации системы

$$\frac{dy_{k_j}}{d\tau} = \{e_2^{k_j}, \dots, e_2^{k_j}, \bar{\varphi}_{k_j}\} y_{k_j} + e_1^{k_j} d_j, \quad j = 1, \dots, r, \quad (1.40)$$

в которой $y_{k_j} = (y_{k_j}^1, \dots, y_{k_j}^{k_j})_{k_j \times 1}^T$, $e_1^{k_j} = (0, \dots, 1, \dots, 0)_{k_j \times 1}^T$, 1 на i -м месте, $\bar{\varphi}_{k_j}^i = (-\varphi_{k_j}^1, \dots, -\varphi_{k_j}^{k_j})_{k_i \times 1}^T$.

Пусть $y_{k_j}^{k_j} = \psi$. Из структуры матрицы правой части системы (1.40) следуют равенства

$$y_{k_j}^{k_j} = \psi, \quad y_{k_j}^{k_j-1} = \psi^{(1)} + \varphi_{k_j}^{k_j} \psi, \quad (1.41)$$

$$y_{k_j}^{k_j-2} = \psi^{(2)} + \varphi_{k_j}^{k_j} \psi^{(1)} + \left(\frac{d\varphi_{k_j}^{k_j}}{d\tau} + \varphi_{k_j}^{k_j-1} \right) \psi,$$

$$y_{k_j}^1 = \psi^{(k_j-1)} + r_{k_j-2}(\tau) \psi^{(k_j-2)} + \dots + r_1(\tau) \psi^{(1)} + r_0(\tau) \psi.$$

После дифференцирования последнего равенства (1.41) и подстановки последнего выражения в первое уравнение системы (1.40) будем иметь систему

$$\psi^{(k_j)} + \varepsilon_{k_j-1}(\tau) \psi^{(k_j-1)} + \dots + \varepsilon_0(\tau) \psi = \mathbf{v}_j, \quad j = 1, \dots, r. \quad (1.42)$$

Замечание 1.2. Из построения матриц \bar{P} и \bar{Q} , а также из формул (1.39) вытекает ограниченность функций $\varphi_{k_j}^{k_j}(\tau), \dots, \varphi_{k_j}^2(\tau), \varphi_{k_j}^1(\tau)$ их производных, а также функций $r_{k_j-2}(\tau), \dots, r_1(\tau), r_0(\tau)$.

Пусть

$$\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^{k_j} (\varepsilon_{k_j-i}(\tau) - \gamma_{k_j-i}) \psi^{(k_j-i)}, \quad j = 1, \dots, r, \quad (1.43)$$

и коэффициенты γ_{k_j-i} выбраны таким образом, чтобы корни характеристического уравнения

$$\lambda^{k_i} + \gamma_{k_i-1} \lambda^{k_i-1} + \dots + \gamma_0 = 0, \quad i = 1, \dots, r$$

удовлетворяли условиям

$$\lambda_{k_i}^i \neq \lambda_{k_i}^j, i \neq j; \lambda_{k_i}^j < -(2n+1)\alpha - 1, j = 1, \dots, k_i, i = 1, \dots, r. \quad (1.44)$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем

$$\mathbf{v}_j = \delta_{k_j} T_{k_j}^{-1} S_{1k_j}^{-1} \bar{c}, \quad j = 1, \dots, r, \quad (1.45)$$

где $\delta_{k_j} = (\varepsilon_{k_j-1}(\tau) - \gamma_{k_j-1}, \dots, \varepsilon_0(\tau) - \gamma_0)$, T_{k_j} – матрица из равенств (1.41) такая, что $y_{k_j} = T_{k_j} \bar{\psi}$, $\bar{\psi} = (\psi^{k_j-1}, \dots, \psi)^T$, $S_{1k_j}^{-1}$ – матрица, состоящая из соответствующих k_j строк S_1^{-1} .

Полученная вспомогательная управляющая функция может быть записана в форме (1.26), в которой $M(\tau) = \delta_k T_k^{-1} S_{1k}^{-1} = (\delta_{k_1} T_{k_1}^{-1} S_{1k_1}^{-1}, \dots, \delta_{k_r} T_{k_r}^{-1} S_{1k_r}^{-1})^T$.

Пусть $\Psi(\tau)$ – фундаментальная матрица системы (1.42), замкнутая вспомогательным управлением (1.43). Из (1.44) следует, что $\Psi(\tau)$ является фундаментальной матрицей экспоненциально устойчивой линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Отсюда вытекает, что

$$\|\Psi(\tau)\Psi(t)^{-1}\| \leq \bar{M}e^{-\lambda(\tau-t)}, \bar{M} > 0, \lambda > 0. \quad (1.46)$$

Рассмотрим систему (1.25), замкнутую вспомогательной управляющей функцией (1.45):

$$\frac{d\bar{c}}{d\tau} = D(\tau)\bar{c}, \quad D(\tau) = \bar{P}(\tau) + \bar{Q}(\tau)M(\tau). \quad (1.47)$$

Пусть $\Phi(\tau)$ ($\Phi(0) = E$) – фундаментальная матрица системы (1.47). E – единичная матрица. Введем блочную диагональную матрицу $T(\tau)$ с матрицами T_{k_j} , $j = 1, \dots, r$, на ее диагонали. Из формул (1.36) и (1.41) получаем равенство

$$\Phi(\tau) = S_1(\tau)T(\tau)\Psi(\tau)\Psi^{-1}(0)T^{-1}(0)S_1^{-1}(0). \quad (1.48)$$

Далее, из (1.35), (1.36), (1.41), (1.46), (1.48) и замечания 2 следуют оценки

$$\begin{aligned}
\|\Phi(\tau)\| &\leq \bar{K}e^{-\lambda\tau}, \lambda > 0, \bar{K} > 0, \\
\|\Phi(\tau)\Phi^{-1}(t)\| &\leq \bar{K}_1e^{-\lambda(\tau-t)}e^{(n-1)\alpha t}, \tau \geq t, \bar{K}_1 > 0, \\
\|M(\tau)\| &= O(e^{n\alpha\tau}), \tau \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{1.49}$$

Лемма доказана.

1.5 Продолжение доказательства теоремы

Рассмотрим систему (1.22), замкнутую найденным вспомогательным управлением (1.26):

$$\frac{d\bar{c}}{d\tau} = D(\tau)\bar{c} + \bar{R}_1(c, d, \tau) + \bar{R}_2(c, d, \tau) + \bar{R}_3(c, d, \tau). \tag{1.50}$$

Выполним следующую замену переменных:

$$\begin{aligned}
\bar{c} &= z(\tau)e^{-n\alpha\tau}, z = (z_1, z_2)^T, \bar{c}(0) = z(0); \\
c &= z_1(\tau)e^{-n\alpha\tau}, d = z_2(\tau)e^{-n\alpha\tau}.
\end{aligned} \tag{1.51}$$

В результате система примет вид

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{d\tau} &= C(\tau)z + e^{n\alpha\tau}(\bar{R}_1(z_1e^{-n\alpha\tau}, z_2e^{-n\alpha\tau}, \tau) + \\
&\bar{R}_2(z_1e^{-n\alpha\tau}, z_2e^{-n\alpha\tau}, \tau) + \bar{R}_3(z_1e^{-n\alpha\tau}, z_2e^{-n\alpha\tau}, \tau)), \\
C(\tau) &= D(\tau) + n\alpha E.
\end{aligned} \tag{1.52}$$

Покажем, что все решения системы (1.52) с начальными условиями (1.51), начинающиеся в достаточно малой окрестности нуля, экспоненциально убывают.

Пусть $\Phi_1(\tau)$, $\Phi_1(0) = E$, – фундаментальная матрица системы $\frac{dz}{d\tau} = C(\tau)z$. Тогда, согласно (1.49), (1.51):

$$\begin{aligned}
\|\Phi_1(\tau)\| &\leq \bar{K}e^{-\beta\tau}, \|\Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)\| \leq K_1e^{-\beta(\tau-t)}e^{(n-1)\alpha t}, \\
\beta &= \lambda - n\alpha, \tau \geq t.
\end{aligned} \tag{1.53}$$

Выберем значение α так, чтобы выполнялось условие

$$\beta > 0. \quad (1.54)$$

Решение системы (1.50) с начальными условиями (1.24), (1.51) представим следующим образом:

$$z(\tau) = \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(\tau_1)z(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau} \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)e^{n\alpha t}(R_1(z_1e^{-n\alpha t}, z_2e^{-n\alpha t}, t) + R_2(z_1e^{-n\alpha t}, z_2e^{-n\alpha t}, t) + R_3(z_1e^{-n\alpha t}, z_2e^{-n\alpha t}, t))dt; \quad \tau \in [\tau_1, \infty), \quad (1.55)$$

$$z(\tau) = \Phi_1(\tau)\bar{c}(0) + \int_0^{\tau} \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)e^{n\alpha t}(R_1(z_1e^{-n\alpha t}, z_2e^{-n\alpha t}, t) + R_2(z_1e^{-n\alpha t}, z_2e^{-n\alpha t}, t) + R_3(z_1e^{-n\alpha t}, z_2e^{-n\alpha t}, t))dt; \quad \tau \in [0, \tau_1]. \quad (1.56)$$

Из (1.55), (1.56) с учетом (1.17) - (1.19), (1.53), (1.54) в области (1.2), (1.15) следуют оценки:

$$\|z(\tau)\| \leq \bar{K}e^{-\beta\tau} \|\Phi_1^{-1}(\tau_1)z(\tau_1)\| + \int_{\tau_1}^{\tau} K_1e^{-\beta(\tau-t)}Le^{-\alpha t}\|z\|dt, \quad \tau \in [\tau_1, \infty), \quad (1.57)$$

$$\|z(\tau)\| \leq \bar{K}e^{-\beta\tau} \|c(0)\| + \int_0^{\tau} K_1e^{-\beta(\tau-t)}Le^{-\alpha t}\|z\|dt, \quad \tau \in [0, \tau_1]. \quad (1.58)$$

Здесь $L > 0$ – константа, зависящая от области (1.2), (1.15).

Воспользовавшись теоремой 6.1 [58], из неравенств (1.57), (1.58) получаем неравенство

$$\|z(\tau)\| \leq \bar{K}e^{-\gamma\tau}\|z(\tau_1)\|, \quad \tau \in [\tau_1, \infty), \quad (1.59)$$

где $\gamma = \beta - K_1Le^{-\alpha\tau_1}$,

$$\|z(\tau)\| \leq \bar{K} e^{-\mu\tau} \|c(0)\|, \tau \in [0, \tau_1], \quad (1.60)$$

$$\mu = \beta - K_1 L.$$

Воспользовавшись условием (1.54), выберем $\tau_1 > 0$ таким образом, чтобы выполнялись неравенства $\gamma > 0$. Оценки (1.59), (1.60) можно записать так:

$$\|z(\tau)\| \leq K_1 e^{-\gamma\tau} \|c(0)\|, \tau \in [0, \infty). \quad (1.61)$$

Из (1.61) следует, что все решения системы (1.52), начинающиеся в области

$$\|x_0\| \leq \frac{C_1}{\bar{K}_1} \quad (1.62)$$

экспоненциально убывают.

При помощи формул (1.51), (1.26) получаем функции $\bar{c}(\tau) = (c(\tau), d(\tau))^T$, $\mathbf{v}(\tau)$. Вторая компонента вектора $\bar{c}(\tau)$ даст функцию $d(\tau)$. Из (1.51), (1.59) вытекает, что в области (1.2), (1.15) имеет место оценка:

$$\|\bar{c}(\tau)\| \leq K_2 e^{-(\gamma+n\alpha)\tau}, \tau \in [\tau, \infty), K_2 > 0. \quad (1.63)$$

Постоянная K_2 зависит от области (1.2), (1.15).

Подстановка $d(\tau)$ в (1.28) дает управление $\bar{d}(\tau)$. Рассмотрим систему (1.25), которая замкнута вспомогательной управляющей функцией $\mathbf{v}(\tau)$ после подстановки в правую часть ее первых n уравнений функции $\bar{d}(\tau)$, введенную в постановке задачи 3. Эту систему можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{c}}{d\tau} = & D(\tau)\bar{c} + \bar{Q}(\bar{d} - d) + \bar{R}_1(c, d, \tau) + \bar{R}_2(c, d, \tau) + \bar{R}_3(c, d, \tau) + \\ & (\bar{R}_2(c, \bar{d}, \tau) - \bar{R}_2(c, d, \tau)) + (\bar{R}_3(c, \bar{d}, \tau) - \bar{R}_3(c, d, \tau)), \quad (1.64) \\ & \tau \in [kh, (k+1)h), k = 0, 1, \dots, \bar{Q} = (Q, O_4)_{n+r \times r}^T, \end{aligned}$$

здесь O_4 – матрица соответствующей размерности, состоящая из нулевых элементов.

Из теоремы о среднем получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned}
R_2^i(c, \bar{d}, \tau) - R_2^i(c, d, \tau) &= \left(\left(\frac{\partial R_2^i}{\partial d}(c, \bar{d}, \tau) \right)^T, (d - \bar{d}) \right) = \\
&= \left(\left(\frac{\partial R_2^i}{\partial d}(c, \bar{d}, \tau) \right)^T, \frac{d}{d\tau} d(\bar{\tau}) h \right), \\
R_3^i(c, \bar{d}, \tau) - R_3^i(c, d, \tau) &= \left(\left(\frac{\partial R_3^i}{\partial d}(c, \bar{d}, \tau) \right)^T, (d - \bar{d}) \right) = \\
&= \left(\left(\frac{\partial \bar{R}_3^i}{\partial d}(c, \bar{d}, \tau) \right)^T, \frac{d}{d\tau} d(\bar{\tau}) h \right),
\end{aligned} \tag{1.65}$$

где \bar{d} – средняя точка в области (1.2), $\bar{d} = (\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_r)^T$.

Из (1.20), (1.26), (1.27), (1.63), (1.65) в области (1.2), (1.15) следуют оценки

$$\begin{aligned}
\| \mathbf{v}(\tilde{\tau}) \| &= \left\| \frac{d}{d\tau} d(\tilde{\tau}) \right\| \leq \| M(\tilde{\tau}) \| \| \bar{c}(\tilde{\tau}) \| \leq K_4 e^{-\gamma \tilde{\tau}} = \\
&= K_3 e^{-\gamma \tau} e^{\gamma(\tau - \tilde{\tau})} \leq K_3 e^{-\gamma \tau} e^{\gamma h} = K_4 e^{-\gamma \tau}, \\
K_4 > 0, K_4 &= K_3 e^{\gamma h}, \tilde{\tau} \in [kh, (k+1)h], \tau \in [kh, (k+1)h], \\
\tilde{\tau} &= (\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_r)^T; \mathbf{v}(\tilde{\tau}) = (\mathbf{v}_1(\tilde{\tau}_1), \dots, \mathbf{v}_r(\tilde{\tau}_r))^T.
\end{aligned} \tag{1.66}$$

В (1.66) постоянная K_4 зависит от области (1.2), (1.15), но не зависит от номера k .

Из (1.65), (1.66) получим неравенства

$$\begin{aligned}
\| \bar{d} - d \| &\leq K_5 e^{-\gamma \tau} h, K_5 > 0, \| R_2^i(c, \bar{d}, \tau) - R_2^i(c, d, \tau) \| \leq K_6 e^{-\gamma \tau} h, \\
K_6 > 0, \| R_3^i(c, \bar{d}, \tau) - R_3^i(c, d, \tau) \| &\leq K_7 e^{-\gamma \tau} h, K_7 > 0, \\
\tau &\in [kh, (k+1)h], k = 0, 1, \dots
\end{aligned} \tag{1.67}$$

В (1.67) постоянные K_5 , K_6 , K_7 зависят от области (1.2), (1.15), но не зависят от значения k . Покажем, что все решения системы (1.64), начинающиеся в достаточно малой окрестности нуля, экспоненциально убывают. В системе (1.64) выполним замену переменной \bar{c} по формуле (1.51). В результате имеем равенства

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{d\tau} = & C(\tau)z + e^{n\alpha\tau}(\bar{Q}(\bar{d} - d) + \bar{R}_1(z_1e^{-n\alpha\tau}, \bar{d}, \tau) + \\
& \bar{R}_2(z_1e^{-n\alpha\tau}, d, \tau) + \bar{R}_3(z_1e^{-n\alpha\tau}, d, \tau) + \\
& (\bar{R}_2(z_1e^{-n\alpha\tau}, \bar{d}, \tau) - \bar{R}_2(z_1e^{-n\alpha\tau}, d, \tau)) + \\
& + (\bar{R}_3(z_1e^{-n\alpha\tau}, \bar{d}, \tau) - \bar{R}_3(z_1e^{-n\alpha\tau}, d, \tau))), \\
d(\tau) = & z_2(\tau)e^{-n\alpha\tau}, \bar{d}(kh) = z_2(kh)e^{-n\alpha kh}, \\
\tau \in & [kh, (k+1)h], k = 0, 1, \dots
\end{aligned} \tag{1.68}$$

Решение системы (1.68) с начальными условиями (1.51), (1.24) имеет вид

$$\begin{aligned}
z(\tau) = & \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(kh)z(kh) + \int_{kh}^{\tau} \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)e^{n\alpha t}(\bar{Q}(\bar{d} - d) + \\
& + \bar{R}_1(z_1e^{-n\alpha t}, z_2e^{-n\alpha t}, t) + \bar{R}_2(z_1e^{-n\alpha t}, z_2e^{-n\alpha t}, t) + \\
& R_3(z_1e^{-n\alpha t}, z_2e^{-n\alpha t}, t) + (\bar{R}_2(z_1e^{-n\alpha\tau}, \bar{d}, \tau) - \bar{R}_2(z_1e^{-n\alpha\tau}, d, \tau)) + \\
& + (\bar{R}_3(z_1e^{-n\alpha\tau}, \bar{d}, \tau) - \bar{R}_3(z_1e^{-n\alpha\tau}, d, \tau)))dt, \tau \in [kh, (k+1)h],
\end{aligned} \tag{1.69}$$

$$\begin{aligned}
z(\tau) = & \Phi_1(\tau)\bar{c}(0) + \int_0^{\tau} \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)e^{n\alpha t}(\bar{Q}(\bar{d} - d) + \\
& \bar{R}_1(z_1e^{-n\alpha t}, z_2e^{-n\alpha t}, t) + \bar{R}_2(z_1e^{-n\alpha t}, z_2e^{-n\alpha t}, t) + \\
& R_3(z_1e^{-n\alpha t}, z_2e^{-n\alpha t}, t) + (\bar{R}_2(z_1e^{-n\alpha\tau}, \bar{d}, \tau) - \bar{R}_2(z_1e^{-n\alpha\tau}, d, \tau)) + \\
& + (\bar{R}_3(z_1e^{-n\alpha\tau}, \bar{d}, \tau) - \bar{R}_3(z_1e^{-n\alpha\tau}, d, \tau)))dt, \tau \in [0, kh].
\end{aligned} \tag{1.70}$$

Из формул (1.69), (1.70) с учетом (1.17), (1.18), (1.19), (1.51), (1.53), (1.63), (1.66), (1.67) следуют оценки

$$\begin{aligned}
\|z(\tau)\| \leq & \bar{K}e^{-\beta(\tau-kh)} \|z(kh)\| + \int_{kh}^{\tau} Ke^{-\beta(\tau-t)}(L\|z\| + K_8h)e^{-\alpha t}dt, \\
\tau \in & [kh, (k+1)h],
\end{aligned} \tag{1.71}$$

$$\|z(\tau)\| \leq Ke^{-\beta\tau} \|c(0)\| + \int_0^{\tau} Ke^{-\beta\tau}(L\|z\| + K_8h)e^{-\alpha t}dt, \tau \in [0, kh], \tag{1.72}$$

здесь $\bar{K} = Ke^{(n-1)\alpha kh}$.

Применяя к формулам (1.71), (1.72) результат из [58], получим оценки

$$\|z(\tau)\| \leq \bar{K}e^{-\gamma_1(\tau-k_1h)}\|z(k_1h)\| + K_9he^{-\alpha\tau}, \quad \tau \in [k_1h, (k_1+1)h), \quad (1.73)$$

в которых $\gamma_1 = \beta - KLe^{-\alpha k_1h}$,

$$\|z(\tau)\| \leq \bar{K}e^{-\mu_1\tau}\|c(0)\| + K_{10}h, \quad \tau \in [0, k_1h], \quad (1.74)$$

где $\mu_1 = \beta - KL$.

Выберем значение $k = k_1$ таким, чтобы выполнялось условие $\gamma_1 > 0$.

В (1.73), (1.74) константы $K_9, K_{10} > 0$ зависят от области (1.2), (1.15) и не зависят от значения k . С одной стороны, из (1.73), (1.74) следует, что все решения системы (1.52), принадлежащие области (1.2), (1.15) экспоненциально убывают. С другой стороны, согласно (1.74) можно подобрать $\varepsilon > 0$, $h_0 > 0$, такие, что для любых $x_0, h : \|x_0\| < \varepsilon$, $0 < h < h_0$ решение системы будет принадлежать области (1.2), (1.15).

Тогда подстановка (1.69), (1.70) в формулы (1.26), (1.51) даст известные функции $\bar{c}(\tau)$, $\mathbf{v}(\tau)$. В силу построения систем (1.16), (1.22) и (1.68) имеем то, что функция $c(\tau)$, соответствующая первой компоненте функции $\bar{c}(\tau)$, удовлетворяет системе (1.11) при подстановке в правую часть $\bar{d}(\tau)$. Из (1.51), (1.73) следует, что функция $c(\tau)$ удовлетворяет граничным условиям (1.13). Следовательно, пара функций $c(\tau)$, $\bar{d}(\tau)$ является решением задачи 3.

Возвращаясь к исходной независимой переменной t по формулам (1.10), (1.11), (1.29), получаем функции $x(t) = c(\tau(t))$, $\bar{u}(t) = \bar{d}(\tau(t))$ и $\bar{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{v}(\tau(t))$, которые удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \bar{u}(t), t), \\ \dot{u} &= \alpha^{-1}(1-t)^{-1}\bar{\mathbf{v}}(t) \end{aligned} \quad (1.75)$$

и начальным условиям

$$x(0) = 0, u(0) = 0, \bar{u}(t) = u(t_k), t \in [t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, \dots \quad (1.76)$$

В свою очередь, из построения системы (1.75) следует, что найденная пара функций $x(t)$, $\bar{u}(t)$ есть решение задачи (1.1), (1.9). Далее, переходя к пределу при $t \rightarrow 1$ в функциях $x(t)$, $\bar{u}(t)$ получаем решение задачи 1.

Сужения функций $x(t)$, $\bar{u}(t)$ на интервале $[0, t_m]$ дадут решение задачи 2.

Теорема доказана.

1.6 Оценка области достижимости

Определение 1.2. Областью достижимости называется множество всех точек $M = \{x_0\} \in R^n$ такое, что для всех $x_0 \in M$ существует пара функций $x(t), u(t)$, удовлетворяющая системе ОДУ (1.1) и условиям (1.2), (1.3), (1.7), (1.8), (1.9).

Оценка области $\|x_0\| < \varepsilon$, в которой начинаются решения системы (1.1), переводящие вектор состояния в начало координат, даст оценку искомой области достижимости.

Неравенство (1.62) описывает область достижимости для непрерывного случая.

Выполним оценку области достижимости при условии воздействия на систему ОДУ (1.1) дискретной функции управления.

Из формулы (1.74) следует, что в области (1.2), (1.15) справедлива оценка:

$$\|x_0\| \leq \frac{C_1 - K_{10} \cdot h}{\bar{K}}, \quad (1.77)$$

где $0 < h < h_0$ – шаг дискретизации; \bar{K} , K_{10} – константы, описанные выше. Из (1.70), (1.72) с учетом оценок (1.67) получим

$$K_{10} \leq \frac{K_1 \cdot (K_5 + K_6 + K_7)}{(n-1) \cdot \alpha}, \quad (1.78)$$

Из (1.77), (1.78) следует

$$\|x_0\| \leq \frac{C_1 - \frac{K_1 \cdot (K_5 + K_6 + K_7)}{(n-1) \cdot \alpha} \cdot h}{\bar{K}}, \quad (1.79)$$

Формула (1.79) дает оценку области достижимости.

Проведем оценку шага дискретизации, от которого зависит область достижимости (1.77). Для построенного метода минимальное число точек, в которых необходимо проинтегрировать функцию, равно числу точек переключения, определяемых по формуле (1.29).

Дальнейшие рассуждения проводятся при условии применения явных численных методов интегрирования систем дифференциальных уравнений.

Из (1.44) следует, что все вещественные части собственных значений матрицы правой части вспомогательной системы уравнений при воздействии

управления строго отрицательны. Величина шага интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений для явных методов составляет [59]:

$$\Delta t \leq \frac{a}{|\lambda_{max}|}. \quad (1.80)$$

Здесь a – постоянная, которая зависит от применяемого численного метода; λ_{max} – максимальное по модулю собственное число матрицы вспомогательной системы.

Из (1.29) и (1.80) следует

$$1 - e^{-\alpha h_0} \leq \frac{a}{|\lambda_{max}|}.$$

С учетом условий (1.44) оценка для максимального шага дискретизации имеет вид:

$$h_0 \leq \left| \frac{\ln\left(1 - \frac{a}{(2n+1)\alpha+1}\right)}{\alpha} \right|. \quad (1.81)$$

Выполним подстановку значения (1.81) в (1.77) и получим окончательную оценку области достижимости, которая учитывает дискретность управления:

$$\|x_0\| \leq \frac{C_1 - K_{10} \cdot \left| \frac{\ln\left(1 - \frac{a}{(2n+1)\alpha+1}\right)}{\alpha} \right|}{\bar{K}}. \quad (1.82)$$

Из формул (1.77), (1.82) следует, что с увеличением шага дискретизации уменьшается область достижимости.

1.7 Выводы по главе 1

В настоящей главе решена задача кусочно-постоянного управления для широкого класса нелинейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В процессе решения получены конструктивные достаточные условия, гарантирующие существование управляющей функции, обеспечивающей перевод из начального состояния в заданное конечное для

указанного класса систем за конечный промежуток времени. Кроме того, выполнена оценка области достижимости для рассматриваемых систем.

На основе доказательства теоремы возможно построение алгоритма, который можно применять для решения задач управления различными техническими и физическими системами, описываемыми системами ОДУ, правые части которых удовлетворяют условиям (1.3), (1.4), (1.6). Построению и подробному исследованию данного алгоритма посвящена следующая глава.

Глава 2. Построение, анализ и применение алгоритма дискретного управления

Материалы настоящей главы опубликованы в статьях [22],[23], а также включены в выпускную квалификационную работу аспиранта [56].

2.1 Описание алгоритма дискретного управления

Метод решения граничной задачи в классе дискретных управлений, изложенный в главе 1, дает алгоритм построения искомого управления, состоящий из следующих этапов [22; 23]:

Построение вспомогательной системы.

1. Разложение системы (1.1) по формуле Тейлора.
2. Замена исходной независимой переменной t на вспомогательную независимую переменную τ по формуле

$$t(\tau) = 1 - e^{-\alpha\tau}, \quad \tau \in [0, \infty), \quad \alpha > 0.$$

Результатом вычисления пп. 1 и 2 является система:

$$\frac{dc}{d\tau} = P \cdot c + Q \cdot d + \sum_{i=1}^3 R_i(c, d, \tau), \quad R_i = (R_i^1 \dots R_i^n)^T.$$

3. Введение вспомогательного управления, удовлетворяющего системе

$$\frac{d}{d\tau}d(\tau) = \mathbf{v}(\tau), \quad \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r)^T, \quad d(0) = 0,$$

и построение вспомогательной системы

$$\frac{d\bar{c}}{d\tau} = \bar{P} \cdot \bar{c} + \bar{Q} \cdot \mathbf{v}, \tag{2.1}$$

где $\bar{P} = \begin{pmatrix} P & Q \\ O_1 & O_2 \end{pmatrix}_{(n+r) \times (n+r)}$, $\bar{Q} = \begin{pmatrix} O_3 \\ E \end{pmatrix}_{(n+r) \times r}$. O_1, O_2, O_3 – матрицы соответствующих размерностей, состоящие из нулевых элементов, E – единичная матрица.

Далее рассматривается линейная часть вспомогательной системы (2.1).
Решение задачи стабилизации вспомогательной системы.

4. Построение матрицы

$$S = \begin{pmatrix} O_{n \times r} & L_1 & \dots & L_n \\ E_{r \times r} & O_{r \times r} & \dots & O_{r \times r} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

где $O_{r \times r}$ – матрица размера $r \times r$, состоящая из нулевых элементов,
 $L_1 = Q$, $L_i = PL_i - \frac{dL_i}{d\tau}$, $i = 2, \dots, n$.

5. Вычисление матрицы $\bar{S} = S^{-1} \left(\bar{P}S - \frac{dS}{d\tau} \right)$.

6. Определение коэффициентов полинома, корни которого находятся в левой полуплоскости и удовлетворяют условиям (см. формулы (40) – (42) в [23])

$$\lambda_{k_i}^i \neq \lambda_{k_i}^j, i \neq j; \lambda_{k_i}^j < -(2n + 1)\alpha - 1, j = 1, \dots, k_i, i = 1, \dots, r.$$

7. Вычисление вспомогательной управляющей функции

$\mathbf{v}(\tau) = M(\tau)\bar{c}$, $M(\tau) = \delta T^{-1}S^{-1}$, $\bar{c} = (c, d)$, где T – верхняя треугольная матрица, построенная на основе элементов матрицы \bar{S} ; δ – вектор-строка, полученная на основе \bar{S} и коэффициентов полинома из п. 6.

8. Решение задачи Коши для вспомогательной системы с начальными условиями $c(0) = x_0$, замкнутой управлением $\mathbf{v}(\tau)$. Результатом решения являются функции $\bar{c}(\tau) = (c(\tau), d(\tau))$, $\mathbf{v}(\tau)$.

Решение задачи управления исходной системой.

9. Нахождение точек переключения по формуле

$$t_k = 1 - e^{-\alpha k h}, k = 0, 1, \dots, \quad (2.3)$$

где h – шаг дискретности управления.

10. Переход в функции $\mathbf{v}(\tau)$ к исходной независимой переменной t по формуле (1.10), дающий $\bar{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{v}(\tau(t))$.

11. Решение задачи Коши для системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \bar{u}(t), t), \dot{u} = \alpha^{-1}(1 - t)^{-1}\bar{\mathbf{v}}(t), \\ x(0) &= 0, u(0) = 0, \bar{u}(t) = u(t_k), t \in [t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

На восьмом и одиннадцатом этапах алгоритма решается задача Коши при помощи одного из численных методов решения ОДУ [60; 61]. Остальные этапы реализуются аналитически при помощи программных пакетов для символьных вычислений, например [62].

2.2 Анализ вычислительной сложности алгоритма

В настоящем разделе рассматриваются оценка и анализ вычислительной сложности алгоритма дискретного управления, приведенного выше.

Излагаемый материал был представлен на LIV Международной конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» Control Processes and Stability (CPS'23), проходившей с 4 по 7 апреля 2023 г. и опубликован в статье [22].

2.2.1 Краткий обзор литературы

При разработке программного обеспечения для ЭВМ полезно знать оценку вычислительной сложности реализуемых алгоритмов.

Оценку вычислительной сложности чаще всего проводят по времени работы алгоритма. Также иногда бывает полезной оценка затрат памяти при выполнении вычислений.

Данные по вычислительной сложности для некоторых алгоритмов управления приведены в работах [44; 54; 55] и др.

Кроме того, следует отметить работу [63], посвященную анализу вычислительной сложности для алгоритмов синтеза оптимальных управлений, получаемых в рамках теоретико-игровых моделей функционирования активных систем.

На основе результатов оценок вычислительной сложности алгоритмов приведенных в [44; 54; 55; 63] и др., можно сделать вывод, что значительная часть из них имеет не более, чем полиномиальную сложность.

2.2.2 Теоретическая оценка вычислительной сложности алгоритма

Лемма 2.1. Вычислительная сложность алгоритма дискретного управления, построенного в [23] составляет

$$O(n^4) + O(K \cdot C(n)), \quad (2.5)$$

где $O(n^4)$ – сложность символьных вычислений; $O(K \cdot C(n))$ – вычислительная сложность решения задачи Коши методом Рунге–Кутты; $K = \left\lceil \frac{\ln((1-t_m)^{-1})}{\alpha \cdot h} \right\rceil + 1$ – количество точек переключения (1.29); $C(n)$ – функция, характеризующая количество операций при вычислении компонент интегрируемой функции.

Доказательство. Наибольшую вычислительную сложность имеют операции вычисления матрицы (2.2) и решение задачи Коши (2.4).

При вычислении (2.2) требуется $n - 1$ умножений двух прямоугольных матриц размером $(n + r) \times (n + r)$ и $(n + r) \times r$. Оценка сверху сложности данной операции составляет $O((n + r)^2 \cdot r)$. Так как $r \leq n$ по условию задачи, с учетом необходимого количества умножений для определения (2.2) получим оценку сверху для данной операции: $O(n^4)$.

Интегрирование задачи Коши производится на интервале $t \in [0, 1]$. Точки переключения определяются по (2.3) и составляют либо счетное (задача 1.1, Глава 1), либо конечное (задача 1.2, Глава 1) множество. Для оценки количества операций в наихудшем случае необходимо определить наибольшее количество точек переключения. С этой целью можно принять точность приближения к 1 значения t_m на правом конце интервала $[0, 1]$. Тогда из формулы (2.3) будем иметь количество точек переключения:

$$K = m + 1 = \left\lceil \frac{\ln((1-t_m)^{-1})}{\alpha \cdot h} \right\rceil + 1,$$

где $|1 - t_m| < \varepsilon_2$ – точность приближения значения t_m на правом конце интервала $[0, 1]$ в соответствии с задачей 2 из Главы 1.

2.2.3 Анализ вычислительной сложности

На основе полученной формулы (2.5) построены графики, которые показывают характер зависимости функций роста вычислительной сложности и ее составляющих от размерности задачи и точности приближения на правом конце интервала $[0,1]$ (рис. 2.1 – 2.3). Были приняты значения: $\varepsilon_{2f} = 10^{-6}$ (точность float), $\varepsilon_{2d} = 10^{-16}$ (точность double), $\alpha = 0,25$, $h = 0,01$, $C(n) = 120 \cdot n$. Значения ε_2 выбраны исходя из стандартных значений типов данных float и double, применяемых в различных языках программирования.

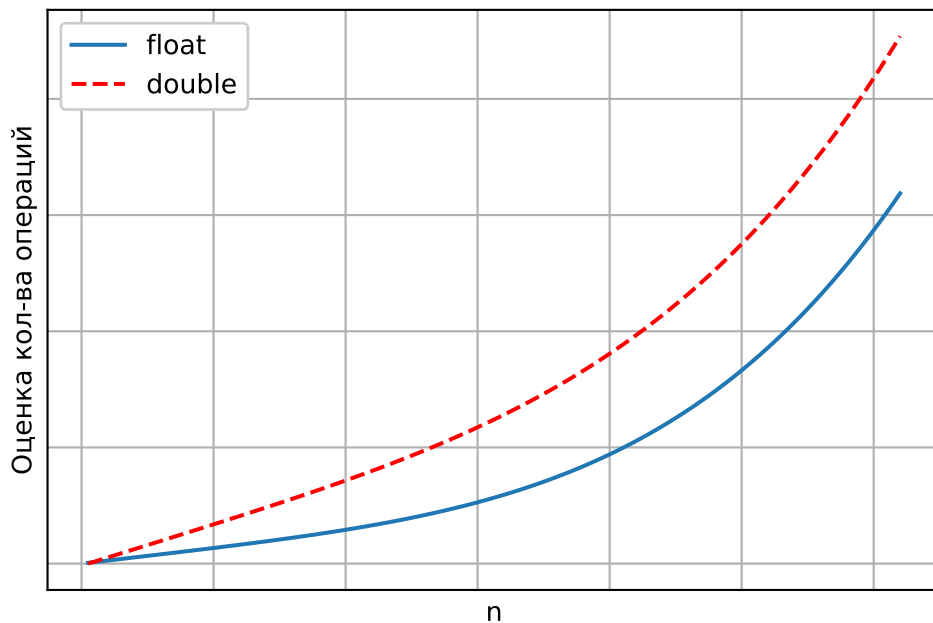


Рисунок 2.1 — Характер зависимости вычислительной сложности от размерности задачи при разных значениях точности приближения на конце интервала $[0, 1]$

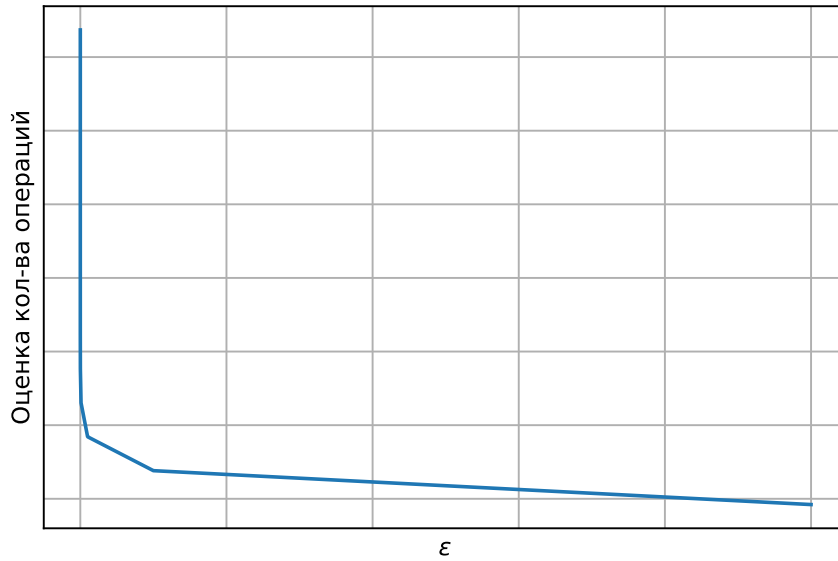


Рисунок 2.2 — Характер зависимости вычислительной сложности от точности решения задачи

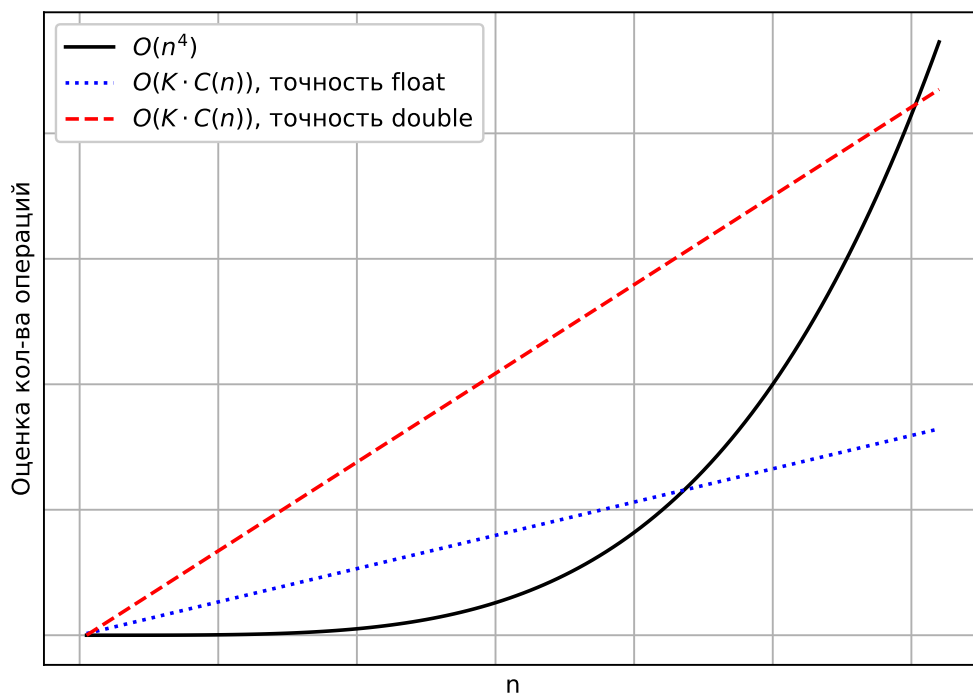


Рисунок 2.3 — Характер зависимости вычислительной сложности символьной и численной частей алгоритма от размерности задачи

Анализ графиков на рис. 2.1 – 2.3 и полученных формул позволяет сделать следующие выводы:

1. чем выше точность приближения на правом конце интервала $[0,1]$, тем больше вычислительная сложность решения задачи Коши;
2. при небольших размерностях сложность решения задачи Коши превышает сложность символьных вычислений;
3. начиная с некоторого значения $N = \left\lceil \sqrt[3]{C \cdot \frac{\ln(\varepsilon_2^{-1})}{\alpha \cdot h}} \right\rceil$, вклад в вычислительную сложность символьных вычислений превышает сложность решения задачи Коши;
4. при достаточно большой размерности задачи вычислительную сложность решения системы ОДУ можно не учитывать, однако, большинство решаемых задач управления обычно имеет небольшую размерность (порядка 2 – 10);
5. вычислительная сложность исследуемого алгоритма зависит от значений α и h .

2.3 Дискретное управление однозвенным роботом-манипулятором

Рассмотрим задачу управления роботом-манипулятором, который перемещает груз переменной массы в заданную точку. Решение настоящей задачи также изложено в работе [23].

В соответствии с [64; 65] систему уравнений запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a_2(t) \sin x_1 - a_1(t)x_2 + u,\end{aligned}$$

здесь x_1 – угол отклонения манипулятора от вертикальной оси, x_2 – угловая скорость манипулятора, $a_1(t) = \bar{\alpha}L^{-2}m_1(t)^{-1}$, $m_1(t) = m(t) + M/3$, $a_2(t) = gL^{-1}(m(t) + M/2)m_1(t)^{-1}$, M – масса манипулятора, L – длина манипулятора, g – ускорение свободного падения, $\bar{\alpha}$ – коэффициент трения, $m(t) = m_0 - qt$ – масса груза, $q > 0$, m_0 – начальная масса груза, $x = (x_1, x_2)^T$ – вектор состояния, u – скалярное управление.

Рассмотрим граничные условия $x(0) = \bar{x}$, $x(1) = 0$.

Аналоги системы уравнений (1.22) и условий (1.24) имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{dc_1}{d\tau} &= \alpha e^{-\alpha\tau} c_2, \\
\frac{dc_2}{d\tau} &= -\alpha e^{-\alpha\tau} a_2 (1 - e^{-\alpha\tau}) \sin c_1 - \alpha e^{-\alpha\tau} a_1 (1 - e^{-\alpha\tau}) c_2 + \alpha e^{-\alpha\tau} d, \\
\frac{d}{d\tau} d(\tau) &= \nu,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

в которых $c_1(\tau) = x_1(t(\tau))$, $c_2(\tau) = x_2(t(\tau))$,

$$c_1(0) = \bar{x}_1, \quad c_2(0) = \bar{x}_2, \quad d(0) = 0, \quad c_i(\tau) \rightarrow 0. \tag{2.7}$$

Линейная часть системы (2.6):

$$\frac{d\bar{c}}{d\tau} = \bar{P}\bar{c} + \bar{Q}\nu, \quad \bar{c} = (c_1, c_2, d)^T, \tag{2.8}$$

где \bar{P} и \bar{Q} построены по формулам (1.23):

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha e^{-\alpha\tau} & 0 \\ -a_2(1)\alpha e^{-\alpha\tau} & -a_1(1)\alpha e^{-\alpha\tau} & \alpha e^{-\alpha\tau} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Составим матрицу (1.30):

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha^2 e^{-2\alpha\tau} \\ 0 & \alpha e^{-\alpha\tau} & \alpha^2 e^{-\alpha\tau} - a_1(1)\alpha^2 e^{-2\alpha\tau} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

Из (2.9) следует, что выполнены условия (1.4) и (1.6).

Матрица \bar{S} имеет вид

$$\bar{S} = S^{-1} \left(\bar{P}S - \frac{dS}{d\tau} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha^2 (-2e^{2\alpha\tau} + a_1(1)e^{\alpha\tau} - a_2(1)) e^{-2\alpha\tau} \\ 0 & 1 & 3\alpha - a_1(1)\alpha e^{-\alpha\tau} \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Введем обозначения для элементов третьего столбца матрицы (2.10):

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(\tau) \\ \varphi_2(\tau) \\ \varphi_3(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha^2 (-2e^{2\alpha\tau} + a_1(1)e^{\alpha\tau} - a_2(1)) e^{-2\alpha\tau} \\ 3\alpha - a_1(1)\alpha e^{-\alpha\tau} \end{bmatrix}.$$

Матрица T имеет вид

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -\varphi_3(\tau) & -\left(\frac{d\varphi_3(\tau)}{d\tau} + \varphi_2(\tau)\right) \\ 0 & 1 & -\varphi_3(\tau) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Строку $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ ищем в форме

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\gamma_2 - \varphi_3 \\ -\gamma_1 - 2\frac{d\varphi_3(\tau)}{d\tau} - \varphi_2(\tau) \\ -\gamma_0 - \frac{d^2\varphi_3(\tau)}{d\tau^2} - \frac{d\varphi_2(\tau)}{d\tau} \end{bmatrix}^T, \quad (2.12)$$

где $\gamma_2 = 12$, $\gamma_1 = 47$, $\gamma_0 = 60$.

Подставляя (2.12), (2.11), (2.9) в (1.45) получим:

$$\mathbf{v}(\tau) = M(\tau)\bar{c}, \quad M(\tau) = \delta T^{-1} S^{-1}, \quad \bar{c} = (c_1, c_2, d), \quad (2.13)$$

$$M(\tau) = (m_1(\tau), m_2(\tau), m_3(\tau)),$$

$$\begin{aligned} m_1(\tau) &= -a_1(1)a_2(1)\alpha e^{-\alpha\tau} + 3a_2(1)\alpha + a_2(1)\gamma_2 - 8\alpha e^{2\alpha\tau} - 4\gamma_2 e^{2\alpha\tau} - \frac{2\gamma_1 e^{2\alpha\tau}}{\alpha} - \frac{\gamma_0 e^{2\alpha\tau}}{\alpha^2}, \\ m_2(\tau) &= -a_1(1)^2\alpha e^{-\alpha\tau} + 3a_1(1)\alpha + a_1(1)\gamma_2 + a_2(1)\alpha e^{-\alpha\tau} - 7\alpha e^{\alpha\tau} - 3\gamma_2 e^{\alpha\tau} - \frac{\gamma_1 e^{\alpha\tau}}{\alpha}, \\ m_3(\tau) &= -3\alpha + a_1(1)\alpha e^{-\alpha\tau} - \gamma_2. \end{aligned}$$

Далее, решаем задачу Коши для системы (2.6) с начальными условиями (2.7), замкнутую управлением (2.13). В итоге имеем функции $c_1(\tau)$, $c_2(\tau)$, $d(\tau)$, $\mathbf{v}(\tau)$.

Используя формулы (1.10) и (1.29) получим функцию $\bar{\mathbf{v}}(t) = \bar{\mathbf{v}}(\tau(t))$ и точки переключения t_k .

Решим задачу Коши для системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a_2(t) \sin x_1 - a_1(t)x_2 + \bar{u}, \\ \dot{u} &= \alpha^{-1}(1-t)^{-1}\mathbf{v}(t) \end{aligned}$$

с начальными условиями $x_1(0) = \bar{x}_1$, $x_2(0) = \bar{x}_2$, $u(0) = 0$.

Численное моделирование проводилось при следующих значениях параметров модели: $\bar{x}_1 = -0.5$ рад, $\bar{x}_2 = -0.8$ рад/с, $\bar{\alpha} = 0.1$, $\alpha = 0.25$, $L = 10$ м, $M = 20$ кг, $m_0 = 1$ кг, $h = 0.01$, $q = 0.01$, $t \in [0, 0.99]$.

При решении задачи Коши применен метод Рунге–Кутты. На рис. 2.4 представлены графики изменения фазовых координат $x_1(t)$, $x_2(t)$ и управления $u(t)$.

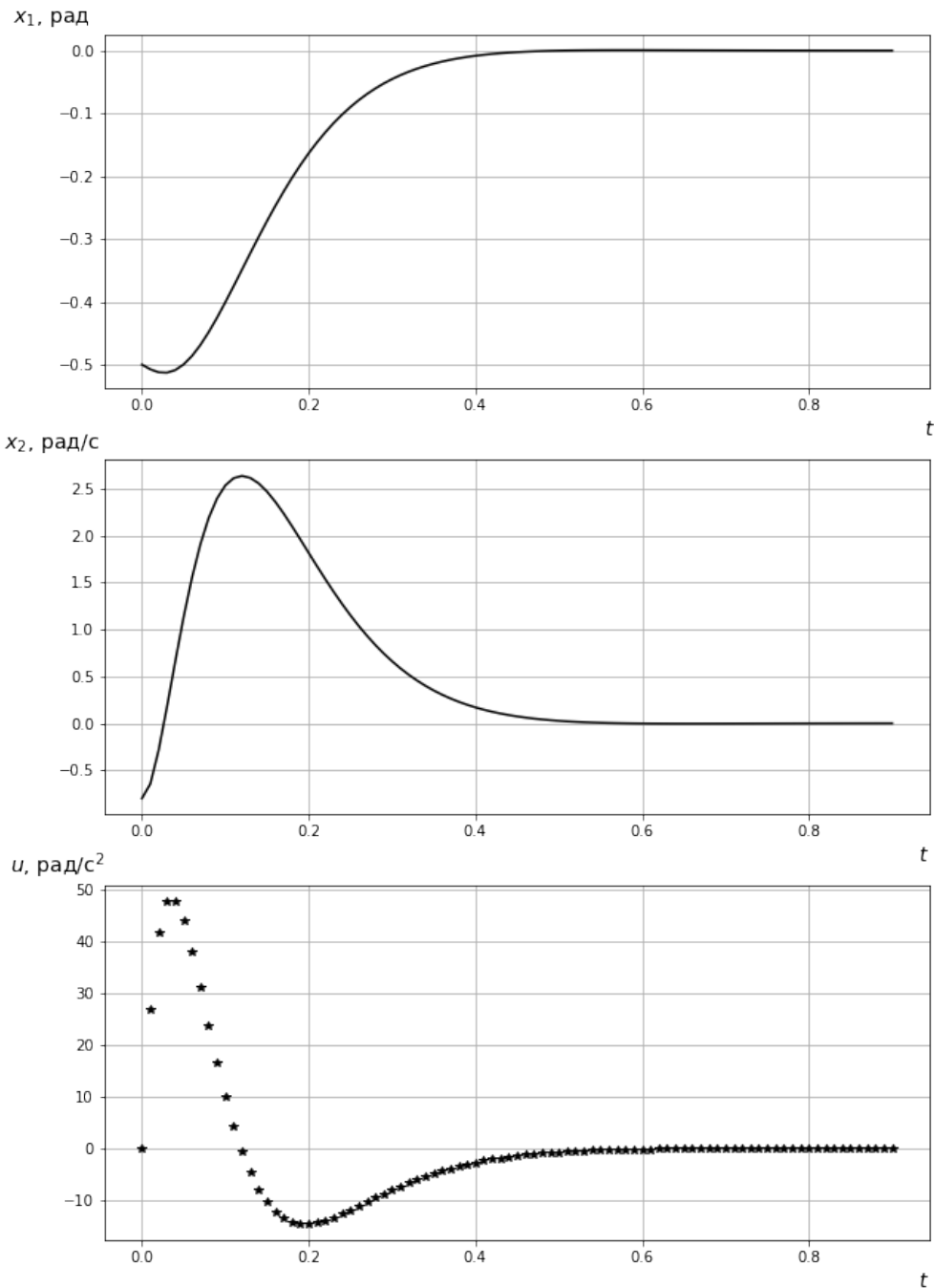


Рисунок 2.4 — Графики функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, $u(t)$

Изучение результатов численного моделирования, представленных на рис. 2.4, позволяет сделать следующие выводы:

1. графики изменения функций фазовых координат и управления иллюстрируют переходной процесс;
2. наибольшие затраты ресурса управления приходятся на начальный участок перевода от 0 до 0.2 и максимальное значение управляющего воздействия составляет около 50 рад/с²;
3. предложенный алгоритм может быть использован при решении задачи стабилизации на конечном промежутке времени для широкого класса нелинейных нестационарных систем. Это сокращает время переходного процесса.

2.4 Дискретное управление однозвенным роботом-манипулятором при действии возмущений

Рассмотрим систему уравнений модели управления однозвенным роботом манипулятором, который перемещает груз переменной массы в заданную точку при действии возмущений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a_2(t) \sin x_1 - a_1(t)x_2 + f(1-t)^2 + u, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $f(1-t)^2$ - возмущающее воздействие, а остальные параметры приведены в разделе 2.3.

Граничные условия имеют вид:

$$x(0) = \bar{x}, x(1) = 0. \quad (2.15)$$

Задача дискретного управления. Найти дискретное управление $u(t_k)$, которое решает задачу стабилизации системы (2.14) при граничных условиях (2.15), где t_k - точки переключения, определяемые по формуле:

$$t_k = 1 - e^{-\alpha kh}, k = 0, 1, \dots \quad (2.16)$$

h - шаг дискретизации, $\alpha > 0$ - произвольная постоянная, подлежащая определению, $t \in [0; 1]$.

Для решения задачи получим управляющую функцию для системы (2.3) при помощи алгоритма дискретного управления, представленного в первом разделе настоящей главы. Подставим полученную управляющую функцию в систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a_2(t) \sin x_1 - a_1(t)x_2 + f(1-t)^2 + \bar{u}, \\ \dot{u} &= \alpha^{-1}(1-t)^{-1}\mathbf{v}(t). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Далее, решим задачу Коши с начальными условиями $x_1(0) = \bar{x}_1$, $x_2(0) = \bar{x}_2$, $u(0) = 0$ и проведем численное моделирование.

При расчетах приняты следующие значения параметров: $\bar{\alpha} = 0.1$, $L = 10$ м, $M = 20$ кг, $m_0 = 1$ кг, $q = 0.01$, $t \in [0, 0.99]$, $\bar{x}_1 = 0.5$ рад, $\bar{x}_2 = -0.8$ рад/с. Для определения границ применимости построенного алгоритма рассмотрены различные значения возмущающего воздействия, шага дискретизации h и параметра α .

При решении задачи Коши применен метод Рунге–Кутты [61]. На рис. 2.5–2.8 представлены графики изменения фазовых координат $x_1(t)$, $x_2(t)$ и управления $u(t)$ при различных значениях параметров α , h и возмущения.

Анализ результатов численного моделирования:

1. цель управления достигается при любых значениях начальных данных и практически от них не зависит;
2. при увеличении возмущающего воздействия увеличивается время, необходимое для стабилизации системы; однако, это происходит практически при любом значении возмущения, см. рис. 2.5, 2.6; указанное обстоятельство связано с убывающим характером возмущающего воздействия;
3. значение шага дискретизации h необходимо выбирать в диапазоне значений $0 < h < 0.536$, см. рис. 2.7; оптимальное значение шага дискретного управления $h = 0.1$, см. рис. 2.5;
4. диапазон значений параметра α лежит в интервале $\alpha \in (0; 2.135)$, см. рис. 2.8, а оптимальное значение данной постоянной - 0.25.

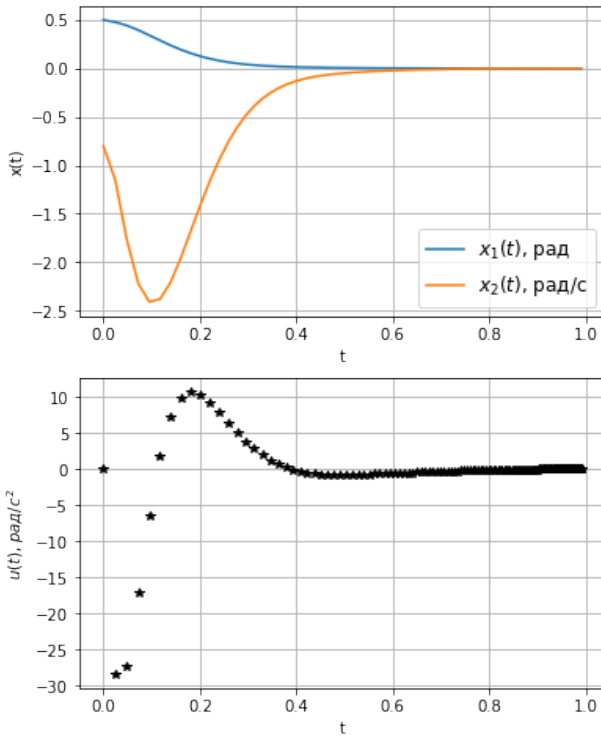


Рисунок 2.5 — Решение задачи Коши системы (2.17) при значениях $f = 5$, $\alpha = 0.25$, $h = 0.1$

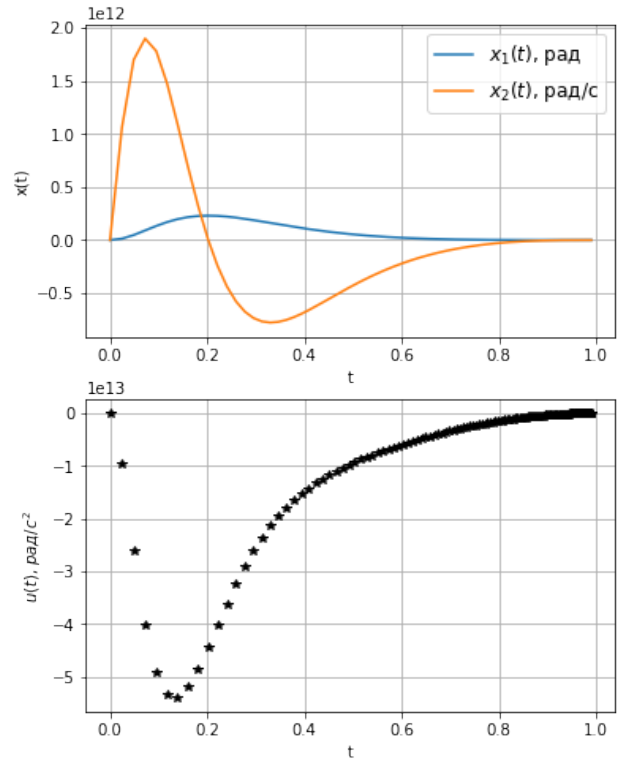


Рисунок 2.6 — Решение задачи Коши системы (2.17) при значениях $f = 5 \cdot 10^{13}$, $\alpha = 0.25$, $h = 0.1$

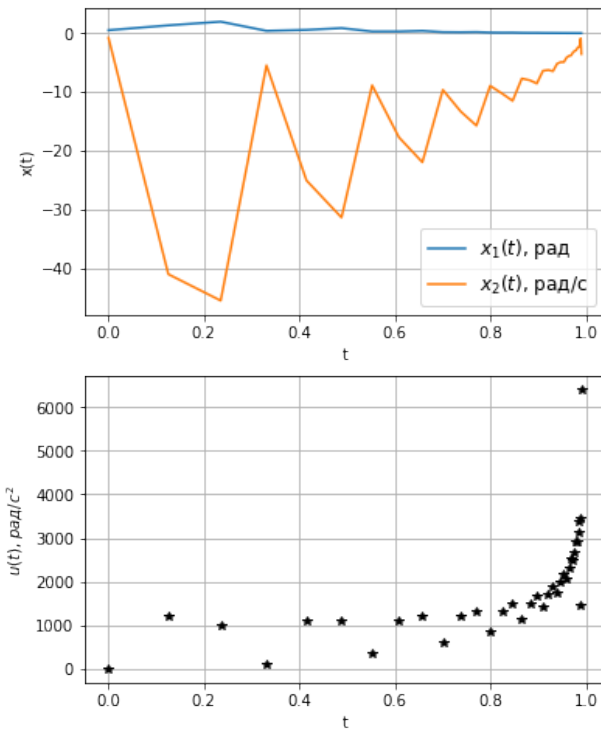


Рисунок 2.7 — Решение задачи Коши системы (2.17) при значениях $f = 5$, $\alpha = 0.25$, $h = 0.536$

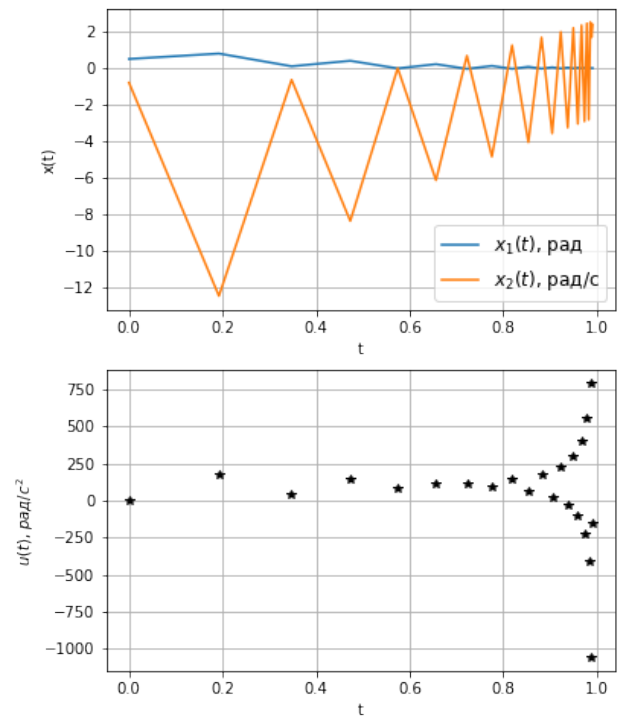


Рисунок 2.8 — Решение задачи Коши системы (2.17) при значениях $f = 5$, $\alpha = 2.135$, $h = 0.1$

2.5 Оптимальное управление однозвенным роботом-манипулятором при действии возмущений

В настоящем разделе излагается решение задачи оптимального управления однозвенным роботом-манипулятором с учётом возмущающих воздействий. Рассматриваемая система является нелинейной.

В работе [66] рассмотрены некоторые подходы к решению задач оптимального управления для нелинейных систем. Например, один из них предполагает рассмотрение линейно-квадратичной задачи для системы уравнений первого приближения и ее сведение к задаче линейного программирования.

Основу применяемого в настоящем разделе алгоритма составляет постановка линейно-квадратичной задачи для линеаризованной системы и решение нестационарного дифференциально-матричного уравнения Риккати. Для решения указанного уравнения возможно использование метода последовательных приближений В.И. Зубова [31; 57]. Кроме того, возможно применение подхода, заключающегося в непосредственном интегрировании системы уравнений при помощи одного из численных методов. При решении поставленной задачи применен способ непосредственного интегрирования уравнения Риккати и проведен анализ его решений на основе одной из теорем, приведенных в книге [57]. Подобный подход разработан для решения линейно-квадратичной задачи для стационарных линейных систем и известен под названием "метод установления"[67; 68].

Решение задачи

Перейдем от исходной системы (2.14) к линеаризованной, без учета возмущающего воздействия:

$$\dot{x} = A(t) \cdot x + B \cdot u, \quad (2.18)$$

$$\text{где } A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2(t) & -a_1(t) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Задача оптимального управления. Необходимо найти стабилизирующее управление для системы (2.18) с квадратичным функционалом качества:

$$J_1(u) = \int_0^\infty [x^T(t)N_1x(t) + u^2]dt \rightarrow \underset{u}{inf},$$

где $x(t)$ - вектор состояния, u - скалярное управление, $N_1 > 0$ - положительно-определенная матрица.

Мы получили нестационарную линейно-квадратичную задачу. Решением которой является функция вида:

$$u(x,t) = -B^T \cdot P(t) \cdot x(t), \quad (2.19)$$

где $P(t)$ - решение дифференциально-матричного нестационарного уравнения Риккати:

$$-A(t)^T P(t) - P(t)A(t) + P(t)BB^T P(t) - N_1 = -\dot{P}(t). \quad (2.20)$$

Утверждение 2.1. *Если существует ограниченное решение нестационарного уравнения Риккати (2.20) с начальными условиями $P(0) = 0$ в виде симметричной матрицы $P(t)$, то управление (2.19) стабилизирует систему (2.18) и, более того, решает задачу управления исходной системы (2.14).*

Замечание 2.1. *Для системы (2.18) данное утверждение является частным случаем теоремы 2.1 [57], с. 208.*

Замечание 2.2. *Теорему 2.1 [57], с. 208 можно считать "критерием управляемости" для линейно-квадратичных задач для нестационарных линейных управляемых систем.*

Результаты численного моделирования

Численные эксперименты проводились при следующих значениях параметров модели: $\bar{\alpha} = 0.1$, $L = 10$ м, $M = 20$ кг, $m_0 = 1$ кг, $q = 0.01$, $t \in [0,100]$ с, $\bar{x}_1 = 0.5$ рад, $\bar{x}_2 = -0.8$ рад/с, $N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Также рассмотрены различные значения возмущающего воздействия для определения границ применимости построенного алгоритма.

На рис. 2.9 изображены графики изменения элементов симметричной матрицы решения уравнения Риккати в зависимости от времени. На рис. 2.10–2.12 представлены графики изменения фазовых координат $x_1(t)$, $x_2(t)$ при различных значениях возмущающего воздействия. Численные решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений получены при помощи метода Рунге-Кутты [61].

Анализ результатов вычислительных экспериментов

1. Из графика на рис. 2.9 следует, что матрица решения уравнения Риккати симметрична и ее коэффициенты ограничены. А это означает, что

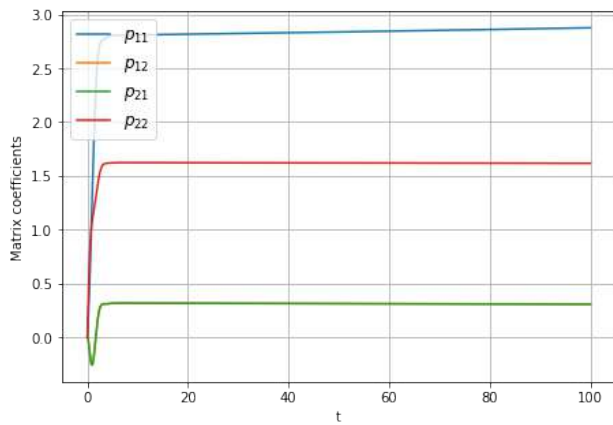


Рисунок 2.9 — Решение уравнения Риккати (2.20)

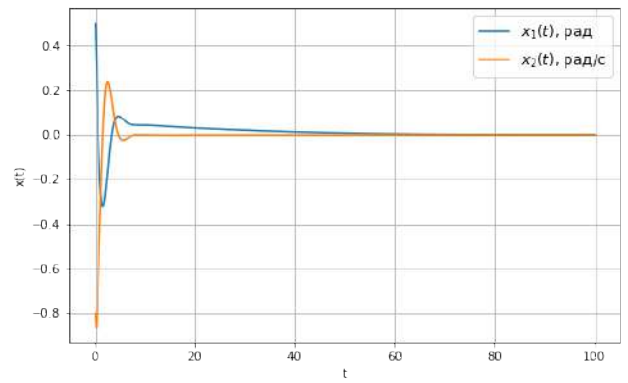


Рисунок 2.10 — Решение задачи Коши системы (2.14) при значении параметра $f = 0.10$

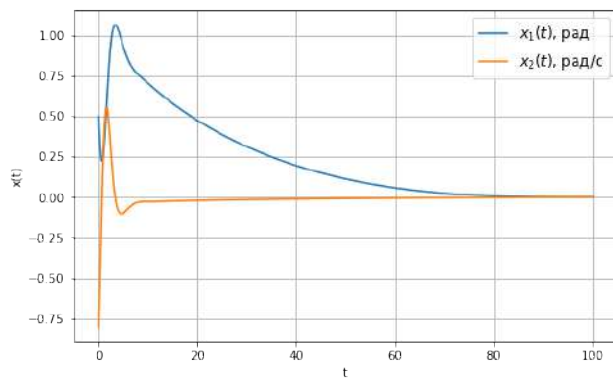


Рисунок 2.11 — Решение задачи Коши системы (2.14) при значении параметра $f = 1.50$

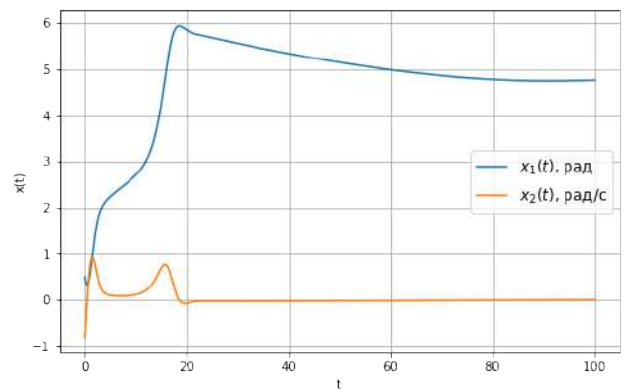


Рисунок 2.12 — Решение задачи Коши системы (2.14) при значении параметра $f = 2.28$

выполнены условия теоремы 2.1 [57], с. 208 и, следовательно, управление (2.19) стабилизирует систему (2.18). А из графика на рис. 2.10 видно, что данное управление стабилизирует и исходную систему.

2. Диапазон значений коэффициента f , характеризующего возмущающее воздействие, лежит в диапазоне $f \in [0; 2.28)$, см. рис. 2.10–2.12.
3. Как следует из графиков на рис. 2.10, 2.11, чем больше значение возмущающего воздействия, тем большее время и более значительный энергетический ресурс управления требуются для стабилизации системы.
4. Исходя из построения решения задачи, цель управления достигается на неограниченном промежутке времени. Указанное обстоятельство ограничивает возможности применения данного способа решения.

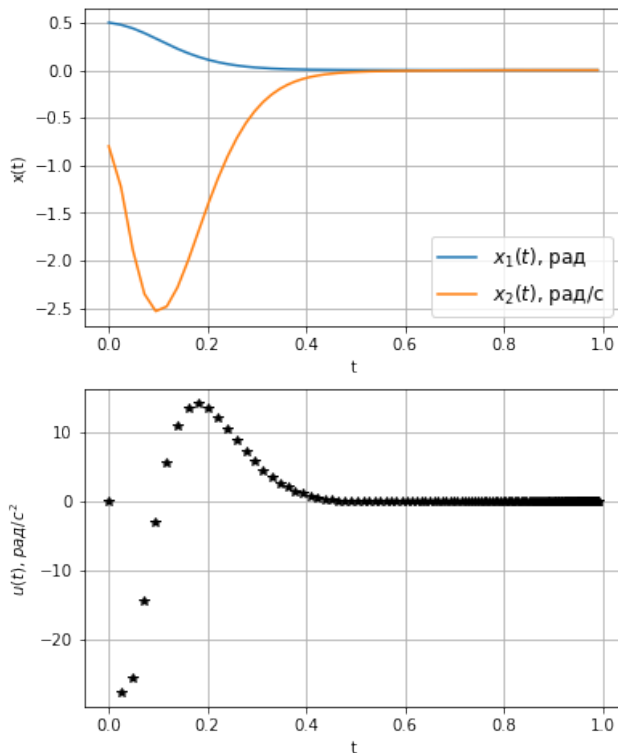


Рисунок 2.13 — Результаты численного моделирования решения задачи дискретного управления для системы (2.14) при значениях $f = 1.50$, $\alpha = 0.25$, $h = 0.1$

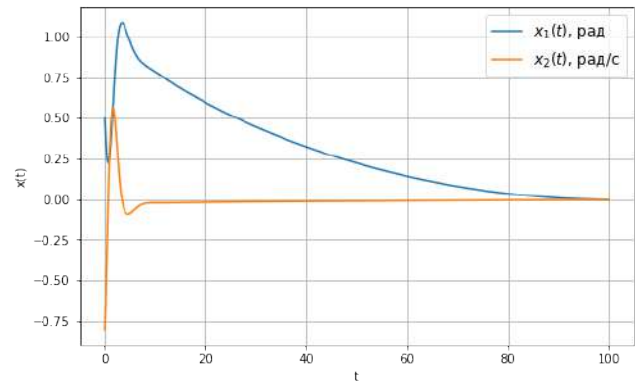


Рисунок 2.14 — Результаты численного моделирования решения задачи оптимального управления для системы (2.14) при значении параметра $f = 1.50$

2.6 Сравнение построенных алгоритмов управления

На рис. 2.13, 2.14 представлены результаты численных экспериментов для задач дискретного и оптимального управления для системы (2.14) при одинаковых значениях параметров модели.

Анализ результатов расчетов:

1. для решения задачи стабилизации системы в случае оптимального управления требуется больше времени и меньший энергетический ресурс управления, см. рис. 2.12, 2.13;
2. из анализа графиков (рис. 2.5–2.7, 2.10–2.14) и рассмотренных моделей следует, что алгоритм дискретного управления позволяет получить решение задачи при на порядки большем значении возмущающего воздействия.

2.7 Выводы по главе 2

В настоящей главе проведены построение и анализ алгоритма дискретного управления, описанного в Главе 1.

На основе изложенного материала можно сделать следующие выводы:

1. реализация рассматриваемого алгоритма возможна при помощи комбинации численных методов и программных пакетов, реализующих символьные вычисления;
2. построенный алгоритм дискретного управления можно отнести к классу сложности P [69];
3. для задач небольших размерностей достаточно персонального компьютера средних возможностей;
4. построенный алгоритм по сравнению с оптимальным управлением более устойчив к наличию возмущающих воздействий в системе ОДУ, а также позволяет достигнуть цели за меньшее время, но при этом требует гораздо больших энергетических затрат на управление.

Глава 3. Решение локальной граничной задачи управления для нелинейных стационарных систем с учетом контроля вычислительных комплексов

3.1 Введение

Значительный интерес представляют вопросы решения граничных задач для управляемых систем, связанные с возможностью и эффективностью математического моделирования процессов управления. Использование процедуры численного моделирования на различных этапах проектирования систем управления техническими объектами значительно сокращает затраты на разработку и сроки создания. Качество и достоверность результатов численного моделирования зависит от исправности функционирования вычислительных комплексов. В связи с этим обстоятельством возникает проблема разработки алгоритмов построения управления таким образом, чтобы в процессе моделирования можно было контролировать исправность работы вычислительных комплексов. В данной работе задача нахождения искомой управляющей функции и соответствующих функций фазовых координат решается таким образом, что одна из функций фазовых координат считается известным полиномом от независимой переменной. Соответственно, метод контроля подразумевает подход, основанный на сравнении значений фазовой координаты, полученных в результате вычислений, с точными значениями, которые определяются заданным полиномом. Если модуль разности этих значений превышает некоторое пороговое число, то принимается решение на использование резервного компьютера. Аналогичным образом решается задача контроля вычислительных комплексов, расположенных на объекте управления, в процессе формирования управляющего сигнала. Предложенный метод контроля может дополнить, а иногда и заменить традиционные технические инженерные подходы.

Кроме того, предложенный алгоритм может быть использован при решении важной и сложной практической задачи выбора шага интегрирования в процессе решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую математическую модель объекта управления. Трудность решения этой задачи состоит в том, что при больших шагах инте-

грирования увеличивается методическая погрешность расчетной схемы, а при малых шагах увеличивается вычислительная погрешность. Имея информацию о точном значении одной из фазовых координат можно найти сбалансированный шаг интегрирования для выбранной расчетной схемы.

При решении поставленной задачи используется подход, применяемый в работах [23; 34; 70]. Главное отличие настоящего результата от опубликованных в [34; 70] состоит в том, что решение исходной задачи сводится к решению граничной задачи для нестационарной системы. В публикации [23] приведен алгоритм решения граничной задачи, аналогичной той, которая была рассмотрена в [70]. Однако воспользоваться ее результатами при решении поставленной задачи не представляется возможным, так как в формулировке теоремы не применяется условие $f(0,0,t) = 0$ из статьи [23].

3.2 Постановка задачи и основная теорема

Объектом исследования является управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(x,u), \quad (3.1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $x \in R^n$, $u = (u_1, \dots, u_r)^T$, $u \in R^r$, $r \leq n$, $t \in [0,1]$.

Здесь x - вектор фазовых координат, u - вектор управления.

Пусть выполнены условия

$$f \in C^{2n}(R^n \times R^r, R^n), f = (f_1, \dots, f_n)^T, \quad (3.2)$$

$$f(0,0) = 0; \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_1}(0,0) \neq 0. \quad (3.4)$$

Введем в рассмотрение матрицы

$$A_0 = \{a_{ij}\}, a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0) - \frac{\partial f_i}{\partial u_1}(0,0) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(0,0) \cdot \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}(0,0)\right)^{-1},$$

$$B_0 = \{b_{ij}\}, \{b_{ij}\} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(0,0) - \frac{\partial f_i}{\partial u_1}(0,0) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial u_j}(0,0) \cdot \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}(0,0)\right)^{-1}, \quad i = 2, \dots, n, \quad j = 2, \dots, r,$$

Пусть $S_0 = (B_0, A_0 B_0, \dots, A_0^{n-1} B_0)$.

Будем предполагать, что матрица S_0 удовлетворяет условию:

$$\text{rank } S_0 = n - 1. \quad (3.5)$$

На управление u наложены ограничения:

$$\|u\| \leq N, N > 0, N = \text{const} \quad (3.6)$$

Задача 3.1. Найти пару функций $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$, $x(t) \in C^1[0,1]; R^n$, $u(t) \in C^1[0,1]; R^r$, удовлетворяющих системе (3.1) и условиям:

$$x(0) = x_0, x(1) = 0, x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)^T, \quad (3.7)$$

$$x_1(t) = x_1^0 \cdot (1 - t), x_1^0 \in R^1. \quad (3.8)$$

Указанную пару функций будем называть решением задачи (3.1), (3.7), (3.8).

Решение поставленной задачи можно получить на основе доказательства следующей теоремы.

Теорема 3.1. Пусть для системы (3.1) выполнены условия (3.2) - (3.5). Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что $\forall x_0 \in R^n : \|x_0\| < \varepsilon$ существует решение задачи (3.1), (3.7), (3.8), которое может быть получено после решения задачи стабилизации линейной нестационарной системы специального вида и последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Доказательство теоремы можно разбить на несколько этапов.

3.3 Формулировки вспомогательных задач и построение вспомогательных систем

Из условий (3.2) - (3.4) и теоремы о неявной функции следует существование $\varepsilon_1 > 0$, такого, что для всех $x_1^0, x_i, i = 2, \dots, n, u_j, j = 2, \dots, r : |x_1^0| < \varepsilon_1, |x_i| < \varepsilon_1, |u_j| < \varepsilon_1$ существует функция $u_1(t, x_1^0, x_2, \dots, x_n, u_2, \dots, u_r)$, удовлетворяющая уравнению

$$\begin{aligned} x_1^0 &= f_1(x_1^0 \cdot (1-t), x_2, \dots, x_n, u_1(x_1(t), x_1^0, x_2, \dots, x_n, u_2, \dots, u_r), u_2, \dots, u_r), \\ &t \in [0, 1], \end{aligned} \quad (3.9)$$

и условию

$$u_1(t, 0, \dots, 0) \equiv 0. \quad (3.10)$$

После подстановки функции $u_1(t, x_1^0, x_2, \dots, x_n, u_2, \dots, u_r)$ и $x_1(t)$ из формулы (3.8) в правую часть всех уравнений системы (3.1), кроме первого, получим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_1(t), x_2, \dots, x_n, u_1(t, x_1^0, x_2, \dots, x_n, u_2, \dots, u_r), u_2, \dots, u_r), \\ &i = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Рассмотрим задачу:

найти пару функций $\bar{x}(t), \bar{u}(t)$, где $\bar{x}(t) = (x_2(t), \dots, x_n(t))^T$, $\bar{u}(t) = (u_2(t), \dots, u_r(t))^T$, удовлетворяющих системе (3.11) и условиям

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0, \bar{x}(1) = \bar{0}, \bar{x}_0 = (x_2^0, \dots, x_n^0)^T, \bar{0} = (0, \dots, 0)_{n-1 \times 1}. \quad (3.12)$$

Пару функций $\bar{x}(t), \bar{u}(t)$, удовлетворяющую системе (3.11) и условиям (3.12) будем называть решением задачи (3.11), (3.12).

Замечание 3.1. Если подставить решение задачи (3.11), (3.12) в функцию $u_1(t, x_1^0, x_2, \dots, x_n, u_2, \dots, u_r)$, то будем иметь набор функций $x_1(t), \bar{x}(t)$ и $u_1(t), \bar{u}(t)$, который является решением задачи 3.1.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \bar{f}_i(t, x_1^0, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r) = \\ f_i(x_1(t), x_2, \dots, x_n, u_1(t, x_1^0, x_2, \dots, x_n, u_2, \dots, u_r), u_2, \dots, u_r), i = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Из условий (3.3), (3.10) следует

$$\bar{f}_i(t, 0, \bar{0}, \bar{0}) = 0, \bar{0} = (0, \dots, 0)_{r-1 \times 1}, i = 2, \dots, n. \quad (3.14)$$

Выполним в системе (3.11) замену независимой переменной t на τ по формуле:

$$t(\tau) = 1 - e^{-\alpha\tau}, \tau \in [0, \infty), \quad (3.15)$$

где $\alpha > 0$ - некоторое вещественное число, подлежащее определению.

В результате система (3.11) в векторной форме примет вид

$$\frac{d\bar{c}}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} \bar{f}(t(\tau), x_1^0, \bar{c}, \bar{d}), \bar{f} = (\bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n)^T, \quad (3.16)$$

$$\bar{c}(\tau) = \bar{x}(t(\tau)), \bar{c} = (c_2, \dots, c_n)^T, \bar{d}(\tau) = \bar{u}(t(\tau)), \bar{d} = (d_2, \dots, d_r)^T. \quad (3.17)$$

Рассмотрим задачу:

Найти пару функций $\bar{c}(\tau) \in C^1([0, \infty))$, $\bar{d}(\tau) \in C^1([0, \infty))$, удовлетворяющую системе (3.16) и условиям

$$\bar{c}(0) = \bar{x}_0, \bar{c}(\tau) \rightarrow \bar{0} \text{ при } \tau \rightarrow \infty \quad (3.18)$$

Указанную пару функций будем называть решением задачи (3.16), (3.18).

Замечание 3.2. Легко видеть, что после перехода в решении задачи (3.16), (3.18) к пределу при $\tau \rightarrow \infty$ и к исходной независимой переменной t по формулам (3.15), (3.17) получим решение задачи (3.11), (3.12).

Для решения задачи (3.16), (3.18) введем вспомогательные обозначения:

$$\begin{aligned} \tilde{c} = \theta_i \bar{c}, \tilde{d} = \theta_i \bar{d}, \tilde{t} = 1 - \theta_i e^{-\alpha\tau}, \theta_i \in [0, 1], i = 2, \dots, n; \\ |k| = \sum_{j=2}^n k_j; |m| = \sum_{j=2}^r m_j, k! = k_2! \dots k_n!, m! = m_2! \dots m_r!. \end{aligned}$$

Если представить правую часть системы (3.11) в виде формулы Тейлора в окрестности точки $(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0})$, с учетом замены функций f на \bar{f} и переменной t на τ , то система примет вид

$$\begin{aligned}
\frac{dc_i}{d\tau} = & \alpha e^{-\alpha\tau} \left(\bar{f}_i(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) + \sum_{j=2}^n \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) c_j + \sum_{j=2}^r \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial u_j}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) d_j - \right. \\
& \left. - e^{-\alpha\tau} \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial t}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) \right) + \\
& + \frac{1}{2} \alpha e^{-\alpha\tau} \left(\sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^n \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j \partial x_k}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) c_j c_k + \sum_{j=2}^r \sum_{k=2}^r \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial u_j \partial u_k}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) d_j d_k + \right. \\
& + 2 \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^r \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j \partial u_k}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) c_j d_k - 2 \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=2}^n \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j \partial t}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) c_j - \\
& - 2 \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=2}^r \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial u_j \partial t}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) d_j + e^{-2\alpha\tau} \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial t^2}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) \left. \right) + \dots + \\
& + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+|m|+l=2n-2,} \frac{1}{k!m!l!} \frac{\partial \bar{f}_i^{|k|+|m|+l}}{\partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n} \partial u_2^{m_2} \dots \partial u_r^{m_r} \partial t^l}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) \times \\
& \times c_2^{k_2} \dots c_n^{k_n} \bar{d}_2^{m_2} \dots d_r^{m_r} (-1)^l e^{-l\alpha\tau} + \\
& + \alpha e^{-\alpha\tau} \times \sum_{|k|+|m|+l=2n-1,} \frac{1}{k!m!l!} \frac{\partial \bar{f}_i^{|k|+|m|+l}}{\partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n} \partial u_2^{m_2} \dots \partial u_r^{m_r} \partial t^l}(\tilde{t}(\tau), x_1^0, \tilde{c}, \tilde{d}) \times \\
& \times c_2^{k_2} \dots c_n^{k_n} d_2^{m_2} \dots d_r^{m_r} (-1)^l e^{-l\alpha\tau}, \quad i = 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Дальнейшие рассуждения будем проводить при условии ограничений на функцию $\bar{c}(\tau)$:

$$\|\bar{c}(\tau)\| < C, C > 0. \tag{3.20}$$

Выполним $2n - 1$ преобразований сдвига функции $c_i \rightarrow c_i^{(2n-1)}$. Главная цель этих преобразований состоит в том, чтобы норма слагаемых правой части, которые не содержат компонент векторов $\bar{c}^{(2n-1)}$ и \bar{d} , удовлетворяла оценке $O(e^{-2n\alpha\tau}|x_1^0|)$, $\tau \rightarrow \infty$, $x_1^0 \rightarrow 0$. На первом шаге выполним замену $c_i(\tau)$ на $c_i^{(1)}(\tau)$ по формуле:

$$c_i = c_i^{(1)}(\tau) - e^{-\alpha\tau} \bar{f}_i(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}), \quad i = 2, \dots, n. \quad (3.21)$$

Пусть $D^{|k|+|m|+l} \bar{f}_i = \frac{\partial \bar{f}_i^{|k|+|m|+l}}{\partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n} \partial u_2^{m_2} \dots \partial u_r^{m_r} \partial t^l}$.

Для компактности записи введем обозначение:

$$F_i(x_1^0) = \bar{f}_i(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}), \quad i = 2, \dots, n. \quad (3.22)$$

Очевидно

$$F_i(0) = 0, \quad i = 2, \dots, n. \quad (3.23)$$

После подстановки (3.21) в левую и правую части (3.19), с учетом введенных обозначений, получим систему:

$$\begin{aligned}
& \frac{dc_i^{(1)}}{d\tau} = -\alpha e^{-2\alpha\tau} \sum_{j=2}^n \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) F_j(x_1^0) \\
& + \alpha e^{-3\alpha\tau} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^n \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j \partial x_k}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) F_j(x_1^0) F_k(x_1^0) + \sum_{j=2}^n \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j \partial t}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) F_j(x_1^0) \right) \\
& + \alpha e^{-\alpha\tau} \left(\sum_{j=2}^n \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) c_j^{(1)} + \sum_{j=2}^r \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial u_j}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) d_j - e^{-\alpha\tau} \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial t}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) \right) \\
& \quad - \frac{1}{2} \alpha e^{-2\alpha\tau} \left(\sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^n \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j \partial x_k}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) c_j^{(1)} F_k(x_1^0) \right. \\
& + \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^n \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j \partial x_k}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) F_j(x_1^0) c_k^{(1)} + 2 \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^r \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j \partial u_k}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) F_j(x_1^0) d_k \left. \right) \\
& + \frac{1}{2} \alpha e^{-\alpha\tau} \left(\sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^n \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j \partial x_k}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) c_j^{(1)} c_k^{(1)} + \sum_{j=2}^r \sum_{k=2}^r \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial u_j \partial u_k}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) d_j d_k \right. \\
& + 2 \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^r \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j \partial u_k}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) c_j^{(1)} d_k - 2 \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=2}^n \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j \partial t}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) c_j^{(1)} \\
& \quad \left. - 2 \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=2}^r \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial u_j \partial t}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) d_j + e^{-2\alpha\tau} \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial t^2}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) \right) + \dots + \\
& \quad + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+|m|+l=2n-2} \frac{1}{k!m!l!} D^{|k|+|m|+l} \bar{f}_i(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) \times \\
& (c_2^{(1)} - e^{-\alpha\tau} F_2(x_1^0))^{k_2} \dots (c_n^{(1)} - e^{-\alpha\tau} F_n(x_1^0))^{k_n} d_2^{m_2} \dots d_r^{m_r} (-1)^l e^{-l\alpha\tau} \\
& \quad + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+|m|+l=2n-1} \frac{1}{k!m!l!} D^{|k|+|m|+l} \bar{f}_i(\tilde{t}(\tau), x_1^0, \tilde{c}, \tilde{d}) \times \\
& (c_2^{(1)} - e^{-\alpha\tau} F_2(x_1^0))^{k_2} \dots (c_n^{(1)} - e^{-\alpha\tau} F_n(x_1^0))^{k_n} d_2^{m_2} \dots d_r^{m_r} (-1)^l e^{-l\alpha\tau}, \\
& \quad i = 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Начальные условия примут вид:

$$c_i^{(1)}(0) = x_i^0 + F_i(x_1^0), \quad i = 2, \dots, n. \tag{3.25}$$

На следующем шаге выполним замену переменной по формуле:

$$\begin{aligned}
c_i^{(1)} &= c_i^{(2)}(\tau) + e^{-2\alpha\tau} \left(\sum_{j=2}^n \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) \right) F_i(x_1^0) = \\
&= c_i^{(2)}(\tau) + e^{-2\alpha\tau} \varphi_i^{(2)}(x_1^0), \quad i = 2, \dots, n,
\end{aligned} \tag{3.26}$$

где $\varphi_i^{(2)}(x_1^0) = \sum_{j=2}^n \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) F_j(x_1^0)$,

Из (3.23) следует

$$\varphi_i^{(2)}(0) = 0. \tag{3.27}$$

После подстановки (3.26) в левую и правую части системы (3.24) получим

$$\begin{aligned}
\frac{dc_i^{(2)}}{d\tau} &= \alpha e^{-3\alpha\tau} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^n \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j \partial x_k}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) F_j(x_1^0) F_k(x_1^0) \right. \\
&+ \sum_{j=2}^n \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j \partial t}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) F_j(x_1^0) + \sum_{j=2}^n \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) \varphi_j^{(2)}(x_1^0) \left. \right) \\
&- \frac{1}{2} \alpha e^{-4\alpha\tau} \times \left(\sum_{k=2}^n \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j \partial x_k}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) \varphi_j^{(2)}(x_1^0) F_k(x_1^0) \right. \\
&+ \sum_{k=2}^n \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j \partial x_k}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) F_j(x_1^0) \varphi_k^{(2)}(x_1^0) \\
&+ 2 \sum_{j=2}^n \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j \partial t}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) \varphi_j^{(2)}(x_1^0) \\
&+ \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{k=2}^n \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j \partial x_k}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) \varphi_j^{(2)}(x_1^0) \varphi_k^{(2)}(x_1^0) \left. \right) \\
&+ \alpha e^{-\alpha\tau} \left(\sum_{j=2}^n \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) c_j^{(2)} + \sum_{j=2}^r \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial u_j}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) d_j - e^{-\alpha\tau} \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial t}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) \right) \\
&- \alpha e^{-2\alpha\tau} \left(\sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^n \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j \partial x_k}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) c_j^{(2)} F_k(x_1^0) \right. \\
&+ \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^n \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j \partial x_k}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) F_j(x_1^0) c_k^{(2)} + \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^r \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j \partial u_k}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) F_j(x_1^0) d_k \left. \right) \\
&+ \frac{1}{2} \alpha e^{-3\alpha\tau} \left(\sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^n \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j \partial x_k}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) c_j^{(2)} \varphi_k^{(2)}(x_1^0) \right. \\
&+ \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^n \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j \partial x_k}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) \varphi_j^{(2)}(x_1^0) c_k^{(2)} + \\
&\left. \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^r \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j \partial u_k}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) \varphi_j^{(2)}(x_1^0) d_k \right)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \alpha e^{-\alpha \tau} \left(\sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^n \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j \partial x_k} (1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) c_j^{(2)} c_k^{(2)} + \sum_{j=2}^r \sum_{k=2}^r \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial u_j \partial u_k} (1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) d_j d_k \right. \\
& \quad + 2 \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^r \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j \partial u_k} (1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) c_j^{(2)} d_k - 2 \alpha e^{-\alpha \tau} \sum_{j=2}^n \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j \partial t} (1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) c_j^{(2)} \\
& \quad \left. - 2 \alpha e^{-\alpha \tau} \sum_{j=2}^r \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial u_j \partial t} (1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) d_j + e^{-2\alpha \tau} \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial t^2} (1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) \right) + \dots + \\
& \quad + \alpha e^{-\alpha \tau} \sum_{|k|+|m|+l=2n-2, \frac{1}{k!m!l!}} D^{|k|+|m|+l} \bar{f}_i (1, x_1^0, \bar{0}, \bar{0}) \times \\
& \quad (c_2^{(2)} - e^{-\alpha \tau} F_2(x_1^0) + e^{-2\alpha \tau} \varphi_2^{(2)}(x_1^0))^{k_2} \dots (c_n^{(2)} - e^{-\alpha \tau} F_n(x_1^0) + e^{-2\alpha \tau} \varphi_n^{(2)}(x_1^0))^{k_n} \times \\
& \quad d_2^{m_2} \dots d_r^{m_r} (-1)^l e^{-l\alpha \tau} + \alpha e^{-\alpha \tau} \sum_{|k|+|m|+l=2n-1, \frac{1}{k!m!l!}} D^{|k|+|m|+l} \bar{f}_i(\tilde{t}(\tau), x_1^0, \tilde{c}, \tilde{d}) \times \\
& \quad (c_2^{(2)} - e^{-\alpha \tau} F_2(x_1^0) + e^{-2\alpha \tau} \varphi_2^{(2)}(x_1^0))^{k_2} \dots (c_n^{(2)} - e^{-\alpha \tau} F_n(x_1^0) + e^{-2\alpha \tau} \varphi_n^{(2)}(x_1^0))^{k_n} \times \\
& \quad d_2^{m_2} \dots d_r^{m_r} (-1)^l e^{-l\alpha \tau}, \quad i = 2, \dots, n.
\end{aligned}$$

Начальные условия примут вид

$$c_i^{(2)}(0) = x_i^0 + F_i(x_1^0) - \varphi_i^{(2)}(x_1^0), \quad i = 2, \dots, n. \quad (3.29)$$

Очевидно, что слагаемые правой части системы (3.28), не содержащие степеней компонент векторов $\bar{c}^{(2)}$ и \bar{d} удовлетворяют оценке $O(e^{-3\alpha\tau}|x_1^0|)$ при $\tau \rightarrow \infty$, $x_1^0 \rightarrow 0$ в области (3.20), (3.6).

На основании (3.21), (3.24), (3.26), (3.28) и индуктивного перехода искомое преобразование на k -м шаге будет иметь вид

$$c_i^{(k-1)} = c_i^{(k)}(\tau) + e^{-k\alpha\tau} \varphi_i^{(k)}(x_1^0), \quad \varphi_i^{(k)}(0) = 0, \quad i = 2, \dots, n. \quad (3.30)$$

Если преобразование (3.30) применить $2n - 1$ раз и в правой части полученной системы объединить слагаемые, линейные по компонентам вектора $\bar{c}^{(2n-1)}$, и содержащие коэффициенты $e^{-i\alpha\tau}$ $i = 1, \dots, n$, а также слагаемые, линейные по компонентам вектора \bar{d} с коэффициентами $e^{-i\alpha\tau}$ $i = 1, \dots, n$, то в соответствии с формулами (3.21), (3.24), (3.25), (3.26), (3.28), (3.29) получим систему и начальные данные, которые можно записать в векторной форме

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{c}^{(2n-1)}}{d\tau} &= P(x_1^0) \cdot \bar{c}^{(2n-1)} + Q(x_1^0) \cdot \bar{d} + R_1(\tau, x_1^0, \bar{c}^{(2n-1)}, \bar{d}) + \\
&+ R_2(\tau, x_1^0, \bar{c}^{(2n-1)}, \bar{d}) + R_3(\tau, x_1^0, \bar{c}^{(2n-1)}, \bar{d}) + R_4(\tau, x_1^0, \bar{c}^{(2n-1)}, \bar{d}); \\
R_1 &= (R_2^1, \dots, R_n^1)^T, \quad R_2 = (R_2^2, \dots, R_n^2)^T, \quad R_3 = (R_2^3, \dots, R_n^3)^T, \\
R_4 &= (R_2^4, \dots, R_n^4)^T.
\end{aligned} \quad (3.31)$$

Из условия (3.13) и дифференцирования функций $f_i, i = 2, \dots, n$ по компонентам векторов \bar{x}, \bar{u} и переменной t как сложные функции получим равенство:

$$\begin{aligned} P(x_1^0) &= \alpha e^{-\alpha\tau}(A(x_1^0) + \alpha e^{-\alpha\tau}P_2(x_1^0) + \dots + \alpha e^{-(n-1)\alpha\tau}P_n(x_1^0)), \\ Q(x_1^0) &= \alpha e^{-\alpha\tau}(B(x_1^0) + \alpha e^{-\alpha\tau}Q_2(x_1^0) + \dots + \alpha e^{-(n-1)\alpha\tau}Q_n(x_1^0)), \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} c_i^{(2n-1)}(0) &= x_i^0 + F_i(x_1^0) - \varphi_i^{(2)}(x_1^0) - \dots - \varphi_i^{(2n-1)}(x_1^0), \quad i = 2, \dots, n, \\ \varphi_i^{(k)}(x_1^0) &= (\varphi_2^{(k)}(x_1^0), \dots, \varphi_n^{(2n-1)}(x_1^0)), \quad k = 2, \dots, 2n-1, \quad \varphi_i^{(k)}(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Легко видеть, что

$$P_i(x_1^0) \rightarrow 0, Q_i(x_1^0) \rightarrow 0 \text{ при } x_1^0 \rightarrow 0, \quad i = 2, \dots, n. \quad (3.34)$$

Кроме того

$$A(0) = A_0, B(0) = B_0. \quad (3.35)$$

Функции R_i^1 содержат слагаемые правой части системы (3.31), линейно зависящие от компонент вектора $\bar{c}^{(2n-1)}$ с коэффициентами $e^{-i\alpha\tau}$, где $i \geq n+1$. R_i^2 включают слагаемые правой части системы (3.31), линейно зависящие от компонент \bar{d} с коэффициентами $e^{-i\alpha\tau}$, $i \geq n+1$. В R_i^3 входят слагаемые правой части системы (3.31), нелинейно зависящие от компонент векторов $\bar{c}^{(2n-1)}$ и \bar{d} . R_i^4 состоит из слагаемых, не содержащих степеней компонент векторов $\bar{c}^{(2n-1)}$ и \bar{d} .

Из условий (3.21), (3.26), (3.30) следует, что существуют константы $C_1 > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$, такие, что для всех $\bar{c}^{(2n-1)}$ и x_1^0 , принадлежащих области

$$\|\bar{c}^{(2n-1)}\| < C_1, \quad |x_1^0| < \varepsilon_1 \quad (3.36)$$

соответствующая функция $\bar{c}(\tau)$ будет принадлежать области (3.20).

Из условий (3.2), (3.3) и построения функций R_1, R_2, R_3, R_4 следует, что в области (3.6), (3.36) справедливы оценки:

$$\|R_1(\tau, x_1^0, \bar{c}^{(2n-1)}, \bar{d})\| \leq e^{-(n+1)\alpha\tau} L_1 \|\bar{c}^{(2n-1)}\|, \quad L_1 > 0, \quad (3.37)$$

$$\|R_2(\tau, x_1^0, \bar{c}^{(2n-1)}, \bar{d})\| \leq e^{-(n+1)\alpha\tau} L_2 \|\bar{d}\|, \quad L_2 > 0, \quad (3.38)$$

$$\|R_3(\tau, x_1^0, \bar{c}^{(2n-1)}, \bar{d})\| \leq e^{-\alpha\tau} L_3 (\|\bar{c}^{(2n-1)}\|^2 + \|\bar{d}\|^2), \quad L_3 > 0, \quad (3.39)$$

$$\|R_4(\tau, x_1^0, \bar{c}^{(2n-1)}, \bar{d})\| \leq e^{-2n\alpha\tau} L_4(x_1^0), \quad L_4(x_1^0) \rightarrow 0 \text{ при } x_1^0 \rightarrow 0. \quad (3.40)$$

Константы $L_i, i = 1 \dots 4$ зависят от области (3.36).

Введем в рассмотрение вспомогательную управляющую функцию $\bar{\mathbf{v}}$, которая связана с исходной \bar{d} системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{d\tau}\bar{d}(\tau) = \bar{\mathbf{v}}, \quad \bar{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r-1})^T. \quad (3.41)$$

Пусть

$$\bar{d}(0) = \bar{0}. \quad (3.42)$$

Тогда система уравнений (3.31), (3.41) и начальные условия (3.33), (3.42) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\tilde{c}^{(2n-1)} &= \bar{P}(x_1^0) \cdot \tilde{c}^{(2n-1)} + \bar{Q}(x_1^0) \cdot \bar{\mathbf{v}} + \bar{R}_1(\tau, x_1^0, \bar{c}^{(2n-1)}, \bar{d}) + \\ &+ \bar{R}_2(\tau, x_1^0, \bar{c}^{(2n-1)}, \bar{d}) + \bar{R}_3(\tau, x_1^0, \bar{c}^{(2n-1)}, \bar{d}) + \bar{R}_4(\tau, x_1^0, \bar{c}^{(2n-1)}, \bar{d}), \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\bar{P}(x_1^0) = \begin{pmatrix} P(x_1^0) & Q(x_1^0) \\ O_1 & O_2 \end{pmatrix}_{n+r-2 \times n+r-2}, \quad \bar{Q} = \begin{pmatrix} O_3 \\ E \end{pmatrix}_{n+r-2 \times r-1},$$

где $\tilde{c}^{(2n-1)} = (\bar{c}^{(2n-1)}, d)_{n+r-2 \times 1}^T$, $\bar{R}_1 = (R_2^1, \dots, R_n^1, 0, \dots, 0)_{n+r-2 \times 1}^T$,
 $\bar{R}_2 = (R_2^2, \dots, R_n^2, 0, \dots, 0)_{n+r-2 \times 1}^T$, $\bar{R}_3 = (R_2^3, \dots, R_n^3, 0, \dots, 0)_{n+r-2 \times 1}^T$,
 $\bar{R}_4 = (R_2^4, \dots, R_n^4, 0, \dots, 0)_{n+r-2 \times 1}^T$, O_1, O_2, O_3 – матрицы соответствующих размерностей, состоящие из нулевых элементов, E – единичная матрица,

$$\tilde{c}^{(2n-1)}(0) = \tilde{c}_0^{(2n-1)}, \quad \tilde{c}_0^{(2n-1)} = (\bar{c}_0^{(2n-1)}, 0, \dots, 0)_{n+r-2 \times 1}^T. \quad (3.44)$$

Дальнейшее доказательство теоремы будет опираться на лемму.

3.4 Формулировка и доказательство вспомогательной леммы

Рассмотрим линейную часть системы (3.43):

$$\frac{d}{d\tau}\tilde{c}^{(2n-1)} = \bar{P} \cdot \tilde{c}^{(2n-1)} + \bar{Q} \cdot \bar{v}. \quad (3.45)$$

Лемма 3.1. Пусть выполнены условия (3.2), (3.5). Тогда существует положительное число ε_2 : $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$, такое, что для всех x_1^0 : $|x_1^0| < \varepsilon_2$ существует вспомогательная управляющая функция $\bar{v}(\tau)$ вида

$$\bar{v}(\tau) = M(\tau)\tilde{c}^{(2n-1)}, \quad \|M(\tau)\| = O(e^{(n-1)\alpha\tau}) \text{ при } \tau \rightarrow \infty, \quad (3.46)$$

которая обеспечивает экспоненциальное убывание фундаментальной матрицы системы (3.45), замкнутой вспомогательной управляющей функцией (3.46).

Доказательство леммы. Обозначим через L_1^j , $j = 1, \dots, r-1$ j -й столбец матрицы \bar{Q} . Рассмотрим матрицу

$$S_1 = \{L_1^1, L_2^1, \dots, L_{k_1}^1, L_1^2, L_2^2, \dots, L_{k_2}^2, \dots, L_1^{r-1}, L_2^{r-1}, \dots, L_{k_{r-1}}^{r-1}\},$$

$$L_i^j = \bar{P}L_i^{j-1} - \frac{dL_i^{j-1}}{d\tau}, \quad j = 1, \dots, r-1, \quad i = 2, \dots, k_j,$$

где k_j , $j = 1, \dots, r-1$, – максимальное количество столбцов матрицы $L_1^j, \dots, L_{k_j}^j$, $j = 1, \dots, r-1$, таких, что векторы $L_1^1, L_2^1, \dots, L_{k_1}^1, L_1^2, L_2^2, \dots, L_{k_2}^2, \dots, L_1^{r-1}, L_2^{r-1}, \dots, L_{k_{r-1}}^{r-1}$ линейно независимы.

С точностью до перестановки столбцов, матрица S_1 обладает структурой:

$$\begin{pmatrix} O_{n-1 \times r-1} & L_1 & \dots & L_{n-1} \\ E_{r-1 \times r-1} & O_{r-1 \times r-1} & \dots & O_{r-1 \times r-1} \end{pmatrix},$$

где $O_{r-1 \times r-1}$ – матрица размера $r-1 \times r-1$, состоящая из нулевых элементов;

$$L_1 = Q, \quad L_i = PL_i - \frac{dL_{i-1}}{d\tau}, \quad i = 2, \dots, n-1.$$

Покажем, что ранг матрицы S_1 равен $n+r-2$.

Пусть $S_2 = \{L_1, \dots, L_{n-1}\}$.

Введем в рассмотрение матрицу $S_3 = \{\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_{n-1}\}$. $\bar{L}_1 = \alpha e^{-\alpha\tau} B(x_1^0)$, $\bar{L}_i = \alpha e^{-\alpha\tau} A(x_1^0) L_i - \frac{dL_{i-1}}{d\tau}$, $i = 2, \dots, n-1$.

Условия (3.34) гарантируют существование $\bar{\varepsilon} < \varepsilon_1$ такого, что $\forall x_1^0 : |x_1^0| < \bar{\varepsilon}$, $\text{rank } S_2 = \text{rank } S_3$.

Рассуждая методом от противного, с учетом условий (3.5), (3.35) нетрудно видеть, что существует $\tilde{\varepsilon} : 0 < \tilde{\varepsilon} < \bar{\varepsilon}$ такое, что $\forall x_1^0 : |x_1^0| < \tilde{\varepsilon}$ и

$$\text{rank } S_3 = \text{rank } S_0 = n - 1. \quad (3.47)$$

Из равенства (3.47) и структуры матрицы S_1 следует, что

$$\text{rank } S_1 = n + r - 2. \quad (3.48)$$

На основании построения столбцов матрицы S_2 можно сделать вывод, что ее элементы убывают со скоростью не выше $e^{-(n-1)\alpha\tau}$, при $\tau \rightarrow \infty$. Отсюда и следует, что элементы матрицы S_2^{-1} будут возрастать со скоростью не выше $e^{(n-1)\alpha\tau}$, при $\tau \rightarrow \infty$. В результате получим оценку:

$$\|S_1^{-1}\| = O(e^{(n-1)\alpha\tau}), \tau \rightarrow \infty. \quad (3.49)$$

Выполним замену переменных с учетом (3.48):

$$\tilde{c}^{(2n-1)} = S_1(\tau)y, y = (y_1, \dots, y_{n+r-2})^T. \quad (3.50)$$

В результате система (3.45) примет вид:

$$\frac{dy}{d\tau} = S_1^{-1} \left(\bar{P}S_1 - \frac{dS_1}{d\tau} \right) y + S_1^{-1} \bar{Q}\bar{v}. \quad (3.51)$$

Согласно работе [57] матрица правой части (3.51) имеет вид:

$$S_1^{-1} \left(\bar{P}S_1 - \frac{dS_1}{d\tau} \right) = \{e_2, \dots, e_{k_1}, \varphi_{k_1}(\tau), \dots, e_{k_1+\dots+k_{r-1}+2}, \dots, e_{k_1+\dots+k_{r-1}}, \varphi_{k_{r-1}}(\tau)\}. \quad (3.52)$$

В (3.52) $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)_{n+r-2 \times 1}^T$ – столбец матрицы, в котором 1 стоит на i -м месте.

Компоненты вектора $\varphi_{k_j}(\tau)$ имеют вид:

$$\varphi_{k_j}(\tau) = (-\varphi_{k_1}^1(\tau), \dots, -\varphi_{k_1}^{k_1}(\tau), \dots, -\varphi_{k_j}^1(\tau), \dots, -\varphi_{k_j}^{k_j}(\tau), 0, \dots, 0)_{n+r-2 \times 1}^T,$$

где $-\varphi_{k_j}^i(\tau)$ – коэффициенты разложения вектора $L_{k_j+1}^j$ по векторам L_i^1 ,
 $i = 1, \dots, k_1$; L_i^2 , $i = 1, \dots, k_2$; L_i^j , $i = 1, \dots, k_j$, $j = 1, \dots, r-1$, $\sum_{j=1}^{r-1} k_j = n + r - 2$.

$$L_{k_j+1}^j = -\sum_{i=1}^{k_1} \varphi_{k_1}^i(\tau) L_i^1 - \dots - \sum_{i=1}^{k_j} \varphi_{k_j}^i(\tau) L_i^j, \quad (3.53)$$

$$S_1^{-1}Q = \{e_1, \dots, e_{k_j+1}, \dots, e_{\gamma+1}\}, \quad \gamma = \sum_{i=1}^{r-2} k_i.$$

Рассмотрим задачу стабилизации системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_{k_j}}{d\tau} = \{e_2^{k_j}, \dots, e_{k_j}^{k_j}, \bar{\varphi}_{k_j}\} y_{k_j} + e_1^{k_j} d_j, \quad j = 1, \dots, r-1, \quad (3.54)$$

где $y_{k_j} = (y_{k_j}^1, \dots, y_{k_j}^{k_j})_{k_j \times 1}^T$, $e_1^{k_j} = (0, \dots, 1, \dots, 0)_{k_j \times 1}^T$, 1 на i -м месте, $\bar{\varphi}_{k_j}^i = (-\varphi_{k_j}^1, \dots, -\varphi_{k_j}^{k_j})_{k_j \times 1}^T$.

Пусть $y_{k_j}^{k_j} = \psi$. Из структуры матрицы правой части системы (3.54) следуют равенства

$$\begin{aligned} y_{k_j}^{k_j} &= \psi, \quad y_{k_j}^{k_j-1} = \psi^{(1)} + \varphi_{k_j}^{k_j} \psi, \\ y_{k_j}^{k_j-2} &= \psi^{(2)} + \varphi_{k_j}^{k_j} \psi^{(1)} + \left(\frac{d\varphi_{k_j}^{k_j}}{d\tau} + \varphi_{k_j}^{k_j-1} \right) \psi, \\ y_{k_j}^1 &= \psi^{(k_j-1)} + r_{k_j-2}(\tau) \psi^{(k_j-2)} + \dots + r_1(\tau) \psi^{(1)} + r_0(\tau) \psi. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Продифференцируем последнее равенство из (3.55) и подставим полученное выражение в первое уравнение системы (3.54), в результате будем иметь систему:

$$\psi^{(k_j)} + \varepsilon_{k_j-1}(\tau) \psi^{(k_j-1)} + \dots + \varepsilon_0(\tau) \psi = v_j, \quad j = 1, \dots, r-1. \quad (3.56)$$

Замечание 3.3. Из построения столбцов матрицы S_1 и формул (3.53) следует ограниченность функций $\varphi_{k_j}^{k_j}, \dots, \varphi_{k_j}^2, \varphi_{k_j}^1$ их производных, а также функций $r_{k_j-2}(\tau), \dots, r_1(\tau), r_0(\tau)$.

Пусть

$$\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^{k_j} (\varepsilon_{k_j-i}(\tau) - \gamma_{k_j-i}) \Psi^{(k_j-i)}, \quad j = 1, \dots, r-1, \quad (3.57)$$

и коэффициенты γ_{k_j-i} выбраны так, чтобы корни характеристического уравнения

$$\lambda^{k_i} + \gamma_{k_i-1} \lambda^{k_i-1} + \dots + \gamma_0 = 0, \quad i = 1, \dots, r-1$$

удовлетворяли условиям

$$\lambda_{k_i}^i \neq \lambda_{k_i}^j, \quad i \neq j; \quad \lambda_{k_i}^j < -(2n+1)\alpha - 1, \quad j = 1, \dots, k_i, \quad i = 1, \dots, r-1. \quad (3.58)$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим

$$\mathbf{v}_j = \delta_{k_j} T_{k_j}^{-1} S_{1k_j}^{-1} \tilde{\mathbf{c}}^{(2n-1)}, \quad j = 1, \dots, r-1, \quad (3.59)$$

где $\delta_{k_j} = (\varepsilon_{k_j-1}(\tau) - \gamma_{k_j-1}, \dots, \varepsilon_0(\tau) - \gamma_0)$, T_{k_j} – матрица из равенств (3.55) такая, что $y_{k_j} = T_{k_j} \bar{\Psi}$, $\bar{\Psi} = (\Psi^{k_j-1}, \dots, \Psi)^T$, $S_{1k_j}^{-1}$ – матрица, состоящая из соответствующих k_j строк S_1^{-1} .

Полученная вспомогательная управляющая функция (3.59) может быть записана в форме (3.46), где $M(\tau) = \delta_k T_k^{-1} S_{1k}^{-1} = (\delta_{k_1} T_{k_1}^{-1} S_{1k_1}^{-1}, \dots, \delta_{k_r} T_{k_r}^{-1} S_{1k_r}^{-1})^T$.

Пусть $\Psi(\tau)$ – фундаментальная матрица системы (3.56), замкнутая вспомогательным управлением (3.57). Из (3.58) следует, что $\Psi(\tau)$ является фундаментальной матрицей экспоненциально устойчивой линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Отсюда вытекает, что

$$\|\Psi(\tau)\Psi(t)^{-1}\| \leq \bar{M} e^{-\lambda(\tau-t)}, \quad \bar{M} > 0, \quad \lambda > 0. \quad (3.60)$$

Рассмотрим систему (3.45), замкнутую вспомогательной управляющей функцией (3.59):

$$\frac{d\tilde{\mathbf{c}}^{(2n-1)}}{d\tau} = D(\tau)\tilde{\mathbf{c}}^{(2n-1)}, \quad D(\tau) = \bar{P}(\tau) + \bar{Q}(\tau)M(\tau). \quad (3.61)$$

Пусть $\Phi(\tau)$ ($\Phi(0) = E$) – фундаментальная матрица системы (3.61). E – единичная матрица. Введем блочную диагональную матрицу $T(\tau)$ с матрицами T_{k_j} , $j = 1, \dots, r-1$, на диагонали. Из формул (3.50) и (3.55) следует равенство

$$\Phi(\tau) = S_1(\tau)T(\tau)\Psi(\tau)\Psi^{-1}(0)T^{-1}(0)S_1^{-1}(0). \quad (3.62)$$

Далее, учитывая Замечание 3.3 и формулы (3.49), (3.50), (3.55), (3.60), (3.62), получим оценки

$$\begin{aligned} \|\Phi(\tau)\| &\leq \bar{K}e^{-\lambda\tau}, \lambda > 0, \bar{K} > 0, \\ \|\Phi(\tau)\Phi^{-1}(t)\| &\leq \bar{K}_1e^{-\lambda(\tau-t)}e^{(n-2)\alpha t}, \tau \geq t, \bar{K}_1 > 0, \\ \|M(\tau)\| &= O(e^{(n-1)\alpha\tau}), \tau \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.63)$$

В качестве величины ε_2 , фигурирующей в формулировке леммы, можно положить величину $\varepsilon_2 = \tilde{\varepsilon}$.

Лемма доказана.

3.5 Доказательство теоремы

Рассмотрим систему (3.43), замкнутую вспомогательной управляющей функцией (3.46):

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{c}^{(2n-1)}}{d\tau} &= D(\tau)\tilde{c}^{(2n-1)} + \bar{R}_1(\tau, x_1^0, \tilde{c}^{(2n-1)}) + \bar{R}_2(\tau, x_1^0, \tilde{c}^{(2n-1)}) + \\ &+ \bar{R}_3(\tau, x_1^0, \tilde{c}^{(2n-1)}) + \bar{R}_4(\tau, x_1^0, \tilde{c}^{(2n-1)}). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Выполним в системе (3.64) замену переменных по формулам:

$$\tilde{c}^{(2n-1)} = z(\tau)e^{-(n-1)\alpha\tau}, \quad \tilde{c}^{(2n-1)}(0) = z(0). \quad (3.65)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= C(\tau)z + e^{(n-1)\alpha\tau}(\bar{R}_1(\tau, x_1^0, ze^{-(n-1)\alpha\tau}) + \\ &+ \bar{R}_2(\tau, x_1^0, ze^{-(n-1)\alpha\tau}) + \bar{R}_3(\tau, x_1^0, ze^{-(n-1)\alpha\tau}) + \\ &+ \bar{R}_4(\tau, x_1^0, ze^{-(n-1)\alpha\tau})), \quad C(\tau) = D(\tau) + (n-1)\alpha E. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Покажем, что все решения системы (3.66) с начальными условиями (3.65), которые начинаются в достаточно малой окрестности нуля, убывают экспоненциально.

Пусть $\Phi_1(\tau)$, $\Phi_1(0) = E$, – фундаментальная матрица системы $\frac{dz}{d\tau} = C(\tau)z$. Тогда, в соответствии с (3.63), (3.65):

$$\begin{aligned} \|\Phi_1(\tau)\| &\leq \bar{K}e^{-\beta\tau}, \quad \|\Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)\| \leq K_1e^{-\beta(\tau-t)}e^{(n-2)\alpha t}, \\ \beta &= \lambda - (n-1)\alpha, \quad \tau \geq t. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Выберем значение коэффициента α так, чтобы выполнялось условие

$$\beta > 0. \quad (3.68)$$

Решение системы (3.64) с начальными условиями (3.33), (3.44), (3.65) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} z(\tau) &= \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(\tau_1)z(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau} \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)e^{(n-1)\alpha t} \times \\ &\quad (\bar{R}_1(t, x_1^0, ze^{-(n-1)\alpha t}) + \bar{R}_2(t, x_1^0, ze^{-(n-1)\alpha t}) + \\ &\quad \bar{R}_3(t, x_1^0, ze^{-(n-1)\alpha t}) + \bar{R}_4(t, x_1^0, ze^{-(n-1)\alpha t}))dt, \quad \tau \in [\tau_1, \infty); \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} z(\tau) &= \Phi_1(\tau)\tilde{c}^{(2n-1)}(0) + \int_0^{\tau} \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)e^{(n-1)\alpha t} \times \\ &\quad (\bar{R}_1(t, x_1^0, ze^{-(n-1)\alpha t}) + \bar{R}_2(t, x_1^0, ze^{-(n-1)\alpha t}) + \\ &\quad \bar{R}_3(t, x_1^0, ze^{-(n-1)\alpha t}) + \bar{R}_4(t, x_1^0, ze^{-(n-1)\alpha t}))dt, \quad \tau \in [0, \tau_1]. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Воспользовавшись (3.69), (3.70) с учетом (3.37) – (3.40), (3.67), (3.68) в области (3.6), (3.36) получим оценки:

$$\begin{aligned} \|z(\tau)\| &\leq \bar{K}e^{-\beta\tau} \|\Phi_1^{-1}(\tau_1)z(\tau_1)\| + \\ &\int_{\tau_1}^{\tau} K_1e^{-\beta(\tau-t)}(Le^{-\alpha t}\|z\| + L_4(x_1^0)e^{-n\alpha t})dt, \quad \tau \in [\tau_1, \infty), \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \|z(\tau)\| &\leq \bar{K}e^{-\beta\tau} \|\tilde{c}^{(2n-1)}(0)\| + \\ &\int_0^{\tau} K_1e^{-\beta(\tau-t)}(Le^{-\alpha t}\|z\| + L_4(x_1^0)e^{-n\alpha t})dt, \quad \tau \in [0, \tau_1], \end{aligned} \quad (3.72)$$

где $L > 0$ – константа, зависящая от области (3.6), (3.36).

Применяя к (3.71), (3.72) известный результат (см. [58]), в области (3.6), (3.36) будем иметь неравенства

$$\|z(\tau)\| \leq \bar{K}e^{-\mu\tau}\|\Phi_1^{-1}(\tau_1)z(\tau_1)\| + \int_{\tau_1}^{\tau} K_1e^{-\mu(\tau-t)}L_4(x_1^0)e^{-n\alpha t}dt, \quad (3.73)$$

$$\tau \in [\tau_1, \infty),$$

где $\mu = \beta - K_1Le^{-\alpha\tau_1}$,

$$\|z(\tau)\| \leq \bar{K}e^{-\mu_1\tau}\|\tilde{c}^{(2n-1)}(0)\| + \int_0^{\tau} K_1e^{-\mu_1(\tau-t)}L_4(x_1^0)e^{-n\alpha t}dt, \quad (3.74)$$

$$\tau \in [0, \tau_1],$$

$\mu_1 = \beta - K_1L$.

Выберем значение $\tau_1 > 0$ так, чтобы было выполнено условие $\mu > 0$.

После вычисления интегралов в правых частях (3.73), (3.74) получим:

$$\|z(\tau)\| \leq \bar{K}e^{-\mu\tau}\|\Phi_1^{-1}(\tau_1)\| \|z(\tau_1)\| + K_2e^{-\alpha\tau}L_4(x_1^0), \tau \in [\tau_1, \infty), \quad (3.75)$$

$$\|z(\tau)\| \leq K_3\|\tilde{c}^{(2n-1)}(0)\| + K_4L_4(x_1^0), \tau \in [0, \tau_1],$$

здесь коэффициенты \bar{K} , K_1 , K_2 , K_3 и K_4 строго положительны.

В свою очередь, оценки (3.75) можно записать в виде одного неравенства:

$$\|z(\tau)\| \leq K_5e^{-\alpha\tau}\|\tilde{c}^{(2n-1)}(0)\| \quad (3.76)$$

Из (3.65), (3.76) следует, что для всех $\tilde{c}^{(2n-1)}(0)$, принадлежащих области:

$$\|\tilde{c}^{(2n-1)}(0)\| < \frac{C_1}{K_5} \quad (3.77)$$

решение системы (3.64) не покидает области (3.36) и экспоненциально убывает.

Воспользовавшись условием (3.33), найдем $\varepsilon > 0$ такое, что $\forall x_0$, удовлетворяющих неравенству $\|x_0\| < \varepsilon$, было выполнено условие (3.77).

Подстановка полученной функции $z(\tau)$ в формулу (3.65) дает известную функцию $\tilde{c}^{(2n-1)}(\tau) = (\bar{c}^{(2n-1)}(\tau), d(\tau))$. В свою очередь, после подстановки $\tilde{c}^{(2n-1)}$ в формулу (3.46) получим известную функцию $\bar{v}(\tau)$. Далее, используя $\tilde{c}^{(2n-1)}$, с помощью формул (3.30), (3.26), (3.21) будем иметь пару функций $\bar{c}(\tau)$, $\bar{d}(\tau)$, которая является решением задачи (3.16), (3.18).

Если в функциях $\bar{c}(\tau)$, $\bar{d}(\tau)$ вернуться к исходной независимой переменной t по формулам (3.15), (3.17), подставить их в формулу $u_1(t, x_1^0, x_2(t), \dots, x_n(t), u_2(t), \dots, u_r(t))$, перейти к пределу при $t \rightarrow 1$ и присоединить функцию $x_1(t)$ из формулы (3.8), то будем иметь пару функций $x(t)$, $u(t)$, которая является решением исходной задачи 3.1.

Найденные функции $\bar{x}(t) = \bar{c}(\tau(t))$, $\bar{u}(t) = \bar{d}(\tau(t))$ и $\tilde{v}(t) = \bar{v}(\tau(t))$ удовлетворяют системе

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \bar{f}(x_1(t), \bar{x}, u_1(x_1(t), \bar{x}, \bar{u}), \bar{u}), \\ \dot{\bar{u}} &= \alpha^{-1}(1-t)^{-1}\tilde{v}(t)\end{aligned}\tag{3.78}$$

и начальным условиям

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0, \bar{u}(0) = \bar{0}.\tag{3.79}$$

Замечание 3.4. Из анализа доказательства теоремы следует, что после незначительных изменений условия (3.5) и доказательства, ее утверждение будет верным, если вместо известной функции $x_0(t)$, заданной по формуле (3.8) будет фигурировать функция $x_i(t) = p_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, где $p_i(t)$ - полином степени $n \geq 1$, удовлетворяющий граничному условию (3.7).

Теорема доказана.

3.6 Описание алгоритма

Алгоритм решения исходной задачи состоит из следующих этапов:

1. нахождение функции u_1 из условия (3.9); в результате получаем функцию

$$u_1(x_1(t), x_2, \dots, x_n, u_2, \dots, u_r);$$

2. построение системы (3.11);
3. построение вспомогательной системы (3.43);

4. решение задачи стабилизации системы (3.45); в результате получаем вспомогательную управляющую функцию вида (3.46) в символьном виде;
5. решение задачи Коши для системы (3.43) с начальными условиями (3.44), замкнутой вспомогательным управлением, полученным в пункте 4; в результате будем иметь известные функции $\bar{c}^{(2n-1)}(\tau), \bar{d}(\tau)$;
6. подстановка найденных функций $\bar{c}^{(2n-1)}(\tau), \bar{d}(\tau)$ в формулу (3.46) даст известную функцию $\bar{v}(\tau)$;
7. переход в функции $\bar{v}(\tau)$ к исходной независимой переменной t по формуле (3.15); в результате получим $\tilde{v}(t) = \bar{v}(\tau(t))$;
8. решение задачи Коши (3.78) с начальными данными (3.79); в итоге получаем известные функции $\bar{x}(t), \bar{u}(t)$;
9. подстановка найденных решений $\bar{x}(t), \bar{u}(t)$ в функцию $u_1(x_1(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t))$ и ее вычисление.

Реализация этапов с первого по четвертый, а также шестого, седьмого и девятого осуществляется аналитическими методами при помощи средств символьных вычислений. Например, возможно применение библиотеки на языке программирования Python Sympy [62] или прикладного пакета программ для решения задач компьютерной алгебры Wolfram Mathematica [71].

Пятый и восьмой пункты выполняются при помощи численных методов решения систем ОДУ. Например, одного из методов Рунге-Кутты.

Вычислительная сложность алгоритма составляет

$$O(n^4) + O\left(\frac{C_2(n) \cdot \tau_f}{h}\right) + O\left(\frac{C_2(n)}{h}\right), \quad (3.80)$$

где $O(n^4)$ – совокупная сложность символьных операций; $O\left(\frac{C_2(n) \cdot \tau_f}{h}\right)$ – вычислительная сложность пятого этапа алгоритма; $O\left(\frac{C_2(n)}{h}\right)$ – сложность вычисления восьмого этапа; $C_2(n)$ – функция, характеризующая количество операций, необходимых для вычисления компонент интегрируемой функции; τ_f – конечное значение отрезка времени; h – шаг интегрирования при решении задачи Коши. Для определенности был принят метод Рунге-Кутты четвертого порядка с постоянным шагом интегрирования.

3.7 Решение задачи межорбитального перелета

Рассмотрим задачу перевода материальной точки, движущейся по круговой орбите с постоянной скоростью в центральном поле тяготения, в заданную точку, лежащую в плоскости этой орбиты, при помощи реактивной силы.

В соответствии с [72] система уравнений в отклонениях относительно движения по круговой орбите имеет вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \mathbf{v}_1(x_1, x_4) + u_1, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= \mathbf{v}_2(x_1, x_2, x_4) + \mathbf{v}_3(x_1)u_2,\end{aligned}\tag{3.81}$$

где $x_1 = r - r_0$, $x_2 = \dot{r}$, $x_3 = \psi - \alpha_0 t$, $x_4 = \dot{\psi} - \alpha_0$, $u_1 = a_\gamma \dot{m}/m$, $u_2 = a_\psi \dot{m}/m$; r_0 - радиус круговой орбиты, \dot{r} - радиальная скорость, ψ - полярный угол, $\dot{\psi}$ - угловая скорость, a_γ, a_ψ - проекция вектора относительной скорости отделяющейся частицы на направление радиуса и поперечное направление соответственно, m, \dot{m} - масса и скорость изменения массы, α_0 - угловая скорость движения по заданной круговой орбите,

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{\mathbf{v}}{(x_1 + r_0)^2} + (x_1 + r_0)(x_4 + \alpha_0)^2, \quad \mathbf{v}_2 = -2\frac{x_2(x_4 + \alpha_0)}{(x_1 + r_0)}, \quad \mathbf{v}_3 = \frac{1}{x_1 + r_0},$$

где $\mathbf{v} = G \cdot M$; $G = 6.6743 \times 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$ - гравитационная постоянная, $M = 5.972 \times 10^{24} \text{ кг}$ - масса Земли, $\alpha_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}}{r_0^3}}$, $r_0 = 7 \cdot 10^6 \text{ м}$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, $u = (0, u_1, 0, u_2)^T$.

Задача. Найти функции $x(t)$, $u(t)$, которые удовлетворяют системе (3.81) и условиям:

$$x_1(0) = 100, x_2(0) = 0.2, x_3(0) = -\alpha_0 \cdot 10^{-6}, x_4(0) = 10^{-5}, x(1) = 0 \tag{3.82}$$

$$x_4(t) = (3x_4^0 + 2x_3^0) \cdot t^2 - (4x_4^0 + 6x_3^0) \cdot t + x_4^0. \tag{3.83}$$

Начальные условия и значения параметров приведены из [37].

Решение поставленной задачи управления было проведено при помощи алгоритма, описанного в п. 3.6 при $\alpha = 0.25$.

Найдем управление u_1 . Для этого рассмотрим систему, состоящую из первых двух уравнений (3.81):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\nu}{(x_1+r_0)^2} + ((x_4^0(1-t))^2 + 2\alpha_0 x_4^0(1-t) + \alpha_0^2)x_1 + \\ &\quad + r_0(x_4^0(1-t))^2 + 2\alpha_0 r_0 x_4^0(1-t) + \alpha_0^2 r_0 + u_1,\end{aligned}$$

Перейдем к новой независимой переменной по формуле (3.15):

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}c_1 &= \alpha e^{-\alpha\tau}c_2, \\ \frac{d}{d\tau}c_2 &= \alpha e^{-\alpha\tau} \left(-\frac{\nu}{(c_1+r_0)^2} + ((x_4^0 e^{-\alpha\tau})^2 + 2\alpha_0 x_4^0 e^{-\alpha\tau} + \alpha_0^2)c_1 + \right. \\ &\quad \left. + r_0(x_4^0 e^{-\alpha\tau})^2 + 2\alpha_0 r_0 x_4^0 e^{-\alpha\tau} + \alpha_0^2 r_0 + d_1 \right),\end{aligned}\quad (3.84)$$

где $c_1(\tau) = x_1(t(\tau))$, $c_2(\tau) = x_2(t(\tau))$,

$$c_1(0) = \bar{x}_1, \quad c_2(0) = \bar{x}_2, \quad d_1(0) = 0, \quad c_i(\tau) \rightarrow 0.$$

Выполним преобразования сдвига и дополним (3.84) вспомогательной управляющей функцией $\mathbf{v}(\tau)$, в итоге получим систему:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}c_1 &= \alpha e^{-\alpha\tau}c_2, \\ \frac{d}{d\tau}c_2 &= \alpha e^{-\alpha\tau} \left(-\frac{\nu}{(c_1+r_0)^2} + ((x_4^0 e^{-\alpha\tau})^2 + 2\alpha_0 x_4^0 e^{-\alpha\tau} + \alpha_0^2)c_1 + r_0(x_4^0 e^{-\alpha\tau})^2 + \right. \\ &\quad \left. 2\alpha_0 r_0 x_4^0 e^{-\alpha\tau} + \alpha_0^2 r_0 + d_1 \right), \quad \frac{d}{d\tau}d_1 = \mathbf{v}(\tau).\end{aligned}$$

В результате получим:

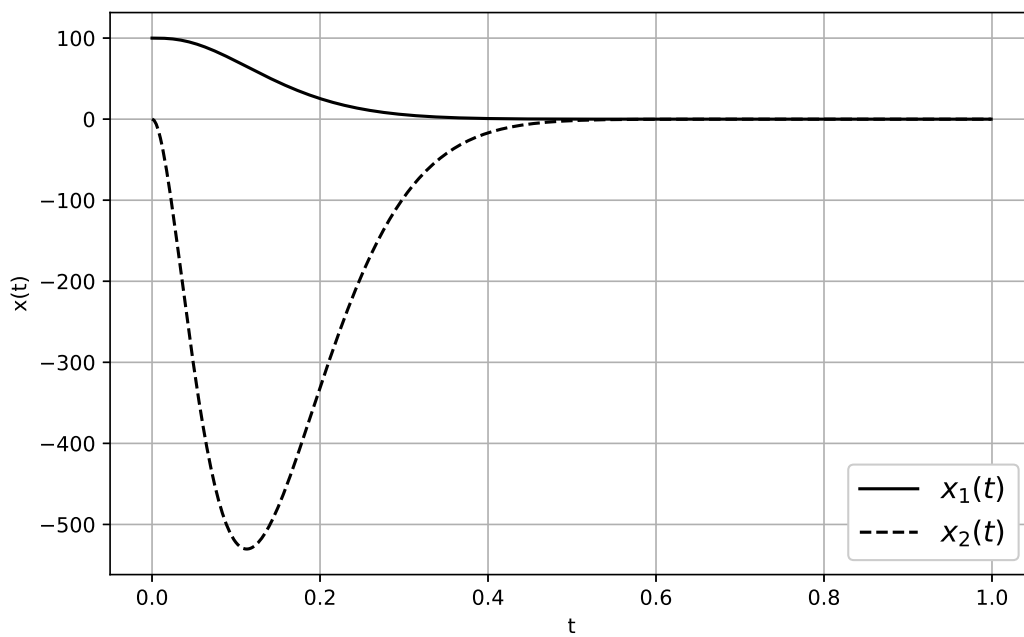
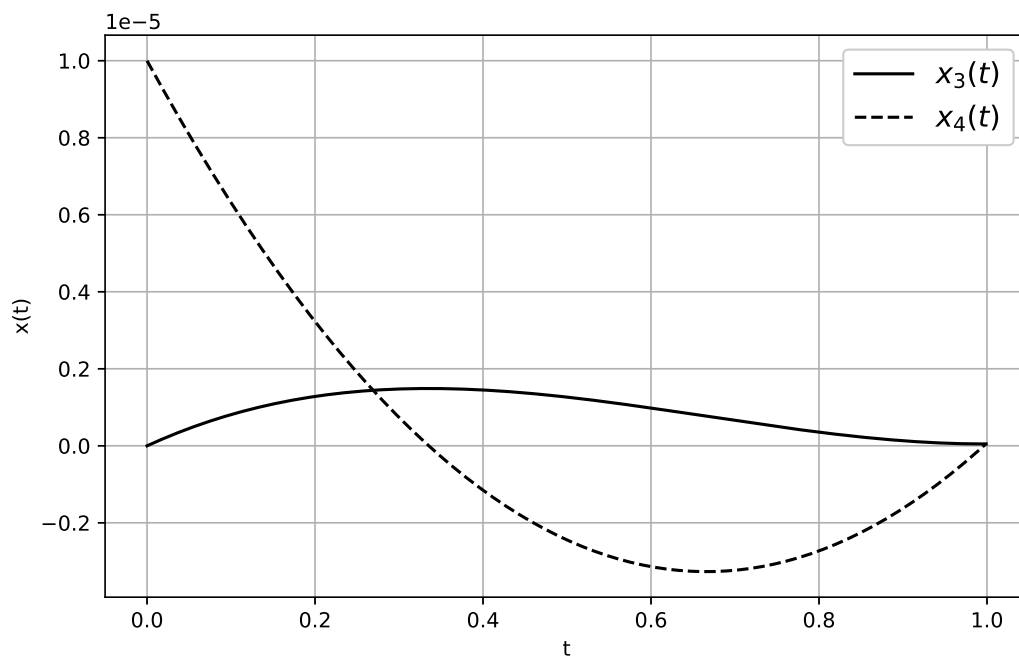
$$\begin{aligned}u_1 &= \left[2.16 \cdot 10^{-8} \cdot t - 3.51 \cdot 10^{-6} - \frac{4.0}{(1-t)^2} - \frac{78.0}{\alpha(1-t)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{380}{\alpha^2(1-t)^2} \right] \cdot x_1 - \frac{3(\alpha+13)}{\alpha(1-t)} \cdot x_2\end{aligned}\quad (3.85)$$

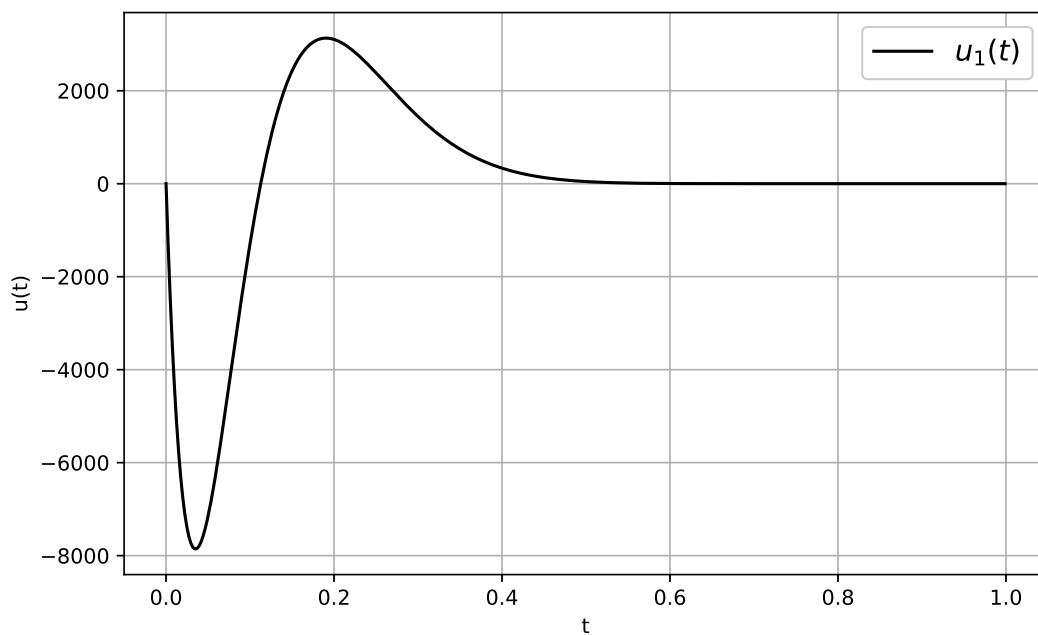
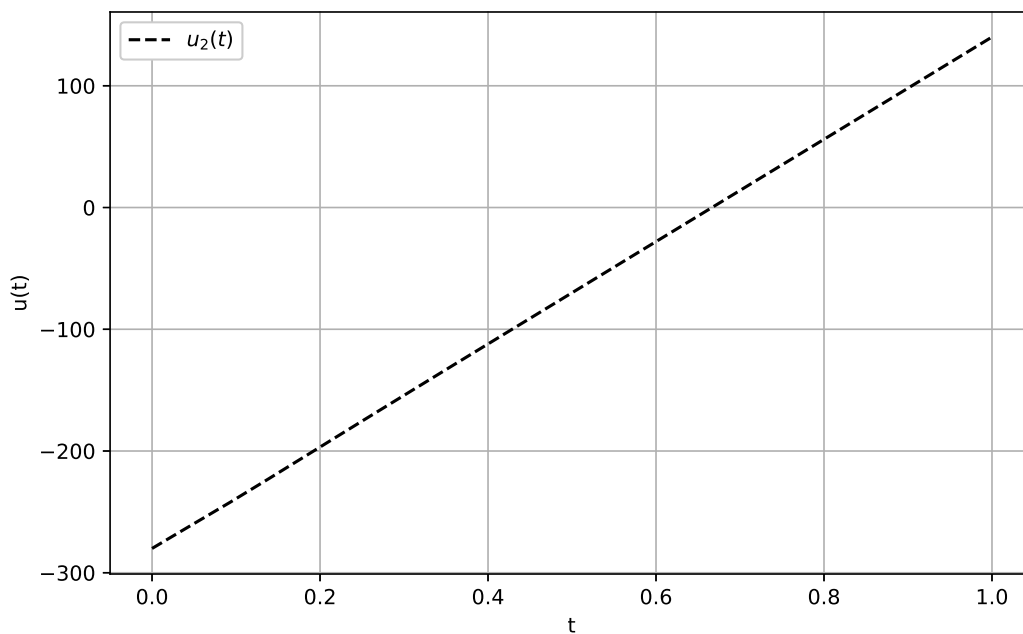
Из четвертого уравнения системы (3.81), с учетом заданной функции (3.83), получим управление u_2 :

$$u_2 = \frac{((6 \cdot x_4^0 + 4 \cdot x_3^0) \cdot t - (4 \cdot x_4^0 + 6 \cdot x_3^0) - \nu_2(x_1, x_2, x_4))}{\nu_3(x_1)}\quad (3.86)$$

После подстановки управляющих функций (3.85) и (3.86) в (3.81) найдем численное решение задачи Коши для данной системы.

Результаты вычислений представлены на рис. 3.1–3.4. Все расчеты и построения графиков выполнены в среде Jupiter Notebook.

Рисунок 3.1 — Графики функций $x_1(t)$, $x_2(t)$ Рисунок 3.2 — Графики функций $x_3(t)$, $x_4(t)$

Рисунок 3.3 — График функции $u_1(t)$ Рисунок 3.4 — График функции $u_2(t)$

Анализ результатов численного моделирования позволяет сделать выводы:

1. анализ графиков на рис. 3.1—3.4 показывает, что полученные функции вектора состояния соответствуют условиям (3.82), (3.83) и (3.7);
2. из графиков следует, что норма вектора управления $\|u\|_\infty = 7858.86$;

3. продемонстрирована работоспособность построенного алгоритма.

3.8 Выводы по главе 3

Предложенный метод может быть использован при решении конкретных практических задач по контролю вычислительных комплексов.

Из формулы (3.80) следует, что вычислительная сложность алгоритма существенно зависит от шага интегрирования при решении задачи Коши вспомогательной и исходной систем уравнений. Решение задач небольшой размерности возможно на персональной ЭВМ со средними параметрами, а также в среде Google Colab.

В примере задан полином (3.83), степень которого выше, чем в условии (3.8), что позволяет сделать вывод о возможности обобщения решения задачи 3.1.

Глава 4. Решение задачи управления массивом Джозефсоновских переходов

4.1 Введение

Одним из возможных способов создания квантового бита (кубита) является его построение на основе так называемых Джозефсоновских переходов [73]. Джозефсоновский переход может быть представлен в виде нелинейного резонатора. Существует три типа Джозефсоновских переходов на основе модели нелинейного резонатора: фазовые, потоковые и зарядовые кубиты. Фазовые и потоковые кубиты чувствительны к значению фазы Джозефсоновского тока [74; 75].

Для реализации квантовых вычислений необходимо создание массивов или цепочек из кубитов. Динамика массивов Джозефсоновских переходов изучалась в достаточно большом количестве работ, например, [76—78]. Также стоит отметить статью [79], в которой была исследована динамика сети идентичных нелинейных осцилляторов.

Управление одним Джозефсоновским переходом построено в [80].

Массив Джозефсоновских переходов можно представить в виде многомерной управляемой системы, содержащей периодические нелинейные функции. Динамика такой системы была рассмотрена в [81].

В статье [78] авторы показали зависимость фаз массива от глобальных переменных электрической цепи. Они не устойчивы и растут в зависимости от времени.

В настоящей работе предлагается подход к управлению массивом Джозефсоновских переходов, основанный на решении задачи оптимального управления глобальными переменными.

Результаты, изложенные в настоящей главе, опубликованы в работе [24].

4.2 Описание модели

4.2.1 Модель массива идентичных Джозефсоновских переходов

Массив идентичных Джозефсоновских переходов может быть представлен в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) в безразмерном виде [77; 78]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= I - \sin x_i - \varepsilon x_{N+2}, \quad \dot{x}_{N+1} = x_{N+2}, \\ \dot{x}_{N+2} &= I - \gamma x_{N+2} - \omega_0^2 x_{N+1} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin x_i \end{aligned} \quad (4.1)$$

где x_i - фаза i -того Джозефсоновского перехода; N - количество переходов в массиве; x_{N+1} заряд конденсатора; I - внешний электрический ток в цепи; ε , γ и ω_0^2 - безразмерные параметры RLC -цепочки.

Рассмотрим систему ОДУ при следующих начальных условиях:

$$x_0 = (0, \dots, 0, 0.5, 0)^T \quad (4.2)$$

Эквивалентная электрическая схема для массива идентичных Джозефсоновских переходов с параллельной RLC -цепочкой представлена на Рис. 4.1.

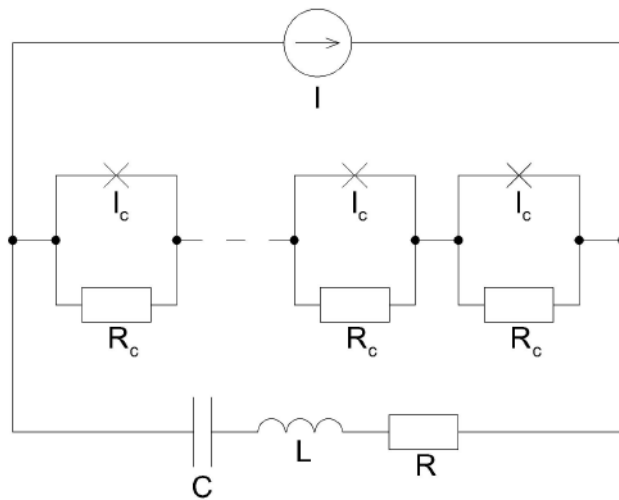


Рисунок 4.1 — Эквивалентная электрическая схема массива идентичных Джозефсоновских переходов с общей RLC -цепочкой [82]

Численное моделирование для (4.1) представлено на Рис. 4.2. Расчеты проводились для массива из 200 контактов в соответствии с работой [78].

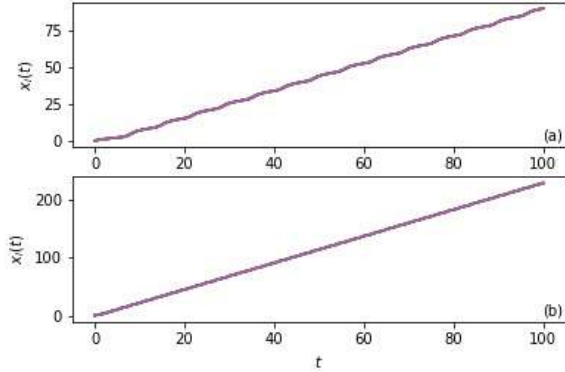


Рисунок 4.2 — Результаты моделирования массива идентичных Джозефсоновских переходов. Значения параметров: (a) $I = 1.2$, $\varepsilon = 0.5$, $\omega_0^2 = 1.2$, $\gamma = 1$; (b) $I = 2.5$, $\varepsilon = 0.5$, $\omega_0^2 = 1.2$, $\gamma = 1$

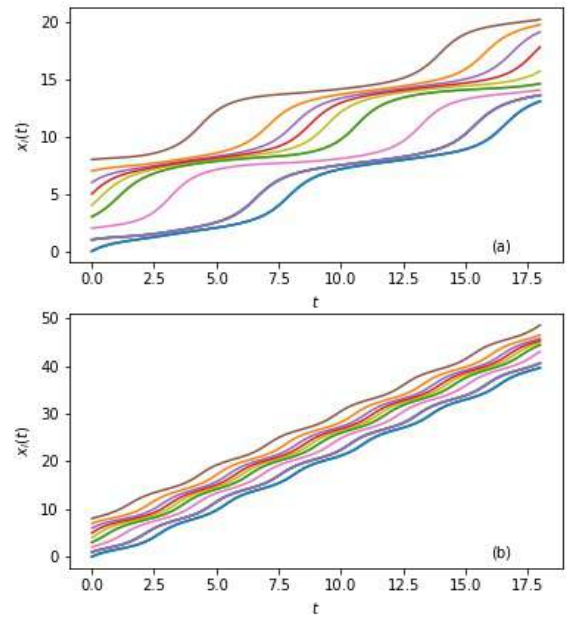


Рисунок 4.3 — Результаты моделирования массива идентичных Джозефсоновских переходов при разных значениях начальных фаз. Показан график 15 фаз из 200. Значения параметров: (a) $I = 1.2$, $\varepsilon = 0.5$, $\omega_0^2 = 1.2$, $\gamma = 1$; (b) $I = 2.5$, $\varepsilon = 0.5$, $\omega_0^2 = 1.2$, $\gamma = 1$

Результаты моделирования показывают, что в массиве идентичных Джозефсоновских переходов при начальных условиях (4.2), все контакты находятся в синхронном состоянии.

Также было выполнено моделирование для случая разных начальных значений фаз. Данные значения находились в диапазоне $[0; 10]$. Результаты представлены на Рис. 4.3.

4.2.2 Массив неидентичных Джозефсоновских переходов

Система ОДУ для неидентичных Джозефсоновских переходов имеет следующий вид [77; 78]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= I - (1 + \xi_i) \sin x_i - \varepsilon x_{N+2}, \quad \dot{x}_{N+1} = x_{N+2}, \\ \dot{x}_{N+2} &= I - \gamma x_{N+2} - \omega_0^2 x_{N+1} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (1 + \xi_i) \sin x_i \end{aligned} \quad (4.3)$$

где все параметры, кроме ξ_i , имеют те же значения, что и в системе (4.1), а ξ_i - параметр, который характеризует отличие критического тока i -го перехода от номинального значения. Начальные условия имеют вид (4.2).

Принципиальная электрическая схема для массива неидентичных Джозефсоновских переходов с параллельной RLC -цепочкой представлена на Рис. 4.4.

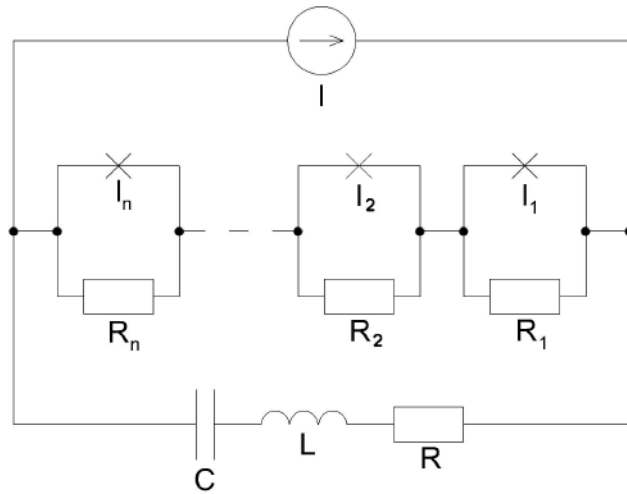


Рисунок 4.4 — Эквивалентная электрическая схема массива неидентичных Джозефсоновских переходов с общей RLC -цепочкой [82]

Результаты численного моделирования для массива из 200 Джозефсоновских переходов, описываемых системой (4.3), (4.2), представлены на Рис. 4.5. В данном случае выполнены расчеты, аналогичные приведенным в статье [78].

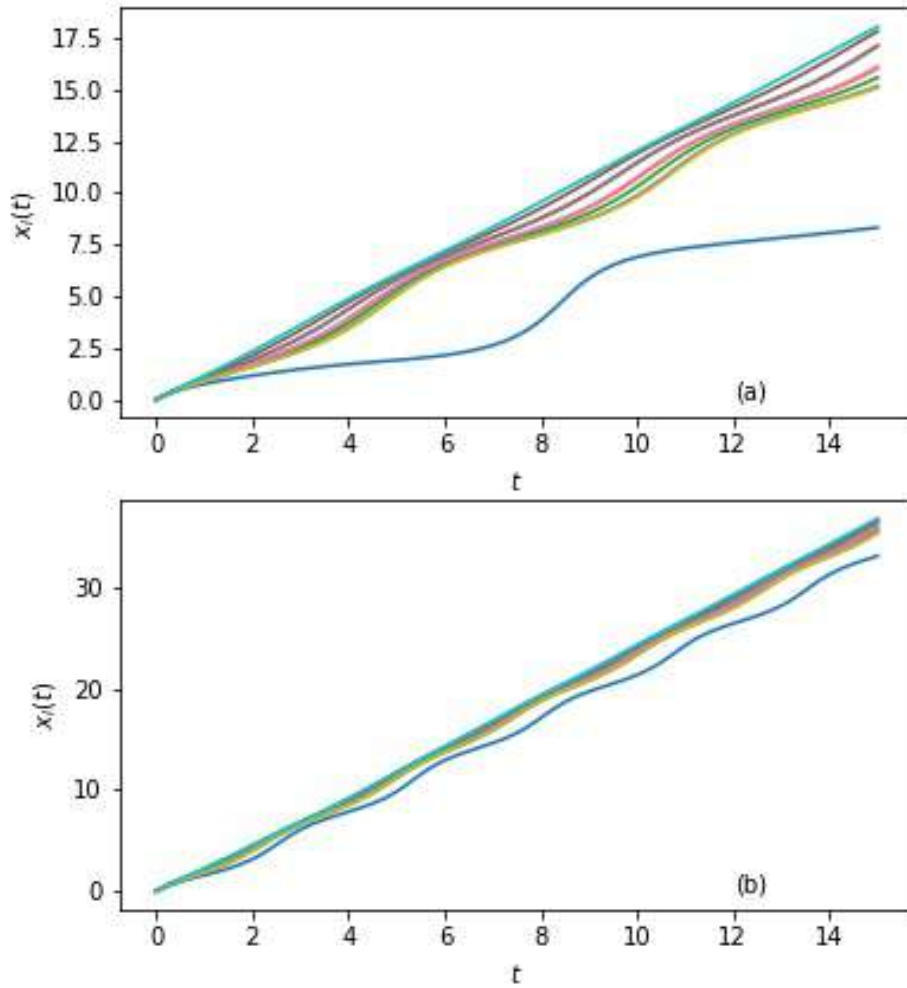


Рисунок 4.5 — Результаты моделирования для массива неидентичных Джозефсоновских переходов. На графике 10 фаз из 200. Значения параметров: (a) $I = 1.2$, $\varepsilon = 0.5$, $\omega_0^2 = 1.2$, $\gamma = 1$, $\xi_i \in [-1; 1]$; (b) $I = 2.5$, $\varepsilon = 0.5$, $\omega_0^2 = 1.2$, $\gamma = 1$, $\xi_i \in [-1; 1]$

4.3 Постановка задачи и ее решение

Представим системы ОДУ (4.1), (4.3) в общем виде и дополним получившуюся систему управляющей функцией. В результате получим:

$$\dot{x} = f(x) + Bu + \bar{I} = F(x, u) + \bar{I}, \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}
&\text{где } x = (x_1, \dots, x_n)^T, x \in R^n, \\
&u = (u_1, \dots, u_r)^T, u \in R^r, r \leq n, \\
&f = (f_1, \dots, f_n)^T, f \in C^\infty(R^n \times R^r; R^n); \\
&\bar{I} = (I, \dots, I, 0, I)^T, F(0,0) = 0, \\
&B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 4.1. *Найти пару функций $x(t)$, $u(t)$, которая удовлетворяет системе (4.4) и начальным условиям:*

$$x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n). \quad (4.5)$$

Причем, $u(t)$ - функция, которая является решением задачи оптимального управления для линеаризованной системы (4.4).

Решение задачи 4.1. Рассмотрим нелинейные системы ОДУ (4.1), (4.3). Выполним их разложение в ряд Тейлора и возьмем только линейные слагаемые. Линеаризованная система в общем виде будет описываться следующей формулой:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (4.6)$$

где A - матрица слагаемых первого приближения:

$$A = \begin{pmatrix} -(1 + \xi_1) & \dots & 0 & 0 & -\varepsilon \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -(1 + \xi_N) & 0 & -\varepsilon \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1+\xi_1}{N} & \dots & -\frac{1+\xi_N}{N} & -\omega_0^2 & -\gamma \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Значения $\xi_i = 0$, $i = 1, \dots, N$ соответствуют случаю массива идентичных Джозефсоновских переходов.

Проверка условий управляемости для данных систем показывает, что

$$\text{rank} S = n, \quad (4.8)$$

где $S = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$, n - размерность системы.

Переформулируем Задачу 4.1 для линеаризованной системы (4.6) в виде стационарной линейно-квадратичной задачи (далее ЛК-задача) [64].

ЛК-задача. *Найти пару функций $x(t)$, $u(t)$, которая удовлетворяет системе (4.6) при начальных условиях (4.5) на бесконечном интервале времени при условии минимизации критерия качества:*

$$J(u) = \int_0^{\infty} [x^T(s)N_2x(s) + u^T(s)N_3u(s)]ds, N_3 > 0, N_2 > 0, \quad (4.9)$$

где матрицы N_2 и N_3 положительно определены и имеют размерности $[n \times n]$ и $[r \times r]$ соответственно.

Из выполнения условия (4.8) следует разрешимость ЛК-задачи.

Управляющая функция $u(t)$, удовлетворяющая условию (4.9), имеет следующий вид [64]:

$$u(x) = -N_3^{-1}B^T P x, \quad (4.10)$$

где положительно определенная матрица $P > 0$ является решением уравнения Риккати:

$$A^T P + P A + N_2 - P B N_3^{-1} B^T P = 0, \quad (4.11)$$

Уравнение Риккати (4.11) решается при помощи модуля MATLAB Control Toolbox. После подстановки решения указанного уравнения P в формулу (4.10) получим управляющую функцию. На последнем этапе необходимо подставить данную функцию в исходную нелинейную систему ОДУ.

4.4 Результаты численного моделирования и их анализ

Численное решение задач управления для массивов идентичных и неидентичных Джозефсоновских переходов было получено с использованием MATLAB и Jupiter Notebook.

Начальные условия (4.5) для всех рассмотренных вариантов, кроме случая разных фаз для массива идентичных контактов, - (4.2). При расчетах были приняты два значения внешнего тока, а именно $I = 1.2$ и $I = 2.5$. Значения

параметров ξ_i для случая неидентичных переходов изменяются в диапазоне $[-1,1]$. В обоих случаях параметры параллельной RLC -цепочки имеют следующие значения: $\varepsilon = 0.5$, $\gamma = 1$, $\omega_0^2 = 1.2$. Параметры моделей массивов контактов приняты в соответствии с работами [77; 78]. N_2 и N_3 - единичные матрицы соответствующих размерностей. Результаты моделирования представлены на Рис. 4.6, 4.7, 4.8.

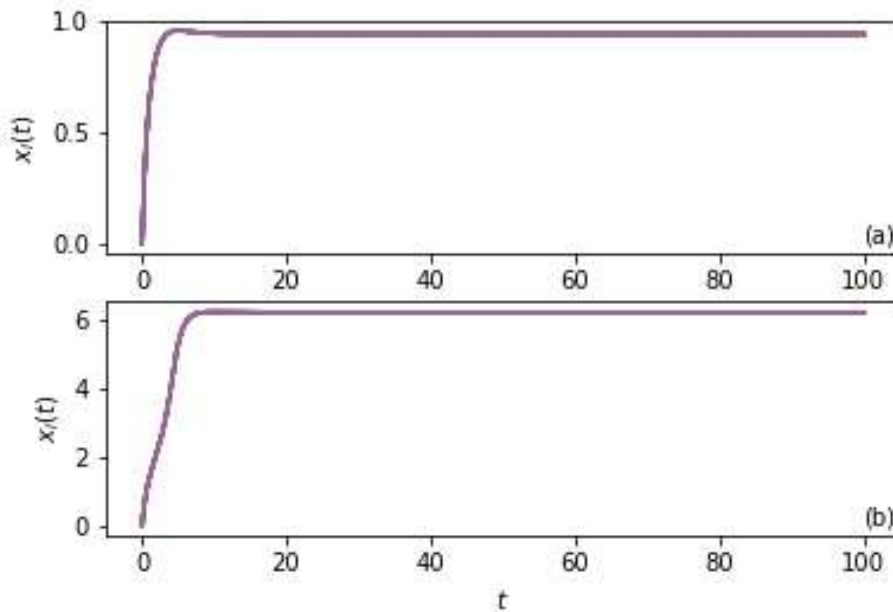


Рисунок 4.6 — Результаты численного решения задачи управления массивом идентичных Джозефсоновских переходов. Значения параметров: $\varepsilon = 0.5$, $\omega_0^2 = 1.2$, $\gamma = 1$; (a) $I = 1.2$, (b) $I = 2.5$

В случае разных начальных фаз для массива идентичных Джозефсоновских переходов, данные значения приняты в диапазоне $[0, 10]$. Также, были проведены численные эксперименты, в ходе которых варьировались значения внешнего тока. Результаты представлены на Рис. 4.7.

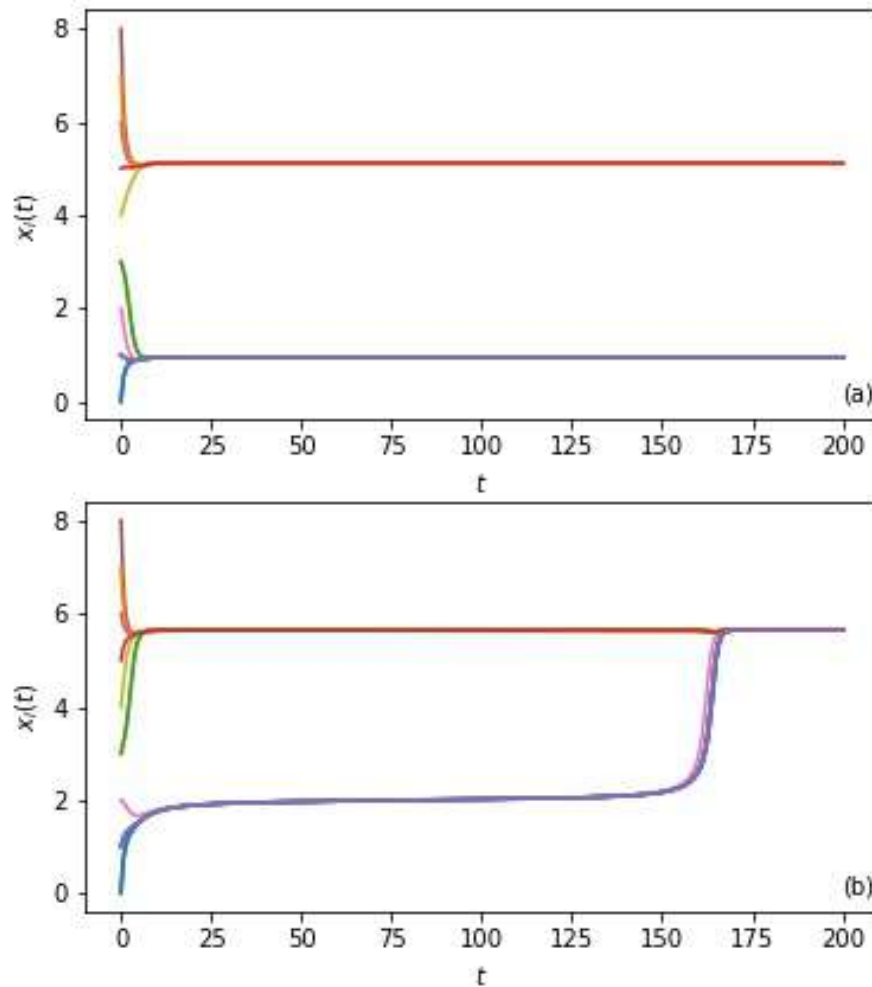


Рисунок 4.7 — Результаты численного решения задачи управления массивом идентичных Джозефсоновских переходов при различных начальных значениях фаз. Показаны графики первых 15 фаз из 200. Значения параметров: $\epsilon = 0.5$, $\omega_0^2 = 1.2$, $\gamma = 1$; (a) $I = 1.2$, (b) $I = 1.738$

Анализ результатов численных расчетов

1. Результаты решения задачи управления массивами идентичных и неидентичных Джозефсоновских переходов показывают, что при наличии управляющего воздействия значения фаз токов в зависимости от времени стремятся к некоторым постоянным значениям (см. Рис. 4.6, 4.7, 4.8).
2. Из графиков на Рис. 4.6, 4.7, 4.8 следует зависимость фаз от значения внешнего тока I .

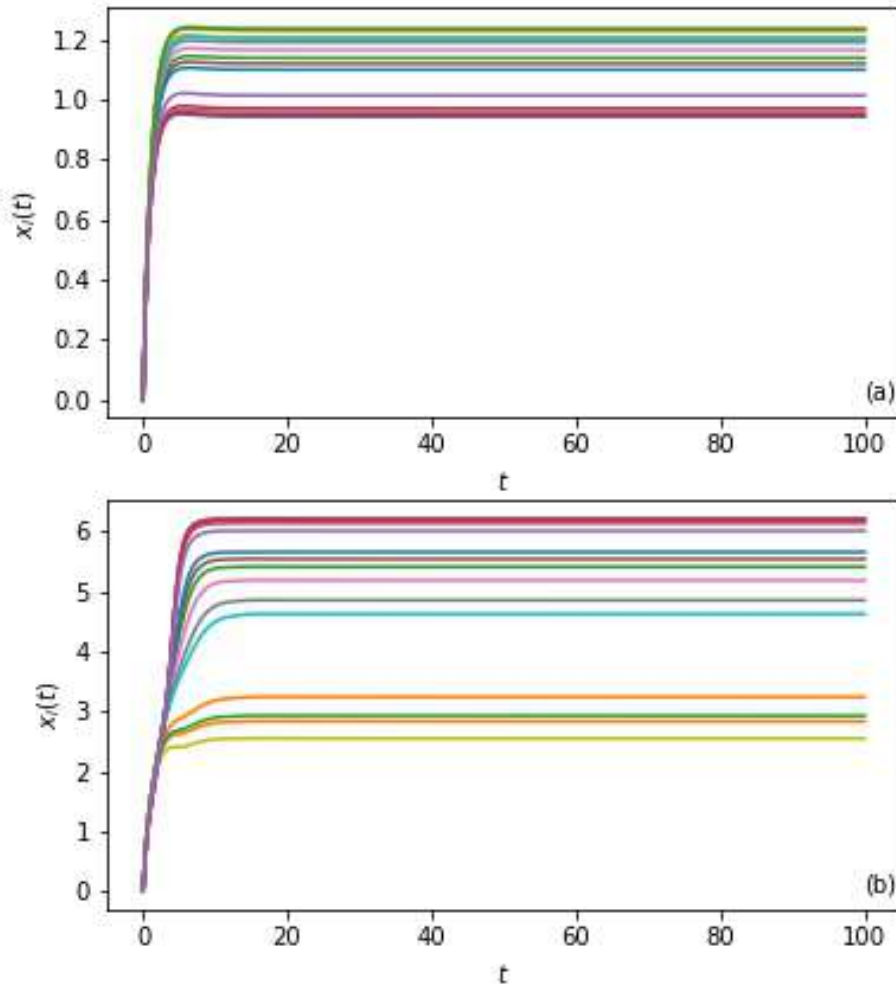


Рисунок 4.8 — Результаты численного решения задачи управления массивом неидентичных Джозефсоновских переходов. Показаны графики первых 15 фаз из 200. Значения параметров: $\varepsilon = 0.5$, $\omega_0^2 = 1.2$, $\gamma = 1$, $\xi_i \in [-1; 1]$; (a) $I = 1.2$,
(b) $I = 2.5$

3. В случае идентичных Джозефсоновских переходов при разных начальных значениях фаз наблюдается эффект синхронизации при наличии управляющего воздействия, см. Рис. 4.7. При значении внешнего тока $I \geq 1.738$ фазы сходятся к одному состоянию. При значении тока $I < 1.738$ значения фаз сходятся к двум различным значениям.

Заключение

В настоящей работе были построены и изучены следующие алгоритмы управления нелинейными системами:

1. алгоритм построения дискретного управления для нелинейной нестационарной системы;
2. алгоритм построения непрерывного управления для нелинейной стационарной системы с учетом возможности контроля вычислительных комплексов.

Показана работоспособность построенных алгоритмов на конкретных примерах и определена их вычислительная сложность. Указанные алгоритмы позволяют построить управляющие функции для достаточно широких классов нелинейных систем. На основе алгоритма дискретного управления разработана библиотека функций, которая позволяет упростить моделирование при его применении к исследованию управляемых систем ОДУ.

Кроме того, была изучена динамика систем, описывающих массивы идентичных и неидентичных Джозефсоновских переходов при условии применения к ним метода оптимального управления. Джозефсоновские переходы находят применение при разработке различных видов современной техники. Решение задачи управления ими может быть полезно при решении указанных задач.

В заключение обсудим дальнейшее возможное развитие представленных в настоящей работе исследований.

Помимо предложенного метода получения дискретной управляющей функции, возможно рассмотрение задачи кусочно-постоянного управления нелинейной системой при неполной информации или управляемости системы, а также случая системы с запаздыванием. Кроме того, представляет интерес решение задачи дискретного управления с учетом контроля вычислительных комплексов.

Задача контроля вычислительных комплексов рассмотрена для случая, когда известна одна из компонент вектора состояния. В дальнейшем предполагается обобщить задачу на большее количество компонент вектора состояния. Также возможно рассмотрение более сложных функций, описывающих известные компоненты вектора состояния. Кроме того, представляет интерес решение

задачи дискретного управления с учетом контроля вычислительных комплексов.

Для модели массивов идентичных и неидентичных Джозефсоновских переходов возможно решение задачи оптимального управления при неполной измеримости системы, а также представляет интерес получение оценки максимального количества контактов, для которого имеет место решение задач управления.

Список литературы

1. *Калман, Р.* Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. — М.: Мир, 1971. — 399 с.
2. *Болтянский, В. Г.* Математические методы оптимального управления / В. Г. Болтянский. — М. : Наука, 1969. — 408 с.
3. *Елкин, В. И.* Редукция нелинейных управляемых систем. Дифференциально-геометрический подход / В. И. Елкин. — М. : Наука. Физматлит, 1997. — 316 с.
4. *Sontag, E. D.* Mathematical Control Theory: Deterministic Finite-Dimensional Systems / E. D. Sontag. — New York : Springer-Verlag New York, Inc., 1998.
5. *Краснощеченко, В. И.* Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза / В. И. Краснощеченко, А. П. Крищенко. — М : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. — 396 с.
6. *Ткачев, С. Б.* Реализация движения колесного робота по заданной траектории / С. Б. Ткачев // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”. — 2008. — № 2. — С. 33—55.
7. *Галиуллин, А. С.* Методы решения обратных задач динамики / А. С. Галиуллин. — М : Наука, 1986. — 224 с.
8. *Крутько, П. Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели / П. Д. Крутько. — М : Наука, 1988. — 328 с.
9. *Крищенко, А. П.* Метод обратной задачи динамики в теории управления / А. П. Крищенко // XII ВСЕРОССИЙСКОЕ СОВЕЩАНИЕ ПО ПРОБЛЕМАМ УПРАВЛЕНИЯ. ВСПУ-2014, Москва 16-19 июня 2014 г. — 2014.
10. *Валеев, Н. Ф.* Обратная спектральная задача для конечномерных операторов / Н. Ф. Валеев // Уфимский математический журнал. — 2010. — Т. 2, № 2. — С. 3—19.
11. *Федоренко, Р. П.* Приближенное решение задач оптимального управления. / Р. П. Федоренко. — М : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1978. — 488 с.
12. *Polyak, B.* Sparse solutions of optimal control via Newton method for under-determined systems / B. Polyak, A. Tremba // J. Global Optim. — 2019. — : doi:10.1007/s10898-019-00784-z.

13. Интеллектуальное управление динамическими системами / С. Н. Васильев [и др.]. — М : Физико-математическая литература, 2000. — 352 с.
14. *Сорокин, А. В.* Разработка нейронных сетей для управления орбитальным движением космических аппаратов с двигателем малой тяги / А. В. Сорокин, М. Г. Ширококов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2018. — № 269. — С. 31.
15. *Bohn, E.* Deep Reinforcement Learning Attitude Control of Fixed-Wing UAVs Using Proximal Policy Optimization / E. Bohn // International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), Atlanta, GA, USA, June 11-14. — 2019. — : arxiv:1911.05478.
16. *Зубер, И. Е.* Синтез терминального управления по выходу нелинейной системы / И. Е. Зубер // ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ. — 2004. — № 1.
17. *Квитко, А. Н.* Методы решения граничных задач теории управления / А. Н. Квитко, Д. Б. Якушева. — СПб : Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2013. — 296 с.
18. *Крищенко, А. П.* Исследование управляемости и множеств достижимости нелинейных систем управления / А. П. Крищенко // АиТ. — 1984. — № 6. — С. 30—36.
19. *Coron, J.-M.* Control and Nonlinearity. Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 136 / J.-M. Coron. — AMS : Providence, 2007.
20. *Aeyels, D.* Controllability for polynomial systems / D. Aeyels // Lect. Notes Contr. and Inf. Sci. — 1984. — Vol. 63. — P. 542—545.
21. *Qin, H.* On the controllability of nonlinear control system / H. Qin // Comput. Maths. with Appls. — 1985. — Vol. 10, no. 6. — P. 441—451.
22. *Литвинов, Н. Н.* О вычислительной сложности одного алгоритма дискретного управления / Н. Н. Литвинов // Процессы управления и устойчивость. — 2023. — Т. 10, № 1. — С. 65—70.
23. *Квитко, А. Н.* Решение локальной граничной задачи в классе дискретных управлений для нелинейной нестационарной системы / А. Н. Квитко, Н. Н. Литвинов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2022. — Т. 18, № 1. — С. 18—36.

24. *Litvinov, N.* Control of global variables for identical and non-identical Josephson junctions arrays / N. Litvinov // Cybernetics and Physics. — 2021. — Vol. 10, no. 3. — P. 138—142. — : <https://doi.org/10.35470/2226-4116-2021-10-3-138-142>.
25. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ.* Библиотека функций для решения задач дискретного управления / Н. Н. Литвинов, А. Н. Квитко (РФ). — № RU 2023616889, Заявка № 22023615862 (Рос. Федерация).
26. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ.* Библиотека функций для решения ЛК-задач оптимального управления / Н. Н. Литвинов (РФ). — № RU 2023616890, Заявка № 2023615863 (Рос. Федерация).
27. *Kvitko, A. N.* Solution of the Local-Boundary-Value Problem of Control for a Nonlinear Stationary System Taking into Account Computer System Verification. / A. N. Kvitko, N. N. Litvinov // Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy. — 2024. — Vol. 57, no. 2. — P. 202—212. — Accepted.
28. *Петров, Н. Н.* Локальная управляемость автономных систем / Н. Н. Петров // Дифференц. уравнения. — 1968. — Т. 4, № 7. — С. 1218—1232.
29. *Петров, Н. Н.* Решение одной задачи теории управляемости / Н. Н. Петров // Дифференц. уравнения. — 1969. — Т. 5, № 5. — С. 962—963.
30. *Верещагин, И. Ф.* Методы исследования режимов полета аппарата переменной массы:[Учеб. пособие] / И. Ф. Верещагин. — Пермь : Изд-во Перм. гос. ун-та им. А. М. Горького, 1972. — 294 с. — т. 2.
31. *Зубов, В. И.* Лекции по теории управления / В. И. Зубов. — М : Наука, 1975. — 496 с.
32. Linear controllability by piecewise constant controls with assigned switching times / M. Furi [et al.] // J. Optim. Theory Appl. — 1985. — Vol. 45, no. 2. — P. 219—229. — : <https://doi.org/10.BF00939978>.
33. *Seilova, R. D.* Construction of piece wise constant controls for linear impulsive systems / R. D. Seilova, T. D. Amanov // Proceedings of International Symposium «Reliability and quality». — 2005. — P. 4—5.
34. *Kvitko, A. N.* On a method for solving a local boundary problem for a nonlinear stationary system with perturbations in the class of piecewise constant

- controls / A. N. Kvitko, A. M. Maksina, S. V. Chistyakov // Int. J. Robust Nonlinear Control. — 2019. — Vol. 29. — P. 4515—4536.
35. *Baier, R.* A computational method for non-convex reachable sets using optimal control / R. Baier, M. Gerdt // European Control Conference (ECC). Budapest, Hungary. — 2009. — P. 97—102.
 36. *Plotnikov, A. V.* Piecewise constant controller linear fuzzy systems / A. V. Plotnikov, A. V. Arsiry, T. A. Komleva // Intern. J. Ind. Math. — 2012. — Vol. 4, no. 2. — P. 77—85.
 37. *Квитко, А. Н.* Решение задачи синтеза дискретной стабилизации с учетом неполной информации для нелинейной стационарной управляемой системы / А. Н. Квитко, Д. Б. Якушева // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. — 2012. — Т. 45, № 2. — С. 65—72.
 38. *Перегудова, О. А.* О стабилизации нелинейных систем каскадного вида с кусочно-постоянным управлением / О. А. Перегудова, Е. В. Филаткина // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2014. — Т. 21, № 1. — С. 80—82.
 39. *Gryn, L.* Discrete feedback stabilization of semilinear control systems / L. Gryn // Control, Optim. Calc. Var. — 1996. — Vol. 1, no. 2. — P. 207—224.
 40. *Габдрахимов, А. Ф.* О стабилизации линейных стационарных управляемых систем с неполной обратной связью / А. Ф. Габдрахимов // Вестн. Удмуртск. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2008. — № 2. — С. 30—31.
 41. *Лизина, Е. А.* Стабилизация непрерывно-дискретной системы с периодической матрицей коэффициентов / Е. А. Лизина, В. Н. Щенников, Е. В. Щенникова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. Физика. — 2013. — Т. 25, № 1. — С. 181—195.
 42. *Лапин, С. В.* Кусочно-постоянная стабилизация систем, линейных относительно управления / С. В. Лапин // Автомат. и телемех. — 1992. — Т. 53, № 6. — С. 37—45.
 43. *Попков, А. С.* Построение множеств достижимости и управляемости в специальной линейной задаче управления / А. С. Попков // Вестник

- Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2021. — Т. 17, № 3. — С. 294—308. — Режим доступа: <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.307>.
44. An integral sliding-mode parallel control approach for general nonlinear systems via piecewise affine linear models / C. Zhang [et al.] // International Journal of Robust and Nonlinear Control. — 2023. — Vol. 33, no. 8. — P. 4438—4458. — : <https://doi.org/10.1002/rnc.6617>.
 45. *Ailon, A.* Driving a linear constant system by a piecewise constant control / A. Ailon, R. Segev // Intern. J. Control. — 1988. — No. 47. — P. 815—825.
 46. *Shushlyapin, E. A.* On the equivalency of piecewise-constant control with a known number of switchings and arbitrary amplitude bounded control in a terminal problem for a linear nonstationary system / E. A. Shushlyapin // Journ. Sov. Math. — 1993. — Vol. 2, no. 65. — P. 1550—1554.
 47. *Булгаков, А. И.* БЭНГ-бЭНГ принцип для линейного дифференциального уравнения второго порядка / А. И. Булгаков, С. Е. Жуковский // Вестник Тамбов. гос. ун-та. — 2001. — Т. 6, № 2. — С. 150—154.
 48. *Alzabut, J. O.* Piecewise constant control of boundary value problem for linear impulsive differential systems / J. O. Alzabut // Math Methods Eng. — 2007. — P. 123—129.
 49. *Максимов, В. П.* Об одном классе управлений для функционально-дифференциальной непрерывно-дискретной системы / В. П. Максимов, А. Л. Чадов // Изв. высш. учеб. заведений. Математика. — 2012. — № 9. — С. 72—76.
 50. *Oaks, O. J.* Piecewise Linear Control of Nonlinear Systems / O. J. Oaks, G. Cook // IEEE Transactions on Industrial Electronics and Control Instrumentation. — 1976. — Vol. 1, IECI—23. — P. 56—63.
 51. *Л., С. Ю.* Конструктивное решение задачи управления на основе метода нильпотентной аппроксимации / С. Ю. Л., А. А. А., А. П. Маштаков // ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ. Переславль-Залесский. — 2009. — Т. 2. — С. 5—23.
 52. *Юркевич, В. Д.* Синтез нелинейных нестационарных систем управления с разнотемповыми процессами / В. Д. Юркевич. — СПб : Наука, 2000. — 287 с.

53. *Кузнецов, А. В.* Условия локальной оптимальности для нелинейных управляемых систем в классе кусочно-постоянных управлений / А. В. Кузнецов // Вестник Рязанск. гос. радиотехнич. ун-та. — 2011. — Т. 38, № 4. — С. 125—128.
54. *Kamyar, R.* Constructing Piecewise-Polynomial Lyapunov Functions for Local Stability of Nonlinear Systems Using Handelman's Theorem / R. Kamyar, S. Murti, P. M. M. // arXiv: Optimization and Control. — 2014. — : <https://doi.org/10.48550/arXiv.1408.5189>.
55. *Lu, Y.* A Piecewise Smooth Control-Lyapunov Function Framework for Switching Stabilization / Y. Lu, W. Zhang // arXiv: Optimization and Control. — 2015. — : <https://doi.org/10.48550/arXiv.1503.01968>.
56. *Литвинов, Н. Н.* Метод построения дискретного управления для нелинейной нестационарной системы: выпускная квалификационная работа аспиранта: 09.06.01 / Н. Н. Литвинов. — СПб., 2023. — 72 с.
57. *Смирнов, Е. Я.* Стабилизация программных движений / Е. Я. Смирнов. — СПб : Изд-во С.-Петербур. ун-та, 1997. — 301 с.
58. *Барбашин, Е. А.* Введение в теорию устойчивости движения / Е. А. Барбашин. — М : Наука, 1967. — 224 с.
59. *Амосов, А. А.* Вычислительные методы: Учебное пособие. / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. — СПб : Изд-во «Лань», 2014. — 672 с.
60. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — М : Лаборатория знаний, 2020. — 636 с.
61. *Вабищевич, П. Н.* Численные методы: Вычислительный практикум / П. Н. Вабищевич. — М : Книжный дом «Либроком», 2010. — 320 с.
62. SymPy [Электронный ресурс]. — URL: <https://www.sympy.org/en/index.html> (дата обр. 29.04.2022).
63. *Бурков, В. Н.* Вычислительная сложность задач управления активными системами / В. Н. Бурков, Д. А. Новиков // Труды Международной конференции «РАСО'2001». М.: ИПУ РАН. — 2001. — С. 81—102.
64. *Афанасьев, В. Н.* Математическая теория конструирования систем управления / В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, Н. В. Р. — М : Высшая школа, 2003. — 614 с.
65. *Kvitko, A. N.* Solution of the local boundary value problem for a nonlinear non-stationary system in the class of synthesising controls with account of

- perturbations / A. N. Kvitko // Intern. J. Control. — 2020. — Vol. 93, no. 8. — P. 1931—1941. — : <https://doi.org/10.1080/00207179.2018.1537520>.
66. *Boiko, A. V.* On Approaches for Solving Nonlinear Optimal Control Problems / A. V. Boiko, N. V. Smirnov // Studies in Computational Intelligence. — 2020. — Vol. 868. — P. 183—188.
67. *Репин, Ю. М.* Решение задачи об аналитическом конструировании регуляторов на электронных моделирующих устройствах / Ю. М. Репин, В. Е. Третьяков // Автомат. и телемех. — 1963. — Т. 24, № 6. — С. 738—743.
68. *Кувшинов, В. М.* Особенности численного решения матричного алгебраического уравнения Риккати методом установления / В. М. Кувшинов // Ученые записки ЦАГИ. — 1979. — Т. X, № 1.
69. *Cook, S. A.* The complexity of theorem proving procedures / S. A. Cook // Proceedings of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing - STOC '71. — 1971.
70. *Квитко, А. Н.* Алгоритм решения краевой задачи для нелинейной системы и его численное моделирование / А. Н. Квитко, О. С. Фирюлина, А. С. Еремин // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. — 2017. — Т. 4, № 4. — С. 608—621.
71. Wolfram Mathematica [Электронный ресурс]. — URL: <https://www.wolfram.com/mathematica> (дата обр. 22.02.2023).
72. *Красовский, Н. Н.* Теория управления движением / Н. Н. Красовский. — М : Наука, 1968. — 476 с.
73. *Nielsen, M. A.* Quantum Computation and Quantum Information / M. A. Nielsen, I. L. Chuang. — Cambridge : Cambridge University Press, 2000. — 676 p.
74. *Geller, M. R.* Quantum computing with superconductors I: architectures / M. R. Geller. — 2006. — : arXiv: quant-ph/0603224v1.
75. *Martinis, J. M.* Superconducting qubits and the physics of Josephson junctions / J. M. Martinis, K. Osborne. — 2004. — : arXiv:cond-mat/0402415v1.
76. *Hens, C.* Bursting dynamics in a population of oscillatory and excitable Josephson junctions / C. Hens, P. Pal, S. K. Dana // Phys. Rev. E. — 2015. — 92 (022915). — : DOI: 10.1103/PhysRevE.92.022915.

77. *Kuznetsov, A. P.* Dynamics of Three and Four Non-identical Josephson Junctions / A. P. Kuznetsov, I. R. Sataev, Y. Sedova // Journal of Applied Nonlinear Dynamics. — 2018. — Vol. 7, no. 1. — P. 105—110.
78. *Vlasov, V.* Synchronization of a Josephson junction array in terms of global variables / V. Vlasov, A. Pikovsky // Phys. Rev. E. — 2013. — 88 (022908). — : DOI: 10.1103/PhysRevE.88.022908.
79. Chimeralike states in a network of oscillators under attractive and repulsive global coupling / A. Mishra [et al.] // Phys. Rev. E. — 2015. — 92 (062920). — : DOI: 10.1103/PhysRevE.92.062920.
80. *Borisenok, S.* Tracking with Target Attractor Feedback in Superconducting Josephson Junction / S. Borisenok // PhysCon 2015 Conference Proceedings. — 2015.
81. *Smirnova, V.* New results on cycle-slipping in pendulum-like systems / V. Smirnova, A. Proskurnikov, N. Utina // CYBERNETICS AND PHYSICS. — 2019. — Vol. 8, no. 3. — P. 167—175.
82. *Wiesenfeld, K.* Frequency locking in Josephson arrays: Connection with the Kuramoto model / K. Wiesenfeld, P. Colet, S. H. Strogatz // Phys. Rev. E. — 1998. — 57 (1563). — : DOI:<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.57.1563>.

Приложение А

Программный код решения задачи дискретного управления
роботом–манипулятором

```
import sympy as sp
import math as mt
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy import *
import DiscrControlLib as ds

#Вывод графика
def PlotFig(y,t,m,label_y):
    plt.figure(figsize=(16, 5))
    plt.subplot(121)
    st = label_y
    label=['$x_1(t)$, рад', '$x_2(t)$, рад/с']
    if m > 1:
        for n in range(0,m):
            r = [y[i][n] for i in range(0,len(y))]
            plt.plot(t,r,label=label[n])
            plt.legend(loc='best', fontsize=12)

    else:
        plt.plot(t,y,label=st)
    plt.xlabel('t')
    plt.ylabel(st)
    plt.grid()
    plt.subplot(122)
    sg = '* k'
    s = len(t)
```



```

plt.plot(t[:s],y[:s,2], sg)
plt.grid()
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('$u(t)$, $рад/с^2$')
plt.show()

```

```
#переменные
```

```

u = sp.var('u:5')
c = sp.var('c:5')
d = sp.var('d:5')
a = var('a')
sp.var('alpha')
t, tau = symbols('t tau')
y = sp.var('y:3')

```

```
#Значения параметров
```

```

a = 0.25
x_0 = 0.05
a1 = 0.1
q = 0.01
L = 10
M = 20
m_0 = 1
g = 9.81

```

```

m = m_0 - q*t
m_1 = m + M/3
a_1 = a1/(L**2*m_1)
a_2 = g*(m + M/2)/(L*m_1)

```

```
"""###Построение матриц вспомогательной системы"""
```

```
#Вектор-функция
```

```
F = sp.Matrix([y1,- a_2*sp.sin(y0) - a_1*y1 + y2, 0])
```

```
P = ds.Matrix_P(F, y, t, 1)
```

```
Q = sp.Matrix([0,0,1])
```

```
"""###Построение матрицы S, проверка условия калмановского типа"""
```

```
S, R = ds.Test_controllability(P, Q, tau)
```

```
"""### Построение матрицы  $S^{-1}(PS - \frac{dS}{d\tau})$ """
```

```
U = sp.simplify(S.inv()*(P*S - sp.diff(S,tau)))
```

```
"""### Задание коэффициентов устойчивого полинома"""
```

```
gamma = ds.Koeffs_Sym(3,a)
```

```
"""### Построение матрицы  $T$ """
```

```
phi = U.col(-1)
```

```
T = sp.Matrix([[1, -phi[-1], -(sp.diff(phi[-1],tau)+phi[-2])],
               [0, 1, -phi[-1]], [0, 0, 1]])
```

```
"""Построение вектора  $\delta$ """
```

```
delta = sp.simplify(sp.Matrix([-gamma[0]-phi[-1],
                                -gamma[1]-2*sp.diff(phi[-1],tau)-phi[-2],
```

```
-gamma[2] - sp.diff(phi[-1],tau,2)- sp.diff(phi[-2],tau]))
```

```
"""### Построение управляющей функции"""
```

```
M_u = sp.simplify(delta.T*T.inv()*S.inv())
```

```
M_u
```

```
"""### Возвращение к исходным переменным"""
```

```
TAU = - sp.log(1-t)/alpha
```

```
TAU
```

```
M_t = M_u.subs(tau, TAU)
```

```
M_t
```

```
"""### Подстановка управляющей функции в исходную систему и  
решение задачи Коши"""
```

```
M_t1 = M_t.subs(alpha, a)
```

```
M_t1
```

```
u_t = ds.Sym_to_Num(M_t1,t)
```

```
m = len(u_t)
```

```
for i in range(m):
```

```
    print(u_t[i](t))
```

```
at1 = sp.lambdify(t, a_1, "numpy")
```

```
at2 = sp.lambdify(t, a_2, "numpy")
```

```
per = 5*10**13
```

```
def f(t,y):
```

```
    f = np.zeros((m),'float')
```

```
    u = 0
```

```

#h = 1-mt.exp(-a*t)
for i in range(m):
    u += u_t[i](t)*y[i]

f[0] = y[1]
f[1] = - at2(t)*np.sin(y[0]) - at1(t)*y[1] + y[2] + per*(1-t)**2
f[2] = u/(a*(1-t))
return f

t0 = 0.
tEnd = 0.99
y0 = np.array([0.5, -0.8, 0.])
tau1 = 0.1

k = len(y0)

t_u = []
y_u = []

for i in range(k):
    t_f, y_f = ds.rungediscr_23(f,t0,y0[i],tEnd,tau1,a)
    t_u.append(t_f)
    y_u.append(y_f)
    PlotFig(y_f,t_f,2,'x(t)')

```

Приложение Б

Программный код решения задачи оптимального управления роботом – манипулятором

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as mt
import sympy as sp
import OptRicControlLib as opt

def PlotFig(y,t,m,label_y):
    plt.figure(figsize=(8, 5))
    #plt.subplot(121)
    st = label_y
    if m == 2:
        label=['$x_1(t)$, рад', '$x_2(t)$, рад/с']
    else:
        label = ["$p_{11}$", "$p_{12}$", "$p_{21}$", "$p_{22}$"]
    if m > 1:
        for n in range(0,m):
            r = [y[i][n] for i in range(0,len(y))]
            plt.plot(t,r,label=label[n])
            plt.legend(loc='best', fontsize=12)

    else:
        plt.plot(t,y,label=st)
    plt.xlabel('t')
    plt.ylabel(st)
    plt.grid()
    plt.show()

#Задание всех необходимых символьных переменных
t, tau = sp.var('t tau')
```

```

sp.var('alpha')
y = sp.var('y:2')
x = sp.var('x:4')

#Параметры модели
a = 1/2
x_0 = 0.05
a1 = 0.1
q = 0.01
L = 10
M = 20
m_0 = 1
g = 9.81
m = m_0 - q*t
m_1 = m + M/3
a_1 = a1/(L**2*(m_0 - q*t + M/3))
a_2 = g*(m_0 - q*t + M/2)/(L*(m_0 - q*t + M/3))

#Вектор-функция
F = sp.Matrix([y1,- a_2*sp.sin(y0) - a_1*y1])

Y_f = sp.Matrix([y0,y1])

"""###Построение матриц вспомогательной системы"""

P = sp.Matrix([[0,1],[-a_2,-a_1]])

Q = sp.Matrix([0,1])

"""###Проверка условия калмановского типа"""

S, R = opt.Test_control_one_col(P, Q, tau)

#Задание матриц системы

```

```

N_0 = 1
N_1 = sp.eye(2)
N_1[1,1] += 1
A = P
B = Q

#Решение уравнения Риккати
t0 = 0.
tEnd = 100
p0 = np.array([0, 0, 0, 0])
tau1 = 0.02

t_p, y_p = opt.Riccati_solve(A,B,N_0,N_1,t0,tEnd,tau1)

label = ["$p_{11}$", "$p_{12}$", "$p_{21}$", "$p_{22}$"]

opt.PlotFigRic(y_p,t_p,4,label,figsize=(8,5))

"""### Построение управляющей функции"""

X = sp.Matrix([[x0,x1],[x2,x3]])
u = -N_0*B.T*X
u = sp.lambdify(t, u, "numpy")

"""### Подстановка управляющей функции в исходную систему и
решение задачи Коши"""

at1 = sp.lambdify(t, a_1, "numpy")

at2 = sp.lambdify(t, a_2, "numpy")

def f(t,y,y_p,k,h):
    f = np.zeros((2),'float')
    f[0] = y[1]
    f[1] = - at2(t)*np.sin(y[0]) - at1(t)*y[1] -

```

```
y_p[k][2]*y[0] - y_p[k][3]*y[1] + h*(1 - t/tEnd)**2  
return f
```

```
h = [0.10,1.5,2.28]
```

```
t0 = 0.
```

```
y0 = np.array([0.5, -0.8])
```

```
tau1 = 0.02
```

```
t_u = []
```

```
y_u = []
```

```
for i in range(len(h)):
```

```
    t_f, y_f = opt.runKut_23_U(f,t0,y0,tEnd,tau1,y_p,h[i])
```

```
    t_u.append(t_f)
```

```
    y_u.append(y_f)
```

```
    PlotFig(y_f,t_f,2,'x(t)')
```