Санкт-Петербургский государственный университет

на правах рукописи

Виталий Алексеевич Кочевадов

Равновесное поведение в динамических моделях конкуренции с сетевым взаимодействием

Научная специальность: 1.2.3. Теоретическая информатика, кибернетика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, доцент
Артем Александрович Седаков

Санкт-Петербург
2024

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования

Сетевые игры являются достаточно молодым и интенсивно развивающимся разделом математической теории игр. Основной отличительной особенностью сетевых игр является допущение, согласно которому выигрыш каждого игрока зависит от структуры взаимодействия всех субъектов игрового процесса. Само взаимодействие игроков, как правило, иллюстрируется в виде ориентированного или неориентированного графа, вершины которого отождествлены с игроками, а каждое ребро (неориентированная связь) или дуга (ориентированная связь) характеризует взаимодействие, то есть влияние связи на объединенных ею игроков. С практической точки зрения специфика сетевого взаимодействия открывает новую возможность математически исследовать на первый взгляд неоднозначные отношения между возможными участниками конфликта. Так, например, существует большое количество ситуаций, в которых конкурирующие стороны могут заключать временное «перемирие», не объединяясь при этом в коалицию — совместные исследования, спонсируемые конкурирующими организациями, взаимная поддержка противоборствующих партий и так далее. При этом особый интерес к исследованию подобных проявлений задается, во-первых, их целесообразностью и условиями наступления, во-вторых, их продолжительностью и динамикой, в которой рассматриваемые проявления могут быть как краткосрочными, так и долгосрочными и, в-третьих, оптимальным поведением игроков при определенной структуре сетевого взаимодействия. Таким образом, можно заключить, что исследование динамических моделей конкуренции с сетевым взаимодействием позволяет исследовать особенности влияния игроков друг на друга в условиях их индивидуальных отношений — если придать сетевым связям соответствующие веса, которые будут попарно характеризовать степень или уровень влияния игроков друг на друга.

Сетевое взаимодействие конкурирующих игроков, в частности, может описывать специфику их сотрудничества и иметь при этом экзогенный или эндогенный характер формирования сетевых связей — соответственно задаваться как внешний параметр в игре (игры на сетях), или являться частью стратегического поведения игроков, которые самостоятельно формируют сетевые связи между собой в игровом процессе при общей конкурентной среде.

Анализ экзогенного формирования сетевого взаимодействия игроков в динамике отвечает на ряд важных вопросов, в первую очередь — с концептуальной точки зрения теории динамических игр, например: как сетевое взаимодействие (структура сети и эффекты связей — веса, характеризующие силу воздействия) влияет на выигрыши игроков и их равновесное поведение и, если сетевое взаимодействие оказывает влияние на поведение игроков и текущее состояние некоторого управляемого объекта, то каким оно будет в равновесии? Последний вопрос происходит из теории оптимального управления, согласно которой для устойчивого развития управляемой системы необходимо, чтобы вектор, описывающий ее состояния, находился в границах некоторой желаемой области. Таким образом, устойчивое развитие системы может быть обеспечено посредством выбора соответствующей структуры сети [18, 34, 80]. В более общем случае можно ставить вопрос поиска таких сетевых структур, при которых выполнялся бы желаемый критерий (достигалось бы определенное состояние системы или продолжительность воздействия — задача быстродействия), что стало одной из первых предметных областей применения некооперативных сетевых игр в различных управляемых системах [8].

В анализе эндогенного формирования сетевого взаимодействия игроков в динамике могут быть подняты вопросы целесообразности и условий сетевого взаимодействия, продолжительности и устойчивости связей в сети, что на сегодняшний день представляется наиболее актуальными вопросами эндогенного сетевого взаимодействия. Актуальность исследования таких аспектов обусловлена прикладной востребованностью, которая позволяет успешно применять сетевые игры в процессах переговоров, совместных инвестициях в НИОКР, управлении репутациями участников сети и других задачах, где элементы сетевого взаимодействия имеют определяющее значение для игроков.

Концептуальные особенности взаимодействия игроков, которые можно исследовать с использованием сетевых игр, позволяют говорить о возможности применения методологии игрового анализа на всевозможные сети и системы, в которых присутствуют агенты с несовпадающими или необщими интересами. В качестве примера таких сетей можно указать транспортные, топливные и энергетические, сети средств связи и другие.

Степень разработанности проблемы в литературе

Одними из первых работ, посвященных конкурентным процессам, в которых прослеживается методология теории игр, принято считать [52, 59], представляющие анализ спроса и цены товара на конкурентном рынке сбыта. Позже работы [35, 78, 88], в которых были представлены математические аспекты и приложения теории игр, положили начало развитию соответствующей теории как серьезного инструмента анализа конкурентного поведения. В настоящее время исследование конкурентного поведения игроков является не просто актуальным, но и очень плодотворным, особенно с учетом аспектов сетевого взаимодействия и поведения игроков в сети — [16, 17, 40, 68]. Стоит отметить, что стратегический характер сетевого взаимодействия в статической постановке исследовался в таких работах как [48, 54, 63, 70], а в динамической в работах — [45, 61, 62, 67, 69, 81, 82]. С подробным анализом современных тенденций и направлений в исследовании сетевого взаимодействия игроков можно ознакомиться в обзорах [16, 36, 62].

Несмотря на то, что в литературе при исследовании конкурентного поведения представлены различные модели олигополии с рынками производственных факторов, например, в работах [5, 6, 19, 75, 79, 84], согласно справедливому замечанию, высказанному в [25], до сих пор в литературе недостаточное внимание уделяется сетям с производством. При этом анализ научно-предметных публикаций показал, что хоть модели Курно стали классическими примерами конкуренции в математической теории игр [23, 24, 31, 38, 41], анализ в различных постановках моделей конкуренции, построенных на основе допущений Курно, остается актуальным [1, 9, 11, 65, 64, 83, 86]. Стоит отметить, что структурное взаимодействие и управление сетевой структурой в моделях конкуренции непосредственно участниками игры, не рассматривается в должной мере несмотря на некоторые уже имеющиеся результаты [30, 49, 63]. Актуальность продолжения исследования таких аспектов обусловлена тем, что сетевые структуры позволяют эффективно описывать конкурентное взаимодействие, что расширяет класс решаемых игровых задач за счет дополняемости и заменяемости в поведении игроков [36, 62, 67, 69], а также специфики их взаимного влияния в зависимости от наличия сетевой связи. Достаточно подробно и информативно рассматривается природа структурного взаимодействия игроков в работах [71, 87, 90], где раскрывается необходимость участников игрового процесса формировать структурные связи друг с другом. При этом специфика сетевого взаимодействия, выраженная в значениях коэффициентах сетевого влияния, как показано в [91], представляет собой отдельный акцент для исследования.

Важно отметить, что значительная часть работ в области сетевых игр часто посвящена играм с экстерналиями, возникающим преимущественно лишь в потребительском контексте [55, 56, 58]. При этом усилия игроков, продиктованные дополняемостью в их действиях, зачастую рассматриваются как инвестиционные и в основном направленные на некоторые эфемерные величины — знания, мнения, впечатления и прочее [46, 73, 76, 77, 85]. Весьма популярными в последнее время также оказалось направление применения сетевых игр, посвященное оптимизации систем с сетевой структурой, в которых игрокам необходимо совместно использовать общедоступные ресурсы, подробно с задачами этого направления можно познакомиться, например в работах [36, 37, 57].

Многие исследователи выбирают сетевые игры в качестве направления своих исследований [2, 7, 12, 25, 42, 43, 44]. Такая популярность в первую очередь продиктована ценностью применения теоретических результатов к реально существующим сетевым структурам, например, к организованным группам людей, рыночным или политическим отношениям и даже социальным или беспроводным сетям [13, 50], и т. д. При этом авторы приводимых работ отмечают достаточно большое количество вопросов с дефицитом оказанного на текущий момент внимания, которые до сих пор остаются во многом открытыми в теории, выделяя при этом условия, критерии и принципы сетевого взаимодействия конкурирующих игроков как наиболее актуальные и недостаточно освещенные.

Для исследования динамических моделей конкуренции с сетевым взаимодействием, в данной работе будет осуществлен поиск и анализ ситуации равновесия по Нэшу. Несмотря на то, что равновесие по Нэшу не лишено определенных недостатков, которые подробно описываются в [21], в силу его достоинств, оно является воплощением фундаментальной концепции решения неантагонистических игр — согласно [78, 88]. В связи с чем можно заключить, что равновесие по Нэшу хоть и является хорошо изученным, оно все же сохраняет актуальность в исследовании различных моделей конкуренции в условиях одновременного и независимого друг от друга поведения игроков.

Цель и задачи исследования

Целью работы выступает *нахождение и анализ равновесного поведения конкурирующих фирм в условиях их динамического сетевого взаимодействия.* В качестве объекта исследования рассматриваются динамические модели конкуренции с сетевым взаимодействием, а предметом исследования выступает равновесное поведение фирм с учетом структуры их сетевого взаимодействия.

Достижение поставленной цели обусловлено выполнением следующих задач:

1. *Описать равновесное поведение фирм в динамике при экзогенном формировании сетевого взаимодействия.* Для этого необходимо построить экономико-математическую модель динамической конкуренции фирм, найти и охарактеризовать для этой модели равновесие по Нэшу.

2. *Исследовать влияние сетевых параметров на равновесие по Нэшу в модели с экзогенным формированием сетевого взаимодействия фирм.* Необходимо проанализировать влияние структуры сети и сетевых коэффициентов, которые характеризуют эффект, получаемый фирмами от инвестиций других фирм, на стратегическое поведение фирм, динамику их конкурентоспособности и прибыли, а также на цену единицы товара на рынке.

3. *Описать равновесное поведение фирм в динамике при эндогенном формировании сетевого взаимодействия.* Для этого допустимое поведение фирм необходимо расширить сетевой компонентой поведения, т. е. возможностью фирм формировать с конкурентами сетевые связи. Проанализировать варианты правила формирования сетевого взаимодействия фирм. Найти равновесия по Нэшу для двух вариантов сетевого взаимодействия фирм — с формированием постоянной и переменной структуры сети. Провести сравнительный анализ полученных результатов и сделать выводы.

4. *Получить условия формирования сетевой связи между фирмами в равновесии по Нэшу.* Определить и проанализировать условия, при выполнении которых фирмы заинтересованы в сетевом взаимодействии — для вариантов формирования односторонних и двухсторонних связей в сети.

5. *Провести адаптацию исследуемых моделей к практическому сотрудничеству конкурирующих на рынке фирм.* Предложить и аргументировать допущения в исследуемых моделях с целью их адаптации к реальным условиям экономического сотрудничества фирм, включая выбор бизнес-партнеров и продолжительности сотрудничества в равновесии по Нэшу при каждом из рассматриваемых вариантов сотрудничества фирм в сети.

Научная новизна

Построена инвестиционно-сетевая модификация динамической модели олигополии Курно с экзогенным формированием сетевого взаимодействия. Для построенной модели найдены условия обеспечивающие построения единственного равновесия по Нэшу в классах программных и позиционных стратегий, для полученных равновесий проведен сравнительный анализ. В модели исследовано влияние сетевых параметров, характеризующих воздействие фирм друг на друга, а также влияние структуры сети на равновесное поведение фирм, их прибыли и динамику конкурентоспособности. Уделено внимание цене единицы товара на рынке — как внешнему эффекту (потребительской экстерналии) возникающей при равновесном поведении конкурирующих фирм.

На основе инвестиционно-сетевой модификации динамической модели олигополии Курно с экзогенным формированием сетевого взаимодействия рассмотрен вариант эндогенного формирования сетевого взаимодействия — на моделях, в которых фирмы могут вступать в краткосрочное или долгосрочное сетевое взаимодействие. Проведен сравнительный анализ перспективности продолжительности сетевого взаимодействия, при этом долгосрочное взаимодействие исследовалось в постановках с единоразовыми и регулярными издержками связи в сети. Для каждой модели найдено равновесие по Нэшу в программных стратегиях, а также определено условие попарного сетевого взаимодействия в сети для двух вариантов сетевых связей — односторонних и двухсторонних.

Продемонстрирована возможность переноса концептуального подхода проведенного исследования динамических моделей с эндогенным сетевым взаимодействием на задачи экономического сектора: условия выбора деловых партнеров при различных вариантах реализации инвестиционного поведения фирм — постоянных и переменных объемов инвестирования, что можно интерпретировать как осторожное и рискованное инвестиционное поведение в условиях нестабильного рынка. Показана структурная общность всех условий сотрудничества в равновесии по Нэшу для класса программных стратегий фирм, представлен пример сравнения рассматриваемых вариантов инвестиционного поведения при общих входных параметрах.

Все основные результаты, получены автором лично и являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы

Исследованные в работе динамические модели конкуренции с сетевым взаимодействием дополняют существующие модели теоретико-игрового анализа, которые до сих пор не были рассмотрены в контексте структурного взаимодействия игроков. Несмотря на то, что в работе исследуются модели рыночной конкуренции, хотелось бы отметить, что полученные результаты носят универсальный прикладной характер — с позиции игрового моделирования конкурентных процессов, которые встречаются и за пределами экономики. Действительно, с учетом специфики предметной области рассматриваемой задачи, результаты исследования могут быть релевантно перенесены на такие процессы, как борьба за лидирующее положение партии (политология), формирование общественного мнения (социология и маркетинг), распределение ресурсных возможностей сервера (вычислительные системы), строительство и эксплуатация дорог (транспортные системы и логистика), а также на различные задачи экологии, психологии, юриспруденции, социология и другие, где происходит столкновение конкурирующих сторон или лиц, преследующих собственные цели и имеющие между собой индивидуальное влияние. Таким образом, проведенное исследование представляет собой вклад в развитие теории сетевых игр за счет таких компонентов игры, как динамика и многокомпонентное поведение игроков при их структурно-сетевом взаимодействии.

При экзогенном формировании сетевого взаимодействия участники игрового процесса могут реализовать равновесное поведение в зависимости от информационной структуры модели. Результаты исследования позволяют через выбор сетевых структур и коэффициентов экзогенного взаимодействия игроков корректировать их конкурентоспособность, состояние управляемой системы, а также внешние факторы, возникающие в результате динамического процесса конкуренции. Это может быть эффективно использовано, например, в государственных антимонопольных программах, а также в иных программах стабилизации, поддержания и развития рыночной экономики.

Для динамических процессов конкуренции с эндогенным формированием сетевого взаимодействия получены результаты, позволяющие игрокам реализовывать равновесное поведение, опираясь на минимальный объем информации, необходимой для принятия решения (время и издержки сетевого взаимодействия), при этом выбирать свое сетевое окружение (прямых соседей в сети), опираясь на формальное условие целесообразности прямого взаимодействия в сети — независимо от варианта взаимодействия, которое может быть односторонним или двухсторонним. Это позволяет строить устойчивые сетевые структуры — застрахованные от разрыва имеющихся связей в сети или установления новых, тем самым избегая расточительства средств — как отмечается в [58], а также влиять на собственные конкурентоспособность и выигрыш в игровом процессе.

Результаты проведенного исследования, также позволяют сравнить перспективность не только вариантов краткосрочного или долгосрочного сетевого взаимодействия, но и сетевое взаимодействие в комбинациях со спецификами других компонент стратегического поведения — при их переменном или постоянном значении. Таким образом, хотелось бы верить, что полученные в ходе исследования условия сетевого взаимодействия восполнят в некотором смысле имеющийся на сегодняшний день дефицит проработанности вопросов целесообразности, продолжительности и условий сотрудничества в конкурентной среде.

На основе вышеизложенного можно заключить, что в проведенном исследовании предпринята попытка не только методологически дополнить теорию сетевых игр освещением некоторых недостаточно изученных вопросов теории, но и концептуально предложить универсальный подход, который может быть использован в экономическом анализе и задачах менеджмента для эффективного планирования деятельности предприятия, а также, в более масштабной постановке — в задачах стабилизации, поддержания, управления и развития рыночной экономики.

Результаты, полученные в ходе выполнения исследования, были использованы в работе по гранту Российского научного фонда № 22-11-00051 «Разработка методов управления многоагентными системами в условиях конфликта».

Краткое описание структуры диссертации

Структура представления диссертационного исследования включает в себя введение, три главы, представленные с разбиением на разделы и подразделы, описание основных результатов и выводов — в каждой главе, заключение и список литературы содержащий 91 источник. Общий объем исследования составляет 120 страниц машинописного текста и содержит 25 таблиц и 1 рисунок.

В первой главе проводится построение и исследование динамической модели конкуренции с двухкомпонентным (производственным и инвестиционным) поведением фирм в динамике и экзогенным формированием их сетевого взаимодействия (раздел 1.1). В условиях моделируемого процесса рассматривается два класса допустимого поведения фирм — в соответствии с программной информационной структурой, а также позиционной информационной структурой в модели. Для каждого класса стратегий фирм получено единственное равновесие по Нэшу (раздел 1.2). Проведен сравнительный анализ результатов в равновесии по Нэшу для каждого из рассматриваемых классов стратегий фирм посредством численного моделирования (раздел 1.3). В разделе 1.4 отдельно исследуются вопросы роли и значения элементов сетевого взаимодействия, характеризующих специфику влияния фирм друг на друга — через текущие удельные издержки производства. Также рассмотрен вопрос влияния структуры сети в равновесии по Нэшу на динамику конкурентоспособности фирм и внешний эффект, возникающий в процессе конкуренции — в частности, цена единицы товара на общем конкурентном рынке сбыта. Глава завершается описанием основных результатов и выводов.

Во второй главе продолжается исследование динамической модели конкуренции из первой главы, но с учетом ее расширения: теперь фирмы реализуют в динамике поведение, которое разделяется на сетевое, производственное и инвестиционное. Сначала обсуждаются варианты эндогенного взаимодействия фирм — односторонние связи, представляемые дугами, и двухсторонние связи, представляемые ребрами в сетевых структурах, описывается формальная составляющая вариантов эндогенного взаимодействия, в соответствии уточняются некоторые компоненты исследуемой модели (раздел 2.1). В разделе 2.2 найдено равновесие по Нэшу для класса программных стратегий в условиях двухстороннего взаимодействия фирм. Далее исследование продолжается поиском равновесия по Нэшу в программных стратегиях для моделей с постоянным сетевым взаимодействием фирм при двух вариациях издержек связи в сети (единоразовые и переменные), а также соответствующих условий сетевого взаимодействия фирм (раздел 2.3). В разделе 2.4 показывается, как результаты, полученные ранее, могут быть перенесены на случай одностороннего взаимодействия фирм в сетевых структурах, а также как видоизменяется равновесие по Нэшу. В разделе 2.5, посредством численного моделирования, проведен сравнительный анализ равновесий по Нэшу в классе программных стратегий для всех рассмотренных моделей, оценены достоинства и недостатки двух вариантов продолжительности взаимодействия в сети — краткосрочного (фирмы перестраивают структуру сети в каждый момент принятия решения) и долгосрочного (модель реализуется на сети, построенной фирмами в начальный момент времени). Глава завершается описанием основных результатов и выводов.

В третьей главе представлены и аргументированы допущения, направленные на адаптацию исследуемых теоретико-игровых моделей конкуренции к экономическим процессам на практике. Продемонстрирован перенос полученных ранее теоретических результатов и методологии на исследование равновесного поведения фирм в условиях, приближенных к практике рыночной конкуренции. Проводится сравнительный анализ вариантов краткосрочного (раздел 3.1) и долгосрочного (раздел 3.2) сетевого сотрудничества в равновесии по Нэшу при рискованном и осторожном инвестиционном поведении фирм — в разделе 3.3. Также исследуется равновесие в модели с единоразовой реализацией инвестиционных вложений фирм (раздел 3.4). Глава завершается описанием основных результатов и выводов.

Методология и методы исследования

Задействованные в работе инструменты являются общепризнанными правилами и подходами к исследовательской деятельности в области прикладной математики: теория динамических игр (равновесие по Нэшу), исследование операций (рекуррентные соотношения Беллмана, метод множителей Лагранжа), теория оптимального управления (принцип максимума Понтрягина), математическое моделирование, сравнительный анализ, численное моделирование в высокоуровненой системе вычислений и программирования Wolfram Mathematica.

Степень достоверности и апробация результатов

Основные результаты, полученные в ходе выполнения исследования, обсуждались и докладывались на следующий научных мероприятиях: Всероссийская конференция по естественным и гуманитарным наукам с международным участием «Наука СПбГУ – 2022». г. Санкт-Петербург; Пятьдесят вторая (LII) научная и учебно-методическая конференция Университета ИТМО, секция «Математическое моделирование», г. Санкт-Петербург; XII Конгресс молодых ученых ИТМО, секция «Искусственный интеллект и поведенческая экономика», г. Санкт-Петербург; 16th International Conference on Game Theory and Management (GTM2023), St. Petersburg; 22nd International Conference on Mathematical Optimization Theory and Operations Research «MOTOR 2023», Ekaterinburg; Workshop on Dynamic Games and Applications, Tashkent, Uzbekistan; Всероссийская конференция по естественным и гуманитарным наукам с международным участием «Наука СПбГУ – 2023», г. Санкт-Петербург; Научный семинар Института прикладных математических исследований Карельского научного центра Российской академии наук (КарНЦ РАН), г. Петрозаводск; Научный семинар кафедры математической теории игр и статистических решений Санкт-Петербургского государственного университета, г. Санкт-Петербург.

Обоснованность и достоверность результатов диссертационного исследования обеспечивается корректностью постановок задач, аргументов и выводов, строгостью математических доказательств и получением положительных заключений от членов редакционных коллегий научных изданий, в которых опубликованы основные результаты исследования.

Публикации

Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в трех научных работах [27, 28, 29], включенных в перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных ВАК РФ и входящих в ядро РИНЦ, при этом работа [27] опубликована в издании также индексируемом в международных наукометрических базах Scopus и Web of Science. Получено свидетельство о регистрации программы для ЭВМ [26], регистрационный номер — $\mathbb{RU}$ 2023685627.

Основные научные результаты

1. Построена инвестиционно-сетевая модификация олигополии Курно, модель Γ^{ex}, для которой получен функциональный вид равновесного по Нэшу двухкомпонентного поведения фирм в динамике при экзогенном формировании сетевого взаимодействия. Равновесие получено и охарактеризовано в классе программных стратегий. Дополнительно получено равновесие по Нэшу в классе позиционных стратегий и установлена «близость» рассматриваемых значений в найденных ситуациях равновесия.
   Описанные результаты получены в первой главе исследования и опубликованы в работе [27].

2. Проведен анализ влияния сетевой структуры и связанных с ней коэффициентов модели Γ^{ex} на поведение фирм в равновесии, и на то, как структура сетевого взаимодействия фирм сказывается на изменении их удельных издержек, конкурентоспособности на рынке, прибыли, а также на цене единицы товара на рынке.
   Описанные результаты получены в первой главе исследования и опубликован в работе [27].

3. Допустимое поведение каждой фирмы дополнено компонентой, характеризующей ее сетевое поведение и отвечающей за сетевое взаимодействие с конкурентами. Для динамической модели конкуренции с эндогенным формированием сетевого взаимодействия, Γ^{en}, получен функциональный вид равновесного по Нэшу поведения фирм при программной информационной структуре.
   Описанный результат получен во второй главе исследования и опубликован в работе [28].

4. Получен функциональный вид равновесного по Нэшу поведения фирм для двух вариантов сетевого взаимодействия — с формированием постоянной и переменной структуры сети. При этом издержки, сопряженные с сетевым взаимодействием фирм рассмотрены также в двух вариантах — единоразовых и регулярных. Проведен сравнительный анализ полученных результатов.

Описанные результаты получены во второй главе исследования и опубликованы в работе [28].

5. Предложены и аргументированы допущения, служащие адаптацией исследуемых теоретико-игровых моделей к практическому сотрудничеству конкурирующих на рынке фирм. Рассмотрены условия выбора бизнес-партнеров и варианты продолжительности сотрудничества фирм в равновесии по Нэшу. Проведен сравнительной анализ равновесия по Нэшу для двух вариантов инвестиционного поведения фирм, которые распространены в реальных условиях — рискованного (переменного) и осторожного (постоянного) с учетом продолжительности сетевого сотрудничества.
   Описанные результаты получены в третьей главе исследования и опубликованы в работе [29].

6. Получен функциональный вид равновесного поведения фирм в условиях их единоразового инвестирования в свое производство. Показана связь изменения верхних границ допустимых издержек сетевого сотрудничества с продолжительностью инвестиционных вложений фирм.
   Описанные результаты получены в третьей главе исследования и опубликованы в работе [29].

7. Для каждой исследуемой в работе модели с эндогенным сетевым взаимодействием получены условия равновесного сетевого поведения конкурентов, выполнение которых делает фирмы заинтересованными в сетевом взаимодействии со своими конкурентами. При этом рассмотрены два варианта формирования сетевого взаимодействия, которое представляется односторонними или двухсторонними связями между фирмами. В работе отмечается, что в сетевых структурах, которые формируются при реализации фирмами своего равновесного сетевого поведения, ни одной фирме невыгодно в одностороннем порядке разрывать какую-либо из имеющихся у нее связей, равно как и стремиться к созданию новой, для которой условие равновесного сетевого поведения не выполнено.
   Описанные результаты получены во второй и третьей главах исследования и опубликованы в работах [28, 29].

Основные положения, выносимые на защиту

1. Равновесия по Нэшу в классах программных и позиционных стратегий, а также их единственность в динамической модели конкуренции с экзогенным формированием сетевого взаимодействия.

2. Равновесия по Нэшу в классе программных стратегий для динамических моделей конкуренции с эндогенным формированием краткосрочного или долгосрочного сетевого взаимодействия.

3. Равновесия по Нэшу в классе программных стратегий для динамических моделей конкуренции, ориентированных на практику при рискованном или осторожном инвестиционном поведении фирм с эндогенным формированием их краткосрочного или долгосрочного сотрудничества.

4. Условия равновесного по Нэшу сетевого поведения при программной информационной структуре в динамических моделях конкуренции с эндогенным формированием сетевого взаимодействия.

Благодарности

Порой невозможно переоценить влияние некоторых людей на нас — наше формирование и становление. И, согласно крылатой фразе «учитель продолжается в своем ученике», я чувствую в своих работах людей, которые повлияли на мой выбор науки для профессиональной деятельности и позволили мне полюбить математику. Я несоизмеримо им благодарен за это. Пронося эту благодарность и память бесценных моментов совместной работы через года, я хотел бы посвятить свое диссертационное исследование моим первым Преподавателям: к. ф.-м. н., доценту Надежде Александровне Чуешевой, а также памяти школьных учителей — Любови Ильиничне Козловой, Светлане Степановне Гвоздевой.

За время проведения диссертационного исследования мне бы хотелось выразить благодарность моему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Артему Александровичу Седакову, который всегда был отзывчив, беспристрастен, терпелив и доброжелателен в сотрудничестве. Благодарю Вас за поддержку моих научных интересов и пожеланий, всегда ценные замечания и рекомендации при обсуждении и оформлении результатов исследования, а также за высокий уровень профессионализма и внимательность.

Глава 1.
Динамическая модель с экзогенным формированием сетевого взаимодействия

Основу динамической модели конкуренции, исследованию которой посвящена настоящая глава, составляет классическая модель олигополии Курно[1], представленная научному сообществу в работе [59]. С момента своего появления концепция олигополии Курно подвергалась разнообразной критике со стороны экономистов, однако, доказав свою пригодность в моделировании экономических процессов, и как отмечается в [4], олигополия Курно впоследствии стала хрестоматийной экономико-математической моделью. Кратко представим некоторые ее формальные положения.

Пусть $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}, n \geq 2,$ — конечное множество игроков, в качестве которых выступают фирмы-производители однородного и неделимого товара. Произведенный товар в полном объеме реализуется на общем рынке сбыта. Каждая фирма $i \in \mathcal{N}$ принимает решение об объеме товара, который она будет производить, то есть $u_i \in \mathbb{U} = [0, +\infty)$. Тогда $\sum_{j=1}^{n} u_j$ — суммарный и неотрицательный объем товара на рынке в ситуации $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{U}^n$. Предполагается, что рыночный спрос Q известен и задается убывающей линейной функцией: $Q\left(P\right) = p - \theta \cdot P$, где $p, \theta \in \mathbb{R}_+,$ а $P = P\left(u\right)$ — такая цена единицы товара, что спрос совпадает с имеющимся на рынке предложением товара: $\sum_{j=1}^{n} u_j = p - \theta \cdot P$. Для упрощения часто полагают, что $\theta = 1$. Обратная функция спроса, отражающая предельную ценность единицы товара при заданном объеме — есть $P\left(u\right) = p - \sum_{j=1}^{n} u_j$, где p — максимально возможная цена единицы товара (считается фиксированной и постоянной). Чаще всего постоянные издержки в модель не включаются, а удельные издержки c, такие что $c \in \mathcal{C} = [0; p]$, считаются фиксированными и равными для всех фирм. Прибыль каждой фирмы i определяется значением соответствующей функции

$$F_i\left(u\right) = \left(p - c - \sum_{j=1}^{n} u_j\right) \cdot u_i. \tag{1.1}$$

[1] Антуан Огюстен Курно (фр. Antoine Augustin Cournot; 28 августа 1801 — 30 марта 1877, Париж) — французский экономист, философ и математик, автор нескольких экономико-математических моделей, ставших классическими для теоретико-игрового анализа.

В стремлении максимизировать свою прибыль каждая фирма придерживается стратегии, входящей в равновесие по Нэшу $u^{\mathrm{N}} = \left(u_1^{\mathrm{N}}, \ldots, u_n^{\mathrm{N}}\right) \in \mathbb{U}^n$ такой, что для каждой фирмы $i \in \mathcal{N}$ и любой ее допустимой стратегии $u_i \in \mathbb{U}$ справедливо неравенство

$$F_i\Big(u_1^{\mathrm{N}}, \ldots, u_{i-1}^{\mathrm{N}}, u_i, u_{i+1}^{\mathrm{N}}, \ldots, u_n^{\mathrm{N}}\Big) \leqslant F_i\Big(u_1^{\mathrm{N}}, \ldots, u_{i-1}^{\mathrm{N}}, u_i^{\mathrm{N}}, u_{i+1}^{\mathrm{N}}, \ldots, u_n^{\mathrm{N}}\Big).$$

Для каждой фирмы $i \in \mathcal{N}$ легко определить ее стратегию входящую в равновесие по Нэшу, и представленную следующим планом[2] производства товара: $u_i^{\mathrm{N}} = (p-c)/(n+1)$, при этом $u_i^{\mathrm{N}} > 0$ при $p > c$.

Помимо представленных положений, описанная модель имеет ряд допущений, известных как из работы А. Курно, так и из другой классической научной литературы, например, [10, 31, 41, 46]. Будем также их придерживаться.

В дополнении к рассмотренной модели наделим фирмы возможностью влиять на состояние удельных издержек (далее в рамках главы — издержки) всех фирм и рассмотрим такое влияние в динамике. Будем полагать, что каждая фирма i может реализовать дополнительное действие, которое сказывается на издержках других фирм согласно характеру их сетевого взаимодействия с фирмой i. Перейдем к подробному описанию и формализации упомянутых возможностей фирм в исследуемой модели.

1.1. Описание и формализация динамической инвестиционно-сетевой модификации олигополии Курно

В дополнение к классической модели Курно рассмотрим олигополию как динамическую игру в дискретном времени с периодами, заданными множеством $\mathcal{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$, $T \geqslant 2$. В реальных условиях удельные издержки фирм имеют динамический характер. Будем рассматривать издержки фирм $i \in \mathcal{N}$ обозначаемые за $c_i(t) \in \mathcal{C}$ при $t \in \mathcal{T}$, как величину, имеющую тенденцию меняться со временем. Управление фирмы состоянием своих издержек может обеспечить ей повышение конкурентоспособности и рентабельности своего бизнеса или положения — в более общем смысле, что, в свою очередь, представляется потенциально-значимым приложением теории динамических игр. Пусть набор

[2] Исторически приводимое решение именуется равновесием Курно–Нэша — как результат полученный А.О. Курно без концептуального обоснования равновесия, которое позже было детерминировано Д.Ф. Нэшем.

$c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))'$ обозначает состояние издержек фирм в момент времени $t \in \mathcal{T}$ при заданных начальных издержках $c(0) \equiv c_0 = (c_{10}, \dots, c_{n0})'$, где символ «$'$» здесь и в дальнейшем будет обозначать операцию транспонирования. Уравнение динамики издержек фирм запишем в векторной форме, как

$$c(t+1) = f(t, \mathbf{g}(t), c(t), y_1(t), \dots, y_n(t)), \quad t \in \mathcal{T} \setminus \{T\},$$

где $y_i(t) \in \mathbb{Y}_i \subset \operatorname{Comp}\mathbb{R}_+$ — инвестиционные усилия (далее — инвестиции) фирмы i в момент времени t, в денежном эквиваленте определяемые значением выражения $\frac{\varepsilon_i(t)}{2} y_i^2(t)$, при заданном текущем значении $\varepsilon_i(t) > 0$, а само правило $f(t, \cdot)$ — непрерывно дифференцируемая по издержкам и инвестициям функция. Отдельно оговорим структуру сетевого взаимодействия фирм $\mathbf{g}(t)$.

Пусть фирмы инвестируют в свои производственные технологии. Специфика влияния инвестиций одной фирмы на другие может быть проиллюстрирована с помощью графа. Для этого отождествим множество фирм с вершинами некоторого графа $(\mathcal{N}, \mathbf{g}(t))$, в котором $\mathbf{g}(t) \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ — множество связей, представленное ребрами графа и определяющее его структуру в момент времени $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$. В целях упрощения записи, структуру графа в момент времени t будем обозначать за $\mathbf{g}(t)$. Оценивая связь между фирмами $i, j \in \mathcal{N}$, $j \neq i$, обозначаемую за (i, j), будем полагать, что $(i, j) = (j, i)$ и $(i, j) \in \mathbf{g}(t)$ тогда и только тогда, когда $g_{ij}(t) = g_{ji}(t) = 1$, где $g_{ij}(t)$ и $g_{ji}(t)$ — элементы бинарной матрицы смежности для сети $\mathbf{g}(t)$ без петель. Далее, для удобства обозначим за $\mathbf{g} = \{\mathbf{g}(t)\}_{t=0}^{T-1}$ заданную в модели последовательность сетевых структур взаимодействия фирм.

Для фирмы $i \in \mathcal{N}$ правило изменения ее издержек во времени определим рекуррентным уравнением с заданным начальным условием

$$c_i(t+1) = \delta c_i(t) - \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij}(t, \mathbf{g}(t)) y_j(t), \quad t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}, \quad c_i(0) = c_{i0}, \tag{1.2}$$

где

$$\mu_{ij}(t, \mathbf{g}(t)) = \begin{cases} \alpha_i(t), & j = i, \\ \beta_{ij}(t)\, g_{ij}(t) + \gamma_{ij}(t)(1 - g_{ij}(t)), & j \neq i. \end{cases}$$

В дальнейшем для упрощения записи, там где явное уточнение зависимости от сети $\mathbf{g}(t)$ не принципиально, будем использовать запись $\mu_{ij}(t)$ вместо $\mu_{ij}(t, \mathbf{g}(t))$.

Параметр $\delta \geqslant 1$ характеризует скорость изменения издержек фирмы с течением времени ввиду возможного устаревания используемых ею технологий производства при отсутствии дополнительных инвестиций в их модернизацию. Параметр $\alpha_i(t) > 0$ отражает эффект от собственных инвестиций фирмы i в текущий момент времени, а $\beta_{ij}(t) \geqslant 0$ и $\gamma_{ij}(t) \geqslant 0$ — текущие эффекты от инвестиций фирм-соседей в сети $\mathbf{g}(t)$, то есть от $j \in \mathcal{N}_i(\mathbf{g}(t)) := \{r \mid (i,r) \in \mathbf{g}(t)\}$, а также от фирм $j \notin \mathcal{N}_i(\mathbf{g}(t)) \cup \{i\}$, которые не являются соседями фирмы i в структуре сетевого взаимодействия $\mathbf{g}(t)$, соответственно.

Допустимым поведением фирмы $i \in \mathcal{N}$ в момент времени $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ назовем пару действий $(u_i(t), y_i(t)) \in \mathbb{U}_i \times \mathbb{Y}_i$, где $u_i(t)$ будем интерпретировать как производственное поведение и также называть планом производства фирмы в момент t, а $y_i(t)$ — будем интерпретировать как инвестиционное поведение фирмы в текущий момент. Введем дополнительные обозначения:

$$u = (u(0), \ldots, u(T-1)), \quad u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t)),$$

$$y = (y(0), \ldots, y(T-1)), \quad y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t)).$$

Прибыль фирмы i в момент времени $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$, основываясь на (1.1), запишем в виде

$$F_i(t, c_i(t), u(t), y_i(t)) = \left(p - \sum_{j=1}^{n} u_j(t)\right) u_i(t) - c_i(t)u_i(t) - \frac{\varepsilon_i(t)}{2} y_i^2(t), \qquad (1.3)$$

как разность ее текущей выручки, формируемой согласно классической модели олигополии Курно с линейной обратной функцией спроса, и текущих затрат, которые включают производственные затраты и инвестиции в производство. В терминальный момент времени прибыль фирмы i определим остаточной стоимостью ее производства согласно функции $\Phi_i(T, c_i(T)) = \eta_i - \eta c_i(T)$, где $\eta > 0$ — коэффициент ликвидности производства, а $\eta_i > 0$ — максимальная рыночная стоимость производства, дополнительно полагая $\eta_i > \eta p$. Тогда общая прибыль фирмы i за все периоды времени в модели принимает вид

$$J_i(c_0, u, y) = \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t F_i(t, c_i(t), u(t), y_i(t)) + \rho^T \Phi_i(T, c_i(T)), \qquad (1.4)$$

где $\rho \in (0, 1]$ — коэффициент дисконтирования, являющийся общим для всех фирм и постоянным во времени. В такой постановке динамическая модель конкурентного производства с инвестированием является линейно-квадратичной игрой в дискретном времени с n-мерной переменной состояния и двумерными наборами действий игроков. Отметим, что возможные издержки фирм на поддержание связей в сети не влияют на их выбор допустимого поведения, поскольку сетевое взаимодействие формируется экзогенно и не управляется игроками. По этой причине издержки такого вида в данной модели не рассматриваются.

Опишем поведение фирм в динамике. В начальный момент времени при общеизвестной сетевой структуре $\mathbf{g}(0)$ и начальных издержках c_0 фирмы одновременно и независимо друг от друга выбирают свое допустимое поведение — пары $(u_i(0), y_i(0))$, $i \in \mathcal{N}$, — каждая из них решает какой объем продукции произвести и какой объем инвестиций реализовать в текущий момент времени. Такой выбор приносит фирме i прибыль $F_i(0, c_{i0}, u(0), y_i(0))$ — согласно (1.3). Далее издержки фирмы i меняются согласно правилу (1.2) и становятся равными $c_i(1)$, $i \in \mathcal{N}$. В очередной нетерминальный момент времени $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ при общеизвестной сетевой структуре $\mathbf{g}(t)$ фирмы одновременно и независимо друг от друга выбирают свое допустимое поведение — для фирмы $i \in \mathcal{N}$ это текущие объемы производства и инвестиций $(u_i(t), y_i(t))$, что приводит фирму i к прибыли $F_i(t, c_i(t), u(t), y_i(t))$ и издержкам $c_i(t+1)$ в последующий момент времени. В момент $t = T$ фирма i получает остаточную стоимость заданную значением своей функции $\Phi_i(T, c_i(T))$, $i \in \mathcal{N}$, а итоговая прибыль, рассчитывается согласно (1.4). После описанных действий игровой процесс завершается.

Для представления динамического характера взаимодействия фирм в виде игры в нормальной форме, согласно [47], обозначим через s_i стратегию фирмы $i \in \mathcal{N}$, предписывающую ей однозначный выбор допустимого поведения в зависимости от текущей информации, а множество стратегий этой фирмы обозначим через $\mathcal{S}_i$. Ввиду однозначности выбора действий, предписываемых стратегиями, определим функцию прибыли (выигрыша) фирмы i как $\mathcal{J}_i(s) = J_i(c_0, u, y)$ при выбранном фирмами наборе стратегий $s = (s_1, \ldots, s_n)$. Таким образом, инвестиционно-сетевую модификацию олигополии Курно с экзогенным формированием сетевого взаимодействия фирм в динамике, можно представить игрой в нормальной форме:

$$\Gamma^{\text{ex}} = \left\langle \mathcal{N}, \{\mathcal{S}_i\}_{i \in \mathcal{N}}, \{\mathcal{J}_i\}_{i \in \mathcal{N}} \right\rangle.$$

1.2. Равновесие по Нэшу для двух информационных структур

В разделах теоретико-игрового анализа, посвященных моделям конкуренции, равновесие по Нэшу воплощает фундаментальную концепцию решения неантагонистических игр согласно [78, 88]. В исследуемой модели Γ^{ex} равновесием по Нэшу будет являться набор стратегий $s^{\mathrm{N}} = \left(s_1^{\mathrm{N}}, \ldots, s_n^{\mathrm{N}}\right) \in \prod\limits_{j \in \mathcal{N}} \mathcal{S}_j$, где $\prod\limits_{j \in \mathcal{N}} \mathcal{S}_j = \mathcal{S}_1 \times \ldots \times \mathcal{S}_n$ — декартово произведение множеств стратегий фирм, и для любой фирмы $i \in \mathcal{N}$ выполнено условие

$$s_i^{\mathrm{N}} = \arg \max_{s_i \in \mathcal{S}_i} \mathcal{J}_i\left(s_{-i}^{\mathrm{N}} \,\middle|\, s_i\right),$$

где набор стратегий $\left(s_{-i}^{\mathrm{N}} \,|\, s_i\right)$ отличается от s^{N} лишь тем, что фирма i вместо стратегии s_i^{N} использует $s_i \in \mathcal{S}_i$, то есть $\left(s_{-i}^{\mathrm{N}} \,|\, s_i\right) = \left(s_1^{\mathrm{N}}, \ldots, s_{i-1}^{\mathrm{N}}, s_i, s_{i+1}^{\mathrm{N}}, \ldots, s_n^{\mathrm{N}}\right)$.

Для того чтобы найти равновесие по Нэшу в модели Γ^{ex} важно понимать какова информационная структура в модели, то есть характер и объем информации, доступный фирмам для выбора своих стратегий. В текущей главе будут рассмотрены два варианта информационной структуры, позволяющие фирмам придерживаться программных или позиционных стратегий, которые обозначим за s_i^{OL} и s_i^{FB}, соответственно и следуя [60, 89]. Для каждого из рассматриваемых вариантов информационной структуры модели далее будут представлены равновесные по Нэшу ситуации в соответствующих классах стратегий фирм.

1.2.1. Равновесное поведение в классе программных стратегий

Программная информационная структура модели Γ^{ex} предполагает выбор участниками игрового процесса действий, опираясь на знание текущего момента времени и начального состояния издержек всех фирм c_0. Допустимая стратегия фирмы, отвечающая описанной информационной структуре, называется аналогично – программной, и должна предписывать ей допустимое поведение в модели с учетом текущего неокончательного момента времени и состояния c_0. Более формально можно определить программную стратегию фирмы $i \in \mathcal{N}$ как правило $s_i^{\mathrm{OL}}(t, c_0) : \mathcal{T} \setminus \{T\} \mapsto \mathbb{U}_i \times \mathbb{Y}_i$, которое каждому неокончательному моменту времени и начальным значениям удельных издержек фирм однозначным образом ставит в соответствие допустимое поведение $s_i^{\mathrm{OL}}(t, c_0) = \left(s_{i1}^{\mathrm{OL}}(t, c_0), s_{i2}^{\mathrm{OL}}(t, c_0)\right) = (u_i(t), y_i(t))$.

Далее, для удобства введем несколько обозначений: $\mathbf{e}$ — n-мерный вектор, состоящий из единиц, $\mathbf{e}_i$ — единичный n-мерный вектор, с i-й компонентой равной единице, I — единичная $(n \times n)$ матрица, а $\mu_i(t) = (\mu_{1i}(t), \ldots, \mu_{ni}(t))'$ для $i \in \mathcal{N}$. Представленные обозначения будут задействованы в следующей теореме, которая характеризует единственное равновесие по Нэшу для класса программных стратегий фирм в модели Γ^{ex}. В ней и далее в исследовании описываются только «внутренние» равновесия по Нэшу, то есть такие, в которых допустимое поведение фирм является внутренней точкой множества допустимых действий.

Теорема 1.1. *Пусть $\ell_{i1}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\ell_{i2}(t) \in \mathbb{R}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям:*

$$\ell_{i1}(t) = \begin{cases} \delta^2 M^{-1}(t+1)\ell_{i1}(t+1) - \rho^t \dfrac{\mathbf{e} - (n+1)\mathbf{e}_i}{n+1}, & t \neq T, \\ 0, & t = T, \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\ell_{i2}(t) = \begin{cases} \delta\big[\ell'_{i1}(t+1)M^{-1}(t+1)m(t+1) + \ell_{i2}(t+1)\big] - \rho^t \dfrac{p}{n+1}, & t \neq T, \\ -\rho^T \eta, & t = T, \end{cases} \tag{1.6}$$

для каждой фирмы $i \in \mathcal{N}$, где матрица $M(t)$ и вектор $m(t)$ задаются согласно правилам:

$$M(t) = I - \sum_{j \in \mathcal{N}} \frac{\alpha_j(t-1)\mu_j(t-1)}{\rho^{t-1}\varepsilon_j(t-1)} \ell'_{j1}(t) \ \ \text{и} \ \ m(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}} \frac{\alpha_j(t-1)\mu_j(t-1)}{\rho^{t-1}\varepsilon_j(t-1)} \ell_{j2}(t).$$

Если матрицы $M(t)$ обратимы для всех моментов времени $t \neq 0$, тогда в модели Γ^{ex} набор стратегий $s^{\text{OLN}} = (s_1^{\text{OLN}}, \ldots, s_n^{\text{OLN}})$ является единственным равновесием по Нэшу в классе программных стратегий фирм, компоненты которого $s_i^{\text{OLN}}(t, c_0)$ для $i \in \mathcal{N}$, $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$, имеют вид:

$$u_i^{\text{OLN}}(t, c_0) = \frac{p + (\mathbf{e} - (n+1)\mathbf{e}_i)' c^{\text{OLN}}(t)}{n+1}, \tag{1.7}$$

$$y_i^{\text{OLN}}(t, c_0) = -\frac{\alpha_i(t)}{\rho^t \varepsilon_i(t)} \Big(\ell'_{i1}(t+1) M^{-1}(t+1)(\delta c^{\text{OLN}}(t) + m(t+1)) + \ell_{i2}(t+1) \Big), \tag{1.8}$$

где текущие удельные издержки $c^{\text{OLN}}(t)$ в равновесии, последовательно находятся из уравнения

$$c^{\text{OLN}}(t) = M^{-1}(t)(\delta c^{\text{OLN}}(t-1) + m(t)), \quad t \in \mathcal{T} \setminus \{0\}, \quad c^{\text{OLN}}(0) = c_0. \tag{1.9}$$

Доказательство. Для определения равновесия по Нэшу в программных стратегиях воспользуемся принципом максимума Понтрягина [41, 47], для чего введем в рассмотрение для фирмы $i \in \mathcal{N}$ и $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ функцию Гамильтона:

$$\mathcal{H}_i(t, c(t), u(t), y(t), \psi_i(t+1)) = \rho^t \Big[\Big(p - c_i(t) - \sum_{j \in \mathcal{N}} u_j(t) \Big) u_i(t) - \frac{\varepsilon_i(t)}{2} y_i^2(t) \Big] + \\ + \sum_{j \in \mathcal{N}} \psi_{ij}(t+1) \Big[\delta c_j(t) - \sum_{r \in \mathcal{N}} \mu_{jr}(t) y_r(t) \Big],$$

где $\psi_i(t) = (\psi_{i1}(t), \ldots, \psi_{in}(t))'$ – вектор сопряженных переменных. Следуя [47], если набор стратегий $s^{\text{OLN}}(t, c_0)$ является равновесием по Нэшу, то существуют ненулевые сопряженные переменные $\psi_i(t)$, $t \in \mathcal{T} \setminus \{0\}$, $i \in \mathcal{N}$, удовлетворяющие соотношениям:

$$s_{i1}^{\text{OLN}}(t, c_0) = \frac{p - c_i(t) - \sum_{j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}} s_{j1}^{\text{OLN}}(t, c_0)}{2},$$

$$s_{i2}^{\text{OLN}}(t, c_0) = -\frac{\sum_{j \in \mathcal{N}} \psi_{ij}(t+1) \mu_{ji}(t)}{\rho^t \varepsilon_i(t)},$$

$$\psi_{ij}(t) = \begin{cases} -\rho^t s_{i1}^{\text{OLN}}(t, c_0) + \delta \psi_{ii}(t+1), & j = i,\ t \neq T, \\ -\rho^T \eta, & j = i,\ t = T, \\ \delta \psi_{ij}(t+1), & j \neq i,\ t \neq T, \\ 0, & j \neq i,\ t = T, \end{cases}$$

$$c_i(t+1) = \delta c_i(t) - \sum_{j \in \mathcal{N}} \mu_{ij}(t) s_{j2}^{\text{OLN}}(t, c_0), \quad t \neq T, \quad c_i(0) = c_{i0}.$$

Из указанных соотношений можно сразу заключить, что $\psi_{ij}(t) = 0$ для всех $i \neq j$ и $t \in \mathcal{T}$. С учетом этого и некоторых преобразований заключаем:

$$s_{i1}^{\text{OLN}}(t, c_0) = \frac{p - (n+1) c_i(t) + \sum_{j \in \mathcal{N}} c_j(t)}{n+1}, \tag{1.10}$$

$$s_{i2}^{\text{OLN}}(t, c_0) = -\frac{\alpha_i(t) \psi_{ii}(t+1)}{\rho^t \varepsilon_i(t)}, \tag{1.11}$$

где первое выражение совпадет с (1.7).

Ввиду строгой вогнутости функции Гамильтона $\mathcal{H}_i(t,\cdot)$ по набору переменных $(u_i(t), y_i(t))$, что следует из того, что главные миноры матрицы Гессе равны $-2\rho^t < 0$ и $2\varepsilon_i(t)\rho^{2t} > 0$, заключаем, что максимальное значение функции обеспечивается единственной точкой максимума по набору, удовлетворяющему соотношениям (1.10)–(1.11).

Сопряженные переменные будем искать в линейном по издержкам виде $\psi_{ii}(t) = \ell_{i1}'(t)c(t) + \ell_{i2}(t)$ и покажем, что $\ell_{i1}(t)$ и $\ell_{i2}(t)$ удовлетворяют (1.5)–(1.6). С учетом (1.8) и линейного представления сопряженных переменных, уравнение динамики издержек можно записать в виде $c(t+1) = M^{-1}(t+1)(\delta c(t) + m(t+1))$, $t \in \mathcal{T}\setminus\{T\}$, что совпадает с (1.9). Тогда с учетом (1.10) и (1.11) можно получить, что:

$$\psi_{ii}(t) = -\rho^t \cdot \frac{p + (\mathbf{e} - (n+1)\mathbf{e}_i)'c(t)}{n+1} + \delta[\ell_{i1}'(t+1)c(t+1) + \ell_{i2}(t+1)] =$$

$$= -\rho^t \cdot \frac{p + (\mathbf{e} - (n+1)\mathbf{e}_i)'c(t)}{n+1} + \delta\left[\ell_{i1}'(t+1)M^{-1}(t+1)(\delta c(t) + m(t+1)) + \ell_{i2}(t+1)\right].$$

Следуя далее методу неопределенных коэффициентов, заключаем (1.5)–(1.6). $\square$

1.2.2. Равновесное поведение в классе позиционных стратегий

Если информационная структура модели Γ^{ex} предполагает выбор фирмами действий опираясь не только на текущий момент времени, но и информацию о состоянии издержек в этот момент $c(t)$, то фирмы могут ориентироваться на равновесие по Нэшу в классе позиционных стратегий. Для начала определим формально позиционную стратегию фирмы $i \in \mathcal{N}$ обозначаемую за s_i^{FB}, как правило $s_i^{\text{FB}}(t,c) : \mathcal{T}\setminus\{T\} \times \mathcal{C}^n \mapsto \mathbb{U}_i \times \mathbb{Y}_i$, которое каждому неокончательному моменту времени и каждому набору издержек фирм $c(t) = (c_1(t), \ldots, c_n(t))'$ однозначным образом ставит в соответствие допустимое поведение фирмы i, то есть $s_i^{\text{FB}}(t, c(t)) = \left(s_{i1}^{\text{FB}}(t, c(t)), s_{i2}^{\text{FB}}(t, c(t))\right) = (u_i(t), y_i(t))$.

Для определения равновесия по Нэшу в классе позиционных стратегий фирм воспользуемся рекуррентными соотношениями Беллмана [3, 31, 74]. Равновесие можно найти, используя следующую теорему.

Теорема 1.2. *Набор стратегий* $s^{\mathrm{FBN}} = \left(s_1^{\mathrm{FBN}}, \ldots, s_n^{\mathrm{FBN}}\right)$ *с компонентами*

$$s_i^{\mathrm{FBN}}(t,c) = \left(s_{i1}^{\mathrm{FBN}}(t,c), s_{i2}^{\mathrm{FBN}}(t,c)\right) = (a_i'(t)c + v_i(t), b_i'(t)c + w_i(t)),$$

где $i \in \mathcal{N}$, $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ *и* $c = (c_1, \ldots, c_n)'$ *– некоторый набор удельных издержек, является единственным в модели* Γ^{ex} *равновесием по Нэшу в классе позиционных стратегиях фирм тогда и только тогда, когда существует единственное решение следующей системы рекуррентных соотношений:*

$$a_i(t) = \frac{\mathbf{e} - (n+1)\mathbf{e}_i}{n+1}, \;\; b_i(t) = \frac{-1}{\rho^t \varepsilon_i(t)} \Big[\delta I - \sum_{j \in \mathcal{N}} \mu_j(t) b_j'(t)\Big]' K_i(t+1)\mu_i(t), \tag{1.12}$$

$$v_i(t) = \frac{p}{n+1}, \;\; w_i(t) = \frac{-1}{\rho^t \varepsilon_i(t)} \Big[k_i(t+1) - K_i(t+1) \sum_{j \in \mathcal{N}} \mu_j(t) w_j(t)\Big]' \mu_i(t), \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned} K_i(t) = {} & 2\rho^t a_i(t) a_i'(t) - \rho^t \varepsilon_i(t) b_i(t) b_i(t) + \\ & + \left(\delta I - \sum_{j=1}^n \mu_j(t) b_j'(t)\right)' K_i(t+1) \left(\delta I - \sum_{j=1}^n \mu_j(t) b_j'(t)\right), \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned} k_i(t) = {} & 2\rho^t a_i(t) v_i(t) - \rho^t \varepsilon_i(t) b_i(t) w_i(t) + \\ & + \left(\delta I - \sum_{j=1}^n \mu_j(t) b_j'(t)\right)' \left(k_i(t+1) - K_i(t+1) \sum_{j=1}^n \mu_j(t) w_j(t)\right), \end{aligned} \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned} \kappa_i(t) = {} & \rho^t \left(v_i^2(t) - \frac{\varepsilon_i(t)}{2} w_i^2(t)\right) + \kappa_i(t+1) - \\ & - \left(k_i(t+1) - \frac{1}{2} K_i(t+1) \sum_{j=1}^n \mu_j(t) w_j(t)\right)' \sum_{j=1}^n \mu_j(t) w_j(t), \end{aligned} \tag{1.16}$$

с граничными условиями для $i \in \mathcal{N}$*:* $K_i(T) = 0$, $k_i(T) = -\rho^T \eta \mathbf{e}_i$, $\kappa_i(T) = \rho^T \eta_i$*; и при этом разность* $\rho^t \varepsilon_i(t) - \mu_i(t)' K_i(t+1) \mu_i(t)$ *положительна для* $i \in \mathcal{N}$, $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$. *Кроме того,*

$$\mathcal{J}_i\Big(s^{\mathrm{FBN}}\Big) = \frac{1}{2} c_0' K_i(0) c_0 + k_i'(0) c_0 + \kappa_i(0), \quad i \in \mathcal{N}.$$

Доказательство. Из теории динамических игр [31, 41, 47] известно, что s^{FBN} является равновесием по Нэшу тогда и только тогда, когда существуют соответствующие функции $V_i(t,\cdot):\mathcal{C}^n\mapsto\mathbb{R}$, $t\in\mathcal{T}$, $i\in\mathcal{N}$, которые удовлетворяют рекуррентным соотношениям Беллмана. Тогда для модели Γ^{ex} имеем:

$$\begin{aligned} V_i(t,c) = \max_{(u_i(t),y_i(t))\in\,\mathbb{U}_i\times\mathbb{Y}_i} \Big[\rho^t\Big(p-c_i-u_i(t)-\sum_{j\neq i}s_{j1}^{\mathrm{FBN}}(t,c)\Big)u_i(t)- \\ -\rho^t\frac{\varepsilon_i(t)}{2}y_i^2(t)+V_i\Big(t+1,\delta c-\mu_i(t)y_i(t)-\sum_{j\neq i}\mu_j(t)s_{j2}^{\mathrm{FBN}}(t,c)\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Для класса линейно-квадратичных игр функцию Беллмана можно найти в специальном виде $V_i(t,c)=\frac{1}{2}c'K_i(t)c+k_i(t)'c+\kappa_i(t)$ с граничным условием $V_i(T,c)=\rho^T(\eta_i-\eta c_i)$. Предполагая линейный вид равновесных стратегий фирм, то есть $s_{i1}^{\mathrm{FBN}}(t,c)=a_i'(t)c+v_i(t)$ и $s_{i2}^{\mathrm{FBN}}(t,c))=b_i'(t)c+w_i(t)$, и решая задачу максимизации (1.17), получаем:

$$s_{i1}^{\mathrm{FBN}}(t,c)=\frac{p-c_i-\sum_{j\neq i}s_{j1}^{\mathrm{FBN}}(t,c)}{2},$$

$$s_{i2}^{\mathrm{FBN}}(t,c)=\frac{-1}{\rho^t\varepsilon_i(t)}\left[\Big(\delta c-\sum_{j\in\mathcal{N}}\mu_j(t)s_{j2}^{\mathrm{FBN}}(t,c)\Big)'K_i(t+1)+k_i'(t+1)\right]\mu_i(t),$$

или

$$a_i'(t)c+v_i(t)=\frac{p-c_i-\sum_{j\neq i}(a_j'(t)c+v_j(t))}{2},$$

$$b_i'(t)c+w_i(t)=\frac{-1}{\rho^t\varepsilon_i(t)}\left[\Big(\delta c-\sum_{j\in\mathcal{N}}\mu_j(t)(b_j'(t)c+w_j(t))\Big)'K_i(t+1)+k_i'(t+1)\right]\mu_i(t).$$

Для каждой фирмы и каждого неокончательного момента времени уравнение (1.17) допускает следующее представление:

$$\begin{aligned} V_i(t,c)=\max_{(u_i(t),y_i(t))\in\mathbb{U}_i\times\mathbb{Y}_i}\Bigg[\begin{pmatrix}\rho^t p\\ 0\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}u_i(t)\\ y_i(t)\end{pmatrix}-c'\begin{pmatrix}\rho^t\mathbf{e}_i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_i(t)\\ y_i(t)\end{pmatrix}- \\ -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}u_i(t)\\ y_i(t)\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}2\rho^t & 0\\ 0 & \rho^t\varepsilon_i(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_i(t)\\ y_i(t)\end{pmatrix}-\sum_{j\neq i}s_j^{\mathrm{FBN}}(t,c)'\begin{pmatrix}\rho^t & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_i(t)\\ y_i(t)\end{pmatrix}+ \end{aligned}$$

$$+V_i\left(t+1,\,\delta c-\begin{pmatrix}0 & \mu_i(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_i(t)\\ y_i(t)\end{pmatrix}-\sum_{j\neq i}\begin{pmatrix}0 & \mu_j(t)\end{pmatrix}s_j^{\mathrm{FBN}}(t,c)\right)\Bigg].$$

Используя линейное представление стратегий фирм и квадратичный вид функции V_i, выпишем матрицу квадратичной формы для выражения, заключенного в квадратные скобки:

$$\begin{pmatrix}-\rho^t & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\big(\mu_i'(t)K_i(t+1)\mu_i(t)-\rho^t\varepsilon_i(t)\big)\end{pmatrix}.$$

Ввиду условий теоремы данная матрица отрицательно определена, что обеспечивает единственность решения соответствующей задачи максимизации. Используя метод неопределенных коэффициентов для всех $i\in\mathcal{N}$ и $t\in\mathcal{T}\setminus\{T\}$, получаем систему (1.12)–(1.13), единственное решение которой относительно $a_i(t)$, $v_i(t)$, $b_i(t)$ и $w_i(t)$ обеспечивает единственность равновесия по Нэшу [47].

Далее, поскольку $F_i(t,\cdot)=\big(s_{i1}^{\mathrm{FBN}}(t,c)\big)^2-\frac{\varepsilon_i(t)}{2}\big(s_{i2}^{\mathrm{FBN}}(t,c)\big)^2$, уравнение (1.17) с учетом вида функции $V_i(t,c)$ и равновесного поведения перепишем в виде

$$V_i(t,c)=\rho^t\left[\big(s_{i1}^{\mathrm{FBN}}(t,c)\big)^2-\frac{\varepsilon_i(t)}{2}\big(s_{i2}^{\mathrm{FBN}}(t,c)\big)^2\right]+V_i\Big(t+1,\delta c-\sum_{j\in\mathcal{N}}\mu_j(t)s_{j2}^{\mathrm{FBN}}(t,c)\Big)$$

или

$$\frac{1}{2}c'K_i(t)c+k_i'(t)c+\kappa_i(t)=\rho^t\left[\big(a_i'(t)c+v_i(t)\big)^2-\frac{\varepsilon_i(t)}{2}\big(b_i'(t)c+w_i(t)\big)^2\right]+$$
$$+\left[\frac{1}{2}\Big(\delta c-\sum_{j\in\mathcal{N}}\mu_j(t)\big(b_j'(t)c+w_j(t)\big)\Big)'K_i(t+1)+k_i'(t+1)\right]\times$$
$$\times\left(\delta c-\sum_{j\in\mathcal{N}}\mu_j(t)\big(b_j'(t)c+w_j(t)\big)\right)+\kappa_i(t+1).$$

Определяя неизвестные коэффициенты в квадратичной и линейной частях, а также в слагаемом, независящим от c, получим соотношения (1.14), (1.15) и (1.16). Поскольку $V_i(t,c)$ представляет собой прибыль фирмы $i\in\mathcal{N}$ в равновесии по Нэшу в Γ^{ex}, начинающейся в момент времени t при наборе удельных издержек c, то $\mathcal{J}_i\left(s^{\mathrm{FBN}}\right)=V_i(0,c_0)$ для $i\in\mathcal{N}$. □

Замечание 1.1 (к теореме 1.2)**.** *В равновесии по Нэшу объемы производства* $s_{i1}^{\mathrm{FBN}}(t,c)$ *зависят только от набора издержек фирм и не зависят от момента времени, в то время как объемы инвестируемых средств* $s_{i2}^{\mathrm{FBN}}(t,c)$ *зависят и от набора издержек фирм, и от момента времени.*

1.3. Численное моделирование и сравнительный анализ результатов

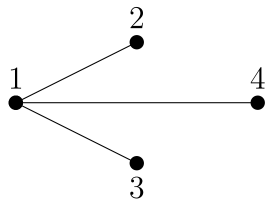
Перейдем к результатам исследования, которые можно получить, используя теоремы 1.1 – 1.2. Для возможности проведения сравнительного анализа полученных результатов, будем придерживаться общих входных параметров в поиске s^{OLN} и s^{FBN}, а именно: $T = 3$, $p = 500$, $\varepsilon_i(t) = 1\,000$ и $\eta_i = 100\,000$ положим одинаковыми для всех фирм, $\eta = 1\,000$; параметр технологического устаревания $\delta = 1.07$; начальные издержки фирм считаем также одинаковыми и равными $c_{i0} = 100$, коэффициент дисконтирования $\rho = 0.95$; параметры сетевого влияния $\alpha_i(t) = 1.8$, $\beta_{ij}(t) = 1$, $\gamma_{ij}(t) = 0.5$ также одинаковые у всех фирм и постоянны во времени. Рассмотрим случай взаимодействия трех и четырех фирм ($n = 3$ или $n = 4$) и найдем их равновесное поведение при четырех разных сетях $\mathbf{g}_j$, которые обладают во времени постоянной структурой, то есть для каждого $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ имеем, что $\mathbf{g}_j(0) = \mathbf{g}_j(1) = \mathbf{g}_j(2)$. Будем такие сети называть постоянными и отождествлять с их сетевой структурой.

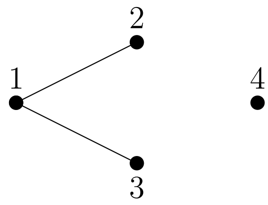
В таблицах 1.1 – 1.2 представлены значения текущих равновесных объемов производства $u_i^{\mathrm{OLN}}(t) = s_{i1}^{\mathrm{OLN}}(t, c_0)$, инвестиций $y_i^{\mathrm{OLN}}(t) = s_{i2}^{\mathrm{OLN}}(t, c_0)$ и издержек $c_i^{\mathrm{OLN}}(t)$ для каждой фирмы $i \in \mathcal{N}$ при равновесии по Нэшу в программных стратегиях $s^{\mathrm{OLN}}(t, c_0)$. В таблицах также представлены дополнительные результаты: равновесные прибыли $J_i^{\mathrm{OLN}} \coloneqq J_i(c_0, u^{\mathrm{OLN}}, y^{\mathrm{OLN}}) = \mathcal{J}_i(s^{\mathrm{OLN}})$ и текущая цена единицы товара на рынке, формируемая в соответствии с линейной обратной функцией спроса: в равновесии по Нэшу цена единицы товара определяются величиной $P^{\mathrm{OLN}}(t) \coloneqq p - \sum_{j\in\mathcal{N}} u_j^{\mathrm{OLN}}(t)$, $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$.

В таблицах 1.3 – 1.4 представлены значения тех же величин, что и в таблицах 1.1 – 1.2, но уже в равновесии по Нэшу для класса позиционных стратегий фирм $s^{\mathrm{FBN}}(t, c)$.

Все результаты численного моделирования, которые представлены в данной главе округлены до тысячных долей.

Таблица 1.1. **Равновесие по Нэшу s^{OLN} в модели Γ^{ex} для сетевых структур $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$, а также соответствующие прибыли фирм и цена единицы товара**





	Сеть $\mathbf{g}_1$				Сеть $\mathbf{g}_2$			
	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
$u_1^{\mathrm{OLN}}(t)$	80.000	81.793	83.448	–	80.000	81.181	82.230	–
$u_2^{\mathrm{OLN}}(t)$	80.000	79.744	79.375	–	80.000	80.155	80.192	–
$u_3^{\mathrm{OLN}}(t)$	80.000	79.744	79.375	–	80.000	80.155	80.192	–
$u_4^{\mathrm{OLN}}(t)$	80.000	79.744	79.375	–	80.000	79.123	78.144	–
$y_1^{\mathrm{OLN}}(t)$	2.052	1.881	1.710	–	2.049	1.879	1.710	–
$y_2^{\mathrm{OLN}}(t)$	2.041	1.874	1.710	–	2.043	1.875	1.710	–
$y_3^{\mathrm{OLN}}(t)$	2.041	1.874	1.710	–	2.043	1.875	1.710	–
$y_4^{\mathrm{OLN}}(t)$	2.041	1.874	1.710	–	2.038	1.872	1.710	–
$c_1^{\mathrm{OLN}}(t)$	100.000	97.183	94.978	93.419	100.000	98.207	97.013	96.451
$c_2^{\mathrm{OLN}}(t)$	100.000	99.233	99.051	99.487	100.000	99.233	99.051	99.486
$c_3^{\mathrm{OLN}}(t)$	100.000	99.233	99.051	99.487	100.000	99.233	99.051	99.486
$c_4^{\mathrm{OLN}}(t)$	100.000	99.233	99.051	99.487	100.000	100.264	101.098	102.532
$P^{\mathrm{OLN}}(t)$	180.000	178.976	178.426	–	180.000	179.387	179.243	–
J_1^{OLN}	19 577.792				16 711.687			
J_2^{OLN}	13 496.491				13 669.861			
J_3^{OLN}	13 496.491				13 669.861			
J_4^{OLN}	13 496.491				10 627.026			

Таблица 1.2. **Равновесие по Нэшу s^{OLN} в модели Γ^{ex} для сетевых структур $\mathbf{g}_3$ и $\mathbf{g}_4$, а также соответствующие прибыли фирм и цена единицы товара**

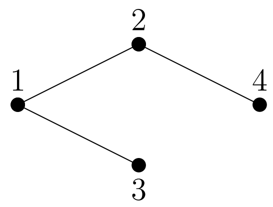
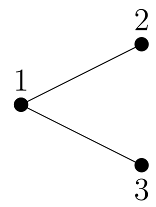
	 Сеть $\mathbf{g}_3$				 Сеть $\mathbf{g}_4$			
	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
$u_1^{\mathrm{OLN}}(t)$	80.000	80.769	81.413	–	100.000	100.787	101.384	–
$u_2^{\mathrm{OLN}}(t)$	80.000	80.769	81.413	–	100.000	99.727	99.294	–
$u_3^{\mathrm{OLN}}(t)$	80.000	79.742	79.373	–	100.000	99.727	99.294	–
$u_4^{\mathrm{OLN}}(t)$	80.000	79.742	79.373	–	–	–	–	–
$y_1^{\mathrm{OLN}}(t)$	2.047	1.877	1.710	–	2.115	1.912	1.710	–
$y_2^{\mathrm{OLN}}(t)$	2.047	1.877	1.710	–	2.110	1.908	1.710	–
$y_3^{\mathrm{OLN}}(t)$	2.041	1.874	1.710	–	2.110	1.908	1.710	–
$y_4^{\mathrm{OLN}}(t)$	2.041	1.874	1.710	–	–	–	–	–
$c_1^{\mathrm{OLN}}(t)$	100.000	98.208	97.015	96.459	100.000	98.972	98.643	99.050
$c_2^{\mathrm{OLN}}(t)$	100.000	98.208	97.015	96.459	100.000	100.031	100.734	102.142
$c_3^{\mathrm{OLN}}(t)$	100.000	99.235	99.056	99.492	100.000	100.031	100.734	102.142
$c_4^{\mathrm{OLN}}(t)$	100.000	99.235	99.056	99.492	–	–	–	–
$P^{\mathrm{OLN}}(t)$	180.000	178.977	178.428	–	200.000	199.759	200.028	–
J_1^{OLN}	16 532.843				24 448.066			
J_2^{OLN}	16 532.843				21 234.905			
J_3^{OLN}	13 491.668				21 234.905			
J_4^{OLN}	13 491.668				–			

Таблица 1.3. **Равновесие по Нэшу s^{FBN} в модели Γ^{ex} для сетевых структур $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$, а также соответствующие прибыли фирм и цена единицы товара**

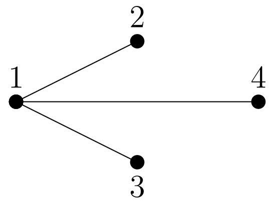
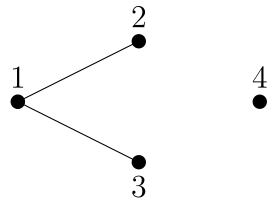
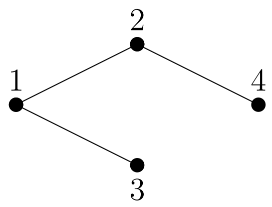
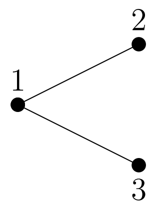
	 Сеть $\mathbf{g}_1$				 Сеть $\mathbf{g}_2$			
	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
$u_1^{\mathrm{FBN}}(t)$	80.000	81.808	83.471	–	80.000	81.202	82.263	–
$u_2^{\mathrm{FBN}}(t)$	80.000	79.765	79.409	–	80.000	80.178	80.229	–
$u_3^{\mathrm{FBN}}(t)$	80.000	79.765	79.409	–	80.000	80.178	80.229	–
$u_4^{\mathrm{FBN}}(t)$	80.000	79.765	79.409	–	80.000	79.179	78.231	–
$y_1^{\mathrm{FBN}}(t)$	2.033	1.871	1.710	–	2.061	1.885	1.710	–
$y_2^{\mathrm{FBN}}(t)$	2.084	1.895	1.710	–	2.086	1.897	1.710	–
$y_3^{\mathrm{FBN}}(t)$	2.084	1.895	1.710	–	2.086	1.897	1.710	–
$y_4^{\mathrm{FBN}}(t)$	2.084	1.895	1.710	–	2.110	1.908	1.710	–
$c_1^{\mathrm{FBN}}(t)$	100.000	97.089	94.831	93.261	100.000	98.061	96.785	96.207
$c_2^{\mathrm{FBN}}(t)$	100.000	99.132	98.893	99.380	100.000	99.085	98.819	99.238
$c_3^{\mathrm{FBN}}(t)$	100.000	99.132	98.893	99.380	100.000	99.085	98.819	99.238
$c_4^{\mathrm{FBN}}(t)$	100.000	99.132	98.893	99.380	100.000	100.084	100.817	102.231
$P^{\mathrm{FBN}}(t)$	180.000	178.897	178.302	–	180.000	179.263	179.048	–
J_1^{FBN}	19 774.075				16 890.994			
J_2^{FBN}	13 523.290				13 764.255			
J_3^{FBN}	13 523.290				13 764.255			
J_4^{FBN}	13 523.290				10 691.319			

Таблица 1.4. **Равновесие по Нэшу s^{FBN} в модели Γ^{ex} для сетевых структур $\mathbf{g}_3$ и $\mathbf{g}_4$, а также соответствующие прибыли фирм и цена единицы товара**

	Сеть $\mathbf{g}_3$ 				Сеть $\mathbf{g}_4$ 			
	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
$u_1^{\mathrm{FBN}}(t)$	80.000	80.782	81.434	–	100.000	100.780	101.374	–
$u_2^{\mathrm{FBN}}(t)$	80.000	80.782	81.434	–	100.000	99.745	99.322	–
$u_3^{\mathrm{FBN}}(t)$	80.000	79.773	79.420	–	100.000	99.745	99.322	–
$u_4^{\mathrm{FBN}}(t)$	80.000	79.773	79.420	–	–	–	–	–
$y_1^{\mathrm{FBN}}(t)$	2.059	1.884	1.710	–	2.096	1.902	1.710	–
$y_2^{\mathrm{FBN}}(t)$	2.059	1.884	1.710	–	2.139	1.922	1.710	–
$y_3^{\mathrm{FBN}}(t)$	2.084	1.895	1.710	–	2.139	1.922	1.710	–
$y_4^{\mathrm{FBN}}(t)$	2.084	1.895	1.710	–	–	–	–	–
$c_1^{\mathrm{FBN}}(t)$	100.000	98.108	96.859	96.286	100.000	98.949	98.608	99.012
$c_2^{\mathrm{FBN}}(t)$	100.000	98.108	96.859	96.286	100.000	99.985	100.661	102.064
$c_3^{\mathrm{FBN}}(t)$	100.000	99.118	98.872	99.295	100.000	99.985	100.661	102.064
$c_4^{\mathrm{FBN}}(t)$	100.000	99.118	98.872	99.295	–	–	–	–
$P^{\mathrm{FBN}}(t)$	180.000	178.890	178.292	–	200.000	199.730	199.982	–
J_2^{FBN}	16 643.707				24 535.499			
J_2^{FBN}	16 643.707				21 223.474			
J_3^{FBN}	13 545.573				21 223.474			
J_4^{FBN}	13 545.573				–			

Анализируя данные, представленные в таблицах 1.1–1.4, можно заключить, что для рассматриваемых сетевых структур ($\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_4$ — графы-звезды, $\mathbf{g}_3$ и $\mathbf{g}_4$ — линейные графы, $\mathbf{g}_4$ — несвязный граф с изолированной вершиной) использование позиционных стратегий, то есть когда фирмы адаптируются к текущим издержкам конкурентов, а не только к начальным, позволяет всем фирмам уменьшить свои издержки в равновесии. Для производственного поведения фирм в равновесии, очевидным представляется следующее замечание.

Замечание 1.2. *Согласно теоремам 1.1–1.2, производственные планы фирмы $i \in \mathcal{N}$, то есть $s_{i1}^{\mathrm{FBN}}(t, c)$ и $s_{i1}^{\mathrm{OLN}}(t, c_0)$, имеют общий функциональный вид.*

Отметим, что начальные условия у всех фирм были одинаковы и единственным отличием нарушающим симметрию некоторых фирм в каждом результате из таблиц 1.1–1.4 являлось ее положение в сети — было определено соответствующей структурой сети. Что приводит к потребности проанализировать результаты численного моделирования в соответствии со спецификой $\mathbf{g}_j$.

1.4. Сравнительный анализ влияния сетевых параметров и структур на равновесие, равновесные прибыли и внешние эффекты

Представим сравнительный анализ результатов, представленных в таблицах 1.1–1.4. Отметим, что все приводимые в данном разделе наблюдения были сделаны при условии асимметричности фирм в сетевой структуре — для оценивания влияния структуры сети на равновесное поведение фирм и другие показатели получаемые в условиях равновесия.

Единственным аспектом, в котором происходило нарушение симметрии между фирмами в условиях моделируемых равновесий для модели Γ^{ex}, были сети $\mathbf{g}_j$, при $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Как следствие, данные таблиц 1.1–1.4 позволяют оценить влияние именно структуры экзогенной сети на ряд важных показателей, получаемых при реализации фирм равновесия по Нэшу. При этом, для моделирования равновесий были использованы стандартные для теории графов структуры: линейная (сети $\mathbf{g}_3$ и $\mathbf{g}_4$) и звезда (сети $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_4$), а также отдельно выделен случай несвязной структуры с «изолированной» фирмой (сеть $\mathbf{g}_2$).

1.4.1. Стратегическое поведение в равновесии

Согласно данным таблиц 1.1–1.4 в отношении стратегий фирм можно сформулировать наблюдение, которое можно считать центральным различием в инвестиционном поведении фирм при реализации равновесия по Нэшу в рассматриваемых классах стратегий.

Наблюдение 1.1. *Для любой пары фирм $i, j \in \mathcal{N} : i \neq j$ в постоянной сети $\mathbf{g}$ справедливо, что если $|\mathcal{N}_i(\mathbf{g})| > |\mathcal{N}_j(\mathbf{g})|$ при $c_{i0} = c_{j0}$, то для равновесия по Нэшу*

- *в программных стратегиях: $u_i^{\mathrm{OLN}}(t) \geqslant u_j^{\mathrm{OLN}}(t)$, $y_i^{\mathrm{OLN}}(t) \geqslant y_j^{\mathrm{OLN}}(t)$, что позволяет фирме i производить и инвестировать не меньше фирмы j;*
- *в позиционных стратегиях: $u_i^{\mathrm{FBN}}(t) \geqslant u_j^{\mathrm{FBN}}(t)$, но $y_i^{\mathrm{FBN}}(t) \leqslant y_j^{\mathrm{FBN}}(t)$, что позволяет фирме i производить не меньше, а инвестировать не больше фирмы j.*

Данное наблюдение может быть объяснено спецификой реализуемых стратегий — от времени, или от времени и текущего состояния удельных издержек фирм.

Утверждение 1.1. *При постоянном количестве фирм на рынке, не зависимо от сети и класса стратегий, текущий объем производства в равновесии по Нэшу будет выше у той фирмы, что имеет более низкие текущие издержки.*

Доказательство. Пусть общности ради, верхний индекс «N» свидетельствует о производственном поведении и издержках фирм в равновесии по Нэшу (как в классе программных стратегий, так и в позиционных). Согласно замечанию 1.2 и теоремам 1.1 – 1.2 имеем, что

$$u_i^{\mathrm{N}}(t) = \frac{1}{n+1}\left(p - (n+1)c_i^{\mathrm{N}}(t) + \sum_{j=1}^{n} c_j^{\mathrm{N}}(t)\right)$$

для любой фирмы $i \in \mathcal{N}$ и $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$. Тогда из неравенства $c_i^{\mathrm{N}}(t) < c_j^{\mathrm{N}}(t)$, где $j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}$, следует, что

$$u_i^{\mathrm{N}}(t) - u_j^{\mathrm{N}}(t) = c_j^{\mathrm{N}}(t) - c_i^{\mathrm{N}}(t) > 0, \text{ откуда заключаем, что } u_i^{\mathrm{N}}(t) > u_j^{\mathrm{N}}(t),$$

а значит в любой паре фирм, та фирма что имеет меньшие удельные издержки в равновесии, производит большее количество товара. □

Утверждение 1.2. *Равновесное поведение каждой фирмы $i \in \mathcal{N}$ как в программных, так и в позиционных стратегиях имеет нелинейную зависимость от сетевых параметров $\alpha_i(t)$, $\beta_{ij}(t)$ и $\gamma_{ij}(t)$, при $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$, $j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}$.*

Справедливость утверждения вытекает из функционального вида равновесного поведения фирм, представленного в теоремах 1.1 – 1.2. И как будет показано в следующем подразделе эта нелинейная зависимость допускает хорошую аппроксимацию при небольших изменениях значений сетевых параметров.

1.4.2. Цена товара как внешний эффект рыночной конкуренции. Равновесные прибыли

Процесс конкуренции, как правило, обладает довольно нетривиальным характером, и нередко имеет эффекты, которые сказываются на субъектах, не вовлеченных напрямую в данный процесс. Условимся такие эффекты называть внешними по отношению к конкурирующим сторонам. Для исследуемых в работе моделей конкуренции внешним эффектом может выступать цена товара, поскольку в данном случае цена определяется согласно текущему производственному поведению фирм, а не самими потребителями. Таким образом, цена товара для потребителей зависит от конкурентного положения фирм на рынке.

Далее отдельно будет рассмотрено три варианта изменения сети. Анализируя переход от $\mathbf{g}_1$ к $\mathbf{g}_2$, можно понять значимость одной связи в звезде, от $\mathbf{g}_3$ к $\mathbf{g}_2$ — значимость одной связи в линейной сети, когда исключение связи приводит к «изолированной» фирме, сохраняя, при этом, связность остальных, и, наконец, анализ перехода от $\mathbf{g}_2$ к $\mathbf{g}_4$ позволит выявить эффект количества фирм на рынке при линейной сети. Отметим эффекты добавления новых связей в сети или удаления существующих на прибыль фирмы в равновесии по Нэшу. Понимание подобных эффектов позволит фирме, ориентируясь на свою прибыль, оценить необходимость пересмотра текущей структуры взаимоотношений со своими конкурентами — в случае, когда сеть не является экзогенной. В то же время, при экзогенной сети, подобные эффекты могут служить ориентиром для стабилизации конкуренции и рыночной стоимости товара для потребителей.

Наблюдение 1.2. *Для любой пары конкурирующих фирм $i, j \in \mathcal{N} : i \neq j$, из условия того, что $|\mathcal{N}_i^{\mathrm{N}}(\mathbf{g})| > |\mathcal{N}_j^{\mathrm{N}}(\mathbf{g})|$, следует, что $J_i^{\mathrm{N}} > J_j^{\mathrm{N}}$.*

Иначе говоря, из двух фирм бóльшую прибыль имеет та, у которой больше прямых соседей (при прочих равных). Это вывод основан на непосредственном сравнении прибылей, значения которых представлены в таблицах 1.1 – 1.4.

Наблюдение 1.3. *На прибыль любой фирмы влияют все связи в сети, даже те, в которые фирма не вовлечена непосредственно. Значительное изменение прибылей наблюдается у тех фирм, которые непосредственно участвуют в создании или удалении связи.*

Это можно заметить из данных, представленных в таблице 1.5, где $\Delta J_i^{\mathrm{OLN}}$ и $\Delta J_i^{\mathrm{FBN}}$ показывают относительное изменение общей прибыли фирмы $i \in \mathcal{N}$, выраженное в процентах, при изменении сети, когда фирмы придерживаются равновесий в программных и позиционных стратегиях соответственно. Например, при переходе от сети $\mathbf{g}_2$ к сети $\mathbf{g}_3$ фирмы 2 и 4 (которые создают связь между собой) получают заметный прирост прибыли, а у фирм 1 и 3 прибыль незначительно уменьшается.

Таблица 1.5. **Относительная чувствительность прибылей к изменению сети (%)**

Изменение	$\Delta J_1^{\mathrm{OLN}}$	$\Delta J_2^{\mathrm{OLN}}$	$\Delta J_3^{\mathrm{OLN}}$	$\Delta J_4^{\mathrm{OLN}}$	$\Delta J_1^{\mathrm{FBN}}$	$\Delta J_2^{\mathrm{FBN}}$	$\Delta J_3^{\mathrm{FBN}}$	$\Delta J_4^{\mathrm{FBN}}$
$\mathbf{g}_1 \to \mathbf{g}_2$	–14.640	1.285	1.285	–21.261	–14.580	1.782	1.782	–20.941
$\mathbf{g}_2 \to \mathbf{g}_1$	17.150	–1.268	–1.268	27.002	17.069	–1.751	–1.751	26.489
$\mathbf{g}_2 \to \mathbf{g}_3$	–1.070	20.944	–1.304	26.956	–1.464	20.920	–1.589	26.697
$\mathbf{g}_3 \to \mathbf{g}_2$	1.082	–17.317	1.321	–21.233	1.486	–17.301	1.614	–21.072
$\mathbf{g}_2 \to \mathbf{g}_4$	46.293	55.341	55.341	–	45.258	54.193	54.193	–
$\mathbf{g}_4 \to \mathbf{g}_2$	–31.644	–35.626	–35.626	–	–31.157	–35.146	–35.146	–

Наблюдение 1.4. *Увеличение прибыли в равновесии после удаления связи больше у тех фирм, соседями которых не являлась ни одна фирма, утратившая связь.*

Например, при переходе $\mathbf{g}_3 \to \mathbf{g}_2$ — от сети $\mathbf{g}_3$ к $\mathbf{g}_2$, имеем $\Delta J_3^{\mathrm{FBN}} > \Delta J_1^{\mathrm{FBN}}$.

Наблюдение 1.5. *Каждой фирме выгодно стремиться к уменьшению количества своих конкурентов на рынке, а следовательно — стремиться к захвату рынка сбыта (монополии).*

Наибольший эффект в приросте прибыли фирм 1, 2 и 3 наблюдается при переходе $\mathbf{g}_2 \to \mathbf{g}_4$, что можно также трактовать как уход фирмы 4 с рынка. И в обратную сторону: при появлении на рынке новой фирмы, прибыль существующих фирм заметно уменьшится, и его вход может быть заблокирован.

Перейдем к текущему значению внешнего эффекта (цена товара), возникающему от добавления новых связей в сеть или удаления существующих, когда фирмы придерживаются равновесия по Нэшу. Как отмечалось ранее, понимание подобных эффектов позволит сделать вывод о влиянии структуры взаимоотношения фирм на стоимость продукции для потребителей. Используя данные из таблиц 1.1 – 1.4, перейдем к следующему наблюдению.

Наблюдение 1.6. *Текущая цена единицы товара на рынке в случае реализации фирмами равновесия по Нэшу в классе позиционных стратегий оказывается незначительно меньше соответствующей цены из случая реализации фирмами равновесия по Нэшу в классе программных стратегий.*

Далее, опираясь на результаты численного моделирования, вычислим относительные изменения текущей цены, выраженные в процентах, при изменении сети, когда фирмы придерживаются равновесия. Соответствующие значения обозначим через $\Delta P^{\mathrm{OLN}}(t)$ и $\Delta P^{\mathrm{FBN}}(t)$ и приведем в таблице 1.6.

Таблица 1.6. **Чувствительность текущих равновесных цен к изменению сети (относительное изменение, %)**

Изменение	$\Delta P^{\mathrm{OLN}}(0)$	$\Delta P^{\mathrm{OLN}}(1)$	$\Delta P^{\mathrm{OLN}}(2)$	$\Delta P^{\mathrm{FBN}}(0)$	$\Delta P^{\mathrm{FBN}}(1)$	$\Delta P^{\mathrm{FBN}}(2)$
$\mathbf{g}_1 \to \mathbf{g}_2$	0.000	0.230	0.457	0.000	0.205	0.418
$\mathbf{g}_2 \to \mathbf{g}_1$	0.000	–0.229	–0.455	0.000	–0.204	–0.417
$\mathbf{g}_2 \to \mathbf{g}_3$	0.000	–0.228	–0.454	0.000	–0.208	–0.422
$\mathbf{g}_3 \to \mathbf{g}_2$	0.000	0.229	0.456	0.000	0.208	0.424
$\mathbf{g}_2 \to \mathbf{g}_4$	11.111	11.356	11.596	11.111	11.417	11.692
$\mathbf{g}_4 \to \mathbf{g}_2$	–10.000	–10.198	–10.391	–10.000	–10.247	–10.468

Наблюдение 1.7. *При сохранении количества участников на рынке сетевая структура не оказывает сколь-либо значимого влияния на текущие цены. Если же число участников на рынке уменьшается (увеличивается), то это приводит к заметному увеличению (уменьшению) текущей цены товара.*

Наблюдение опирается на данные в таблице 1.6: в случае когда $n = 4$ изменение текущих цен за единицу товара в равновесии не превышает 0.5 % при изменении структуры сети; переход же от сети $\mathbf{g}_2$ к $\mathbf{g}_4$, то есть уход фирмы 4 с рынка позволяет оставшимся фирмам увеличить текущие цены на продукцию, как минимум на 11 % — независимо от класса стратегий. Также отметим, что с уменьшением (увеличением) количества фирм общий объем производимого товара на рынке в равновесии по Нэшу уменьшается (увеличивается), что следует из вида обратной функции спроса.

Теперь перейдем к оценке роли сетевых параметров влияния между фирмами в равновесии по Нэшу. Отождествим понятие «тип» фирмы с мощностью ее множества прямых соседей в сети.

Таблица 1.7. **Типы фирм в модели Γ^{ex} при рассматриваемых экзогенных сетях**

$i \setminus \lvert\mathcal{N}_i(\mathbf{g}_j)\rvert$	$\lvert\mathcal{N}_i(\mathbf{g}_1)\rvert$	$\lvert\mathcal{N}_i(\mathbf{g}_2)\rvert$	$\lvert\mathcal{N}_i(\mathbf{g}_3)\rvert$	$\lvert\mathcal{N}_i(\mathbf{g}_4)\rvert$
1	3	2	2	2
2	1	1	2	1
3	1	1	1	1
4	1	0	1	-

Очевидно, что изменение значения какого-либо сетевого параметра может иметь различное влияние на поведение, издержки и прибыли фирм разных типов. В частности, влияние изменения параметра $\alpha_i(t)$ на издержки фирмы $i \in \mathcal{N}$ можно оценить на любой сетевой структуре, так как для каждой фирмы в уравнении динамики он единственен и не зависит от структуры сети. А вот изменение параметра $\beta_{ij}(t)$ или $\gamma_{ij}(t)$, при $j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}$, может по-разному сказаться на издержках фирм разных типов. Ввиду чего, представляется целесообразным рассмотреть влияние изменения сетевых параметров на прибыли фирм для сетей $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$. Опираясь на данные из таблицы 1.1, представим изменения в виде графиков[3] зависимости прибыли фирм из равновесия в программных стратегиях от изменения сетевых коэффициентов, изображенных на рисунке. 1.1.

[3] Построение схожих графиков для равновесия по Нэшу в классе позиционных стратегий фирм по данным таблицы 1.3 приводит к аналогичным заключениям (замечанию 1.4), ввиду чего ограничимся графиками только для равновесия по Нэшу в классе программных стратегий.

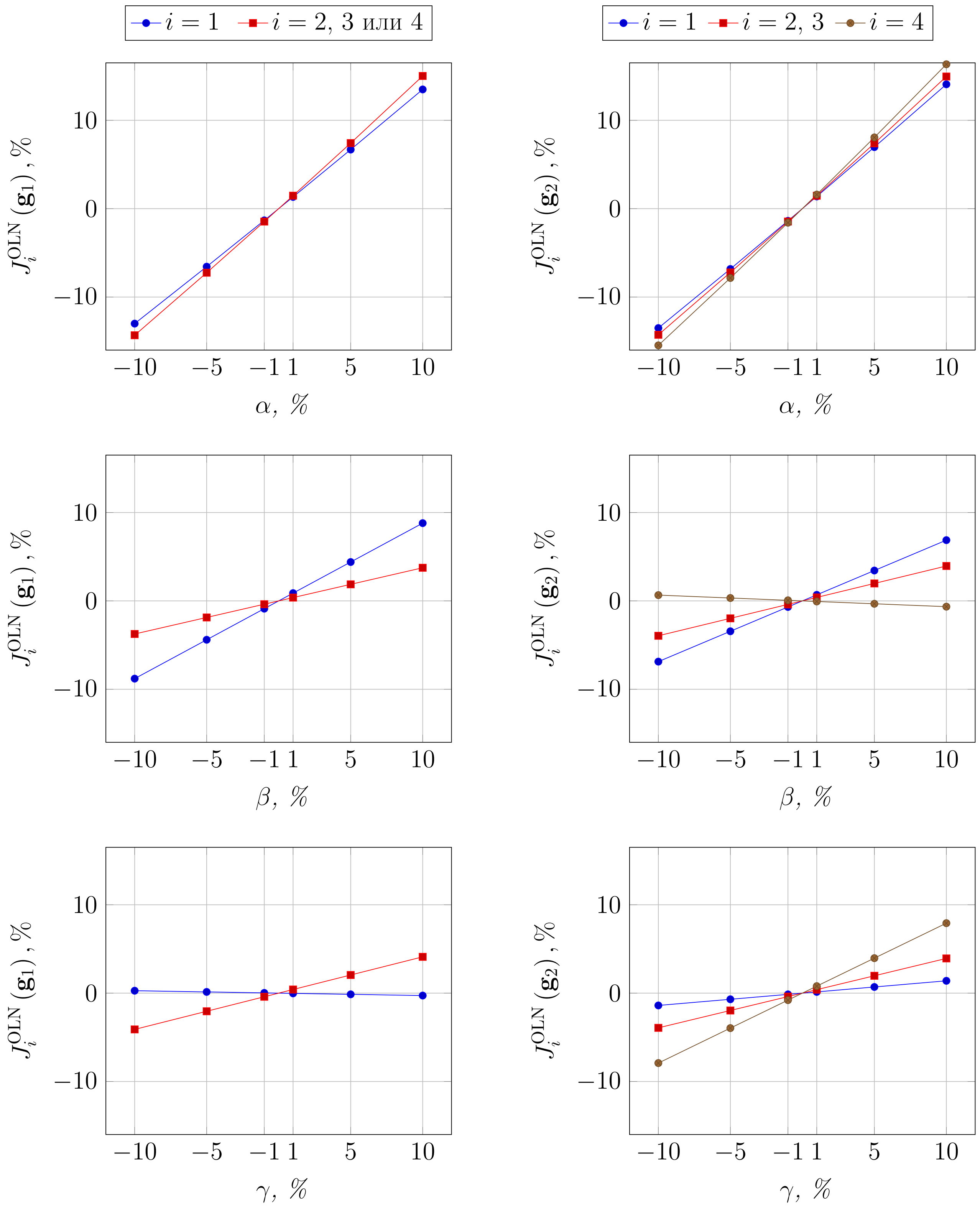


Рис. 1.1. **Влияние изменения значения соответствующего сетевого параметра на прибыли фирм, в процентном измерении**

Замечание 1.3. *При нелинейности функции прибыли фирмы от сетевых параметров в равновесии по Нэшу, процентное изменение значений сетевых параметров показывает согласно рисунку 1.1, что прибыли фирм в равновесии допускают линейную аппроксимацию.*

Замечание 1.4. *Чувствительность фирм к изменению значения параметра* $\alpha_i(t)$ *или* $\beta_{ij}(t)$ *оказывается прямо пропорциональной их типу.*

Учитывая уравнение (1.2), данное замечание представляется естественным. Аналогичная ситуация наблюдается при замене в представленном следствии изолированной фирмы на фирму максимального типа и параметра $\beta_{ij}(t)$ на $\gamma_{ij}(t)$.

1.4.3. Динамика конкурентоспособности

Рассматривая конкурентоспособность каждой фирмы $i \in \mathcal{N}$ как способность превзойти своих конкурентов в прибыли — характерно для теоретико-игровых задач. Отметим, что конкурентоспособность каждой фирмы в модели Γ^{ex} может быть сведена к оценке состояния ее удельных издержек в сравнении с удельными издержками ее конкурентов. Поскольку именно от состояния удельных издержек фирмы зависит ее стоимость производства единицы товара, и при равных объемах удельных издержек, фирма имеющая более низкие удельные издержки может производить большее количество товара. При этом, независимо от класса стратегий фирм — согласно замечанию 1.2 и формуле (1.10), производственное поведение каждой фирмы в равновесии функционально зависит от состояния системы удельных издержек фирм, определяя в дальнейшем текущую цену за единицу товара на рынке. Справедливость приводимого размышления находит свое подтверждение в результатах численного моделирования (см. табл. 1.1–1.4). Отметим также, что оценка конкурентоспособности фирм через состояние их удельных издержек, а не через прибыль, позволит далее обобщить результаты на случай, когда сеть будет эндогенной, а выражение прибыли фирмы будет включать издержки имеющихся у нее сетевых связей.

Оценим в таблице 1.8 чувствительность удельных издержек фирмы в равновесии по Нэшу к изменению структуры сети на основе данных из табл. 1.1–1.4, из которой легко видеть, что тип фирмы в равновесии играет ведущую роль в динамике развития конкурентоспособности фирм.

Таблица 1.8. **Чувствительность текущих равновесных издержек к изменению сети (относительное изменение, %)**

Изменение	Фирма i	$\Delta c_i^{\mathrm{OLN}}(1)$	$\Delta c_i^{\mathrm{OLN}}(2)$	$c_i^{\mathrm{OLN}}(3)$	$\Delta c_i^{\mathrm{FBN}}(1)$	$\Delta c_i^{\mathrm{FBN}}(2)$	$\Delta c_i^{\mathrm{FBN}}(3)$
$\mathbf{g}_1 \to \mathbf{g}_2$	1	1.053	2.142	3.245	1.002	2.061	3.159
	2	–0.000	–0.000	–0.000	–0.048	–0.075	–0.080
	3	–0.000	–0.000	–0.000	–0.048	–0.075	–0.080
	4	1.039	2.067	3.061	0.961	1.945	2.934
$\mathbf{g}_2 \to \mathbf{g}_1$	1	–1.042	–2.097	–3.143	–0.992	–2.019	–3.062
	2	0.000	0.000	0.000	0.048	0.075	0.080
	3	0.000	0.000	0.000	0.048	0.075	0.080
	4	–1.028	–2.025	–2.970	–0.952	–1.908	–2.850
$\mathbf{g}_2 \to \mathbf{g}_3$	1	0.001	0.002	0.002	0.048	0.076	0.082
	2	–1.033	–2.056	–3.049	–0.986	–1.984	–2.975
	3	0.003	0.005	0.005	0.033	0.053	0.057
	4	–1.026	–2.020	–2.966	–0.966	–1.930	–2.873
$\mathbf{g}_3 \to \mathbf{g}_2$	1	–0.001	–0.002	–0.002	–0.048	–0.076	–0.082
	2	1.043	2.099	3.145	0.995	2.024	3.067
	3	–0.003	–0.005	–0.005	–0.033	–0.053	–0.057
	4	1.036	2.062	3.056	0.975	1.968	2.958
$\mathbf{g}_2 \to \mathbf{g}_4$	1	0.779	1.681	2.695	0.905	1.883	2.916
	2	0.805	1.699	2.669	0.908	1.863	2.847
	3	0.805	1.699	2.669	0.908	1.863	2.847
	4	–	–	–	–	–	–
$\mathbf{g}_4 \to \mathbf{g}_2$	1	–0.773	–1.653	–2.624	–0.897	–1.848	–2.833
	2	–0.799	–1.670	–2.600	–0.900	–1.829	–2.768
	3	–0.799	–1.670	–2.600	–0.900	–1.829	–2.768
	4	–	–	–	–	–	–

Наблюдение 1.8. *В равновесии по Нэшу для класса позиционных стратегий, издержки фирмы менее чувствительны к разрыву связи, в которой она участвует, чем для класса программных стратегий. В равновесии по Нэшу для класса программных стратегий, издержки фирмы более чувствительны к разрыву связи, в которой она не участвует, чем для класса позиционных стратегий.*

Действительно, достаточно обратить внимание на переходы от одной сети к другой, при которых удалялась одна связь: от $\mathbf{g}_1$ к $\mathbf{g}_2$ и от $\mathbf{g}_3$ к $\mathbf{g}_2$. Аналогично наблюдению 1.8, можно сформулировать схожий результат в обратную сторону, заменив удаление связи на ее добавление.

Наблюдение 1.9. *Каждой фирме выгодно не только иметь как можно более высокий тип в сети, но и чтобы другие фирмы имели в этой сети как можно более низкий тип.*

Сеть $\mathbf{g}_2$ в тысячных долях более выгодна для фирмы 3, чем $\mathbf{g}_1$, в которой она асимметрична фирме 2 — в силу того, что они имеют в этих сетях различные типы. Могло бы показаться, что для фирмы 3 не может быть предпочтения между сетями $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$, поскольку в обеих ее тип сохраняется, и наблюдается ровно одна связь в которой фирма 3 не участвует — $(2; 4)$ и $(1; 4)$ соответственно. Однако, в сети $\mathbf{g}_1$ связь $(2; 4)$ ведет к тому, что в ней получается две фирмы второго типа, а в сети $\mathbf{g}_2$ одна фирма второго типа. А значит каждой фирме выгоднее, чтобы число фирм имеющих более низкий тип, чем у нее, было наибольшим. По этим же соображениям фирме 4 выгоднее сеть $\mathbf{g}_2$, в которой ее связь не увеличивает число фирм, имеющих более высокий тип, чем у нее.

1.5. Основные результаты и выводы по первой главе

В динамической модели конкуренции с экзогенным формированием сетевого взаимодействия Γ^{ex} был получен вид равновесия по Нэшу для двух вариантов информационной структуры в модели — программной и позиционной. Для каждого варианта информационной структуры также доказана единственность равновесия по Нэшу. Приведены примеры численного моделирования равновесий для нескольких структур сетевого взаимодействия (сетей) с использованием программы [26]. Выполнен сравнительный анализ полученных результатов, что позволяет оценить роль и влияние сетевой структуры, а также сетевых коэффициентов на поведение фирм, их прибыли и внешний эффект в равновесии.

Основные результаты исследования, описанные в первой главе, представлены в публикации [27] вместе с такими допущениями, как ограничение на сетевые параметры — для каждой фирмы $i \in \mathcal{N}$: $0 \leqslant \gamma_{ij}(t) < \beta_{ij}(t) < \alpha_i(t)$ при $j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}$ и $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$, условность на терминальный момент времени: фирмы в этот момент покидают рынок, получая прибыль, составляющую рыночную стоимость их производства. Однако, стоит отметить, что для представленных результатов (единственность и функциональный вид поведения фирм в равновесии) исследования модели Γ^{ex}, допущения на сетевые параметры, которые представлены в публикации, не представляется принципиальными. Во-первых, отсутствие связи между фирмами может быть выгоднее ее наличия (вариация интерпретации экзогенной сети разнообразна, и зависит от рассматриваемой постановки задачи). Во-вторых, эффект от инвестиций какого-либо прямого соседа в сети может быть больше эффекта от собственных инвестиций. Так в случае возникновения эффекта заменяемости (субмодулярности), если фирмы из множества $\mathcal{N}_i\left(\mathbf{g}(t)\right)$ увеличивают объемы своих инвестиционных вложений, то фирма i может понизить свои — положиться на своих соседей в сетевой структуре [66, 69]. Таким образом, приводимые решения обладают свойством адаптивности и к задачам с неположительными сетевыми параметрами (коэффициентами влияния). Далее, если в терминальный момент времени модели Γ^{ex} отказаться от условия выхода фирм с рынка и переписать функционал (1.4) в форме Лагранжа, для этого достаточно положить $\eta_i = \eta = 0$ для каждой фирмы $i \in \mathcal{N}$, то функциональный вид поведения фирм в равновесии по Нэшу остается неизменным. Из теории оптимального управления известно, что функционал записанный в форме Лагранжа может быть эквивалентно представлен в форме Майера и наоборот, что свидетельствует о том, что представленные методы решения модели применимы к различным постановкам и формальной записи прибыли фирм с единственным условием — сохранение квадратичного вида максимизируемого функционала.

Несмотря на то, что игровая модель Γ^{ex} описана как экономико-математическая и результаты анализа интерпретируются соответственно, очевидным представляется то, что полученные в ходе исследования результаты не ограничиваются применением в экономике и могут быть адаптированы как к теоретическим (выявление или обоснование закономерностей и явлений), так и к практическим задачам иных научных сфер, примеры таких сфер хорошо описываются в [33].

Отметим, что соотношение (1.2) адаптировано к двум вариантам сетевого взаимодействия фирм — при наличии связи между ними в сети и при ее отсутствии, в соответствующий момент времени. Однако, условия представленные в теоремах 1.1–1.2 остаются справедливыми и в случае, когда в модели учитывается большее разнообразие вариантов сетевого взаимодействия. Например, можно полагать, что фирмы $i, j \in \mathcal{N}$ для которых $(i,j) \notin \mathbf{g}(t)$ получают эффект от инвестиций друг друга с коэффициентом $\omega^{d_{ij}(\mathbf{g}(t))}(t)$, где $0 < \omega < 1$, а $d_{ij}(\mathbf{g}(t)) > 0$ — длина минимального пути от фирмы i до j в сетевой структуре $\mathbf{g}(t)$. В такой постановке получаем $\mu_{ij}(t, \mathbf{g}(t)) = \omega^{d_{ij}(\mathbf{g}(t))}(t)$ при $i \neq j$ и для каждой фирмы будет выгодно уменьшить свое расстояние до каждого конкурента в сети — как способ избежать «затухания» положительного влияния от инвестиций конкурентов. При этом выбор стратегий фирмами при руководстве теоремой 1.1 или теоремой 1.2 — в зависимости от информационной структуры модели, позволяет им придерживаться равновесия по Нэшу.

Глава 2. Динамические модели с эндогенным формированием сетевого взаимодействия

Несмотря на то, что согласно [14] сетевые игры представляют собой достаточно молодое направление в теории игр, в настоящее время уже устоялась некоторая часть общепринятой классификации. Согласно [15, 32, 36] сетевые игры можно разделить на два класса: игры, реализуемые на сети, и игры формирования сети. Согласно представленной классификации, модель рассмотренная в главе 1, является игрой на сети. В данной главе будут рассмотрены модели, в которых формирование сетевого взаимодействия фирм является лишь частью их стратегического поведения. Это позволяет рассматривать текущую главу как логическое продолжение главы 1, где модель Γ^{ex} расширятся за счет введения возможности фирмам принимать участие в формировании сетевого взаимодействия. Проводимый ранее анализ дополняется вопросами равновесного многокомпонентного поведения фирм при различных вариантах их сетевого взаимодействия (разделы 2.1 и 2.4). Стоит отметить, что игры с многокомпонентным поведением рассматривались исследователями и раньше, для примера можно привести работу [42], при этом многие вопросы относительно принципов и условий формирования сетевых связей до сих пор остаются неразрешенными.

Особое внимание в данной главе будет уделено расширенной версии модели Γ^{ex} (раздел 2.2) и ее вариациям (разделы 2.3 и 2.4) — при условии того, что фирмы самостоятельно формируют структуру своего сетевого взаимодействия в каждый момент принятия решения, то есть процедура формирования сети приобретает эндогенный характер. Для сетевого поведения фирм будут определены условия в соответствии с рассматриваемым правилом формирования связи, которые обеспечивают устойчивость формируемых связей в сети. Также в главе будут представлены результаты численного моделирования и сравнительного анализа (раздел 2.5), которые позволят фирмам оценить перспективность долгосрочного и краткосрочного сетевого взаимодействия с конкурентами. Для случая долгосрочного сетевого взаимодействия фирм также будут рассмотрены варианты единоразовых и регулярных издержек связей в сети.

2.1. Стратегический характер сетевого поведения и формализация правил формирования сетевого взаимодействия

Рассмотрим вариант эндогенного формирования сетевого взаимодействия фирм, то есть когда для каждой фирмы выбор прямых соседей в сети является результатом ее стратегического поведения. Будем полагать, что выбирая свое сетевое поведение в нетерминальный момент времени, каждая фирма обладает знанием того, какие издержки сопряжены с ее потенциальными связями. Для этого определим для каждого момента времени $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ матрицу сетевых издержек (или издержек связи фирм), как $\Pi(t) = \{\pi_{ij}(t)\}$, где для любой пары фирм $i, j \in \mathcal{N}$ имеем, что $\pi_{ij}(t) \geqslant 0$ — издержки связи (i, j), которые фирма i несет за связь с фирмой j, если (i, j) будет принадлежать сформированной в момент времени t сетевой структуре $\mathbf{g}(t)$, при этом $\pi_{ii}(t) = 0$. Будем полагать, что последовательность матриц издержек связи $\{\Pi(t)\}_{t=0}^{T-1}$ всегда задана и представляется общеизвестным знанием.

Введем в рассмотрение для каждого момента времени $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ и фирмы $i \in \mathcal{N}$ вектор $g_i(t) = (g_{i1}(t), \ldots, g_{in}(t)) \in \mathbb{G}_i$, который будем называть сетевым поведением фирмы i в текущий момент времени, а элементы которого

$$g_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \text{ предлагает связь фирме } j \in \mathcal{N} \setminus \{i\} \text{ в момент } t \neq T, \\ 0, & \text{в любом другом случае;} \end{cases}$$

интерпретировать как предложение или согласие фирмы i к формированию сетевой связи с фирмой j в текущий момент времени, при этом будем полагать, что $g_{ii}(t) \equiv 0$. Таким образом, можно считать, что сетевое поведение фирмы i в каждый нетерминальный момент времени модели определяется бинарным вектором, и определить множество допустимых вариантов ее сетевого поведения соответственно как $\mathbb{G}_i = \{0, 1\}^n$ — пространство $n-$мерных бинарных векторов. Набором $g_i = (g_i(0), g_i(1), \ldots, g_i(T-1))$ определим сетевое поведение фирмы i в каждой из моделей, которые будут рассмотрены далее.

Будем говорить, что между парой фирм i и j формируется двухсторонняя сетевая связь в момент времени t тогда и только тогда, когда $g_{ij}(t) = g_{ji}(t) = 1$, то есть обе фирмы в текущий момент времени согласны на создание связи (i, j) друг с другом, такой что $(i, j) = (j, i)$ и (i, j) будет принадлежать сформированной в текущий момент времени сетевой структуре $\mathbf{g}(t)$. Описанное правило формирования двухсторонних связей в структурах сетевого взаимодействия вызывает интерес у многих исследователей и нередко встречается в анализе сетевых игр, например в работах [15, 16, 22, 39].

На основе правила двухстороннего сетевого взаимодействия, определим динамику удельных издержек фирмы $i \in \mathcal{N}$, изменив уравнение (1.2) следующим образом:

$$\begin{aligned} c_i(t+1) = &\delta c_i(t) - \alpha_i(t) y_i(t) - \\ &- \sum_{j \neq i} \Big(\beta_{ij}(t)\, g_{ij}(t) g_{ji}(t) + \gamma_{ij}(t)\left(1 - g_{ij}(t) g_{ji}(t)\right) \Big) y_j(t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ и $c_i(0) = c_{i0}$, $c_i(t) \in \mathcal{C}$, $j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}$. Описывая сетевое поведение фирм в текущий момент вектором $g(t) = (g_1(t), \ldots, g_n(t))$, уточним промежуточные прибыли фирмы i следующей функцией:

$$\begin{aligned} &F_i\left(t, g(t), c_i(t), u(t), y_i(t)\right) = \\ &= \left(p - c_i(t) - \sum_{j=1}^{n} u_j(t) \right) u_i(t) - \frac{\varepsilon_i(t)}{2} y_i^2(t) - \sum_{j \neq i} \pi_{ij}(t) g_{ij}(t) g_{ji}(t). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Таким образом, игровой процесс, описанный в разделе 1.1 дополняется тем, что теперь поведение произвольной фирмы $i \in \mathcal{N}$ в каждый момент времени $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ описывается допустимым набором $(g_i(t), u_i(t), y_i(t)) \in \mathbb{G}_i \times \mathbb{U}_i \times \mathbb{Y}_i$, сетевая структура $\mathbf{g}(t)$ строится по правилу двухстороннего взаимодействия — если явным образом не оговорено другое правило формирования ее связей, удельные издержки изменяются согласно (2.1), а промежуточные прибыли определяются согласно (2.2).

2.2. Равновесие по Нэшу в классе программных стратегий

Для формального представления модели с эндогенным формированием сетевого взаимодействия фирм как динамической игры, а также равновесия по Нэшу как ее решения, следуя [47] начнем с определения стратегий конкурирующих фирм. Программной стратегией фирмы $i \in \mathcal{N}$ назовем отображение $s_i(t, c_0) : \mathcal{T} \setminus \{T\} \mapsto \mathbb{G}_i \times \mathbb{U}_i \times \mathbb{Y}_i$, которое каждому неокончательному моменту времени и начальным значениям удельных издержек всех фирм однозначным образом ставит в соответствие допустимое поведение фирмы i следующего вида $s_i(t, c_0) = (g_i(t), u_i(t), y_i(t))$. Поскольку вектор c_0 фиксирован, опустим зависимость от него стратегии и будем считаем ее лишь функцией времени. По этой же причине будем рассматривать программные стратегии фирм как функции времени до конца исследования.

Следуя [20, 47], определим динамическую модель конкуренции с эндогенным формированием двухстороннего сетевого взаимодействия фирм как игру в нормальной форме

$$\Gamma^{\text{en}} = \left\langle \mathcal{N}, \{\mathcal{S}_i\}_{i\in\mathcal{N}}, \{\mathcal{J}_i\}_{i\in\mathcal{N}} \right\rangle,$$

где $\mathcal{S}_i = \{s_i \,|\, s_i(t, c_0) = (g_i(t), u_i(t), y_i(t)), t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}\}$ — множество стратегий фирмы $i \in \mathcal{N}$, $s = (s_1, \ldots, s_n)$ — ситуация, а функция выигрышей $\mathcal{J}_i(s) = J_i(c_0, \mathbf{g}, u, y)$ — дисконтированная прибыль фирмы i, определяемая следующим функционалом

$$J_i(c_0, \mathbf{g}, u, y) = \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t F_i(t, \mathbf{g}(t), c_i(t), u(t), y_i(t)) + \rho^T (\eta_i - \eta c_i(T)), \tag{2.3}$$

где промежуточные прибыли определяются согласно (2.2), при наборе сетевых структур взаимодействия $\mathbf{g} = \{\mathbf{g}(t)\}_{t=0}^{T-1}$, которые фирмам удалось сформировать, при этом динамика удельных издержек описывается соотношением (2.1).

Следующая теорема характеризует равновесие по Нэшу в модели Γ^{en}.

Теорема 2.1. *Набор стратегий фирм,* $s^{\text{N}} = \left(s_1^{\text{N}}, \ldots, s_n^{\text{N}}\right)$, *компоненты которого* $s_i^{\text{N}}(t) = \left(g_i^{\text{N}}(t), u_i^{\text{N}}(t), y_i^{\text{N}}(t)\right)$, $i \in \mathcal{N}$, $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ *имеют вид*

$$g_{ij}^{\text{N}}(t) = \begin{cases} 1, & \pi_{ij}(t) < \pi_{ij}^{\text{N}}(t),\ \pi_{ji}(t) < \pi_{ji}^{\text{N}}(t), \qquad j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}, \\ 0, & \textit{иначе}, \end{cases} \tag{2.4}$$

$$u_i^{\text{N}}(t) = \frac{p - (n+1)c_i^{\text{N}}(t) + \sum_{j\in\mathcal{N}} c_j^{\text{N}}(t)}{n+1}, \tag{2.5}$$

$$y_i^{\text{N}}(t) = -\frac{\alpha_i(t)\phi_i(t+1)}{\rho^t \varepsilon_i(t)}, \tag{2.6}$$

при

$$\pi_{ij}^{\text{N}}(t) = \frac{\varepsilon_i(t)}{\alpha_i(t)}(\beta_{ij}(t) - \gamma_{ij}(t))\, y_i^{\text{N}}(t)\, y_j^{\text{N}}(t),$$

является равновесием по Нэшу в модели Γ^{en}. *Здесь* $c_i^{\mathrm{N}}(t)$ *удовлетворяет* (2.1) *с начальным условием* $c_i^{\mathrm{N}}(0) = c_{i0}$, *а* $\phi_i(t)$ *удовлетворяет соотношению* $\phi_i(t) = -\rho^t u_i^{\mathrm{N}}(t) + \delta\phi_i(t+1)$ *с граничным условием* $\phi_i(T) = -\rho^T\eta$ *для* $i \in \mathcal{N}$.

Доказательство. Для начала, следуя [51, 53, 72], предположим, что вместо n-мерного бинарного вектора $g_i(t)$ фирма $i \in \mathcal{N}$ в текущий момент $t \neq T$ выбирает n-мерный вектор $z_i(t)$, компоненты которого $z_{ij}(t) \in [0,1]$. Такое сетевое поведение фирмы i будем характеризовать как ее склонность к формированию связи с фирмой j в этот момент времени. В крайних случаях, то есть когда $z_{ij}(t) = 0$ или $z_{ij}(t) = 1$, фирма i не предлагает и, соответственно, предлагает связь фирме j. Пусть $z(t) = (z_1(t), \ldots, z_n(t))$, σ_i — стратегия фирмы i, то есть $\sigma_i(t) = (z_i(t), u_i(t), y_i(t))$, а $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ — набор стратегий. Используя стандартные инструменты теории динамических игр, с учетом (2.1) и (2.3) для фирмы i функция Гамильтона примет вид:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}_i\left(t, c(t), z(t), u(t), y(t), \psi_i(t+1)\right) = \\
&= \rho^t\Big[\Big(p - c_i(t) - \sum_{j\in\mathcal{N}} u_j(t)\Big)u_i(t) - \frac{\varepsilon_i(t)}{2}y_i^2(t) - \sum_{j\neq i}\pi_{ij}(t)z_{ij}(t)z_{ji}(t)\Big] + \sum_{j\in\mathcal{N}}\psi_{ij}(t+1)\times \\
&\times\Big[\delta c_j(t) - \alpha_j(t)y_j(t) - \sum_{r\neq j}\Big(\beta_{jr}(t)z_{jr}(t)z_{rj}(t) + \gamma_{jr}(t)(1 - z_{jr}(t)z_{rj}(t))\Big)y_r(t)\Big],
\end{aligned}$$

где $\psi_i(t) = (\psi_{i1}(t), \ldots, \psi_{in}(t))$, $t \in \mathcal{T} \setminus \{0\}$, — набор сопряженных переменных. Следуя принципу максимума Понтрягина [23, 47], если набор стратегий σ^{N} является равновесием по Нэшу, то существуют ненулевые вектора $\psi_i(t)$ при $t \in \mathcal{T} \setminus \{0\}$, $i \in \mathcal{N}$, удовлетворяющие системе рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned}
\sigma_i^{\mathrm{N}}(t) = \arg &\max_{z_i(t)\in[0,1]^n,\ u_i(t)\in\mathbb{U}_i,\ y_i(t)\in\mathbb{Y}_i} \\
&\mathcal{H}_i\left(t, c^{\mathrm{N}}(t), \left(z_{-i}^{\mathrm{N}}(t) \,|\, z_i(t)\right), \left(u_{-i}^{\mathrm{N}}(t) \,|\, u_i(t)\right), \left(y_{-i}^{\mathrm{N}}(t) \,|\, y_i(t)\right), \psi_i(t+1)\right),
\end{aligned}$$

$$\psi_{ij}(t) = \begin{cases} -\rho^t u_i^{\mathrm{N}}(t) + \delta\psi_{ii}(t+1), & j = i, t \neq T, \\ -\rho^T\eta, & j = i, t = T, \\ 0, & j \neq i, \end{cases}$$

$$c_i^{\mathrm{N}}(t+1) = \delta c_i^{\mathrm{N}}(t) - \alpha_i(t) y_i^{\mathrm{N}}(t) - \\ - \sum_{j \neq i} \Big(\beta_{ij}(t) z_{ij}^{\mathrm{N}}(t) z_{ji}^{\mathrm{N}}(t) + \gamma_{ij}(t)(1 - z_{ij}^{\mathrm{N}}(t) z_{ji}^{\mathrm{N}}(t)) \Big) y_j^{\mathrm{N}}(t), \quad t \neq T,$$
$$c_i^{\mathrm{N}}(0) = c_{i0}.$$

С учетом равенства $\psi_{ij}(t) = 0$ для $i \neq j$ и линейности функции Гамильтона по переменным $z_{ij}(t)$ для равновесия по Нэшу σ^{N} необходимо, чтобы:

$$z_{ij}^{\mathrm{N}}(t) = \begin{cases} 1, & \Big(\rho^t \pi_{ij}(t) + \psi_{ii}(t+1)(\beta_{ij}(t) - \gamma_{ij}(t)) y_j^{\mathrm{N}}(t)\Big) z_{ji}^{\mathrm{N}}(t) < 0 \text{ и } j \neq i, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$
$$u_i^{\mathrm{N}}(t) = \frac{p - (n+1) c_i^{\mathrm{N}}(t) + \sum_{j \in \mathcal{N}} c_j^{\mathrm{N}}(t)}{n+1},$$
$$y_i^{\mathrm{N}}(t) = -\frac{\alpha_i(t)}{\rho^t \varepsilon_i(t)} \psi_{ii}(t+1). \tag{2.7}$$

Таким образом, если σ^{N} является равновесием по Нэшу, то $s^{\mathrm{N}} = \sigma^{\mathrm{N}}$, где $g_i^{\mathrm{N}} = z_i^{\mathrm{N}}$. Следовательно, равновесие по Нэшу предписывает двум фирмам i и j установить связь в момент времени $t \neq T$, то есть выбрать в своем сетевом поведении $g_{ij}^{\mathrm{N}}(t) = g_{ji}^{\mathrm{N}}(t) = 1$, в случае когда выполняются следующие неравенства:

$$\rho^t \pi_{ij}(t) + \psi_{ii}(t+1)(\beta_{ij}(t) - \gamma_{ij}(t)) y_j^{\mathrm{N}}(t) < 0, \\ \rho^t \pi_{ji}(t) + \psi_{jj}(t+1)(\beta_{ji}(t) - \gamma_{ji}(t)) y_i^{\mathrm{N}}(t) < 0.$$

Принимая во внимание (2.7), в равновесии по Нэшу две фирмы i и j устанавливают в текущий момент времени связь при $\pi_{ij}(t) < \pi_{ij}^{\mathrm{N}}(t)$ и $\pi_{ji}(t) < \pi_{ji}^{\mathrm{N}}(t)$. Положив $\phi_i(t) = \psi_{ii}(t)$, приходим к выражениям (2.4) – (2.6).

Существование ненулевых сопряженных переменных гарантирует для каждой фирмы ненулевое инвестиционное поведение, определяемое (2.7), в связи с чем гессиан функции Гамильтона $\mathcal{H}_i$ оказывается отрицательно определенным: $-2\rho^t \left(u_i^{\mathrm{N}}(t)\right)^2 - \rho^t \varepsilon_i(t) \left(y_i^{\mathrm{N}}(t)\right)^2 < 0$. Следовательно, остается заключить, что s^{N} будет равновесием по Нэшу в классе программных стратегий. □

Замечание 2.1. *Следуя [27], условия* (2.4) – (2.6) *также можно представить в альтернативной рекуррентной форме. Чтобы не повторять схожие шаги, опустим это. Дополнительно отметим, что при переходе от модели* Γ^{ex} *к* Γ^{en} *функциональный вид производственного и инвестиционного поведения фирм* (2.5) – (2.6) *в равновесии по Нэшу сохраняется.*

2.3. Равновесие по Нэшу в классе программных стратегий для моделей с постоянным сетевым взаимодействием

Рассмотренная модель Γ^{en} позволяет фирмам перестраивать свое сетевое взаимодействие с конкурентами в каждый момент принятия решения, что можно трактовать как вариант стратегического поведения, в котором фирмы руководствуются краткосрочными связями сотрудничества, примером чего могут выступать краткосрочные соглашения или договора. Естественным представляется также рассмотреть варианты сетевого взаимодействия, когда связи в сети устанавливаются на продолжительное время, иначе говоря, сеть имеет в модели постоянную структуру. При этом издержки связи, которые фирмы учитывают при выборе прямых соседей в сети, могут быть как регулярными — фирмы несут издержки за имеющиеся у них связи в сети в каждый момент времени $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ (подраздел 2.3.1), так и единоразовыми — фирмы несут издержки за имеющиеся у них связи только в момент формирования сети (подраздел 2.3.2).

Сравнительный анализ условий равновесия по Нэшу, полученного для каждого из описанных в данном разделе варианта сетевого взаимодействия конкурирующих фирм в динамическом процессе (раздел 2.5), позволит ответить на ряд важных вопросов, среди которых центральным является вопрос — какой вариант сотрудничества при общих входных параметрах (краткосрочный или долгосрочный) выгоднее конкурирующим сторонам?

2.3.1. Модель с издержками формирования и поддержания сетевых связей

Рассмотрим модель, в которой фирмы выбирают свое сетевое поведение единоразово в начальный момент времени, но несут издержки от установленных связей в сети со своими прямыми соседями в каждый момент времени $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ — как и получают эффект от инвестиций всех фирм, согласно построенной структуре сетевого взаимодействия. Таким образом, сеть в модели имеет постоянную структуру, поэтому $\mathbf{g} = \mathbf{g}(0) := \mathbf{g}_0$. При этом издержки сетевого взаимодейсвтия фирмы несут в каждый момент времени $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$. Такое допущение можно интерпретировать как издержки на формирование и поддержание сетевого взаимодействия в течение длительного промежутка времени.

Назовем допустимым поведением фирмы $i \in \mathcal{N}$ в модели: тройку действий $(g_i(0), u_i(0), y_i(0)) \in \mathbb{G}_i \times \mathbb{U}_i \times \mathbb{Y}_i$ для $t = 0$ и пару действий $(u_i(t), y_i(t)) \in \mathbb{U}_i \times \mathbb{Y}_i$ для $t \in \mathcal{T} \setminus \{0, T\}$. Общую прибыль фирмы i зададим как

$$\begin{aligned} J_i\left(c_0, \mathbf{g}_0, u, y\right) = \\ = \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t \left[\left(p - c_i(t) - \sum_{j=1}^{n} u_j(t) \right) u_i(t) - \frac{\varepsilon_i(t)}{2} y_i^2(t) - \sum_{j \neq i} \pi_{ij}(t) g_{ij}(0) g_{ji}(0) \right] + \\ + \rho^T(\eta_i - \eta c_i(T)), \quad (2.8) \end{aligned}$$

где текущие удельные издержки удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} c_i(t+1) = \delta c_i(t) - \alpha_i(t) y_i(t) \\ - \sum_{j \neq i} \Big(\beta_{ij}(t) g_{ij}(0) g_{ji}(0) + \gamma_{ij}(t)(1 - g_{ij}(0) g_{ji}(0)) \Big) y_j(t) \end{aligned} \qquad (2.9)$$

для $t \in \mathcal{T} \setminus T$, при начальных удельных издержках $c_i(0) = c_{i0}$.

Тогда динамическую модель конкуренции с эндогенным формированием долгосрочного сетевого взаимодействия и регулярными издержками связи в сети можно представить как динамическую игру в нормальной форме

$$\Gamma_{01}^{\text{en}} = \Big\langle \mathcal{N}, \{\mathcal{S}_i\}_{i \in \mathcal{N}}, \{\mathcal{J}_i\}_{i \in \mathcal{N}} \Big\rangle,$$

где $\mathcal{S}_i$ — множество стратегий фирмы i, таких что

$$s_i(t) = \begin{cases} (g_i(0), u_i(0), y_i(0)), & t = 0, \\ (u_i(t), y_i(t)), & t \in \mathcal{T} \setminus \{0, T\}; \end{cases} \qquad (2.10)$$

функция выигрышей $\mathcal{J}_i(s) = J_i\left(c_0, \mathbf{g}_0, u, y\right)$ — дисконтированная прибыль, определяемая согласно функционалу (2.8), где $s = (s_1, \ldots, s_n)$ — ситуация в игре, в которой формируется сетевая структура взаимодействия фирм $\mathbf{g}_0$, а динамика удельных издержек задается соотношением (2.9) с начальным условием $c(0) = c_0$.

Следующая теорема характеризует равновесие по Нэшу в классе программных стратегий фирм для модели Γ_{01}^{en}.

Теорема 2.2. *В модели* Γ_{01}^{en} *набор стратегий* $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$, *компоненты которого*

$$s_i^*(t) = \begin{cases} (g_i^*(0), u_i^*(0), y_i^*(0)), & t = 0, \\ (u_i^*(t), y_i^*(t)), & t \in \mathcal{T} \setminus \{0, T\}, \end{cases}$$

для $i \in \mathcal{N}$, имеют вид

$$g^*_{ij}(0) = \begin{cases} 1, & \sum\limits_{t=0}^{T-1} \rho^t \pi_{ij}(t) < \pi^*_{ij},\ \sum\limits_{t=0}^{T-1} \rho^t \pi_{ji}(t) < \pi^*_{ji}, \quad j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \tag{2.11}$$

$$u^*_i(t) = \frac{p - (n+1)c^*_i(t) + \sum\limits_{j \in \mathcal{N}} c^*_j(t)}{n+1},$$

$$y^*_i(t) = -\frac{\alpha_i(t)}{\rho^t \varepsilon_i(t)} \phi_i(t+1), \tag{2.12}$$

является равновесием по Нэшу, при

$$\pi^*_{ij} = \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t \frac{\varepsilon_i(t)}{\alpha_i(t)} (\beta_{ij}(t) - \gamma_{ij}(t))\, y^*_i(t)\, y^*_j(t).$$

Здесь издержки $c^*_i(t)$ удовлетворяют соотношению (2.9) с начальным условием $c^*_i(0) = c_{i0}$, а $\phi_i(t)$ удовлетворяет соотношению $\phi_i(t) = -\rho^t u^*_i(t) + \delta\phi_i(t+1)$ с граничным условием $\phi_i(T) = -\rho^T \eta$ для $i \in \mathcal{N}$.

Доказательство. Поскольку текущая прибыль для каждой фирмы $i \in \mathcal{N}$ зависит, в том числе, от сетевого поведения, которое выбиралось в начальный момент времени, то стандартные методы, которые основаны на принципе максимума Понтрягина, становятся неприменимыми. Ввиду чего, для доказательства теоремы потребуется иной подход.

Для начала, подобно доказательству теоремы 2.1, будем исходить из предположения о том, что вместо n-мерного бинарного вектора $g_i(0)$ фирма i в начальный момент времени выбирает n-мерный вектор $z_i(0)$, компоненты которого $z_{ij}(0) \in [0;1]$ характеризуют склонность i к формированию связи с $j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}$ в момент времени $t = 0$. Пусть $z(0) = (z_1(0), \ldots, z_n(0))$, σ_i — стратегия фирмы i, а $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ — набор стратегий.

Полагая стратегии всех фирм, кроме i, фиксированными, для поиска наилучшего ответа на эти стратегии фирма i должна максимизировать (2.8) с учетом уравнения динамики собственных удельных издержек (2.9). Для поиска наилучшего ответа фирмы i, выпишем для нее функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}_i(c, z(0), u, y, \lambda_i) = \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t \Bigg[\Bigg(p - \sum_{j=1}^{n} u_j(t) \Bigg) u_i(t) - c_i(t) u_i(t) -$$
$$- \frac{\varepsilon_i(t)}{2} y_i^2(t) - \sum_{j \neq i} \pi_{ij}(t) z_{ij}(0) z_{ji}(0) \Bigg] + \rho^T \left(\eta_i - \eta c_i(T) \right) -$$
$$- \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(t+1) \Bigg[c_j(t+1) - \delta c_j(t) + \alpha_j(t) y_j(t) +$$
$$+ \sum_{r \neq j} \Big(\beta_{jr}(t) z_{jr}(0) z_{rj}(0) + \gamma_{jr}(t)(1 - z_{jr}(0) z_{rj}(0)) \Big) y_r(t) \Bigg],$$

где $\lambda_i = (\lambda_i(1), \ldots, \lambda_i(T))$ при $\lambda_i(t) = (\lambda_{i1}(t), \ldots, \lambda_{in}(t))$, $t \in \mathcal{T} \setminus \{0\}$, — набор множителей Лагранжа. Если набор стратегий σ^* является равновесием по Нэшу, то существуют ненулевые наборы λ_i, $i \in \mathcal{N}$, удовлетворяющие системе рекуррентных соотношений:

$$z_{ij}^*(0) = \begin{cases} 1, & \sum\limits_{t=0}^{T-1} \Big(\rho^t \pi_{ij}(t) + \lambda_{ii}(t+1)(\beta_{ij}(t) - \gamma_{ij}(t)) y_j^*(t) \Big) z_{ji}^*(0) < 0 \text{ и } j \neq i, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$u_i^*(t) = \frac{p - (n+1) c_i^*(t) + \sum\limits_{j=1}^{n} c_j^*(t)}{n+1}, \qquad t \neq T,$$

$$y_i^*(t) = -\frac{\alpha_i(t)}{\rho^t \varepsilon_i(t)} \lambda_{ii}(t+1), \qquad t \neq T, \tag{2.13}$$

$$\lambda_{ij}(t) = \begin{cases} -\rho^t u_i^*(t) + \delta \lambda_{ii}(t+1), & j = i, \quad t \neq T, \\ -\rho^T \eta, & j = i, \quad t = T, \\ 0, & j \neq i, \end{cases}$$

$$c_i^*(t+1) = \delta c_i^*(t) - \alpha_i(t) y_i^*(t) -$$
$$- \sum_{j \neq i} \Big(\beta_{ij}(t) z_{ij}^*(0) z_{ji}^*(0) + \gamma_{ij}(t)(1 - z_{ij}^*(0) z_{ji}^*(0)) \Big) y_j^*(t), \quad t \neq T,$$
$$c_i^*(0) = c_{i0}.$$

Если σ^* является равновесием по Нэшу, то $s^* = \sigma^*$, где $g_i^*(0) = z_i^*(0)$. Заключаем, что равновесие по Нэшу предписывает двум различным фирмам i и j установить связь в начальный момент времени, то есть выбрать в своем сетевом поведении $g_{ij}^*(0) = g_{ji}^*(0) = 1$, в случае когда выполняются неравенства:

$$\sum_{t=0}^{T-1} \Big(\rho^t \pi_{ij}(t) + \lambda_{ii}(t+1)(\beta_{ij}(t) - \gamma_{ij}(t)) y_j^*(t)\Big) < 0,$$
$$\sum_{t=0}^{T-1} \Big(\rho^t \pi_{ji}(t) + \lambda_{jj}(t+1)(\beta_{ji}(t) - \gamma_{ji}(t)) y_i^*(t)\Big) < 0.$$

Принимая во внимание приведенное выше выражение для $y_i^*(t)$, в равновесии по Нэшу две фирмы i и j устанавливают в начальный момент времени связь при $\sum\limits_{t=0}^{T-1} \rho^t \pi_{ij}(t) < \pi_{ij}^*$ и $\sum\limits_{t=0}^{T-1} \rho^t \pi_{ji}(t) < \pi_{ji}^*$. Положив $\phi_i(t) = \lambda_{ii}(t)$, приходим к выражениям (2.11)–(2.12).

Существование ненулевых множителей Лагранжа гарантирует для каждой фирмы ненулевое инвестиционное поведение, определяемое согласно (2.13), в связи с чем гессиан функции Лагранжа $\mathcal{L}_i$ отрицательно определен:

$$-2 \sum_{t=1}^{T-1} \rho^t u_i^*(t) c_i^*(t) - \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t \big[2(u_i^*(t))^2 + \varepsilon_i(t)(y_i^*(t))^2\big] < 0.$$

Следовательно можно заключить, что s^* будет равновесием по Нэшу в классе программных стратегий для модели $\Gamma_{01}^{\mathrm{en}}$. $\square$

2.3.2. Модель с единоразовыми издержками сетевых связей

Перейдем к рассмотрению модели, в которой фирмы также выбирают и реализуют свое сетевое поведение единоразово в начальный момент времени, но несут при этом издержки от прямых связей в сети только в этот момент. Сетевое поведение фирм в такой модели может характеризоваться издержками сетевого взаимодействия, которые необходимы лишь для предложения и/или формирования связей в условиях долгосрочного сетевого взаимодействия фирм. В качестве примера можно привести ситуацию в которой пара фирм решают совместно инвестировать в какой-либо проект с продолжительностью $\mathcal{T}$, при этом издержки самого сетевого взаимодействия здесь сводятся к издержкам от переговоров, составления и подписания общего договора между фирмами.

Назовем динамической моделью конкуренции с эндогенным формированием долгосрочного сетевого взаимодействия и единоразовыми издержками связи в сети динамическую игру, имеющую следующую запись в нормальной форме

$$\Gamma_{02}^{\text{en}} = \left\langle \mathcal{N}, \{\mathcal{S}_i\}_{i\in\mathcal{N}}, \{\mathcal{J}_i\}_{i\in\mathcal{N}} \right\rangle,$$

здесь $\mathcal{S}_i$ — множество стратегий фирмы i, которые предписывают ей однозначным образом допустимое поведение вида (2.10), а функция выигрышей $\mathcal{J}_i(s) = J_i(c_0, \mathbf{g}_0, u, y)$ — дисконтированная прибыль фирмы i, определяемая согласно следующему функционалу

$$J_i(c_0, \mathbf{g}_0, u, y) = \\ = \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t \left[\left(p - c_i(t) - \sum_{j=1}^{n} u_j(t) \right) u_i(t) - \frac{\varepsilon_i(t)}{2} y_i^2(t) \right] - \sum_{j\neq i} \pi_{ij}(0) g_{ij}(0) g_{ji}(0) + \\ + \rho^T (\eta_i - \eta c_i(T)), \quad (2.14)$$

где из сетевого поведения фирм в момент $t = 0$ формируется сеть $\mathbf{g}_0$, а динамика удельных издержек задается рекуррентным соотношением (2.9) при $c(0) = c_0$.

Равновесие по Нэшу в модели Γ_{02}^{en} обеспечивается следующей теоремой.

Теорема 2.3. *В модели Γ_{02}^{en} набор стратегий $s^{**} = (s_1^{**}, \ldots, s_n^{**})$, компоненты которого*

$$s_i^{**}(t) = \begin{cases} (g_i^{**}(0), u_i^{**}(0), y_i^{**}(0)), & t = 0, \\ (u_i^{**}(t), y_i^{**}(t)), & t \in \mathcal{T} \setminus \{0, T\}, \end{cases}$$

для $i \in \mathcal{N}$, имеет вид

$$g_{ij}^{**}(0) = \begin{cases} 1, & \pi_{ij}(0) < \pi_{ij}^{**}, \pi_{ji}(0) < \pi_{ji}^{**}, \quad j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}, \\ 0, & \textit{иначе}, \end{cases} \quad (2.15)$$

$$u_i^{**}(t) = \frac{p - (n+1)c_i^{**}(t) + \sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{**}(t)}{n+1},$$

$$y_i^{**}(t) = -\frac{\alpha_i(t)}{\rho^t \varepsilon_i(t)} \phi_i(t+1), \quad (2.16)$$

где

$$\pi_{ij}^{**} = \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t \frac{\varepsilon_i(t)}{\alpha_i(t)} \left(\beta_{ij}(t) - \gamma_{ij}(t) \right) y_i^{**}(t)\, y_j^{**}(t),$$

издержки $c_i^{**}(t)$ *удовлетворяют соотношению* (2.9) *с начальным условием* $c_i^{**}(0) = c_{i0}$, *а* $\phi_i(t)$ *удовлетворяет соотношению* $\phi_i(t) = -\rho^t u_i^{**}(t) + \delta\phi_i(t+1)$ *с граничным условием* $\phi_i(T) = -\rho^T \eta$ *для фирмы* i.

Доказательство. Поскольку текущая прибыль фирмы также зависит от сетевого поведения, выбираемого в начальный момент времени, используем схожий доказательству теоремы 2.2 подход. Сначала предположим, что вместо n-мерного бинарного вектора $g_i(0)$ фирма $i \in \mathcal{N}$ в начальный момент времени выбирает n-мерный вектор $z_i(0)$ с компонентами $z_{ij}(0) \in [0,1]$. Пусть $z(0) = (z_1(0), \ldots, z_n(0))$, σ_i — стратегия фирмы i, а $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ — набор стратегий.

Полагая стратегии всех фирм, кроме i, фиксированными, для поиска наилучшего ответа на эти стратегии фирма i должна максимизировать (2.14) с учетом (2.9). Выпишем функцию Лагранжа:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_i(c, z(0), u, y, \lambda_i) = \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t \left[\left(p - \sum_{j=1}^{n} u_j(t) \right) u_i(t) - c_i(t) u_i(t) - \frac{\varepsilon_i(t)}{2} y_i^2(t) \right] - \\
- \sum_{j \neq i} \pi_{ij}(0) z_{ij}(0) z_{ji}(0) + \rho^T \left(\eta_i - \eta c_i(T) \right) - \\
- \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(t+1) \Bigg[c_j(t+1) - \delta c_j(t) + \alpha_j(t) y_j(t) + \\
+ \sum_{r \neq j} \Big(\beta_{jr}(t) z_{jr}(0) z_{rj}(0) + \gamma_{jr}(t)(1 - z_{jr}(0) z_{rj}(0)) \Big) y_r(t) \Bigg],
\end{aligned}
$$

где $\lambda_i = (\lambda_i(1), \ldots, \lambda_i(T))$ при $\lambda_i(t) = (\lambda_{i1}(t), \ldots, \lambda_{in}(t))$, $t \in \mathcal{T} \setminus \{0\}$, — набор множителей Лагранжа. Если набор стратегий σ^{**} является равновесием по Нэшу, то существуют ненулевые наборы λ_i, $i \in \mathcal{N}$, удовлетворяющие системе рекуррентных соотношений:

$$
z_{ij}^{**}(0) = \begin{cases} 1, & \left(\pi_{ij}(0) + \sum\limits_{t=0}^{T-1} \lambda_{ii}(t+1)(\beta_{ij}(t) - \gamma_{ij}(t)) y_j^{**}(t) \right) z_{ji}^{**}(0) < 0, \quad j \neq i, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}
$$

$$
u_i^{**}(t) = \frac{p - (n+1) c_i^{**}(t) + \sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{**}(t)}{n+1}, \qquad t \neq T,
$$

$$y_i^{**}(t) = -\frac{\alpha_i(t)}{\rho^t \varepsilon_i(t)} \lambda_{ii}(t+1), \qquad t \neq T,$$

$$\lambda_{ij}(t) = \begin{cases} -\rho^t u_i^{**}(t) + \delta \lambda_{ii}(t+1), & j = i, t \neq T, \\ -\rho^T \eta, & j = i, t = T, \\ 0, & j \neq i, \end{cases}$$

$$c_i^{**}(t+1) = \delta c_i^{**}(t) - \alpha_i(t) y_i^{**}(t) - \sum_{j \neq i} \Big(\beta_{ij}(t) z_{ij}^{**}(0) z_{ji}^{**}(0) + \\ + \gamma_{ij}(t)(1 - z_{ij}^{**}(0) z_{ji}^{**}(0)) \Big) y_j^{**}(t), \quad t \neq T,$$

$$c_i^{**}(0) = c_{i0}.$$

Если σ^{**} является равновесием по Нэшу, то $s^{**} = \sigma^{**}$, где $g_i^{**}(0) = z_i^{**}(0)$. Так равновесие по Нэшу предписывает любой паре различных фирм i и j установить связь в начальный момент времени, то есть выбрать в качестве своего сетевого поведения $g_{ij}^{**}(0) = g_{ji}^{**}(0) = 1$, в случае когда справедливы неравенства

$$\pi_{ij}(0) + \sum_{t=0}^{T-1} \lambda_{ii}(t+1)(\beta_{ij}(t) - \gamma_{ij}(t)) y_j^{**}(t) < 0,$$

$$\pi_{ji}(0) + \sum_{t=0}^{T-1} \lambda_{jj}(t+1)(\beta_{ji}(t) - \gamma_{ji}(t)) y_i^{**}(t) < 0.$$

Принимая во внимание приведенное выше выражение для $y_i^{**}(t)$, в равновесии по Нэшу две фирмы i и j устанавливают в начальный момент времени связь при $\pi_{ij}(0) < \pi_{ij}^{**}$ и $\pi_{ji}(0) < \pi_{ji}^{**}$. Положив $\phi_i(t) = \lambda_{ii}(t)$, приходим к (2.15)–(2.16).

Поскольку существование ненулевых множителей Лагранжа гарантирует ненулевое инвестиционное поведение для каждой фирмы, в каждый момент времени $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$, то гессиан гессиан функции Лагранжа $\mathcal{L}_i$ оказывается отрицательно определенным:

$$-2 \sum_{t=1}^{T-1} \rho^t u_i^{**}(t) c_i^{**}(t) - \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t \Big(2 \big(u_i^{**}(t)\big)^2 + \varepsilon_i(t) \big(y_i^{**}(t)\big)^2 \Big) < 0.$$

Следовательно можно заключить, что s^{**} будет равновесием по Нэшу в классе программных стратегий для модели Γ_{02}^{en}. $\square$

2.4. Равновесие по Нэшу при одностороннем сетевом взаимодействии

Перейдем к правилу формирования одностороннего сетевого взаимодействия конкурирующих фирм, когда сетевая связь между парой фирм $i \in \mathcal{N}$ и $j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}$ становится ориентированной $((i,j) \neq (j,i))$ в $\mathbf{g}(t)$, при $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$. В таком случае условимся понимать под записью (i,j) дугу в $\mathbf{g}(t)$, указывающее на j как на фирму, от инвестиций которой фирма i получает эффект с коэффициентом $\beta_{ij}(t)$. Отметим, что для одностороннего формирования сетевого взаимодействия достаточно желания только одной фирмы, то есть если фирма i выбирает $g_{ij}(t) = 1$, тогда $(i,j) \in \mathbf{g}(t)$.

Отметим, что при переходе в рассмотренных ранее моделях Γ^{en}, Γ^{en}_{01}, и Γ^{en}_{02} от правила двухстороннего сетевого взаимодействия к одностороннему, методология поиска равновесия по Нэшу в классе программных стратегий фирм не меняется. Однако условие сетевого взаимодействия в равновесии принимает другой вид. Поскольку при одностороннем сетевом взаимодействии у фирм отсутствует необходимость ориентироваться на сетевое поведение своих конкурентов, то они могут его выбирать руководствуясь лишь собственной заинтересованностью в своих возможных сетевых связях. В связи с этим укажем далее лишь те компоненты моделей в условиях равновесия по Нэшу, которые приняли вид отличный от того, что они имели в равновесии при двухстороннем сетевом взаимодействии фирм.

■ *При равновесии по Нэшу в классе программных стратегий для модели* Γ^{en} *с односторонним сетевым взаимодействием, имеем*:

$$J_i\left(c_0, \mathbf{g}^{\mathrm{N}}, u^{\mathrm{N}}, y^{\mathrm{N}}\right) = \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t \left[\left(p - c_i^{\mathrm{N}}(t) - \sum_{j=1}^{n} u_j^{\mathrm{N}}\right) u_i^{\mathrm{N}} - \frac{\varepsilon_i(t)}{2}\left(y_i^{\mathrm{N}}(t)\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \sum_{j \neq i} \pi_{ij}(t) g_{ij}^{\mathrm{N}}(t)\right] + \rho^T\left(\eta_i - \eta c_i^{\mathrm{N}}(T)\right),$$

$$c_i^{\mathrm{N}}(t+1) = \delta c_i^{\mathrm{N}}(t) - \alpha_i(t) y_i^{\mathrm{N}}(t) - \sum_{j \neq i}\Big(\beta_{ij}(t)\, g_{ij}^{\mathrm{N}}(t) + \gamma_{ij}(t)\left(1 - g_{ij}^{\mathrm{N}}(t)\right)\Big) y_j^{\mathrm{N}}(t),$$

$$g_{ij}^{\mathrm{N}}(t) = \begin{cases} 1, & \pi_{ij}(t) < \dfrac{\varepsilon_i(t)(\beta_{ij}(t) - \gamma_{ij}(t))}{\alpha_i(t)}\, y_i^{\mathrm{N}}(t)\, y_j^{\mathrm{N}}(t), \quad j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

■ *При равновесии по Нэшу в классе программных стратегий для модели* $\Gamma_{01}^{\mathrm{en}}$ *с односторонним сетевым взаимодействием, имеем*:

$$J_i\left(c_0, \mathbf{g}^*, u^*, y^*\right) = \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t \left[\left(p - c_i^*(t) - \sum_{j=1}^{n} u_j^* \right) u_i^* - \frac{\varepsilon_i(t)}{2} \left(y_i^*(t)\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \sum_{j \neq i} \pi_{ij}(t) g_{ij}^*(0) \right] + \rho^T \left(\eta_i - \eta c_i^*(T)\right),$$

$$c_i^*(t+1) = \delta c_i^*(t) - \alpha_i(t)\, y_i^*(t) - \sum_{j \neq i} \Big(\beta_{ij}(t) g_{ij}^*(0) + \gamma_{ij}(t)(1 - g_{ij}^*(0)) \Big)\, y_j^*(t),$$

$$g_{ij}^*(0) = \begin{cases} 1, & \sum\limits_{t=0}^{T-1} \rho^t \pi_{ij}(t) < \sum\limits_{t=0}^{T-1} \rho^t \dfrac{\varepsilon_i(t)}{\alpha_i(t)} (\beta_{ij}(t) - \gamma_{ij}(t))\, y_i^*(t)\, y_j^*(t), \quad j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

■ *При равновесии по Нэшу в классе программных стратегий для модели* $\Gamma_{02}^{\mathrm{en}}$ *с односторонним сетевым взаимодействием, имеем*:

$$J_i\left(c_0, \mathbf{g}^{**}, u^{**}, y^{**}\right) = \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t \left[\left(p - c_i^{**}(t) - \sum_{j=1}^{n} u_j^{**} \right) u_i^{**} - \frac{\varepsilon_i(t)}{2} \left(y_i^{**}(t)\right)^2 \right] -$$
$$- \sum_{j \neq i} \pi_{ij}(0) g_{ij}^{**}(0) + \rho^T \left(\eta_i - \eta c_i^{**}(T)\right),$$

$$c_i^{**}(t+1) = \delta c_i^{**}(t) - \alpha_i(t)\, y_i^{**}(t) - \sum_{j \neq i} \Big(\beta_{ij}(t) g_{ij}^{**}(0) + \gamma_{ij}(t)(1 - g_{ij}^{**}(0)) \Big)\, y_j^{**}(t),$$

$$g_{ij}^{**}(0) = \begin{cases} 1, & \pi_{ij}(0) < \sum\limits_{t=0}^{T-1} \rho^t \dfrac{\varepsilon_i(t)}{\alpha_i(t)} \left(\beta_{ij}(t) - \gamma_{ij}(t)\right) y_i^{**}(t)\, y_j^{**}(t), \quad j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Далее перейдем к численному моделированию, которое позволит сравнить результаты получаемые при равновесии по Нэшу в классе программных стратегий фирм при общих входных параметрах для всех рассмотренных моделей.

2.5. Численное моделирование и сравнительный анализ результатов

В качестве входных параметров для иллюстрации теоретических результатов в разделах 2.2 – 2.4 воспользуемся теми же данными, что были использованы для численного моделирования в первой главе (раздел 1.3). Напомним их:

$n = 4$	параметры общие для всех фирм					
$T = 3$	$\eta_i = 100\,000$	$\delta = 1.07$	постоянные во времени			
$p = 500$	$\eta = 1000$	$\rho = 0.95$	$\alpha = 1.8$	$\beta = 1$	$\gamma = 0.5$	$\varepsilon = 1000$
	$c_{i0} = 100,\ i = \overline{1,n}$					

Матрицы издержек возможных связей фирм в сетевых структурах будем считать общими для всех моделей и постоянными во времени:

$$\Pi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 800 & 800 & 800 \\ 800 & 0 & 800 & 800 \\ 900 & 900 & 0 & 900 \\ 1100 & 1100 & 1100 & 0 \end{pmatrix}.$$

В таблице 2.1 для каждой фирмы $i \in \mathcal{N}$ приведены ее текущее допустимое поведение $\big(g_i^{\mathrm{N}}(t), u_i^{\mathrm{N}}(t), y_i^{\mathrm{N}}(t)\big)$ в равновесии по Нэшу для класса программных стратегий, $s^{\mathrm{N}} = \big(g^{\mathrm{N}}, u^{\mathrm{N}}, y^{\mathrm{N}}\big)$, и соответствующие удельные издержки $c_i^{\mathrm{N}}(t)$. При этом таблица содержит в себе результаты численного моделирования, полученные для модели Γ^{en} при двух различных вариантах формирования стуктуры сети — двухстороннее и одностороннее сетевое взаимодействие. В таблице также представлены предписываемые равновесием по Нэшу сетевые структуры $\mathbf{g}^{\mathrm{N}}(t)$ взаимодействия фирм, текущие цены за единицу товара на рынке сбыта $P^{\mathrm{N}}(t) \coloneqq p - \sum\limits_{j \in \mathcal{N}} u_j^{\mathrm{N}}(t)$ и прибыли фирм $J_i^{\mathrm{N}} \coloneqq J_i(c_0, g^{\mathrm{N}}, u^{\mathrm{N}}, y^{\mathrm{N}})$.

Структуру аналогичную таблице 2.1 имеют также таблицы 2.2 – 2.3, в которых представлены результаты численного моделирования соответствующие моделям долгосрочного сетевого взаимодействия, $\Gamma_{01}^{\mathrm{en}}$ и $\Gamma_{02}^{\mathrm{en}}$.

Результаты, представленные в таблицах 2.1 – 2.3, получены с помощью реализации условий теорем 2.1 – 2.3 в программе [26]. Все величины в таблицах данного раздела округлены до третьего знака после запятой.

Таблица 2.1. **Равновесие по Нэшу s^{N} в программных стратегиях и соответствующие ему прибыли и удельные издержки фирм, а также текущие цены за единицу товара в модели Γ^{en}**

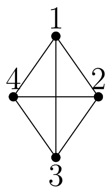
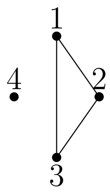
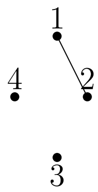
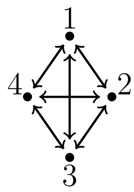
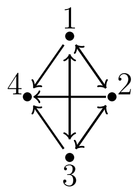
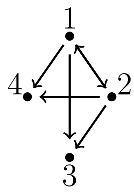
Γ^{en}:	двухстороннее взаимодействие				одностороннее взаимодействие			
t :	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
$\mathbf{g}^{\mathrm{N}}(t)$				–				–
$g_1^{\mathrm{N}}(t)$	(0,1,1,1)	(0,1,1,0)	(0,1,0,0)	–	(0,1,1,1)	(0,1,1,1)	(0,1,1,1)	–
$g_2^{\mathrm{N}}(t)$	(1,0,1,1)	(1,0,1,0)	(1,0,0,0)	–	(1,0,1,1)	(1,0,1,1)	(1,0,1,1)	–
$g_3^{\mathrm{N}}(t)$	(1,1,0,1)	(1,1,0,0)	(0,0,0,0)	–	(1,1,0,1)	(1,1,0,1)	(0,0,0,0)	–
$g_4^{\mathrm{N}}(t)$	(1,1,1,0)	(0,0,0,0)	(0,0,0,0)	–	(1,1,1,0)	(0,0,0,0)	(0,0,0,0)	–
$u_1^{\mathrm{N}}(t)$	80.000	80.564	81.193	–	80.000	80.564	81.570	–
$u_2^{\mathrm{N}}(t)$	80.000	80.564	81.193	–	80.000	80.564	81.570	–
$u_3^{\mathrm{N}}(t)$	80.000	80.564	81.193	–	80.000	80.564	81.570	–
$u_4^{\mathrm{N}}(t)$	80.000	80.561	79.309	–	80.000	80.561	78.745	–
$y_1^{\mathrm{N}}(t)$	2.046	1.877	1.710	–	2.046	1.878	1.710	–
$y_2^{\mathrm{N}}(t)$	2.046	1.877	1.710	–	2.046	1.878	1.710	–
$y_3^{\mathrm{N}}(t)$	2.046	1.877	1.710	–	2.046	1.878	1.710	–
$y_4^{\mathrm{N}}(t)$	2.043	1.874	1.710	–	2.042	1.873	1.710	–
$c_1^{\mathrm{N}}(t)$	100.000	97.183	95.917	96.133	100.000	97.182	94.977	93.417
$c_2^{\mathrm{N}}(t)$	100.000	97.183	95.917	96.133	100.000	97.182	94.977	93.417
$c_3^{\mathrm{N}}(t)$	100.000	97.183	95.917	96.988	100.000	97.182	94.977	95.982
$c_4^{\mathrm{N}}(t)$	100.000	97.186	97.801	99.004	100.000	97.186	97.801	99.004
$P^{\mathrm{N}}(t)$	180.000	177.747	177.110	–	180.000	177.747	176.545	–
J_1^{N}	12 103.590				12 280.904			
J_2^{N}	12 103.590				12 280.904			
J_3^{N}	11 602.535				11 662.737			
J_4^{N}	10 723.252				10 645.829			

Таблица 2.2. **Равновесие по Нэшу s^* в программных стратегиях и соответствующие ему прибыли и удельные издержки фирм, а также текущие цены за единицу товара в модели $\Gamma_{01}^{\mathrm{en}}$**

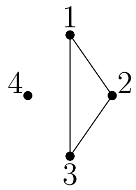
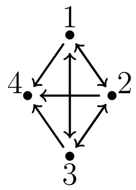
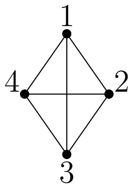
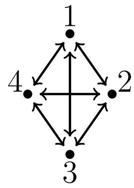
$\Gamma_{01}^{\mathrm{en}}$:	двухстороннее взаимодействие				одностороннее взаимодействие			
t :	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
$\mathbf{g}_0^*$				–				–
$g_1^*(t)$	$(0,1,1,0)$	–	–	–	$(0,1,1,1)$	–	–	–
$g_2^*(t)$	$(1,0,1,0)$	–	–	–	$(1,0,1,1)$	–	–	–
$g_3^*(t)$	$(1,1,0,0)$	–	–	–	$(1,1,0,1)$	–	–	–
$g_4^*(t)$	$(0,0,0,0)$	–	–	–	$(0,0,0,0)$	–	–	–
$u_1^*(t)$	80.000	80.771	81.416	–	80.000	81.181	82.230	–
$u_2^*(t)$	80.000	80.771	81.416	–	80.000	81.181	82.230	–
$u_3^*(t)$	80.000	80.771	81.416	–	80.000	81.181	82.230	–
$u_4^*(t)$	80.000	78.711	77.325	–	80.000	78.095	76.102	–
$y_1^*(t)$	2.047	1.877	1.710	–	2.049	1.879	1.710	–
$y_2^*(t)$	2.047	1.877	1.710	–	2.049	1.879	1.710	–
$y_3^*(t)$	2.047	1.877	1.710	–	2.049	1.879	1.710	–
$y_4^*(t)$	2.036	1.870	1.710	–	2.033	1.868	1.710	–
$c_1^*(t)$	100.000	98.205	97.010	96.448	100.000	97.182	94.977	93.418
$c_2^*(t)$	100.000	98.205	97.010	96.448	100.000	97.182	94.977	93.418
$c_3^*(t)$	100.000	98.205	97.010	96.448	100.000	97.182	94.977	93.418
$c_4^*(t)$	100.000	100.266	101.101	102.535	100.000	100.268	101.106	102.540
$P^*(t)$	180.000	178.976	178.426	–	180.000	178.362	177.208	–
J_1^*	11 973.707				12 466.088			
J_2^*	11 973.707				12 466.088			
J_3^*	11 403.207				11 610.338			
J_4^*	10 454.336				10 199.379			

Таблица 2.3. **Равновесие по Нэшу s^{**} в программных стратегиях и соответствующие ему прибыли и удельные издержки фирм, а также текущие цены за единицу товара в модели Γ_{02}^{en}**

Γ_{02}^{en}:	двухстороннее взаимодействие				одностороннее взаимодействие			
t :	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
$\mathbf{g}_0^{**}$				–				–
$g_1^{**}(t)$	$(0,1,1,0)$	–	–	–	$(0,1,1,1)$	–	–	–
$g_2^{**}(t)$	$(1,0,1,0)$	–	–	–	$(1,0,1,1)$	–	–	–
$g_3^{**}(t)$	$(1,1,0,0)$	–	–	–	$(1,1,0,1)$	–	–	–
$g_4^{**}(t)$	$(1,1,1,0)$	–	–	–	$(1,1,1,0)$	–	–	–
$u_1^{**}(t)$	80.000	80.564	81.005	–	80.000	80.564	81.005	–
$u_2^{**}(t)$	80.000	80.564	81.005	–	80.000	80.564	81.005	–
$u_3^{**}(t)$	80.000	80.564	81.005	–	80.000	80.564	81.005	–
$u_4^{**}(t)$	80.000	80.564	81.005	–	80.000	80.564	81.005	–
$y_1^{**}(t)$	2.045	1.877	1.710	–	2.045	1.877	1.710	–
$y_2^{**}(t)$	2.045	1.877	1.710	–	2.045	1.877	1.710	–
$y_3^{**}(t)$	2.045	1.877	1.710	–	2.045	1.877	1.710	–
$y_4^{**}(t)$	2.045	1.877	1.710	–	2.045	1.877	1.710	–
$c_1^{**}(t)$	100.000	97.182	94.976	93.417	100.000	97.182	94.976	93.417
$c_2^{**}(t)$	100.000	97.182	94.976	93.417	100.000	97.182	94.976	93.417
$c_3^{**}(t)$	100.000	97.182	94.976	93.417	100.000	97.182	94.976	93.417
$c_4^{**}(t)$	100.000	97.182	94.976	93.417	100.000	97.182	94.976	93.417
$P^{**}(t)$	180.000	177.745	175.981	–	180.000	177.745	175.981	–
J_1^{**}	16 648.020				16 648.020			
J_2^{**}	16 648.020				16 648.020			
J_3^{**}	16 348.020				16 348.020			
J_4^{**}	15 748.020				15 748.020			

Для начала отметим, что результаты, представленные в разделе 1.4, остаются справедливыми и в случае эндогенного формирования сетевого взаимодействия фирм, что непосредственно можно проверить по данным таблиц 2.1 – 2.3.

Далее введем понятие верхней границы издержек связи, которые готова платить фирма $i \in \mathcal{N}$ за связь с фирмой $j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}$ в момент времени $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$. Назовем верхней границей допустимых издержек связи фирмы i с фирмой j в сетевой структуре $\mathbf{g}(t)$ минимальную величину издержек связи (i, j), начиная с которой условие сетевого взаимодействия в равновесии по Нэшу для фирмы i в отношении фирмы j предписывает ей выбор $g_{ij}^{\mathrm{N}}(t) = 0$. Для рассматриваемых моделей верхние границы допустимых издержек связи (сетевого взаимодействия или просто взаимодействия) задаются величинами $\pi_{ij}^{\mathrm{N}}(t)$, $\pi_{ij}^{*}(t)$ и $\pi_{ij}^{**}(t)$. Обратимся к таблице 2.4 с величинами $\pi_{ij}^{\mathrm{N}}(t)$ для модели Γ^{en}.

Таблица 2.4. **Верхние границы допустимых издержек взаимодействия в модели** Γ^{en}

t	Γ^{en}	двухстороннее сотрудничество				одностороннее сотрудничество			
	$i \backslash j$	1	2	3	4	1	2	3	4
0	1	0	1162.573	1162.573	1160.709	0	1163.320	1163.320	1160.520
	2	1162.573	0	1162.573	1160.709	1163.320	0	1163.320	1160.520
	3	1162.573	1162.573	0	1160.709	1163.320	1163.320	0	1160.520
	4	1160.709	1160.709	1160.709	0	1160.520	1160.520	1160.520	0
1	1	0	978.705	978.705	977.025	0	979.376	979.376	976.857
	2	978.705	0	978.705	977.025	979.376	0	979.376	976.857
	3	978.705	978.705	0	977.025	979.376	979.376	0	976.857
	4	977.025	977.025	977.025	0	976.857	976.857	976.857	0
2	1	0	812.250	812.250	812.250	0	812.250	812.250	812.250
	2	812.250	0	812.250	812.250	812.250	0	812.250	812.250
	3	812.250	812.250	0	812.250	812.250	812.250	0	812.250
	4	812.250	812.250	812.250	0	812.250	812.250	812.250	0

Анализируя данные таблиц 2.1 и 2.4 для модели Γ^{en} при двухстороннем сетевом взаимодействии фирм, отметим, что, поскольку выбранные параметры $(\varepsilon_i(t), \alpha_i(t), \beta_{ij}(t), \gamma_{ij}(t))$ модели являются общими для фирм, то $\pi_{ij}^{\mathrm{N}}(t) = \pi_{ji}^{\mathrm{N}}(t)$ для всех моментов времени $t \in \mathcal{T} \backslash \{T\}$. Убывание объемов инвестиций во времени согласно таблице 2.1 влечет уменьшение верхних границ допустимых издержек сетевой связи, при которых фирмы будут заинтересованы во взаимодействии. Тогда в равновесии по Нэшу фирмы i и j устанавливают связь в текущий момент времени, если $\pi_{ij}^{\mathrm{N}}(t) > \max\{\pi_{ij}(t), \pi_{ji}(t)\}$. Согласно найденному равновесию s^{N} в момент времени $t = 0$ формируются связи между любыми парами фирм, так как даже издержки связи фирмы 4, которые являются наибольшими по сравнению с другими фирмами ($\pi_{4j}(t) = 1100$, $j = 1, 2, 3$, $t = 0, 1, 2$), не превышают наименьшей границы издержек связи $\pi_{4j}^{\mathrm{N}}(0) = 1160.709$. При $t = 1$ фирмы 1, 2 и 3 сохраняют сетевые связи между собой, но связи с фирмой 4 исключаются. Это происходит из-за изменения верхней границы допустимых издержек связи для фирмы 4, поскольку $\pi_{4j}^{\mathrm{N}}(0) = 977.025$, а значит $\pi_{4j}(1) < \pi_{4j}^{\mathrm{N}}(0)$, что делает связи фирмы 4 с другими фирмами невыгодными. Наконец, при $t = 2$ в сетевой структуре $\mathbf{g}(2)$ наблюдается лишь связь $(1, 2)$, поскольку фирмам 3 и 4 становится невыгодно взаимодействовать: их издержки связи (900 и 1100 соответственно) оказываются выше верхней границы допустимых издержек связи, равной 812.250.

Для модели Γ^{en} при одностороннем сетевом взаимодействии фирм описать сетевое поведение фирм, опираясь на данные таблиц 2.1 и 2.4, можно аналогично тому, как это было сделано при двухстороннем сетевом взаимодействии. Однако в данном случае сетевое поведение фирм более персонализировано в том смысле, что согласно правилу формирования связей в сети при одностороннем взаимодействии фирмы могут не ориентироваться на верхние границы допустимых издержек связи конкурентов при выборе своего прямого окружения в каждой сетевой структуре. Поясним это, вернувшись к таблицам 2.1 и 2.4. Обратим внимание на сетевые структуры таблицы 2.1 при одностороннем сетевом взаимодействии фирм, а именно на следующие связи: при $t = 1$ связи (1, 4), (2, 4) и (3, 4), а при $t = 2$ связи (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4). Так например, при $t = 1$ фирма 1 может позволить себе связь $(1, 4)$ так как $\pi_{14}(1) = 800 < 976.857 = \pi_{14}^{\mathrm{N}}(1)$, поэтому выбирает $g_{14}^{\mathrm{N}}(1) = 1$, несмотря на то, что фирма 4 позволить себе связь $(4, 1)$ в сетевой структуре $\mathbf{g}^{\mathrm{N}}(1)$ не может, так как $\pi_{41}(1) = 1100 > 976.857 = \pi_{41}^{\mathrm{N}}(1)$. При этом фирма 1 получает эффект $\beta_{14}(1)\, y_4^{\mathrm{N}}(1) = 1.873$ в текущий момент времени от инвестиций фирмы 4 при одностороннем взаимодействии в сети, а при двухстороннем сетевом взаимодействии эффект фирмы 1 от инвестиций фирмы 4 составит $\gamma_{14}(1)\, y_4^{\mathrm{N}}(1) = 0.937$. Что обеспечивает улучшение конкурентного положения фирмы 1 на рынке по сравнению с ее конкурентным положением при двухстороннем взаимодействии фирм.

Для того чтобы оценить изменение конкурентоспособности фирм при различных правилах формирования сетевого взаимодействия обратимся к таблице 2.5, в которой рассмотрим изменение конкурентоспособности фирм в равновесии по Нэшу в моменты времени $t = 1, 2, 3$. Для этого введем в рассмотрение величину $\Delta c_{ij}^{\mathrm{N}}(t) := c_j^{\mathrm{N}}(t) - c_i^{\mathrm{N}}(t)$, которая будет характеризовать конкурентное преимущество фирмы i относительно фирмы j в равновесии по Нэшу: если $\Delta c_{ij}^{\mathrm{N}}(t) > 0$, то i имеет конкурентное преимущество относительно j, что оценивается величиной $\Delta c_{ij}^{\mathrm{N}}(t)$, а если $\Delta c_{ij}^{\mathrm{N}}(t) < 0$, то j имеет конкурентное преимущество относительно i, что оценивается величиной $|\Delta c_{ij}^{\mathrm{N}}(t)| = \Delta c_{ji}^{\mathrm{N}}(t)$. Также отметим для каждой фирмы i величину $\mathcal{D}_i^{\mathrm{N}}(t) := \left(\max_{j\in\mathcal{N}} c_j^{\mathrm{N}}(t) - c_i^{\mathrm{N}}(t)\right) / \sum_{j=1}^{n} c_j^{\mathrm{N}}(t) \times 100$, характеризующую в процентном выражении текущую конкурентоспособность фирмы i относительно всех фирм на рынке.

Таблица 2.5. **Соотношение конкурентоспособности и конкурентное положение фирм на рынке в равновесии s^{N} для модели Γ^{en}**

t	Γ^{en}	двухстороннее сотрудничество					одностороннее сотрудничество				
	i	$\Delta c_{i1}^{\mathrm{N}}(t)$	$\Delta c_{i2}^{\mathrm{N}}(t)$	$\Delta c_{i3}^{\mathrm{N}}(t)$	$\Delta c_{i4}^{\mathrm{N}}(t)$	$\mathcal{D}_i^{\mathrm{N}}(t)$	$\Delta c_{i1}^{\mathrm{N}}(t)$	$\Delta c_{i2}^{\mathrm{N}}(t)$	$\Delta c_{i3}^{\mathrm{N}}(t)$	$\Delta c_{i4}^{\mathrm{N}}(t)$	$\mathcal{D}_i^{\mathrm{N}}(t)$
1	1	-	0	0	0.003	0.001	-	0	0	0.004	0.001
	2	0	-	0	0.003	0.001	0	-	0	0.004	0.001
	3	0	0	-	0.003	0.001	0	0	-	0.004	0.001
	4	-0.003	-0.003	-0.003	-	0.000	-0.004	-0.004	-0.004	-	0.000
2	1	-	0	0	1.884	0.489	-	0	0	2.824	0.738
	2	0	-	0	1.884	0.489	0	-	0	2.824	0.738
	3	0	0	-	1.884	0.489	0	0	-	2.824	0.738
	4	-1.884	-1.884	-1.884	-	0.000	-2.824	-2.824	-2.824	0	0.000
3	1	-	0	0.855	2.871	0.739	-	0	2.565	5.587	1.463
	2	0	-	0.855	2.871	0.739	0	-	2.565	5.587	1.463
	3	-0.855	-0.855	-	2.016	0.519	-2.565	-2.565	-	3.022	0.792
	4	-2.871	-2.871	-2.016	-	0.000	-5.587	-5.587	-3.022	-	0.000

Основываясь на данных табл. 2.5 можно заключить, что сетевые связи, которые есть при одностороннем взаимодействии фирм в равновесии для Γ^{en} и не наблюдаются в аналогичном положении при двухстороннем взаимодействии, оказывают значительное влияние на изменение конкурентного положения фирм на рынке. Это делает такие связи весьма ценными, поскольку в рассматриваемом случае наблюдается также более высокое конкурентное преимущество у всех фирм над фирмой 4, при этом фирмы 1, 2 и 3 могут позволить себе бо́льшие издержки сотрудничества, а фирма 4 только меньшие.

Для моделей Γ_{01}^{en} и Γ_{02}^{en} при двухстороннем сетевом взаимодействии фирм, обращаясь к данных таблиц 2.2 – 2.3 заключаем, что равновесие по Нэшу предписывает фирмам i и j установить связь в начальный момент времени, если $\pi_{ij}^{*} > \max\left\{\sum\limits_{t=0}^{T-1}\rho^t\pi_{ij}(t),\ \sum\limits_{t=0}^{T-1}\rho^t\pi_{ji}(t)\right\}$ или $\pi_{ij}^{**} > \max\{\pi_{ij}(0),\ \pi_{ji}(0)\}$ соответственно. При этом, дисконтированные суммы издержек связи для каждой фирмы равны 2282.000, 2282.000, 2567.250 и 3137.750 соответственно. Сравнивая эти значения с данными таблицы 2.6, видим, что фирме 4 нецелесообразно устанавливать связи с другими фирмами, в то время как остальные фирмы устанавливают между собой все связи. А в модели Γ_{02}^{en}, поскольку издержки связи любой фирмы не превосходят границу издержек связи равную 2824.706, в начальный момент времени формируются связи между всеми парами фирм.

Таблица 2.6. **Верхние границы допустимых издержек взаимодействия в Γ_{01}^{en} и Γ_{02}^{en}**

	двухстороннее сотрудничество				одностороннее сотрудничество			
$i \backslash j$	1	2	3	4	1	2	3	4
				модель Γ_{01}^{en}				
1	0	2826.619	2826.619	2817.107	0	2830.405	2830.405	2816.144
2	2826.619	0	2826.619	2817.107	2830.405	0	2830.405	2816.144
3	2826.619	2826.619	0	2817.107	2830.405	2830.405	0	2816.144
4	2817.107	2817.107	2817.107	0	2816.144	2816.144	2816.144	0
				модель Γ_{02}^{en}				
1	0	2824.706	2824.706	2824.706	0	2824.706	2824.706	2824.706
2	2824.706	0	2824.706	2824.706	2824.706	0	2824.706	2824.706
3	2824.706	2824.706	0	2824.706	2824.706	2824.706	0	2824.706
4	2824.706	2824.706	2824.706	0	2824.706	2824.706	2824.706	0

Результаты наблюдений, которые сделаны для модели Γ^{en} при двухстороннем и одностороннем сетевом взаимодействии, можно перенести и на случай моделей $\Gamma^{\mathrm{en}}_{01}$ и $\Gamma^{\mathrm{en}}_{02}$, ввиду чего не приводятся.

Сравнивая результаты, полученные при двухстороннем сетевом взаимодействии фирм для моделей Γ^{en} (табл. 2.1) и $\Gamma^{\mathrm{en}}_{01}$ (табл. 2.2), можно оценить преимущества и недостатки краткосрочного и долгосрочного поддержания связей в сети соответственно при одинаковых условиях, представленных входными параметрами моделей. Сравнение проведем по следующим показателям:

■ **Прибыли фирм.** Долгосрочное сетевое взаимодействие снижает прибыль каждой фирмы, при этом для фирм, у которых в долгосрочном взаимодействии связи имеются (фирмы 1, 2, 3), снижение прибыли составляет примерно 1%, а вот для фирмы 4 подобное снижение прибыли составляет примерно 2,5%. Можно заключить, что прибыли фирм, у которых количество сетевых связей не зависит от продолжительности взаимодействия, оказываются менее чувствительными к продолжительности сетевого взаимодействия.

■ **Объем производства и цена товара.** Поскольку в рассматриваемых моделях объем товара, поставляемый на рынок, линейно связан с текущей ценой за единицы товара, то целесообразно оценить эти показатели вместе. Так при краткосрочном взаимодействии фирмы производят суммарно больший объем товара, что сказывается на уменьшение цены на товар. Каждая фирма в результате производит больший объем товара при краткосрочном взаимодействии с конкурентами, чем в случае долгосрочного. Однако отметим, что сравниваемые ситуации разнятся на величину менее 1%.

■ **Объем инвестиционных вложений.** Наличие и количество сетевых связей заметно сказывается на инвестиционном поведении фирм. Так инвестиции фирм 1, 2 и 3 почти одинаковы для обоих вариантов продолжительности сетевого взаимодействия фирм. А для фирмы 4, которая при долгосрочном взаимодействии лишена связей в сети, оказывается выгоднее уменьшить объемы своих инвестиций, при $t = 0$ уменьшение составляет $y_4^{\mathrm{N}}(0) - y_4^*(0) = 0.007$, а при $t = 1$ имеем $y_4^{\mathrm{N}}(1) - y_4^*(1) = 0.004$. При этом незначительно больший объем инвестиций реализуют фирмы у которых при долгосрочном взаимодействии есть связи, в то время как фирме 4 выгоднее оказывается уменьшить общий объем своих инвестиций в равновесии. Таким образом, можно предположить, что на общий объем инвестиций каждой фирмы в большей степени влияет ее сетевое окружение, а не продолжительность взаимодействия.

■ **Соотношение конкурентоспособности и конкурентное положение фирм на рынке.** Согласно данным таблицы 2.5 можно отметить, что в равновесии по Нэшу при одностороннем сетевом взаимодействии, у фирм 1, 2 и 3 наблюдается более резкий рост их конкурентного положения на рынке чем в случае двухстороннего взаимодействия. В условиях чего указанным фирмам выгоднее когда сетевое взаимодействие имеет односторонний характер. Действительно, при двухстороннем сетевом взаимодействии имеем $\mathcal{D}_i(2) = 0.489$, где $i = 1, 2, 3$, а при одностороннем $\mathcal{D}_i(2) = 0.738$, для следующего момента, $t = 3$, имеем $\mathcal{D}_1(3) = \mathcal{D}_2(3) = 0.739, \mathcal{D}_3(3) = 0.519$ и $\mathcal{D}_1(3) = \mathcal{D}_2(3) = 1.463, \mathcal{D}_3(3) = 0.792$ соответственно. Чего нельзя сказать о фирме 4, поскольку ее конкурентоспособность относительно других фирм при одностороннем сетевом взаимодействии становится меньше, чем в случае двухстороннего сетевого взаимодействия. Таким образом для фирмы 4 случай двухстороннего сетевого взаимодействия фирм оказывается предпочтительнее, поскольку в этом случае изменение роста конкурентного преимущества у других фирм происходит медленнее.

В результате анализа моделей конкуренции с эндогенным формированием сетевого взаимодействия равновесное сетевое поведение фирм оказалось схожим в моделях Γ^{en}, Γ^{en}_{01} и Γ^{en}_{02}: фирма предлагает связь в сетевой структуре своему конкуренту, если затраты на установление и поддержание (или дисконтированная сумма таких затрат) этой связи не превзойдут определенного порога. Отметим, что при отсутствии издержек на формирование и поддержание связей $\pi_{ij}(t) = 0$ для любых $i, j \in \mathcal{N}$ и $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ фирмы устанавливают все возможные связи в равновесии по Нэшу, что справедливо для каждой модели.

В завершении хотелось бы отметить, что для рассмотренных моделей с эндогенным формированием постоянной сетевой структуры взаимодействия полученные равновесия по Нэшу обеспечивают «устойчивость» сетей во времени — ни одна фирма с течением времени не будет готова отказываться от имеющейся у нее сетевой связи, как и не будет стремиться сформировать связь, которая не предписана ей равновесием по Нэшу.

2.6. Основные результаты и выводы по второй главе

В результате анализа моделей конкуренции с эндогенным формированием сетевой структуры взаимодействия получены равновесия по Нэшу в классе программных стратегий. Установлен функциональный вид равновесного производственного и инвестиционного поведения каждой фирмы, а также найдены условия, при выполнении которых фирма заинтересована в формировании сетевого взаимодействия с определенными конкурентами. Несмотря на то, что в данной главе исследования проанализированы три динамические модели с эндогенным формированием сетевых структур, в которых связи могут быть как двухсторонними, так и односторонними, найденные в них равновесия по Нэшу обладают рядом сходств:

1. Для всех моделей структура производственного и инвестиционного поведения фирмы в равновесии одинакова и совпадает с соответствующей структурой при экзогенном сетевом взаимодействии.

2. Условия равновесного сетевого поведения также схожи: фирма предлагает сетевое взаимодействие, если затраты на его установление и поддержание (или дисконтированная сумма таких затрат) не превзойдут определенного порога (верхней границы допустимых издержек сетевого взаимодействия).

3. При отсутствии издержек на формирование и поддержание связей в сети $\pi_{ij}(t) = 0$ фирмы устанавливают все возможные связи в равновесии по Нэшу, что справедливо для каждой модели.

В завершении отметим, что в моделях с эндогенным формированием постоянной сетевой структуры полученные равновесия по Нэшу обеспечивают «устойчивость» формируемых структур сетевого взаимодействия — ни одна фирма с течением времени не будет готова отказываться от какой-либо из имеющихся у нее связей в сети и при этом не будет стремиться к формированию связи, которая не была ей предписана равновесием по Нэшу.

Основные результаты исследования, описанные в данной главе, представлены в публикации [28].

Глава 3.
Адаптация и применение теоретико-игровых моделей к анализу равновесного поведения конкурирующих фирм

В данной главе продолжится поиск и анализ равновесного поведения конкурирующих фирм в динамике, но уже с учетом некоторых условий распространенных на практике. Для этого инвестиционно-сетевая модификация олигополии Курно с эндогенным формированием сетевого взаимодействия, рассмотренная в главе 2, расширяется за счет следующих допущений:

1. Для каждой фирмы $i \in \mathcal{N}$ будем иметь $u_i(t) = u_i \in \mathbb{U}_i$ при $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$, то есть объем производства каждой фирмы постоянен во времени;

2. Для каждой пары фирм i и $j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}$, и каждого момента $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ будем подразумевать, что $\beta_{ij}(t) > \gamma_{ij}(t) \geqslant 0$. То есть сетевая связь между фирмами обеспечивает увеличение их положительного влияния на удельные издержки друг друга, и потому может считаться сотрудничеством, а сами фирмы i и j при этом будем называть партнерами;

3. Фирмы могут реализовывать свое инвестиционное поведение в двух вариантах, которые будем называть переменным (рискованным) — $y_i(t) \in \mathbb{Y}_i$, и постоянным (осторожным) — $y_i(t) = y_i \in \mathbb{Y}_i$, при $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$.

Представленные допущения позволяют перейти от теоретико-игровых моделей второй главы к практико-ориентированным моделям, оставаясь при этом в общей концепции исследуемых моделей и адаптируя полученные теоретические результаты к анализу рыночной конкуренции в условиях приближенных к практике. Действительно, на практике постоянный объем производства фирмы на небольшом горизонте планирования является естественным: при экономическом планировании производства нередко на фирме составляется и утверждается производственный план, задающий объем производства фирмы на некоторый период времени. Производственный план упрощает экономический анализ как деятельности самой фирмы, так и ее рынка сбыта, а также оставляет возможность эффективного менеджмента. Как правило, производственный план фирмы предписывает ей производство постоянного объема товара, что объясняется как стабилизацией, так и оптимизацией привлекаемых и расходуемых ресурсов, например, численностью рабочего персонала (человеческий капитал). Также стоит отметить, что постоянный объем производства фирм обеспечивает на рассматриваемом горизонте планирования равномерное насыщение рынка товаром при постоянной стоимости единицы товара для потребителя. Согласно рассматриваемой концепции моделей, такой объем товара определяется величиной $\sum_{j=1}^{n} u_j$, а цена за единицу товара — величиной $P(t) = p - \sum_{j=1}^{n} u_j > 0$, при $p > \sum_{j=1}^{n} u_j$. Второе из представленных допущений также представляется довольно естественным в силу того, что любое сотрудничество, как правило, всегда подразумевает взаимодействие в условиях, которые формально регламентированы и юридически оформлены, что выступает своеобразным гарантом безопасности и выгоды сотрудничества. Третье допущение позволяет учесть сразу два варианта распространенного на практике инвестиционного поведения, а также сравнить в этих вариантах равновесное по Нэшу поведение конкурирующих фирм. Более подробные описание и анализ этих вариантов инвестиционного поведения будет представлено соответственно в разделах 3.1 и 3.2.

Отметим еще одну особенность данной главы: в основе поиска равновесного поведения фирм будет лежать программная информационная структура. Для каждой модели будут представлены соответствующие условия поведения фирм в равновесии по Нэшу для класса программных стратегий, что позволяет фирмам выбирать свое поведение с минимальным требованием к набору информации необходимой для принятия решения. Это ограничение обусловлено двумя аспектами. Во-первых, как было показано в первой главе, прибыли фирм в ситуациях равновесия по Нэшу для классов программных и позиционных стратегий могут быть достаточно близки. Во-вторых на практике достаточно сложно обладать знанием в каждый момент времени о том, каковы удельные издержки конкурентов, поскольку чаще всего такая информация является внутренней для каждой фирмы и не подлежит разглашению. В тоже время программная информация структура позволяет каждой фирме вовлеченной в игровой процесс, строить на временно́м множестве $\mathcal{T}$ календарный финансово-хозяйственный план, стабилизирующий ее экономическую деятельность и способствующий организации эффективного менеджмента при информации, которая всегда доступна.

Таким образом, теоретико-игровые модели динамической конкуренции с сетевым сотрудничеством фирм, исследованию которых посвящена данная глава, оказываются достаточно востребованными на практике, а также с экономической точки зрения более приемлемыми для анализа реальных экономических процессов.

3.1. Анализ краткосрочного сетевого сотрудничества конкурентов

В контексте динамического процесса, наибольший интерес к эндогенному сетевому сотрудничеству представляет возможность фирм перестраивать структуру сети в каждый момент принятия решения. Для того, чтобы это было целесообразным будем и дальше придерживаться сценариев, в которых фирмы реализуют свои инвестиционные вложения в каждый нетерминальный момент времени. При этом, рассмотрим два различных варианта инвестиционного поведения — когда инвестиционные вложения фирм реализуются в переменном и постоянном объемах.

3.1.1. Случай переменных объемов инвестирования

Согласно допущениям представленным в начале данной главы, каждая фирма $i \in \mathcal{N}$ планирует на множестве периодов времени $\mathcal{T}$ постоянный объем производства $u_i \in \mathbb{U}_i$, при этом $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{U}_1 \times \ldots \times \mathbb{U}_n$. Будем говорить, что рассматривается модель с постоянным производством и переменным (рискованным) инвестированием, в которой стратегия фирмы i предписывает ей однозначным образом в каждый момент принятия решения допустимое поведение вида $(g_i(t), u_i, y_i(t)) \in \mathbb{G}_i \times \mathbb{U}_i \times \mathbb{Y}_i$. Считая здесь и далее стратегию каждой фирмы функцией времени — подобно тому, как это делалось во второй главе, получаем, что $\mathcal{S}_i = \{s_i(t) \,|\, s_i(t) = (g_i(t), u_i, y_i(t))\,,\, t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}\}$ — множество допустимых стратегий фирмы i, $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathcal{S}_1 \times \ldots \times \mathcal{S}_n$ — ситуация, $y = (y(0), \ldots, y(T-1))$, $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t)) \in \mathbb{Y}_1 \times \ldots \times \mathbb{Y}_n$ при $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$. Динамика изменения состояния удельных издержек фирмы i при двухстороннем сотрудничестве фирм будет описываться уравнением (2.1), а ее дисконтированная прибыль следующим функционалом

$$
\begin{aligned}
J_i(c_0, \mathbf{g}, u, y) = \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t \Bigg[\left(p - \sum_{j=1}^{n} u_j \right) u_i - c_i(t) u_i - \frac{\varepsilon_i(t)}{2} y_i^2(t) - \\
- \sum_{j \neq i} \pi_{ij}(t) g_{ij}(t) g_{ji}(t) \Bigg] + \rho^T \left(\eta_i - \eta c_i(T) \right),
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

где $\mathbf{g} = \{\mathbf{g}(t)\}_{t=0}^{T-1}$ — набор сетевых структур двухстороннего сотрудничества, которые были сформованы в результате реализации всеми фирмами своего сетевого поведения в соответствующие моменты времени.

Обозначим представленную динамическую модель конкуренции с эндогенным формированием сетевого сотрудничества фирм при постоянном объеме производства и рискованном инвестиционном поведении за $\bar{\Gamma}^{\mathrm{en}}$. Равновесие по Нэшу в классе программных стратегий при двухстороннем сетевом сотрудничестве фирм для этой модели характеризуется следующей теоремой.

Теорема 3.1. *В модели $\bar{\Gamma}^{\mathrm{en}}$ равновесием по Нэшу в классе программных стратегий является набор стратегий $s^{\mathrm{N}} = \left(s_1^{\mathrm{N}}, \ldots, s_n^{\mathrm{N}}\right)$, компоненты которого $s_i^{\mathrm{N}}(t) = \left(g_i^{\mathrm{N}}(t), u_i^{\mathrm{N}}, y_i^{\mathrm{N}}(t)\right)$ для $i \in \mathcal{N}$, $t \neq T$ имеют вид:*

$$
g_{ij}^{\mathrm{N}}(t) = \begin{cases} 1, & \pi_{ij}(t) < \pi_{ij}^{\mathrm{N}}(t),\, \pi_{ji}(t) < \pi_{ji}^{\mathrm{N}}(t), \quad j \neq i, \\ 0, & \textit{иначе}, \end{cases}
\tag{3.2}
$$

$$
u_i^{\mathrm{N}} = \frac{p - \sum\limits_{\tau=0}^{T-1} \rho^\tau \left((n+1) c_i^{\mathrm{N}}(\tau) - \sum\limits_{j \in \mathcal{N}} c_j^{\mathrm{N}}(\tau) \right) \left(\sum\limits_{\tau=0}^{T-1} \rho^\tau \right)^{-1}}{n+1},
\tag{3.3}
$$

$$
y_i^{\mathrm{N}}(t) = -\frac{\alpha_i(t) \phi_i(t+1)}{\rho^t \varepsilon_i(t)},
\tag{3.4}
$$

где

$$
\pi_{ij}^{\mathrm{N}}(t) = \frac{\varepsilon_i(t)}{\alpha_i(t)} \left(\beta_{ij}(t) - \gamma_{ij}(t) \right) y_i^{\mathrm{N}}(t)\, y_j^{\mathrm{N}}(t),
\tag{3.5}
$$

$$
\phi_i(t) = \begin{cases} -\rho^t \left(u_i^{\mathrm{N}} \cdot \sum\limits_{\tau=0}^{T-t-1} (\rho\delta)^\tau + \eta (\rho\delta)^{T-t} \right), & t \neq T, \\ -\rho^T \eta, & t = T. \end{cases}
\tag{3.6}
$$

Удельные издержки $c_i^{\mathrm{N}}(t)$ удовлетворяют (2.1) при заданном $c_i^{\mathrm{N}}(0) = c_{i0}$.

Доказательство. Для начала предположим, что в качестве своего сетевого поведения каждая фирма i выбирает n-мерный вектор $z_i(t)$ с компонентами $z_{ij}(t) \in [0,1]$. Пусть $z(t) = (z_1(t), \ldots, z_n(t))$, $z = (z(0), \ldots, z(T-1))$; σ_i — стратегия фирмы i, а $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ — набор стратегий. Тогда $\sigma_i(t) = (z_i(t), u_i, y_i(t))$. Зафиксируем стратегии всех фирм, кроме i. Для поиска наилучшего ответа на эти стратегии фирма i должна максимизировать (3.1) с учетом (2.1).
Введем в рассмотрение функцию Лагранжа

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_i(c, z, u, y, \lambda_i) = \\
&\quad = \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t \left[\left(p - c_i(t) - \sum_{j \in \mathcal{N}} u_j \right) u_i - \frac{\varepsilon_i(t)}{2} y_i^2(t) - \sum_{j \neq i} \pi_{ij}(t) z_{ij}(t) z_{ji}(t) \right] + \\
&\qquad + \rho^T (\eta_i - \eta c_i(T)) - \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{j \in \mathcal{N}} \lambda_{ij}(t+1) \Bigg[c_j(t+1) - \delta c_j(t) + \alpha_j(t) y_j(t) + \\
&\qquad\qquad + \sum_{r \neq j} \Big(\beta_{jr}(t) z_{jr}(t) z_{rj}(t) + \gamma_{jr}(t)(1 - z_{jr}(t) z_{rj}(t)) \Big) y_r(t) \Bigg],
\end{aligned}$$

где $\lambda_i = (\lambda_i(1), \ldots, \lambda_i(T))$ при $\lambda_i(t) = (\lambda_{i1}(t), \ldots, \lambda_{in}(t))$, $t \in \mathcal{T} \setminus \{0\}$, — набор множителей Лагранжа. Наилучший ответ фирмы i на фиксированные стратегии ее конкурентов — это стратегия, компоненты которой удовлетворяют следующей системе (с учетом линейности $\mathcal{L}_i$ по переменным $z_{ij}(t)$):

$$z_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & \big(\rho^t \pi_{ij}(t) + \lambda_{ii}(t+1)(\beta_{ij}(t) - \gamma_{ij}(t)) y_j(t)\big) z_{ji}(t) < 0, \quad j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases},$$

$$u_i = \frac{1}{2} \left(p - \sum_{j \neq i} u_j - \sum_{\tau=0}^{T-1} \rho^\tau c_i(\tau) \cdot \left(\sum_{\tau=0}^{T-1} \rho^\tau \right)^{-1} \right),$$

$$y_i(t) = -\frac{\alpha_i(t) \lambda_{ii}(t+1)}{\rho^t \varepsilon_i(t)},$$

где

$$\lambda_{ij}(t) = \begin{cases} -\rho^t u_i + \delta \lambda_{ii}(t+1), & j = i, t \neq T, \\ -\rho^T \eta, & j = i, t = T, \\ 0, & j \neq i. \end{cases} \tag{3.7}$$

Следовательно, если σ^{N} — равновесие по Нэшу, то $s^{\mathrm{N}} = \sigma^{\mathrm{N}}$ и $g_i^{\mathrm{N}} = z_i^{\mathrm{N}}$. Так, равновесие по Нэшу предписывает фирмам i и j установить партнерскую связь в текущий момент $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ при одновременном выполнении неравенств

$$\rho^t \pi_{ij}(t) + \lambda_{ii}(t+1)(\beta_{ij}(t) - \gamma_{ij}(t)) y_j^{\mathrm{N}}(t) < 0 \text{ и}$$
$$\rho^t \pi_{ji}(t) + \lambda_{jj}(t+1)(\beta_{ji}(t) - \gamma_{ji}(t)) y_i^{\mathrm{N}}(t) < 0.$$

Из рекуррентного соотношения (3.7), положив $\phi_i(t) = \lambda_{ii}(t)$, в равновесии получаем (3.5) и (3.6), что приводит к выражениям (3.2), (3.3) и (3.4).

Поскольку гессиан функции Лагранжа $\mathcal{L}_i$ отрицательно определен:

$$-2u_i^{\mathrm{N}} \cdot \sum_{t=1}^{T-1} \rho^t c_i^{\mathrm{N}}(t) - \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t \Big(2 \left(u_i^{\mathrm{N}}\right)^2 + \varepsilon_i(t) \left(y_i^{\mathrm{N}}(t)\right)^2 \Big) < 0,$$

то остается заключить, что s^{N} будет равновесием по Нэшу в модели $\bar{\Gamma}^{\mathrm{en}}$. □

Анализируя найденное равновесие по Нэшу в классе программных стратегий фирм, сделаем два замечания. Во-первых, в отличие от модели Γ^{en}, в которой текущие объемы производства определялись текущими удельными издержками фирм, в модели $\bar{\Gamma}^{\mathrm{en}}$ с постоянным производством (но переменным инвестированием) объем производства каждой фирмы (3.3) выражается через взвешенные средние издержки фирм на рассматриваемом горизонте (вес в момент t полагается равным ρ^t, то есть текущие издержки дисконтируются на начало игры). А во-вторых, соотношение (3.6) в равновесии по Нэшу задает линейную связь между текущим уровнем инвестиций фирмы и ее объемом производства:

$$y_i^{\mathrm{N}}(t) = \begin{cases} \rho \dfrac{\alpha_i(t)}{\varepsilon_i(t)} \left(u_i^{\mathrm{N}} \cdot \displaystyle\sum_{\tau=0}^{T-t-2} (\rho\delta)^\tau + \eta(\rho\delta)^{T-t-1} \right), & t \neq T-1, \\ \rho\eta \dfrac{\alpha_i(T-1)}{\varepsilon_i(T-1)}, & t = T-1. \end{cases} \tag{3.8}$$

Так, при постоянных во времени величинах $\alpha_i(t)$ и $\varepsilon_i(t)$, объем инвестиций фирмы в равновесии по Нэшу $y_i^{\mathrm{N}}(t)$ будет монотонно убывающей функцией времени при $u_i^{\mathrm{N}} > \eta(1 - \rho\delta)$. Более того, постоянные во времени параметры $\beta_{ij}(t)$ и $\gamma_{ij}(t)$ приводят к монотонному убыванию верхних границ допустимых издержек сетевого сотрудничества $\pi_{ij}^{\mathrm{N}}(t)$ в (3.5), при которых фирмы готовы сотрудничать.

Другими словами последнее означает, что количество партнерских связей в сети не увеличивается с течением времени.

Следствие 3.1 (из теоремы 3.1)**.** *Пусть* $\alpha_i(t) = \alpha(t)$ *и* $\varepsilon_i(t) = \varepsilon(t)$ *для любой фирмы* $i \in \mathcal{N}$. *Тогда в модели* $\bar{\Gamma}^{\text{en}}$ *при реализации равновесия по Нэшу, для произвольных фирм* i *и* $j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}$ *следующие три условия эквивалентны:*

$$\frac{\sum\limits_{\tau=0}^{T-1} \rho^\tau c_i^{\text{N}}(\tau)}{\sum\limits_{\tau=0}^{T-1} \rho^\tau} < \frac{\sum\limits_{\tau=0}^{T-1} \rho^\tau c_j^{\text{N}}(\tau)}{\sum\limits_{\tau=0}^{T-1} \rho^\tau} \Leftrightarrow u_i^{\text{N}} > u_j^{\text{N}} \Leftrightarrow y_i^{\text{N}}(t) > y_j^{\text{N}}(t), \ t \neq T-1.$$

Доказательство. Согласно (3.3) в равновесии по Нэшу разность объемов производства совпадает со взвешенной разностью текущих издержек, то есть

$$u_i^{\text{N}} - u_j^{\text{N}} = \sum_{\tau=0}^{T-1} \rho^\tau \big(c_j^{\text{N}}(\tau) - c_i^{\text{N}}(\tau)\big) \Big/ \sum_{\tau=0}^{T-1} \rho^\tau,$$

а линейное соотношение (3.8) позволяет связать разность объемов производства с текущими объемами инвестиций в момент времени $t \in \mathcal{T} \setminus \{T-1, T\}$:

$$y_i^{\text{N}}(t) - y_j^{\text{N}}(t) = \rho\eta \, \frac{\alpha(t)}{\varepsilon(t)} \left(u_i^{\text{N}} - u_j^{\text{N}}\right) \sum_{\tau=0}^{T-t-2} (\rho\delta)^\tau.$$

Дополнительно отметим, что в условиях следствия справедливо равенство

$$y_i^{\text{N}}(T-1) = y_j^{\text{N}}(T-1) = \rho\eta \, \frac{\alpha(T-1)}{\varepsilon(T-1)}.$$

□

Подобно тому как было показано в разделе 2.4 для модели $\bar{\Gamma}^{\text{en}}$ при одностороннем сетевом сотрудничестве фирм достаточно просто изменить в соответствии уравнение динамики удельных издержек, функциональный вид прибыли фирм и условия их сетевого сотрудничества в равновесии по Нэшу. В связи с чем в данной главе будем придерживаться акцента лишь на условие сетевого сотрудничества в равновесии по Нэшу для класса программных стратегий фирм, представляя его в виде следствия из соответствующей теоремы о равновесии при двухстороннем сотрудничестве фирм и приводя без доказательства.

Следствие 3.2 (из теоремы 3.1, одностороннее сотрудничество в модели $\bar{\Gamma}^{\mathrm{en}}$). *Если положить, что сотрудничество фирм носит односторонний характер, то равновесное поведение фирм в части производственного и инвестиционного поведения сохраняется и определяется согласно* (3.3) – (3.4), *а сетевое поведение фирмы $i \in \mathcal{N}$ в равновесии по Нэшу приобретает следующий вид:*

$$g_{ij}^{\mathrm{N}}(t) = \begin{cases} 1, & \pi_{ij}(t) < \dfrac{\varepsilon_i(t)}{\alpha_i(t)}(\beta_{ij}(t) - \gamma_{ij}(t))\, y_i^{\mathrm{N}}(t)\, y_j^{\mathrm{N}}(t), \\ 0, & \textit{иначе}, \end{cases} \qquad j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}.$$

3.1.2. Случай постоянных объемов инвестирования

Перейдем к рассмотрению модели, в которой фирмы реализуют свои инвестиционные вложения равными объемами (взносами), то есть инвестиционное поведение каждой фирмы постоянно во времени. Актуальность рассматриваемой модели обусловлена подходом в инвестиционной деятельности, основная идея которого заключается в усреднении стоимости инвестиционных вложений при колебаниях рынка, что предохраняет инвесторов от значительных потерь и потому зачастую на практике называется осторожным. Другой пример такого инвестиционного поведения встречается в случае, когда под инвестициями можно понимать спонсирование, например, какого-либо исследовательской лаборатории. В таком случае, как правило, спонсорская поддержка также часто реализуется равными объемами на некотором интервале времени.

Как и ранее, стратегией фирмы $i \in \mathcal{N}$ назовем функцию $s_i(t)$ предписывающую ей однозначным образом в каждый момент принятия решения $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ допустимое поведение вида $(g_i(t), u_i, y_i) \in \mathbb{G}_i \times \mathbb{U}_i \times \mathbb{Y}_i$. Тогда множество стратегий фирмы i переопределим как $\mathcal{S}_i = \{s_i(t) \,|\, s_i(t) = (g_i(t), u_i, y_i)\,,\, t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}\}$, $s = (s_1, \ldots, s_n)$ — ситуация, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{Y}_1 \times \ldots \times \mathbb{Y}_n$ при $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$. Отметим, что сетевое поведение фирм при этом остается привязанным к моменту времени. Динамика изменения состояния удельных издержек фирмы i при двухстороннем сотрудничестве фирм в модели будет описываться уравнением

$$c_i(t+1) = \delta c_i(t) - \alpha_i(t) y_i - \sum_{j \neq i} \Big(\beta_{ij}(t) g_{ij}(t) g_{ji}(t) + \gamma_{ij}(t)(1 - g_{ij}(t) g_{ji}(t))\Big) y_j, \quad (3.9)$$

при $c_i(0) = c_{i0}$, а ее прибыль в соответствии, следующим функционалом

$$J_i(c_0, \mathbf{g}, u, y) = \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t \Bigg[\Big(p - \sum_{j=1}^{n} u_j \Big) u_i - c_i(t) u_i - \frac{\varepsilon_i(t)}{2} y_i^2 - \\ - \sum_{j \neq i} \pi_{ij}(t) g_{ij}(t) g_{ji}(t) \Bigg] + \rho^T (\eta_i - \eta c_i(T)).$$

Обозначим представленную динамическую модель конкуренции с эндогенным формированием сетевого сотрудничества фирм при постоянном объеме производства и осторожном инвестиционном поведении за $\bar{\bar{\Gamma}}^{\mathrm{en}}$. Равновесие по Нэшу в классе программных стратегий при двухстороннем сотрудничестве фирм для этой модели характеризуется следующей теоремой.

Теорема 3.2. *Равновесием по Нэшу в программных стратегиях для модели $\bar{\bar{\Gamma}}^{\mathrm{en}}$ является набор стратегий $\hat{s} = (\hat{s}_1, \ldots, \hat{s}_n)$, компоненты которого $\hat{s}_i(t) = (\hat{g}_i(t), \hat{u}_i, \hat{y}_i)$ для $i \in \mathcal{N}$ и $t \neq T$ имеют вид:*

$$\hat{g}_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & \pi_{ij}(t) < \hat{\pi}_{ij}(t),\, \pi_{ji}(t) < \hat{\pi}_{ji}(t), \quad j \neq i, \\ 0, & \textit{иначе}, \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\hat{u}_i = \frac{p - \sum\limits_{\tau=0}^{T-1} \rho^\tau \Big((n+1)\hat{c}_i(\tau) - \sum\limits_{j \in \mathcal{N}} \hat{c}_j(\tau) \Big) \cdot \Big(\sum\limits_{\tau=0}^{T-1} \rho^\tau \Big)^{-1}}{n+1}, \tag{3.11}$$

$$\hat{y}_i = -\frac{\sum\limits_{t=0}^{T-1} \alpha_i(t) \phi_i(t+1)}{\sum\limits_{t=0}^{T-1} \rho^t \varepsilon_i(t)}, \tag{3.12}$$

где

$$\hat{\pi}_{ij}(t) = \frac{\varepsilon_i(t)}{\alpha_i(t)} (\beta_{ij}(t) - \gamma_{ij}(t))\, \hat{y}_i\, \hat{y}_j, \tag{3.13}$$

$$\phi_i(t) = \begin{cases} -\rho^t \Big(\hat{u}_i \cdot \sum\limits_{\tau=0}^{T-t-1} (\rho\delta)^\tau + \eta(\rho\delta)^{T-t} \Big), & t \neq T, \\ -\rho^T \eta, & t = T. \end{cases}$$

Удельные издержки $\hat{c}_i(t)$ удовлетворяют (3.9) *при заданном $\hat{c}_i(0) = c_{i0}$.*

Доказательство. Доказательство данной теоремы во многом повторяет этапы доказательства теоремы 3.1, ввиду чего опускается. Отметим лишь, что поскольку гессиан функции Лагранжа $\mathcal{L}_i$ отрицательно определен:

$$-2\hat{u}_i \cdot \sum_{t=1}^{T-1} \rho^t \hat{c}_i(t) - \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t \Big(2\,(\hat{u}_i)^2 + \varepsilon_i(t)\,(\hat{y}_i)^2 \Big) < 0,$$

то остается заключить, что $\hat{s}$ будет равновесием по Нэшу в классе программных стратегий в модели $\bar{\bar{\bar{\Gamma}}}^{\mathrm{en}}$. $\square$

Приведенная теорема позволяет сделать ряд замечаний. Во-первых, существование ненулевых множителей Лагранжа гарантирует ненулевое инвестиционное поведение $\hat{y}_i$ каждой фирмы. Во-вторых, в равновесии по Нэшу также сохраняется линейная связь между объемом инвестиций фирмы и ее объемом производства, которая представляется в следующем виде

$$\hat{y}_i = \frac{\sum\limits_{t=0}^{T-2} \rho^{t+1} \Bigg(\hat{u}_i \cdot \sum\limits_{\tau=0}^{T-t-2} (\rho\delta)^{\tau} + \eta(\rho\delta)^{T-t-1} \Bigg) \alpha_i(t) + \rho^T \eta \alpha_i(T-1)}{\sum\limits_{\tau=0}^{T-1} \rho^t \varepsilon_i(t)}. \tag{3.14}$$

Постоянные во времени величины $\alpha_i(t)$, $\beta_{ij}(t)$, $\gamma_{ij}(t)$ и $\varepsilon_i(t)$ влекут постоянную верхнюю границу допустимых издержек сетевого сотрудничества $\hat{\pi}_{ij}(t)$ в (3.13), при превышении которой фирма i откажется от сотрудничества с фирмой j. Если подобное окажется справедливым для всех пар фирм, то в равновесии по Нэшу ни одна из установленных партнерских связей не будут разорвана с течением времени.

Следствие подобное следствию 3.1, связывающим соотношения между взвешенными средними издержками, объемами производств и инвестиций двух фирм, приведем без доказательства.

Следствие 3.3 (из теоремы 3.2)**.** *Пусть $\alpha_i(t) = \alpha$ и $\varepsilon_i(t) = \varepsilon$ для любой фирмы. Тогда в равновесии по Нэшу для произвольных фирм i и j следующие три условия эквивалентны:*

$$\frac{\sum\limits_{\tau=0}^{T-1} \rho^{\tau} \hat{c}_i(\tau)}{\sum\limits_{\tau=0}^{T-1} \rho^{\tau}} < \frac{\sum\limits_{\tau=0}^{T-1} \rho^{\tau} \hat{c}_j(\tau)}{\sum\limits_{\tau=0}^{T-1} \rho^{\tau}} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{u}_i > \hat{u}_j \quad \Leftrightarrow \quad \hat{y}_i > \hat{y}_j.$$

Приведем еще одно следствие, раскрывающее аспект одностороннего сетевого сотрудничества фирм в равновесии по Нэшу для модели $\bar{\bar{\Gamma}}^{\mathrm{en}}$.

Следствие 3.4 (из теоремы 3.2, одностороннее сотрудничество в модели $\bar{\bar{\Gamma}}^{\mathrm{en}}$). *Если положить, что сотрудничество фирм носит односторонний характер, то равновесное поведение фирм в части производственного и инвестиционного поведения сохраняется и определяется согласно* (3.11) – (3.12), *а сетевое поведение фирмы $i \in \mathcal{N}$ в равновесии по Нэшу приобретает следующий вид:*

$$\hat{g}_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & \pi_{ij}(t) < \dfrac{\varepsilon_i(t)}{\alpha_i(t)}(\beta_{ij}(t) - \gamma_{ij}(t))\,\hat{y}_i\,\hat{y}_j, \\ 0, & \textit{иначе}, \end{cases} \qquad j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}. \tag{3.15}$$

3.1.3. Численное моделирование равновесного поведения при краткосрочном сетевом сотрудничестве

Сравним результаты моделирования равновесия в Γ^{en} и $\bar{\Gamma}^{\mathrm{en}}$, оценив при этом насколько адаптация теоретической модели Γ^{en} оказывается приемлемой для практического применения в реальных условиях рыночной конкуренции. Также сравним и оценим два варианта инвестиционного поведения фирм, которые предусмотрены в практико-ориентированных игровых моделях $\bar{\Gamma}^{\mathrm{en}}$ и $\bar{\bar{\Gamma}}^{\mathrm{en}}$.

В качестве входных параметров для представления результатов численного моделирования равновесия по Нэшу в классе программных стратегий фирм по условиям теорем 3.1 – 3.2 используем параметры из второй главы (стр. 63). Используя указанные данные, представим результат моделирования равновесия $s^{\mathrm{N}} = \left(g^{\mathrm{N}}, u^{\mathrm{N}}, y^{\mathrm{N}}\right)$ или $\hat{s} = (\hat{g}, \hat{u}, \hat{y})$ для моделей $\bar{\Gamma}^{\mathrm{en}}$ и $\bar{\bar{\Gamma}}^{\mathrm{en}}$ в таблицах 3.1 – 3.2 соответственно. Эти таблицы имеют общую структуру и для каждой фирмы $i \in \mathcal{N}$ содержат ее допустимое поведение в равновесии, $\left(g_i^{\mathrm{N}}(t), u_i^{\mathrm{N}}, y_i^{\mathrm{N}}(t)\right)$ и $(\hat{g}_i(t), \hat{u}_i, \hat{y}_i)$, при одностороннем и двухстороннем сотрудничестве фирм. Также в таблицах содержится информация о текущей цене товара, при рискованном инвестировании фирм — $P^{\mathrm{N}} := p - \sum_{j=1}^{n} u_j^{\mathrm{N}}$, и при осторожном — $\hat{P} := p - \sum_{j=1}^{n} \hat{u}_j$, текущие удельные издержки фирм, $c_i^{\mathrm{N}}(t)$ и $\hat{c}_i(t)$, и их равновесные прибыли, $J_i^{\mathrm{N}} := J_i\left(c_0, \mathbf{g}^{\mathrm{N}}, u^{\mathrm{N}}, y^{\mathrm{N}}\right)$ и $\hat{J}_i := J_i(c_0, \hat{\mathbf{g}}, \hat{u}, \hat{y})$. Для наглядности в таблицах проиллюстрированы сетевые структуры сотрудничества в ситуации равновесия, $\mathbf{g}^{\mathrm{N}}(t)$ и $\hat{\mathbf{g}}(t)$. Все величины в таблицах округлены до третьего знака после запятой.

Таблица 3.1. **Равновесие по Нэшу s^{N} в программных стратегиях и соответствующие ему прибыли и удельные издержки фирм, а также цены товара в модели $\bar{\Gamma}^{\mathrm{en}}$**

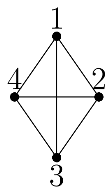
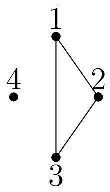
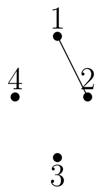
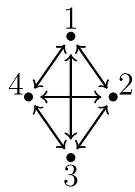
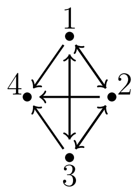
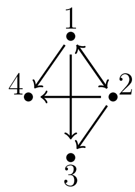
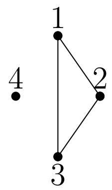
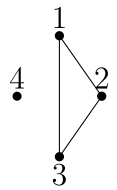
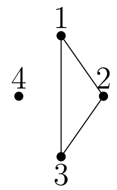
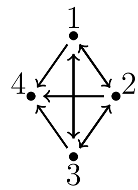
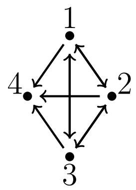
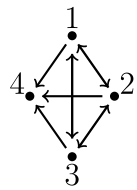
	двухстороннее сотрудничество				одностороннее сотрудничество			
$t:$	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
$\mathbf{g}^{\mathrm{N}}(t)$				–				–
$g_1^{\mathrm{N}}(t)$	(0,1,1,1)	(0,1,1,0)	(0,1,0,0)	–	(0,1,1,1)	(0,1,1,1)	(0,1,1,1)	–
$g_2^{\mathrm{N}}(t)$	(1,0,1,1)	(1,0,1,0)	(1,0,0,0)	–	(1,0,1,1)	(1,0,1,1)	(1,0,1,1)	–
$g_3^{\mathrm{N}}(t)$	(1,1,0,1)	(1,1,0,0)	(0,0,0,0)	–	(1,1,0,1)	(1,1,0,1)	(0,0,0,0)	–
$g_4^{\mathrm{N}}(t)$	(1,1,1,0)	(0,0,0,0)	(0,0,0,0)	–	(1,1,1,0)	(0,0,0,0)	(0,0,0,0)	–
u_1^{N}	80.564	80.564	80.564	–	80.683	80.683	80.683	–
u_2^{N}	80.564	80.564	80.564	–	80.683	80.683	80.683	–
u_3^{N}	80.564	80.564	80.564	–	80.683	80.683	80.683	–
u_4^{N}	79.969	79.969	79.969	–	79.791	79.791	79.791	–
$y_1^{\mathrm{N}}(t)$	2.045	1.876	1.710	–	2.045	1.876	1.710	–
$y_2^{\mathrm{N}}(t)$	2.045	1.876	1.710	–	2.045	1.876	1.710	–
$y_3^{\mathrm{N}}(t)$	2.045	1.876	1.710	–	2.045	1.876	1.710	–
$y_4^{\mathrm{N}}(t)$	2.043	1.875	1.710	–	2.042	1.875	1.710	–
$c_1^{\mathrm{N}}(t)$	100.000	97.188	95.924	96.141	100.000	97.187	94.986	93.426
$c_2^{\mathrm{N}}(t)$	100.000	97.188	95.924	96.141	100.000	97.187	94.986	93.426
$c_3^{\mathrm{N}}(t)$	100.000	97.188	95.924	96.996	100.000	97.187	94.986	95.991
$c_4^{\mathrm{N}}(t)$	100.000	97.189	97.803	99.007	100.000	97.189	97.804	99.007
P^{N}	178.338	178.338	178.338	–	177.980	177.980	177.980	–
J_1^{N}	12 099.364				12 276.380			
J_2^{N}	12 099.364				12 276.380			
J_3^{N}	11 598.308				11 658.213			
J_4^{N}	10 717.991				10 638.375			

Таблица 3.2. **Равновесие по Нэшу $\hat{s}$ в программных стратегиях и соответствующие ему прибыли и удельные издержки фирм, а также цены товара в модели $\bar{\bar{\Gamma}}^{\text{en}}$**

	двухстороннее сотрудничество				одностороннее сотрудничество			
$t:$	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
$\hat{\mathbf{g}}(t)$				–				–
$\hat{g}_1(t)$	(0,1,1,0)	(0,1,1,0)	(0,1,1,0)	–	(0,1,1,1)	(0,1,1,1)	(0,1,1,1)	–
$\hat{g}_2(t)$	(1,0,1,0)	(1,0,1,0)	(1,0,1,0)	–	(1,0,1,1)	(1,0,1,1)	(1,0,1,1)	–
$\hat{g}_3(t)$	(1,1,0,0)	(1,1,0,0)	(1,1,0,0)	–	(1,1,0,1)	(1,1,0,1)	(1,1,0,1)	–
$\hat{g}_4(t)$	(1,1,1,0)	(0,0,0,0)	(0,0,0,0)	–	(0,0,0,0)	(0,0,0,0)	(0,0,0,0)	–
$\hat{u}_1$	80.589	80.589	80.589	–	80.961	80.961	80.961	–
$\hat{u}_2$	80.589	80.589	80.589	–	80.961	80.961	80.961	–
$\hat{u}_3$	80.589	80.589	80.589	–	80.961	80.961	80.961	–
$\hat{u}_4$	78.725	78.725	78.725	–	78.166	78.166	78.166	–
$\hat{y}_1$	1.883	1.883	1.883	–	1.883	1.883	1.883	–
$\hat{y}_2$	1.883	1.883	1.883	–	1.883	1.883	1.883	–
$\hat{y}_3$	1.883	1.883	1.883	–	1.883	1.883	1.883	–
$\hat{y}_4$	1.879	1.879	1.879	–	1.878	1.878	1.878	–
$\hat{c}_1(t)$	100.000	98.906	97.736	96.484	100.000	97.965	95.788	93.458
$\hat{c}_2(t)$	100.000	98.906	97.736	96.484	100.000	97.965	95.788	93.458
$\hat{c}_3(t)$	100.000	98.906	97.736	96.484	100.000	97.965	95.788	93.458
$\hat{c}_4(t)$	100.000	100.793	101.642	102.550	100.000	100.794	101.644	102.553
$\hat{P}$	179.508	179.508	179.508	–	178.951	178.951	178.951	–
$\hat{J}_1$	11 921.435				12 401.633			
$\hat{J}_2$	11 921.435				12 401.633			
$\hat{J}_3$	11 350.935				11 545.883			
$\hat{J}_4$	10 454.836				10 207.999			

Дополнительно представим таблицу 3.3 и 3.4 с указанием верхних границ допустимых издержек сетевого сотрудничества фирм в моделях $\bar{\Gamma}^{\text{en}}$ и $\bar{\bar{\Gamma}}^{\text{en}}$.

Таблица 3.3. **Верхние границы допустимых издержек сотрудничества в модели $\bar{\Gamma}^{\text{en}}$**

t	$\bar{\Gamma}^{\text{en}}$	двухстороннее сотрудничество				одностороннее сотрудничество			
	$i \backslash j$	1	2	3	4	1	2	3	4
0	1	0	1161.331	1161.331	1160.166	0	1161.797	1161.797	1160.049
	2	1161.331	0	1161.331	1160.166	1161.797	0	1161.797	1160.049
	3	1161.331	1161.331	0	1160.166	1161.797	1161.797	0	1160.049
	4	1160.166	1160.166	1160.166	0	1160.049	1160.049	1160.049	0
1	1	0	977.583	977.583	977.053	0	977.795	977.795	977.000
	2	977.583	0	977.583	977.053	977.795	0	977.795	977.000
	3	977.583	977.583	0	977.053	977.795	977.795	0	977.000
	4	977.053	977.053	977.053	0	977.000	977.000	977.000	0
2	1	0	812.250	812.250	812.250	0	812.250	812.250	812.250
	2	812.250	0	812.250	812.250	812.250	0	812.250	812.250
	3	812.250	812.250	0	812.250	812.250	812.250	0	812.250
	4	812.250	812.250	812.250	0	812.250	812.250	812.250	0

Таблица 3.4. **Верхние границы допустимых издержек сотрудничества в модели $\bar{\bar{\Gamma}}^{\text{en}}$**

t	$\bar{\bar{\Gamma}}^{\text{en}}$	двухстороннее сотрудничество				одностороннее сотрудничество			
	$i \backslash j$	1	2	3	4	1	2	3	4
0, 1, 2	1	0	984.555	984.555	982.821	0	985.247	985.247	982.647
	2	984.555	0	984.555	982.821	985.247	0	985.247	982.647
	3	984.555	984.555	0	982.821	985.247	985.247	0	982.647
	4	982.821	982.821	982.821	0	982.647	982.647	982.647	0

Согласно данным из таблиц 3.1 – 3.4 можно объяснить сетевое поведение фирм в равновесии для практико-ориентированных моделей $\bar{\Gamma}^{\text{en}}$ и $\bar{\bar{\Gamma}}^{\text{en}}$ как при одностороннем, так и при двухстороннем сетевом сотрудничестве фирм, аналогично тому, как это было сделано в разделе 2.5 для теоретико-игровой модели Γ^{en}, ввиду чего здесь это опустим.

Оценим результаты моделирования равновесного по Нэшу поведения в моделях Γ^{en} и $\bar{\Gamma}^{\text{en}}$. Как можно видеть из таблиц 2.1 и 3.1, сетевые структуры сотрудничества независимо от их вида (двухстороннее или одностороннее) сохраняются. Отличительной особенностью осторожного инвестиционного поведения фирм является то, что верхние границы допустимых издержек сотрудничества оказываются постоянными во времени (см. таблицу 3.4), что представляется естественным исходя из условия сетевого сотрудничества (3.15) и постоянных объемов инвестиций в равновесии, а также постоянных во времени сетевых параметрах. При этом отметим, что суммарный объем инвестиционных вложений[1] фирм при переходе от переменного объема производства к постоянному (или от модели Γ^{en} к $\bar{\Gamma}^{\text{en}}$) меняется незначительно:

- в модели Γ^{en} при двухстороннем сетевом сотрудничестве фирм имеем

$$\sum_{t=0}^{2} y_1^{\text{N}}(t) = \sum_{t=0}^{2} y_2^{\text{N}}(t) = \sum_{t=0}^{2} y_3^{\text{N}}(t) = 5.633, \ \ \sum_{t=0}^{2} y_4^{\text{N}}(t) = 5.627,$$

  а при одностороннем сетевом сотрудничестве

$$\sum_{t=0}^{2} y_1^{\text{N}}(t) = \sum_{t=0}^{2} y_2^{\text{N}}(t) = \sum_{t=0}^{2} y_3^{\text{N}}(t) = 5.634, \ \ \sum_{t=0}^{2} y_4^{\text{N}}(t) = 5.625;$$

- в модели $\bar{\Gamma}^{\text{en}}$ при двухстороннем сетевом сотрудничестве фирм имеем

$$\sum_{t=0}^{2} y_1^{\text{N}}(t) = \sum_{t=0}^{2} y_2^{\text{N}}(t) = \sum_{t=0}^{2} y_3^{\text{N}}(t) = 5.631, \ \ \sum_{t=0}^{2} y_4^{\text{N}}(t) = 5.628,$$

  а при одностороннем сетевом сотрудничестве

$$\sum_{t=0}^{2} y_1^{\text{N}}(t) = \sum_{t=0}^{2} y_2^{\text{N}}(t) = \sum_{t=0}^{2} y_3^{\text{N}}(t) = 5.631, \ \ \sum_{t=0}^{2} y_4^{\text{N}}(t) = 5.627.$$

При этом изменение конкурентного положения фирм на рынке с течением времени ($\mathcal{D}_i(t), t = 1, 2, 3$) будет более заметно в модели Γ^{en} (табл. 2.5), чем в $\bar{\Gamma}^{\text{en}}$ (представлено на стр. 91).

Стоит отметить также, что результаты анализа, сделанные на основание численного моделирования равновесия в Γ^{en} остаются справедливыми и для модели $\bar{\Gamma}^{\text{en}}$, в связи с чем опускаются. Однако примечательным в данном примере

[1] Говоря о суммарном объеме инвестиций фирм, здесь и далее дисконтирование не учитывается.

является то, что прибыли фирм (как и суммарный объем производимого товара), полученные в равновесии для моделей Γ^{en} и $\bar{\Gamma}^{\mathrm{en}}$ при общих параметрах моделирования, оказываются достаточно близки. Действительно, оценим относительное изменение равновесной прибыли фирм в процентах, при ее переходе от переменного объема производства к постоянному. Используя для этого данные из таблиц 2.1 и 3.2, заключаем: для фирм 1 и 2 снижение прибыли составит 0.035 %, у фирмы 3 прибыль снизится на 0.036 %, а у фирмы 4 на 0.049 % — при двухстороннем сотрудничестве. Если же сотрудничество фирм предполагалось как одностороннее, то снижение равновесной прибыли у всех фирм становится не намного больше — у фирм 1 и 2 на 0.037 %, у фирмы 3 на 0.039 %, а фирмы 4 на 0.070 %. Столь незначительное снижение равновесной прибыли (меньше одного процента), с одной стороны, свидетельствует о том, что теоретические результаты полученные в главах 1 – 2 при сохранении концептуальных допущений оказываются вполне приемлемыми для анализа поведения конкурирующих фирм в реальных условиях, а с другой стороны, подтверждает рациональность выбора постоянного объема производства в поведении производителей товара.

Для сравнения вариантов инвестиционного поведения фирм перейдем к результатам моделирования равновесия для моделей $\bar{\Gamma}^{\mathrm{en}}$ и $\bar{\bar{\Gamma}}^{\mathrm{en}}$. Согласно тому, что при осторожном инвестировании верхние границы допустимых издержек сотрудничества фирм постоянны и ниже на начальный момент времени соответствующих границ при рискованном инвестировании — заключаем из таблиц 3.3 и 3.4, то для фирмы 4 в условии двухстороннего сотрудничества имеем $\pi_{4j}(0) = 1100 > 982.821 = \hat{\pi}_{4j}(0)$, при $j = 1, 2$ и 3. При условии одностороннего сотрудничества ситуация схожа, поскольку $\pi_{4j}(0) = 1100 > 982.647 = \hat{\pi}_{4j}(0)$. Поэтому независимо от характера сотрудничества в модели $\bar{\bar{\Gamma}}^{\mathrm{en}}$ у фирмы 4 нет партнеров. А в момент $t = 2$ при одностороннем сотрудничестве для фирмы 3 имеем $\pi_{3j}(2) < \min\{\hat{\pi}_{3j}(2), \hat{\pi}_{34}(2)\}$, $j = 1, 2$, что позволяет ей сотрудничать со всеми фирмами. Таким образом вид инвестиционного поведения может поразному влиять на партнерские отношения фирм, несмотря на то, что в моделях $\bar{\Gamma}^{\mathrm{en}}$ и $\bar{\bar{\Gamma}}^{\mathrm{en}}$ суммарные объемы инвестиций фирм достаточно близки:

- в модели $\bar{\Gamma}^{\mathrm{en}}$ при двухстороннем сетевом сотрудничестве фирм имеем

$$\sum_{t=0}^{2} y_1^{\mathrm{N}}(t) = \sum_{t=0}^{2} y_2^{\mathrm{N}}(t) = \sum_{t=0}^{2} y_3^{\mathrm{N}}(t) = 5.631, \quad \sum_{t=0}^{2} y_4^{\mathrm{N}}(t) = 5.628,$$

а при одностороннем сетевом сотрудничестве

$$\sum_{t=0}^{2} y_1^{\mathrm{N}}(t) = \sum_{t=0}^{2} y_2^{\mathrm{N}}(t) = \sum_{t=0}^{2} y_3^{\mathrm{N}}(t) = 5.631, \quad \sum_{t=0}^{2} y_4^{\mathrm{N}}(t) = 5.627;$$

- в модели $\bar{\bar{\Gamma}}^{\mathrm{en}}$ при двухстороннем сетевом сотрудничестве фирм имеем

$$\sum_{t=0}^{2} \hat{y}_1(t) = \sum_{t=0}^{2} \hat{y}_2(t) = \sum_{t=0}^{2} \hat{y}_3(t) = 5.649, \quad \sum_{t=0}^{2} \hat{y}_4(t) = 5.637,$$

а при одностороннем сетевом сотрудничестве

$$\sum_{t=0}^{2} \hat{y}_1(t) = \sum_{t=0}^{2} \hat{y}_2(t) = \sum_{t=0}^{2} \hat{y}_3(t) = 5.649, \quad \sum_{t=0}^{2} \hat{y}_4(t) = 5.634.$$

Перейдем к оценке изменения конкурентоспособности фирм, для этого составим таблицу 3.5, в которой $\widehat{\mathcal{D}}_i(t) := \left(\max\limits_{j\in\mathcal{N}} \hat{c}_j(t) - \hat{c}_i(t)\right) / \sum\limits_{j=1}^{n} \hat{c}_j(t) \times 100$, $t = 1, 2, 3$.

Таблица 3.5. **Соотношение конкурентоспособности и конкурентное положение фирм на рынке, при их равновесном поведении в модели $\bar{\bar{\Gamma}}^{\mathrm{en}}$**

t	$\bar{\bar{\Gamma}}^{\mathrm{en}}$	двухстороннее сотрудничество					одностороннее сотрудничество				
	i	$\Delta\hat{c}_{i1}(t)$	$\Delta\hat{c}_{i2}(t)$	$\Delta\hat{c}_{i3}(t)$	$\Delta\hat{c}_{i4}(t)$	$\widehat{\mathcal{D}}_i(t)$	$\Delta\hat{c}_{i1}(t)$	$\Delta\hat{c}_{i2}(t)$	$\Delta\hat{c}_{i3}(t)$	$\Delta\hat{c}_{i4}(t)$	$\widehat{\mathcal{D}}_i(t)$
1	1	-	0	0	1.887	0.475	-	0	0	2.829	0.717
	2	0	-	0	1.887	0.475	0	-	0	2.829	0.717
	3	0	0	-	1.887	0.475	0	0	-	2.829	0.717
	4	-2.829	-2.829	-2.829	-	0.000	-2.829	-2.829	-2.829	-	0.000
2	1	-	0	0	3.906	0.989	-	0	0	5.856	1.505
	2	0	-	0	3.906	0.989	0	-	0	5.856	1.505
	3	0	0	-	3.906	0.989	0	0	-	5.856	1.505
	4	-3.906	-3.906	-3.906	-	0.000	-5.856	-5.856	-5.856	0	0.000
3	1	-	0	0	6.066	1.547	-	0	2.565	9.905	2.375
	2	0	-	0	6.066	1.547	0	-	2.565	9.905	2.375
	3	0	0	-	6.066	1.547	-2.565	-2.565	-	9.905	2.375
	4	-6.066	-6.066	-6.066	-	0.000	-9.905	-9.905	-9.905	-	0.000

Интересным здесь представляется то, что при осторожном инвестиционном поведении фирм изменение их конкурентного положения на рынке происходит более резко. В этом можно убедиться сопоставив данные таблицы 3.5

и следующие показатели в равновесии модели $\bar{\Gamma}^{\mathrm{en}}$: при двухстороннем сотрудничестве $\mathcal{D}_1^{\mathrm{N}}(1) = \mathcal{D}_2^{\mathrm{N}}(1) = \mathcal{D}_3^{\mathrm{N}}(1) = 0.0003$, $\mathcal{D}_1^{\mathrm{N}}(2) = \mathcal{D}_2^{\mathrm{N}}(2) = \mathcal{D}_3^{\mathrm{N}}(2) = 0.487$, $\mathcal{D}_1^{\mathrm{N}}(3) = \mathcal{D}_2^{\mathrm{N}}(3) = 0.738, \mathcal{D}_3^{\mathrm{N}}(3) = 0.518$, $\mathcal{D}_4^{\mathrm{N}}(t) = 0$ — для каждого t, так как фирма 4 имела наибольшие удельные издержки в каждый момент времени; при одностороннем сотрудничестве фирм имеем $\mathcal{D}_1^{\mathrm{N}}(1) = \mathcal{D}_2^{\mathrm{N}}(1) = \mathcal{D}_3^{\mathrm{N}}(1) = 0.0005$, $\mathcal{D}_1^{\mathrm{N}}(2) = \mathcal{D}_2^{\mathrm{N}}(2) = \mathcal{D}_3^{\mathrm{N}}(2) = 0.736$, $\mathcal{D}_1^{\mathrm{N}}(3) = \mathcal{D}_2^{\mathrm{N}}(3) = 1.462, \mathcal{D}_3^{\mathrm{N}}(3) = 0.790$, $\mathcal{D}_4^{\mathrm{N}}(t) = 0$.

Таким образом, можно заключить, что при осторожном инвестиционном поведении изменение конкурентного положения фирм на рынке происходит быстрее, при этом двухстороннее сетевое сотрудничество при рискованном инвестиционном поведении фирм дает в ситуации равновесия наименьшую скорость изменения их конкурентного положения на рынке.

3.2. Анализ долгосрочного сетевого сотрудничества конкурентов

Перейдем к динамическим моделям, в которых фирмы вступают в долгосрочное сетевое сотрудничество, формируя при этом сетевую структуру взаимодействия единожды и в момент времени $t = 0$. Следуя обозначениям принятым во второй главе, обозначим такую структуру за $\mathbf{g}(0) = \mathbf{g}_0$. При исследовании таких моделей интерес представляет равновесное поведение фирм, и его сравнением с равновесным поведением при краткосрочном сотрудничестве и с результатами полученными для моделей $\Gamma_{01}^{\mathrm{en}}$ (подраздел 2.3.1), $\Gamma_{02}^{\mathrm{en}}$ (подраздел 2.3.2).

3.2.1. Случай переменных объемов инвестирования

Начнем с модели, в которой фирмы реализуют переменный объем инвестиций или рискованное инвестиционное поведение. Под стратегией фирмы $i \in \mathcal{N}$ будем понимать функцию предписывающую ей однозначным образом в каждый момент принятия решения $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ допустимое поведение вида

$$s_i(t) = \begin{cases} (g_i(0), u_i, y_i(0)) & \in \mathbb{G}_i \times \mathbb{U}_i \times \mathbb{Y}_i, \quad t = 0, \\ (u_i, y_i(t)) & \in \mathbb{U}_i \times \mathbb{Y}_i, \qquad\quad t \in \mathcal{T} \setminus \{0, T\}. \end{cases} \tag{3.16}$$

Динамика изменения удельных издержек фирмы i описывается уравнением (2.9) при $c_i(0) = c_{i0}$, а ее прибыль при сетевой структуре двухстороннего сотрудничества фирм $\mathbf{g}_0$, следующим функционалом

$$J_i\left(c_0, \mathbf{g}_0, u, y\right) = \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t \left[\left(p - \sum_{j=1}^{n} u_j \right) u_i - c_i(t) u_i - \frac{\varepsilon_i(t)}{2} y_i^2(t) - \right.$$
$$\left. - \sum_{j \neq i} \pi_{ij}(t) g_{ij}(0) g_{ji}(0) \right] + \rho^T \left(\eta_i - \eta c_i(T) \right),$$

в котором $y = (y(0), \ldots, y(T-1))$, при $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$, $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$.

Обозначим представленную динамическую модель конкуренции с эндогенным формированием долгосрочного сетевого сотрудничества фирм при постоянном объеме производства и рискованном инвестиционном поведении за $\bar{\Gamma}_0^{\text{en}}$. Равновесие по Нэшу в классе программных стратегий фирм для этой модели характеризуется следующей теоремой.

Теорема 3.3. *Равновесием по Нэшу в классе программных стратегий фирм для модели $\bar{\Gamma}_0^{\text{en}}$ является набор стратегий $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$, компоненты которого удовлетворяют* (3.16) *для $i \in \mathcal{N}$, $t \neq T$ и имеют вид:*

$$g_{ij}^*(0) = \begin{cases} 1, & \sum\limits_{t=0}^{T-1} \rho^t \pi_{ij}(t) < \pi_{ij}^*, \ \sum\limits_{t=0}^{T-1} \rho^t \pi_{ji}(t) < \pi_{ji}^*, \quad j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}, \\ 0, & \textit{иначе}, \end{cases} \tag{3.17}$$

$$u_i^* = \frac{p - \sum\limits_{\tau=0}^{T-1} \rho^\tau \left((n+1) c_i^*(\tau) - \sum\limits_{j \in \mathcal{N}} c_j^*(\tau) \right) \cdot \left(\sum\limits_{\tau=0}^{T-1} \rho^\tau \right)^{-1}}{n+1}, \tag{3.18}$$

$$y_i^*(t) = -\frac{\alpha_i(t) \phi_i(t+1)}{\rho^t \varepsilon_i(t)}, \tag{3.19}$$

где

$$\pi_{ij}^*(t) = \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t \frac{\varepsilon_i(t)}{\alpha_i(t)} \left(\beta_{ij}(t) - \gamma_{ij}(t) \right) y_i^*(t)\, y_j^*(t),$$

$$\phi_i(t) = \begin{cases} -\rho^t \left(u_i^* \cdot \sum\limits_{\tau=0}^{T-t-1} (\rho\delta)^\tau + \eta (\rho\delta)^{T-t} \right), & t \neq T, \\ -\rho^T \eta, & t = T. \end{cases}$$

Удельные издержки $c_i^*(t)$ удовлетворяют (2.9) *при заданном $c_i^*(0) = c_{i0}$.*

Доказательство. Методология доказательства данной теоремы во многом повторяет этапы доказательства теоремы 2.2, ввиду чего опускается. □

Отметим справедливость функциональной зависимости (3.8) заменяя в ней $y_i^{\mathrm{N}}(t)$ на $y_i^*(t)$, и следствия 3.1 справедливого также в равновесии для модели $\bar{\Gamma}_0^{\mathrm{en}}$. Далее перейдем к условию сетевого сотрудничества в равновесии при одностороннем сотрудничестве фирм в сети $\mathbf{g}_0$.

Замечание 3.1 (из теоремы 3.3, одностороннее сотрудничество в модели $\bar{\Gamma}_0^{\mathrm{en}}$). *Если положить, что сотрудничество фирм носит односторонний характер, то равновесное поведение фирм в части производственного и инвестиционного поведения сохраняется и определяется согласно* (3.18) – (3.19), *а сетевое поведение фирмы $i \in \mathcal{N}$ в равновесии по Нэшу приобретает следующий вид:*

$$g_{ij}^*(0) = \begin{cases} 1, & \sum\limits_{t=0}^{T-1} \rho^t \pi_{ij}(t) < \sum\limits_{t=0}^{T-1} \rho^t \dfrac{\varepsilon_i(t)}{\alpha_i(t)} (\beta_{ij}(t) - \gamma_{ij}(t))\, y_i^*(t)\, y_j^*(t), \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}.$$

3.2.2. Случай постоянных объемов инвестирования

Перейдем к модели в которой фирмы реализуют постоянный объем инвестиционных вложений или осторожное инвестиционное поведение. Под стратегией фирмы $i \in \mathcal{N}$ будем понимать функцию предписывающую ей однозначным образом в каждый момент принятия решения $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ допустимое поведение вида

$$s_i(t) = \begin{cases} (g_i(0), u_i, y_i) & \in \mathbb{G}_i \times \mathbb{U}_i \times \mathbb{Y}_i, \quad t = 0, \\ (u_i, y_i) & \in \mathbb{U}_i \times \mathbb{Y}_i, \quad t \in \mathcal{T} \setminus \{0, T\}. \end{cases} \tag{3.20}$$

Изменение удельных издержек фирмы i описывается уравнением

$$\begin{aligned} c_i(t+1) = \delta c_i(t) - \alpha_i(t) y_i - \\ - \sum_{j \neq i} \Big(\beta_{ij}(t) g_{ij}(0) g_{ji}(0) + \gamma_{ij}(t)(1 - g_{ij}(0) g_{ji}(0)) \Big) y_j, \end{aligned} \tag{3.21}$$

при $c_i(0) = c_{i0}$, а ее прибыль при сетевой структуре двухстороннего долгосрочного сотрудничества $\mathbf{g}_0$, которая формируется в начальный момент времени, следующим функционалом

$$J_i\left(c_0, \mathbf{g}_0, u, y\right) = \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t \left[\left(p - \sum_{j=1}^{n} u_j \right) u_i - c_i(t) u_i - \frac{\varepsilon_i(t)}{2} y_i^2 - \right.$$

$$\left. - \sum_{j \neq i} \pi_{ij}(t) g_{ij}(0) g_{ji}(0) \right] + \rho^T \left(\eta_i - \eta c_i(T) \right),$$

в котором $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{Y}_1 \times \ldots \times \mathbb{Y}_n$ для каждого $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$. Отметим здесь, что издержки сетевого сотрудничества фирм в $\mathbf{g}_0$ привязаны ко времени.

Обозначим представленную динамическую модель конкуренции с эндогенным формированием долгосрочного сетевого сотрудничества фирм при постоянном объеме производства и осторожном инвестиционном поведении за $\bar{\bar{\Gamma}}_0^{\mathrm{en}}$. Равновесие по Нэшу в классе программных стратегий фирм для этой модели характеризуется следующей теоремой.

Теорема 3.4. *Равновесием по Нэшу в классе программных стратегий фирм для модели $\bar{\bar{\Gamma}}_0^{\mathrm{en}}$ является набор стратегий $s^{**} = (s_1^{**}, \ldots, s_n^{**})$, компоненты которого удовлетворяют* (3.20) *для $i \in \mathcal{N}$, $t \neq T$ и имеют вид:*

$$g_{ij}^{**}(0) = \begin{cases} 1, & \sum\limits_{t=0}^{T-1} \rho^t \pi_{ij}(t) < \pi_{ij}^{**},\ \sum\limits_{t=0}^{T-1} \rho^t \pi_{ji}(t) < \pi_{ji}^{**}, \quad j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}, \\ 0, & \textit{иначе}, \end{cases} \tag{3.22}$$

$$u_i^{**} = \frac{p - \sum\limits_{\tau=0}^{T-1} \rho^\tau \left((n+1) c_i^{**}(\tau) - \sum\limits_{j \in \mathcal{N}} c_j^{**}(\tau) \right) \cdot \left(\sum\limits_{\tau=0}^{T-1} \rho^\tau \right)^{-1}}{n+1}, \tag{3.23}$$

$$y_i^{**} = -\frac{\sum\limits_{t=0}^{T-1} \alpha_i(t) \phi_i(t+1)}{\sum\limits_{t=0}^{T-1} \rho^t \varepsilon_i(t)}, \tag{3.24}$$

где

$$\pi_{ij}^{**}(t) = \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t \frac{\varepsilon_i(t)}{\alpha_i(t)} \left(\beta_{ij}(t) - \gamma_{ij}(t) \right) y_i^{**} y_j^{**},$$

$$\phi_i(t) = \begin{cases} -\rho^t \left(u_i^{**} \cdot \sum\limits_{\tau=0}^{T-t-1} (\rho\delta)^\tau + \eta (\rho\delta)^{T-t} \right), & t \neq T, \\ -\rho^T \eta, & t = T. \end{cases}$$

Удельные издержки $c_i^{**}(t)$ *удовлетворяют* (3.21) *при заданном* $c_i^{**}(0) = c_{i0}$.

Доказательство. Методология доказательства данной теоремы во многом повторяет этапы доказательства теоремы 2.2, ввиду чего опускается. □

Отметим справедливость функциональной зависимости (3.14) заменяя в ней $\hat{y}_i$ на y_i^{**} и следствия 3.1 для равновесия в модели $\bar{\bar{\Gamma}}_0^{\text{en}}$. Перейдем к условию сетевого сотрудничества в равновесии при одностороннем взаимодействии в $\mathbf{g}_0$.

Замечание 3.2 (из теоремы 3.4, одностороннее сотрудничество в модели $\bar{\bar{\Gamma}}_0^{\text{en}}$)**.** *Если положить, что сотрудничество фирм носит односторонний характер, то равновесное поведение фирм в части производственного и инвестиционного поведения сохраняется и определяется согласно* (3.23) – (3.24), *а сетевое поведение фирмы* $i \in \mathcal{N}$ *в равновесии по Нэшу приобретает следующий вид:*

$$g_{ij}^{**}(0) = \begin{cases} 1, & \sum\limits_{t=0}^{T-1} \rho^t \pi_{ij}(t) < \sum\limits_{t=0}^{T-1} \rho^t \dfrac{\varepsilon_i(t)}{\alpha_i(t)} (\beta_{ij}(t) - \gamma_{ij}(t))\, y_i^{**}\, y_j^{**}, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \quad j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}.$$

3.2.3. Численное моделирование равновесного поведения при долгосрочном сетевом сотрудничестве

Перейдем к численному моделированию равновесия по Нэшу, определенного условиями теорем 3.3 – 3.4 для моделей $\bar{\Gamma}_0^{\text{en}}$ и $\bar{\bar{\Gamma}}_0^{\text{en}}$ соответственно. Входные параметры моделирования остаются прежними, (стр. 63). В данном разделе нас будет интересовать сравнение результатов моделирования практико-ориентированной модели $\bar{\Gamma}_0^{\text{en}}$ с теоретической моделью Γ_0^{en} при издержках, направленных на формирование и поддержание сетевого взаимодействия (разделы 2.3.1 и 2.4), а также сопоставление данных в равновесиях при двух видах инвестиционного поведения фирм.

Представим результат моделирования в таблицах 3.6 – 3.7, которые имеющую уже привычную читателю структуру и содержат основной акцент на допустимое поведение фирм в ситуации равновесия по Нэшу. Дополнительно составим таблицу 3.8 с указанием верхних границ допустимых издержек сотрудничества фирм в равновесии для моделей $\bar{\Gamma}_0^{\text{en}}$ и $\bar{\bar{\Gamma}}_0^{\text{en}}$ соответственно. Все результаты моделирования как и ранее, округлены до третьего знака после запятой.

Таблица 3.6. **Равновесие по Нэшу s^* и соответствующие ему прибыли и удельные издержки фирм, а также цены товара в модели $\bar{\Gamma}_0^{\text{en}}$**

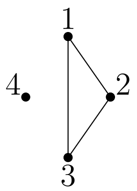
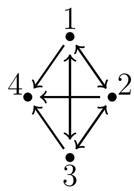
	двухстороннее сотрудничество				одностороннее сотрудничество			
t :	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
$\mathbf{g}_0^*$				–				
$g_1^*(0)$	(0,1,1,0)	–	–	–	(0,1,1,1)	–	–	–
$g_2^*(0)$	(1,0,1,0)	–	–	–	(1,0,1,1)	–	–	–
$g_3^*(0)$	(1,1,0,0)	–	–	–	(1,1,0,1)	–	–	–
$g_4^*(0)$	(0,0,0,0)	–	–	–	(0,0,0,0)	–	–	–
u_1^*	80.703	80.703	80.703	–	81.097	81.097	81.097	–
u_2^*	80.703	80.703	80.703	–	81.097	81.097	81.097	–
u_3^*	80.703	80.703	80.703	–	81.097	81.097	81.097	–
u_4^*	78.728	78.728	78.728	–	78.137	78.137	78.137	–
$y_1^*(t)$	2.045	1.876	1.710	–	2.047	1.877	1.710	–
$y_2^*(t)$	2.045	1.876	1.710	–	2.047	1.877	1.710	–
$y_3^*(t)$	2.045	1.876	1.710	–	2.047	1.877	1.710	–
$y_4^*(t)$	2.038	1.873	1.710	–	2.036	1.872	1.710	–
$c_1^*(t)$	100.000	98.209	97.018	96.456	100.000	97.187	94.986	93.427
$c_2^*(t)$	100.000	98.209	97.018	96.456	100.000	97.187	94.986	93.427
$c_3^*(t)$	100.000	98.209	97.018	96.456	100.000	97.187	94.986	93.427
$c_4^*(t)$	100.000	100.263	101.096	102.530	100.000	100.265	101.099	102.533
P^*	179.163	179.163	179.163	–	178.575	178.575	178.575	–
J_1^*	11 969.791				12 462.514			
J_2^*	11 969.791				12 462.514			
J_3^*	11 399.294				11 606.765			
J_4^*	10 448.161				10 187.284			

Таблица 3.7. **Равновесие по Нэшу s^{**} и соответствующие ему прибыли и удельные издержки фирм, а также цены товара в модели $\bar{\bar{\Gamma}}_0^{\mathrm{en}}$**

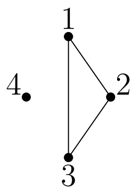
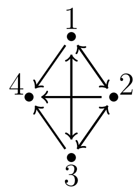
	двухстороннее сотрудничество				одностороннее сотрудничество			
$t:$	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
$\mathbf{g}_0^{**}$				–				
$g_1^{**}(0)$	(0,1,1,0)	–	–	–	(0,1,1,1)	–	–	–
$g_2^{**}(0)$	(1,0,1,0)	–	–	–	(1,0,1,1)	–	–	–
$g_3^{**}(0)$	(1,1,0,0)	–	–	–	(1,1,0,1)	–	–	–
$g_4^{**}(0)$	(0,0,0,0)	–	–	–	(0,0,0,0)	–	–	–
u_1^{**}	80.589	80.589	80.589	–	80.961	80.961	80.961	–
u_2^{**}	80.589	80.589	80.589	–	80.961	80.961	80.961	–
u_3^{**}	80.589	80.589	80.589	–	80.961	80.961	80.961	–
u_4^{**}	78.725	78.725	78.725	–	78.166	78.166	78.166	–
y_1^{**}	1.883	1.883	1.883	–	1.883	1.883	1.883	–
y_2^{**}	1.883	1.883	1.883	–	1.883	1.883	1.883	–
y_3^{**}	1.883	1.883	1.883	–	1.883	1.883	1.883	–
y_4^{**}	1.879	1.879	1.879	–	1.878	1.878	1.878	–
$c_1^{**}(t)$	100.000	98.906	97.736	96.484	100.000	97.965	95.788	93.458
$c_2^{**}(t)$	100.000	98.906	97.736	96.484	100.000	97.965	95.788	93.458
$c_3^{**}(t)$	100.000	98.906	97.736	96.484	100.000	97.965	95.788	93.458
$c_4^{**}(t)$	100.000	100.793	101.642	102.550	100.000	100.794	101.644	102.553
P^{**}	179.508	179.508	179.508	–	178.951	178.951	178.951	–
J_1^{**}	11 921.435				12 401.633			
J_2^{**}	11 921.435				12 401.633			
J_3^{**}	11 350.935				11 545.883			
J_4^{**}	10 454.836				10 207.999			

Таблица 3.8. **Верхние границы допустимых издержек сотрудничества в $\bar{\Gamma}_0^{\text{en}}$ и $\bar{\bar{\Gamma}}_0^{\text{en}}$**

	двухстороннее сотрудничество				одностороннее сотрудничество			
$i\backslash j$	1	2	3	4	1	2	3	4
модель $\bar{\Gamma}_0^{\text{en}}$								
1	0	2823.869	2823.869	2818.329	0	2826.078	2826.078	2817.771
2	2823.869	0	2823.869	2818.329	2826.078	0	2826.078	2817.771
3	2823.869	2823.869	0	2818.329	2826.078	2826.078	0	2817.771
4	2818.329	2818.329	2818.329	0	2817.771	2817.771	2817.771	0
модель $\bar{\bar{\Gamma}}_0^{\text{en}}$								
1	0	2808.443	2808.443	2803.498	0	2810.418	2810.418	2803.001
2	2808.443	0	2808.443	2803.498	2810.418	0	2810.418	2803.001
3	2808.443	2808.443	0	2803.498	2810.418	2810.418	0	2803.001
4	2803.498	2803.498	2803.498	0	2803.001	2803.001	2803.001	0

Согласно данным из таблиц 3.6 – 3.8 можно объяснить сетевое поведение фирм в равновесии для практико-ориентированных моделей $\bar{\Gamma}_0^{\text{en}}$ и $\bar{\bar{\Gamma}}_0^{\text{en}}$ как при одностороннем, так и при двухстороннем сетевом сотрудничестве фирм, аналогично тому, как это было сделано в разделе 2.5 для теоретико-игровой модели Γ_{01}^{en}, ввиду чего здесь это опустим.

Оценим результаты полученные при моделировании равновесий в моделях Γ_{01}^{en} и $\bar{\Gamma}_0^{\text{en}}$. Как можно видеть из таблиц 2.2 и 3.6, сетевые структуры сотрудничества независимо от их вида (двухстороннее или одностороннее) сохраняются. Отметим, что суммарный объем инвестиционных вложений фирм при переходе от переменного объема производства к постоянному (в рассматриваемом случае, от модели Γ_{01}^{en} к $\bar{\Gamma}_0^{\text{en}}$) меняется незначительно:

- в модели Γ_{01}^{en} при двухстороннем сетевом сотрудничестве фирм имеем

$$\sum_{t=0}^{2} y_1^*(t) = \sum_{t=0}^{2} y_2^*(t) = \sum_{t=0}^{2} y_3^*(t) = 5.634, \quad \sum_{t=0}^{2} y_4(t) = 5.616,$$

  а при одностороннем сетевом сотрудничестве

$$\sum_{t=0}^{2} y_1^*(t) = \sum_{t=0}^{2} y_2^*(t) = \sum_{t=0}^{2} y_3^*(t) = 5.638, \quad \sum_{t=0}^{2} y_4^*(t) = 5.611;$$

- в модели $\bar{\Gamma}_0^{\mathrm{en}}$ при двухстороннем сетевом сотрудничестве фирм имеем

$$\sum_{t=0}^{2} y_1^*(t) = \sum_{t=0}^{2} y_2^*(t) = \sum_{t=0}^{2} y_3^*(t) = 5.631, \quad \sum_{t=0}^{2} y_4^*(t) = 5.621,$$

  а при одностороннем сетевом сотрудничестве

$$\sum_{t=0}^{2} y_1^*(t) = \sum_{t=0}^{2} y_2^*(t) = \sum_{t=0}^{2} y_3^*(t) = 5.634, \quad \sum_{t=0}^{2} y_4^*(t) = 5.618.$$

При этом изменение конкурентного положения фирм на рынке с течением времени будет более заметно в модели $\Gamma_{01}^{\mathrm{en}}$ чем в $\bar{\Gamma}_0^{\mathrm{en}}$, в чем несложно убедиться. Отметим также, что результаты анализа, сделанные на основание численного моделирования равновесия в $\Gamma_{01}^{\mathrm{en}}$ остаются справедливыми и для модели $\bar{\Gamma}_0^{\mathrm{en}}$, в связи с чем опускаются.

Примечательным в данном примере является то, что прибыли фирм (как и суммарный объем производимого товара), полученные в равновесии для моделей $\Gamma_{01}^{\mathrm{en}}$ и $\bar{\Gamma}_0^{\mathrm{en}}$ при общих параметрах моделирования, оказываются достаточно близки. В этом несложно убедиться обратившись к таблицам 2.2 и 3.6, и заключив изменение прибыли менее чем на 1%. Это позволяет сделать вывод о том, что теоретические результаты, полученные в главах 1 – 2 при сохранении концептуальных допущений, оказываются вполне приемлемыми для анализа поведения конкурирующих фирм в реальных условиях.

Для сравнения вариантов инвестиционного поведения фирм перейдем к результатам моделирования равновесия для моделей $\bar{\Gamma}_0^{\mathrm{en}}$ и $\bar{\bar{\Gamma}}_0^{\mathrm{en}}$. Несмотря на то, что верхние границы допустимых издержек сотрудничества фирм, представленные в таблице 3.8 различны для моделей, сетевая структура сохраняется, как при одностороннем, так и при двухстороннем сетевом сотрудничестве фирм в моделях $\bar{\Gamma}_0^{\mathrm{en}}$ и $\bar{\bar{\Gamma}}_0^{\mathrm{en}}$. Таким образом можно заключить, что вид инвестиционного поведения при долгосрочном сотрудничестве в рассматриваемых примерах не влияет на партнерские отношения фирм.

Обратившись к таблицам 3.6 и 3.7, несложно убедиться в том, что суммарные объемы инвестиций фирм в моделях $\bar{\Gamma}_0^{\mathrm{en}}$ и $\bar{\bar{\Gamma}}_0^{\mathrm{en}}$ оказываются также близки, в связи с чем перейдем далее к оценке изменения конкурентного положения фирм на рынке при их равновесном поведении, для этого обратимся к данным таблицы 3.9.

Таблица 3.9. **Соотношение конкурентоспособности и конкурентное положение фирм на рынке, при их равновесном поведении в моделях $\bar{\Gamma}_0^{en}$ и $\bar{\bar{\Gamma}}_0^{en}$.**

t		двухстороннее сотрудничество					одностороннее сотрудничество				
		модель $\bar{\Gamma}_0^{en}$									
	i	$\Delta c^*_{i1}(t)$	$\Delta c^*_{i2}(t)$	$\Delta c^*_{i3}(t)$	$\Delta c^*_{i4}(t)$	$\mathcal{D}^*_i(t)$	$\Delta c^*_{i1}(t)$	$\Delta c^*_{i2}(t)$	$\Delta c^*_{i3}(t)$	$\Delta c^*_{i4}(t)$	$\mathcal{D}^*_i(t)$
1	1	-	0	0	2.054	0.520	-	0	0	3.078	0.784
	2	0	-	0	2.054	0.520	0	-	0	3.078	0.784
	3	0	0	-	2.054	0.520	0	0	-	3.078	0.784
	4	-2.054	-2.054	-2.054	-	0.000	-3.078	-3.078	-3.078	-	0.000
2	1	-	0	0	4.078	1.040	-	0	0	6.113	1.583
	2	0	-	0	4.078	1.040	0	-	0	6.113	1.583
	3	0	0	-	4.078	1.040	0	0	-	6.113	1.583
	4	-4.078	-4.078	-4.078	-	0.000	-6.113	-6.113	-6.113	0	0.000
3	1	-	0	0	6.074	1.550	-	0	0	9.106	2.379
	2	0	-	0	6.074	1.550	0	-	0	9.106	2.379
	3	0	0	-	6.074	1.550	0	0	-	9.106	2.379
	4	-6.074	-6.074	-6.074	-	0.000	-9.106	-9.106	-9.106	-	0.000
		модель $\bar{\bar{\Gamma}}_0^{en}$									
	i	$\Delta c^{**}_{i1}(t)$	$\Delta c^{**}_{i2}(t)$	$\Delta c^{**}_{i3}(t)$	$\Delta c^{**}_{i4}(t)$	$\mathcal{D}^{**}_i(t)$	$\Delta c^{**}_{i1}(t)$	$\Delta c^{**}_{i2}(t)$	$\Delta c^{**}_{i3}(t)$	$\Delta c^{**}_{i4}(t)$	$\mathcal{D}^{**}_i(t)$
1	1	-	0	0	1.887	0.475	-	0	0	2.829	0.717
	2	0	-	0	1.887	0.475	0	-	0	2.829	0.717
	3	0	0	-	1.887	0.475	0	0	-	2.829	0.717
	4	-1.887	-1.887	-1.887	-	0.000	-2.829	-2.829	-2.829	-	0.000
2	1	-	0	0	3.906	0.989	-	0	0	5.856	1.505
	2	0	-	0	3.906	0.989	0	-	0	5.856	1.505
	3	0	0	-	3.906	0.989	0	0	-	5.856	1.505
	4	-3.906	-3.906	-3.906	-	0.000	-5.856	-5.856	-5.856	0	0.000
3	1	-	0	0	6.066	1.547	-	0	0	9.095	2.375
	2	0	-	0	6.066	1.547	0	-	0	9.095	2.375
	3	0	0	-	6.066	1.547	0	0	-	9.095	2.375
	4	-6.066	-6.066	-6.066	-	0.000	-9.095	-9.095	-9.095	-	0.000

Согласно данным таблицы заключаем, что в отличие от варианта краткосрочного сотрудничества, при долгосрочном — изменение конкурентного положения фирм на рынке происходит быстрее при рискованном инвестиционном поведении и также при одностороннем сотрудничестве. В то время как наименьшая скорость изменения конкурентного положения фирм наблюдается при осторожном инвестиционном поведении и двухстороннем сотрудничестве.

3.3. Сравнительный анализ вариантов продолжительности сетевого сотрудничества и некоторые закономерности в равновесиях для моделей с постоянным объемом производства

В данном разделе центр внимания будет сосредоточен на сравнении равновесного поведения фирм и его показателей (прибыль и конкурентоспособность) при различных вариантах продолжительности сетевого сотрудничества.

■ **Сетевое поведение.** Условия двухстороннего сетевого сотрудничества фирм в равновесии, представленные в (3.2), (3.10), (3.17) и (3.22), имеют общую структуру: фирма i предлагает фирме j сотрудничество, если для нее издержки сотрудничества сопряженные с этой связью в сетевой структуре не превосходят определенной величины, которая зависит от объемов их инвестиционных вложений. В случае одностороннего сетевого сотрудничества фирм, соответствующие условия имеют аналогичную структуру. Более того, при одностороннем сетевом сотрудничестве фирм, количество связей в равновесной сети формируется не меньше чем в соответствующей сети при двухстороннем сотрудничестве, а верхние границы допустимых издержек при этом оказываются очень близкими внутри одного характера инвестиционного поведения фирм. При постоянных во времени величинах $\alpha_i(t)$ и $\varepsilon_i(t)$, объем инвестиций $y_i^{\mathrm{N}}(t)$ фирмы i в равновесии по Нэшу будет монотонно убывающей функцией времени при $u_i^{\mathrm{N}} > \eta(1-\rho\delta)$. Более того, постоянные во времени параметры $\beta_{ij}(t)$ и $\gamma_{ij}(t)$ приводят к монотонному убыванию верхних границ допустимых издержек сетевого сотрудничества $\pi_{ij}^{\mathrm{N}}(t)$ в (3.5), при которых фирмы готовы формировать партнерские связи (сотрудничать). Другими словами последнее означает, что количество таких связей в сети не увеличивается с течением времени.

■ **Производственное поведение.** Придерживаясь постоянного производственного плана, объемы производимого товара у каждой фирмы незначительно отличаются при сравнении равновесного поведения фирм в практико-ориентированных моделях $\bar{\Gamma}^{\mathrm{en}}$, $\bar{\bar{\Gamma}}^{\mathrm{en}}$, $\bar{\Gamma}_0^{\mathrm{en}}$, $\bar{\bar{\Gamma}}_0^{\mathrm{en}}$. При этом, в равновесии эти модели имеют общую черту, которую сформулируем в виде следующего замечания.

Замечание 3.3 (равновесное производственное поведение)**.** *Производственное поведение фирм в равновесии имеет общий функциональный вид, который* *не зависит от продолжительности их сетевого сотрудничества и характера инвестиционного поведения — осторожного или рискованного.*

Это замечание основано на общем функциональном виде выражений (3.3), (3.11), (3.18) и (3.23) равновесного производственного поведения фирм в сравниваемых моделях.

■ **Инвестиционное поведение.** В данной главе было рассмотрено два варианта инвестиционного поведения фирм в равновесии (рискованное и осторожное). При этом, как следует из теорем 3.1 – 3.4, внутри одного характера инвестиционного поведения фирм, объемы инвестиционных вложений имеют общий функциональный вид. При рискованном инвестиционном поведении это следует из (3.4) и (3.19), а при осторожном — из (3.12) и (3.24). Кроме того, все четыре модели $\bar{\Gamma}^{en}$, $\bar{\bar{\Gamma}}^{en}$, $\bar{\Gamma}^{en}_0$, $\bar{\bar{\Gamma}}^{en}_0$ относительно инвестиционного поведения фирм, можно объединить следующим замечанием.

Замечание 3.4 (о равновесном производственном и инвестиционном поведении)**.** *Независимо от характера инвестиционного поведения фирм, продолжительности и вида сетевого сотрудничества, в равновесии по Нэшу наблюдается линейная связь между текущим уровнем инвестиций фирмы и ее объемом производства.*

Это замечание основано на равенствах (3.8) и (3.14), которые, как отмечалось ранее, сохраняют свой функциональный вид внутри одного характера инвестиционного поведения фирм. Также отметим, что в первой главе было представлено утверждение 1.1, которое при допущении о постоянстве во времени сетевых параметров позволяет также доказать наблюдение о том, что фирма имеющая наименьшие удельные издержки в равновесии по Нэшу в классе программных стратегий, производит больше товара и инвестирует больше средств чем та фирма, которая имеем более высокие удельные издержки. Для всех моделей это следует из утверждения 3.1, которое, как отмечалось ранее, можно заключить относительно любой из моделей $\bar{\Gamma}^{en}$, $\bar{\bar{\Gamma}}^{en}$, $\bar{\Gamma}^{en}_0$, $\bar{\bar{\Gamma}}^{en}_0$.

■ **Равновесные прибыли и изменение конкурентного положения фирм на рынке.** При одностороннем сотрудничестве фирм, во всех примерах данной главы видно, что некоторые фирмы имеют возможность получать бóльшую прибыль в сравнении с прибылью при двухстороннем сотрудничестве в соответствующей модели. Однако, скорость изменения конкурентного положения фирм согласно заключениям подпунктов 3.1.3 и 3.2.3, зависит от варианта сетевого сотрудничества. Так при краткосрочном сотрудничестве наибольшие изменения наблюдаются при одностороннем сотрудничестве и острожном инвестировании, а при долгосрочном сотрудничестве — в условиях одностороннего сотрудничества и рискованном инвестировании фирм. Сравнивая табл. 3.2 и 3.7 заключаем, что при осторожном инвестировании продолжительность сотрудничества может не быть принципиальной, а из табл. 3.1 и 3.6, что при рискованном инвестировании долгосрочное сотрудничество оказывается предпочтительнее для большинства фирм — по скорости изменения конкурентоспособности.

3.4. Модель с единовременным объемом инвестирования

В рассмотренных моделях сетевое сотрудничество даже одной пары фирм, делает другие фирмы также заинтересованными в сотрудничестве и реализации инвестиций. Рассмотрим модель, в которой фирмы реализуют свое инвестиционное поведение единоразово, в момент $t = 0$, выбирая единовременный объем инвестиций. Будем полагать, что в этом случае фирмы единоразово принимают решение о готовности сотрудничать с другими фирмами, несут в построенной сети единоразовые издержки сотрудничества, а также имеют единоразовый эффект от инвестиционных вложений всех фирм. Допустимым поведением фирмы $i \in \mathcal{N}$ в начальный момент времени будет тройка $s_i(0) = (g_i(0), u_i, y_i(0)) \in \mathbb{G}_i \times \mathbb{U}_i \times \mathbb{Y}_i$ и $s_i(t) = u_i \in \mathbb{U}_i$ во все последующие моменты $t \neq T$. Это позволяет представить изменение удельных издержек фирмы i уравнением

$$c_i(t+1) = \\ = \begin{cases} \delta c_{i0} - \alpha_i(0) y_i(0) - \sum\limits_{j \neq i} \Big(\beta_{ij}(0) g_{ij}(0) g_{ji}(0) + \gamma_{ij}(1 - g_{ij}(0) g_{ji}(0))\Big) y_j(0), & t = 0, \\ \delta c_i(t), & t \notin \{0, T\}, \end{cases}$$

или

$$c_i(t) = \delta^{t-1} \Big[\delta c_{i0} - \alpha_i(0) y_i(0) - \\ - \sum_{j \neq i} \Big(\beta_{ij}(0) g_{ij}(0) g_{ji}(0) + \gamma_{ij}(0)(1 - g_{ij}(0) g_{ji}(0))\Big) y_j(0)\Big], \quad (3.25)$$

при $c_i(0) = c_{i0}$ и $t \neq 0$, а прибыль фирмы задать следующим функционалом

$$J_i(c_0, g(0), u, y(0)) = \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t \Big(p - c_i(t) - \sum_{j \in \mathcal{N}} u_j\Big) u_i - \frac{\varepsilon_i(0)}{2} \big(y_i(0)\big)^2 - \\ - \sum_{j \neq i} \pi_{ij}(0) g_{ij}(0) g_{ji}(0) + \rho^T(\eta_i - \eta c_i(T)).$$

Обозначим представленную динамическую модель конкуренции с эндогенным формированием сетевого сотрудничества фирм при постоянном объеме производства и единоразовым инвестировании фирм за $\widetilde{\Gamma}_0^{\text{en}}$. Равновесие по Нэшу в классе программных стратегий при двухстороннем сотрудничестве фирм для этой модели характеризуется следующей теоремой.

Теорема 3.5. *Равновесием по Нэшу в модели $\widetilde{\Gamma}_0^{\text{en}}$ является набор стратегий $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n)$, компоненты которого*

$$\tilde{s}_i(t) = \begin{cases} (\tilde{g}_i(0), \tilde{u}_i, \tilde{y}_i(0)), & t = 0, \\ \tilde{u}_i, & t \notin \{0, T\}, \end{cases}$$

для $i \in \mathcal{N}$, имеют вид:

$$\tilde{g}_{ij}(0) = \begin{cases} 1, & \pi_{ij}(0) < \tilde{\pi}_{ij}, \pi_{ji}(0) < \tilde{\pi}_{ji}, \quad j \neq i, \\ 0, & \textit{иначе}, \end{cases} \tag{3.26}$$

$$\tilde{u}_i = \frac{p - \sum\limits_{\tau=0}^{T-1} \rho^\tau \Big((n+1)\tilde{c}_i(\tau) - \sum\limits_{j \in \mathcal{N}} \tilde{c}_j(\tau)\Big) \cdot \Big(\sum\limits_{\tau=0}^{T-1} \rho^\tau\Big)^{-1}}{n+1}, \tag{3.27}$$

$$\tilde{y}_i(0) = \frac{\rho \alpha_i(0)}{\varepsilon_i(0)} \Big(\tilde{u}_i \sum_{t=0}^{T-2} (\rho\delta)^t + \eta(\rho\delta)^{T-1}\Big), \tag{3.28}$$

где

$$\tilde{\pi}_{ij} = \frac{\varepsilon_i(0)}{\alpha_i(0)} (\beta_{ij}(0) - \gamma_{ij}(0))\, \tilde{y}_i(0)\, \tilde{y}_j(0).$$

Текущие удельные издержки $\tilde{c}_i(t)$ определяются согласно (3.25), *$\tilde{c}_i(0) = c_{i0}$.*

Доказательство. Сначала предположим, что в качестве своего сетевого поведения каждая фирма i вместо набора $g_i(0)$ выбирает n-мерный вектор $z_i(0)$

с компонентами $z_{ij}(0) \in [0,1]$. Пусть $z(0) = (z_1(0), \ldots, z_n(0))$; σ_i — стратегия фирмы i, а $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ — набор стратегий. Наилучший ответ фирмы i на фиксированные стратегии ее конкурентов — это стратегия, компоненты которой удовлетворяют следующей системе (с учетом линейности J_i по переменным $z_{ij}(t)$):

$$z_{ij}(0) = \begin{cases} 1, & \Big(\pi_{ij}(0) - \dfrac{\varepsilon_i(0)}{\alpha_i(0)}(\beta_{ij}(0) - \gamma_{ij}(0))y_i(0)y_j(0)\Big)z_{ji}(0) < 0, \\ & \text{и } j \neq i, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

$$u_i = \frac{1}{2}\left(p - \sum_{j\neq i} u_j - \sum_{\tau=0}^{T-1} \rho^\tau c_i(\tau) \cdot \left(\sum_{\tau=0}^{T-1}\rho^\tau\right)^{-1}\right),$$

$$y_i(0) = \frac{\rho\alpha_i(0)}{\varepsilon_i(0)}\left(u_i \sum_{t=0}^{T-2}(\rho\delta)^t + \eta(\rho\delta)^{T-1}\right).$$

Так, если $\tilde{\sigma}$ — равновесие по Нэшу, то $\tilde{s} = \tilde{\sigma}$ и $\tilde{g}_i(0) = \tilde{z}_i(0)$. Равновесие по Нэшу предписывает фирмам i и j установить связь в начальный момент при одновременном выполнении неравенств

$$\pi_{ij}(0) < \frac{\varepsilon_i(0)(\beta_{ij}(0) - \gamma_{ij}(0))}{\alpha_i(0)}\tilde{y}_i(0)\tilde{y}_j(0), \;\; \pi_{ji}(0) < \frac{\varepsilon_j(0)(\beta_{ji}(0) - \gamma_{ji}(0))}{\alpha_j(0)}\tilde{y}_i(0)\tilde{y}_j(0).$$

Следовательно, приходим к выражениям (3.26), (3.27) и (3.28), достаточность которых вытекает из отрицательной определенности гессиана функции Лагранжа $\mathcal{L}_i$:

$$-2\tilde{u}_i\left(\sum_{t=1}^{T-1}\rho^t\tilde{c}_i(t) + \tilde{u}_i\sum_{t=0}^{T-1}\rho^t\right) - \varepsilon_i(0)\tilde{y}_i^2(0) < 0,$$

а значит $\tilde{s}$ будет равновесием по Нэшу в модели $\widetilde{\Gamma}_0^{\mathrm{en}}$. □

Несмотря на то, что фирмы реализуют свое инвестиционное поведение единоразово, отметим, что следствие 3.1 представленное в разделе 3.1.1, при постоянных во времени сетевых параметрах, сохраняет свою справедливость для равновесия в модели $\widetilde{\Gamma}_0^{\mathrm{en}}$. Приведем это следствие далее и без доказательства, которое схоже с доказательством следствия 3.1.

Следствие 3.5. *Пусть* $\alpha_i(0) = \alpha$ *и* $\varepsilon_i(0) = \varepsilon$ *для любой фирмы. Тогда в равновесии по Нэшу для произвольных фирм* i *и* j *следующие три условия эквивалентны:*

$$\frac{\sum\limits_{\tau=0}^{T-1} \rho^\tau \tilde{c}_i(\tau)}{\sum\limits_{\tau=0}^{T-1} \rho^\tau} < \frac{\sum\limits_{\tau=0}^{T-1} \rho^\tau \tilde{c}_j(\tau)}{\sum\limits_{\tau=0}^{T-1} \rho^\tau} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{u}_i > \tilde{u}_j \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{y}_i(0) > \tilde{y}_j(0).$$

Рассмотрим далее вариант одностороннего сетевого сотрудничества фирм в равновесии для модели $\widetilde{\Gamma}_0^{\mathrm{en}}$. Как и для предшествующих моделей его можно получить из условия двухстороннего сетевого сотрудничества в равновесии.

Замечание 3.5 (из теоремы 3.5, одностороннее сотрудничество в модели $\widetilde{\Gamma}_0^{\mathrm{en}}$)**.** *Если положить, что сотрудничество фирм носит односторонний характер, то равновесное поведение фирм в части производственного и инвестиционного поведения сохраняется и определяется согласно* (3.27) – (3.28), *а сетевое поведение фирмы* $i \in \mathcal{N}$ *в равновесии по Нэшу приобретает следующий вид:*

$$\tilde{g}_{ij}(0) = \begin{cases} 1, & \pi_{ij}(0) < \dfrac{\varepsilon_i(0)}{\alpha_i(0)} (\beta_{ij}(0) - \gamma_{ij}(0))\, \tilde{y}_i(0)\, \tilde{y}_j(0), \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}.$$

Связь между производственным и инвестиционным поведением каждой фирмы в равновесии по Нэшу характеризуется следующим замечанием, которое можно заключить согласно (3.28).

Замечание 3.6. *Инвестиционное поведение фирмы* $i \in \mathcal{N}$ *в равновесии по Нэшу для модели* $\widetilde{\Gamma}_0^{\mathrm{en}}$ *имеет линейную связь с ее производственным поведением.*

Перейдем к примеру, с результатами численного моделирования равновесия как при двухстороннем, так и при одностороннем сотрудничестве фирм в модели $\widetilde{\Gamma}_0^{\mathrm{en}}$ по условиям теоремы 3.5 и замечания 3.5. Придерживаясь тех же входных параметров моделирования, что и ранее, изменим лишь издержки сотрудничества для фирмы 4: $\pi_{4j}(0) = 1200, j = 1, 2, 3$ и представим результат в таблице 3.10 с округлением результатов до третьего знака после запятой.

Таблица 3.10. **Равновесие по Нэшу $\tilde{s}$ и соответствующие ему прибыли и удельные издержки фирм, а также цены товара в модели $\widetilde{\Gamma}_0^{\mathrm{en}}$**

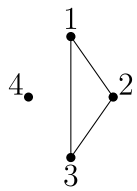
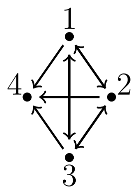
	двухстороннее сотрудничество				одностороннее сотрудничество			
$t:$	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
$\tilde{\mathbf{g}}_0$				–				
$\tilde{g}_1(0)$	(0,1,1,0)			–	(0,1,1,1)	–	–	–
$\tilde{g}_2(0)$	(1,0,1,0)			–	(1,0,1,1)	–	–	–
$\tilde{g}_3(0)$	(1,1,0,0)			–	(1,1,0,1)	–	–	–
$\tilde{g}_4(0)$	(0,0,0,0)			–	(0,0,0,0)	–	–	–
$\tilde{u}_1$	80.072	80.072	80.072	–	80.346	80.346	80.346	–
$\tilde{u}_2$	80.072	80.072	80.072	–	80.346	80.346	80.346	–
$\tilde{u}_3$	80.072	80.072	80.072	–	80.346	80.346	80.346	–
$\tilde{u}_4$	78.696	78.696	78.696	–	78.283	78.283	78.283	–
$\tilde{y}_1(0)$	2.043			–	2.044			–
$\tilde{y}_2(0)$	2.043			–	2.044			–
$\tilde{y}_3(0)$	2.043			–	2.044			–
$\tilde{y}_4(0)$	2.038			–	2.037			–
$\tilde{c}_1(t)$	100.000	98.218	105.093	112.449	100.000	97.196	104.000	111.280
$\tilde{c}_2(t)$	100.000	98.218	105.093	112.449	100.000	97.196	104.000	111.280
$\tilde{c}_3(t)$	100.000	98.218	105.093	112.449	100.000	97.196	104.000	111.280
$\tilde{c}_4(t)$	100.000	100.267	107.285	114.795	100.000	100.268	107.287	114.797
$\tilde{P}$	181.088	181.088	181.088	–	180.679	180.679	180.679	–
$\tilde{J}_1$	3 928.200				4 254.398			
$\tilde{J}_2$	3 928.200				4 254.398			
$\tilde{J}_3$	3 728.200				3 954.398			
$\tilde{J}_4$	2 903.154				2 720.382			

Таблица 3.11. **Верхние границы допустимых издержек сотрудничества в модели $\widetilde{\Gamma}_0^{\text{en}}$**

$\widetilde{\Gamma}_0^{\text{en}}$	двухстороннее сотрудничество				одностороннее сотрудничество			
$i \setminus j$	1	2	3	4	1	2	3	4
1	0	1159.403	1159.403	1156.710	0	1160.477	1160.477	1156.439
2	1159.403	0	1159.403	1156.710	1160.477	0	1160.477	1156.439
3	1159.403	1159.403	0	1156.710	1160.477	1160.477	0	1156.439
4	1156.710	1156.710	1156.710	0	1156.439	1156.439	1156.439	0

Опираясь на данные таблиц 3.10 и 3.11, можно как и ранее объяснить равновесное сетевое поведение фирм, ввиду чего здесь это опускается.

Если при численном моделировании равновесия в модели $\widetilde{\Gamma}_0^{\text{en}}$ придерживаться входных параметров представленных на странице 63, то верхние границы допустимых издержек сетевого сотрудничества фирм были бы общими, $\tilde{\pi}_{ij}(0) = 1158.862$, где $i, j \in \mathcal{N}$, такие что $i \neq j$. В таком случае все фирмы были бы заинтересованы в сетевом сотрудничестве со всеми своими конкурентами, независимо от характера формирования связи в сети $\tilde{\mathbf{g}}(0)$. При этом, если также к данных таблицы 3.8, можно заметить, что при единоразовых инвестиционных вложениях, верхние границы допустимых издержек сетевого сотрудничества фирм оказываются значительно ниже соответствующих границ при регулярных инвестиционных вложениях (модели $\bar{\Gamma}_0^{\text{en}}$ и $\bar{\bar{\Gamma}}_0^{\text{en}}$). Таким образом можно прийти к следующему наблюдению.

Наблюдение 3.1. *Значения верхних границ допустимых издержек сетевого сотрудничества зависят от продолжительности инвестиционных вложений фирм.*

3.5. Основные результаты и выводы по третьей главе

Представленные результаты моделирования равновесия в модели $\widetilde{\Gamma}_0^{\text{en}}$ (с единоразовыми инвестиционными вложениями фирм), позволяют сделать одно простое, но тем не менее важное с точки зрения экономического анализа замечание, руководство которым, способствует стабилизации и поддержанию баланса торгово-потребительского взаимодействия на рынке сбыта определенного товара:

отсутствие инвестиционных вложений фирм с момента времени $t = 1$ влечет монотонное возрастание удельных издержек фирм ($\delta = 1.07$) и монотонное убывание промежуточных прибылей фирм, как следствие — снижение рентабельности и ликвидности производства у каждой фирмы.

В условиях инвестиционно-сетевой модификации олигополии Курно, единственный возможный вариант поддержания ликвидности производства и увеличения прибыли в модели $\widetilde{\Gamma}_0^{\mathrm{en}}$, что можно обобщить на все рассмотренные в главе модели, — инвестирование фирм в модернизацию собственных производственных технологий и другие составляющие удельных издержек производства. Целесообразность сотрудничества при этом с другими фирмами способствует экономии инвестиционных вложений и повышению промежуточных прибылей, а для потребителей товара — снижение рыночной стоимости единицы товара. А значит положительное инвестиционное поведение конкурирующих фирм является выгодным для всех участников рынка.

В настоящей главе была предпринята попытка ответить в представленной «потребности» на фундаментальные вопросы равновесного поведения и соответствующего условия целесообразного сотрудничества каждой пары фирм. Допущения, предложенные для моделей данной главы, позволили найти и проанализировать равновесное поведение фирм в условиях рыночной конкуренции, что позволяет выделить эти модели как практико-ориентированные. На основе данных моделей можно находить и анализировать равновесное поведение фирм, сравнить и оценить перспективность их долгосрочного и краткосрочного сотрудничества при различных вариантах характера инвестиционного поведения. Показано, что разница в прибылях фирм не доставляет значимого отличия в рассматриваемых моделях на небольшом временном отрезке, что нельзя сказать о динамике их конкурентоспособности. Так в разделе 3.3 отмечается, что при краткосрочном сотрудничестве наибольшие изменения конкурентоспособности наблюдаются при одностороннем сотрудничестве и острожном инвестиционном поведении фирм, а при долгосрочном сотрудничестве — в условиях одностороннего сотрудничества и рискованном инвестиционном поведении.

Важно отметить, что результаты сравнительного анализа представленные в подразделах исследования 3.1.3, 3.2.3, а также в разделе 3.3 носят «частный характер», основанный на предположении о том, что сетевые параметры являются постоянными во времени и общими при различных вариантах продолжительности сотрудничества фирм. Однако очевидно, что если издержки сотрудничества, например, сопряжены с арендой складского помещения для хранения товара, то аренда на более продолжительный срок может быть значительно дешевле чем на короткий. Ввиду чего сформулированные в главе теоремы о равновесном поведении фирм рекомендуется применять в анализе перспективности потенциального сотрудничества для каждого возможного варианта входных параметров отдельно — чтобы объективно можно было бы сделать вывод о преимуществе какого-либо вида продолжительности сотрудничества для рассматриваемого набора входных параметров.

Основные результаты исследования, описанные в данной главе, представлены в публикации [29].

Заключение

Диссертационное исследование посвящено поиску и анализу равновесного поведения конкурирующих фирм в динамических моделях с сетевым взаимодействием, и относится к теории динамических сетевых игр. В рамках проведенного исследования была построена инвестиционно-сетевая модификация олигополии Курно, в которой фирмы, конкурирующие на общем рынке сбыта, наделены возможностью реализовывать многокомпонентное стратегическое поведение в динамике. При этом, рассматриваемая концепция была применена к двум вариантам формирования сетевого взаимодействия фирм — экзогенному (глава 1) и эндогенному (глава 2). Предложена адаптация моделей с эндогенным формированием сетевого взаимодействия к поиску и анализу равновесного поведения фирм в близких на практике условиях рыночной экономики (глава 3).

Проведенное исследование характеризуется следующими результатами:

1. Построена и исследована теоретико-игровая динамическая модель с экзогенным формированием сетевого взаимодействием (инвестиционно-сетевая модификация олигополии Курно). Для этой модели получен функциональный вид равновесного по Нэшу поведения фирм в классе программных стратегий. Дополнительно для этой модели получено равновесие по Нэшу в классе позиционных стратегий. Оба равновесия охарактеризованы. Проведен сравнительный анализ полученных равновесий и установлена «близость» рассматриваемых значений в найденных ситуациях равновесия.

2. Отдельное внимание уделено анализу влияния сетевых параметров (сетевой структуры и связанных с ней коэффициентов) на поведение фирм в равновесии. Рассмотрено влияние структуры сетевого взаимодействия фирм на изменение удельных издержек, конкурентоспособности и прибыли фирм, а также на цену единицы товара на рынке.

3. Получен функциональный вид равновесного по Нэшу поведения фирм в динамике при эндогенном формировании сетевого взаимодействия и программной информационной структуре в модели.

4. Получен функциональный вид равновесного по Нэшу поведения фирм для двух вариантов сетевого взаимодействия — с формированием постоянной и переменной структуры сети. При этом издержки, сопряженные с сетевым взаимодействием фирм рассмотрены также в двух вариантах — единоразовых и регулярных. Проведен сравнительный анализ полученных результатов.

5. Предложены и аргументированы допущения, служащие адаптацией исследуемых теоретико-игровых моделей к практическому сотрудничеству конкурирующих на рынке фирм. Рассмотрены условия выбора бизнес-партнеров и варианты продолжительности сотрудничества фирм в равновесии по Нэшу. Проведен сравнительный анализ равновесия по Нэшу для двух вариантов инвестиционного поведения фирм, которые распространены в реальных условиях — рискованного (переменного) и осторожного (постоянного) с учетом продолжительности сетевого сотрудничества.

6. Получен функциональный вид равновесного поведения фирм в условиях их единоразового инвестирования в свое производство. Показана связь изменения верхних границ допустимых издержек сетевого сотрудничества с продолжительностью инвестиционных вложений фирм.

7. Для каждой исследуемой в работе модели с эндогенным сетевым взаимодействием получены условия равновесного сетевого поведения конкурентов, выполнение которых делает фирмы заинтересованными в сетевом взаимодействии со своими конкурентами. При этом рассмотрены два варианта формирования сетевого взаимодействия, которое представляется односторонними или двухсторонними связями между фирмами. В работе отмечается, что в сетевых структурах, которые формируются при реализации фирмами своего равновесного сетевого поведения, ни одной фирме невыгодно в одностороннем порядке разрывать какую-либо из имеющихся у нее связей, равно как и стремиться к созданию новой, для которой условие равновесного сетевого поведения не выполнено.

Остается заключить, что все задачи, сформулированные в рамках исследования, выполнены, а поставленная цель достигнута в полном объеме.

Список литературы

1. Алгазин Г. И., Алгазина Д. Г. Моделирование сетевого взаимодействия на конкурентных рынках // Управление большими системами. 2013. Вып. 43. С. 172–216.
2. Базенков Н. И. Теоретико-игровые алгоритмы формирования децентрализованных беспроводных сетей: дис. на соискание уч. ст. канд. тех. наук: 05.13.11 / Н. И. Базенков. – М., 2014. — 125 с.
3. Беллман Р. Динамическое программирование / М.: Изд-во иностр. литературы. 1960. — 400 с.
4. Бреер В. В., Мирзоян Г. Л., Новиков Д. А. Инновационная олигополия Курно // Проблемы управления. 2015. № 5. С. 45–57.
5. Булавский В. А. Модель олигополии с рынками производственных факторов // Экономика и математические методы. 1999. Т. 35. № 4. С. 78–86.
6. Булавский В. А., Калашников В. В. Равновесие и обобщенных моделях Курно и Штакельберга // Экономика и математические методы. 1995. Т. 31, вып. 4. С. 151–163.
7. Булгакова М. А. Динамические сетевые игры с попарным взаимодействием: дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук: 1.2.3 / М. А. Булгакова. – СПб., 2022. — 108 с.
8. Бурков В. Н., Кузнецов Н. А., Новиков Д. А. Механизмы управления в сетевых структурах // Автоматика и телемеханика. 2002. № 12. С. 96–115.; Burkov V. N., Kuznetsov N. A., Novikov D. A. Mechanisms of control in network structures // Automation and Remote Control. 2022. Vol. 63. Iss. 12. P. 1947–1965.
9. Васин А. А., Васина П. А., Рулева Т. Ю. Об организации рынков однородных товаров // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 1. С. 98–112.
10. Васин А. А., Морозов В. В. Введение в теорию игр с приложениями к экономике (учебное пособие). – М.: 2003. — 278 с.
11. Гераськин М. И., Чхартишвили А. Г. Анализ игровых моделей рынка олигополии при ограничениях по мощности и конкурентоспособности агентов // Автоматика и телемеханика. 2017. Вып. 11, С. 105–121.

12. Губанов Д. А. Модели и методы информационного влияния и управления в активных сетевых структурах: дис. на соискание уч. ст. док. тех. наук: 05.13.10 / Д. А. Губанов. – М. 2021. — 307 с.
13. Губанов Д. А., Новиков Д. А. Чхартишвили А. Г. Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. – М.: МЦНМО. 2018. — 224 с.
14. Губко М. В., Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г. Сетевые игры и игры на сетях // Расширенные тезисы докладов рабочего совещания "Сетевые игры и менеджмент". Петрозаводск: КарНЦ РАН. 2009. С. 13–17.
15. Губко М. В. Теоретико-игровая модель формирования торговой сети // Управление большими системами. 2004. № 6. С. 56–83.
16. Губко М. В. Управление организационными системами с сетевым взаимодействием агентов. I. Обзор теории сетевых игр // Автоматика и телемеханика. 2004. № 8. С. 115–132.
17. Губко М. В. Управление организационными системами с сетевым взаимодействием агентов. II. Задачи стимулирования // Автоматика и телемеханика. 2004. № 9. С. 131–148.
18. Дрешер, М. Стратегические игры / М. Дрешер. - М.: Издательство «Советское радио», 1964. - 352 с.
19. Дюсуше О. М. Статическое равновесие Курно-Нэша и рефлексивные игры олигополии: случай линейных функций спроса и издержек // Экономический журнал ВШЭ. – 2006.– №1. – С. 3–32.
20. Жуковский В. И., Чикрий А. А. Введение в дифференциальные игры при неопределенности: Равновесие по Нэшу / Отв. ред. В. С. Молоствов. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: КРАСАНД. 2010. — 168 с.
21. Жуковский В. И. Дифференциальные уравнения. Линейно-квадратичные дифференциальные игры: учебное пособие для вузов / В. И. Жуковский, А. А. Чикрий; отв. редактор В. А. Плотников. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Изд. Юрайт. 2021. – 322 с.
22. Зайцева И. В., Малафеев О. А. Теория игр: учебное пособие / И. В. Зайцева, О. А. Малафеев. – Санкт-Петербург: РГГМУ. 2021. — 174 с.
23. Зенкевич Н. А., Петросян Л. А., Янг Д. В. К. Динамические игры и их приложения в менеджменте: уч. пособие / Высшая школа менеджмента СПб-

ГУ. — СПб.: Изд-во «Высшая школа менеджмента». 2009. — 415 с.
24. Колокольцов В. Н. Малафеев О. А. Математическое моделирование многоагентных систем конкуренции и кооперации (Теория игр для всех): уч. пос. — СПб.: Изд. «Лань». 2012. — 624 с.
25. Королев А. В. Математические модели управления в экономических системах с сетевой структурой: дис. док. физ.-мат. наук: 01.01.09 / А. В. Королев. – СПб. 2022. — 506 с.
26. Кочевадов В. А. Равновесие по Нэшу в динамических моделях конкуренции с сетевым взаимодействием фирм / Программа для ЭВМ. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU2023685627, дата регистрации 29.11.2023 г., номер и дата поступления заявки – 2023683922, 13.11.2023 г., дата публикации 29.11.2023, Бюллетень ФИПС №12.
27. Кочевадов В. А., Седаков А. А. Динамическая сетевая модель производства с инвестированием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. № 1. С. 10–26.
28. Кочевадов В. А., Седаков А. А. Динамические модели конкуренции с эндогенным формированием сетевой структуры // Математическая теория игр и ее приложения. 2023. Т. 15, № 2, С. 53–74.
29. Кочевадов В. А., Седаков А. А. Динамические модели конкуренции с эндогенным формированием сетевой структуры при постоянном объеме производства // Математическая теория игр и ее приложения. 2023. Т. 15. № 4. С. 54–78.
30. Малафеев О. А., Парфенов А. П. Решение сетевых игр // Математическое и компьютерное моделирование социально-экономических систем на уровне многоагентного взаимодействия (введение в проблемы равновесия, устойчивости и надежности). СПб.: СПбГУ. 2006. С. 697–710.
31. Мазалов В. В. Математическая теория игр и приложения: Учебное пособие. – 2-е изд., стер. — СПб.: Изд-во «Лань». 2016. — 448 с.
32. Мазалов В. В., Чиркова Ю. В. Сетевые игры: Учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань». 2018. — 320 с.
33. Молотникова А. А. Моделирование экономических, экологических и социально-политических систем: Учебник для вузов. — СПб.: Изд-во «Лань».

2023. — 352 с.

34. Мулен, Э. Теория игр с примерами из математической экономики. Пер. с франц. / Э. Муллен. - М.: Мир. 1985. — 200 с.
35. Нейман Д. фон, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. – М.: «Наука». 1970. — 707 с.
36. Новиков Д. А. Игры и сети // Математическая теория игр и ее приложения. 2010. Т. 2. № 1. С. 107–124.
37. Новиков, Д. А. Сетевые структуры и организационные системы / Д.А. Новиков. - М.: Институт проблем управления РАН (научное издание). 2003. — 102 с.
38. Оуэн Г. Теория игр: Пер. с англ./ Под ред. А. А. Корбута. Изд. 5-е. М.: Издательство ЛКИ. 2010. — 216 с.
39. Парфенов А. П. Алгоритм нахождения равновесий в динамической сетевой игре // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Том 5, Вып. 1, С. 45–60.
40. Парфенов А. П. Многошаговые сетевые игры управления потоками // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. 2009. Вып. 4. С. 200–212.
41. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. Теория игр: учебник / Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, Е. В. Шевкопляс. — 2-е изд., перераб. и доп. — СПб.: БХВ-Петербург. 2012 — 432 с.
42. Седаков А. А. Динамические сетевые игры: дис. на соискание уч. ст. док. физ.-мат. наук: 01.01.09 / А. А. Седаков. — СПб. 2020. — 611 с.
43. Серебрякова Е. Е. Исследование социально-экономических взаимодействий в рамках динамических теоретико-игровых моделей на графах: дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Е. Е. Серебрякова. — М., 2020. — 148 с.
44. Сунь П. Теоретико-игровые модели формирования сетей с асимметричными игроками: дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук: 1.2.3 / Сунь Пин. — СПб., 2023. — 177 с.
45. Abouheaf, M. I., Lewis, F. L., Vamvoudakis, K. G., Haesaert, S., Babuska, R. Multi-agent discrete-time graphical games and reinforcement learning solutions // Automatica. 2014. Vol. 50. №. 12. P. 3038–3053.

46. Azariadis, C., Chen, B.-L., Lu, C.-H., Wang, Y.-C. A two-sector model of endogenous growth with leisure externalities // Journal of Economic Theory. 2013. V. 148. P. 843–857.
47. Başar, T., Olsder, G. J. Dynamic Noncooperative Game Theory: Society for Industrial and Applied Mathematics. 1999. — 519 p.
48. Bala, V., Goyal, S. A non-cooperative model of network formation // Econometrica. 2000. Vol. 68. №. 5. P. 1181–1231.
49. Ballester, C., Calvó-Armengol, A., Zenou, Y. Who's who in networks. Wanted: The key player // Econometrica. 2006. Vol. 74. №. 5. P. 1403–1417.
50. Bazenkov, N. Double Best Response Dynamics in Topology Formation Game for Ad Hoc Networks // Automation and Remote Control. 2015. Vol. 72, № 8, pp. 345–357.
51. Beck, A., Teboulle, M. Global optimality conditions for quadratic optimization problems with binary constraints // Journal on Control and Optimization Vol. 11. № 1, pp. 179–188.
52. Bertrand, J. Book review of theorie mathematique de la richesse sociale and of recherches sur les principles mathematiques de la theorie des richesses // Journal de Savants. - 1883. - v. 67. – P. 499–508.
53. Billionnet, A., Elloumi, S. Using a Mixed Integer Quadratic Programming Solver for the Unconstrained Quadratic 0-1 Problem // Mathematical Programming, Ser. A 109. 2007. P. 55–68.
54. Bloch, F. Endogenous Structures of Association in Oligopolies // The RAND Journal of Economics. 1995. Vol. 26. № 3. pp. 537–556.
55. Bramoullé, Y., Kranton, R. Public goods in networks // Journal of Economic Theory. 2007. Vol. 135. P. 478–494.
56. Bulow, J., Geanakoplos, J., Klemperer, P. Multimarket oligopoly: strategic substitutes and complements // Journal of Political Economy. 1985. Vol. 93. №. 3. P. 488–511.
57. Burkov, V. N., Kuznetsov, N. A., Novikov, D. A. Mechanisms of control in network structures // Automation and Remote Control. 2022. Vol. 63. Iss. 12. P. 1947–1965.
58. Cellini, R., Lambertini, L. Dynamic R&D with spillovers: Competition vs cooperation // Journal of Economic Dynamics & Control. 2009. Vol. 33.

P. 568–582.
59. Cournot, A. O. Recherches sur les principes mathematiques de la theorie des richesses par Augustin Cournot. Paris: Hachette. 1838. — 198 p.
60. Engwerda, J. C. On the open-loop Nash equilibrium in LQ-games // Journal of Economic Dynamics & Control, 22(5), 1998. P. 729–762.
61. Feri, F., Meléndez-Jiménez, M. Coordination in evolving networks with endogenous decay // Journal of Evolutionary Economics. 2013. Vol. 23. P. 955–1000.
62. Galeotti, A., Goyal, S., Jackson, M. O., Vega–Redondo, F., Yariv, L. Network games // Review of Economic Studies. 2010. Vol. 77. P. 218–244.
63. Goyal, S., Joshi, S. Networks of collaboration in oligopoly // Games and Economic Behavior. 2003. Vol. 43. № 1. P. 57–85.
64. Goyal, S., Moraga-Gonzalez, J. L. R&D networks // The RAND Journal of Economics. 2001. Vol. 32. № 4. P. 686–707.
65. Grisáková, N., Štetka, P. Cournot's Oligopoly Equilibrium under Different Expectations and Differentiated Production // Games. 2022. Vol. 13(6), № 82. 17 p.
66. Grossman, G., Maggi, G. Diversity and trade // American Economic Review. 2000. V. 90. P. 1255-–1275.
67. Jackson, M. O. Social and economic networks. Princeton: Princeton University Press, 2008. — 102 p.
68. Jackson, M. O., Wolinsky, A. A strategic model of social and economic networks // Journal of economic theory. 1996. Vol. 71. P. 44–74.
69. Jackson, M. O., Zenou, Y. Games on networks. // Handbook of game theory with economic applications (Young P., Zamir S. eds.). 2015. Vol. 4. Amsterdam, Elsevier Science. P. 95–164.
70. Kearns, M., Littman, M. L., Singh, S. Graphical models for game theory // In: Breese J., Koller D. (eds.) Proceedings of the 17th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 2001. P. 253–260.
71. Kranton, R. E., Minehart, D. E. A Theory of Buyer-Seller Networks // American Economic Review, 91 (3): 2001. P. 485–508.
72. Li, D., Sun, X. L., Liu, C. L. An exact solution method for unconstrained

quadratic 0–1 programming: a geometric approach // Journal of Global Optimization. 2012. P. 797–829.

73. Martemyanov, Y. P., Matveenko, V. D. On the dependence of the growth rate on the elasticity of substitution in a network // International Journal of Process Management and Benchmarking. 2014. Vol. 4. P. 475–492.
74. Mesterton-Gibbons, M. An introduction to game theoretic modelling / Third Edition, AMS, 2019. — 395 p.
75. Metzler, C., Hobbs, B. S., Pang, J.-S. Nash-Cournot Equilibria in Power Markets on a Linearized DC network with Arbitrage: Formulations and Properties // Networks and Spatial Economics. 2003. Vol. 3, № 2. P. 123–150.
76. Milgrom, P., Roberts, J. The economics of modern manufactoring: technology, strategy, and organisation // American Economic Review. 1990. Vol. 80. P. 511–518.
77. Milgrom, P., Roberts, J. Complementarities and systems: understanding japanese economic organisation // Estudios Economicos. 1994. Vol. 9. P. 3–42.
78. Nash, J. Non-cooperative games // The Annals of Mathematics. 1951. Vol. 54. P. 286–295.
79. Novshek, W. On the Existence of Cournot Equilibrium // Review Economic Studies. – 1985. Vol. 52(1), № 168. P. 85–98.
80. Owen, G. Game Theory. Monterey, CA: Emerald Group Publishing Limited, 2013. 500 p.
81. Salehisadaghiani, F., Pavel, L. Distributed Nash equilibrium seeking: A gossip-based algorithm // Automatica. 2016. Vol. 72. P. 209–216.
82. Salehisadaghiani, F., Pavel, L. Distributed Nash equilibrium seeking in networked graphical games // Automatica. 2018. Vol. 87. P. 17–24.
83. Shapiro, C. Theories of Oligopoly Behavior // Discussion paper 126. Woodrow Wilson School. Princeton Univer. Press, 1987. 102 p.
84. Sherali, H. D., Soyster, A. L., Murphy, F. H. Stackelberg-Nash-Cournot Equilibria: Characterizations and Computations // Operatios Research. 1983. Vol. 31, № 2. P. 253–276.
85. Topkis, D. M. Supermodularity and complementarity. Princeton: Princeton University Press, 1998. — 288 p.
86. Vasin, A. A., Shamanaev, A. S. Cournot equilibria in model of a two-

hub homogeneous commodity market // Computational Mathematics and Modeling, Vol. 21, № 1, 2010. P. 51–69.
87. Vives X. Strategic complementarity in multi-stage games // Journal of Economic Theory. 2009. V. 40, P. 151–171.
88. Von, Neumann, J. Theory of Games and Economic Behavior / J. Von Neumann, O. Morgenstern. – Princeton: Princeton University press, 1944. — 625 p.
89. Yeung, D. W. K. On differential games with a feedback Nash equilibrium // Journal of Optimization Theory and Applications 82, 1994. P. 181–188.
90. Yeung, D. W. K., Petrosyan, L. A., Zhang, Y.-X. A Dynamic Network Game of the Fintech Industry // Journal of the Operations Research Society of China. 2023. https://doi.org/10.1007/s40305-022-00434-4.
91. Zhao, J., Ni, J. A dynamic analysis of corporate investments and emission tax policy in an oligopoly market with network externality // Operations Research Letters. 2020. Vol. 49. P. 81–83.