

Карельский научный центр Российской академии наук

На правах рукописи

Хитрая Виталия Андреевна

**Теоретико-игровые меры центральности в сетях и
приложения**

Научная специальность 1.2.3.

Теоретическая информатика, кибернетика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор

Мазалов Владимир Викторович

Петрозаводск

2024

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Теоретико-игровой подход	
к вычислению центральности	12
1.1 Меры центральности в теории графов	12
1.2 Вектор Майерсона как мера центральности	
вершин ориентированного графа	16
1.3 Интегральная центральность	20
1.3.1 Частные случаи: цикл и полный граф	23
1.3.2 Аксиомы центральности	24
1.4 Вычисление центральности вершин	
ориентированных графов с циклами	27
1.5 Центральность вершин графа на основе турнирной матрицы . . .	32
1.6 Вектор Майерсона как мера центральности вершин	
неориентированного графа	34
1.7 Модификация вектора Майерсона	37
1.8 Частные случаи	44
1.8.1 Граф-звезда	44
1.8.2 Цепь	46
Глава 2. Ранжирование вершин графа с использованием	
абсолютных потенциалов узлов электрической цепи . .	47
2.1 Ранжирование вершин графа, основанное на матрице Лапласа . .	47
2.2 Частные случаи	52
2.2.1 Клика	52
2.2.2 Граф-звезда	53
2.2.3 Двойная звезда	57
2.2.4 Двудольный граф	60

	Стр.
2.3 Ранжирование, учитывающее веса вершин	66
2.3.1 Частные случаи:	
звезда, клика, полный двудольный граф	70
Глава 3. Применение предложенных методов к задачам	
ранжирования вершин графа	72
3.1 Транспортная система города Петрозаводск	72
3.1.1 Построение модели транспортной сети	72
3.1.2 Районы города Петрозаводск	77
3.1.3 Ранжирование вершин графа транспортной сети города .	81
3.2 Муравьиная колония	90
3.3 Санкт-Петербургский метрополитен	96
3.4 Социальная сеть саги Звездные Войны	101
Заключение	110
Список литературы	112
Список рисунков	123
Список таблиц	126
Приложение А. Ежедневный пассажиропоток на станциях	
Санкт-Петербургского метрополитена	127

Введение

Актуальность темы.

Развитие социальных сетей оказало огромное влияние на развитие новых методов сетевого анализа, в том числе теоретико-игровых. Методы анализа социальных сетей применяются во многих областях, таких как экономика, физика, биология и информационные технологии. Под социальной сетью на качественном уровне понимается социальная структура, состоящая из множества агентов (субъектов – индивидуальных или коллективных, например, индивидов, семей, групп или организаций) и определенного на нем множества отношений (совокупности связей между агентами, например, знакомства, сотрудничества, коммуникации) [1]. Для описания такого рода сети удобно использовать граф, в котором конечное множество вершин соответствует множеству агентов, а множество ребер отражает взаимодействие данных агентов.

Концепция современного сетевого анализа была сформулирована на основе работ Дж. Морено [2] через карты отношений между агентами (матрицы смежностей) и визуализации этих карт (собственно, графы) [3].

Многие задачи анализа систем сводятся к анализу графов. Структурный анализ графов представляет собой эффективный инструмент исследования сложных систем, обнаружения скрытых паттернов и прогнозирования поведения. Он является неотъемлемой частью аналитики данных, науки и разработки продуктов, где взаимосвязи между элементами системы играют важную роль. Например, в социальных сетях понимание структуры социальных связей между людьми или организациями позволяет исследовать информационное влияние, выявлять ключевых агентов, определять группы или сообщества, а также анализировать распространение информации или заболеваний. Ранжирование вершин может помочь выделить наиболее важных лидеров сообщества, которые имеют наибольшее влияние на других участников [4]. В биоинформатике структурный анализ позволяет изучать молекулярные структуры, генные сети

и белковые взаимодействия. Методы ранжирования вершин используются для нахождения ключевых белков, которые контролируют многие биологические процессы [5], для выделения ключевых участков генома, связанных с различными заболеваниями [6; 7]. Методы ранжирования вершин могут использоваться для решения задач машинного обучения, например, для распознавания образов или предсказания риска заболевания. Предварительное ранжирование вершин графа позволяет повысить эффективность решения некоторых прикладных задач оптимизации [8]. В виде графов могут быть также представлены пиринговые системы. В них важное место занимает расположение вершин и ранжирование вершин в зависимости от расположения в системе. Для этого могут быть использованы меры центральности [9–12].

В связи с вышесказанным, исследование и разработка новых методов ранжирования вершин графа может привести к улучшению качества решения различного рода актуальных в современном мире задач. В целом графы являются мощным инструментом для представления сложных связей между объектами или сущностями.

Центральность вершины – одно из ключевых понятий при исследовании структурных характеристик графа. Зачастую в небольших системах определить наиболее центральную вершину можно интуитивно. Как отмечают Д. Брасс и М. Буркхардт [13], описывая сетевую структуру, «большинство людей просто смотрели бы на диаграмму и объявляли бы, кто из центральных действующих лиц является самым могущественным». В Массачусетском технологическом университете в 50-х годах XX века А. Бавеласом [14] и Г. Ливиттом [15] был проведен ряд исследований, в результате которых исследователи пришли к выводу, что центральная роль связана с социальным статусом, властью и удовлетворенностью агента групповой деятельностью [16].

Мера центральности демонстрирует, насколько важна вершина для графа в целом, насколько удачно она расположена на путях, соединяющих вершины графа, является ли она ключевой для поддержания связей между остальными

вершинами. Центральность вершины графа имеет большое значение для анализа транспортных систем, социальных, электрических и других сетей.

Одним из первых определений центральности было понятие “betweenness centrality” [17], которое было связано с кратчайшими путями, которые проходят через рассматриваемую вершину. Однако, рассмотрение только кратчайших путей вызывает серьезные возражения, поскольку информация может распространяться и не обязательно по кратчайшему пути. Поэтому появились меры центральности, основанные на случайных блужданиях [18; 19] и другие меры центральности, основанные на вычислении обратной матрицы Лапласа. Последние имеют хорошую аналогию с электрическими сетями и законами Кирхгофа [20—22]. В последнее время появились работы, связанные с теоретико-игровыми мерами центральности [23—28]. В качестве меры центральности можно рассматривать доход игрока в сети от экономического взаимодействия с другими связанными с ним игроками, где доход дисконтируется в зависимости от кратчайшего расстояния между игроками [29]. Теоретико-игровые методы также используются для кластеризации графов. Для этого используется понятие устойчивого по Нэшу коалиционного разбиения, при котором игрокам в собственной коалиции невыгодно присоединяться к игрокам других коалиций [30—33].

Для определения центральности вершин в графе может быть использован подход, связанный с теорией кооперативных игр. В этом случае для ранжирования вершин используется решение кооперативной игры. Р. Майерсон в своей статье 1976 года [34] предлагает описывать кооперацию между игроками с помощью неориентированного графа; в этом случае наличие ребра между двумя вершинами графа означает, что соответствующая этим вершинам пара игроков может взаимодействовать напрямую. Данное взаимодействие может описывать знакомство или сотрудничество, но также может трактоваться, как, например, наличие автомобильной дороги между двумя транспортными узлами или возможность передачи информации или ресурсов между организациями. Для такого класса задач Майерсон предложил распределять выигрыш между

игроками по схеме Шепли [35]. В дальнейшем этот подход стал известен как вектор Майерсона [36]. Несмотря на большое количество разработанных методов распределения выигрыша между игроками в сети, таких как [37—43], вектор Майерсона является одним из наиболее используемых.

Целью диссертационной работы является разработка новых теоретико-игровых методов анализа структуры графов и их приложения в транспортных системах, в социальных и коммуникационных сетях.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработка метода нахождения центральности вершин в ориентированных графах, основанного на числе появлений вершин в путях фиксированной длины.
2. Разработка метода нахождения центральности вершин в неориентированных графах, основанного на числе появлений вершин в путях фиксированной длины.
3. Разработка метода оценки центральности вершин графа, основанного на значениях абсолютных потенциалов узлов электрической цепи, вычисленных с помощью матрицы Лапласа.
4. Построение модели транспортной системы г. Петрозаводск для апробации предложенных методов.

Методология и методы исследования. В работе используются методы теории графов, линейной алгебры, теории кооперативных игр.

Связь работы с научными программами: результаты работы частично были получены в рамках выполнения исследований при финансовой поддержке РФФ (№ 22-11-20015) совместно с органами власти Республики Карелия, и Фонда венчурных инвестиций Республики Карелия (ФВИ РК).

Апробация работы. Основные результаты работы были представлены на следующих семинарах и конференциях:

1. LIV Международная конференция аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» Control Processes and Stability (CPS'23), Санкт-Петербург, 3 - 7 апреля 2023 г.;
2. Всероссийская научная конференция «Теория и практика системной динамики», Апатиты, 3 - 7 апреля 2023 г.;
3. The Sixteenth International Conference on Game Theory and Management (GTM2023), Санкт-Петербург, 28-30 июня 2023г.;

а также на научных семинарах Института прикладных математических исследований КарНЦ РАН.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 7 научных работах, в т.ч. 1 статья в журнале, индексируемом в библиографической базе Web of Science; 2 статьи в журнале, индексируемом в библиографическом списке Scopus; 1 статья в журнале, индексируемом в библиографическом списке RSCI; 3 статьи, в журналах, индексируемых в библиографической базе РИНЦ.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и 1 приложения. Полный объём диссертации составляет 129 страниц, включая 52 рисунка и 24 таблицы. Список литературы содержит 78 наименований.

Во **введении** отражены актуальность, значимость, поставлены цели работы; обоснованы научная новизна, теоретическая и практическая ценность проведенного исследования; сформулированы основные положения, выносимые на защиту.

Первая глава посвящена описанию теоретико-игрового подхода к вычислению центральности вершин графа, основанного на числе появлений вершин в путях. Описано использование вектора Майерсона в качестве меры центральности для ориентированных графов. Приведены формулы, позволяющие вычислить число появлений вершины в простых путях длины 2 и 3 через матрицу смежности. Вводится понятие интегральной центральности, как

определенного интеграла от функции дележа в кооперативной игре, где характеристическая функция определяется с помощью числа суммарного появления вершины графа в простых путях. Показано, что для такой меры центральности справедливы аксиомы Boldi – Vigna [44]. Также, предложена модификация значения Майерсона для вершин неориентированного графа на случай, когда в рассмотрение включаются циклы. Приведена формула для вычисления числа появлений вершин графа в путях фиксированной длины с циклами. Рассмотрен ряд частных случаев.

Во **второй главе** продемонстрирован подход к ранжированию вершин графа, основанный на значениях абсолютных потенциалов узлов электрической цепи. Предложена двухэтапная процедура ранжирования вершин графа с взвешенными ребрами, где на первом этапе вершины ранжируются на основании абсолютных потенциалов при последовательной подаче тока во все узлы цепи. На втором этапе строится турнирная таблица и проводится окончательное ранжирование, основанное на сумме ранее найденных рангов. Получены распределения рангов вершин для клики, графа-звезды, двойной звезды и полного двудольного графа. Для графа с взвешенными ребрами и вершинами предлагается процедура ранжирования, основанная на суммарной работе, необходимой для переноса заряда между узлами электрической цепи. Получены аналитические формулы для вычисления значений суммарной работы, совершаемой в вершинах графа-звезды, клики и полного двудольного графа.

В **третьей главе** представлены результаты применения предложенных методов к графам, полученным при решении ряда прикладных задач. Приводится описание процесса построения модели транспортной сети города Петрозаводск, где в качестве вершин рассматриваются перекрестки автомобильных дорог. Кроме того, показана применимость предложенных подходов к вычислению центральности вершин графа для анализа биологических популяций и в социальных сетях.

В **заключении** перечислены основные результаты проведенной работы.

Приложение А содержит таблицу с информацией о пассажиропотоке на станциях Санкт-Петербургского метрополитена.

Основные научные результаты:

1. В ходе выполнения диссертационной работы был предложен подход для вычисления значений центральности вершин ориентированных графов, как значение Майерсона в кооперативной игре, где характеристическая функция определяется через количество простых путей фиксированной длины в подграфе, порожденном коалицией. В более общем случае вводится понятие интегральной центральности, как значение определенного интеграла от функции дележа в кооперативной игре, где характеристическая функция определяется через полином по аналогии со схемой Джексона [45].
2. Предложен метод определения меры центральности вершин в неориентированном графе, основанный на модификации значения Майерсона в кооперативной игре, где в качестве характеристической функции выступает число путей (включая циклы) в подграфе, соответствующем коалиции.
3. Разработан метод оценки центральности вершин графов с взвешенными ребрами, основанный на значениях абсолютных потенциалов узлов электрической цепи, вычисленных с помощью матрицы Лапласа.
4. Разработан метод оценки центральности вершин графов с взвешенными вершинами и ребрами, основанный на суммарной работе по переносу зарядов между узлами электрической цепи.

Практическая значимость. В ходе выполнения диссертационной работы применение полученных результатов было продемонстрировано на примере транспортной сети г. Петрозаводска. Были определены наиболее важные участки, а также "узкие места". При этом получены аналитические выражения для нахождения значений центральности вершин с использованием различных подходов для решений кооперативных игр.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Предложен метод определения меры центральности вершин ориентированного графа, как значения Майерсона в кооперативной игре, где в качестве характеристической функции выступает число простых путей в подграфе, соответствующем коалиции.
2. Предложен метод ранжирования вершин графа, основанный на введенном понятии интегральной центральности, как значения определенного интеграла от функции дележа в кооперативной игре, где характеристическая функция определяется через суммарное число появления вершин в подграфе, соответствующем коалиции. Дано аксиоматическое обоснование данной меры центральности.
3. Предложен метод определения меры центральности вершин в неориентированном графе, основанный на модификации значения Майерсона в кооперативной игре, где в качестве характеристической функции выступает число путей (включая циклы) в подграфе, соответствующем коалиции.
4. Предложен метод оценки центральности вершин графа, основанный на значениях абсолютных потенциалов узлов электрической цепи, вычисленных с помощью матрицы Лапласа.
5. Предложен метод оценки центральности вершин графа с взвешенными вершинами, основанный на суммарной работе по переносу зарядов между узлами электрической цепи.

Глава 1. Теоретико-игровой подход к вычислению центральности

1.1 Меры центральности в теории графов

Центральность вершины в графе – показатель, определяющий наиболее важные вершины в графе. Центральность позволяет выявить наиболее значимые вершины, оценить, насколько удачно они расположены в графе, как они влияют на процессы, протекающие в сети. Существуют различные подходы расчета индексов (значений) центральности, каждый из которых имеет свою интерпретацию. Опишем наиболее распространенные подходы. Будем рассматривать граф G с множеством вершин V , $|V| = n$ и множеством ребер E .

Степенная центральность

Простейшей с точки зрения вычисления является степенная центральность (degree centrality) [46], которая в общем случае демонстрирует, сколько соседей у вершины.

$$c_D(v_i) = \sum_{\substack{v_j \in V \\ j \neq i}} a_{ij}, \quad (1.1)$$

где a_{ij} – элементы соответствующей матрицы смежности. Вершина, имеющая наибольшее число связей, является наиболее центральной. При анализе ориентированных графов могут учитываться числа входящих и исходящих связей (in-degree centrality, out-degree centrality) [47].

Центральность по посредничеству

Исторически одним из первых подходов является центральность по посредничеству (betweenness centrality) [48; 49]. Данная мера центральности основана на вычислении числа кратчайших путей, соединяющих все пары вершин в графе. Центральность вершины в этом случае определяется количеством

путей, проходящих через рассматриваемую вершину.

$$c_B(v) = \frac{1}{n_B} \sum_{s,t \in V} \frac{\sigma_{s,t}(v)}{\sigma_{s,t}}, \quad (1.2)$$

где $\sigma_{s,t}$ – число геодезических путей между вершинами s и t , $\sigma_{s,t}(v)$ – число геодезических путей между вершинами s и t , проходящих через вершину v . Коэффициент n_B выбирается следующим образом: $n_B = (n-1)(n-2)$, если вершина v не может быть начальной (s) или конечной (t), $n_B = n(n-1)$, иначе.

Центральность по близости

Также, одним из распространенных методов является центральность по близости (closeness centrality) [14; 50; 51], где наиболее центральная вершина находится ближе всех к другим вершинам сети. Степень близости определил А. Бавелас в 1950 году как величину, обратную удаленности:

$$c_C(v) = \frac{1}{\sum_{w \in V} d(v,w)}, \quad v,w \in V, \quad (1.3)$$

где $d(v,w)$ – длина кратчайшего пути в графе между вершинами v и w .

Для ориентированных графов могут быть рассмотрены кратчайшие расстояния из вершины или в вершину.

В работе [52] была предложена модификация этого подхода с учетом того, что в графах с неограниченно большими расстояниями между вершинами лучшие результаты показывает среднее гармоническое, а не среднее арифметическое. Таким образом была введена гармоническая центральность:

$$c_H(v) = \sum_{w \in V} \frac{1}{d(v,w)}. \quad (1.4)$$

Для ориентированных графов данный подход был рассмотрен в [44].

PageRank

В качестве одного из наиболее распространенных подходов к вычислению центральности вершин графа может быть рассмотрено ранжирование вершин с помощью метода PageRank. Этот метод можно связать с процессом случайного

блуждания [53]. На множестве n веб-страниц переход по гиперссылкам происходит с некоторой вероятностью α , при этом с вероятностью $1 - \alpha$ процесс может перейти на случайную веб-страницу, тогда стационарное распределение процесса может быть истолковано как финальная вероятность нахождения в вершинах графа. Чем больше вероятность, тем более важна вершина для системы, и тем, соответственно, больше ее значение центральности.

Матрица переходных вероятностей \tilde{P} вычисляется следующим образом

$$\tilde{P} = \alpha P + (1 - \alpha) \left(\frac{1}{n} \mathbb{E} \right), \quad (1.5)$$

где значение α выбирается из $(0,1)$, $\mathbb{E}_{n \times n}$ — единичная матрица, $P_{n \times n}$ — матрица, элементы которой равны:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{вершина } i \text{ имеет } k > 0 \text{ исходящих ссылок и } j \text{ — одна из них,} \\ 0 & \text{вершина } j \text{ не является исходящей ссылкой для } i, \\ \frac{1}{n} & \text{вершина } i \text{ не имеет исходящих ссылок, } k = 0. \end{cases},$$

Также метод PageRank может быть использован для взвешенного графа с весовой матрицей W и матрицей степеней вершин D , тогда матрица $P = D^{-1}W$.

Теоретико-игровая центральность

В последние годы все более широкое распространение получают теоретико-игровые меры центральности [24—27; 30; 54]. Во многих приложениях центральность, основанная на роли, которую вершина графа играет сама по себе, не является адекватной. Например, если рассмотреть задачу об остановке эпидемии, вакцинирование связанной группы более эффективно, чем вакцинирование отдельных людей. В этом случае вакцинируемая группа может рассматриваться как коалиция игроков в кооперативной игре.

Кооперативной игрой n лиц называется пара $\Gamma = \langle N, v \rangle$, где $N = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество игроков, $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ — отображение, ставящее в соответствие каждой коалиции $S \in 2^N$, где 2^N — множество всех подмножеств множества N , некоторое численное значение: $v(\emptyset) = 0$. Функция v называется характеристической функцией кооперативной игры [55].

Под решением кооперативной игры понимается дележ выигрыша grand-коалиции $v(N)$ между всеми игроками. Дележом в кооперативной игре Γ называется вектор $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, для которого выполняются *свойство индивидуальной рациональности*

$$X_i \geq v_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.6)$$

и *свойство коллективной разумности*

$$\sum_{i \in N} X_i = v(N). \quad (1.7)$$

Одним из наиболее популярных решений в теории кооперативных игр является вектор Шепли [35]. Напомним его определение. Обозначим через $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ произвольную перестановку игроков множества $N = \{1, \dots, n\}$. Предположим, что все перестановки σ равновероятны, и тогда вероятность каждой перестановки равна $1/n!$.

Рассмотрим игрока i . Представим, что коалиция будет сформирована при его появлении. Обозначим $P_\sigma(i) = \{j \in N : \sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(i)\}$ множество игроков, которые прибыли до его появления в перестановке σ . Вклад игрока i в этой коалиции равен

$$m_i(\sigma) = v(P_\sigma(i) \cup \{i\}) - v(P_\sigma(i)). \quad (1.8)$$

Определение. *Значение Шепли есть средний вклад каждого игрока во всех возможных перестановках*

$$\varphi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} m_i(\sigma) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} [v(P_\sigma(i) \cup \{i\}) - v(P_\sigma(i))], \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.9)$$

Существуют игры, где игроки связаны некоторыми отношениями, которые удобно описать графовой структурой, где вершины – это игроки, а ребра – взаимодействия между ними.

Кооперативной игрой n лиц с сетевой структурой называется тройка $\langle N, v, G \rangle$, где N – множество игроков, $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ – характеристическая

функция, G – граф связей игроков из множества N . Игроки $i, j \in N$ могут взаимодействовать напрямую только в том случае, если в графе G существует ребро ij .

Для игр, определенных на графах, Р.Майерсон модифицировал вектор Шепли. Он предположил, что естественно рассматривать несвязные коалиции как множество связанных компонент. Для каждой такой компоненты K ее выигрыш равен $v(K)$, и именно этот выигрыш распределяется между членами коалиции K . Распределение выигрыша производится по схеме Шепли. Р.Майерсон [34] ввел аксиомы, которые однозначно определяют такое распределение выигрыша для каждого игрока $i \in N$, данного графа G и характеристической функции v .

A1. *Аксиома компонентной эффективности.* Если S – связная компонента, то сумма выигрышей игроков коалиции равна ценности всей коалиции, т.е.

$$\sum_{i \in S} X_i(v, G) = v(S). \quad (1.10)$$

A2. *Аксиома справедливости.* Для любой пары игроков $i, j \in N$ оба игрока одинаково приобретают выгоду или теряют ее при добавлении или удалении ребра ij :

$$X_i(v, G) - X_i(v, G - ij) = X_j(v, G) - X_j(v, G - ij), \quad (1.11)$$

где $G - ij$ – граф G без ребра ij .

1.2 Вектор Майерсона как мера центральности вершин ориентированного графа

Определим на ориентированном графе $G = (N, E)$, где N – множество вершин, E – множество ребер, кооперативную игру $\Gamma = \langle N, v \rangle$. В данной игре N – множество игроков, на котором задана характеристическая функция

$v(K)$, $K \subset N$, равная числу простых путей фиксированной длины $k = 1, 2, \dots$ в подграфе, порожденном множеством игроков K . Для ранжирования вершин в ориентированном графе может быть использовано решение кооперативной игры в форме Шепли-Майерсона.

Теорема 1. Значение Майерсона для игрока $i \in N$ в кооперативной игре на ориентированном графе G , где характеристическая функция $v(K)$ определяется как количество направленных простых путей фиксированной длины k в подграфе, порожденном множеством $K \subset N$, может быть найдено по формуле

$$X_i = \frac{n_k(i)}{k+1}, \quad (1.12)$$

где $n_k(i)$ есть число простых путей длины k , проходящих через вершину i .

Доказательство. Для доказательства утверждения достаточно доказать выполнение аксиом Майерсона [34].

Для простоты предположим, что граф G связный. В нашем случае $v(N)$ – это количество направленных путей длины k в графе G . Перенумеруем все пути $l \in \{1, 2, \dots, v(N)\}$. Определим $\delta_l(i)$ следующим образом. Будем считать $\delta_l(i) = 1$, если вершина i находится в пути l и 0, иначе.

Тогда

$$\sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^n n_k(i) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^{v(N)} \delta_l(i) = \frac{1}{k+1} \sum_{l=1}^{v(N)} \sum_{i=1}^n \delta_l(i).$$

Каждый путь состоит из $k+1$ разных вершин (i_1, \dots, i_{k+1}) . Отсюда $\sum_{i=1}^n \delta_l(i) = k+1$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{k+1} \sum_{l=1}^{v(N)} \sum_{i=1}^n \delta_l(i) = v(N).$$

Таким образом, Аксиома 1 выполняется. Перейдем к Аксиоме 2.

Пусть, например, $ij \in E(G)$. Удалим это ребро, в данном случае, направленное. Тогда все пути длины k , которые ранее проходили через ребро ij , будут вычтены при подсчете путей одновременно из $n_k(i)$ и $n_k(j)$ в новом графе $G - ij$. Отсюда,

$$X_i(G) - X_i(G - ij) = X_j(G) - X_j(G - ij).$$

Таким образом, аксиома 2 также верна, что доказывает теорему. \square

Как следует из теоремы 1, значение Майерсона определяется через число простых путей заданной длины. Задача вычисления числа простых путей, проходящих через вершину, является нетривиальной. Однако, если ограничиться рассмотрением ориентированных графов, в которых нет двунаправленных ребер, можно вычислить число простых путей длины 2 и 3 по матрице смежности. Для вычислений нам понадобится квадрат и куб матрицы смежности.

Утверждение 1.1. Пусть A – матрица смежности ориентированного графа G , и A^2 – ее квадрат. Тогда число появлений вершины i в простых путях длины 2 $n_2(i)$ может быть вычислено по формуле

$$n_2(i) = \sum_{k=1}^n \left(a_{ik}^{(2)} + a_{ki}^{(2)} \right) + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ki} a_{ij}. \quad (1.13)$$

Первое выражение соответствует числу всех простых путей длины 2, начинающихся или заканчивающихся в рассматриваемой вершине i . Второе выражение учитывает пути, в которых вершина i лежит в середине пути.

Утверждение 1.2. Пусть A – матрица смежности ориентированного графа G , и A^2, A^3 – квадрат и куб матрицы A . Тогда число появлений вершины i в простых путях длины 3 $n_3(i)$ может быть вычислено по формуле

$$n_3(i) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \left(a_{ik}^{(3)} + a_{ki}^{(3)} \right) + \sum_{k=1}^n a_{ki} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{ij}^{(2)} + \sum_{k=1}^n a_{ki}^{(2)} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{ij}. \quad (1.14)$$

Здесь первое слагаемое соответствует числу всех простых путей длины 3, начинающихся или заканчивающихся в вершине i . Второе слагаемое учитывает пути, в которых вершина i лежит на второй позиции в пути, а третье учитывает пути, в которых вершина i лежит на третьей позиции в пути.

Пример 1.1. Проиллюстрируем приведенную формулу на примере ориентированного графа G_1 из 6 вершин (рис. 1.1) с матрицей смежности A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

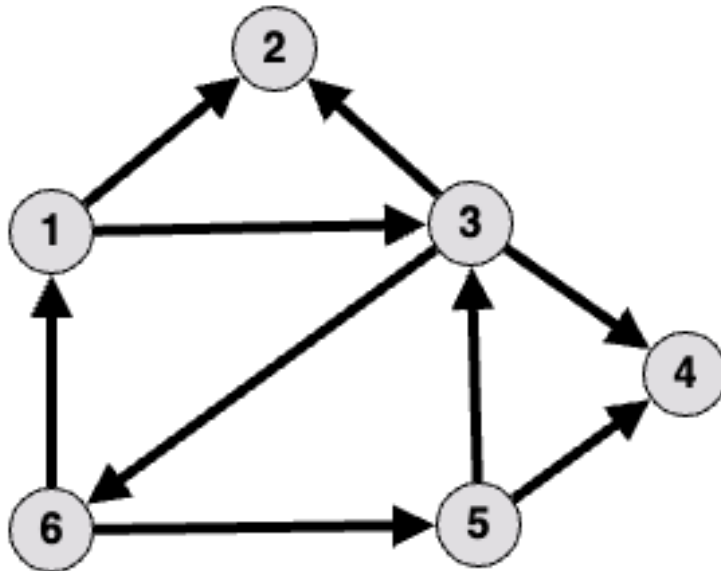


Рисунок 1.1 — Граф G_1

Выпишем, например, пути длины $d = 3$, проходящие через вершину 3. Всего таких путей 8:

3654 3612
1365 5361
6132 6134 6532 6534

В первой строке перечислены пути, начинающиеся в вершине 3. Во второй строке пути, в которых вершина 3 стоит на втором месте, и в третьей строке вершина 3 стоит на третьем месте. Других путей с вершиной 3 нет.

Теперь вычислим квадрат и куб матрицы смежности.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

По формуле из утверждения 1.2 находим

$$\begin{aligned} n_3(3) &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 3}}^6 (a_{3k}^{(3)} + a_{k3}^{(3)}) + \sum_{k=1}^6 a_{k3} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^6 a_{3j}^{(2)} + \sum_{k=1}^6 a_{k3}^{(2)} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^6 a_{3j} = \\ &= (a_{32}^{(3)} + a_{34}^{(3)}) + (a_{13}a_{35}^{(2)} + a_{53}a_{31}^{(2)}) + (a_{63}^{(2)}a_{32} + a_{63}^{(2)}a_{34}) = 2 + 2 + 4 = 8. \end{aligned}$$

Это совпадает с числом простых путей длины 3, проходящих через вершину 3.

1.3 Интегральная центральность

Выше на ориентированном графе $G = (N, E)$, $|N| = n$, была рассмотрена кооперативная игра n лиц $\Gamma = \langle N, v(K) \rangle$, где характеристическая функция $v(K)$ определялась как число направленных путей фиксированной длины d , проходящих через рассматриваемую вершину, в подграфе, порожденном коалицией K . Варьируя длину пути d , можно определить характеристическую функцию в более общем виде как полином:

$$v(K) = \sum_{i \in K} \sum_{d=1}^{n-1} n_d(i) r^d, \quad r \in [0, 1], \quad (1.15)$$

где $n_d(i)$ есть число простых путей длины d , проходящих через вершину i .

Величина r может определяться по аналогии с подходом Джексона [45], где игроки получают r за создание прямой связи, коалиция получает r^2 за

создание пути длины 2 и т. д. Здесь игроки, образующие связь, получают r за появление *пары* в путях длины 1, r^2 за появления *тройки* в путях длины 2 и т. д.

Аналогично разделу 1.2 можно показать (см. также [27]), что распределение выигрыша коалиции между игроками в соответствии с значением Майерсона имеет вид:

$$X_i(r) = \frac{n_1(i)}{2}r + \frac{n_2(i)}{3}r^2 + \dots + \frac{n_{n-1}(i)}{n}r^{n-1} = \sum_{d=1}^{n-1} \frac{n_d(i)}{d+1}r^d. \quad (1.16)$$

Выбирая конкретное значение r , можно получить значение функции дележа $X_i(r)$ для всех игроков. Для исключения шага с выбором значения r , при ранжировании могут быть использованы значения определенного интеграла от функции, определяющей дележ, по переменной r на отрезке $[0,1]$. Функции дележа представляют собой полиномиальные функции, что позволяет легко записать выражения для определения центральности:

$$I_i = \int_0^1 X_i(r)dr = \int_0^1 \sum_{d=1}^{n-1} \frac{n_d(i)}{d+1}r^d dr = \sum_{d=1}^{n-1} \frac{n_d(i)}{(d+1)^2}. \quad (1.17)$$

Определение Значение $I_i = \int_0^1 X_i(r)dr = \sum_{d=1}^{n-1} \frac{n_d(i)}{(d+1)^2}$, где $X_i(r)$ – функция, задающая дележ в кооперативной игре Γ на графе, назовем интегральной центральностью вершины i .

Пример 1.2. Рассмотрим в качестве примера фрагмент графа цитирования сети Math-Net (рис. 1.2). В данном случае наличие ориентированного ребра ij означает, что автор i ссылается на работу автора j .

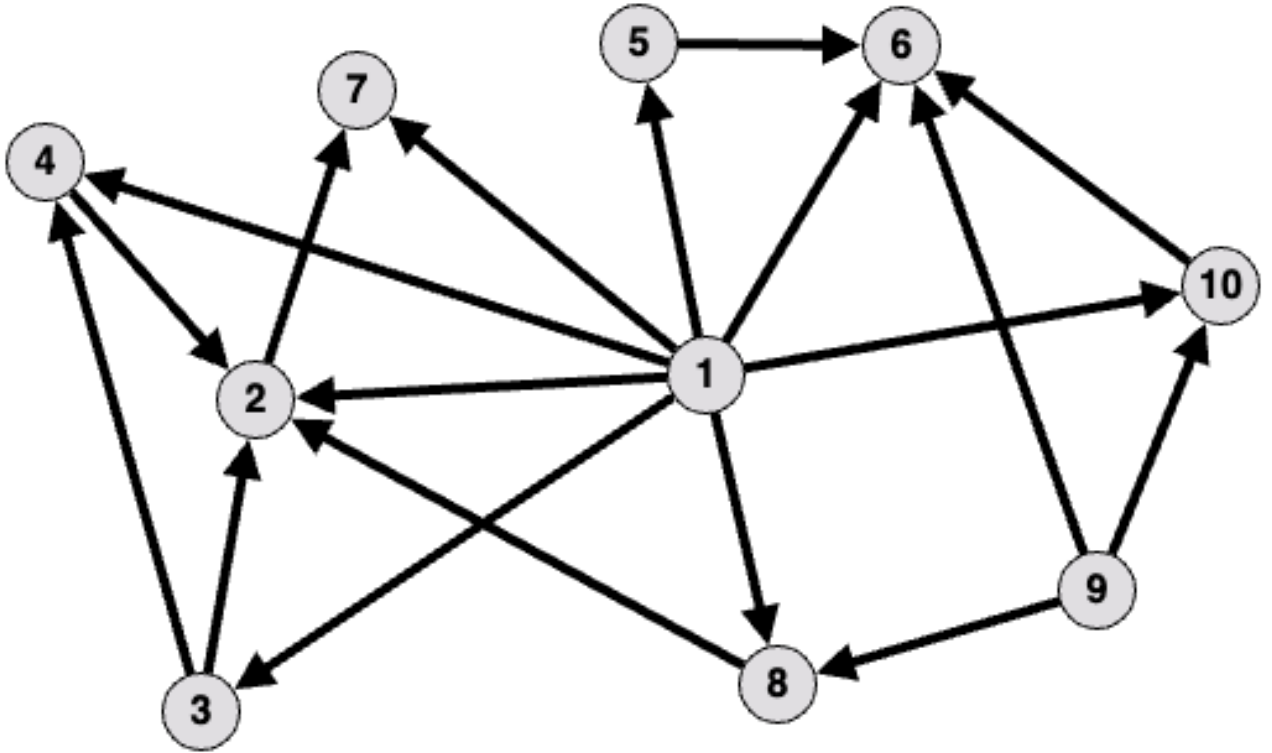


Рисунок 1.2 — Фрагмент графа сети Math-Net

Найдем интегральную центральность вершин данного графа. Обозначим через n_k вектор числа появлений вершин графа в путях длины k .

$$n_1 = (8, 5, 3, 3, 2, 4, 2, 3, 3, 3),$$

$$n_2 = (7, 9, 4, 4, 1, 3, 4, 3, 2, 2),$$

$$n_3 = (4, 6, 3, 3, 0, 0, 5, 2, 1, 0),$$

$$n_4 = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0),$$

все остальные $n_k, k \geq 5$ равны нулю. Тогда значения интегральной центральности согласно определению равны:

$$\begin{aligned} I &= \frac{n_1}{4} + \frac{n_2}{9} + \frac{n_3}{16} + \frac{n_4}{25} = \\ &= (3.067, 2.665, 1.421, 1.421, 0.611, 1.333, 1.296, 1.208, 1.034, 0.972). \end{aligned}$$

В результате, наибольшей центральностью обладает вершина 1, также важна вершина 2.

1.3.1 Частные случаи: цикл и полный граф

Вычислим интегральную центральность вершин для цикла и полного графа. Очевидно в силу симметрии, что центральности всех вершин в этом случае одинаковы и достаточно вычислить центральность одной из них.

Для всех вершин p -цикла дележ определяется функцией:

$$X(r) = \sum_{d=1}^{p-1} \frac{n_d}{d+1} r^d = \sum_{d=1}^{p-1} \frac{d+1}{d+1} r^d = \sum_{d=1}^{p-1} r^d. \quad (1.18)$$

Тогда значение интегральной центральности запишется следующим образом:

$$I_p = \int_0^1 X(r) dr = \int_0^1 \sum_{d=1}^{p-1} r^d dr = \sum_{d=1}^{p-1} \frac{1}{d+1}. \quad (1.19)$$

Для вершин k -клик справедлива формула

$$n_d(k) = (d+1)! \binom{k-1}{d}. \quad (1.20)$$

Действительно, в пути длины d : $l = (i_1, \dots, i_{d+1})$ вершина i может находиться на первом, втором, ..., $d+1$ -ом месте. Остальные d из $k-1$ вершин могут быть выбраны

$$A_{k-1}^d = \binom{k-1}{d} \cdot d!$$

способами. Следовательно,

$$X(r) = \sum_{d=1}^{k-1} \frac{n_d(k)}{d+1} r^d = \sum_{d=1}^{k-1} d! \binom{k-1}{d} r^d, \quad (1.21)$$

и тогда интегральная центральность равна

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^1 X(r) dr = \int_0^1 \sum_{d=1}^{k-1} d! \binom{k-1}{d} r^d dr = \frac{1}{k} \sum_{d=1}^{k-1} d! \binom{k}{d+1} = \\ &= \sum_{d=1}^{k-1} \frac{(k-1)!}{(d+1)(k-d-1)!}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

1.3.2 Аксиомы центральности

В статье Boldi – Vigna [44] описана система аксиом центральности, основанная на проверке изменения меры центральности при изучении клик и направленных циклов. Следует проверить следующее: все ли вершины k -клики имеют одинаковое значение центральности; все ли вершины направленного p -цикла имеют одинаковое значение центральности; важнее ли вершины k -клики по сравнению с вершинами направленного p -цикла. Приведем формулировки аксиом, как они представлены в [44; 56].

A1 (*аксиома размера*). Рассмотрим граф $S_{k,p}$ (рис. 1.3), состоящий из двух компонент: k -клики и p -цикла. Мера центральности удовлетворяет аксиоме размера, если для каждого k существует число P_k , такое, что для всех $p \geq P_k$ в графе $S_{k,p}$ центральность вершины в p -цикле строго больше центральности вершины в k -клике, а для каждого p существует K_p , такое, что для всех $k \geq K_p$ центральность вершины в k -клике строго больше центральности вершины в p -цикле.

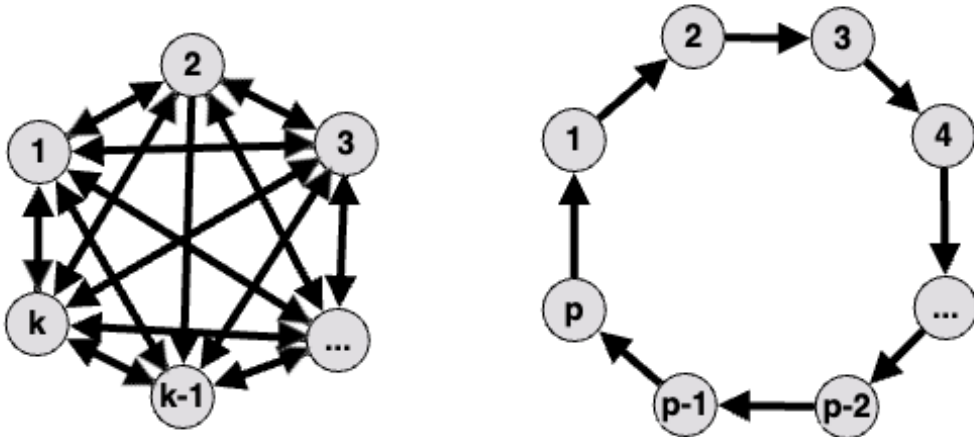


Рисунок 1.3 — Граф $S_{k,p}$

A2 (*аксиома плотности*). Рассмотрим граф $D_{k,p}$ (рис. 1.4), состоящий из k -клики и p -цикла ($k, p \geq 3$), связанных двунаправленным мостом $x \longleftrightarrow y$,

где x – вершина клики, а y – вершина цикла. Мера центральности удовлетворяет аксиоме плотности, если при $k = p$ центральность x строго больше центральности y .

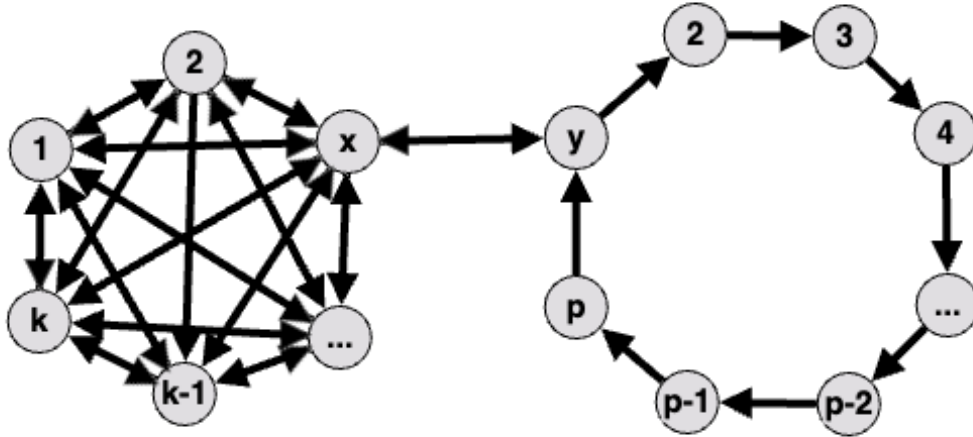


Рисунок 1.4 — Граф $D_{k,p}$

A3 (*аксиома монотонности*). Мера центральности удовлетворяет аксиоме монотонности, если для любого графа G и каждой пары вершин x и y , таких, что ребро $x \rightarrow y$ не принадлежит множеству ребер E_G графа G , если добавить в G такое ребро, то центральность y возрастет.

Добавим к данной системе аксиому связности.

A4 (*аксиома связности*). Мера центральности удовлетворяет аксиоме связности, если для любого графа G и любых двух компонент связности G_1 и G_2 графа G , и каждой пары вершин $x \in G_1$ и $y \in G_2$, при добавлении ребра $x \rightarrow y$ центральность всех вершин в G_2 не убывает.

Теорема 2. Для интегральной центральности (1.17) аксиомы A1, A2, A3, A4 выполняются.

Доказательство. Докажем, что данные аксиомы выполняются для интегральной меры центральности.

A1 Для доказательства данной аксиомы достаточно показать, что центральности вершин как p -цикла, так и k -клики неограниченно возрастают при увеличении p и k . В предыдущем разделе было показано, что для всех вершин p -цикла интегральная центральность определяется функцией:

$$I_p^c = \sum_{d=1}^{p-1} \frac{1}{d+1}.$$

Значение центральности вершин p -цикла можно оценить как $I_p = S_p - 1$, где S_p – сумма первых p членов гармонического ряда. Л.Эйлером было получено асимптотическое выражение для суммы первых n членов гармонического ряда:

$$S_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n,$$

где $\gamma = 0,5772\dots$ – постоянная Эйлера - Маскерони [57], ε_n – погрешность, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $I_p^c \rightarrow \infty$ при $p \rightarrow \infty$.

Для вершин k -клики справедлива формула

$$I_k^q = \sum_{d=1}^{k-1} \frac{(k-1)!}{(d+1)(k-d-1)!}.$$

Нетрудно заметить, что $I_k^q \geq I_k^c$, откуда следует неограниченный рост I_k^q , при $k \rightarrow \infty$.

A2. Выше было отмечено, что при $k = p$ $I_k^q(x) \geq I_k^c(y)$, т.е. центральность вершины x в клике больше центральности вершины y в цикле. При этом, для любого d число направленных путей длины d в клике $n_d^q(x)$ больше, чем число направленных путей длины d в цикле $n_d^c(y)$. Соединим вершину x из клики с вершиной y в цикле двунаправленным мостом $x \longleftrightarrow y$. Тогда число путей любой длины d и в клике и в цикле увеличится на одну и ту же величину.

Поэтому интегральная центральность вершины x по-прежнему будет больше центральности вершины y . Справедливость аксиомы $A2$ доказана.

A3. Аксиома $A3$ очевидно выполняется, т.к. после добавления ребра $x \rightarrow y$ вершина y будет встречаться в путях, оканчивающихся в ней, что увеличит значение центральности.

A4. Аксиома $A4$ выполняется, т.к. после добавления ребра $x \rightarrow y$ число направленных путей, проходящих через вершины из графа G_2 может только увеличиться. \square

Стоит отметить, что согласно [44] аксиомы $A1$, $A2$, $A3$ без каких-либо оговорок справедливы лишь для гармонической центральности [52].

1.4 Вычисление центральности вершин ориентированных графов с циклами

В предложенном подходе для определения центральности вершин в графе основной проблемой является вычисление числа простых путей (без циклов) фиксированной длины, проходящих через данную вершину. В работе [54] приведена модификация значения Майерсона на случай, когда кроме простых путей рассматриваются также и циклы. В этом случае удастся получить достаточно простые выражения для этой характеристики с использованием элементов матрицы смежности рассматриваемого графа. Для ранжирования в этом случае используется величина $\frac{s_i(k)}{k+1}$, где $s_i(k)$ – число появлений вершины i в путях длины k . Также в [54] приведены доказательства теорем о числе появления вершин в путях фиксированной длины, включая циклы, в неориентированных графах. Дальнейшее исследование показало, что аналогичная формула справедлива также и для числа появлений вершины в путях в ориентированных графах.

Теорема 3. Пусть A^d – матрица смежности ориентированного графа G , возведенная в степень d . Тогда число появлений вершины i в путях фиксированной длины d (включая циклы) $n_d(i)$ может быть вычислено по формуле

$$n_d(i) = \sum_{k=1}^n \left(a_{ik}^{(d)} + a_{ki}^{(d)} \right) + \sum_{l=1}^{d-1} \left[\sum_{k=1}^n a_{ki}^{(l)} \cdot \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(d-l)} \right]. \quad (1.23)$$

Доказательство. Первая сумма учитывает появления вершины i в начале и конце путей длины d . Величины $a_{ik}^{(d)}$ и $a_{ki}^{(d)}$ – элементы матрицы A^d – соответствуют числу путей длины d , начинающихся в вершине i и заканчивающихся в ней. Вторая сумма позволяет учесть появления рассматриваемой вершины и в середине путей длины d : $a_{ki}^{(l)}$ – элемент матрицы A^l , равный числу путей длины l , оканчивающихся в вершине i ; $a_{ij}^{(d-l)}$ – элемент матрицы A^{d-l} , описывающий число путей длины $d-l$, начинающихся в той же вершине. Складывая их произведения для всех допустимых l получим число появлений вершины i в середине путей фиксированной длины d . \square

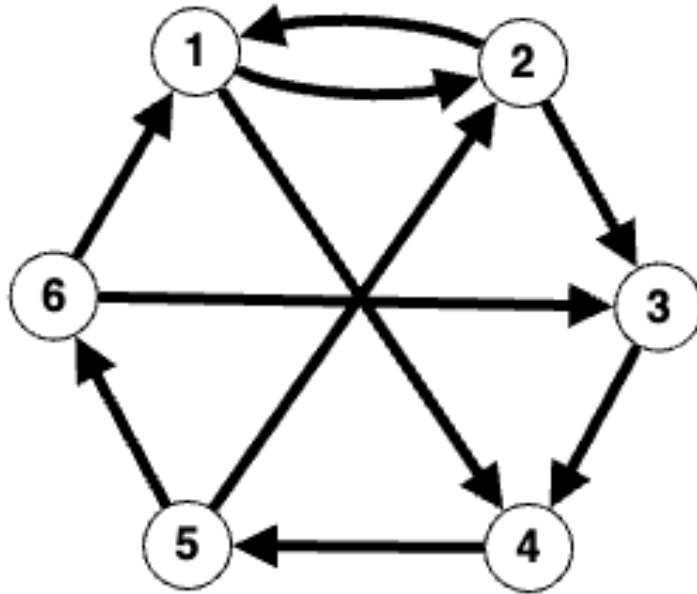
Пример 1.3. Проиллюстрируем приведенную формулу на примере ориентированного графа G_2 из 6 вершин (рис. 1.5) с матрицей смежности A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выпишем пути длины $d = 3$. Всего таких путей 25:

Вершина 2 встречается в путях длины 3 21 раз. Вычислим число появлений вершины 2 по формуле 1.23:

$$n_3(2) = \sum_{k=1}^6 \left(a_{2k}^{(3)} + a_{k2}^{(3)} \right) + \sum_{l=1}^2 \left[\sum_{k=1}^6 a_{k2}^{(l)} \cdot \sum_{j=1}^6 a_{2j}^{(3-l)} \right].$$

Рисунок 1.5 — Граф G_2

1212 2121 3456 4521 5212 6121
 1234 2123 3452 4561 5612 6123
 1452 2345 4523 5214 6345
 1456 2145 4563 5614 6145
 1214 5234
 5634

Для вычислений нужны квадрат и куб матрицы смежности.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 n_3(2) &= (2 + 2 + 1 + 1 + 2 + 1) + \left[\sum_{k=1}^6 a_{k2} \cdot \sum_{j=1}^6 a_{2j}^{(2)} + \sum_{k=1}^6 a_{k2}^{(2)} \cdot \sum_{j=1}^6 a_{2j} \right] = \\
 &= 9 + [2 \cdot 3 + 3 \cdot 2] = 9 + 6 + 6 = 21.
 \end{aligned}$$

Для ориентированных ациклических графов, т. е. ориентированных графов без направленных циклов, но допускающих наличие параллельных путей, число появлений вершины в путях фиксированной длины совпадает с числом простых путей, проходящих через эту вершину. А значит величина, полученная с помощью формулы (1.23), может использоваться для нахождения значения Майерсона в ориентированном графе по формуле (1.12).

В случае произвольного ориентированного графа будем определять центральность вершин в виде

$$X_i(r) = \frac{n_1(i)}{2}r + \frac{n_2(i)}{3}r^2 + \dots + \frac{n_{n-1}(i)}{n}r^{n-1} = \sum_{d=1}^{n-1} \frac{n_d(i)}{d+1}r^d. \quad (1.24)$$

Дележ X очевидно удовлетворяет первой аксиоме Майерсона [34] (по способу построения дележа и заданию характеристической функции), но не удовлетворяет второй аксиоме (аксиоме справедливости), утверждающей, что оба игрока i и j должны одинаково получать выгоду или терять ее при создании или удалении связи ij . Данное условие не выполняется в связи с включением в рассмотрение циклов. В общем случае возможно появление путей вида $\dots ijijijijij \dots$, что приводит к различному числу появлений вершин i и j в зависимости от четности длины пути.

Проиллюстрируем это с помощью контрпримера. Для этого вернемся к графу G_2 (пример 1.3). Удалим из этого графа связь $1 - 4$ (рис. 1.6).

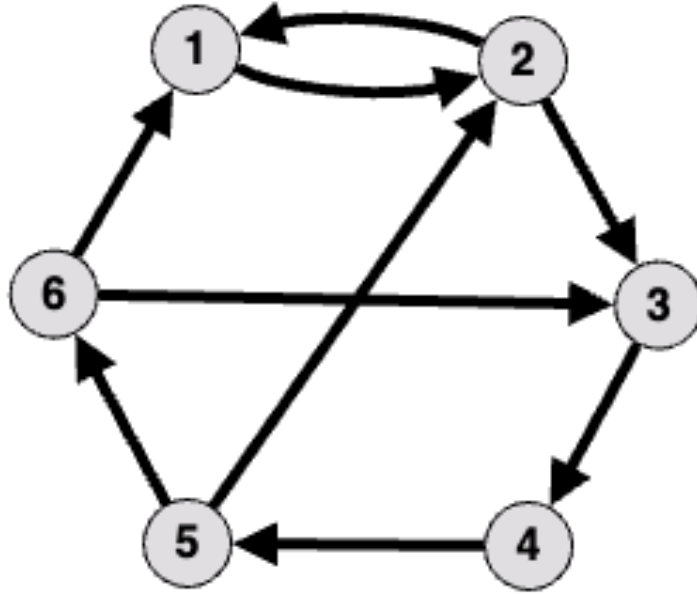
Запишем выигрыши игроков 1 и 4 до удаления связи (X_1, X_4) и после (X'_1, X'_4).

$$X_1 = \frac{4}{2}r + \frac{10}{3}r^2 + \frac{21}{4}r^3 + \frac{42}{5}r^4 + \frac{82}{6}r^5$$

$$X_4 = \frac{3}{2}r + \frac{8}{3}r^2 + \frac{18}{4}r^3 + \frac{36}{5}r^4 + \frac{70}{6}r^5$$

$$X'_1 = \frac{3}{2}r + \frac{7}{3}r^2 + \frac{13}{4}r^3 + \frac{22}{5}r^4 + \frac{37}{6}r^5$$

$$X'_4 = \frac{2}{2}r + \frac{5}{3}r^2 + \frac{11}{4}r^3 + \frac{19}{5}r^4 + \frac{34}{6}r^5$$

Рисунок 1.6 — Граф $G_2 - 14$

Начиная со слагаемого, соответствующего числу появления вершин в путях длины 3, начинаются расхождения в разностях $X_1 - X'_1$, $X_4 - X'_4$, что нарушает условие аксиомы Майерсона.

$$X_1 - X'_1 = \frac{1}{2}r + \frac{3}{3}r^2 + \frac{8}{4}r^3 + \frac{20}{5}r^4 + \frac{45}{6}r^5$$

$$X_4 - X'_4 = \frac{1}{2}r + \frac{3}{3}r^2 + \frac{7}{4}r^3 + \frac{17}{5}r^4 + \frac{36}{6}r^5$$

Выбирая конкретное значение r , можно получить значение функции дележа $X_i(r)$ для всех игроков. В дальнейшем эти значения могут использоваться для ранжирования вершин графа, что позволяет ввести еще один подход к вычислению центральности.

На рис. 1.7 представлены графики функций дележа для игроков на графе G_2 . Выберем значение $r = \frac{1}{2}$, тогда дележ:

$$X = (3.44, 3.44, 2.09, 2.79, 2.79, 2.09).$$

Видно, что при таком подходе вершины 1 и 2 по-прежнему обладают наибольшими значениями центральности, наименьшая центральность у вершин 3, 6.

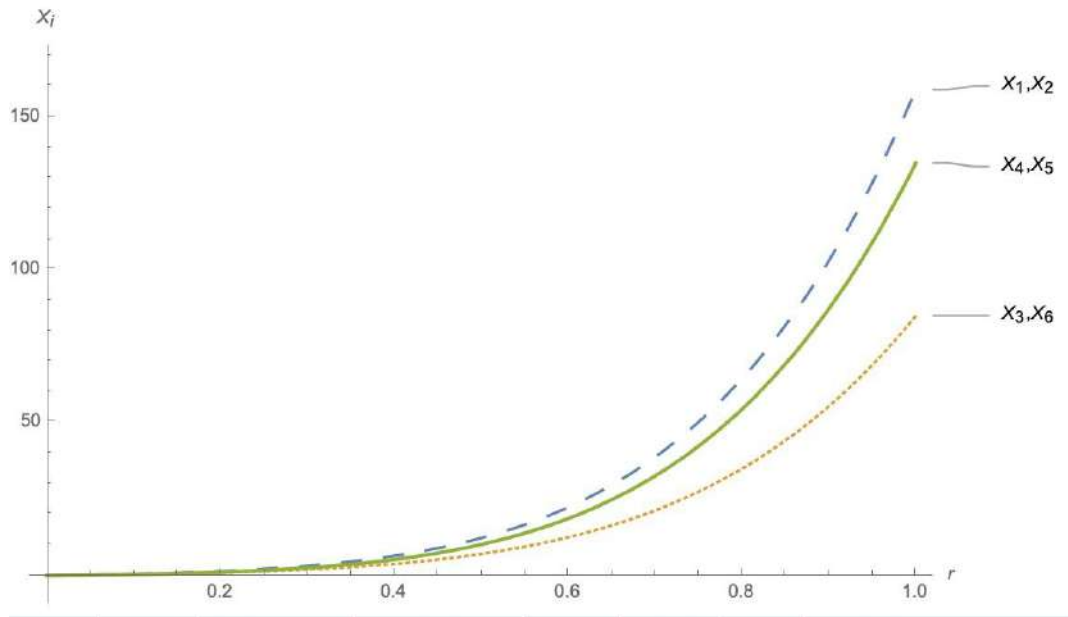


Рисунок 1.7 — Графики функций, определяющих дележ

Также можно записать вектор I интегральных центральных вершин графа G_2 :

$$I(G_2) = (7.38, 7.38, 4.17, 6.14, 6.14, 4.17).$$

Порядок вершин при ранжировании сохраняется.

1.5 Центральность вершин графа на основе турнирной матрицы

В работе [58] была предложена двухэтапная процедура ранжирования вершин графа, где на первом этапе вершины ранжируются на основании абсолютных потенциалов узлов электрической цепи при последовательной подаче тока во все узлы. На втором этапе строится турнирная таблица и проводится окончательное ранжирование, основанное на сумме ранее найденных рангов, по аналогии с правилом Борда [59].

В данном случае турнирная таблица может быть построена для значений $n_d(i)$ для различных d . Составим турнирную таблицу вершин графа G_2 (табл. 1). Оценка центральности на основе суммарного числа появления

вершины в путях различной длины позволяет сделать вывод о наибольшей значимости вершин 1 и 2. Наименьшей центральностью обладают вершины 3 и 6.

Таблица 1 — Турнирная таблица вершин графа G_2

Вершина	d					Σ
	1	2	3	4	5	
1	4	10	21	42	82	159
2	4	10	21	42	82	159
3	3	6	11	22	43	85
4	3	8	18	36	70	135
5	3	8	18	36	70	135
6	3	6	11	22	43	85

Таблица 2 — Оценка степенной центральности вершин графа G_2

Вершина	in-degree	out-degree
1	2	2
2	2	2
3	2	1
4	2	1
5	1	2
6	1	2

Сравним эти результаты со значениями степенной центральности. В табл. 2 приведены значения числа входящих и исходящих связей в графе. Наибольшей центральностью так же обладают вершины 1 и 2, при анализе наименее центральных вершин возможны различные трактовки в зависимости от решаемой прикладной задачи. Если не учитывать направленность ребер, ранги для степенной центральности будут совпадать с рангами вершин порядка 2. Если же направление учитывается, вершины 5 и 6 получают одинаковые оценки с

точки зрения степенной центральности, однако, с точки зрения вовлеченности вершин в создание путей в графе, вершина 5 считается более важной.

1.6 Вектор Майерсона как мера центральности вершин неориентированного графа

Определим на графе $G = (N, E)$, где N множество вершин и E множество ребер, кооперативную игру $\Gamma = \langle N, v \rangle$, $|N| = n$. В этой игре вершины являются игроками, а характеристическая функция $v(K)$, $K \subset N$ определяется как количество простых путей длины m в подграфе, порожденном множеством вершин K . Число $m = 1, 2, \dots$ фиксировано. Очевидно, что функция $v(K)$ является монотонной, т.е. $v(K_1) \leq v(K_2)$, если $K_1 \subset K_2$. Тогда для ранжирования вершин в графе можно использовать решение кооперативной игры в виде вектора Шепли-Майерсона.

В разделе 1.2 (и в работе [60]) приведено доказательство теоремы о значении Майерсона в кооперативной игре на ориентированном графе с характеристической функцией, определяемой через число простых путей фиксированной длины в подграфе, порожденном коалицией, основанное на справедливости аксиом Майерсона. В работе [54] приводится другое доказательство аналогичного утверждения для неориентированных графов.

Теорема 1'. Пусть дан граф $G = (N, E)$. Характеристическую функцию $v(K)$, $K \subset N$ определим как количество простых путей длины m в подграфе, порожденном коалицией K . Тогда значение вектора Майерсона для игрока i есть

$$\varphi_i = \frac{a(i)}{(m+1)}, \quad (1.25)$$

где $a(i)$ есть число простых путей длины m , проходящих через вершину i .

Доказательство. Рассмотрим все перестановки σ с ненулевым вкладом игрока i . Тогда в перестановке $P_\sigma(i) \cup \{i\}$ обязательно должны входить вершины из пути длины m , где вершина i входит последней. Тогда вклад игрока i равен $+1$.

Для зафиксированного пути ровно в $n!/(m+1)$ перестановках вершина i идет после всех вершин этого пути. Следовательно, для вершины i верно, что сумма вкладов вершины i по всем перестановкам есть

$$\frac{a(i)}{n!} \frac{n!}{m+1} = \frac{a(i)}{m+1}.$$

Из аддитивности вектора Майерсона следует утверждение теоремы. □

Следствие. Пусть характеристическая функция $v(K)$, $K \subset N$ определена как

$$v(K) = \sum a_m r^m \tag{1.26}$$

где a_m – количество простых путей длины m в подграфе, порожденном коалицией K . Тогда значение вектора Майерсона для игрока i есть

$$\varphi_i = \sum \frac{a_m(i)}{m+1} r^m, \tag{1.27}$$

где $a_m(i)$ есть число простых путей длины m , проходящих через вершину i .

Таким образом, в качестве меры центральности вершины i в графе можно положить значение вектора Майерсона $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$, где $Y_i = \varphi_i$, $i = 1, \dots, n$. В работах [27; 30] была показана эффективность такого представления для оценки центральности вершин графов различного вида. Интерпретация такого представления характеристической функции и соответствующей меры центральности следующая.

В данной кооперативной игре характеристическая функция задается по аналогии со схемой Джексона [45], где каждая прямая связь — путь длиной 1 — приносит игрокам доход r , где $0 \leq r \leq 1$. Кроме того, игроки также извлекают выгоду из косвенных (непрямых) связей, но уже меньшую. За каждый путь

длины 2 коалиция получает r^2 , за путь длины 3 получает r^3 и т. д. Так как любые две вершины могут быть связаны несколькими путями разной длины, то при построении характеристической функции учитываются только кратчайшие. А если две вершины связаны несколькими путями одинаковой длины, то учитываются все такие пути, при условии, что между этими вершинами нет другого меньшего пути.

Таким образом, распределение выигрыша между вершинами характеризуется насколько эффективно расположена вершина в графе с точки зрения распространения информации в этой сети.

Пример 1.4. Рассмотрим граф G_3 , состоящий из пяти вершин (рис. 1.8).

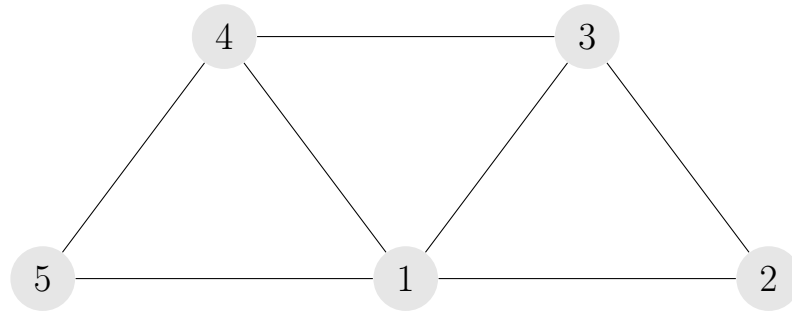


Рисунок 1.8 — Граф G_3

Рассмотрим пути длины 3. Их всего 17:

1234, 1345, 1432, 1543, 2134, 2143, 2145, 2154, 2345,

2314, 2315, 3145, 3154, 3214, 3215, 3415, 4315.

Из них 16 содержат 1. Поэтому из Теоремы 1' следует

$$\varphi_1 = 16/4 = 4.$$

Если считать по определению через перестановки $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(5))$, то игрок 1 получит +1, если войдет в коалицию четвертым или пятым.

В первом случае в половине случаев его положительный вклад будет в 6 перестановках и в другой половине в двух. Во втором случае, его вклад будет в 16 перестановках.

Таким образом,

$$Y_1 = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}6 + \frac{1}{2}2 \right) + \frac{1}{5}16 = 4.$$

1.7 Модификация вектора Майерсона

Теорема 3 справедлива также и для неориентированных графов [54]. Будем обозначать число появления вершины i неориентированного графа в путях фиксированной длины k , включая циклы, $s_k(i)$.

Теорема 3'. Пусть $A^{(k)}$ — матрица смежности неориентированного графа, возведенная в степень k . Тогда число появлений вершины i в путях длины k , начинающихся в вершине l , включая циклы, $s_k^{(l)}(i)$

$$s_k^{(l)}(i) = \delta_{\{l=i\}} \sum_{j=1}^n a_{lj}^{(k)} + a_{li} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k-1)} + a_{li}^{(2)} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k-2)} + \dots + a_{li}^{(k)}, \quad (1.28)$$

где $\delta_{\{l=i\}}$ — индикатор события $\{l = i\}$

Доказательство. Рассмотрим вершину i и все пути длины k в графе G . Если путь начинается в вершине i , то вершина i встречается в этом пути не менее одного раза. Число путей длины k , начинающихся в вершине i можно вычислить с помощью матрицы A^k , сложив все элементы в строке i . Это соответствует первому слагаемому в формуле 1.28.

Вершина i может встретиться в пути длины k несколько раз. Так если вершина i встретилась в пути длины k на следующем шаге, то она будет встречаться хотя бы раз во всех путях длины $k - 1$. Это соответствует второму слагаемому в формуле 1.28. Рассуждая по индукции, получаем, что если вершина i встретилась в пути длины k на шаге m , $m = 1, \dots, k$, то число ее появлений во всех путях далее будет равно числу путей длины m из начальной вершины до вершины i (это $a_{li}^{(m)}$), умноженному на число путей длины $k - m$ из вершины i (это число $\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k-m)}$). \square

Следствие. Суммарное число появлений вершины i в путях длины k может быть вычислено по формуле

$$s_k(i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} + \sum_{l=1}^n \left[a_{li} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k-1)} + a_{li}^{(2)} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k-2)} + \dots + a_{li}^{(k)} \right]. \quad (1.29)$$

Пример 1.5. Справедливость формулы для подсчета $s_k^{(l)}(i)$ проиллюстрируем с помощью следующего примера. Рассмотрим граф G_4 из 8 вершин (рис. 1.9) с матрицей смежности A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

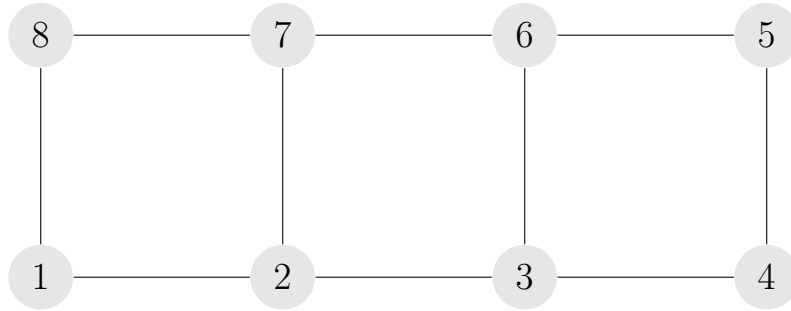


Рисунок 1.9 — Граф G_4 из 8 вершин

Будем искать все возможные пути длины 4, проходящие через вершину 1. На рис. 1.10 изображено дерево путей, начинающихся в вершине 1.

Поскольку все пути, начинающиеся в вершине 1, содержат эту вершину хотя бы один раз, необходимо вычислить общее число путей длины 4, начинающихся в вершине 1. Эту величину можно вычислить с помощью суммы элементов первой строки матрицы A^4 , т. к. известно, что элементы матрицы

$A^k = a_{ij}^{(k)}$ отражают количество путей длины k из вершины i в вершину j . Тогда $\sum_{j=1}^8 a_{1j}^{(4)} = 34$. На следующем шаге могут встретиться вершины 2 и 8. На втором шаге опять может встретиться вершина 1, таких путей два.

$$A^4 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 9 & 0 & 4 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 9 & 0 & 16 & 0 & 12 \\ 9 & 0 & 18 & 0 & 12 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 9 & 0 & 12 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 12 & 0 & 9 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 12 & 0 & 18 & 0 & 9 \\ 12 & 0 & 16 & 0 & 9 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

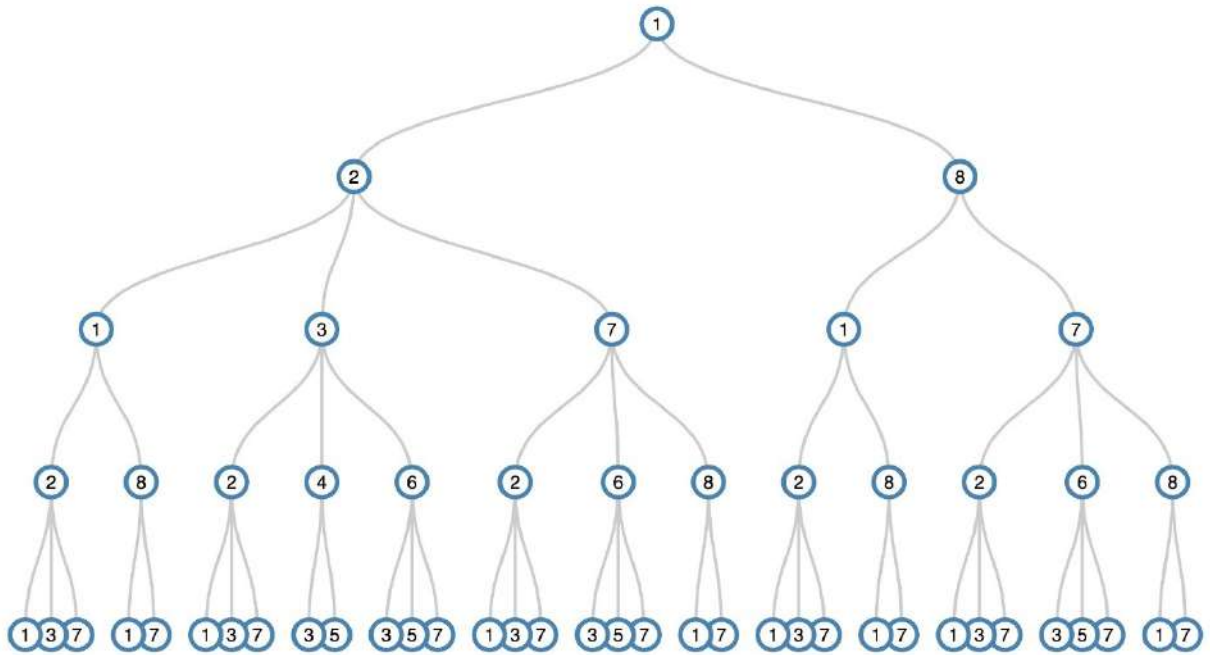


Рисунок 1.10 — Дерево путей, начинающихся в вершине 1

Количество появлений вершины 1 в поддереве на шаге 2 соответствует числу путей длины 2, начинающихся в вершине 1. Эта величина может быть вычислена как сумма элементов первой строки матрицы A^2 . $\sum_{j=1}^8 a_{1j}^{(4-2)} = 5$. Таким образом, вершина 1 встретится еще $2 \cdot 5 = 10$ раз. Наконец, вершина 1 может встретиться в конце пути длины 4. Число таких путей можно найти как $a_{1,1}^{(4)} = 9$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Складывая по формуле 1.28, получим $34 + 10 + 9 = 53$. Именно столько раз встретится вершина 1 в путях длины 4, начинающихся из вершины 1.

Пример 1.6. Пусть матрица смежности для графа G_5 из 4 вершин (рис. 1.11) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

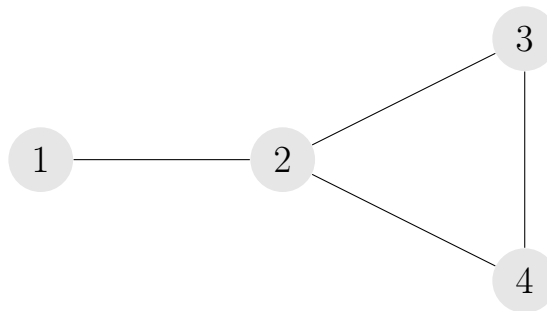


Рисунок 1.11 — Граф G_5 из 4 вершин

Выпишем все пути длины 2, содержащиеся в данном графе:

121, 123, 124, 212, 232, 234, 242, 243, 321

323, 324, 342, 343, 421, 423, 424, 423, 434

Вычислим количество появлений вершин в путях длины 2. Очевидно, что $s_2(1) = 7, s_2(2) = 19, s_2(3) = 14, s_2(4) = 14$.

Воспользуемся приведенной формулой. Для этого необходим квадрат матрицы смежности.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$s_2(1) = \sum_{j=1}^4 a_{1j}^{(2)} + \sum_{l=1}^4 \left[a_{l1} \sum_{j=1}^4 a_{lj} + a_{l1}^{(2)} \right] = 3 + [1 + 1 \cdot 1 + 1 + 1] = 7$$

$$s_2(2) = \sum_{j=1}^4 a_{2j}^{(2)} + \sum_{l=1}^4 \left[a_{l2} \sum_{j=1}^4 a_{lj} + a_{l2}^{(2)} \right] = 19$$

$$s_2(3) = \sum_{j=1}^4 a_{3j}^{(2)} + \sum_{l=1}^4 \left[a_{l3} \sum_{j=1}^4 a_{lj} + a_{l3}^{(2)} \right] = 14$$

$$s_2(4) = \sum_{j=1}^4 a_{4j}^{(2)} + \sum_{l=1}^4 \left[a_{l4} \sum_{j=1}^4 a_{lj} + a_{l4}^{(2)} \right] = 14$$

Вершина под номером 1 является висячей, соответственно она реже появляется в путях, что подтверждено наименьшим значением $s_2(1)$. Вершина 2 связывает висячую вершину с петлей, что предполагает ее появление в большом количестве путей и, следовательно, наибольшее значение $s_2(2)$. Вершины 3 и 4 расположены симметрично, для них значения $s_2(3)$ и $s_2(4)$ совпадают.

Теорема 4. Число путей длины k (включая циклы) R_k в графе есть

$$\frac{\sum_{i=1}^n s_k(i)}{k+1}, \quad (1.30)$$

где $s_k(i)$ — суммарное число появлений вершины i в путях длины k , n — число вершин в графе.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n s_k(i) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} + \sum_{l=1}^n \left[a_{li} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k-1)} + a_{li}^{(2)} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k-2)} + \dots + a_{li}^{(k)} \right] \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(a_{li} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k-1)} + a_{li}^{(2)} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k-2)} + \dots + a_{li}^{(k)} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} + \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \left(a_{li} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k-1)} + a_{li}^{(2)} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k-2)} + \dots + a_{li}^{(k-1)} \sum_{j=1}^n a_{ij} \right) \end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)}$ — сумма элементов матрицы $A^{(k)}$, т.е. число путей длины k , включая циклы, в графе G . Тогда полученное выражение можно переписать как

$$2R_k + \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \left(a_{li} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k-1)} + a_{li}^{(2)} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k-2)} + \dots + a_{li}^{(k-1)} \sum_{j=1}^n a_{ij} \right).$$

Поскольку для степеней матриц выполняется свойство $A^m \cdot A^n = A^{m+n}$, выражение в скобках представляет собой сумму $(k-1)$ слагаемых, равных R_k , т.е.

$$\sum_{i=1}^n s_k(i) = (k+1) \cdot R_k$$

Теорема доказана. □

Таким образом, если в качестве выигрыша коалиции рассматривать число путей длины k в подграфе, включая и циклы, т.е. величину

$$\frac{\sum_{i=1}^n s_k(i)}{k+1},$$

то естественно распределить выигрыш между игроками в виде

$$\left(\frac{s_k(1)}{k+1}, \frac{s_k(2)}{k+1}, \dots, \frac{s_k(n)}{k+1} \right).$$

Определение. Центральностью k -го порядка вершины i будем называть число появлений вершины i в путях длины k , включая циклы.

Введем вектор $\sigma(k)$ — вектор центральностей вершин графа G , i -ая компонента которого равна $\sigma_i(k) = \frac{s_k(i)}{k+1}$, $i = 1, \dots, n$. Для графа из примера 3 запишем вектора центральности для путей длины 2, 3, 4 и 5:

$$\sigma(2) = \{2.3; 6.3; 4.67; 4.67\}$$

$$\sigma(3) = \{4; 14; 10; 10\}$$

$$\sigma(4) = \{9; 30.6; 22.2; 22.2\}$$

$$\sigma(5) = \{17.67; 66.3; 48; 48\}$$

Полученные результаты можно сравнить с векторами Майерсона $\varphi(k)$, где i -ая компонента — вклад игрока - вершины i в выигрыш гранд-коалиции, в случае когда характеристическая функция представляет собой число путей длины k в коалиции [30]

$$\varphi(2) = \{2.3; 6.3; 4.67; 4.67\}$$

$$\varphi(3) = \{4.67; 12.67; 10.3; 10.3\}$$

$$\varphi(4) = \{10.8; 26.8; 23.17; 23.17\}$$

$$\varphi(5) = \{23.5; 55.5; 50.5; 50.5\}$$

Видно, что полученные значения различаются незначительно (а для путей длины 2 и вовсе совпадают), при этом порядок вершин сохраняется, что позволяет использовать полученный вектор для оценки центральностей вершин, не вычисляя количество путей в графе, как этого требует оценка с помощью вектора Майерсона. Кроме того, стандартный подход к его вычислению предполагает довольно трудоемкий процесс перебора всех возможных коалиций.

Предложенные значения центральности могут использоваться для ранжирования вершин в графах при решении прикладных задач. В качестве примера таких задач можно привести задачу ранжирования корпуса текстов [61].

1.8 Частные случаи

1.8.1 Граф-звезда

Пусть S – граф - звезда из n вершин, в центре которой расположен расположен игрок 1 (рис. 1.12).

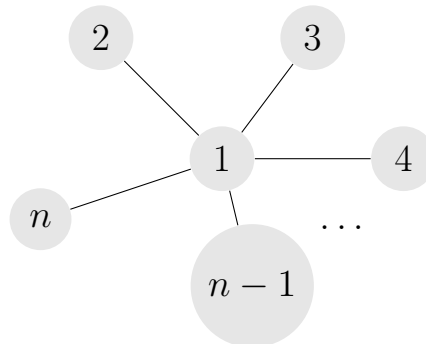


Рисунок 1.12 — Граф-звезда S

Тогда матрица смежности примет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы воспользоваться формулой 1.29, требуется возведение матрицы A в степень k . В зависимости от четности k получим два вида матриц. Возводя матрицу в четную степень, имеем:

$$A^k = \begin{pmatrix} (n-1)^{\frac{k}{2}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (n-1)^{\frac{k-2}{2}} & (n-1)^{\frac{k-2}{2}} & \dots & (n-1)^{\frac{k-2}{2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (n-1)^{\frac{k-2}{2}} & (n-1)^{\frac{k-2}{2}} & \dots & (n-1)^{\frac{k-2}{2}} \end{pmatrix}$$

В случае нечетной степени матрица примет вид:

$$A^k = \begin{pmatrix} 0 & (n-1)^{\frac{k-1}{2}} & (n-1)^{\frac{k-1}{2}} & \dots & (n-1)^{\frac{k-1}{2}} \\ (n-1)^{\frac{k-1}{2}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)^{\frac{k-1}{2}} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Применив формулу 1.29, получим выражения для центральностей вершин графа G . Для четных значений k :

$$s_k(1) = (n-1)^{\frac{k}{2}} \binom{k}{2} n + 1 \quad (1.31)$$

$$s_k(i) = (n-1)^{\frac{k-2}{2}} \left(\binom{k+2}{2} n - 1 \right) \quad (1.32)$$

для нечетных значений:

$$s_k(1) = (k+1) (n-1)^{\frac{k+1}{2}} \quad (1.33)$$

$$s_k(i) = (k+1) (n-1)^{\frac{k-1}{2}} \quad (1.34)$$

Стоит отметить, что для нечетных длин путей выполняется соотношение

$$\frac{s_k(1)}{s_k(i)} = n - 1,$$

так же, как и для вектора Майерсона.

1.8.2 Цепь

Пусть граф P — цепь (путь) из n вершин (рис. 1.13).

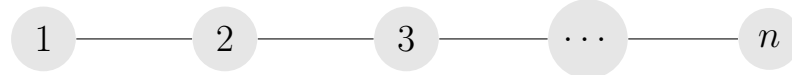


Рисунок 1.13 — Цепь P

Соответствующая матрица смежности A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

В том случае, если длина пути k меньше $\frac{n}{2}$, начиная с $(k + 1)$ -ой вершины в цепи и вплоть до $(n - k)$ -ой устанавливается стабильное значение центральности порядка k . Для вычисления этого значения можно воспользоваться формулой

$$s_k(i) = 2^k(k + 1), \quad i = k + 1..n - k. \quad (1.35)$$

Глава 2. Ранжирование вершин графа с использованием абсолютных потенциалов узлов электрической цепи

Для оценки центральности вершин графа могут быть использованы различные метрики. В ряде работ применяются методы, основанные на использовании модели электрической цепи и законов Кирхгофа [18; 22]. Граф рассматривается как электрическая цепь с идеальными элементами, вершины графа являются узлами электрической цепи, ребра — проводниками электрического тока с известной пропускной способностью. Через цепь, заземленную в некоторой вершине, пропускается электрический ток. В работах [20—22] в основе вычислений лежат токи, протекающие через исследуемую вершину. В данной работе предлагается для оценки центральности использовать ранги вершин графа, основанные на значениях абсолютных потенциалов узлов электрической цепи, вычисленных с помощью правил Кирхгофа. Для ранжирования вершин можно использовать методы теории голосования, когда ранжирование производится на основе турнирной матрицы [62], а в простейшем случае после вычисления абсолютных потенциалов может быть использовано правило Борда [59].

2.1 Ранжирование вершин графа, основанное на матрице Лапласа

Пусть дан граф $G = (V, E, W)$, где V — множество n вершин графа, E — множество ребер графа, W — матрица весов ребер:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & w_{12} & w_{13} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & 0 & w_{23} & \dots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & w_{n3} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Граф G не является ориентированным, т. е. $w_{ij} = w_{ji}$. Веса ребер интерпретируются как пропускная способность ребер. На основе матрицы весов можно построить диагональную матрицу степеней вершины D , где $d_i = \sum_{j=1}^n w_{ij}$. Матрица $L = D - W$ называется матрицей Лапласа графа G и имеет вид

$$L(G) = \begin{pmatrix} d_1 & -w_{12} & -w_{13} & \dots & -w_{1n} \\ -w_{21} & d_2 & -w_{23} & \dots & -w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -w_{n1} & -w_{n2} & -w_{n3} & \dots & d_n \end{pmatrix}.$$

Далее рассмотрим граф G' , полученный путем добавления искусственной вершины с номером $n + 1$, соединенной со всеми вершинами исходного графа ребрами с одинаковой пропускной способностью δ (рис. 2.1).

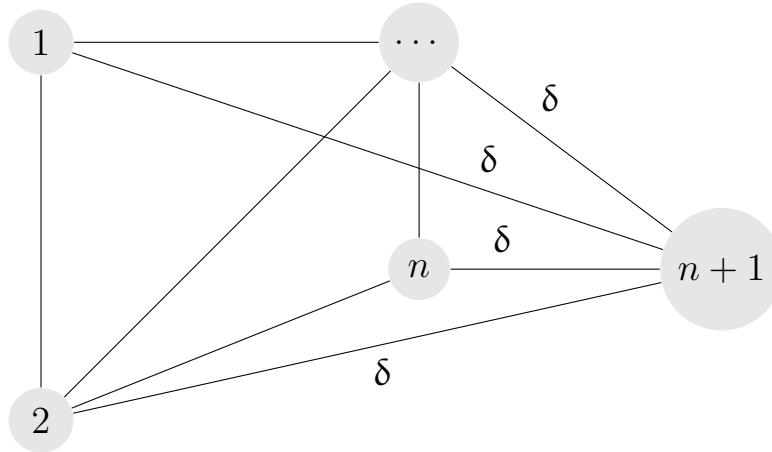


Рисунок 2.1 — Граф G'

Тогда матрица Лапласа для графа G' примет следующий вид:

$$L(G') = \begin{pmatrix} d_1 + \delta & -w_{12} & -w_{13} & \dots & -w_{1n} & -\delta \\ -w_{21} & d_2 + \delta & -w_{23} & \dots & -w_{2n} & -\delta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -w_{n1} & -w_{n2} & -w_{n3} & \dots & d_n + \delta & -\delta \\ -\delta & -\delta & -\delta & \dots & -\delta & \delta n \end{pmatrix}.$$

Поскольку данная матрица является вырожденной, для вычислений потенциалов необходимо удалить строку и столбец, соответствующие искусственно добавленной вершине:

$$\tilde{L}(G') = \begin{pmatrix} d_1 + \delta & -w_{12} & -w_{13} & \dots & -w_{1n} \\ -w_{21} & d_2 + \delta & -w_{23} & \dots & -w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -w_{n1} & -w_{n2} & -w_{n3} & \dots & d_n + \delta \end{pmatrix}.$$

Пусть единица электрического тока подается в некоторый узел v_k ($k = 1, \dots, n$) электрической цепи, которая заземлена в вершине v_{n+1} . Тогда, согласно правилам Кирхгофа, абсолютные потенциалы узлов цепи могут быть вычислены как решение системы уравнений

$$\varphi^k = \tilde{L}^{-1}(G')b_k, \quad (2.1)$$

где $\varphi^k = (\varphi_1^k, \varphi_2^k, \dots, \varphi_n^k)^T$ — вектор абсолютных потенциалов, b_k — вектор-столбец, элементы которого задаются по правилу $b_k(k) = 1$, $b_k(i \neq k) = 0$. При этом абсолютный потенциал в вершине v_{n+1} полагается равным нулю.

В статье [21] проведено ранжирование вершин графа на основе токов, протекающих через вершину в случае, когда ток подается в вершины графа случайным образом. В настоящей работе предлагается ранжировать вершины графа, соответствующие узлам электрической цепи, вычисляя потенциалы во всех вершинах цепи при подаче тока в узел v_k . Таким образом, подавая ток последовательно во все вершины графа G , возможно получить турнирную таблицу вершин, основываясь на абсолютных потенциалах. Чем большее значение потенциала получено в вершине, тем более высокое место она займет в турнирной таблице.

Пример 2.1. Рассмотрим в качестве примера граф, представленный на рис. 2.2, с матрицей весов W :

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 300 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 300 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 100 & 100 & 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 500 & 0 & 100 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 300 & 0 \end{pmatrix}$$

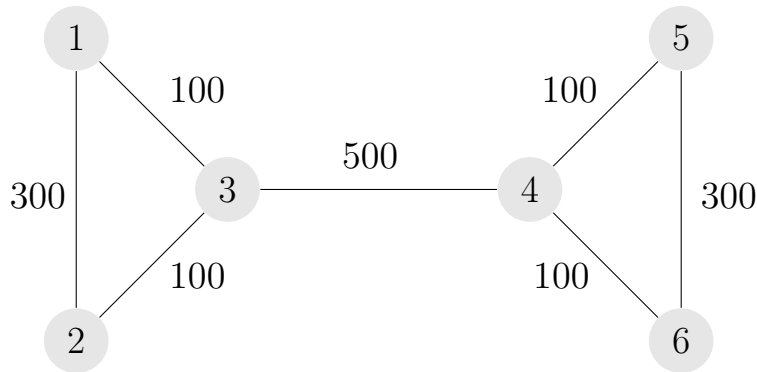


Рисунок 2.2 — Граф с вершинами 1 – 6; 100, 300, 500 — веса ребер

Предполагая, что в граф добавлена вершина, связанная с остальными вершинами графа ребрами с пропускной способностью $\delta = 0.1$, в которой заземлена электрическая цепь, подадим ток в вершину 1. Будут получены следующие значения абсолютных потенциалов:

$$\varphi^1 = (1.670, 1.669, 1.666, 1.665, 1.663, 1.663)^T.$$

Наибольший потенциал всегда имеет вершина, в которую подается электрический ток, она будет получать ранг 1. Остальные вершины будут иметь ранги 2, 3, 4, 5, 5 соответственно номерам. В силу симметрии рассматриваемого графа при подаче тока в вершину 2, вектор потенциалов будет отличаться только для вершин 1 и 2:

$$\varphi^2 = (1.669, 1.670, 1.666, 1.665, 1.663, 1.663)^T.$$

Если же ток подается в вершину 3, получим равные значения для равноудаленных вершин 1 и 2 и для симметричных им вершин 5 и 6.

$$\varphi^3 = (1.666, 1.666, 1.668, 1.667, 1.665, 1.665)^T.$$

Значения абсолютных потенциалов, можно записать в виде матрицы Φ , где в столбце k расположены значения, соответствующие вектору φ^k .

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1.670 & 1.669 & 1.666 & 1.665 & 1.663 & 1.663 \\ 1.669 & 1.670 & 1.666 & 1.665 & 1.663 & 1.663 \\ 1.666 & 1.666 & 1.668 & 1.667 & 1.665 & 1.665 \\ 1.665 & 1.665 & 1.667 & 1.668 & 1.666 & 1.666 \\ 1.663 & 1.663 & 1.665 & 1.666 & 1.670 & 1.669 \\ 1.663 & 1.663 & 1.665 & 1.666 & 1.669 & 1.670 \end{pmatrix}.$$

В табл. 3 представлены ранги вершин для каждого значения k . Стоит отметить, что введение рангов необходимо, поскольку сумма элементов матрицы в каждой строке и каждом столбце одинакова и зависит только от выбора δ .

Таблица 3 — Турнирная таблица

Вершина	k						Σ
	1	2	3	4	5	6	
1	1	2	3	4	5	5	20
2	2	1	3	4	5	5	20
3	3	3	1	2	4	4	17
4	4	4	2	1	3	3	17
5	5	5	4	3	1	2	20
6	5	5	4	3	2	1	20

Просуммировав все места для различных k для каждой вершины, найдем значения, на основе которых можно снова провести ранжирование. Чем меньшее значение суммы рангов у вершины, тем более выгодное положение

она занимает в графе. Так, вершины под номерами 3 и 4 наиболее важны для данного графа, что логично, поскольку ребро (3,4) является связующим для двух групп вершин. Этот подход в теории голосования известен как правило Борда [59].

Можно сравнить наши результаты со значениями PageRank [19]. Вектор значений PageRank для данного графа выглядит следующим образом: (0.14, 0.14, 0.21, 0.21, 0.14, 0.14), при этом чем большее значение получено, тем более важна вершина в графе, т. е. вершины 3 и 4 также получают наиболее высокий ранг.

По турнирной таблице можно также построить турнирную матрицу, которая может быть использована для построения кооперативной игры [63].

2.2 Частные случаи

2.2.1 Клика

Утверждение 2.1. Для n – клики C_n с весами ребер, равными единице, все вершины равноправны.

Матрица Лапласа для клики, состоящей из n вершин:

$$\tilde{L}(C'_n) = \begin{pmatrix} n-1+\delta & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1+\delta & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n-1+\delta & \dots & -1 \\ \vdots & -1 & -1 & \ddots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1+\delta \end{pmatrix}.$$

Тогда обратная матрица $\tilde{L}^{-1}(C'_n)$:

$$\tilde{L}^{-1}(C'_n) = \frac{1}{\delta(n + \delta)} \begin{pmatrix} 1 + \delta & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 + \delta & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 + \delta & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 + \delta \end{pmatrix}.$$

Очевидно, суммы рангов для всех вершин будут одинаковы.

2.2.2 Граф-звезда

Утверждение 2.2. Для графа-звезды S_1 (рис. 2.3) из n вершин ($n > 3$) с весами ребер, равными единице, распределение рангов не зависит от величины δ . Ранг центральной вершины равен 1, остальных вершин — 2.

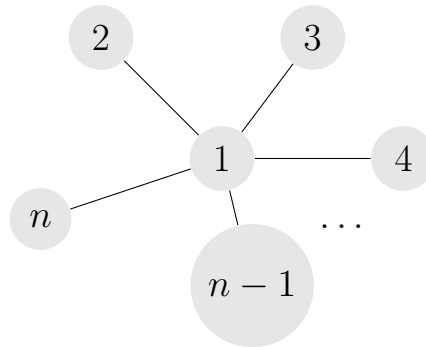


Рисунок 2.3 — Граф-звезда S_1

Для такого графа матрица Лапласа примет следующий вид:

$$\tilde{L}(S'_1) = \begin{pmatrix} n - 1 + \delta & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 1 + \delta & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 + \delta & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 + \delta \end{pmatrix}.$$

Таблица 4 — Турнирная таблица для графа S_1

Вершина	k					Σ
	1	2	3	...	n	
1	1	2	2	...	2	$2n - 1$
2	2	1	3	...	3	$3(n - 1)$
3	2	3	1	...	3	$3(n - 1)$
...
$n - 1$	2	3	3	...	3	$3(n - 1)$
n	2	3	3	...	1	$3(n - 1)$

Вычислим обратную матрицу.

$$\tilde{L}^{-1}(S'_1) = D \begin{pmatrix} (1 + \delta)^2 & (1 + \delta) & (1 + \delta) & \dots & (1 + \delta) \\ (1 + \delta) & (1 + n\delta + \delta^2) & 1 & \dots & 1 \\ (1 + \delta) & 1 & (1 + n\delta + \delta^2) & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (1 + \delta) & 1 & 1 & \dots & (1 + n\delta + \delta^2) \end{pmatrix},$$

где

$$D = \frac{1}{\delta(1 + \delta)(n + \delta)}.$$

Вид турнирной таблицы для любого значения δ представлен в табл. 4. Для центральной вершины графа сумма рангов равна $2n - 1$, для остальных вершин — $3(n - 3)$. При $n > 3$ $2n - 1 < 3(n - 1)$, значит, центральная вершина всегда будет иметь наилучший ранг.

Утверждение 2.3. Для графа-звезды S_m (рис. 2.4) из n вершин ($n > 3$) с весами ребер $w_{1j} = w_{j1} = 1$ ($j = 2, \dots, n-1$), $w_{1n} = w_{n1} = m$ и матрицей Лапласа

$$\tilde{L}(S'_m) = \begin{pmatrix} n-2+m+\delta & -1 & -1 & \dots & -1 & -m \\ -1 & 1+\delta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1+\delta & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1+\delta & 0 \\ -m & 0 & 0 & \dots & 0 & m+\delta \end{pmatrix}$$

ранги вершин будут распределяться в зависимости от веса m . Для $m \in (0,1)$ получим распределение рангов $(1,2,2, \dots, 2,3)$, для $m > 1$ — распределение рангов $(1,3,3, \dots, 3,2)$, центральная вершина всегда имеет ранг 1.

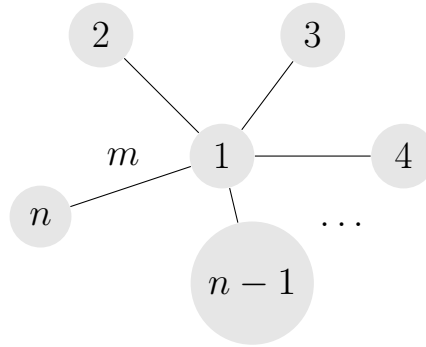


Рисунок 2.4 — Граф-звезда S_m

Обратная матрица, содержащая значения абсолютных потенциалов вершин графа, будет строиться по следующей схеме:

$$\tilde{L}^{-1}(S'_m) = D_m \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_2 & \dots & l_2 & l_3 \\ l_2 & l_d & l_5 & \dots & l_5 & l_4 \\ l_2 & l_5 & l_d & \dots & l_5 & l_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_2 & l_5 & l_5 & \dots & l_d & l_4 \\ l_3 & l_4 & l_4 & \dots & l_4 & l_6 \end{pmatrix},$$

где

$$D_m = \frac{1}{\delta(1 + \delta)^{n-3}(nm + (n - 1)\delta + 2m\delta + \delta^2)},$$

$$l_1 = (m + \delta)(1 + \delta)^{n-2},$$

$$l_2 = (m + \delta)(1 + \delta)^{n-3},$$

$$l_3 = m(1 + \delta)^{n-2},$$

$$l_4 = m(1 + \delta)^{n-3},$$

$$l_5 = (m + \delta)(1 + \delta)^{n-4},$$

$$l_6 = (1 + \delta)^{n-3}(m + (n - 1)\delta + m\delta + \delta^2),$$

$$l_d = (1 + \delta)^{n-4}(m + \delta + nm\delta + (n - 1)\delta^2 + 2m\delta^2 + \delta^3).$$

В табл. 5 представлено распределение рангов для случая, когда $m \in (0,1)$. Для $n > 3$ суммы рангов удовлетворяют соотношению $2n - 1 < 3n - 3 < 4n - 4$, соответственно центральная вершина звезды имеет наилучший ранг; вершина, связанная с центральной ребром весом m , получает наихудший ранг.

Для $m > 1$ при $n > 3$ суммы рангов связаны соотношением $2n - 1 < 3n - 3 < 4n - 5$, ранг центральной вершины наилучший, ранги вершин, связанных с центральной ребрами единичного веса, являются наихудшими (табл. 6).

Таблица 5 — Турнирная таблица для графа S_m , $m \in (0,1)$

Вершина	k						Σ
	1	2	3	...	$n - 1$	n	
1	1	2	2	...	2	2	$2n - 1$
2	2	1	3	...	3	3	$3n - 3$
3	2	3	1	...	3	3	$3n - 3$
...
$n - 1$	2	3	3	...	1	3	$3n - 3$
n	3	4	4	...	4	1	$4n - 4$

Таблица 6 — Турнирная таблица для графа S_m , $m > 1$

Вершина	k						Σ
	1	2	3	...	$n-1$	n	
1	1	2	2	...	2	2	$2n-1$
2	3	1	4	...	4	3	$4n-5$
3	3	4	1	...	4	3	$4n-5$
...
$n-1$	3	4	4	...	1	3	$4n-5$
n	2	3	3	...	3	1	$3n-3$

2.2.3 Двойная звезда

Под двойной звездой будем понимать граф $S_{p,q}$, полученный путем объединения двух графов-звезд S_p и S_q ($p, q > 2$) общим ребром (рис. 2.5).

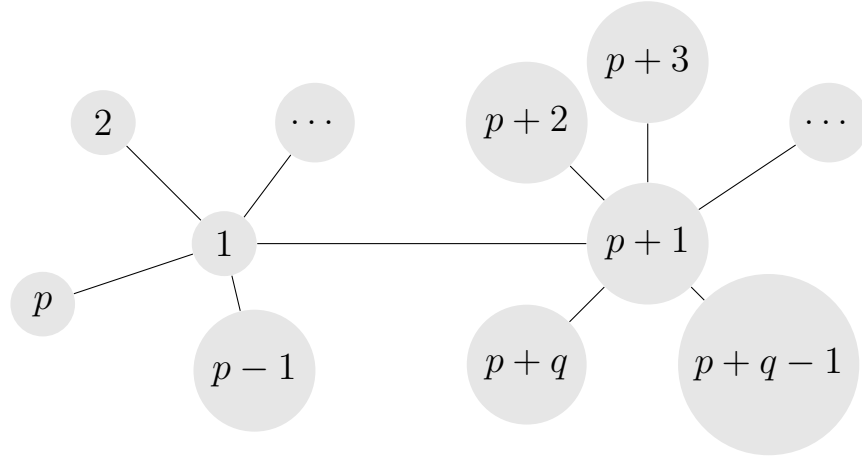
Матрица Лапласа такого графа имеет вид

$$\tilde{L}(S'_{p,q}) = \left(\begin{array}{c|c} A_{p \times p} & B_{p \times q} \\ \hline C_{q \times p} & D_{q \times q} \end{array} \right),$$

$$A_{p \times p} = \begin{pmatrix} p + \delta & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 1 + \delta & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 + \delta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 + \delta \end{pmatrix},$$

$$D_{q \times q} = \begin{pmatrix} q + \delta & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 1 + \delta & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 + \delta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 + \delta \end{pmatrix},$$

элементы матриц B, C $b_{11}, c_{11} = -1$, остальные элементы равны нулю.

Рисунок 2.5 — Двойная звезда $S_{p,q}$

Утверждение 2.4. Для двойной звезды $S_{p,q}$ в случае, если $p < q$, ранг вершины v_1 , имеющей p соседей, всегда ниже ранга вершины v_{p+1} с q соседями.

Матрица абсолютных потенциалов также представима в виде блочной матрицы

$$\tilde{L}^{-1}(S'_{p,q}) = D_{p,q} \left(\begin{array}{c|c} A'_{p \times p} & B'_{p \times q} \\ \hline C'_{q \times p} & D'_{q \times q} \end{array} \right),$$

$$D_{p,q} = \frac{1}{\delta(1+\delta)^{p+q-4}((1+(p+1)(q+1))\delta + (p+q+2)\delta^2 + \delta^3)},$$

$$A'_{p \times p} = a \begin{pmatrix} (1+\delta)^2 & 1+\delta & 1+\delta & \dots & 1+\delta \\ 1+\delta & a_d & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+\delta & 1 & 1 & \dots & a_d \end{pmatrix},$$

$$a = (1+\delta)(1+(q+1)\delta + \delta^2),$$

$$a_d = \delta^2 + (p+1)\delta + 1 + \frac{(q-1)\delta}{1+((1+q)\delta + \delta^2)},$$

$$B'_{p \times q} = (1+\delta)^{p+q-4} \begin{pmatrix} (1+\delta)^2 & 1+\delta & 1+\delta & \dots & 1+\delta \\ 1+\delta & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+\delta & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично строится матрица $C'_{q \times p}$.

$$D'_{q \times q} = d \begin{pmatrix} (1 + \delta)^2 & 1 + \delta & 1 + \delta & \dots & 1 + \delta \\ 1 + \delta & d_d & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 + \delta & 1 & 1 & \dots & d_d \end{pmatrix},$$

$$d = (1 + \delta)^{p+q-5}(1 + (p + 1)\delta + \delta^2),$$

$$d_d = \delta^2 + (q + 1)\delta + 1 + \frac{(p - 1)\delta}{1 + ((1 + p)\delta + \delta^2)}.$$

Распределение рангов вершин представлено в табл. 7. Суммы рангов вершин, расположенных в центрах звезд, связаны соотношением $4p + 2q - 2 < 2p + 4q - 2$, что всегда верно для $p < q$, т. е. вершина — центр звезды с q соседями всегда будет иметь ранг 1. При этом соотношение $2p + 4q - 2 < 5p + 3q - 4$ верно для $q + 2 < 3p$, значит ранг 2 может быть присвоен как вершине v_1 с p соседями, так и висячим вершинам звезды S_q . Ранг висячих вершин графа S_p всегда наихудший, так как $3p + 5q - 4$ принимает наибольшие значения для $p < q, p, q > 2$.

Таблица 7 — Турнирная таблица для графа $S_{p,q}$

Вершина	k									Σ
	1	2	...	$p - 1$	p	$p + 1$...	$p + q - 1$	$p + q$	
1	1	2	...	2	3	4	...	4	4	$2p + 4q - 2$
2	2	1	...	3	4	5	...	5	5	$3p + 5q - 4$
...
$p - 1$	2	3	...	1	4	5	...	5	5	$3p + 5q - 4$
p	3	4	...	4	1	2	...	2	2	$4p + 2q - 2$
$p + 1$	4	5	...	5	2	1	...	3	3	$5p + 3q - 4$
...
$p + q - 1$	4	5	...	5	2	3	...	1	3	$5p + 3q - 4$
$p + q$	4	5	...	5	2	3	...	3	1	$5p + 3q - 4$

2.2.4 Двудольный граф

Утверждение 2.5. Для полного двудольного графа $B_{2,n-2}$ (рис. 2.6) с n вершинами ($n > 4$), где вершины разделены на два непересекающихся множества V_1 и V_2 так, что $|V_1| = 2$, $|V_2| = n - 2$, и весами ребер, равными единице, распределение рангов не зависит от значения δ . Вершины из множества V_1 имеют ранги 1, вершины из множества V_2 имеют ранги, равные 2.

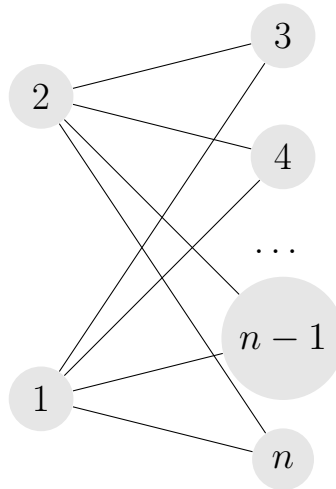


Рисунок 2.6 — Полный двудольный граф $B_{2,n-2}$

Матрица Лапласа имеет вид

$$\tilde{L}(B'_{2,n-2}) = \begin{pmatrix} n-2+\delta & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n-2+\delta & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & 2+\delta & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2+\delta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 2+\delta \end{pmatrix}$$

Обратная матрица Лапласа формируется следующим образом:

$$\tilde{L}^{-1}(B'_{2,n-2}) = D_{2,n-2} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_3 & \dots & l_3 \\ l_2 & l_1 & l_3 & l_3 & \dots & l_3 \\ l_3 & l_3 & l_5 & l_4 & \dots & l_4 \\ l_3 & l_3 & l_4 & l_5 & \dots & l_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_3 & l_3 & l_4 & l_4 & \dots & l_5 \end{pmatrix},$$

где

$$D_{2,n-2} = \frac{1}{\delta(2+\delta)^{n-3}(n-2+\delta)(n+\delta)}$$

$$l_1 = (2+\delta)^{n-3}(n-2+n\delta+\delta^2)$$

$$l_2 = (n-2)(2+\delta)^{n-3}$$

$$l_3 = (2+\delta)^{n-3}(n-2+\delta)$$

$$l_4 = 2(2+\delta)^{n-4}(n-2+\delta)$$

$$l_5 = 2(2+\delta)^{n-4}(n-2+\delta)(2+n\delta+\delta^2)$$

В табл. 8 представлены ранги вершин графа, не зависящие от значения δ . При $n > 4$ значения $2n < 3n - 4$, таким образом вершины множества V_1 всегда будут иметь ранг 1, а вершины из $V_2 - 2$.

Таблица 8 — Турнирная таблица для графа $B_{2,n-2}$

Вершина	k							Σ
	1	2	3	4	...	$n-1$	n	
1	1	3	2	2	...	2	2	$2n$
2	3	1	2	2	...	2	2	$2n$
3	2	2	1	3	...	3	3	$3n-4$
4	2	2	3	1	...	3	3	$3n-4$
...
$n-1$	2	2	3	3	...	1	3	$3n-4$
n	2	2	3	3	...	3	1	$3n-4$

Утверждение 2.6. Для полного двудольного графа $B_{3,n-3}$ (рис. 2.7) с n вершинами ($n > 6$), где вершины разделены на два непересекающихся множества V_1 и V_2 так, что $|V_1| = 3$, $|V_2| = n - 3$, и весами ребер, равными единице, распределение рангов не зависит от значения δ . Вершины из множества V_1 имеют ранги 1, вершины из множества V_2 имеют ранги, равные 2.

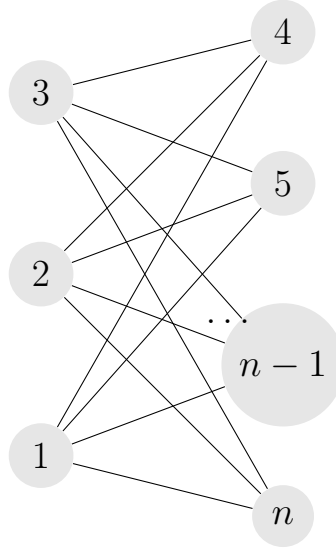


Рисунок 2.7 — Полный двудольный граф $B_{3,n-3}$

Матрица Лапласа имеет вид

$$\tilde{L}(B'_{3,n-3}) = \begin{pmatrix} n-3+\delta & 0 & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n-3+\delta & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & n-3+\delta & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3+\delta & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3+\delta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 3+\delta \end{pmatrix}$$

Обратная матрица

$$\tilde{L}^{-1}(B'_{3,n-3}) = D_{3,n-3} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_2 & l_3 & l_3 & \dots & l_3 \\ l_2 & l_1 & l_2 & l_3 & l_3 & \dots & l_3 \\ l_2 & l_2 & l_1 & l_3 & l_3 & \dots & l_3 \\ l_3 & l_3 & l_3 & l_4 & l_5 & \dots & l_5 \\ l_3 & l_3 & l_3 & l_5 & l_4 & \dots & l_5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_3 & l_3 & l_3 & l_5 & l_5 & \dots & l_4 \end{pmatrix}$$

$$D_{3,n-3} = \frac{1}{\delta(3+\delta)^{n-4}(n-3+\delta)^2(n+\delta)}$$

$$l_1 = (3+\delta)^{n-4}(n-3+\delta)(n-3+n\delta+\delta^2)$$

$$l_2 = (n-3)(3+\delta)^{n-4}(n-3+\delta)$$

$$l_3 = (3+\delta)^{n-4}(n-3+\delta)^2$$

$$l_4 = (3+\delta)^{n-5}(n-3+\delta)^2(3+n\delta+\delta^2)$$

$$l_5 = 3(3+\delta)^{n-5}(n-3+\delta)^2$$

Таблица 9 — Турнирная таблица для графа $B_{3,n-3}$

Вершина	k							Σ
	1	2	3	4	...	$n-1$	n	
1	1	3	3	2	...	2	2	$2n+1$
2	3	1	3	2	...	2	2	$2n+1$
3	3	3	1	2	...	2	2	$2n+1$
4	2	2	2	1	...	3	3	$3n-5$
...
$n-1$	2	2	2	3	...	1	3	$3n-5$
n	2	2	2	3	...	3	1	$3n-5$

По аналогии может быть сформулировано утверждение для графа $B_{m,n-m}$.

Утверждение 2.7. Для полного двудольного графа $B_{m,n-m}$ (рис. 2.8) с n вершинами ($n > 2m$), которые разделены на два непересекающихся множества V_1 и V_2 так, что $|V_1| = m$, $|V_2| = n - m$, и с весами ребер, равными единице, распределение рангов не зависит от значения δ . Вершины из множества V_1 имеют ранги 1, вершины из множества V_2 — ранги 2.

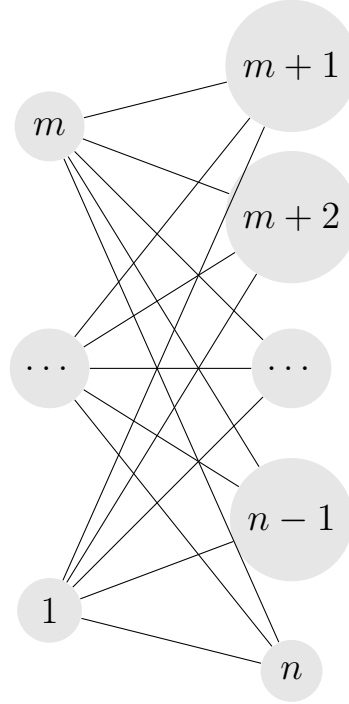


Рисунок 2.8 — Полный двудольный граф $B_{m,n-m}$

Матрица Лапласа представима в блочном виде

$$\tilde{L}(B'_{m,n-m}) = \left(\begin{array}{c|c} (n-m+\delta)\mathbb{E}_m & -\mathbb{1}_{m \times n-m} \\ \hline -\mathbb{1}_{n-m \times m} & (m+\delta)\mathbb{E}_{n-m} \end{array} \right),$$

где \mathbb{E} — единичная матрица; $\mathbb{1}$ — матрица единиц. В этом случае обратная матрица может быть найдена с помощью формулы Фробениуса

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BH^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BH^{-1} \\ -H^{-1}CA^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix},$$

в которой $H = D - CA^{-1}B$. Тогда

$$H = (m+\delta)\mathbb{E}_{n-m} - \frac{m}{n-m+\delta}\mathbb{1}_{n-m \times n-m},$$

$$\tilde{L}^{-1}(B'_{m,n-m}) = D_{m,n-m} \begin{pmatrix} (l_1 - l_2)\mathbb{E}_m + l_2\mathbb{1}_{m \times m} & l_3\mathbb{1}_{m \times n-m} \\ l_3\mathbb{1}_{m \times n-m} & (l_4 - l_5)\mathbb{E}_{n-m} + l_2\mathbb{1}_{n-m \times n-m} \end{pmatrix},$$

$$D_{m,n-m} = \frac{1}{\delta(m + \delta)(n - m + \delta)(n + \delta)},$$

$$l_1 = (m + \delta)(n - m + n\delta + \delta^2),$$

$$l_2 = (n - m)(m + \delta),$$

$$l_3 = (m + \delta)(n - m + \delta),$$

$$l_4 = (n - m + \delta)(m + n\delta + \delta^2),$$

$$l_5 = m(n - m + \delta).$$

Рассмотрим турнирную матрицу для графа $B_{m,n-m}$ (табл. 10). Величина $2n - 2 + m < 3n - 2 - m$ при $n > 2m$, соответственно, вершины из множества V_1 имеют ранги 1, вершины из множества V_2 — ранги 2.

Таблица 10 — Турнирная таблица для графа $B_{m,n-m}$

Вершина	k								Σ
	1	2	...	m	$m + 1$...	$n - 1$	n	
1	1	3	...	3	2	...	2	2	$2n - 2 + m$
2	3	1	...	3	2	...	2	2	$2n - 2 + m$
...
$m - 1$	3	3	...	3	2	...	2	2	$2n - 2 + m$
m	2	2	...	1	3	...	3	3	$2n - 2 + m$
$m + 1$	2	2	...	2	1	...	3	3	$3n - 2 - m$
...
$n - 1$	2	2	...	2	3	...	1	3	$3n - 2 - m$
n	2	2	...	2	3	...	3	1	$3n - 2 - m$

Приведенные выше результаты были опубликованы в работе [58].

2.3 Ранжирование, учитывающее веса вершин

При анализе графовых моделей реальных систем нередки ситуации, когда ранжирование вершин графа, проводимое только с учетом топологии графа, приводит к не вполне корректным результатам. Например, при анализе графа транспортной системы при наличии большого числа близко расположенных вершин, связанных ребрами малой длины, такие вершины получают достаточно высокие ранги. Хотя такие вершины могут соответствовать малонаселенным районам так называемого «частного сектора». В связи с этим полезно включить в рассмотрение дополнительные характеристики вершин графа, например, вес вершины, который можно интерпретировать как число жителей, проживающих в окрестности узла графа.

Будем рассматривать граф $G_T = (V, E, W, P)$, где V – множество вершин графа, E – множество ребер, W – матрица весов ребер, P – диагональная матрица весов вершин. Согласно закону Ома, при увеличении величины силы тока, подаваемого в систему, значения потенциалов увеличатся пропорционально. Так, если в некоторый узел электрической цепи v_k подается электрический ток, величина которого зависит от веса вершины, для вычисления абсолютных потенциалов вершин графа может быть использовано следующее выражение:

$$\Phi = \tilde{L}^{-1}(G'_T)P, \quad (2.2)$$

где Φ – матрица абсолютных потенциалов узлов цепи (вершин графа), в k -ом столбце которой представлены потенциалы вершин, получаемые при подаче электрического тока величины p_k в узел v_k , $\tilde{L}^{-1}(G'_T)$ – обратная матрица Лапласа для графа G_T , в который была искусственно добавлена вершина v_{n+1} .

Разность потенциалов двух точек электрического поля, умноженная на величину заряда, равна работе, необходимой для перемещения заряда между этими точками. Поскольку искусственно добавленная вершина v_{n+1} имеет

нулевой потенциал, значения, полученные в матрице Φ могут быть интерпретированы, как работа по перемещению заряда в вершину v_{n+1} .

Умножая матрицу абсолютных потенциалов на единичный вектор-столбец, получим вектор сумм потенциалов вершин графа, i ая компонента которого равна $\sum_{k=1}^n \varphi_i^k$. Обозначим его a .

Величина a_i выражает суммарную работу по перемещению электрических зарядов из вершины v_i в вершину v_{n+1} при последовательной подаче тока в вершины графа v_k , $k = 1, \dots, n$, причем величина подаваемого тока равна весу вершины p_k .

Вычисляя потенциалы таким образом, можно избежать обязательного в ранее предложенном подходе использования рангов, поскольку в данном случае суммы элементов матрицы Φ по строкам будут различны.

Пример 2.2. Рассмотрим граф-звезду S_p , представленный на рис. 2.9, с матрицей весов ребер W , элементы которой обратны длинам ребер между соответствующими вершинами.

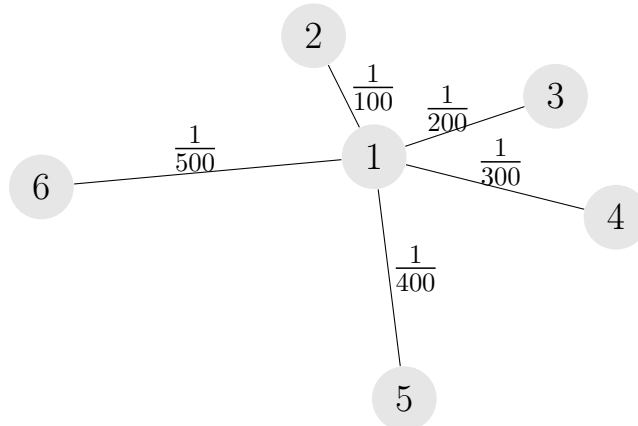


Рисунок 2.9 — Взвешенный граф-звезда S_p

$$W = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{100} & \frac{1}{200} & \frac{1}{300} & \frac{1}{400} & \frac{1}{500} \\ \frac{1}{100} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{200} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{300} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{400} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{500} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычисляя значения потенциалов без учета весов вершин, основываясь только на топологии графа, получим турнирную таблицу (табл. 11) при $\delta = 0,0002$.

Таблица 11 — Турнирная таблица вершин графа S_p

№	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 6$	$k = 7$	Σ
1	1	2	2	2	2	2	11
2	2	1	3	3	3	3	15
3	3	3	1	4	4	4	19
4	4	4	4	1	5	5	23
5	5	5	5	5	1	6	27
6	6	6	6	6	6	1	31

Вершина v_1 , расположенная в центре звезды, ожидаемо получила наименьшую сумму рангов, соответственно является наиболее центральной. Худшие ранги получила вершина v_6 , наиболее удаленная от центра звезды.

Если же дополнительно ввести матрицу весов вершин P :

$$P = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 400 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 600 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 800 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 \end{pmatrix}$$

так, что центральная вершина имеет наименьший вес, а наиболее удаленная от центра вершина v_6 — наибольший, получим матрицу Φ .

$$\Phi = \begin{pmatrix} 87407.34 & 171386.93 & 336182.06 & 494758.5 & 647461.75 & 794612.14 \\ 85693.47 & 187634.25 & 329590.26 & 485057.36 & 634766.42 & 779031.51 \\ 84045.52 & 164795.13 & 400175.06 & 475729.33 & 622559.37 & 764050.14 \\ 82459.75 & 161685.79 & 317152.89 & 636564.63 & 610812.97 & 749634.1 \\ 80932.72 & 158691.6 & 311279.69 & 458109.73 & 895797.91 & 735751.98 \\ 79461.21 & 155806.3 & 305620.05 & 449780.46 & 588601.59 & 1176920.13 \end{pmatrix}$$

Для графа-звезды S_p вектор суммарной работы a примет следующий вид:

$$a = (2531808.72, 2501773.25, 2511354.54, 2558310.11, 2640563.63, 2756189.75),$$

что соответствует рангам $(4,6,5,3,2,1)$. Наибольшая сумма потенциалов наблюдается у вершины v_6 , несмотря на ее удаленность, при этом вершина v_1 не получила худший ранг, ее выгодное расположение в графе компенсирует малый вес вершины.

2.3.1 Частные случаи:

звезда, клика, полный двудольный граф

Утверждение 2.8. Элементы вектора суммарной работы для графа - звезды с ребрами единичного веса и матрицей весов вершин P

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_n \end{pmatrix},$$

могут быть вычислены следующим образом

$$a_1 = \frac{1}{\delta(n + \delta)} \left(p_1(1 + \delta) + \sum_{j=2}^n p_j \right), \quad (2.3)$$

$$a_i = \frac{1}{\delta(1 + \delta)(n + \delta)} \left(p_1(1 + \delta) + p_i(1 + n\delta + \delta^2) + \sum_{j \neq 1, i} p_j \right). \quad (2.4)$$

В частности, для матрицы P вида

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p \end{pmatrix},$$

выражения для элементов вектора a :

$$a_1 = \frac{n - 1 + p + \delta}{\delta(n + \delta)}, \quad (2.5)$$

$$a_i = \frac{\delta^2 + \delta(n + 1) + p + n - 1}{\delta(1 + \delta)(n + \delta)}, \quad i = 2, \dots, n - 1, \quad (2.6)$$

$$a_n = \frac{p\delta^2 + \delta(pn + 1) + k + n - 1}{\delta(1 + \delta)(n + \delta)}. \quad (2.7)$$

Утверждение 2.9. Для n – клики C_n с матрицей весов вершин P элементы вектора a вычисляются как

$$a_i = \frac{1}{\delta(n + \delta)} \left[p_i(1 + \delta) + \sum_{j \neq i} p_j \right]. \quad (2.8)$$

Утверждение 2.10. Для полного двудольного графа $B_{m,n-m}$ с n вершинами ($n > 2m$), где вершины разделены на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2 так, что $|V_1| = m$ и $|V_2| = n - m$, с единичными весами ребер, элементы вектора суммарной работы могут быть вычислены как

$$a_i = \frac{(n - m)\text{tr}(P) + (n\delta + \delta^2)p_i + \delta \sum_{j=m+1}^n p_j}{\delta(n - m + \delta)(n + \delta)}, \quad i \in [1, m]; \quad (2.9)$$

$$a_i = \frac{m\text{tr}(P) + (n\delta + \delta^2)p_i + \delta \sum_{j=1}^m p_j}{\delta(n - m + \delta)(n + \delta)}, \quad i \in [m + 1, n], \quad (2.10)$$

где $\text{tr}(P)$ – след матрицы P .

Глава 3. Применение предложенных методов к задачам ранжирования вершин графа

3.1 Транспортная система города Петрозаводск

3.1.1 Построение модели транспортной сети

Одним из важных факторов социально-экономического развития региона является состояние его транспортной системы, с помощью которой взаимодействуют все ресурсы города: предприятия и жилые районы, движение товаров, общественный транспорт, магазины и пр. Совершенствование транспортной системы повышает качество жизни жителей, удешевляет перевозку грузов, снижает аварийность на дорогах, способствует повышению экономической эффективности региона.

Существуют различные способы совершенствования транспортной системы. Это может быть связано с улучшением дорожного покрытия, со строительством развязок, новых объездных дорог, мостов, пешеходных переходов, с увеличением полос движения, введением в строй новых светофоров. Кроме того, это может быть связано с изменением правил движения, ограничением въезда в центр города, введением одностороннего движения на некоторых улицах, введением специальной полосы для общественного транспорта, рациональным определением маршрутов общественного транспорта.

Для решения последнего типа проблем необходимо математическое моделирование транспортной системы города [64–69]. Моделирование транспортной системы включает в себя несколько этапов. На первом этапе строится граф дорожной сети. Далее определяются потоки на дорожных сегментах транспортной сети. В основе этой схемы лежит матрица корреспонденций, которая содержит информацию о передвижениях людей из одной вершины графа в другую.

Матрица корреспонденций позволяет найти равновесные транспортные потоки [70], составить оптимальное расписание движения общественного транспорта, определить оптимальное расположение остановок для общественного транспорта, определить рациональные маршруты для общественного транспорта, в том числе и велосипедные дорожки [71], оценить количество перевозимых пассажиров и выручку предприятий общественного транспорта. Информацию о корреспонденциях можно получить из опросов населения или по информации, полученной с помощью видеокамер, установленных на дорогах. Однако, как правило, эту информацию трудно получить или она может быть недостоверной. Традиционно, для построения матрицы корреспонденций используются гравитационные и энтропийные модели [67; 72; 73]. Очевидно, что они должны сочетаться с результатами опроса населения.

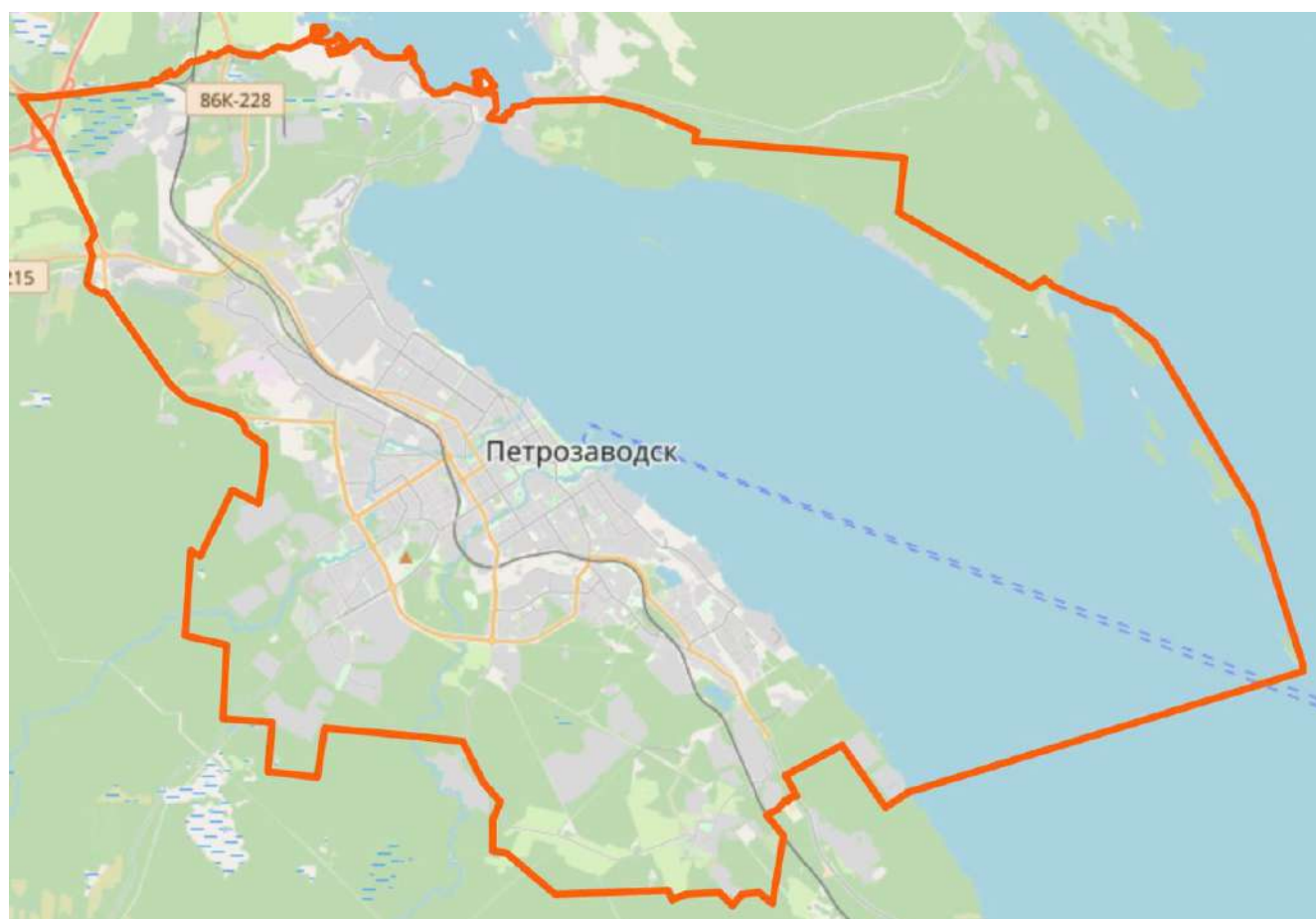


Рисунок 3.1 — Петрозаводский городской округ

Для построения основы модели транспортной сети города Петрозаводск использовался дорожный граф, представленный в OpenStreetMap [74] - неком-

мерческом проекте, нацеленном на создание бесплатной географической карты мира силами Интернет-пользователей.

Значимым был выбран класс дорог "дороги, по которым возможно автомобильное движение". При построении модели был получен граф, ребра которого соответствуют дорогам с возможностью движения автомобильного транспорта, вершины графа соответствуют перекресткам автомобильных дорог. Таким образом был получен граф дорожной сети города Петрозаводск, содержащий 1531 вершину и 2081 ребро (рис. 3.2).



Рисунок 3.2 — Транспортный граф Петрозаводска

Согласно Сводному докладу о результатах мониторинга эффективности деятельности органов местного самоуправления городских округов и

муниципальных районов в Республике Карелия за 2021 год¹, среднегодовая численность постоянного населения в Петрозаводском городском округе составила 280 801 человек. Для распределения жителей города по узлам графа - модели потребовалась информация о количестве жилых помещений, расположенных на территории Петрозаводского городского округа. На портале Реформа ЖКХ² представлена информация о домах Республики Карелия, которая раскрывается в рамках постановления Правительства РФ от 23 сентября 2010 года № 731 "Об утверждении стандарта раскрытия информации организациями, осуществляющими деятельность в сфере управления многоквартирными домами". По каждому дому выгрузка содержит адрес в соответствии с ФИАС, а также технические характеристики здания. Если принять за допустимое приближение, что в среднем в жилом помещении проживает равное число человек, то такие данные можно использовать для приближенной оценки плотности населения в конкретной части города.

На первом этапе жители распределялись равномерно по всем жилым помещениям, о которых удалось получить информацию в открытых источниках. В том случае, если количество жилых помещений для дома указано не было, выбирался параметр "общее число помещений".

$$\frac{\text{total_ppl}}{\text{total_quarters}} = \text{residents_per_quarter},$$

total_ppl - общее число жителей,

total_quarters - общее число жилых помещений,

residents_per_quarter - количество жителей в одном помещении.

Число жителей в доме вычисляется как произведение числа жителей в каждом помещении и числа жилых помещений в доме:

¹<https://gov.karelia.ru/upload/medialibrary/7d2/inatqynw9blv2ib412inu0u9lwcijshk/SVODNYY-DOKLAD.pdf>

²<http://reformagkh.ru>

$\text{residents_per_quarter} \cdot \text{living_quarters_count}$,

где $\text{living_quarters_count}$ - число жилых помещений в доме.

Далее, для каждого дома по адресу, полученному на портале Реформа ЖКХ, с помощью сервиса Яндекс.Карты были получены географические координаты. По этим координатам осуществлен поиск ближайшего узла графа, к которому привязывался дом. Основанный на этой привязке, вес каждой вершины представляет собой суммарное число жителей, проживающих в домах, находящихся в непосредственной близости от узла графа, т.е. перекрестка городских дорог.

В табл. 12 приведено количество жителей, проживающих в домах, привязанных к узлам графа, относящимся к районам города.

На рис. 3.3 представлено распределение жителей города по вершинам графа. Бóльший размер вершины соответствует большему значению веса. Наибольший размер вершин соответствует спальным районам города и местам с новой плотной застройкой.

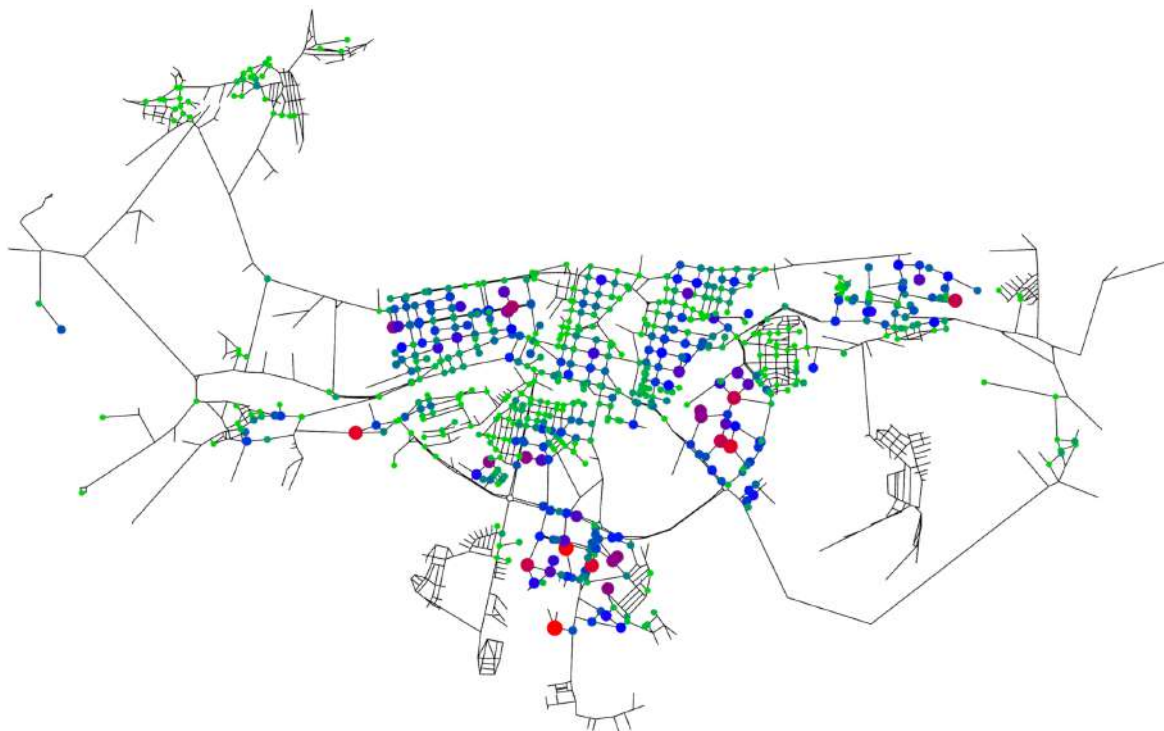


Рисунок 3.3 — Тепловая карта распределения жителей

Следующий этап работы включал в себя поиск информации об организациях, расположенных на территории Петрозаводского городского округа. В первую очередь были использованы данные проекта OpenStreetMap [74]. Были выбраны все объекты, описание которых содержало такие значения, как, например, офис, образовательное учреждение, торговый центр и т.п. Для каждого типа объектов был выбран вес, основанный как на приблизительном количестве сотрудников, обычно работающих в организациях такого типа, так и на привлекательности подобных организаций для посетителей. Так, количество сотрудников и поток посетителей в городскую поликлинику или школу будет превышать аналогичные показатели для торговой организации. Значение веса выбиралось из полуинтервала $(0,1]$.

Как и в случае с жилыми домами на основании географических координат объектов, была произведена привязка организаций к узлам графа. Каждому узлу была поставлена в соответствие дополнительная характеристика «вес организаций», которая представляет собой взвешенную по типам сумму числа организаций, привязанных к данному узлу.

На рис. 3.4 представлена визуализация распределения организаций по вершинам модельного графа. Большой размер узла соответствует большому значению взвешенной суммы весов организаций. На рисунке видно, что большее число организаций сосредоточено в центре города.

Для визуализации полученных результатов был создан веб-сервис, процесс создания которого представлен в работе [75].

3.1.2 Районы города Петрозаводск

Рассмотрим граф, имеющий следующую структуру: вершины графа, построенного на основе транспортной системы Петрозаводска [76], были поделены на непересекающиеся подмножества, соответствующие районам города

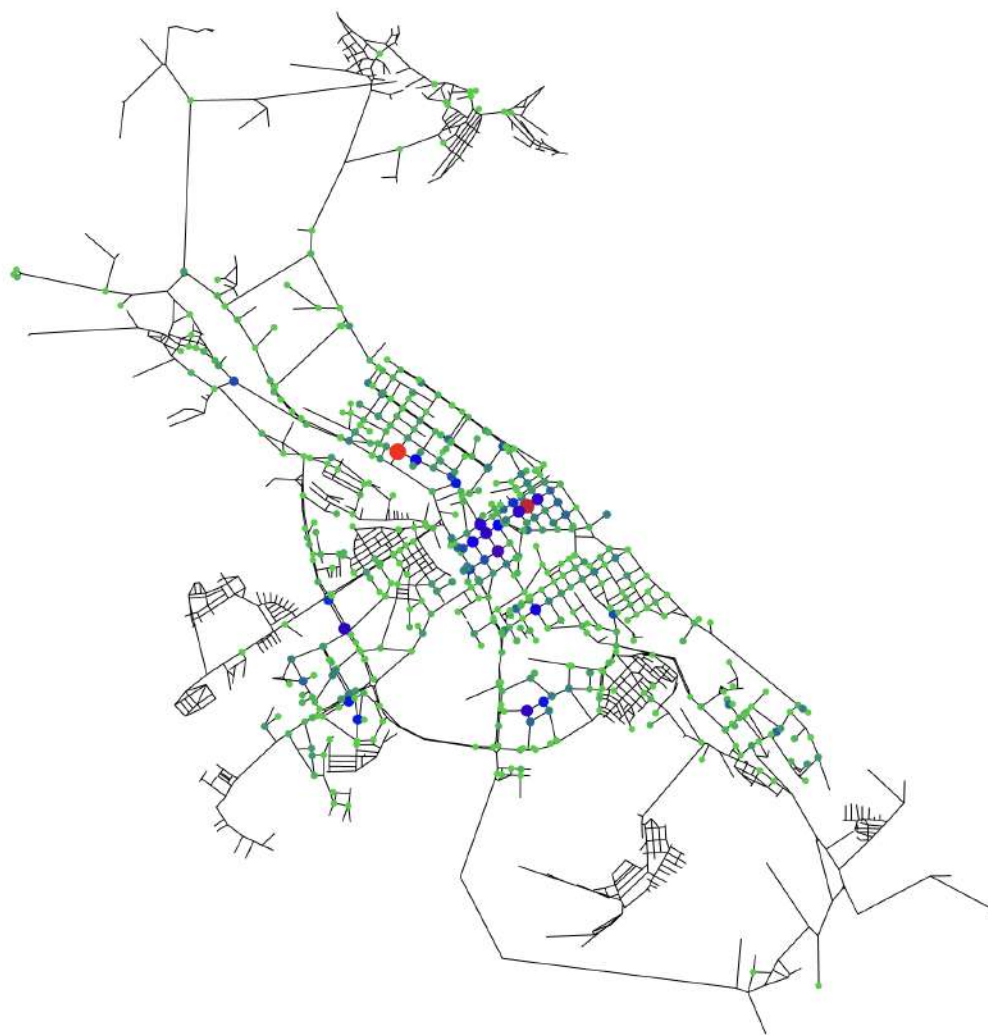


Рисунок 3.4 — Распределение организаций по вершинам графа

(рис. 3.5). Здесь метки вершин соответствуют нумерации в табл. 12. Если два района соединены автомобильными дорогами напрямую, то между соответствующими им вершинами есть ребро. Длины ребер пропорциональны длинам соответствующих кратчайших путей в исходном графе. Так, например, районы 16 и 12 связаны более длинным путем, чем районы 16 и 19.

Веса ребер для расчета выбираются равными величинам, обратным длинам дорог, соединяющим районы города. Значение $\delta = 0,1$. Были вычислены абсолютные потенциалы для случаев, когда ток подается последовательно в вершины графа от 1 до 21.

В табл. 13 приведены суммы рангов, вычисленные на основе правил Кирхгофа и по методу PageRank. При этом наиболее важные вершины графа имеют наименьшее значение ранга по правилам Кирхгофа, но наибольшее, вычислен-

Таблица 12 — Районы города Петрозаводск

№	Район города	Число жителей	Вес организаций	Число вершин
1	Голиковка	25723.8	69.3	60
2	Древлянка	51134.7	123.7	98
3	Железнодорожный	3414.4	6.9	14
4	Зарека	15482.9	36.1	44
5	Каменный бор	5057.4	10.0	16
6	Кирпичный завод	1006.1	0.5	21
7	Ключевая	26689.4	46.2	64
8	Кукковка	36887.5	77.5	86
9	Октябрьский	35685.6	80.1	44
10	Первомайский	17684.1	91.0	42
11	Перевалка	26275.2	41.5	113
12	Пески	0.0	0.8	7
13	Птицефабрика	850.8	0.7	16
14	Рыбка	4017.6	4.6	37
15	Сайнаволоок	582.9	0.0	7
16	Северная промзона	747.2	19.4	18
17	Соломенное	2419.6	5.3	27
18	Сулажгора	4665.8	18.7	44
19	Тепличный	326.4	4.0	12
20	Томицы	47.3	0.6	15
21	Центр	21526.2	264.1	89

ное по методу PageRank. Для удобства сравнения результатов данные были нормированы, а значения PageRank рассмотрены с противоположным знаком и упорядочены (рис. 3.6). Наилучшие ранги получены для районов Перевалка, Центр, Зарека, Голиковка, которые хорошо встроены в транспортную систему города, наихудшие — для удаленных районов города, таких как Кирпичный завод, Птицефабрика, Соломенное и Сайнаволоок.

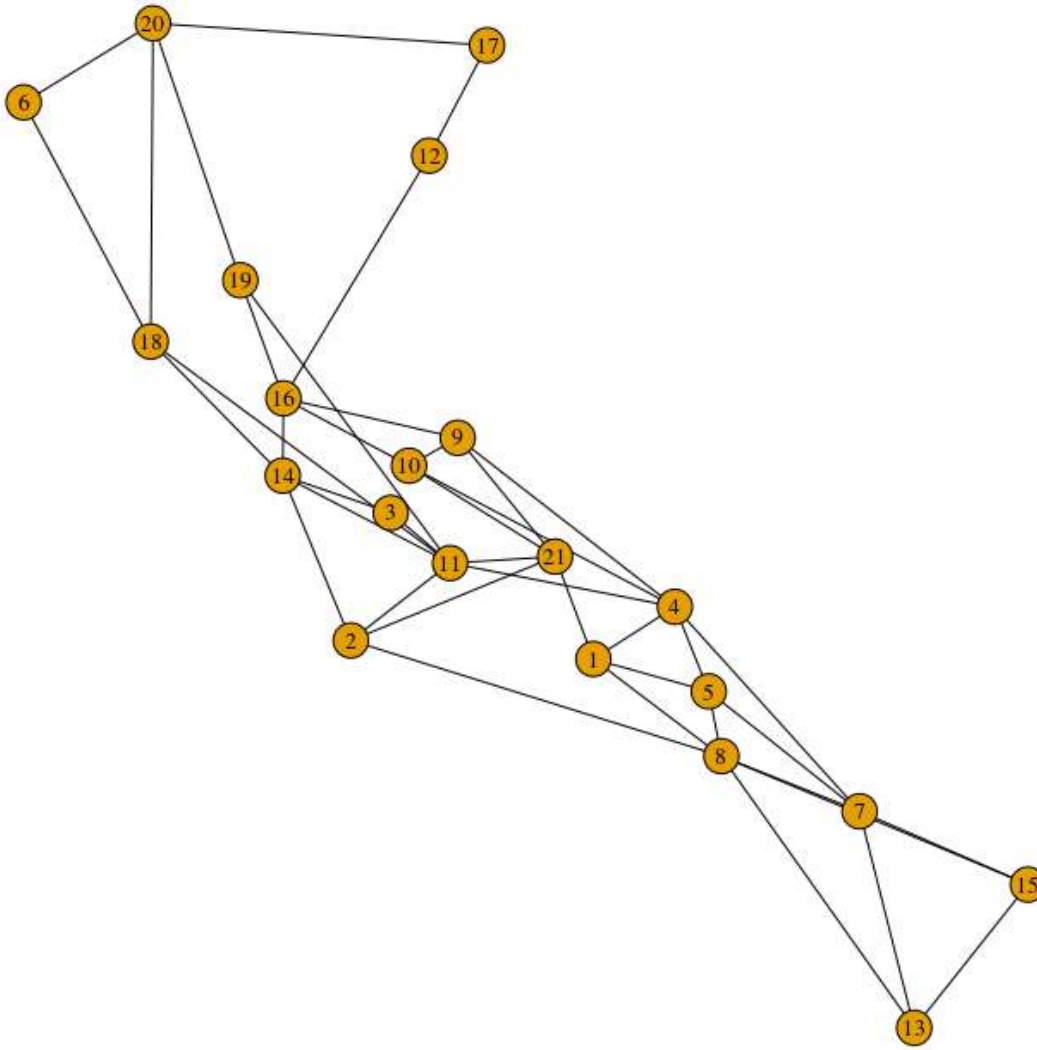


Рисунок 3.5 — Транспортный граф районов города (см. табл. 12)

Введем весовую матрицу P для графа районов города, диагональные элементы которой соответствуют значениям числа жителей в районах города Петрозаводск, приведенных в таблице 14.

На рисунке 3.7 изображены кривые, полученные на основе векторов a для различных значений δ , а также кривая распределения жителей по вершинам графа. Использование весов вершин, основанных на численности жителей, позволяет получать более значимые по сравнению с исходным методом ранги для спальных районов города (например, район Ключевая). Рис. 3.8 демонстрирует сравнение результатов ранжирования вершин графа при $\delta = 0,00061$, R_1 соответствует ранжированию без учета весов вершин, R_2 учитывает число жителей в вершинах графа. Такие районы, как Древлянка, Ключевая, Кукковка и Октябрьский являются наиболее плотно заселенными и загруженными, их ранги

Таблица 13 — Ранжирование вершин графа районов

№	Район города	Сумма рангов	PageRank
1	Голиковка	147	0.057171
2	Древлянка	155	0.038292
3	Железнодорожный	171	0.037208
4	Зарека	140	0.064489
5	Каменный бор	160	0.054556
6	Кирпичный завод	212	0.021275
7	Ключевая	175	0.052078
8	Кукковка	166	0.057698
9	Октябрьский	156	0.05312
10	Первомайский	151	0.054764
11	Перевалка	131	0.074412
12	Пески	202	0.037077
13	Птицефабрика	205	0.028448
14	Рыбка	154	0.060789
15	Сайнаволоок	195	0.032919
16	Северная промзона	156	0.059534
17	Соломенное	213	0.035842
18	Сулажгора	174	0.043686
19	Тепличный	169	0.034296
20	Томицы	193	0.040282
21	Центр	133	0.062062

увеличились по сравнению с невзвешенным подходом, при этом наблюдается снижение рангов для малонаселенных районов.

3.1.3 Ранжирование вершин графа транспортной сети города

Далее рассмотрим граф транспортной системы города (рис. 3.2). Выше (и в работе [76]) описано построение неориентированного графа транспортной сети г. Петрозаводск. Данный граф может рассматриваться как ориентированный,

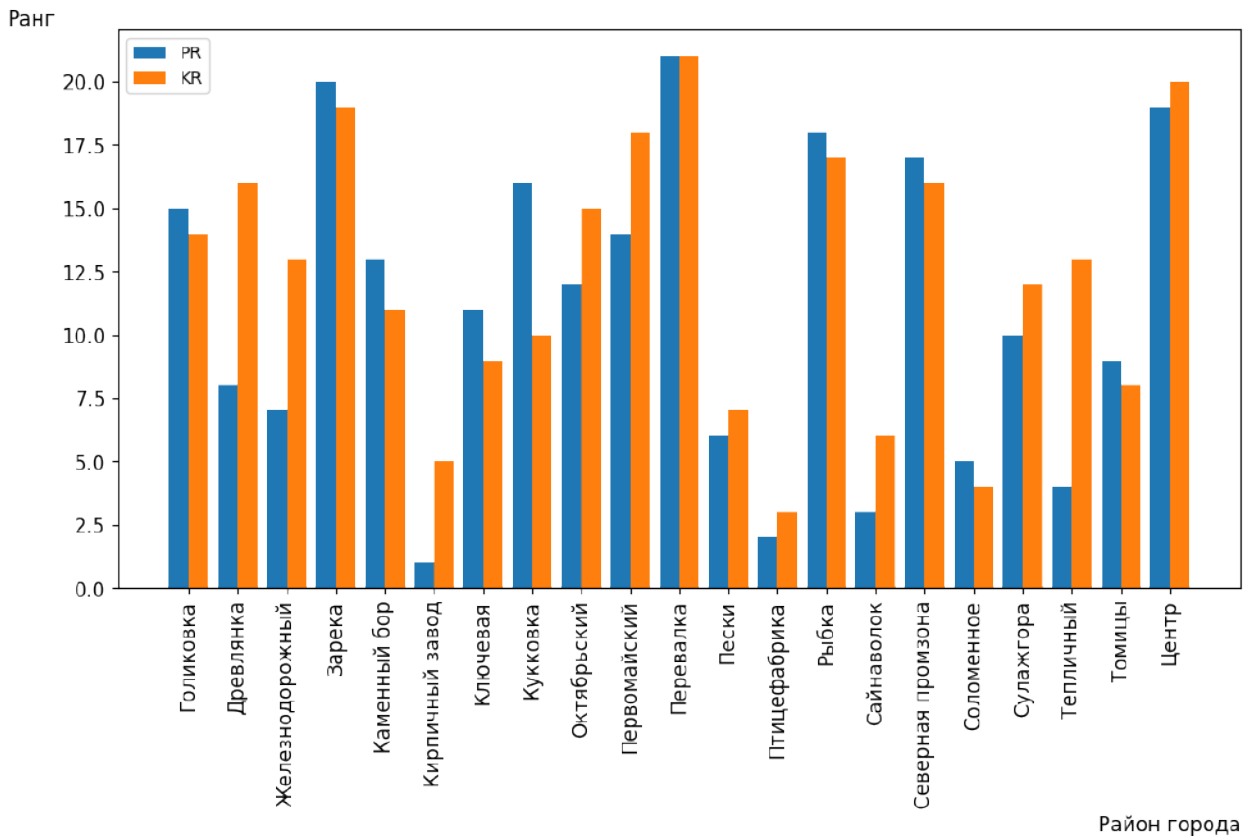


Рисунок 3.6 — Сравнение значений, полученных с помощью правила Кирхгофа (KR) и по методу PageRank(PR)

если учесть направление движения автомобильного транспорта на участках дорог, соответствующих ребрам графа. Он состоит из 1530 вершин и 3781 ребер. Значения в матрице смежности графа равны значениям, обратным длинам участков дорог между соответствующими парами вершин.

Вычислим число простых путей длины 3, проходящих через вершины графа, согласно утверждению 1.2. На рис. 3.9 представлена тепловая карта значений n_3 . Узлы большего размера и более темной окраски соответствуют более частому появлению вершины в простых путях длины 3.

Видно, что наблюдается скопление вершин высоких рангов в районах Кукковка и Перевалка, а также в удаленном районе Соломенное. Данный результат можно объяснить тем, что в данных районах в основном расположена малоэтажная застройка так называемого частного сектора. Длина отрезков дорог там обычно невелика, что порождает большое количество коротких путей.

Таблица 14 — Численность жителей в районах города

№	Район города	Число жителей
1	Голиковка	25723.8
2	Древлянка	51134.7
3	Железнодорожный	3414.4
4	Зарека	15482.9
5	Каменный бор	5057.4
6	Кирпичный завод	1006.1
7	Ключевая	26689.4
8	Кукковка	36887.5
9	Октябрьский	35685.6
10	Первомайский	17684.1
11	Перевалка	26275.2
12	Пески	0.0
13	Птицефабрика	850.8
14	Рыбка	4017.6
15	Сайнаволок	582.9
16	Северная промзона	747.2
17	Соломенное	2419.6
18	Сулажгора	4665.8
19	Тепличный	326.4
20	Томицы	47.3
21	Центр	21526.2

Вычислим значения интегральной центральности вершин. Поскольку при вычислении числа появлений вершины в путях необходимо возведение матрицы смежности в степень d , для упрощения процесса вычисления в графах с большим числом вершин для оценки центральности можно ограничиться рассмотрением путей длины меньшей, чем $n-1$. На рис. 3.10 представлена тепловая карта вершин транспортного графа, для которых были вычислены значения интегральной центральности для длин путей до $d = 100$.

Данный подход также позволяет получить скопление вершин высоких рангов на Кукковке, Перевалке и в Соломенном. В данном случае в транспортном

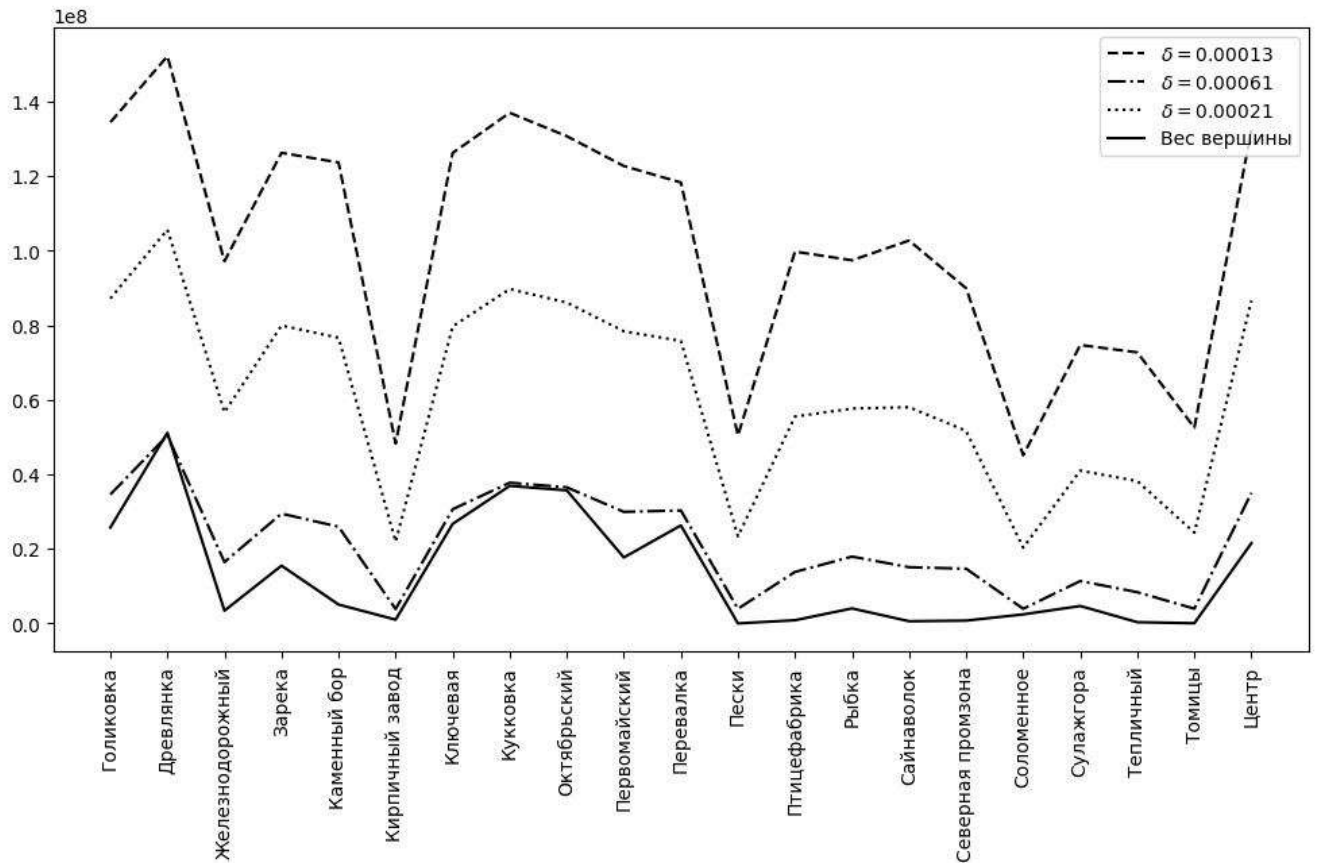


Рисунок 3.7 — Кривые рангов в зависимости от выбора δ

графе возникает большое число коротких циклов, что значительно увеличивает суммарное число появлений вершины в путях.

Далее будем рассматривать неориентированный граф транспортной сети г.Петрозаводск. На рис. 3.11 представлено визуальное представление значений центральности вершин графа дорожной сети. Бóльший размер вершины соответствует большему значению центральности по Майерсону. Подход, учитывающий число появлений вершин в путях длины 10, включая циклы, также указывает на важность вершин, расположенных в микрорайонах Кукковка и Перевалка. Кроме того, видно, что крупные узлы находятся в центре города.

Вычислим суммы рангов вершин графа, основанные на значениях абсолютных потенциалов узлов. Для вектора рангов была построена тепловая карта (рис. 3.12).

Схожие результаты для этих районов были получены выше при вычислении значений центральности вершин с помощью модифицированного метода Майерсона, интегральной центральности и нахождения числа появле-

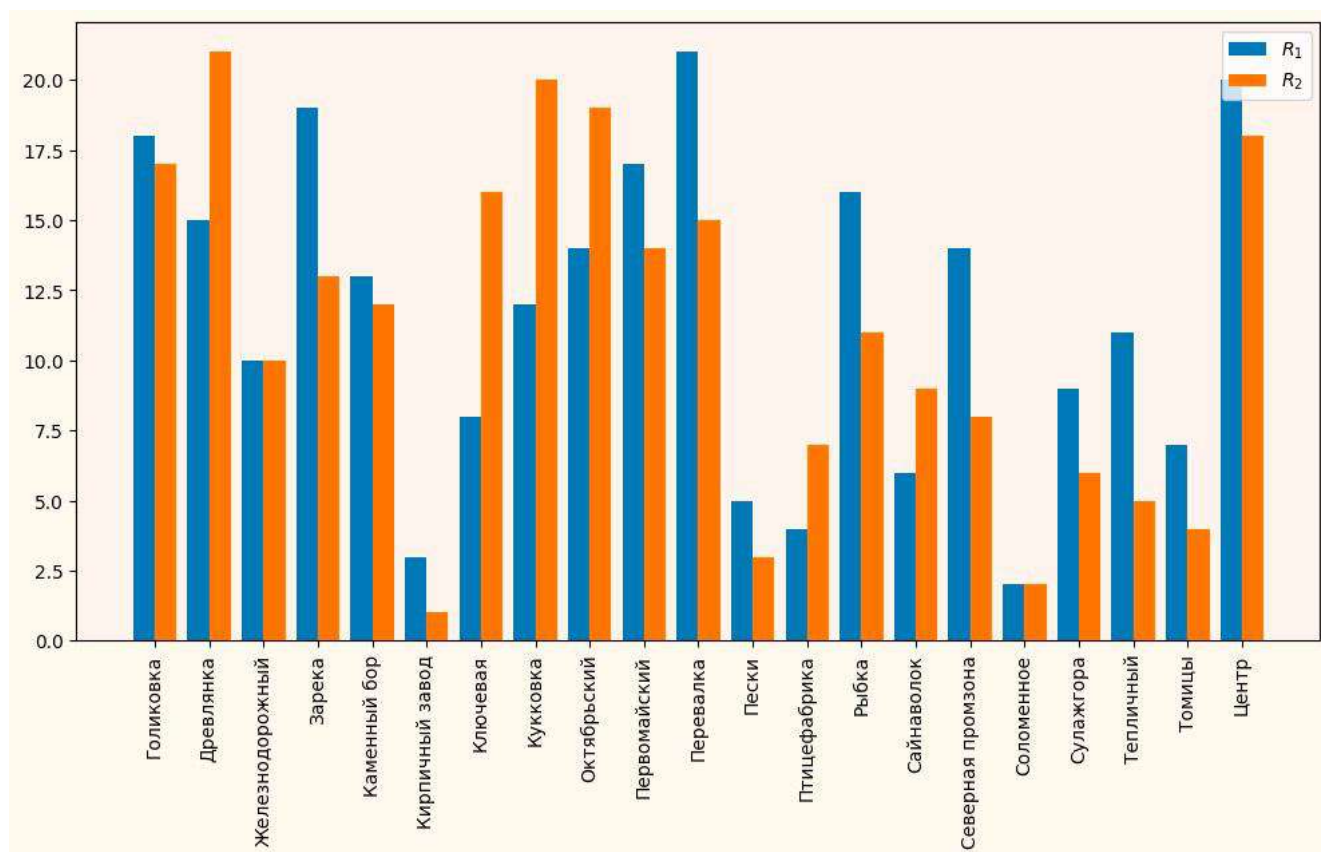


Рисунок 3.8 — Сравнение результатов ранжирования вершин

ний вершин в простых путях длины 3. Подобные результаты можно объяснить скоплением значительного числа маленьких улочек с небольшой протяженностью автомобильных дорог, что, в свою очередь, приводит к появлению в графе ребер со значимой пропускной способностью (вес ребра выбирается равным величине, обратной длине дороги), а также большого числа коротких циклов.

Сравним полученные результаты с результатами ранжирования, проведенного с помощью метода PageRank. На рис. 3.13 представлена тепловая карта вершин невзвешенного графа транспортной сети; на рис. 3.14 – тепловая карта вершин графа с взвешенными ребрами. Вес ребер равен величинам, обратным длинам соответствующих отрезков автомобильных дорог. Для PageRank ранги вершин распределены более равномерно, на тепловой карте большое количество вершин со средними рангами. Но добавление весов ребер "облегчает" тепловую карту.

Применяя метод ранжирования вершин графа, основанный на правилах Кирхгофа, учитывающий веса вершин, равных числу жителей, проживающих

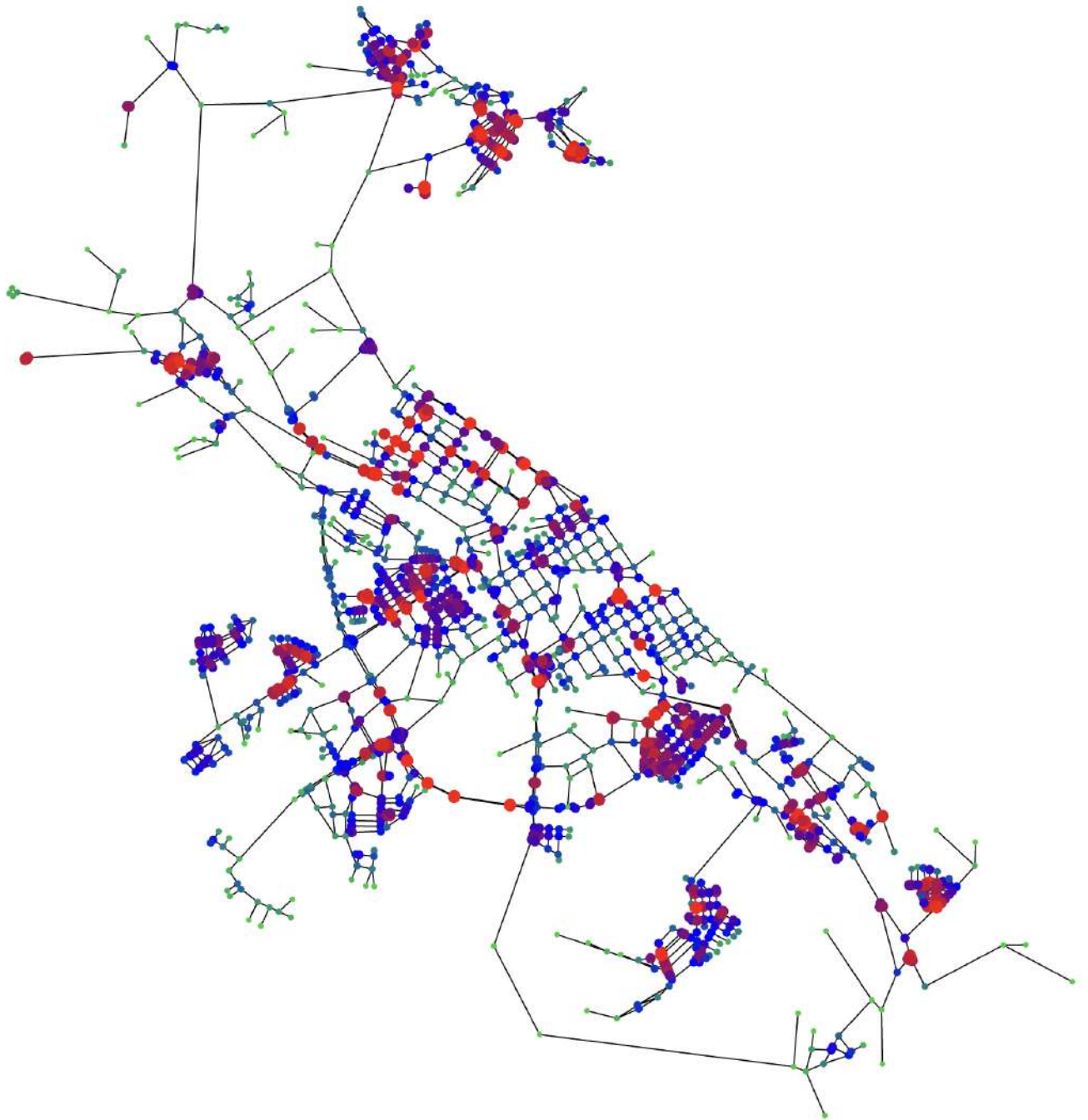


Рисунок 3.9 — Тепловая карта значений n_3 вершин графа транспортной сети г. Петрозаводск

в непосредственной близости от соответствующего вершине перекрестка дорог, к транспортному графу, получим тепловую карту рангов (рис. 3.15), на которой отсутствуют скопления вершин с высокими рангами. Наиболее темные вершины графа на тепловой карте соответствуют новым районам с плотной застройкой.

Выше при оценке центральности вершин графа веса ребер рассматривались как величины, обратные длинам соответствующих участков автомобильных дорог. На основе данных, полученных при подготовке статьи [76], были



Рисунок 3.10 — Тепловая карта значений интегральной центральности вершин графа транспортной сети г. Петрозаводск

вычислены транспортные потоки на ребрах транспортного графа. Эти значения также могут быть использованы в качестве весов ребер.

На рис. 3.16 представлена тепловая карта рангов вершин графа, где веса ребер равны значениям транспортных потоков, полученных на основе интегральной центральности, рис. 3.17 – тепловая карта рангов, полученных на основе значений абсолютных потенциалов, рис. 3.18 – ранги, вычисленные с

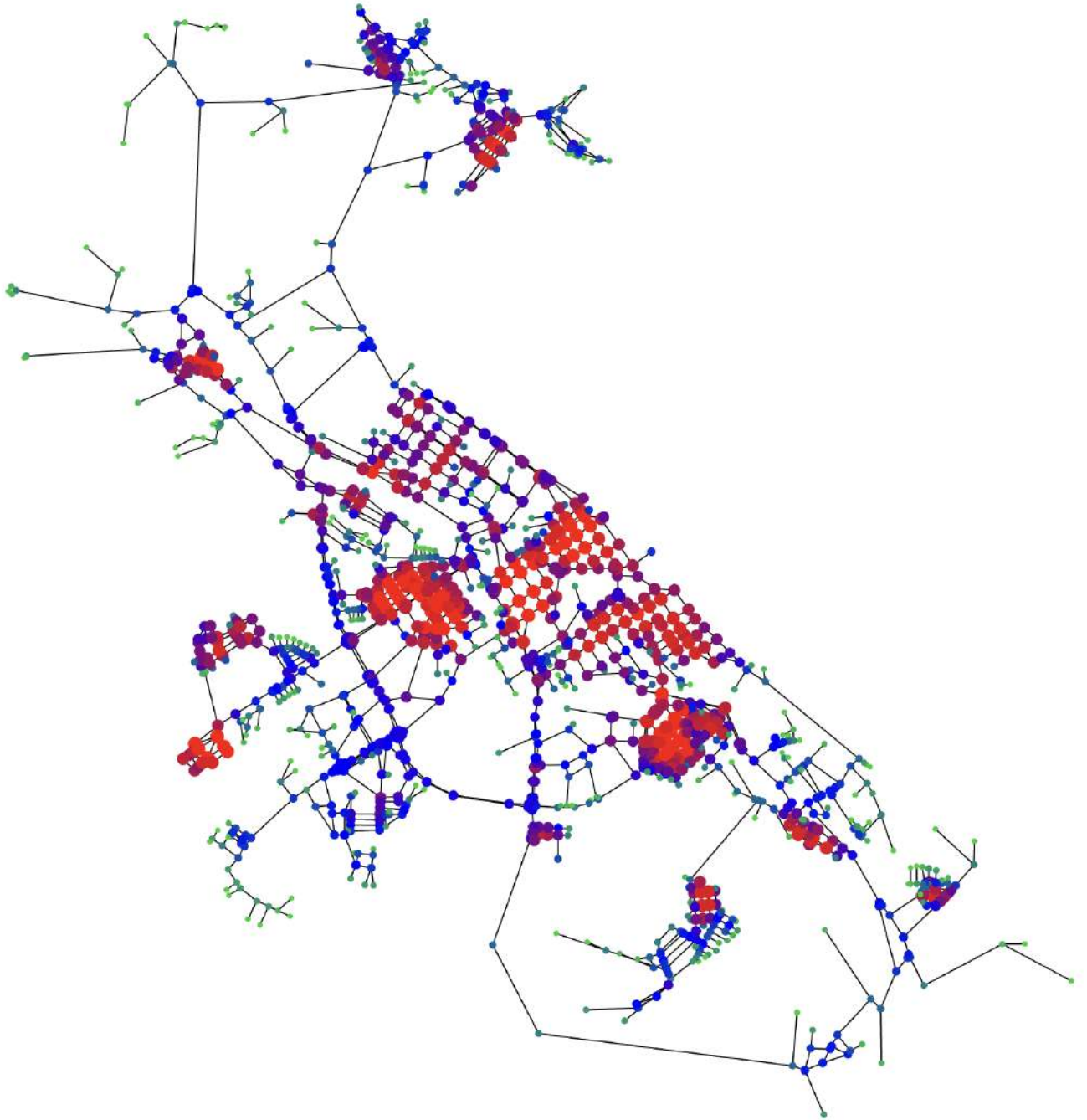


Рисунок 3.11 — Центральность вершин по Майерсону при $k = 10$

помощью суммарной работы по переносу зарядов между узлами электрической цепи. Здесь вершины с наибольшей центральностью окрашены красным, с наименьшей – зеленым.

Результаты, полученные с помощью интегральной центральности, в данном случае хорошо согласуются с реальной дорожной ситуацией в городе, например, вершины, соответствующие перекресткам с Комсомольским проспек-



Рисунок 3.12 — Тепловая карта рангов вершин транспортного графа, основанных на значениях абсолютных потенциалов (взвешенные ребра)

том, получили наибольшие значения центральности; эта улица является одной из наиболее загруженных в городе.



Рисунок 3.13 — Тепловая карта рангов вершин невзвешенного транспортного графа, метод PageRank

3.2 Муравьиная колония

В качестве исходных были использованы данные швейцарских биологов, полученные в ходе исследования [77]. Группа ученых фиксировала время взаимодействия между парами муравьев внутри колонии при условии, что в определенный момент несколько муравьев подвергаются заражению. В резуль-



Рисунок 3.14 — Тепловая карта рангов вершин взвешенного транспортного графа, метод PageRank

тате были получены графы взаимодействий (рис. 3.19, рис. 3.22), где вершины — это муравьи, а веса ребер между этими вершинами равны суммарному времени контакта в ходе эксперимента. Для удобства представления данных ребра, описывающие взаимодействие между муравьями, длившееся менее 15 % от максимально возможного внутри колонии, были удалены. Рассматриваемая колония состоит из 105 муравьев. Внутри колонии муравьи разделены на группы

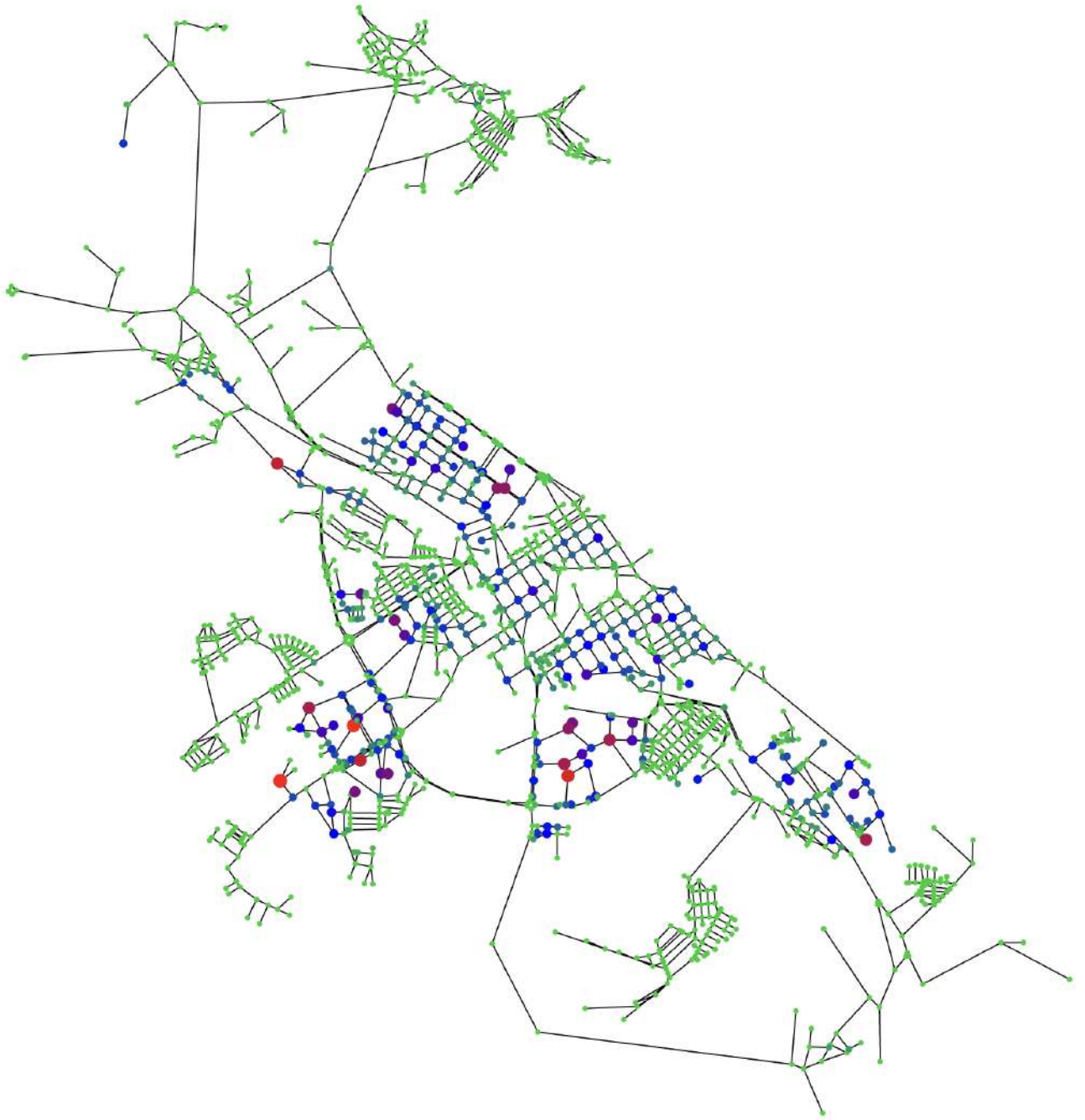


Рисунок 3.15 — Тепловая карта рангов вершин графа (взвешенные вершины и ребра), основанных на значениях суммарной работы по переносу зарядов «nurses» (n) – медсестры, «foragers» (f) – фуражиры и «queen» (q) – матка колонии.

На рис. 3.19 изображен граф взаимодействий колонии до заражения. Вершина, соответствующая матке («queen») показана треугольником. Проведем ранжирование вершин графа взаимодействий до заражения с помощью модифицированного значения Майерсона и на основе значений абсолютных потенциалов, учитывающих веса ребер. Поскольку метод вычисления вектора

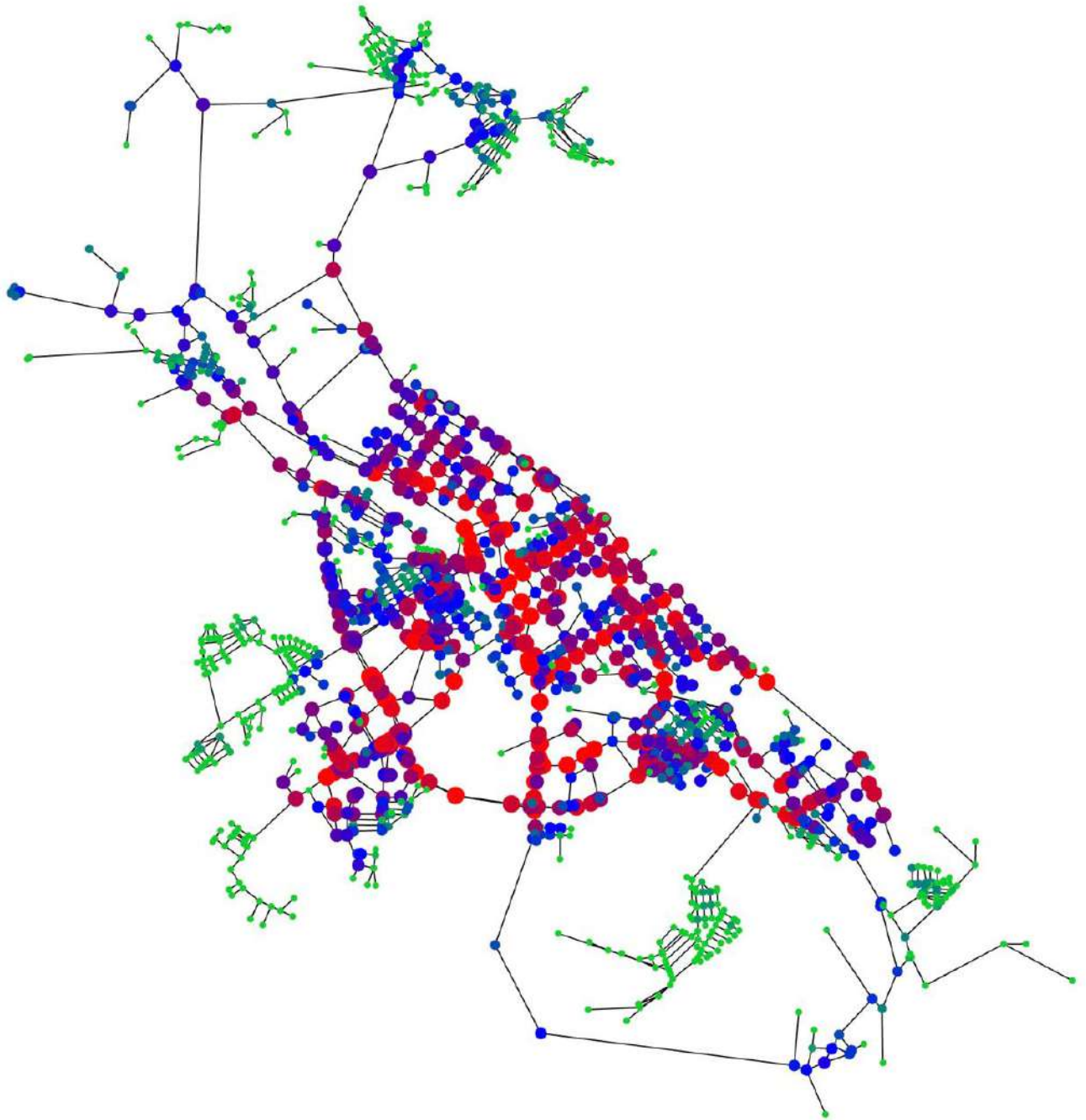


Рисунок 3.16 — Тепловая карта рангов вершин графа, где вес ребер равен транспортному потоку (интегральная центральность)

центральностей с помощью модифицированного значения Майерсона предполагает работу с матрицей смежности, было выбрано пороговое значение времени взаимодействия, равное $0.15 \cdot T_{max}$, где T_{max} — максимальное время взаимодействия между муравьями в колонии. Все ребра, веса которых оказались меньше порогового значения, в матрице смежности были помечены 0, остальные — 1.

Наиболее высокие ранги получены муравьями из группы «nurses» (вершины 19, 45, 59), на тепловых картах (рис. 3.20, рис. 3.21) соответствующие им

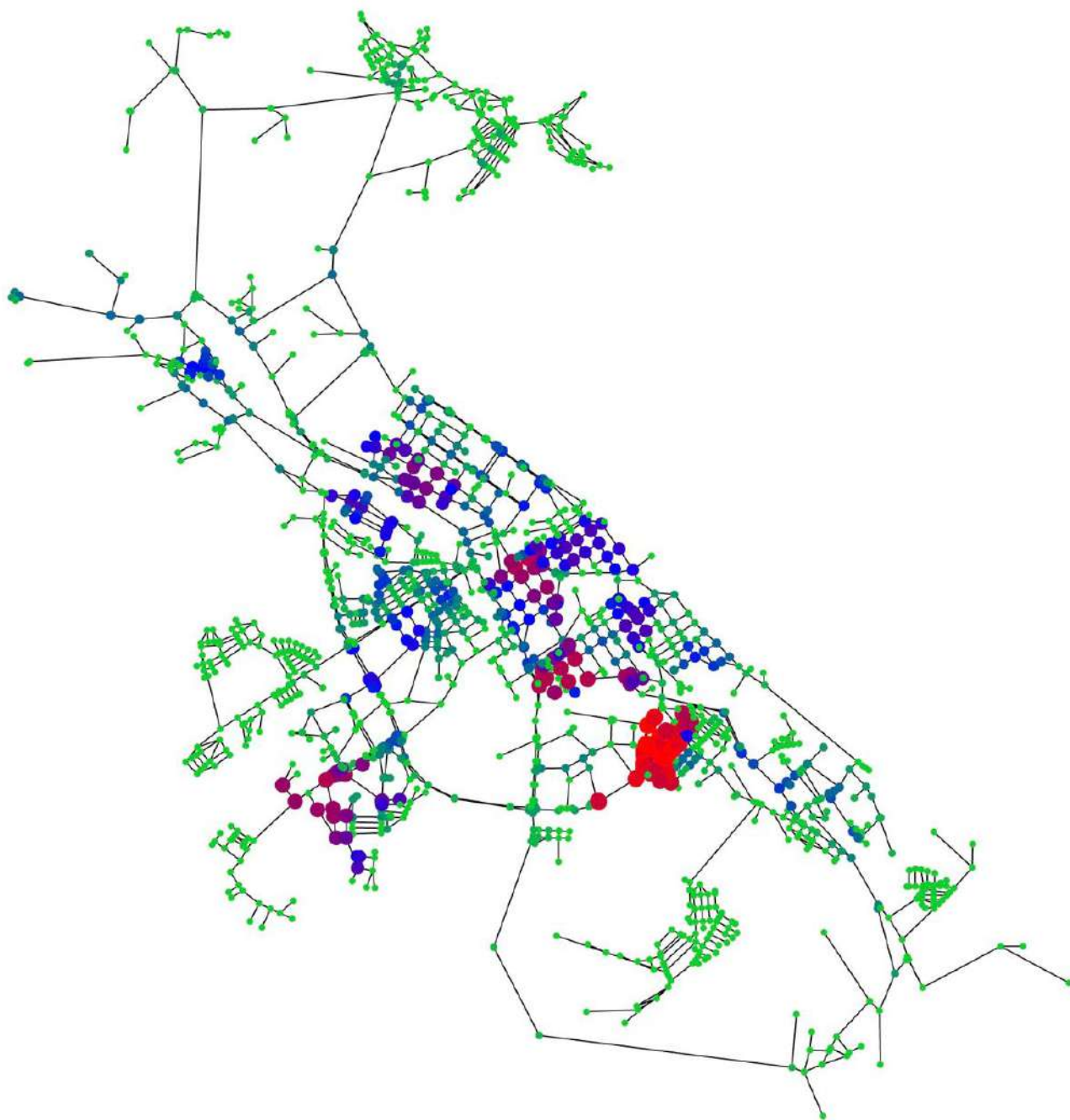


Рисунок 3.17 — Тепловая карта рангов вершин графа, где вес ребер равен транспортному потоку (абсолютные потенциалы)

вершины закрашены наиболее темным. В табл. 15 приведены ранги вершин, которые впоследствии будут подвергнуты заражению.

Таблица 15 — Ранги вершин, подвергающихся заражению

Идентификатор	9	37	47	49	50	64	73
Ранги на основе потенциалов	75	54	79	-	47	89	77
Ранги на основе вектора Майерсона	78	64	76	-	34	90	74

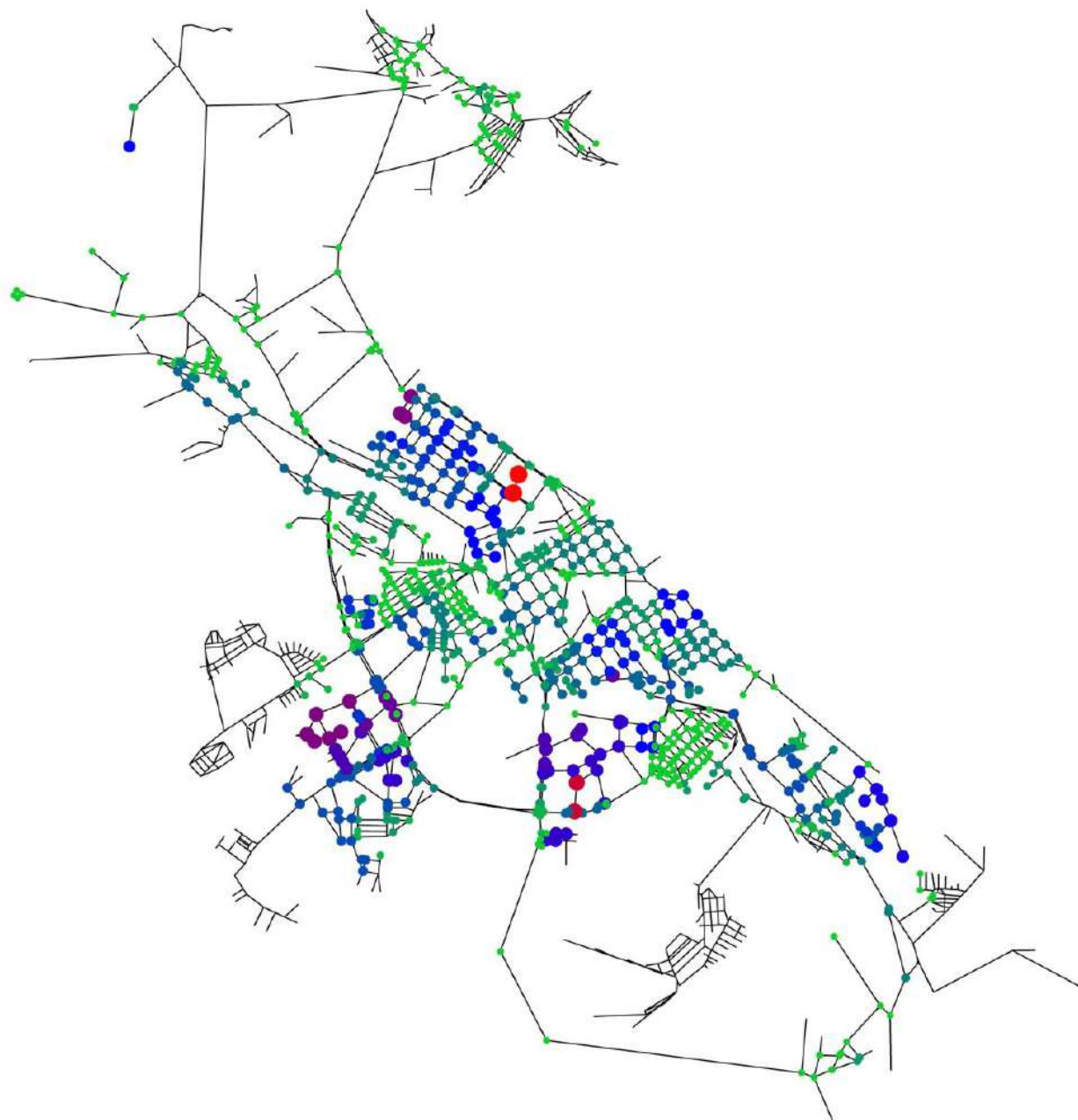


Рисунок 3.18 — Тепловая карта рангов вершин графа, где вес ребер равен транспортному потоку (работа по переносу зарядов)

После заражения структура графа заметно меняется (рис. 3.22). Здоровые муравьи минимизируют общение с зараженными муравьями. При этом изолированные зараженные муравьи образуют свою сеть взаимодействий, в которой у некоторых вершин ранги возрастают, что может быть связано с тем, что они становятся лидерами в своем сообществе. Зараженные особи были выбраны из группы «foragers». Все они, за исключением вершины 25, были изолированы.

В табл. 16 представлены ранги вершин, соответствующих муравьям, которые были подвергнуты заражению. Близкие ранги указывают на равные роли

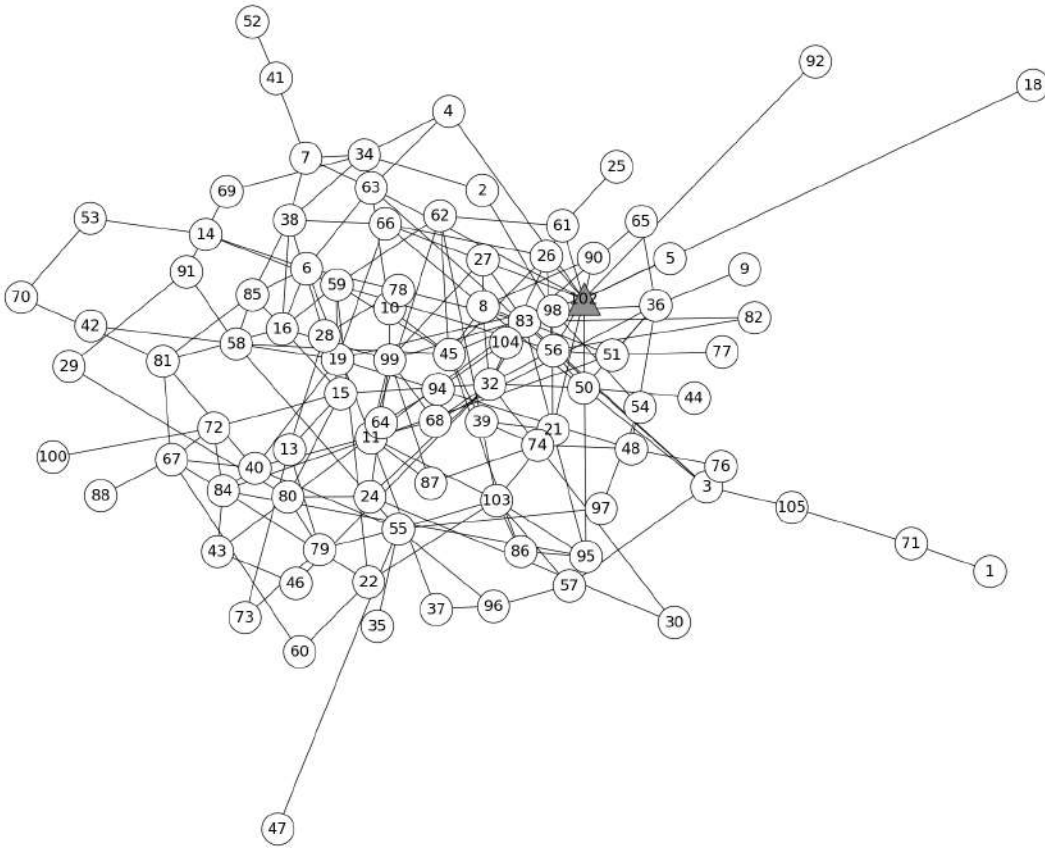


Рисунок 3.19 — Граф взаимодействий муравьиной колонии до заражения вершин в системе. Наивысшим рангом после заражения обладает вершина — матка колонии.

Таблица 16 — Ранги вершин, подвергшихся заражению

Идентификатор	9	37	47	49	50	64	73
Ранги на основе потенциалов	54	74	72	69	78	70	73
Ранги на основе вектора Майерсона	55	75	72	64	70	49	69

3.3 Санкт-Петербургский метрополитен

В качестве объекта вычислительного эксперимента использовался граф, построенный на основе схемы Санкт-Петербургского метрополитена (рис. 3.25). Соответствующий граф (рис. 3.26) содержит 72 вершины.

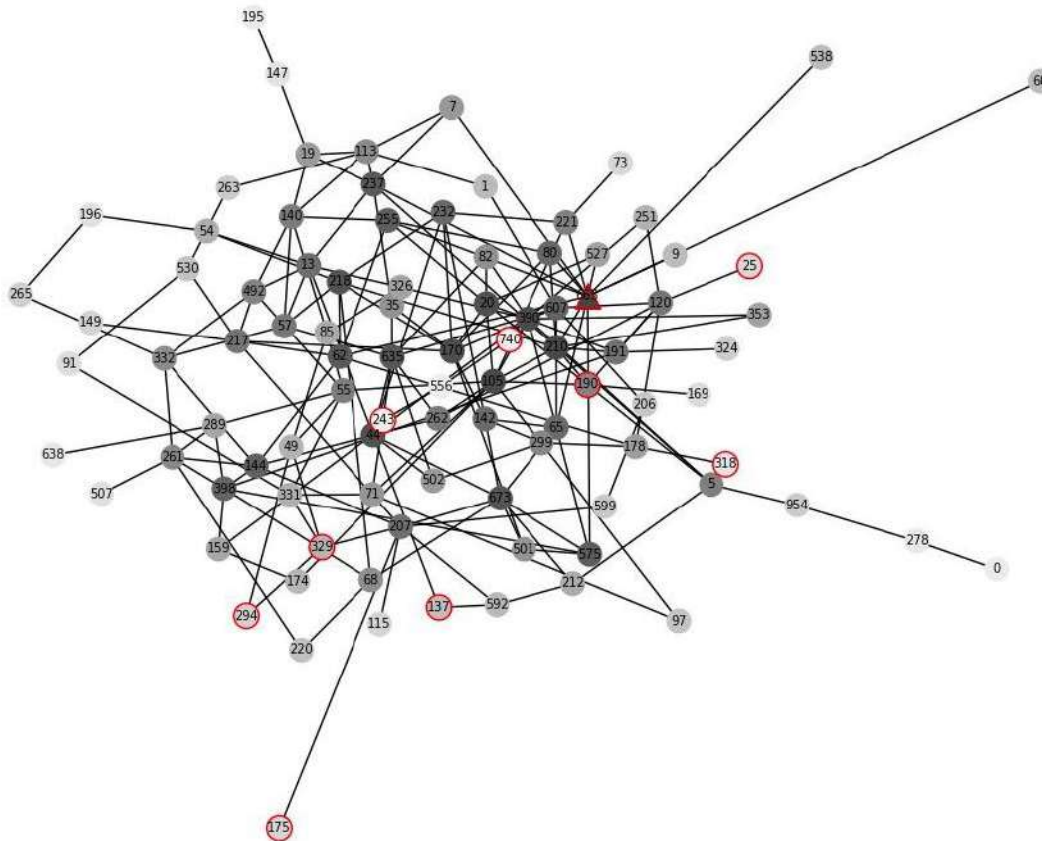


Рисунок 3.20 — Тепловая карта рангов вершин графа до заражения. Модифицированное значение Майерсона

Оценим центральности вершин в этом графе с помощью модифицированного вектора Майерсона для путей длины 5 и 10 (табл. 17). Наименьшие значения центральности наблюдаются у станций Девяткино, пр.Ветеранов, Парнас, Купчино, Рыбацкое, ул. Дыбенко, Комендантский проспект, Международная, Беговая. Все эти станции являются конечными. Наибольшие значения центральности у пересадочных станций, наибольшие у станций Садовая, Спасская, Сенная площадь. Согласно статистике Петербургского метрополитена (см. приложение 3.4) на данных станциях наблюдается наибольший ежедневный и ежемесячных пассажиропоток. Хотя, согласно этой же статистике, достаточно большой пассажиропоток и на конечных станциях спальных районов.

Далее проведем ранжирование вершин графа метрополитена, основанное на значениях абсолютных потенциалов соответствующих узлов электрической

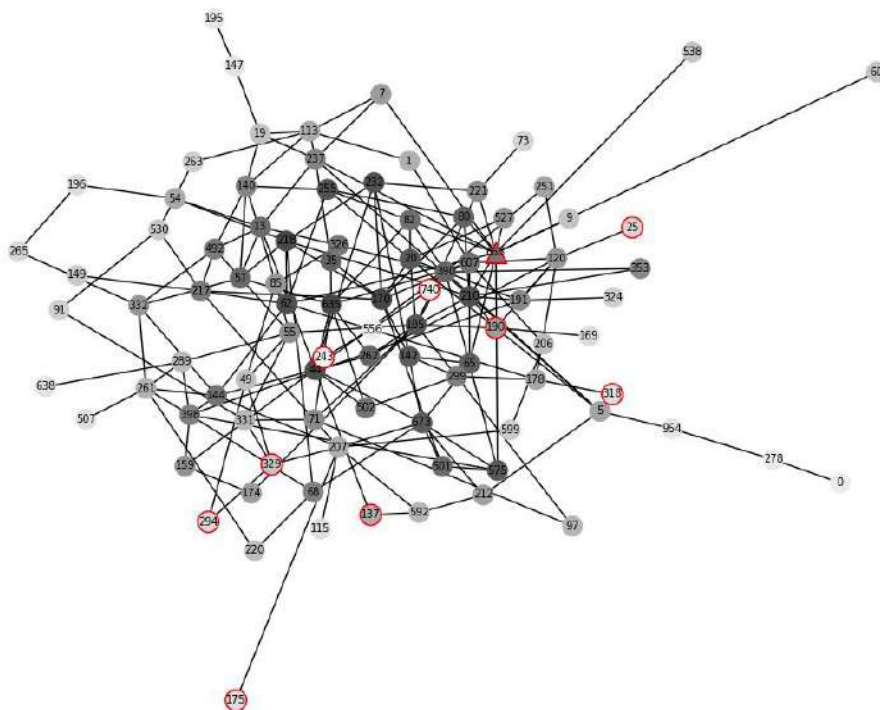


Рисунок 3.21 — Тепловая карта рангов вершин графа до заражения. Абсолютные потенциалы

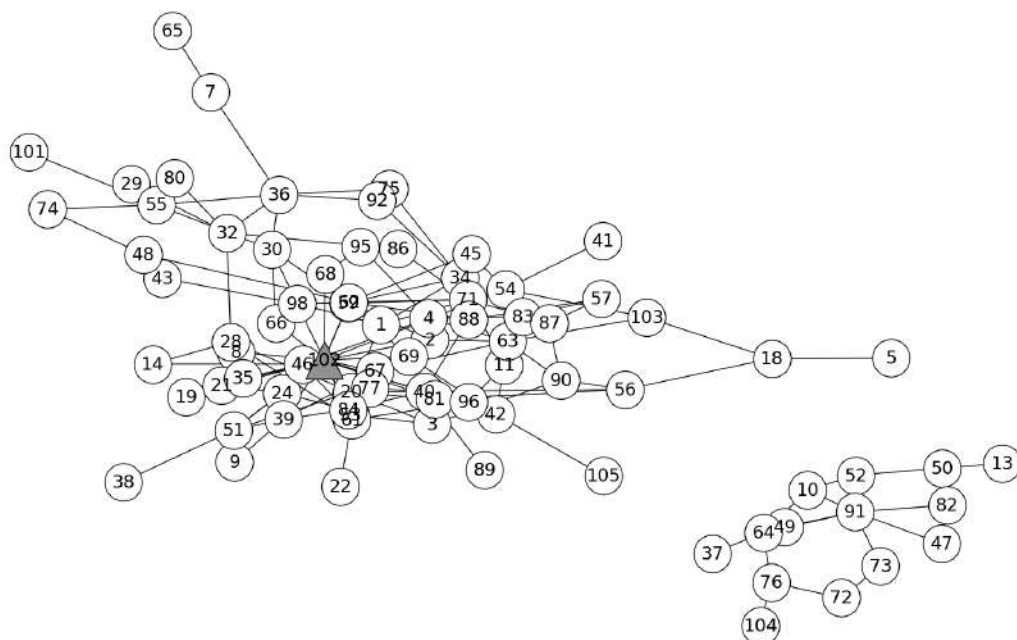


Рисунок 3.22 — Граф взаимодействий муравьиной колонии после заражения цепи. Поскольку информация о длине перегонов между станциями отсутствует в свободном доступе, в качестве весов ребер выбиралась величина, обратная времени, необходимому для передвижения между парами соседних станций.

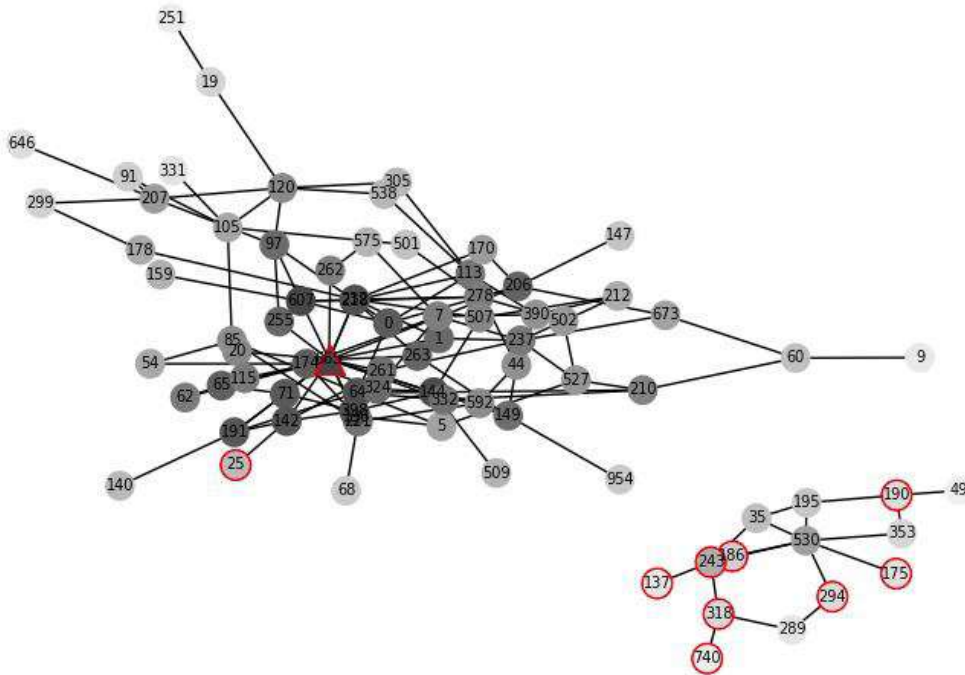


Рисунок 3.23 — Тепловая карта после заражения. Модифицированное значение Майерсона

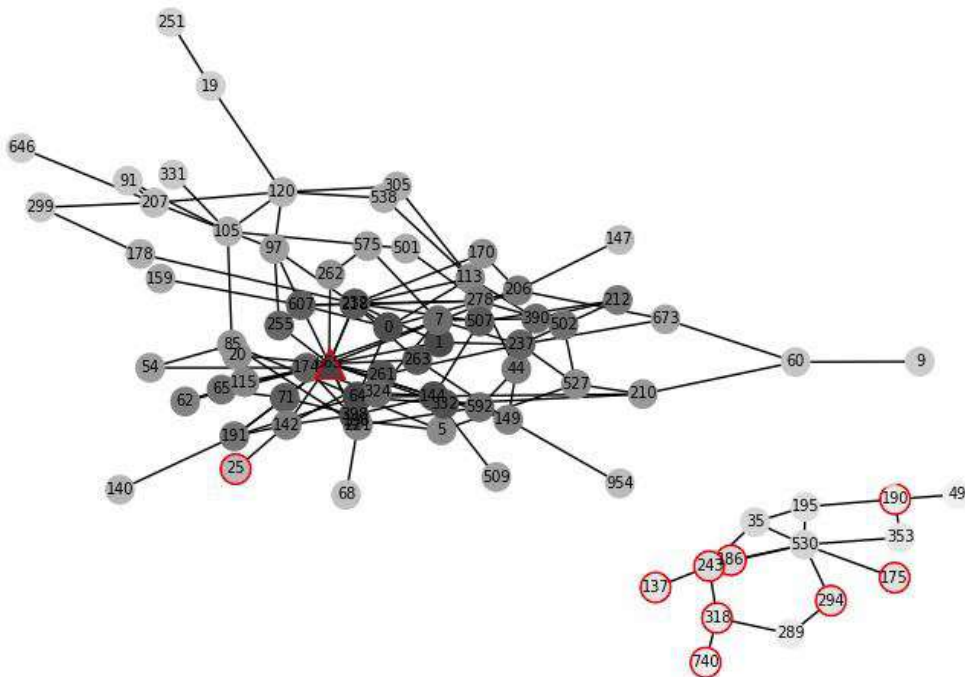


Рисунок 3.24 — Тепловая карта после заражения. Абсолютные потенциалы

На рис. 3.27 представлена тепловая карта рангов вершин графа. Более темный окрас соответствует более высокому рангу вершины; числа, указанные

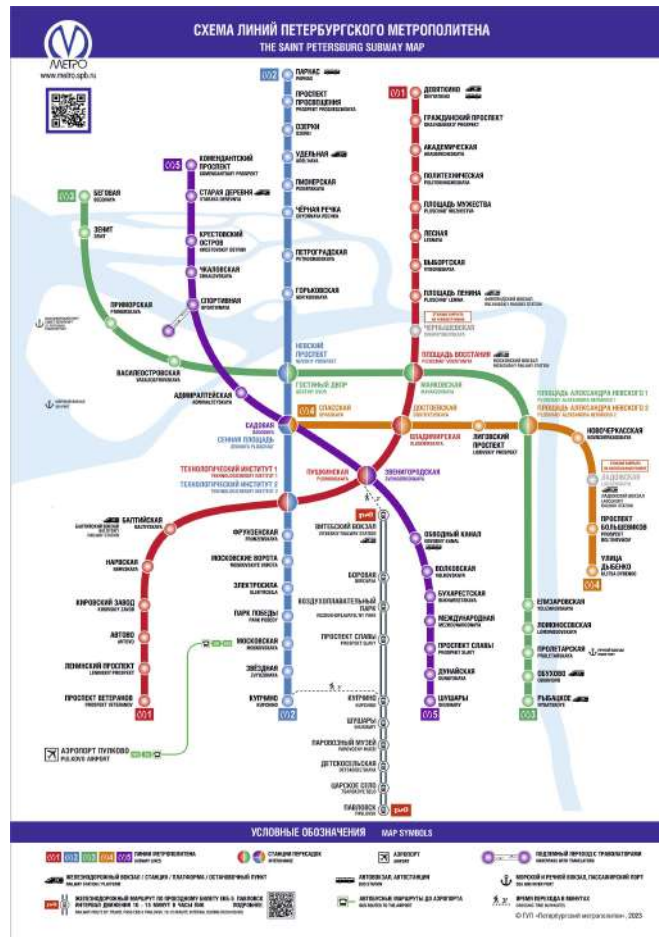


Рисунок 3.25 — Схема Санкт-Петербургского метрополитена

на вершинах, соответствуют рангам. Наивысшие ранги получены для станций Владимирская, Достоевская, Спасская, Садовая, Сенная, Лиговский проспект. Наихудшие ранги наблюдаются на красной ветке: станции Академическая, Гражданский проспект, Девяткино.

В случае анализа графа метрополитена, например, с целью оценки более выгодных мест для размещения рекламы, в качестве весов вершин может быть использована информация о пассажиропотоке по станциям за день (приложение 3.4). Результат ранжирования, учитывающий пассажиропоток, представлен на рис. 3.28. Здесь вершина, получившая наивысший ранг, – Площадь Восстания (при ранжировании, учитывающем только веса ребер, данная станция имела ранг 9). Стоит отметить, что некоторые периферийные станции, имевшие наихудшие ранги, стали значимы при данном подходе, поскольку поток на этих конечных станциях веток довольно высок.

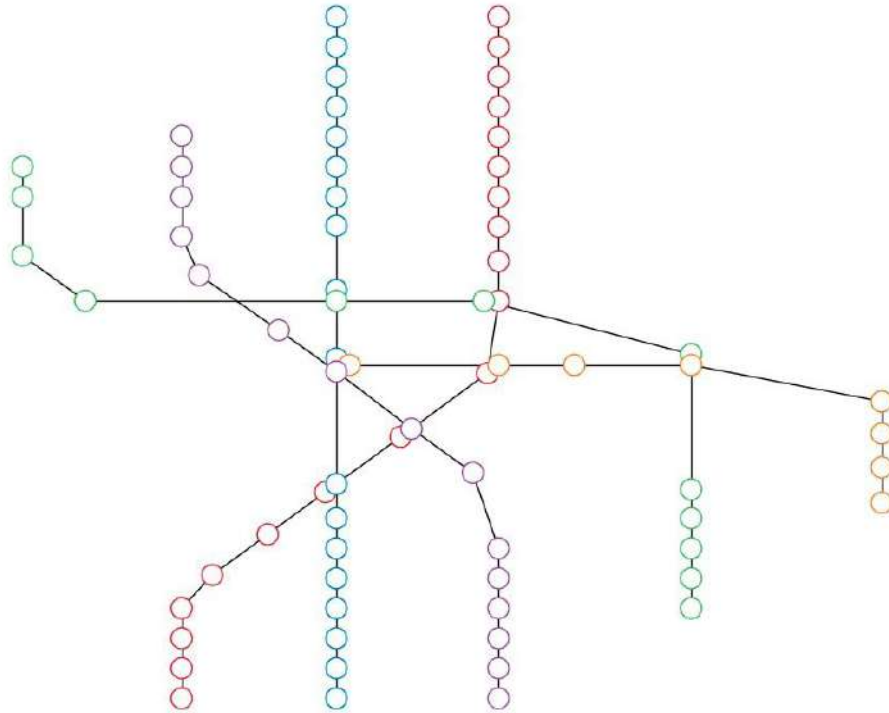


Рисунок 3.26 — Граф Санкт-Петербургского метрополитена

3.4 Социальная сеть саги Звездные Войны

Доктор Эвелина Габасова – сотрудник Института Алана Тьюринга – провела исследование на основе сценариев³ серии фильмов Звездные войны[78]. В результате был построен граф социальной сети всей саги (рис. 3.29), а также графы социальных сетей каждого эпизода (рис. 3.30). Вершины графов соответствуют персонажам фильмов, наличие связи между парой вершин означает, что соответствующие персонажи оба говорят в одной сцене. Размер каждого узла соответствует общему числу сцен, в которых появляется персонаж. Видно, что граф саги визуально разделяется на две части (соответствующие классической трилогии и трилогии приквелов), которые соединены узлами Оби-Ван Кеноби, R2-D2 и С-3РО. Данные персонажи встречаются во всех эпизодах. Всего в рассматриваемой серии фильмов 144 персонажа.

³<https://imsdb.com/>

Таблица 17 — Значения центральности некоторых вершин, модифицированное значение Майерсона

Станция	$s_i(5)$	$\sigma_i(5)$	$s_i(10)$	$\sigma_i(10)$
Девяткино	44	7,33	1 588	144,36
Проспект Ветеранов	44	7,33	1 784	162,18
Парнас	44	7,33	1 598	145,27
Купчино	44	7,33	1648	149,82
Рыбацкое	44	7,33	2 154	195,82
Комендантский проспект	44	7,33	1 992	181,09
Улица Дыбенко	46	7,67	2 927	266,09
Международная	46	7,67	4 281	389,18
Беговая	46	7,67	3 563	323,91
Спасская	1 988	331,33	964 437	87 676,09
Садовая	2 578	429,67	1 224 429	111 311,73
Сенная площадь	2 810	468,33	1 342 204	122 018,55

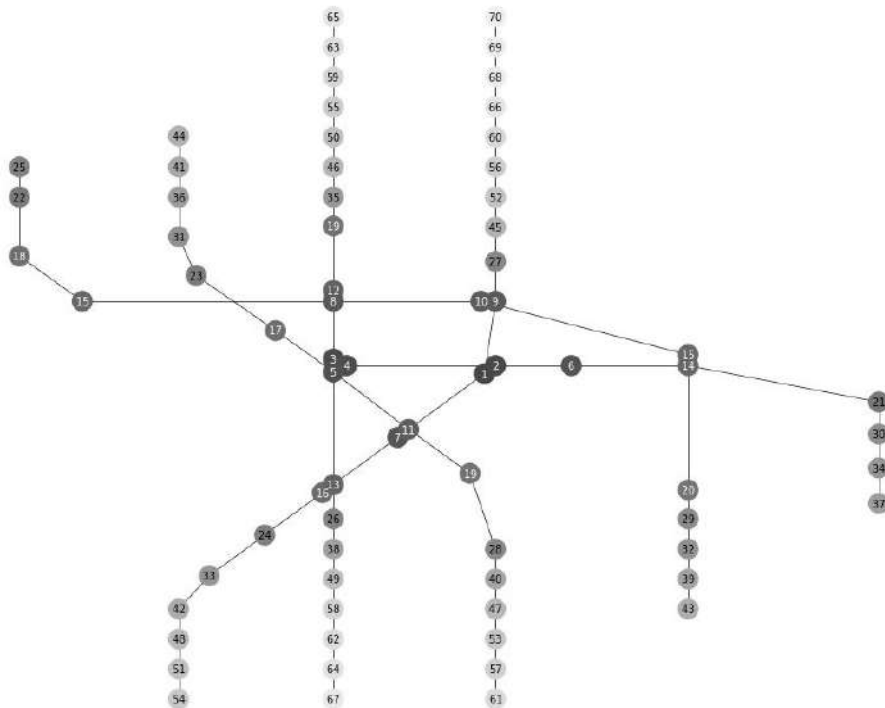


Рисунок 3.27 — Тепловая карта рангов вершин графа Санкт-Петербургского метрополитена с учетом весов ребер

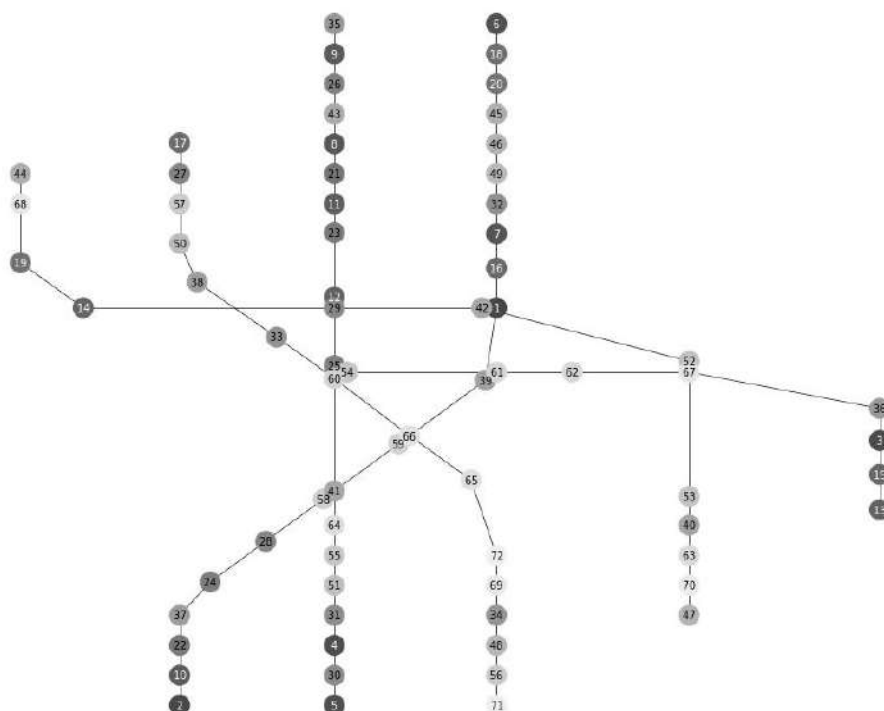


Рисунок 3.28 — Тепловая карта рангов вершин графа Санкт-Петербургского метрополитена с учетом весов вершин ребер

Проведем анализ общего графа саги и графов отдельных эпизодов с помощью предложенных в диссертационной работе методов. Данные графы являются неориентированными. Вес ребра равен числу сцен, в которых персонажи, соответствующие инцидентным ребру вершинам, участвуют вместе. Вес вершины равен числу сцен, в которых соответствующий персонаж принимает участие.

В таблице 18 приведены наиболее центральные персонажи саги, определенные с помощью вектора Майерсона, абсолютных потенциалов электрической цепи, суммарной работы по переносу зарядов и с помощью интегральной центральности. Данные результаты ранжирования можно сравнить с результатами, полученными ранее в работе [78] с помощью степенной центральности и центральности по посредничеству.

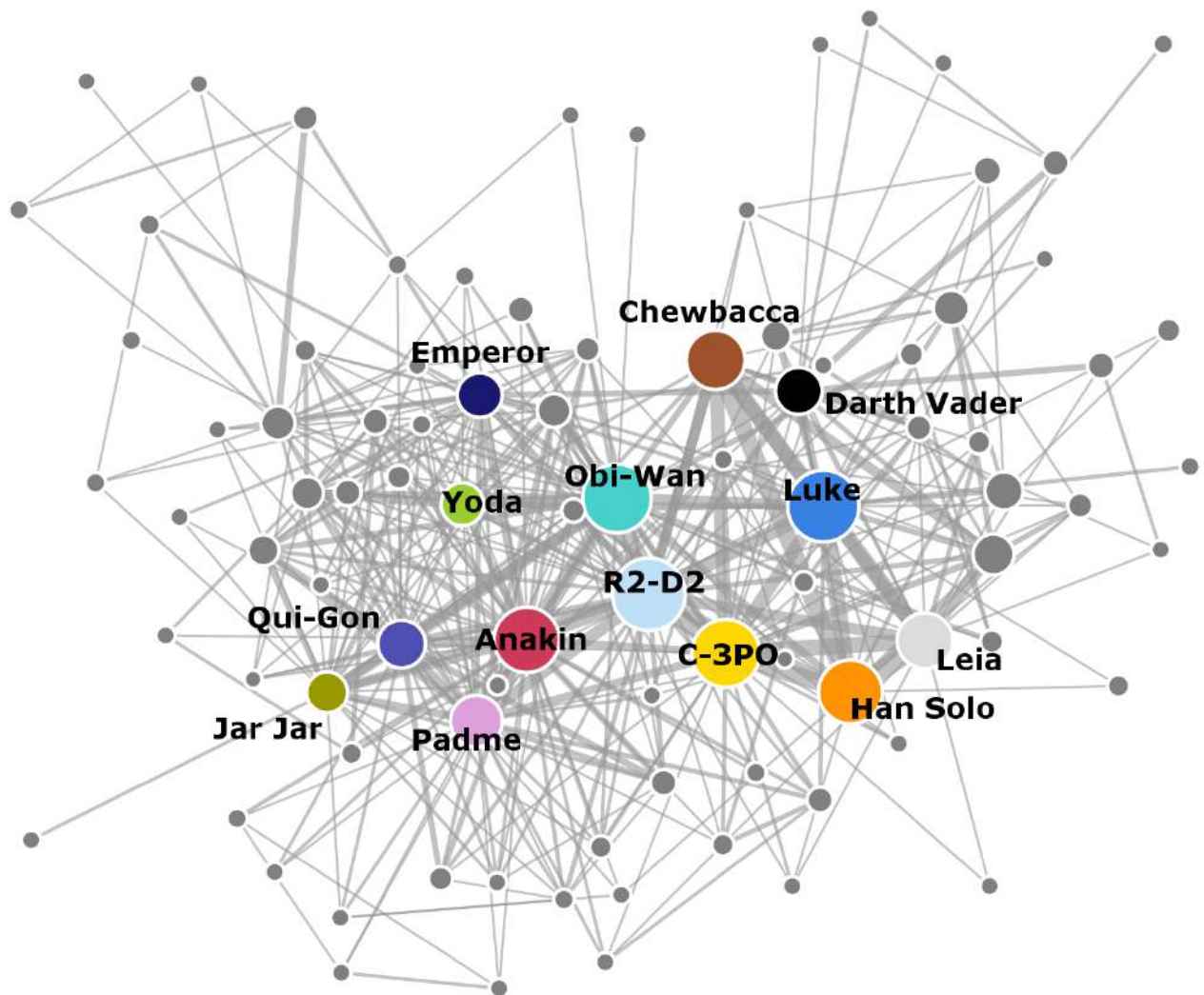


Рисунок 3.29 — Граф социальной сети Star Wars

В таблицах 19 – 24 приведены ранги персонажей отдельно в каждом эпизоде саги, полученные с помощью вектора Майерсона, абсолютных потенциалов, суммарной работы по переносу зарядов и интегральной центральности.

Создатель Звездных Войн Джордж Лукас в одном из интервью сказал, что сага – это история Энакина Скайуокера, однако, анализируя центральность вершин в общем графе, можно также сделать вывод о том, что связующими звеньями сюжета являются Оби-Ван Кеноби, Хан Соло и Чубакка, несмотря на то, что второй и третий персонажи принимают участие только в классической трилогии.

В первых трех эпизодах саги наибольшей центральностью обладает вершина, соответствующая Энакину, однако, вычисление центральности с помощью суммарной работы по переносу заряда указывает на центральность вершины

Таблица 18 — Ранги персонажей саги Star Wars

Ранг	Вектор Майер-сона	Абсолютные потенциалы	Суммарная работа
1	ANAKIN	OBI-WAN	CHEWBACCA
2	C-3PO	R2-D2	HAN
3	OBI-WAN	ANAKIN	LEIA
4	PADME	PADME	REY
5	R2-D2	QUI-GON	LUKE
Ранг	Интегральная центральность	Степенная центральность	Центральность по посредничеству
1	HAN	ANAKIN	OBI-WAN
2	CHEWBACCA	R2-D2	PADME
3	C-3PO	OBI-WAN	R2-D2
4	LEIA	PADME	C-3PO
5	LUKE	C-3PO	LUKE

Таблица 19 — Ранги персонажей Эпизода I

Ранг	Вектор Майер-сона	Абсолютные потенциалы
1	QUI-GON	QUI-GON
2	ANAKIN	PADME
3	PADME	OBI-WAN
4	JAR JAR	ANAKIN
5	OBI-WAN	R2-D2
Ранг	Суммарная работа	Интегральная центральность
1	R2-D2	QUI-GON
2	PADME	ANAKIN
3	OBI-WAN	JAR JAR
4	QUI-GON	PADME
5	ANAKIN	OBI-WAN

R2-D2. Данный подход к вычислению центральности учитывает вес вершины, в данном случае это число эпизодов, в которых персонаж принимал участие,

Таблица 20 — Ранги персонажей Эпизода II

Ранг	Вектор Майерсона	Абсолютные потенциалы
1	ANAKIN	ANAKIN
2	OBI-WAN	PADME
3	PADME	OBI-WAN
4	MACE WINDU	R2-D2
5	COUNT DOOKU	MACE WINDU
Ранг	Суммарная работа	Интегральная центральность
1	R2-D2	ANAKIN
2	PADME	PADME
3	OBI-WAN	OBI-WAN
4	LAMA SU	R2-D2
5	ANAKIN	C-3PO

Таблица 21 — Ранги персонажей Эпизода III

Ранг	Вектор Майерсона	Абсолютные потенциалы
1	ANAKIN	ANAKIN
2	OBI-WAN	R2-D2
3	BAIL ORGANA	OBI-WAN
4	EMPEROR	C-3PO
5	PADME	BAIL ORGANA
Ранг	Суммарная работа	Интегральная центральность
1	R2-D2	ANAKIN
2	OBI-WAN	OBI-WAN
3	ANAKIN	R2-D2
4	C-3PO	EMPEROR
5	YODA	PADME

но R2-D2 не является самостоятельно действующим лицом, чаще всего он сопровождает Энакина или Оби-Вана Кеноби.

Таблица 22 — Ранги персонажей Эпизода IV

Ранг	Вектор Майерсона	Абсолютные потенциалы
1	LUKE	LUKE
2	LEIA	CHEWBACCA
3	C-3PO	R2-D2
4	R2-D2	C-3PO
5	BIGGS	OBI-WAN
Ранг	Суммарная работа	Интегральная центральность
1	R2-D2	LUKE
2	C-3PO	HAN
3	CHEWBACCA	C-3PO
4	LUKE	CHEWBACCA
5	OBI-WAN	LEIA

Таблица 23 — Ранги персонажей Эпизода V

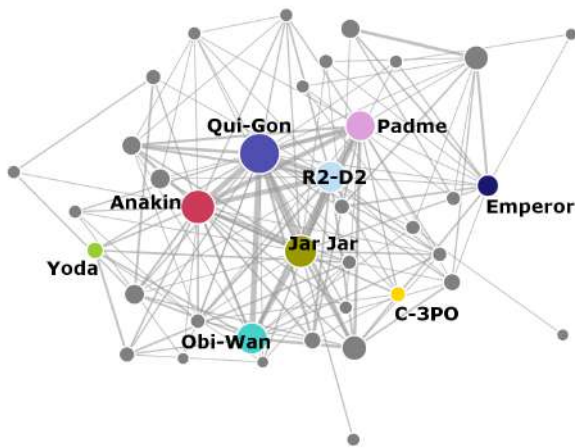
Ранг	Вектор Майерсона	Абсолютные потенциалы
1	HAN	CHEWBACCA
2	LEIA	HAN
3	LUKE	LEIA
4	CHEWBACCA	C-3PO
5	DARTH VADER	LANDO
Ранг	Суммарная работа	Интегральная центральность
1	C-3PO	HAN
2	CHEWBACCA	LEIA
3	LEIA	C-3PO
4	HAN	CHEWBACCA
5	R2-D2	LANDO

В классической трилогии (эпизоды IV, V и VI) в ранжировании, учитывающем частоту появлений на экране, наиболее важными являются вершины, соответствующие Чубакке, R2-D2 и C-3PO, остальные методы указывают на

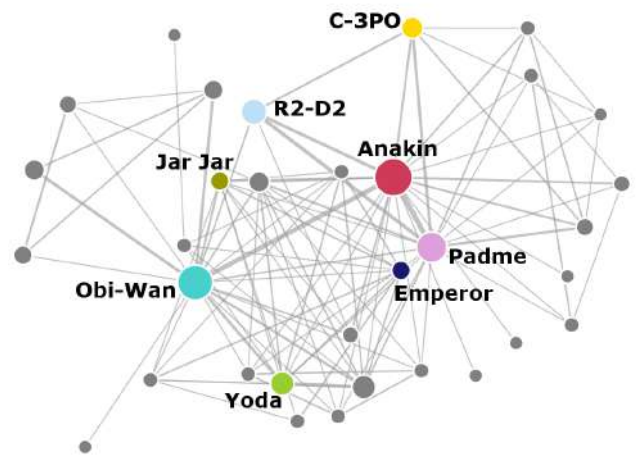
Таблица 24 — Ранги персонажей Эпизода VI

Ранг	Вектор Майерсона	Абсолютные потенциалы
1	LUKE	HAN
2	C-3PO	CHEWBACCA
3	HAN	LEIA
4	LANDO	R2-D2
5	MON MOTHMA	LUKE
Ранг	Суммарная работа	Интегральная центральность
1	CHEWBACCA	HAN
2	HAN	C-3PO
3	R2-D2	LEIA
4	LEIA	CHEWBACCA
5	C-3PO	LUKE

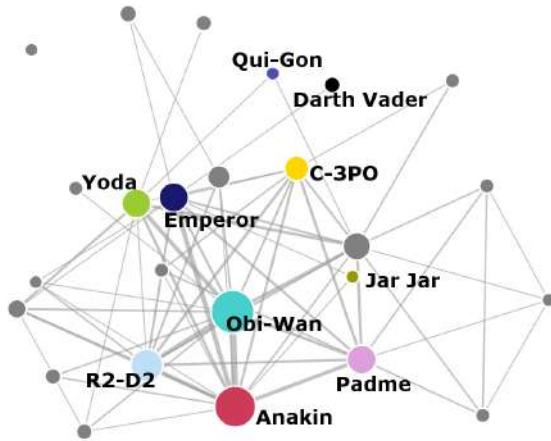
важность вершин, соответствующих Хану Соло, Люку и Лейе Скайуокерам. Но вершина Darth Vader попадает в топ-5 лишь в V эпизоде для вектора Майерсона.



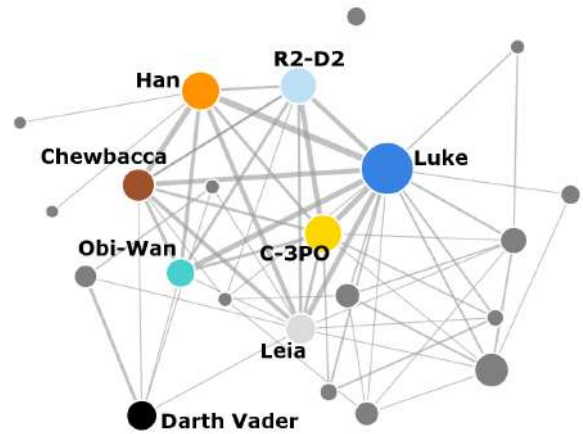
а) Эпизод I: Скрытая угроза;



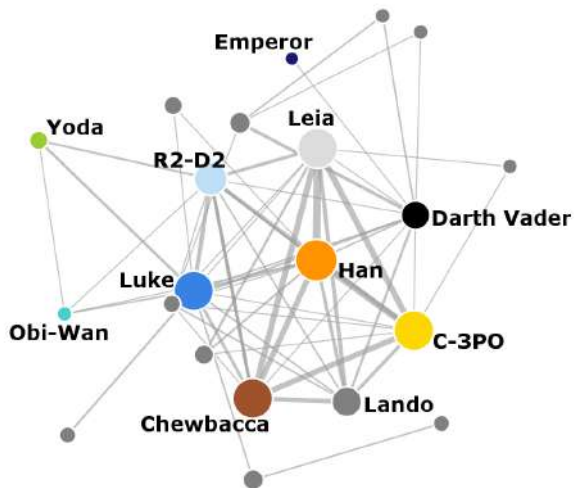
б) Эпизод II: Атака клонов;



в) Эпизод III: Месть ситхов;

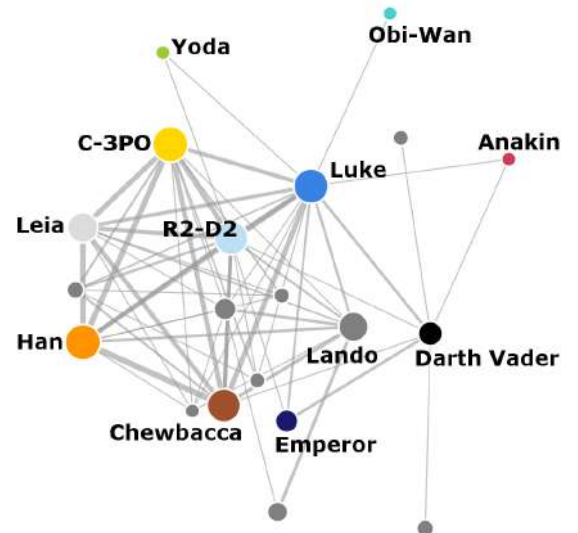


г) Эпизод IV: Новая надежда;



д) Эпизод V: Империя наносит

ответный удар;



е) Эпизод VI: Возвращение джедая;

Рисунок 3.30 — Графы социальных сетей эпизодов саги.

Заключение

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. В ходе выполнения работы был предложен метод вычисления центральности вершин ориентированного графа, как значение Майерсона в кооперативной игре, где характеристическая функция определяется через количество простых путей фиксированной длины в подграфе, порожденном коалицией. Для вычисления центральности были предложены формулы, позволяющие найти число появлений вершины в простых путях длины 2 и 3 через матрицу смежности.
2. Было введено понятие интегральной центральности через значение определенного интеграла функции, задающей дележ в кооперативной игре, характеристическая функция которой задается с помощью числа суммарного появления вершины графа в простых путях. Показано, что для такой меры центральности справедливы аксиомы Boldi — Vigna.
3. Для вершин неориентированных графов было модифицировано значение Майерсона в кооперативной игре, где характеристическая функция соответствует числу простых путей фиксированной длины, что позволило включать в рассмотрение циклы.
4. Был разработан метод оценки центральности вершин графа с взвешенными ребрами, основанный на значениях абсолютных потенциалов узлов электрической цепи, вычисленных на основе правил Кирхгофа с помощью матрицы Лапласа. После вычисления абсолютных потенциалов предложена двухэтапная процедура ранжирования, использующая подход теории голосования. Найдены распределения рангов для ряда частных случаев (для клики, графа-звезды, двойной звезды и полного двудольного графа).

5. Был предложен метод нахождения значений центральности вершин графа с взвешенными вершинами и ребрами, основанный на значениях суммарной работы, необходимой для перемещения зарядов между узлами электрической цепи. Выбор различных характеристик в качестве весов вершин позволяет оценивать важность вершин с различных точек зрения. Для ряда частных случаев (для клики, графа-звезды и полного двудольного графа) найдены аналитические выражения для нахождения значений центральности.
6. В работе построена графовая модель транспортной системы г. Петрозаводск. В качестве вершин графа рассматриваются перекрестки автомобильных дорог. Выполнено распределение жителей города и организаций, зарегистрированных на территории Петрозаводского городского округа, по вершинам графа.
7. Предложенные методы ранжирования вершин графа были применены к графу транспортной сети Петрозаводска, графу районов г.Петрозаводск, графам взаимодействий особей муравьиной колонии, графу метрополитена Санкт-Петербурга, а также к социальному графу саги Звездные Войны.

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Мазалову В. В. за поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство.

Список литературы

1. *Губанов Д.А.* Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства [Текст] / Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. ; под ред. чл.-корр. РАН Новикова Д.А. — М. : Издательство физико-математической литературы, 2010. — 228 с.
2. *Moreno, J. L.* Sociometry, experimental method and the science of society: An approach to a new political orientation [Текст] / J. L. Moreno. — Beacon, N.Y. : Beacon House, 1951.
3. *Градосельская Г.В.* Сетевые измерения в социологии [Текст] : Учебное пособие / Градосельская Г.В. ; под ред. Г.С. Батыгин. — М. : Издательский дом "Новый учебник", 2004. — 248 с.
4. *Торопов Б. А.* Модели террористических сетей и теоретико-игровой подход к оценке центральности их участников [Текст] / Торопов Б. А., Тагиров З. И. // Вопросы безопасности. — 2016. — Т. 6, № 6. — С. 77–89. — URL: <https://doi.org/10.7256/2409-7543.2016.6.21436>.
5. A systematic survey of centrality measures for protein-protein interaction networks [Текст] / M. Ashtiani [et al.] // BMC Systems Biology. — 2018. — No. 1. — URL: <https://doi.org/10.1186/s12918-018-0598-2>.
6. Анализ взаимодействия генов нейронального апоптоза и генов большого депрессивного расстройства в его ассоциативной генной сети [Текст] / Янкина М. А. [и др.] // Дневник науки. — 2017. — № 9. — С. 1–14.
7. Анализ взаимодействия генов нейронального апоптоза в ассоциативной генной сети болезни Паркинсона [Текст] / Янкина М. А. [и др.] // Вавиловский журнал генетики и селекции. — 2018. — 22(1). — С. 153–160.
8. *Pechenkin, V.* Applied Aspects of Ranking Algorithms for Oriented Weighted Graphs (on The Example of Social Network Graphs) [Текст] / V. Pechenkin,

- M. Korolev, L. Dimitrov // SPIIRAS Proceedings. — 2018. — Дек. — Т. 6, № 61. — С. 94—118. — URL: <https://doi.org/10.15622/sp.61.4>.
9. *Korzun, D.* Structured Peer-to-Peer Systems [Текст] / D. Korzun, A. Gurtov. — Springer New York, 2013. — URL: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5483-0>.
 10. Peer-to-Peer Systems and Applications [Текст] / ed. by R. Steinmetz, K. Wehrle. — Springer Berlin Heidelberg, 2005. — URL: <https://doi.org/10.1007/11530657>.
 11. Energy-aware load monitoring for improving battery life of mobile peer-to-peer nodes [Текст] / E. Harjula [et al.] // Sustainable Computing: Informatics and Systems. — 2016. — Dec. — Vol. 12. — P. 43—54. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.suscom.2016.09.002>.
 12. *Gurtov, A.* Cyclic ranking in single-resource peer-to-peer exchange [Текст] / A. Gurtov, J. Koskela, D. Korzun // Peer-to-Peer Networking and Applications. — 2017. — July. — Vol. 11, no. 3. — P. 632—643. — URL: <https://doi.org/10.1007/s12083-017-0578-0>.
 13. *Brass, D.* Centrality and power in organizations. [Текст] / D. Brass, M. Burkhardt // Networks and organizations. — Boston, 1992. — Vol. 46, no. 1. — P. 191—215.
 14. *Bavelas, A.* Communication Patterns in Task-Oriented Groups [Текст] / A. Bavelas // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1950. — Ноябрь. — Т. 22, № 6. — С. 725—730. — URL: <https://doi.org/10.1121/1.1906679>.
 15. *Leavitt, H. J.* Some effects of certain communication patterns on group performance. [Текст] / H. J. Leavitt // The Journal of Abnormal and Social Psychology. — 1951. — ЯНВ. — Т. 46, № 1. — С. 38—50. — URL: <https://doi.org/10.1037/h0057189>.

16. *Mizruchi, M. S.* Centrality and power revisited: actor success in group decision making [Текст] / M. S. Mizruchi, B. B. Potts // Social Networks. — 1998. — Октябрь. — Т. 20, № 4. — С. 353—387. — URL: [https://doi.org/10.1016/s0378-8733\(98\)00009-4](https://doi.org/10.1016/s0378-8733(98)00009-4).
17. *Freeman, L. C.* A Set of Measures of Centrality Based on Betweenness [Текст] / L. C. Freeman // Sociometry. — 1977. — Vol. 40, no. 1. — P. 35—41. — URL: <https://doi.org/10.2307/3033543>.
18. *Newman, M. J.* A measure of betweenness centrality based on random walks [Текст] / M. J. Newman // Social Networks. — 2005. — Vol. 27, no. 1. — P. 39—54. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.socnet.2004.11.009>.
19. The PageRank Citation Ranking : Bringing Order to the Web [Текст] / L. Page [et al.] // Proceedings of the 7th International World Wide Web Conference. — Brisbane, Australia, 1998. — P. 161—172.
20. Alpha Current Flow Betweenness Centrality [Текст] / Avrachenkov K.E. [et al.] // Algorithms and Models for the Web Graph. WAW 2013. Lecture Notes in Computer Science. — 2013. — No. 8305. — P. 106—117. — URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-03536-9_9.
21. *Avrachenkov K.E.* Beta Current Flow Centrality for Weighted Networks [Текст] / Avrachenkov K.E., Mazalov V.V., Tsynguev B.T. // Computational Social Networks. CSoNet 2015. Lecture Notes in Computer Science. — 2015. — No. 9197. — P. 216—227. — URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-21786-4_19.
22. *Brandes, U.* Centrality Measures Based on Current Flow [Текст] / U. Brandes, D. Fleischer // STACS 2005. Lecture Notes in Computer Science. — 2005. — Vol. 3404. — P. 533—544. — URL: https://doi.org/10.1007/978-3-540-31856-9_44.

23. Centrality and power in social networks: a game theoretic approach [Текст] / D. Gómez [et al.] // Mathematical Social Sciences. — 2003. — Vol. 46, no. 1. — P. 27—54. — URL: [https://doi.org/10.1016/s0165-4896\(03\)00028-3](https://doi.org/10.1016/s0165-4896(03)00028-3).
24. *Mazalov, V. V.* Networking games: network forming games and games on networks [Текст] / V. V. Mazalov, J. V. Chirkova. — Academic Press, 2019.
25. Efficient Computation of the Shapley Value for Game-Theoretic Network Centrality [Текст] / T. P. Michalak [et al.] // Journal of Artificial Intelligence Research. — 2013. — Vol. 46, no. 1. — P. 607—650. — URL: <https://arxiv.org/abs/1402.0567>.
26. *Li, J.* Importance of Agents in Networks: Clique Based Game-Theoretic Approach [Текст] / J. Li, A. Tur, M. Zavrajnov // Contributions to Game Theory and Management. — 2022. — T. 15. — C. 189—199. — URL: <https://doi.org/10.21638/11701/spbu31.2022.14>.
27. *Mazalov, V. V.* Generating functions and the Myerson vector in communication networks [Текст] / V. V. Mazalov, L. I. Trukhina // Discrete Mathematics and Applications. — 2014. — Vol. 24, no. 5. — P. 295—303. — URL: <https://doi.org/10.1515/dma-2014-0026>.
28. *Suna, P.* Two-stage network games modeling the Belt and Road Initiative [Текст] / P. Suna, E. M. Parilina, H. Gaob // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. — 2022. — Vol. 18, no. 1. — P. 87—98. — URL: <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.107>.
29. *Tur, A.* Communication Restriction-Based Characteristic Function in Differential Games on Networks [Текст] / A. Tur, L. Petrosyan // Mathematical Optimization Theory and Operations Research. — Springer Nature Switzerland, 2023. — C. 314—324. — URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-35305-5_22.

30. Network partitioning algorithms as cooperative games [Текст] / Avrachenkov K.E. [et al.] // Computational Social Networks. — 2018. — Vol. 5, no. 1. — P. 1—28. — URL: <https://doi.org/10.1186/s40649-018-0059-5>.
31. *Parilina, E.* Stable cooperation in graph-restricted games [Текст] / E. Parilina, A. Sedakov // Contributions to Game Theory and Management. — 2014. — Т. 7. — С. 271—281. — URL: <http://mi.mathnet.ru/cgtm238>.
32. *Parilina, E.* Stable Bank Cooperation for Cost Reduction Problem [Текст] / E. Parilina, A. Sedakov // Czech Economic Review. — 2014. — Т. 8, № 1. — С. 7—25. — URL: https://ideas.repec.org/a/fau/aucoz/au2014_007.html.
33. *Parilina, E.* Stable Cooperation in a Game with a Major Player [Текст] / E. Parilina, A. Sedakov // International Game Theory Review. — 2016. — ИЮНЬ. — Т. 18, № 02. — С. 1640005. — URL: <https://doi.org/10.1142/s0219198916400053>.
34. *Myerson, R. B.* Graphs and Cooperation in Games [Текст] / R. B. Myerson // Mathematics of Operations Research. — 1977. — Vol. 2, no. 3. — P. 225—229. — URL: <https://doi.org/10.1287/moor.2.3.225>.
35. *Shapley, L. S.* 17. A Value for n-Person Games [Текст] / L. S. Shapley // Contributions to the Theory of Games (AM-28), Volume II. — Princeton University Press, 12.1953. — С. 307—318. — URL: <https://doi.org/10.1515/9781400881970-018>.
36. *Aumann, R. J.* Endogenous formation of links between players and of coalitions: An application of the Shapley value [Текст] / R. J. Aumann, R. B. Myerson // The Shapley Value: Essays in Honor of Lloyd S. Shapley. — 1988. — No. 12. — P. 175—192. — URL: <https://doi.org/10.1017/cbo9780511528446.013>.

37. *Talman, D.* Average tree solution and subcore for acyclic graph games [Текст] / D. Talman, Y. Yamamoto // Journal of the Operations Research Society of Japan. — 2008. — Т. 51, № 3. — С. 203—212. — URL: <https://doi.org/10.15807/jorsj.51.203>.
38. *Borm, P.* On the Position Value for Communication Situations [Текст] / P. Borm, G. Owen, S. Tijs // SIAM Journal on Discrete Mathematics. — 1992. — Август. — Т. 5, № 3. — С. 305—320. — URL: <https://doi.org/10.1137/0405023>.
39. *Borm, P.* Cooperation and Communication Restrictions: A Survey [Текст] / P. Borm, A. van den Nouweland, S. Tijs // Theory and Decision Library. — Springer Netherlands, 1994. — С. 195—227. — URL: https://doi.org/10.1007/978-94-011-1370-0_9.
40. *Slikker, M.* Link monotonic allocation schemes [Текст] / M. Slikker // International Game Theory Review. — 2005. — Декабрь. — Т. 07, № 04. — С. 473—489. — URL: <https://doi.org/10.1142/s021919890500065x>.
41. Directed networks, allocation properties and hierarchy formation [Текст] / M. Slikker [и др.] // Mathematical Social Sciences. — 2005. — Январь. — Т. 49, № 1. — С. 55—80. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.mathsocsci.2004.04.005>.
42. *Calvo, E.* Values of games with probabilistic graphs [Текст] / E. Calvo, J. Lasaga, A. van den Nouweland // Mathematical Social Sciences. — 1999. — Январь. — Т. 37, № 1. — С. 79—95. — URL: [https://doi.org/10.1016/s0165-4896\(98\)00013-4](https://doi.org/10.1016/s0165-4896(98)00013-4).
43. *Jackson, M. O.* Allocation rules for network games [Текст] / M. O. Jackson // Games and Economic Behavior. — 2005. — Апрель. — Т. 51, № 1. — С. 128—154. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.geb.2004.04.009>.
44. *Boldi, P.* Axioms for Centrality [Текст] / P. Boldi, S. Vigna. — 2013. — URL: <https://arxiv.org/abs/1308.2140>.

45. *Jackson M.O.* Social and economic networks [Текст] / Jackson M.O. — Princeton University Press, 2010. — 520 p.
46. *Shaw, M. E.* Communication Networks [Текст] / M. E. Shaw // Advances in Experimental Social Psychology. — Elsevier, 1964. — С. 111—147. — URL: [https://doi.org/10.1016/s0065-2601\(08\)60050-7](https://doi.org/10.1016/s0065-2601(08)60050-7).
47. *Nieminen, U.* On the centrality in a directed graph [Текст] / U. Nieminen // Social Science Research. — 1973. — Дек. — Т. 2, № 4. — С. 371—378. — URL: [https://doi.org/10.1016/0049-089x\(73\)90010-0](https://doi.org/10.1016/0049-089x(73)90010-0).
48. *Bavelas, A.* A Mathematical Model for Group Structures [Текст] / A. Bavelas // Human Organization. — 1948. — Т. 7. — С. 16—30. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:143816855>.
49. *Freeman, L. C.* A Set of Measures of Centrality Based on Betweenness [Текст] / L. C. Freeman // Sociometry. — 1977. — Март. — Т. 40, № 1. — С. 35—41. — URL: <https://doi.org/10.2307/3033543>.
50. *Beauchamp, M. A.* An improved index of centrality [Текст] / M. A. Beauchamp // Behavioral Science. — 1965. — Т. 10, № 2. — С. 161—163. — URL: <https://doi.org/10.1002/bs.3830100205>.
51. *Sabidussi, G.* The centrality index of a graph [Текст] / G. Sabidussi // Psychometrika. — 1966. — Дек. — Т. 31, № 4. — С. 581—603. — URL: <https://doi.org/10.1007/bf02289527>.
52. *Rochat, Y.* Closeness Centrality Extended to Unconnected Graphs: the Harmonic Centrality Index [Текст] / Y. Rochat //. — 2009. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:10755931>.
53. *Bianchini, M.* Inside PageRank [Текст] / M. Bianchini, M. Gori, F. Scarselli // ACM Transactions on Internet Technology. — 2005. — Февр. — Т. 5, № 1. — С. 92—128. — URL: <https://doi.org/10.1145/1052934.1052938>.

54. *Mazalov, V. V.* A modified Myerson value for determining the centrality of graph vertices [Текст] / V. V. Mazalov, V. A. Khitraya // Automation and Remote Control. — 2021. — Vol. 82, no. 1. — P. 145—159. — URL: <https://doi.org/10.1134/s0005117921010100>.
55. *Мазалов В.В.* Математическая теория игр и приложения [Текст] : учебное пособие для вузов / Мазалов В.В. — 5-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 500 с.
56. *Щербакова Н.Г.* Аксиоматика центральности в комплексных сетях [Текст] / Щербакова Н.Г. // Проблемы информатики. — 2013. — Т. 3, № 28. — С. 3—14.
57. *Wolfram MathWorld.* Euler-Mascheroni Constant [Текст] / Wolfram MathWorld. — 2023. — URL: <https://mathworld.wolfram.com/Euler-MascheroniConstant.html> (дата обр. 15.08.2023).
58. *Мазалов, В. В.* Ранжирование вершин графа с использованием абсолютных потенциалов узлов электрической цепи [Текст] / В. В. Мазалов, В. А. Хитрая // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2023. — Т. 19, № 2. — С. 233—251. — URL: <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.209>.
59. *Алескерев Ф. Т.* Бинарные отношения, графы и коллективные решения. Примеры и задачи: учеб. пособие для вузов [Текст] / Алескерев Ф. Т., Хабина Е. Л., Шварц Д. А. — М. : Юрайт, 2023. — 458 с.
60. *Хитрая, В. А.* Теоретико-игровая центральность вершин ориентированного графа [Текст] / В. А. Хитрая, В. В. Мазалов // Математическая теория игр и ее приложения. — 2023. — Т. 15, № 3. — С. 64—87.
61. *Мазалов, В. В.* Методы теории кооперативных игр в задаче ранжирования текстов [Текст] / В. В. Мазалов, В. А. Хитрая, А. В. Хитрый // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2022. — Т. 18, № 1. — С. 63—78. — URL: <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.105>.

62. *Kondratev, A. Y.* A Ranking Procedure with the Shapley Value [Текст] / A. Y. Kondratev, V. V. Mazalov // Intelligent Information and Database Systems. ACIIDS 2017. Lecture Notes in Computer Science. — 2017. — Vol. 10192. — P. 691—700. — URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-54430-4_66.
63. *Хитрая, В. А.* Ранжирование вершин графа как кооперативная игра на электрической цепи [Текст] / В. А. Хитрая // Процессы управления и устойчивость. — 2023. — Т. 10. — С. 482—489.
64. *Sheffi, Y.* Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis With Mathematical Programming Methods [Текст] / Y. Sheffi. — Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall, 1985. — 399 p.
65. *Nagurney, A.* Variational Inequality Theory [Текст] / A. Nagurney // Network Economics. Advances in Computational Economics. — Boston, MA : Springer US, 1999. — P. 3—48. — URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3005-0_1.
66. *Kerner, B. S.* Introduction to Modern Traffic Flow Theory and Control [Текст] : The Long Road to Three-Phase Traffic Theory / B. S. Kerner. — Springer Berlin, Heidelberg, 2009. — URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-02605-8>.
67. Введение в математическое моделирование транспортных потоков [Текст] / Гасников А. В. [и др.]. — М. : МЦНМО, 2013. — 196 с.
68. *Nesterov, Y.* Stationary Dynamic Solutions in Congested Transportation Networks: Summary and Perspectives [Текст] / Y. Nesterov, A. de Palma // Networks and Spatial Economics. — 2003. — Vol. 3, no. 3. — P. 371—395. — URL: <https://doi.org/10.1023/a:1025350419398>.
69. *Нурминский Е. А.* Прогнозное моделирование автомобильного трафика Владивостока [Текст] / Нурминский Е. А., Шамрай Н. Б. // Труды МФТИ. — 2010. — Т. 2, 4(8). — С. 119—129.

70. *Wardrop, J. G.* Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research [Текст] / J. G. Wardrop, J. I. Whitehead // Proceedings of the Institution of Civil Engineers. — 1952. — Т. 1, № 5. — С. 767—768. — URL: <https://doi.org/10.1680/ipeds.1952.11362>.
71. Riding to Wall Street: determinants of commute time using Citi Bike [Текст] / W. Ford [et al.] // International Journal of Logistics Research and Applications. — 2019. — Vol. 22, no. 5. — P. 473—490. — URL: <https://doi.org/10.1080/13675567.2019.1584164>.
72. *Shvetsov, V. I.* Mathematical Modeling of Traffic Flows [Текст] / V. I. Shvetsov // Automation and Remote Control. — 2003. — Vol. 64, no. 11. — P. 1651—1689. — URL: <https://doi.org/10.1023/a:1027348026919>.
73. *Shvetsov, V. I.* Algorithms for distributing traffic flows [Текст] / V. I. Shvetsov // Automation and Remote Control. — 2009. — Т. 70, № 10. — С. 1728—1736. — URL: <https://doi.org/10.1134/s0005117909100105>.
74. *OpenStreetMap contributors.* Planet dump retrieved from <https://planet.osm.org> [Текст] / OpenStreetMap contributors. — 2023. — URL: <https://www.openstreetmap.org> (дата обр. 15.09.2023).
75. *Хитрая, В. А.* Веб-сервис для визуализации дорожной сети города Петрозаводск [Текст] / В. А. Хитрая, А. В. Хитрый // Труды Карельского научного центра РАН. — 2023. — Т. 4. — С. 54—63. — URL: <https://doi.org/10.17076/mat1780>.
76. Modeling of the City's Transport Network Using Game-Theoretic Methods on the Example of Petrozavodsk [Текст] / N. A. Ermolin [et al.] // Contributions to Game Theory and Management. — 2022. — Vol. 15. — P. 18—31. — URL: <https://doi.org/10.21638/11701/spbu31.2022.02>.
77. Social network plasticity decreases disease transmission in a eusocial insect [Текст] / N. Stroeymeyt [et al.] // Science. — 2018. — Vol. 362, no. 6417. — P. 941—945. — URL: <https://doi.org/10.1126/science.aat4793>.

78. *Gabasova, E.* Star Wars social network [Текст] / E. Gabasova. — 2016. — URL: <https://zenodo.org/record/1411479>.

Список рисунков

1.1	Граф G_1	19
1.2	Фрагмент графа сети Math-Net	22
1.3	Граф $S_{k,p}$	24
1.4	Граф $D_{k,p}$	25
1.5	Граф G_2	29
1.6	Граф $G_2 - 14$	31
1.7	Графики функций, определяющих дележ	32
1.8	Граф G_3	36
1.9	Граф G_4 из 8 вершин	38
1.10	Дерево путей, начинающихся в вершине 1	39
1.11	Граф G_5 из 4 вершин	40
1.12	Граф-звезда S	44
1.13	Цепь P	46
2.1	Граф G'	48
2.2	Граф с вершинами 1 – 6; 100, 300, 500 — веса ребер	50
2.3	Граф-звезда S_1	53
2.4	Граф-звезда S_m	55
2.5	Двойная звезда $S_{p,q}$	58
2.6	Полный двудольный граф $B_{2,n-2}$	60
2.7	Полный двудольный граф $B_{3,n-3}$	62
2.8	Полный двудольный граф $B_{m,n-m}$	64
2.9	Взвешенный граф-звезда S_p	67
3.1	Петрозаводский городской округ	73
3.2	Транспортный граф Петрозаводска	74
3.3	Тепловая карта распределения жителей	76
3.4	Распределение организаций по вершинам графа	78
3.5	Транспортный граф районов города (см. табл. 12)	80

3.6	Сравнение значений, полученных с помощью правила Кирхгофа (KR) и по методу PageRank(PR)	82
3.7	Кривые рангов в зависимости от выбора δ	84
3.8	Сравнение результатов ранжирования вершин	85
3.9	Тепловая карта значений n_3 вершин графа транспортной сети г. Петрозаводск	86
3.10	Тепловая карта значений интегральной центральности вершин графа транспортной сети г. Петрозаводск	87
3.11	Центральность вершин по Майерсону при $k = 10$	88
3.12	Тепловая карта рангов вершин транспортного графа, основанных на значениях абсолютных потенциалов (взвешенные ребра)	89
3.13	Тепловая карта рангов вершин невзвешенного транспортного графа, метод PageRank	90
3.14	Тепловая карта рангов вершин взвешенного транспортного графа, метод PageRank	91
3.15	Тепловая карта рангов вершин графа (взвешенные вершины и ребра), основанных на значениях суммарной работы по переносу зарядов	92
3.16	Тепловая карта рангов вершин графа, где вес ребер равен транспортному потоку (интегральная центральность)	93
3.17	Тепловая карта рангов вершин графа, где вес ребер равен транспортному потоку (абсолютные потенциалы)	94
3.18	Тепловая карта рангов вершин графа, где вес ребер равен транспортному потоку (работа по переносу зарядов)	95
3.19	Граф взаимодействий муравьиной колонии до заражения	96
3.20	Тепловая карта рангов вершин графа до заражения. Модифицированное значение Майерсона	97
3.21	Тепловая карта рангов вершин графа до заражения. Абсолютные потенциалы	98
3.22	Граф взаимодействий муравьиной колонии после заражения	98

3.23	Тепловая карта после заражения. Модифицированное значение Майерсона	99
3.24	Тепловая карта после заражения. Абсолютные потенциалы	99
3.25	Схема Санкт-Петербургского метрополитена	100
3.26	Граф Санкт-Петербургского метрополитена	101
3.27	Тепловая карта рангов вершин графа Санкт-Петербургского метрополитена с учетом весов ребер	102
3.28	Тепловая карта рангов вершин графа Санкт-Петербургского метрополитена с учетом весов вершин ребер	103
3.29	Граф социальной сети Star Wars	104
3.30	Графы социальных сетей эпизодов саги.	109

Список таблиц

1	Турнирная таблица вершин графа G_2	33
2	Оценка степенной центральности вершин графа G_2	33
3	Турнирная таблица	51
4	Турнирная таблица для графа S_1	54
5	Турнирная таблица для графа $S_m, m \in (0,1)$	56
6	Турнирная таблица для графа $S_m, m > 1$	57
7	Турнирная таблица для графа $S_{p,q}$	59
8	Турнирная таблица для графа $B_{2,n-2}$	61
9	Турнирная таблица для графа $B_{3,n-3}$	63
10	Турнирная таблица для графа $B_{m,n-m}$	65
11	Турнирная таблица вершин графа S_p	68
12	Районы города Петрозаводск	79
13	Ранжирование вершин графа районов	81
14	Численность жителей в районах города	83
15	Ранги вершин, подвергающихся заражению	94
16	Ранги вершин, подвергшихся заражению	96
17	Значения центральности некоторых вершин, модифицированное значение Майерсона	102
18	Ранги персонажей саги Star Wars	105
19	Ранги персонажей Эпизода I	105
20	Ранги персонажей Эпизода II	106
21	Ранги персонажей Эпизода III	106
22	Ранги персонажей Эпизода IV	107
23	Ранги персонажей Эпизода V	107
24	Ранги персонажей Эпизода VI	108

**Приложение А. Ежедневный пассажиропоток на станциях
Санкт-Петербургского метрополитена**

Станция	Пассажиропоток (чел./день)
Девяткино	71400
Гражданский проспект	45421
Академическая	42991
Политехническая	26456
Площадь Мужества	26736
Лесная	25774
Выборгская	30957
Площадь Ленина	65354
Чернышевская	45976
Площадь Восстания	91531
Владимирская	26879
Пушкинская	18527
Технологический институт-1	17188
Балтийская	38076
Нарвская	40650
Кировский завод	29174
Автово	40703
Ленинский проспект	56625
Проспект Ветеранов	82598
Парнас	29648
Проспект Просвещения	60942
Озерки	38083
Удельная	26386
Пионерская	61119
Чёрная речка	39185

Станция	Пассажиропоток (чел/день)
Петроградская	57749
Горьковская	38473
Невский проспект	58222
Сенная площадь	40241
Технологический институт-2	30187
Фрунзенская	16484
Московские ворота	22981
Электросила	24378
Парк Победы	31589
Московская	76041
Звёздная	31866
Купчино	73487
Беговая	29387
Зенит	10056
Приморская	44434
Василеостровская	52817
Гостиный двор	35434
Маяковская	25889
Площадь Александра Невского-1	23577
Елизаровская	22595
Ломоносовская	30471
Пролетарская	17646
Обухово	9064
Рыбацкое	27158
Спасская	22603
Достоевская	17178
Лиговский проспект	18143
Площадь Александра Невского-2	11213
Новочеркасская	29485

Станция	Пассажиропоток (чел./день)
Ладожская	79378
Проспект Большевиков	48245
Улица Дыбенко	52545
Комендантский проспект	47872
Старая Деревня	38496
Крестовский остров	18534
Чкаловская	25204
Спортивная	30374
Адмиралтейская	33079
Садовая	17068
Звенигородская	15852
Обводный канал	17707
Волковская	5722
Бухарестская	11064
Международная	32718
Проспект Славы	26409
Дунайская	21420
Шушары	8039