

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Казаринов Никита Андреевич

**ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ ДИСКРЕТНОСТЬ И ЭФФЕКТЫ  
ДИНАМИЧЕСКОГО РАЗРУШЕНИЯ**

Научная специальность – 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание учёной степени ДОКТОРА физико-математических  
наук

Научный консультант:

член-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор

Петров Юрий Викторович

Санкт-Петербург 2024

# Оглавление

<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	<b>3</b>
АКТУАЛЬНОСТЬ И РАЗРАБОТАННОСТЬ ТЕМЫ ДИССЕРТАЦИИ	3
ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ	27
НАУЧНАЯ НОВИЗНА ИССЛЕДОВАНИЯ	28
МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ	31
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЗНАЧИМОСТЬ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ	32
АПРОБАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ	35
ЛИЧНЫЙ ВКЛАД АВТОРА	39
БЛАГОДАРНОСТИ	39
ПОДДЕРЖКА	40
СТРУКТУРА И ОБЪЕМ ДИССЕРТАЦИИ	40
ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ	40
ПОЛОЖЕНИЯ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ	41
<b>ГЛАВА 1. АНАЛОГИЯ МЕЖДУ ПРОЦЕССАМИ ДИНАМИЧЕСКОГО РАЗРУШЕНИЯ И РАЗРУШЕНИЕМ В СИСТЕМЕ «МАССА НА ПРУЖИНЕ»</b>	<b>44</b>
1.1. РАЗРУШЕНИЕ В СИСТЕМЕ «МАССА НА ПРУЖИНЕ» ПРИ НАГРУЖЕНИИ КОРОТКИМИ ИМПУЛЬСАМИ	45
1.2. КРИТЕРИЙ РАЗРУШЕНИЯ НА ОСНОВЕ КОНЦЕПЦИИ ИНКУБАЦИОННОГО ВРЕМЕНИ	49
1.3 АНАЛИЗ СТАРТА ТРЕЩИНЫ И АНАЛОГИЯ С ОСЦИЛЛЯТОРОМ	51
1.4 ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ 1	64
<b>ГЛАВА 2. РАЗРУШЕНИЕ В СИСТЕМЕ «МАССА НА ПРУЖИНЕ». ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ДЛЯ ПРЯМОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ДИНАМИЧЕСКОГО РАЗРУШЕНИЯ</b>	<b>67</b>
2.1 РАЗРУШЕНИЕ В СИСТЕМЕ «МАССА НА ПРУЖИНЕ»	67
2.2 ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО СТАРТУ ТРЕЩИН	72
2.3 ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ОТКОЛУ В СТЕРЖНЯХ	90
2.4 АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ	95
2.5 ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ 2	99
<b>ГЛАВА 3. ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИЧЕСКОГО РАЗРУШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР</b>	<b>102</b>
3.1 Постановка задачи для одиночного осциллятора	102
3.2 СИСТЕМА ИЗ ДВУХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ	103
3.4. ЦЕПОЧКА ИЗ ПРОИЗВОЛЬНОГО КОНЕЧНОГО КОЛИЧЕСТВА ОСЦИЛЛЯТОРОВ	107
3.5 АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЦЕПОЧКИ И ЗАДАЧА О ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ. ЯВЛЕНИЕ ГИББСА	118
3.7 ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ ПРИ РАЗГРУЗКЕ	121
3.8 ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ 3	124
<b>ГЛАВА 4. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ ДИСКРЕТНОСТЬ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИН</b>	<b>125</b>
4.1 КРИТЕРИЙ ИНКУБАЦИОННОГО ВРЕМЕНИ ДЛЯ ЗАДАЧ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТРЕЩИН	126
4.2 ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ПОДХОДА НА ОСНОВЕ ИНКУБАЦИОННОГО ВРЕМЕНИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО РОСТА ТРЕЩИН	128
4.3 НЕСТАБИЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ КИН ДЛЯ ДВИЖУЩИХСЯ ТРЕЩИН	137
4.4 ОСЦИЛЛЯЦИИ СКОРОСТИ ТРЕЩИНЫ	141
4.5 РАСПРОСТРАНЕНИЕ МНОЖЕСТВЕННЫХ ТРЕЩИН В ПРОИЗВОЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИИ. ДИНАМИЧЕСКАЯ ФРАГМЕНТАЦИЯ	146
4.6 ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ 4	155
<b>ГЛАВА 5. СТРУКТУРНО-ВРЕМЕННОЙ ПОДХОД В ЗАДАЧАХ О ПРОБИВАНИИ ПРЕГРАД</b>	<b>157</b>
5.1 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТРУКТУРНО-ВРЕМЕННОГО ПОДХОДА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАЗРУШЕНИЯ ПРИ ПРОБИВАНИИ ПРЕГРАД	158
5.2 ПРИМЕНЕНИЕ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ ПРЕДСКАЗАНИЯ ПРОЧНОСТИ ПЕРФОРИРОВАННЫХ ПРЕГРАД	169
5.3 ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ 5	190
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b>	<b>192</b>
<b>ЛИТЕРАТУРА</b>	<b>197</b>

## **Введение**

### **Актуальность и разработанность темы диссертации**

Аналогия между моделями разрушения сплошных сред и разрушением дискретных систем имеет фундаментальное значение, поскольку позволяет понять поведение материалов и структур как в макроскопических, так и в микроскопических масштабах. Обнаружение таких аналогий важно по целому ряду причин. Проводя параллели между непрерывными средами (например, твердыми телами) и дискретными системами (например, осцилляторами, сетями частиц или атомов), ученые и инженеры могут выработать единое понимание основополагающих принципов, определяющих прочность и трещиностойкость материалов. Эта единая основа позволяет применять концепции и методологии на различных масштабах и в различных системах.

История выявления закономерностей критических процессов показывает, что концепции и принципы, полученные в одной области, часто могут быть перенесены в другую. Например, знания, полученные при изучении механики разрушения дискретных систем, таких как сети взаимосвязанных частиц, могут быть применены для понимания поведения непрерывных материалов, таких как металлы или керамика. Такая возможность переноса позволяет исследователям использовать знания и методы, разработанные в одной области, для достижения прогресса в другой.

Также, рассматривая поведение материалов и конструкций через призму как непрерывных, так и дискретных моделей, исследователи могут выявить новые закономерности и явления, которые могут быть неочевидны при рассмотрении только одной точки зрения. Такой целостный подход способствует открытию новых механизмов и взаимосвязей, определяющих прочность и

трещиностойкость, что ведет к прогрессу в проектировании материалов и инженерных прогнозах несущей способности конструкций.

Аналогии между непрерывными и дискретными системами играют особенно важную роль в вычислительном моделировании и численных экспериментах. Методы, разработанные для моделирования дискретных систем, такие как молекулярная динамика или методы дискретных элементов, могут быть на основе выявленных аналогий адаптированы и применены для моделирования поведения непрерывных материалов в различных масштабах длины и времени. Это позволяет исследователям прогнозировать и понимать реакцию материалов и конструкций при различных условиях нагружения и в различных средах.

Таким образом, по сути, фундаментальный характер аналогий между моделями непрерывных сред и дискретных систем заключается в их способности обеспечить единую основу для понимания, передачи концепций, открытия новых закономерностей и облегчения компьютерного моделирования, которые необходимы для развития наших знаний о поведении материалов, улучшения их проектирования, а также управления эксплуатацией инженерных систем.

Когда обсуждаются задачи квазистатического разрушения, прочность материала с дефектами типа трещин часто ассоциируется со значением коэффициента интенсивности напряжений (КИН)  $K_I$  (в работе рассматривался режим нагружения трещины по первой моде), измеренного в момент разрушения: согласно хорошо известному критерию разрушения Ирвина, трещина инициируется, если  $K_I$  достигает некоторого критического значения  $K_{Ic}$ , которое трактуется как свойство материала. Этот критерий разрушения хорошо работает для задач с квазистатическими нагрузками, однако при увеличении скоростей нагружения критическое значение КИН также увеличивается, что требует введения нового критического значения КИН для каждой скорости нагружения [1]. Однако даже эта модификация критерия

Ирвина не может быть использована для исследования случаев разрушения материала, когда локальное поле напряжений в точке разрыва уже превысило свои максимальные значения и достигло стадии заметного уменьшения [2-4]. Этот фундаментальный эффект разрушения плохо изучен и не может быть объяснен в рамках классических подходов.

Для удобства вводится термин задержки разрушения: если при заданных граничных и начальных условиях разрушение вблизи вершины трещины происходит после прохождения пика локального растягивающего силового поля (это может быть выражено, например, в терминах текущего значения коэффициента интенсивности напряжений), то считается, что имеет место задержка разрушения. Время, прошедшее от пика локального растягивающего напряжения до момента макроскопического разрыва материала, будет характеризовать величину задержки разрушения. В первой главе диссертации показано, что это явление является фундаментальной особенностью процесса динамического разрушения, которая проявляется в пороговых ситуациях и связана с наличием инкубационных процессов, происходящих на микроскопическом уровне в течение определенного периода времени, предшествующего макроскопическому разрыву. В диссертационной работе это явление исследуется с использованием модели разрушения на основе концепции инкубационного времени. Стоит отметить, что авторы работы по иницированию трещин при помощи коротких импульсов [5] предложили подход, называемый «критерий минимального времени разрушения», который теоретически допускает явление задержки разрушения, но не обладает универсальностью, поскольку параметр минимального времени, а также значение интенсивности критического напряжения не могут рассматриваться как параметры материала.

Также в главе 1 была использована простая модель «масса на пружине», чтобы показать, что процесс динамического разрушения может проявлять инерционное поведение, когда рассматриваются высокоскоростные нагрузки

или нагружение короткими импульсами. Модель линейного осциллятора используется для исследования условий задержки разрушения для систем с инерцией и для того, чтобы показать, что динамическое зарождение трещины имеет особенности, сходные с разрушением линейного осциллятора. Показано, что образец с трещиной может вести себя как осциллятор при нагрузке короткими импульсами, и, таким образом, можно построить аналогию между трещиной и некоторым виртуальным осциллятором. Основанные на модели линейного осциллятора инерционные модели широко использовались для исследования и моделирования динамического разрушения (см., например, [6, 7, 8]). Более того, модели на основе линейного осциллятора могут дать некоторое представление об очень сложных особенностях динамического распространения трещины, таких как зависимость КИН от скорости трещины [9]. Более сложные дискретные модели активно используются для исследования динамического разрушения и динамического распространения трещин, например, цепочки и решетки из пружин [10,11].

Концепция и термин инерции трещины уже некоторое время используются в литературе, когда рассматриваются движущиеся трещины, однако термин инерции либо используется для классификации режима движения трещины [12], либо обсуждается формально из-за наличия ускорения трещины в уравнениях энергетического баланса [13]. Авторы упомянутых работ концентрируют свои усилия на эффекте колебаний скорости трещины и на проблеме ограничения скорости трещины, в то время как явление задержки разрушения остается за пределами внимания авторов. Здесь стоит упомянуть, что как вопрос ограничения скорости трещины, так и эффект колебаний скорости трещины могут быть изучены с использованием подхода на основе инкубационного времени [14,15].

В главе 1 была изучена простейшая короткоимпульсная нагрузка – прямоугольный импульс. Выбор такой простой нагрузки позволяет детально исследовать два фундаментальных сценария возникновения трещины. Первый –

это пороговый случай, когда к системе прикладываются минимальные нагрузки, необходимые для того, чтобы вызвать разрушение. Например, для фиксированной амплитуды импульса нагрузки определяется минимальная продолжительность нагрузки. Противоположным случаем является перегрузка системы, когда применяются чрезмерные нагрузки. Пороговые случаи, по видимому, выявляют фундаментальные эффекты разрушения, однако их трудно реализовать экспериментально. Напротив, случаи перегрузки менее сложны с точки зрения практической реализации.

Изучение динамического разрыва с помощью простых моделей разрыва, таких как пружинные осцилляторы, имеет решающее значение для инженерного понимания законов, управляющих разрушением твердых тел ударными волнами, по многим причинам. Во-первых, простые модели, такие как пружинные осцилляторы, наглядно демонстрируют фундаментальные принципы, лежащие в основе динамических разрывов. Упрощая сложные явления до более управляемых систем, инженеры на простом «осцилляторном» языке могут лучше понять физику и механику, лежащие в основе распространения ударных волн и разрушения материалов. Во-вторых, системы динамических осцилляторов могут дать представление о распространении волн через структурные среды. Понимание того, как волны ведут себя в упрощенной системе, помогает инженерам понять взаимодействие волн, отражение и рассеивание энергии, что необходимо для прогнозирования поведения ударных волн в реальных материалах. В-третьих, простые модели позволяют инженерам проводить анализ чувствительности параметров для оценки влияния различных факторов на поведение разрыва. Систематически изменяя параметры, соответствующие эффективным свойствам материала и начальные условия, инженеры могут определить ключевые факторы, влияющие на динамический разрыв, и разработать материалы и конструкции, способные противостоять или смягчить его последствия. В-четвертых, простые модели служат ценным инструментом для проверки более сложных численных симуляций и экспериментальных результатов. Так, например, инженеры могут использовать

упрощенные аналитические решения пружинных осцилляторов для проверки точности численных моделей и экспериментальных данных, обеспечивая соответствие прогнозов наблюдаемым явлениям. В-пятых, простые модели являются эффективным образовательным инструментом для обучения студентов и молодых инженеров базовым принципам динамического разрыва сплошных сред. Начав с базовых понятий и постепенно усложняя их, можно помочь на начальной стадии заложить прочную основу для понимания сложного процесса разрушения твердых тел при экстремальных воздействиях. В-шестых, информация, полученная в результате изучения простых моделей разрушения, может использоваться при проектировании и оптимизации материалов и конструкций для повышения их устойчивости к повреждениям, вызванным высокоскоростными ударными воздействиями. Инженеры могут использовать это понимание для разработки инновационных материалов, защитных барьеров и структурного усиления, которые смягчают последствия динамического разрушения в различных промышленных областях, таких как аэрокосмическая, горнодобывающая и гражданское строительство.

Таким образом, изучение динамического разрыва с помощью простых моделей, таких как пружинные осцилляторы, необходимо для получения полного инженерного понимания законов, управляющих разрушением твердых тел в экстремальных состояниях. Эти модели дают представление о распространении волн, чувствительности параметров, валидации более сложных численных моделей, машинном обучении и оптимизации конструкций, что в конечном итоге способствует разработке прочных материалов и конструкций, способных выдерживать экстремальные динамические нагрузки.

Динамическое разрушение сред и конструкций может быть результатом различных типов нагрузок, приложенных к материалу или конструкции включая и статические нагрузки [16,17]. Однако явное динамическое нагружение способно выявить специфические эффекты, связанные с прочностью материала.



Один из основных эффектов, свойственных динамическому разрушению материалов, связан с высокой скоростью нагружения, когда в материале создается быстро растущее поле напряжений, приводящее к разрушению. Когда темпы роста поля относительно невелики, материал проявляет свойства статической прочности, и теории статической прочности, например, критерий неустойчивости трещин Ирвина для образцов с трещинами [18] или критерий предельного напряжения для материалов без дефектов являются вполне применимыми. Однако при высоких скоростях деформирования материал проявляет повышенную прочность, и разрушение происходит при более высоких уровнях напряжений, что требует введения отдельных критических параметров для каждого значения скорости деформирования. Например, в случае образцов с трещинами предельное значение коэффициента интенсивности предельных напряжений  $K_{IC}$  заменяется его динамическим аналогом – динамической вязкостью разрушения  $K_{IC}^d$ , которая, как показано, может зависеть от скорости нагружения [1]. Таким образом, прочность материала должна быть исследована для диапазона значений скоростей деформирования или скоростей изменения полей напряжений, что позволит построить кривую динамической прочности, которая состоит из двух характерных частей (ветвей) – статической (или низкоскоростной) ветви и динамической ветви со значительно более высокими параметрами прочности [19,20]. Такого рода кривые принято интерпретировать как свойство материала, однако при применении надлежащих динамических моделей разрушения эта кривая в действительности является расчетной. Заметим, что описанное явление наблюдается и для пластичных материалов – значения предела текучести растут с увеличением скорости нагрузки/напряжения, что требует введения динамических параметров предела текучести [21,22].

Эффект задержки разрушения, проявляющийся при нагружении материалов и конструкций короткими импульсами, менее распространен в литературе. Когда к материалу прикладываются кратковременные динамические

нагрузки (короткие импульсные нагрузки), разрушение может произойти после того, как напряжения превысят свои максимальные значения, что означает задержку разрушения. Экспериментальное подтверждение этого эффекта можно найти как в экспериментах с образцами с трещинами (старт движения трещин при импульсном нагружении) [2,4], так и на образцах без начальных дефектов [3,23].

Теоретическое исследование и прогнозирование вышеупомянутых и других эффектов, связанных с динамическим разрушением (например, вопросы предельной скорости трещин и осцилляций скорости трещины, вопрос зависимости текущего коэффициента интенсивности напряжений от скорости трещины [16,24,25]), представляет серьезный вызов для теоретиков. Статические критерии разрушения естественным образом модифицируются для использования в случае динамического нагружения – критические статические значения заменяются их более высокими динамическими аналогами или даже сложными функционалами [26]. Эти модели обычно сложны для калибровки, поскольку требуют проведения множества довольно сложных экспериментов. Другой подход предполагает явное введение напряжений или скоростей деформации (например, их производных по времени первого порядка) в выражения для прочности материала. Наиболее ярким представителем этого семейства является модель Джонсона-Холмквиста 2 (JH2), которая широко используется на практике для моделирования разрушения при ударе [27].

Совершенно другой способ рассмотрения явлений динамического разрушения основан на интегральных критериях разрушения. Здесь можно упомянуть условия Никифоровского [28,29], а также критерии разрушения Тулера и Бутчера [30]. Критерий разрушения, основанный на концепции инкубационного времени (критерий инкубационного времени) [31] также имеет интегральную форму, интервал интегрирования напряжений по времени определяется характерным временем релаксации, называемым инкубационным временем, которое следует трактовать как параметр материала. Критерий

инкубационного времени в своей наиболее полной форме также содержит интегрирование напряжений по пространственной координате, которое подчеркивает нелокальность данного подхода.

Во второй главе исследуются динамические эффекты разрушения с использованием модели «масса на пружине», которая, безусловно, применялась для изучения разрушения и ранее (см., например, [32-34]). Для исследования динамического разрушения и распространения трещин активно используются и более сложные дискретные модели, например, цепочки осцилляторов и решетки для исследования динамического распространения трещин [10,35,36]. Здесь также следует упомянуть модели на основе концепции зоны сцепления, обогащенные инерцией [37] – подход, используемый во второй главе, отдаленно напоминает метод, примененный в [37]. Более того, в литературе недавно появились интересные комбинации хорошо разработанных численных подходов и идей, основанных на разрушении в системе «масса на пружине» (см., например, работу [38], посвященную модификациям численного подхода SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics). Модели, схожие с системой «масса на пружине», также применяются и в инженерных и даже биомедицинских задачах [39,40]. Стоит отметить применение пружин в аналитическом и очень ценном экспериментальном анализе того, как граничные условия влияют на устойчивость к растрескиванию в различных типах образцов [41]. Также во второй главе работы обсуждается разрушение линейного осциллятора в условиях нагружения короткими силовыми импульсами, а также линейно возрастающей силой. Эти задачи позволяют исследовать два эффекта динамического разрушения – задержка разрушения и рост прочности системы при высоких скоростях нагружения. Далее рассматриваемая модель «масса на пружине» калибруется для описания экспериментальных результатов по старту трещин и отколу. Также обсуждается сходство между разрушением в системе «масса на пружине» и результатами, получаемыми при использовании модели разрушения на основе концепции инкубационного времени. В отличие от первой главы диссертации во второй главе представлен более простой подход, согласно

которому в теле выделяется некоторый объем, служащий массой осциллятора, жесткость же определяется из соображений применимости модели осциллятора для случаев статического напряжения.

Изучение особенностей динамического разрушения периодических структур, таких как цепочки осцилляторов, подвергающихся быстрому динамическому воздействию, позволяет получить ценные сведения о поведении материалов и конструкций в условиях экстремальных нагрузок. Эти особенности дают принципиальную информацию о закономерностях динамического разрушения, важных для оценки несущей способности конструкций и систем, имеющих блоковую периодическую структуру. Такая простота способствует более глубокому пониманию физики, лежащей в основе динамического разрушения. Цепочки осцилляторов представляют собой упрощенную, но репрезентативную модель периодических структур. Анализ динамического разрушения таких структур позволяет исследователям получать аналитические или приближенные решения, которые отражают основные аспекты их поведения.

Кроме этого, цепочки осцилляторов позволяют изучать распространение и взаимодействие волн в периодических средах. По мере распространения волн через структуру взаимодействие между соседними осцилляторами влияет на общий отклик, включая возникновение и распространение трещин или разломов. Понимание этих взаимодействий проливает свет на то, как передается и рассеивается энергия при динамическом разрушении.

Наблюдения и анализ динамических разрушений в цепочках осцилляторов могут привести к открытию законов масштабирования и универсального поведения. Эти законы масштабирования описывают, как свойства разрушения зависят от размера системы, скорости нагружения или других соответствующих параметров. Такая универсальность позволяет исследователям обобщать выводы, сделанные на основе простых моделей, на более сложные системы и применять их в различных масштабах длины и времени.

Цепочки осцилляторов могут служить испытательным стендом для проверки теоретических моделей и вычислительных методов, используемых для моделирования динамического разрушения периодических структур. Сравнение аналитических предсказаний с численным моделированием или экспериментальными данными помогает проверить точность и надежность теоретических подходов, что позволяет применять их для решения реальных задач.

Изучение периодических осциллирующих систем важно для проектирования устойчивых материалов и конструкций. Результаты изучения динамического разрушения в периодических структурах могут быть использованы при проектировании устойчивых материалов и конструкций. Понимая, как периодичность структуры влияет на характер разрушения, инженеры могут адаптировать архитектуру материалов для повышения устойчивости к динамическим нагрузкам, улучшения поглощения энергии и смягчения катастрофического разрушения.

По сути, изучение особенностей динамического разрушения с помощью ниже рассмотренных моделей цепочек осцилляторов и специальных периодических модельных конструктивных элементов предлагает ценную основу для понимания фундаментальных принципов, управляющих разрушением периодических структур. Используя простоту, аналитическую легкость и четкие закономерности, предоставляемые этими моделями, можно углубить понимание динамических явлений разрушения и разработать стратегии повышения прочности и эксплуатационных характеристик материалов и конструкций, подвергающихся экстремальным условиям воздействия.

Большинство конструкций вокруг нас находится под действием статической нагрузки. Зачастую материал, из которого данные системы сооружены, имеет неравномерную прочность. Внезапное разрушение статически нагруженной системы с явной периодичностью обнаруживает динамические эффекты, природа которых полностью определяется дискретностью структуры.

Иными словами, внезапное снятие статической нагрузки, приводящей к равномерной докритической деформации каждого элемента системы, может приводить к последующему динамическому разрушению всей системы.

В третьей главе диссертации рассмотрен дискретный аналог упругого стержня – система, представляющая собой цепь из одинаковых осцилляторов с одним закрепленным концом. Исследуется эффект, который не наблюдается в континуальной системе. Если в начальный момент времени цепь находилась в растянутом состоянии, причем расстояние между массами было близким к критическому, то в один из последующих моментов времени при совершении системой свободных колебаний деформация одного из звеньев превысит начальное значение, что может привести к вторичному разрыву. Таким образом, предварительно растянутая цепочка из линейных осцилляторов может разрушаться при внезапном снятии статической нагрузки. Данный эффект отмечается для цепочки произвольной длины, но отсутствует в континуальной среде.

Линейный осциллятор является сильно упрощенной моделью многих процессов. В частности, рассмотрение цепочки осцилляторов использовалось некоторыми авторами [42-44] для уяснения вопроса о влиянии дискретности структуры твердых тел на их механические свойства. В работе [42] рассматривались особенности прохождения продольной волны через цепочку осцилляторов, а в [43] анализировались особенности динамического разрушения цепочки, однако, в обоих случаях рассматривалась бесконечная цепочка. В некоторых работах [44,45] рассматривались цепочки из конечного количества звеньев, однако, разрушение авторами не рассматривалось. В книге [46] рассмотрено множество аспектов колебаний цепочек маятников и осцилляторов, а также осуществлены предельные переходы к уравнениям сплошной среды. Классической монографией, посвященной распространению волн в дискретных средах, считается работа [47]. Подход к задачам теплопроводности, основанный на цепочках, приведен в работе [48].

Также в третьей главе диссертации проведен численный анализ образцов с дискретной структурой, который демонстрирует, что исследуемый эффект может иметь место и в реальных конструкциях. Согласно проведенным расчетам специальная конструкция образцов позволяет наблюдать превышение начальных напряжений на 20% в течение продолжительного времени после внезапной разгрузки (например, после разрушения одного из ослабленных элементов конструкции).

Задачи о движущихся трещинах являются отдельной областью механики динамического разрушения со своими устоявшимися подходами. Некоторые из них основаны на дальнейшем развитии и глубокой модификации условия разрушения Ирвина, другие используют идеи зоны сцепления [49]. Последние исследования в этой области дают ценную информацию о распространении трещин в гетерогенных материалах с электромеханическими свойствами [50]. Также следует упомянуть о новых многообещающих численных подходах [51, 52]. Динамическое распространение трещин рассматривалось как область чисто фундаментальных исследований, однако современные численные модели, модели материалов и экспериментальные методы помогают успешно решать сложные инженерные и строительные задачи [53,54]. Однако следует отметить, что эти модели материалов часто зависят от конкретного материала (см., например, модель Риделя-Хирмайера-Тома [54,55]) и содержат доиодавально длинный список параметров, которые необходимо определить перед численным моделированием.

Динамическое распространение трещин является одной из наиболее сложных областей динамической механики разрушения, поскольку в данной области экспериментально наблюдались многочисленные эффекты, требующие надлежащего теоретического объяснения. Как фундаментальные, так и практические аспекты явления распространяющейся трещины имеют существенное значение, поскольку, с одной стороны, исследования движущейся трещины позволяют выявить фундаментальные законы механики разрушения

[56], а с другой стороны, в инженерной практике возникают проблемы динамического зарождения и распространения трещин, требующие практического изучения. Хотя в некоторых случаях неконтролируемое динамическое распространение трещин рассматривается как опасное явление [57,58], инициирование трещин также может быть желательным, например, в нефтяной и газовой промышленности [59].

Во второй половине 20-го века были получены различные аналитические результаты в области движущихся трещин. В работах Броберга [60,61], Кострова [62], Фрейнда [63-66], Слепяна [10,42,43], Ахенбаха и Базанта [67], Ахенбаха и Дунаевского [68] можно найти аналитические формулы, характеризующие поле напряжений вблизи вершины движущейся трещины, соображения по выделению энергии и теоретические предсказания значения предельной скорости трещины.

Большинство классических экспериментальных работ по динамическому распространению трещин, в которых были выявлены значимые эффекты динамического разрушения, были выполнены в последние десятилетия 20-го века: Рави-Чандар и Кнаусс [1,69-71], Файнберг и др. [16], Кобаяши и Далли [72,73], Далли [74], Кальтофф и др. [75], Розакис и др. [76], Зендер и Розакис [77], Мегрэ и Риттель [78]. Было обнаружено, что некоторые зависимости и параметры, характеризующие процесс распространения трещины, проявляют неустойчивое поведение. Здесь можно упомянуть следующие явления: колебания скорости трещины и несоответствие между теоретическими и экспериментально наблюдаемыми предельными скоростями трещины [16], нестабильность коэффициента интенсивности напряжений (КИН) для инициирования трещины (Калтхофф и Шокей [2]), эффекты, связанные со сменой режима разрушения [79], зависимость коэффициента интенсивности напряжений от скорости трещины (зависимость  $K_I - \dot{a}$ ) [25,26]. Некоторые из упомянутых эффектов были рассмотрены в работах [15] (осцилляции скорости трещины), [80] (нестабильное поведение КИН при старте трещины).



В соответствии с одним из наиболее распространенных подходов к задачам динамического распространения трещин (рассматривается первая мода нагружения), понятие критического коэффициента интенсивности напряжений ( $K_{IC}$ ) распространяется на динамический случай. Классический критерий разрушения, предложенный Ирвином  $K_I = K_{IC}$  [18], преобразуется в условие старта трещины для случая динамического нагружения, которое имеет вид  $K_I^d(t, P(t), a_0) = K_{IC}^d \left( \dot{K}_I^d(t) \right)$  [26], где  $P(t)$  – обобщенная функция нагружения,  $a_0$  – начальная длина трещины, а правая часть – критическое значение для конкретного материала, которое также зависит от скорости изменения локального поля напряжений. Этот подход также обеспечивает следующее уравнение движения вершины трещины  $K_I^d(t, P(t), a(t), \dot{a}(t)) = K_{ID}(\dot{a}(t))$ , где правая часть представляет собой функционал, зависящий от скорости трещины, который, как предполагается, является свойством материала, которое необходимо определить из экспериментов. Как видно из этого краткого описания, модель подразумевает существование уникальной (для конкретного материала) зависимости коэффициента интенсивности напряжений от скорости распространения трещины, и данная зависимость рассматривается как свойство материала. Существование и уникальность такой зависимости была подтверждена в ряде экспериментальных работ Оуэна и др. [81], Розакиса и др. [76], Dally [74]. Однако при испытаниях образцов различной формы также наблюдались неуникальные зависимости  $K_I - \dot{a}$  [82]. В данных испытаниях образцы нагружались либо с помощью клина, либо с помощью машин для испытаний на растяжение. Образцы с надрезом на одной кромке (SEN), с двойной консольной балкой (DCB) и с компактным растяжением (CT) дают различные кривые  $K_I - \dot{a}$  для конкретного материала, особенно в режимах с высокой скоростью движения трещины. Зависимость соотношения от формы образцов также обсуждалась в работах [73,83].

Рави-Чандар и Кнаусс установили, что это соотношение  $K_I - \dot{a}$  зависит от условий нагружения [70]. В этой работе образцы нагружались с помощью

коротких импульсов давления, генерируемых электромагнитным нагружающим устройством. В этом случае коэффициент интенсивности напряжений значительно варьировался для трещины, которая распространялась с постоянной скоростью. Таким образом, существование единой кривой  $K_I - \dot{a}$  было поставлено под сомнение. Влияние скоростных эффектов также обсуждалось в работе [84], где авторы утверждают, что области ускорения и замедления трещины образуют разные кривые  $K_I - \dot{a}$ .

Определение характеристик кривой  $K_I - \dot{a}$  является сложной экспериментальной задачей, поскольку необходимо регистрировать и анализировать полную эволюцию трещины, а также напряженно-деформированное состояние вблизи трещины. Как показано в работе [25], характеристики кривой  $K_I - \dot{a}$  могут менять в зависимости от применяемого экспериментального метода определения. Несмотря на все дискуссии вокруг этой зависимости, она является широко используемым инструментом для определения характеристик динамического разрушения материалов (например, результаты о распространении трещин в графене приведены в [85]).

Учет дискретности как пространственной, так и временной шкалы дает более реалистичное представление о динамическом разрушении твердых тел [86,87]. Процессы разрушения в материалах, как правило, происходят в дискретных пространственных элементах и за конечные промежутки времени. Игнорирование этой дискретности может привести к созданию чрезмерно упрощенных моделей, не отражающих истинное поведение трещин при их распространении через материал.

Трещины вообще распространяются по материалам посредством дискретных событий, таких как зарождение, рост и слияние микротрещин. Эти события происходят в определенных представительных объемах и развиваются в течение конечных временных интервалов под влиянием таких факторов, как свойства материала, напряженное состояние и микроструктурные особенности.

Моделирование пространственно-временной дискретности позволяет более точно представить динамику распространения трещин, включая зарождение новых трещин и их взаимодействие с уже существующими.

Известно, что микроструктура материала играет важную роль в определении его поведения при разрушении. Дискретные особенности, такие как границы зерен, дислокации и дефекты, влияют на зарождение и распространение трещин. Включив пространственно-временную дискретность в модели, можно лучше уловить влияние микроструктурных особенностей на распространение трещин и более точно предсказать модели разрушения в реальных материалах.

Принципиальным является также эффект масштаба. Процессы разрушения демонстрируют зависимое от масштаба поведение, при котором пространственно-временная дискретность становится более выраженной на меньших масштабах длины и времени. Модели, учитывающие эту дискретность, могут отражать такие масштабные эффекты, как зависящая от размера вязкость разрушения и переход от континуального к дискретному поведению. Понимание и учет этих масштабных эффектов необходимы для прогнозирования поведения трещин в различных масштабах пространства и времени.

Таким образом, учет пространственно-временной дискретности процесса разрушения важен для точного отражения динамики распространения трещин в материалах. Благодаря учету дискретных событий и их эволюции в пространстве и времени на различных масштабах модели могут обеспечить более реалистичные прогнозы поведения трещин, что позволит улучшить понимание, проектирование и оптимизацию материалов и конструкций, подвергающихся экстремальным динамическим нагрузкам.

В четвертой главе диссертации приведен численный анализ эффектов, сопровождающих динамическое распространение трещин. Анализ основан на структурно-временном критерии, что позволяет учесть пространственную и временную дискретность процессов динамического разрушения. Среди

исследуемых эффектов – осцилляции скорости трещины и нестабильное поведение текущего коэффициента интенсивности напряжений.

Также в четвертой главе представлен численный подход к задачам с произвольной траекторией распространения трещин. Данная расчетная схема использована для анализа характеристик фрагментации при пробивании преград ударниками. Расчетная схема основана на критерии инкубационного времени и методе конечных элементов в двумерной постановке и позволяет исследовать характеристики процессов фрагментирования при пробивании – распределение фрагментов по размерам, зависимость общего числа фрагментов от скорости удара. Полученные зависимости качественно напоминают экспериментальные данные по фрагментации в хрупких средах [88].

Характеристики динамической фрагментации являются предметом исследований нескольких научных групп как в России, так и в мире. К классическим экспериментальным и теоретическим работам в данной области следует отнести исследования Д. Грэйди и его коллег [89]. В России исследованиями процессов фрагментации занимаются в группах О.Б. Наймарка [90,91] и в Томском государственном университете [92].

Более детальное изучение процессов динамического разрушения хрупких сред при пробивании представлен в пятой главе диссертации. Ударное разрушение материалов имеет большое значение для инженерных приложений, поскольку это явление распространено повсеместно: разработка военных защитных систем (пуленепробиваемые жилеты, бронирование транспортных средств и т.д.), автомобильная промышленность (безопасность при столкновениях), авиация (столкновения с птицами, угроза космического мусора, эрозия лопаток турбин твердыми частицами [193-199]) и так далее.

Эксперименты по ударному разрушению материалов весьма трудозатратны, поскольку требуют высокоскоростных регистрирующих систем и точной синхронизации оборудования. Более того, такие эксперименты могут

быть довольно дорогостоящими, поскольку образцы являются одноразовыми. Численное моделирование может служить инструментом для оптимизации экспериментальных исследований и проектирования конструкций и материалов благодаря постоянно растущим вычислительным возможностям современных машин [201,202]. В настоящее время в литературе представлено большое разнообразие численных подходов к задачам динамического разрушения, которые включают метод конечных элементов с использованием метода зон сцепления (классические работы Нидлмана [49]), методы гидродинамики частиц [93,94], подход с дискретными частицами [95], бессеточные методы Галеркина [96], перидинамика [97,98]. Однако, помимо выбора численной схемы, следует применять соответствующую модель разрушения, поскольку материалы могут демонстрировать сложное поведение при интенсивном динамическом нагружении: увеличение прочности с увеличением скорости деформации [99,100], особенности, связанные с динамическим распространением трещин [24,101].

В соответствии с одним из наиболее распространенных подходов к моделированию динамического разрушения зависимости скорости деформации явно вводятся в модели материалов. Определяющая модель Джонсона-Кука [102,103] является ярким представителем такого подхода и является одной из наиболее часто используемых моделей материалов в области ударной техники, динамического разрушения и деформирования. Эта модель была успешно применена в значительном количестве работ, однако она содержит относительно большой набор параметров, которые должны быть определены с использованием довольно сложных процедур [104,105], и не все из этих параметров имеют четкую физическую интерпретацию. В целом, модели разрушения, зависящие от скорости деформации, основаны на сравнительно большом наборе параметров и функциональных зависимостей, экспериментальная оценка которых порой затруднительна.

Относительно эффективный подход к решению инженерных задач основан на введении специальных безразмерных параметров [106,107], которые описывают поведение конструкции, подвергающейся динамическому нагружению. Эти величины определяются с использованием параметров, характеризующих нагрузку, геометрию образцов и механические свойства материала. Данные безразмерные параметры позволяют оценить реакцию конструкции на динамическую нагрузку и сравнить характеристики конструкции в различных условиях испытаний (форма и размеры объекта, параметры нагрузки, параметры материала).

Другая группа критериев динамического разрушения основана на временных характеристиках процесса разрушения. В главе 5 модель разрушения на основе инкубационного времени [31,80,108] была использована для численного моделирования экспериментов по пробиванию пластин из ПММА [109], проведенных в рамках исследования. В ходе данных испытаний регистрировалось снижение скорости снаряда в результате взаимодействия с мишенью. Эксперименты проводились на образцах с тремя толщинами, и модель инкубационного времени, которая включает в себя один временной параметр, смогла обеспечить хорошее соответствие между экспериментами и численным моделированием для всех трех толщин образцов и широкого диапазона начальных скоростей ударника. Значение инкубационного времени для ПММА была оценена в предыдущих работах с использованием экспериментов по откольному разрушению в стержнях.

В приведенных в главе 5 исследованиях был использован ПММА, поскольку его можно рассматривать как эталонный материал для исследования динамического разрушения. Данный материал обладает примечательными свойствами, которые ценны для фундаментальных исследований разрушения: ПММА прозрачен и обладает двулучепреломляющим свойством, что позволяет использовать методы анализа напряжений с помощью каустик и методов фотоупругости, кроме того, ПММА можно рассматривать как хрупкий материал.

ПММА использовался в многочисленных работах по динамическому распространению трещин [15,16], удару [110,111], отколу [112,113], и его прочностные параметры и поведение хорошо известны. С другой стороны, ПММА широко используется для различных инженерных применений [114], и представленные результаты (как экспериментальные, так и численные) могут быть полезны для практических нужд.

Моделирование динамического разрушения при ударном нагружении является достаточно трудозатратным процессом, который занимает много времени даже с учетом использования производительного оборудования. В дополнение к требованиям к вычислительным ресурсам в задачах о пробивании встречаются и вычислительные сложности, связанные с чрезмерным искажением сетки конечных элементов и нестабильным поведением контактных алгоритмов [115-117]. Такие вычислительные трудности вполне ожидаемы в таких задачах в силу высоких скоростей изменения напряжений в зоне контакта ударника и преграды.

Один из вариантов решения описанных проблем демонстрируется на модельной задаче о пробивании преград с дискретной структурой. Подход основан на тренировке искусственных нейронных сетей (ИНС) на массиве решений задач.

В работе рассматривается применение искусственных нейронных сетей (ИНС) для быстрой численной оценки прочности перфорированных мишеней из ПММА [118]. Модели ИНС были обучены с использованием наборов численных результатов по расчету пробивания пластин из ПММА, полученных с помощью динамического метода конечных элементов в сочетании с критерием разрушения на основе инкубационного времени. Разработанный подход позволяет оценить прочность конкретной конфигурации мишени без сложных МКЭ расчетов, требующих значительных вычислительных ресурсов. Простая статическая задача о деформации перфорированной пластины обсуждается до

решения задачи об ударе, и для обеих задач представлены предпочтительные архитектуры ИНС.

Применение методов машинного обучения к инженерным задачам и к проблемам механики в целом интенсивно изучается многими исследовательскими группами по всему миру. Значительный успех был достигнут в объединении искусственных нейронных сетей (ИНС) с численными методами, используемыми в гидродинамике. Здесь можно упомянуть работы по применению глубокого обучения с подкреплением для оптимизации формы и управления ею [119,120]. ИНС также используются для быстрого получения решений задач гидродинамики, которые обычно требуют значительных вычислительных ресурсов [121].

ИНС активно внедряются в область механики твердого тела, будучи особенно эффективными для проектирования композитов и прогнозирования их механических свойств [122-124]. В настоящее время также активно изучаются методы глубокого обучения для задач оптимизации топологии [125]. Более того, подходы, основанные на машинном обучении, используются для эффективного проектирования сложных материалов, таких как метаматериалы и наноматериалы с нетрадиционными специфическими механическими свойствами [126,127].

Во многих из вышеупомянутых работ методы машинного обучения сочетаются с классическими численными методами, такими как метод конечных разностей или метод конечных элементов: нейронные сети обучаются с использованием наборов данных, полученных численным путем, и затем способны прогнозировать результаты для еще нерешенных задач. Этот подход представляется особенно перспективным для решения задач, требующих значительных вычислительных ресурсов. Оценка прочности материала в условиях ударного нагружения является типичным примером таких задач, поскольку необходимо учитывать решать задачу в динамической постановке, использовать динамические модели разрушения и, как правило, моделировать



контактное взаимодействие. Здесь можно упомянуть ряд работ [128-131], включая прогнозирование и оптимизацию ударной прочности ламинатов и использование методов машинного обучения для ускорения динамических вычислений методом конечных элементов [132] – автоэнкодеры, обученные на основе наборов данных, сгенерированных методом МКЭ, используются для оценки прочности труб, что значительно ускоряет вычисления и обеспечивает высокую точность. В ряде работ [133,134] показано, что ИНС эффективны для прогнозирования временных рядов при испытаниях на удар, например, зависимости силы от времени, полученные при моделировании динамического разрушения труб и сотовых конструкций при ударе. Можно также найти применение ИНС, обученным на основе результатов применения МКЭ, которые используются для прогнозирования надежности сложных технологических процессов, таких как клепка пуансонов [135].

ИНС также используются для комплексной характеристики материала, такой как оценка параметров модели повреждения JH-2 [27] на основе полученных экспериментальных результатов [136]. Более того, ИНС, обученные на основе экспериментальных результатов, могут быть использованы в качестве моделей материалов, описывающих сложное поведение материала при различных скоростях нагружения и температурных режимах [137]. Моделирование, определяющее пластичность, с использованием ИНС – это развивающаяся область исследований, демонстрирующая высокий потенциал для обработки относительно стандартных случаев [138], так и сложных эффектов, таких как разрушение из-за образования шейки и явления снижения предела текучести [139,140].

Таким образом, в настоящее время ИНС активно используются для оптимизации свойств (например, см. применение методов обучения с подкреплением для проектирования композитов, [141]), ускорения вычислений как за счет замены прямых вычислений обученной нейронной сетью [132], так и за счет внедрения эффективных моделей материалов на основе ИНС, которые

обучены либо на экспериментальных данных, либо на результатах вычислений [142]. Кроме того, можно упомянуть случаи, когда ИНС, обученные на наборах экспериментальных результатов, используются для облегчения дальнейших экспериментальных исследований давая представление о возможных результатах экспериментов [143,144].

В пятой главе диссертации ИНС используется для быстрой оценки прочности пластин из ПММА с дискретной структурой (перфорацией). ИНС обучаются с использованием наборов данных, сгенерированных методом конечных элементов, и, таким образом, ИНС рассматривается как быстрая альтернатива полному расчету методом конечных элементов. Также предлагается возможный метод обработки сложных с точки зрения вычислений случаев, когда сетка конечных элементов значительно искажается. ИНС были обучены с использованием наборов численных результатов по пробиванию пластин из ПММА, полученных с помощью динамического МКЭ в сочетании с критерием разрушения на основе инкубационного времени. Разработанный подход позволяет оценить прочность конкретной конфигурации мишени без сложных расчетов при помощи МКЭ, которые требуют значительных вычислительных ресурсов. Более того, показано, что ИНС способны предсказывать результаты для конфигураций, которые не могут быть обработаны с помощью разработанного МКЭ кода из-за численных нестабильностей и ошибок: обученная нейронная сеть использует информацию из успешных вычислений для получения результатов для проблемных случаев. Стоит отметить, что динамическое разрушение перфорированных образцов привлекает внимание исследователей с точки зрения траекторий трещин [145,146]. Кроме того, взаимодействие распространяющейся трещины с микротрещинами также интенсивно изучается [147] как и разрушение метаматериалов [200].

## **Цели и задачи исследования**

Основные цели исследования – разработка дискретных подходов к задачам и эффектам динамического разрушения сплошных сред, анализ особенностей разрушения сред с дискретным периодическим строением, анализ дискретного характера неустойчивостей процесса динамического разрушения, а также адаптация структурно-временного подхода для анализа разрушения в задачах об ударном нагружении и разработка новых методов для работы с численными неустойчивостями, встречающимися в данных задачах.

Для достижения целей исследования были поставлены и решены следующие задачи:

Исследовать аналогию между процессами динамического разрушения при старте трещины и разрушением в системе «масса на пружине» в условиях импульсного нагружения. Сопоставить процессу разрушения некоторый осциллятор с определенной собственной частотой.

Разработать относительно простой инженерный подход к задачам о динамическом разрушении, который бы позволил провести анализ основных эффектов динамического разрушения: роста прочности системы при увеличении скорости нагружения/деформирования и эффекта задержки разрушения, при котором разрушение происходит этапе снижения локальных полей напряжений. Предлагаемый подход будет основан на исследовании разрушения в дискретной системе – линейном осцилляторе, параметры которого подбираются исходя из соответствия экспериментальным данным.

Исследовать процессы разрушения периодических механических дискретных систем на примере цепочек линейных осцилляторов с произвольным конечным числом звеньев. Для этого необходимо найти аналитическое решение задачи о движении масс в цепочке линейных осцилляторов с произвольным

конечным количеством звеньев при определенном нагружении, начальных условиях и краевых условиях.

Провести численный анализ прочности в системе с дискретной структурой для выявления эффекта вторичного разрушения, следующего за разгрузкой. Указать рекомендации для возможного экспериментального исследования эффектов разрушения, выявленных при изучении цепочек осцилляторов.

Исследовать эффекты, проявляющие нестабильность процесса динамического распространения трещин и связанных с дискретным характером данного процесса. Разработать численную схему для анализа движущихся трещин, основанную на структурно-временном критерии разрушения – модели, подразумевающей пространственную и временную дискретность процессов разрушения. Модифицировать разработанную расчетную схему для анализа трещин с произвольными траекториями и провести анализ процессов динамической фрагментации хрупких тел при ударном нагружении.

Разработать численный метод для анализа разрушения в условиях ударного нагружения, провести моделирование экспериментов по пробиванию преград уделяя особое внимание пороговым значениям скорости ударника. Предложить подход, позволяющий обойти основные сложности, связанные с моделированием разрушения при пробивании – трудоемкость вычислений и их требовательность к ресурсам., долгое время расчета, нестабильная работа расчетных схем.

### **Научная новизна исследования**

Большинство задач, поставленных рамках работы, решаются впервые, причем методы, используемые для решения поставленных задач, также не встречаются в научной литературе.

Аналогия между процессами динамического разрушения и разрушением дискретных систем с инерцией (в данном случае – линейного осциллятора) обсуждается впервые. Более того, рассмотрение прямоугольных импульсов нагружения позволило определить собственную частоту осциллятора, отождествляемого с процессом разрушения при инициации трещины. Данный результат получен только в работах автора и соавторов.

Как отмечено в первом параграфе вводной главы, линейный осциллятор и раньше использовался для моделирования динамического разрушения, однако особенностью подхода, представленного в данной работе, является физическая и механическая обоснованность параметров модели, а также минимизация числа параметров, которые необходимо задать для работы модели. Фактически удалось свести это число к одному параметру, отвечающему за размер области материала, отвечающей за формирование массы осциллятора. Также впервые модель осциллятора была использована для изучения эффектов динамического разрушения – задержки разрушения и увеличения прочности системы при росте скорости нагружения.

Эффект вторичного разрушения, наблюдаемый в дискретных периодических структурах и обсуждаемый в третьей главе диссертации, был впервые исследован коллективом исследователей, в который входит автор диссертации. Более того, впервые показано, что обсуждаемый эффект стоит ожидать в реальных конструкциях с дискретным периодическим строением, что открывает широкое поле деятельности для экспериментаторов.

Применяемый в четвертой главе работы подход на основе структурно-временного подхода, который подразумевает пространственную и временную дискретизацию процесса разрушения. Интеграция данного подхода в расчетную схему на основе метода конечных элементов позволила впервые объединить две точки зрения на зависимость текущего значения коэффициента интенсивности напряжений от скорости трещины. Расчеты показали, что данная зависимость действительно может быть построена для относительно низких скоростей

трещины и медленного нагружения, однако для интенсивного и быстрого нагружения и высоких скоростей трещины разброс значений КИН не позволяет построить однозначную зависимость. Двойственность зависимости *КИН – скорость трещины* была получена впервые. Также стоит отметить первую реализацию динамического метода виртуального передвижения трещины в рамках коммерческого программного продукта, реализующего МКЭ. Представленная в четвертой главе расчетная схема для анализа динамической фрагментации имеет уникальную структуру: метод конечных элементов дополнен алгоритмами теории графов, что позволяет проводить анализ фрагментации исследуемого объекта на каждом временном шаге решения задачи.

Представленная в пятой главе трехмерная расчетная схема является первой трехмерной численной реализацией критерия на основе концепции инкубационного времени. Стоит отметить, что реализованная расчетная схема основана на коммерческом расчетном программном продукте LS-DYNA, что может способствовать внедрению разрабатываемого подхода в инженерную практику. В пятой главе также впервые предложен подход, позволяющий преодолеть численные сложности, которые часто сопровождают моделирование задач о разрушении при ударном нагружении. Подход основан на применении искусственных нейронных сетей (ИНС) для задач, постановка которых не позволяет провести МКЭ расчет из-за нестабильного поведения контактного взаимодействия и чрезмерного искажения элементов в силу высоких напряжений и скоростей деформации. Предлагаемый подход не позволит найти точное решение задачи, однако позволит получить оценку решения без изменений в постановке задачи и без изменений настроек численных алгоритмов решения. Такой метод преодоления численных трудностей при решении задач о пробивании предложен впервые.

## Методы исследования

Задачи, поставленные в рамках исследования, решаются аналитически, численно и экспериментально. В первых трех главах диссертации, которые посвящены исследованию разрушения в дискретных системах, в основном используется аналитический подход. В частности, точные формулы для движения массы на пружине при импульсном и линейно возрастающем воздействиях позволили аналитически исследовать эффект задержки разрушения и показать возрастание прочности системы при росте скорости нагружения. В то же время при калибровке модели линейного осциллятора для описания экспериментальных данных применялись численные методы решения простых дифференциальных уравнений в силу сложности функций, описывающих нагрузку системы. Задача о колебания цепочки линейных осцилляторов была также решена полностью аналитически.

В работе широко применяется метод конечных элементов (МКЭ) для анализа прочности конструкций. В частности, МКЭ использовался для демонстрации эффекта вторичного разрушения в образцах с периодической структурой. МКЭ позволил спроектировать примерную форму образцов для экспериментального изучения данного эффекта. Результаты четвертой главы диссертации практически полностью получены при помощи МКЭ – для моделирования процесса динамического распространения трещин разработан подход на основе МКЭ и структурно-временного критерия разрушения. В данной задаче для определения полей деформаций и напряжений в образце используется динамический решатель программного комплекса ANSYS, критерий разрушения реализован при помощи внешней программы. Была также создана внешняя программа для вычисления текущего значения критерия интенсивности напряжений, основанная на методе виртуального продвижения трещины. Анализ фрагментации преград проводился при помощи усложнённой расчетной схемы для анализа динамического распространения трещин. В

модифицированном варианте трещины могут распространяться в произвольном направлении и одновременно могут изучаться несколько трещин. Анализ свойств фрагментов проводился с использованием методов теории графов – фрагменты рассматриваются как подграфы графа элементов разбиения области.

Более сложная трехмерная расчетная схема была разработана для анализа разрушения при пробивании (глава 5). Критерий разрушения (критерий инкубационного времени) в данном случае реализован как новый материал для программного комплекса LS-DYNA с явной схемой интегрирования по времени. Полученные численные результаты сравнивались результатами экспериментов, проведенных в рамках исследования.

Численный анализ процессов пробивания преград был дополнен модулем на основе искусственных нейронных сетей (ИНС), позволяющем при наличии массива решенных задач быстро получать решение для схожей задачей, а также получать приближенные решения для задач, которые трудно решить при помощи полного расчета в силу численных нестабильностей, например, чрезмерного искажения элементов сетки. Работа данного подхода была показана на примере образцов с дискретным строением – пластин с перфорацией. Сначала были получены массивы решений задач о пробивании пластин с разными схемами перфорации, затем на этих массивах были обучены ИНС, которые предсказывали ответ для новой схемы перфорации без проведения расчета при помощи МКЭ. Также ИНС применялись к задачам, в которых схема перфорации приводила к чрезмерному искажению элементов сетки и преждевременному завершению расчета.

### **Теоретическая и практическая значимость полученных результатов**

В работе построена аналогия между процессом разрушения при старте трещины и разрушением линейного осциллятора важна с точки зрения более глубокого понимания особенностей динамического разрушения хрупких тел.



Возможность приписать процессу разрушения некоторую инерцию позволяет наглядно объяснить ключевые эффекты динамического разрушения – увеличение прочности системы при росте скорости нагружения и задержку разрушения. При решении задачи о старте трещины в результате нагружения прямоугольными импульсами был применен критерий разрушения на основе концепции инкубационного времени. Это позволило отождествить процесс динамического разрушения с некоторым линейным осциллятором с определенной собственной частотой, что может служить основанием для экспериментального поиска резонансных явлений в задачах о старте трещин. Стоит также отметить, что были определены оптимальные с точки зрения импульса силы прямоугольные импульсы, приводящие к старту трещины как для режима максимальной задержки разрушения, так и для случая с перегрузкой, когда разрушение происходит в момент завершения нагружения.

Построена прикладная модель для анализа разрушения на основе линейного осциллятора. Жесткость и критическая деформация пружины осциллятора определяются из соображений статической прочности исследуемого материала, масса же отвечает за динамические эффекты разрушения и может быть либо выбрана исходя из соответствия экспериментальным данным, либо масса может быть определена как масса некоторого объема исследуемого материала, задействованного в разрушении.

Решена задача о разрушении периодических структур при внезапной разгрузке важно и теоретически, и практически. Эффект вторичного разрушения был продемонстрирован на задаче о разрушении цепочки линейных осцилляторов – если цепочка была предварительно равномерно деформирована затем одно из звеньев рвется, может произойти вторичный разрыв. В континуальной задаче такой эффект не наблюдается, что позволяет ставить задачи о предельном переходе от дискретной системы к задаче о стрежне, а также вопросы о применимости континуальных моделей для описания реальных материалов и сред. Проведенный численный анализ позволит проектировать

образцы для экспериментальной проверки исследуемого эффекта, а также открывает возможности для создания нового способа нагружения материала короткими импульсами, который может быть использован для анализа эффекта задержки разрушения.

В работе разработан целый ряд численных подходов к задачам о динамическом разрушении и динамическом распространении трещин. Построенные численные схемы основаны на методе конечных элементов и критерии инкубационного времени. Они предназначены для решения двумерных задач о распространении прямолинейных магистральных трещин и множественных трещин с произвольным направлением, а также для решения трехмерных задач о разрушении в бездефектных средах (например, в задачах о пробивании преград). Некоторые из расчетных схем снабжены дополнительными функциями: решение задачи о распространении магистральной трещины может сопровождаться вычислением текущего значения коэффициента интенсивности напряжений при помощи метода виртуального продвижения трещины, также предложен метод анализа фрагментации на основе теории графов. Все разработанные численные схемы могут быть применены на практике для расчета прочности конструкций. Расчетные схемы основаны на коммерческих программных пакетах ANSYS и LSDYNA, что может способствовать их относительно простому внедрению в инженерную практику.

Также в работе предложен численный подход на основе искусственных нейронных сетей (ИНС), позволяющий быстро получать решение трудоемких задач, а также получать решение в задачах, для которых решение затруднено в силу численных сложностей. Работа данного подхода продемонстрирована на задаче о пробивании преград с дискретной структурой – пластин с перфорацией. Исследована работоспособность различных архитектур ИНС, показано, что механическая постановка задачи может сильно влиять на выбор предпочтительной архитектуры ИНС. Данный результат имеет высокую

практическую значимость для разработчиков расчетных программных комплексов и сред.

**Достоверность результатов** обеспечивается соответствием теоретических расчетов с представленными в научной литературе экспериментальными данными, а также воспроизводимостью полученных в работе результатов.

### **Апробация результатов**

Основные результаты работы были представлены на следующих конференциях:

1. Международная конференция Актуальные проблемы механики, Санкт-Петербург 2018
2. Международная конференция Актуальные проблемы механики, Санкт-Петербург 2019
3. Международная конференция Актуальные проблемы механики, Санкт-Петербург 2021
4. Международная конференция 6th International Conference on Crack Paths, Верона 2018
5. Международная конференция 7th International Conference on Crack Paths, онлайн конференция, 2021
6. Международная конференция European Conference on Fracture 21, Катания, 2016
7. Международная конференция European Conference on Fracture 22, Белград, 2018

8. Международная конференция First Virtual European Conference on Fracture, онлайн конференция, 2020
9. Международная конференция European Conference on Fracture 23, Фунчал, Мадейра, 2022.
10. Международная конференция 14th International Conference on Fracture, Родос, Греция, 2017
11. Международная конференция 11th International Symposium on Plasticity and Impact Mechanics, Дели, 2016
12. Международная конференция 10th European Solid Mechanics Conference, Болонья, 2018
13. Международная конференция XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, 2019
14. Международная конференция XIII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Санкт-Петербург, 2023
15. LXVII Международная конференция Актуальные проблемы прочности АПП-2024, Екатеринбург, 2024

Результаты исследования опубликованы в следующих 20 работах (WoS/SCOPUS), 11 из которых опубликованы в журналах Q1 CJR/SJR:

1. N.A. Kazarinov, V.A. Bratov, Yu.V. Petrov, Simulation of dynamic crack propagation under quasi-static loading, Doklady Physics 59(2), 2014, 99-102 (вклад автора 50%)
2. I. Smirnov, N. Kazarinov, Y. Petrov, Experimental observation and numerical modeling of unstable behaviour of a fast crack velocity, Theoretical and Applied Fracture Mechanics 101, 2019, 53-58 (вклад автора 30%)

3. Yu.V. Petrov, A.A. Gruzdkov, N.A. Kazarinov, Features of the dynamic fracture of one-dimensional linear chains, *Doklady Physics* 53(11) ,2008, 595-599 (вклад автора 50%)
4. N.A. Kazarinov, S.A. Smirnov, Y.V. Petrov, Revisiting mass-on-spring model to address key dynamic fracture effects, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 132, 2024, 104470 (вклад автора 80%)
5. N.A. Kazarinov, Y.V. Petrov, A.V. Cherkasov, Instability effects of the dynamic crack propagation process, *Engineering Fracture Mechanics* 242(1), 2021, 107438 (вклад автора 70%)
6. N.A. Kazarinov V.A. Bratov, Dynamic fracture of ceramic plates due to impact loading. Numerical investigation, *Materials physics and mechanics* 4(42), 2019, 389-395 (вклад автора 80%)
7. N.A. Kazarinov, V.A. Bratov, N.F. Morozov, Y.V. Petrov, V.V. Balandin, M.A. Iqbal, N.K. Gupta, Experimental and numerical analysis of PMMA impact fracture, *International Journal of Impact Engineering* 143, 2020, 103597 (вклад 60%)
8. N. Kazarinov, A. Khvorov, Predicting impact strength of perforated targets using artificial neural networks trained on FEM-generated datasets, *Defense Technology* 32, 2024, 32-44 (вклад автора 70%)
9. N. Kazarinov, Yu. Petrov, A. Utkin, Fracture delay effect: analogy between crack initiation due to short pulse loads and mass-spring system failure, *International Journal of Impact Engineering* 175, 2023, 104513 (вклад автора 60%)
10. M.O. Ignatiev, Y.V. Petrov, N.A. Kazarinov, Simulation of Dynamic Crack Initiation Based on the Peridynamic Numerical Model and the Incubation Time Criterion, *Technical Physics* 66(3), 2021, 422-425 (вклад автора 50%)
11. M.O. Ignatiev, Y.V. Petrov, N.A. Kazarinov, E. Oterkus, Peridynamic formulation of the mean stress and incubation time fracture criteria and its

correspondence to the classical Griffith's approach, *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 35(4), 2023, 1523-1534 (вклад автора 40%)

12. N.A. Kazarinov, Y.V. Petrov, A.V. Cherkasov, Spatial and Temporal Discreteness as a Crucial Property of the Dynamic Fracture Process, *Mechanics of Solids* 55(5), 2020, 673-678 (вклад автора 70%)

13. N.A. Kazarinov, V.A. Bratov, Yu.V. Petrov, G.D. Fedorovsky, Evaluation of fracture incubation time from quasistatic tensile strength experiment, *Materials Physics and Mechanics* 19(1), 2014, 16-24 (вклад автора 50%)

14. Y.V. Petrov, A.V. Cherkasov, N.A. Kazarinov, Instability of critical characteristics of crack propagation, *Acta Mechanica* 232(5), 2021, 1997-2003 (вклад автора 70%)

15. N.A. Kazarinov, Y.V. Petrov, V.A. Bratov, V.Yu. Slesarenko, Numerical investigation of stress intensity factor - crack velocity relation for a dynamically propagating crack, *Materials Physics and Mechanics* 29(1), 2016, 39-42 (вклад автора 70%)

16. N.A. Kazarinov, A.D. Evstifeev, Y.V. Petrov, S.A. Atroshenko, R.R. Valiev, The Effect of Grain Refinement on Solid Particle Erosion of Grade 5 Ti Alloy, *Journal of Materials Engineering and Performance* 27(6), 2018, 3054-3059 (вклад автора 40%)

17. N.A. Kazarinov, A.D. Evstifeev, Y.V. Petrov, S.A. Atroshenko, V.A. Lashkov, R.Z. Valiev, A.S. Bondarenko, Surface Roughness Investigation of Ultrafine-Grained Aluminum Alloy Subjected to High-Speed Erosion, *Journal of Materials Engineering and Performance* 25(9), 2016, 3573-3579 (вклад автора 40%)

18. A. Evstifeev, N. Kazarinov, Y. Petrov, L. Witek, A. Bednarz, Experimental and theoretical analysis of solid particle erosion of a steel compressor blade based on incubation time concept, *Engineering Failure Analysis* 87, 2018, 15-21 (вклад автора 40%)

19. R.Z. Valiev, E.A. Prokofiev, N.A. Kazarinov, G.I. Raab, T.B. Minasov, J. Stráský, Developing nanostructured Ti alloys for innovative implantable medical devices, *Materials* 13(4), 967 (вклад автора 60%)
20. N. Kazarinov, A. Stotskiy, A. Polyakov, R.Z. Valiev, N. Enikeev, Finite Element Modeling for Virtual Design to Miniaturize Medical Implants Manufactured of Nanostructured Titanium with Enhanced Mechanical Performance, *Materials* 15(21), 2022, 7417 (вклад автора 60%)

### **Личный вклад автора**

Материалы диссертации являются обобщением работ автора по теме исследования и отражают его личный вклад в развитие данной тематики. Все результаты, приведенные в диссертации, получены либо самим автором, либо при его непосредственном участии.

### **Благодарности**

Автор выражает искреннюю благодарность научному консультанту профессору Юрию Викторовичу Петрову за руководство исследованиями, наставничество и мотивацию к написанию работы. Также автор благодарен своим коллегам и соавторам Братову В.А., Груздкову А.А., Уткину А.А., Филиппову С.Б., Волкову Г.А. за поддержку и многочисленные обсуждения. Автор благодарен Смирнову И.В., Баландину В.В. и Баландину В.В. мл. за проведенные экспериментальные исследования. Также автор благодарит своего школьного учителя математики Григория Залмановича Медникова.

## **Поддержка**

Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках мегагранта (соглашение No 075-15-2022-1114 от 30 июня 2022 г.). Также автор благодарит РФФИ (гранты 22-11-00091 и 22-71-10019).

## **Структура и объём диссертации**

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы. Работа изложена на 216 страницах, содержит 66 рисунков и 10 таблиц. Список литературы включает 202 источника.

## **Основные научные результаты**

- Обнаружена и исследована аналогия между процессами динамического разрушения и разрушением линейного осциллятора [148].
- Построена модель динамического разрушения на основе линейного осциллятора. Модель использована для описания экспериментальных результатов и исследования ключевых эффектов динамического разрушения, в частности, задержки разрушения [34].
- Исследованы эффекты неустойчивого поведения характеристик процесса распространения трещин, в частности осцилляции скорости трещин и разброс значений коэффициента интенсивности напряжений. Зависимость коэффициента интенсивности напряжений от скорости трещины определяется характером нагружения и разбросом значений КИН. [14,15,86,183,184,186,188-190].



- Проведено численное исследование процессов динамической фрагментации при ударном нагружении. Численные результаты качественно описывают экспериментальные данные по фрагментации хрупких тел [88].
- Разработаны новые численные и экспериментальные подходы для анализа прочности материалов в условиях квазистатического, циклического и динамического видов нагружения [86,109,183,184,193,195,199,201,202].
- Обнаружен и исследован эффект разрушения в периодических структурах при внезапном разгрузении [17].
- Предложен подход на основе искусственных нейронных сетей для ускорения расчетов и преодоления численных неустойчивостей в задачах о пробивании преград [118].

### **Положения, выносимые на защиту**

Исследована аналогия между разрушением в системе «масса на пружине» и динамическим стартом трещины. Применение критерия на основе инкубационного времени для анализа старта трещин при нагружении прямоугольными импульсами позволило сопоставить процессу разрушения линейный осциллятор с определенной собственной частотой. Таким образом, показано, что процесс динамического разрушения обладает выраженными инерционными свойствами и характерными временами, лежащими в основе эффектов неустойчивости классических предельных характеристик разрыва сред, наблюдаемых при ударно-волновом высокоскоростном воздействиях. Использование моделей, содержащих характерные времена процессов динамического разрушения, фактически подразумевает ввод временного масштаба процесса разрушения.

Предложена модель динамического разрушения на основе системы «масса на пружине», позволяющая описать и предсказать ключевые временные

эффекты динамического разрушения, непредсказуемые по классическому подходу на основе значений амплитуд нагрузки и локальных полей напряжений (задержка разрушения при нагружении системы короткими импульсами давления/силы, рост прочности системы при увеличении скорости нагружения/скорости изменения полей напряжения). Полученные данные позволяют дать простую инженерную интерпретацию сложному и нестабильному поведению критических характеристик разрушения, которые вызывают проблемы при традиционных подходах.

Обнаружен эффект, связанный с разрушением в системе с периодической структурой при разгрузке: доказано, что инициируемые даже при квазистатическом разрыве волны разгрузки могут вызывать вторичные разрушения динамического характера в многокомпонентных периодических структурах. Эффект показан на примере цепочки линейных осцилляторов, для которой получены и точно решены уравнения движения масс. Проведенный численный анализ свидетельствует о возможности экспериментального подтверждения исследуемого эффекта при использовании специально спроектированных образцов материалов.

Разработана численная схема на основе метода конечных элементов и критерия инкубационного времени для анализа динамического распространения прямолинейных трещин. Проведен численный анализ эффектов, вызывающих дискуссии специалистов, таких как К. Равич-Чандар, В. Кнаусс, А. Росакис, Дж. Дэлли: наблюдаемый в экспериментах сильный разброс значений коэффициента интенсивности напряжений при интенсивном нагружении образцов и высоких скоростях движения трещин, а также осцилляции скорости трещин. Данные эффекты впервые объяснены с точки зрения структурно-временного подхода, подразумевающего пространственно-временную дискретизацию процесса разрушения.

Разработана двумерная численная схема для моделирования фрагментации хрупких тел при ударном нагружении, позволяющая моделировать

распространение множественных трещин в произвольном направлении. Численная схема основана на методе конечных элементов, критерии инкубационного времени и методов теории графов. Показано, что для моделирования основных эффектов фрагментации не требуется введения сложных реологических моделей, базирующихся на большом числе определяющих параметров и функций материала. Для керамических материалов были получены зависимости количества фрагментов от их размера, а также от скорости снаряда, поражающего преграду. Характер численно полученных зависимостей качественно подтверждается экспериментально наблюдаемыми результатами.

Предложен численный подход для моделирования разрушения при пробивании преград. Разработанная трехмерная расчетная схема основана на методе конечных элементов в трехмерной постановке и критерии инкубационного времени. Данная расчетная схема позволяет определять пороговые скорости ударника. Проведено моделирование экспериментов по пробиванию пластин из полиметилметакрилата, определена пороговая скорость ударника для образцов, показано соответствие модели с экспериментами.

Предложен новый подход на основе искусственных нейронных сетей (ИНС), позволяющий существенно ускорить получение результатов при решении задач динамики разрушения, а также преодолеть свойственные для данного класса задач вычислительные трудности (чрезмерная деформация элементов, нестабильная работа контактных алгоритмов). Для задач о пробивании преград разработан алгоритм на основе ИНС, позволяющий анализировать процесс разрушения сред и материалов с дискретной структурой – пластин с перфорацией. Алгоритм позволяет получить решение задачи без проведения полного расчета, а также получать решение для трудных с вычислительной точки зрения случаев.

## **Глава 1. Аналогия между процессами динамического разрушения и разрушением в системе «масса на пружине»**

Критерий разрушения на основе концепции инкубационного времени был использован для аналитического исследования динамического старта трещин при коротких импульсных нагрузках. Особое внимание было уделено явлению задержки разрушения – фундаментальному эффекту разрушения, который можно наблюдать в экспериментах с короткими импульсными нагрузками. Эффект можно описать следующим образом: разрушение материала происходит после того, как локальные напряжения достигли своих максимальных значений, что означает, что разрушение происходит на стадии снижения нагрузки и, следовательно, присутствует задержка разрушения. Показано, что эффект задержки разрушения проявляется при нагружении системы пороговыми нагрузками. Такие пороговые нагрузки являются ключевым инструментом для экспериментального исследования эффектов динамического разрушения. Обнаружено, что экспериментально зарегистрированная задержка разрушения может быть четко объяснена в рамках концепции инкубационного времени. Найдены условия наличия задержки разрушения, оценены параметры пороговой нагрузки и даны соответствующие аналитические формулы. Кроме того, обсуждается простая аналогия, основанная на модели «масса на пружине». Аналитические формулы, выведенные для линейного осциллятора, используются для выявления некоторых неочевидных сходств между нестабильностью трещины при коротких импульсных нагрузках и разрушением линейного осциллятора при приложении аналогичных нагрузок: динамический процесс разрушения в окрестности трещины, по-видимому, демонстрирует инерционное поведение, связанное с наличием характерных временных параметров.

### 1.1. Разрушение в системе «масса на пружине» при нагружении короткими импульсами

Рассмотрим массу  $m$  на упругой пружине с жесткостью  $c$  и силой  $f(t)$ , приложенной к массе (рисунок 1.1). Отклонение массы описывается функцией  $x(t)$ , которая удовлетворяет следующему уравнению баланса, начальным условиям и условию разрушения пружины:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + cx = f(t) \quad (1.1).$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

$$x(t) \geq x_c \Leftrightarrow \text{разрушение}$$

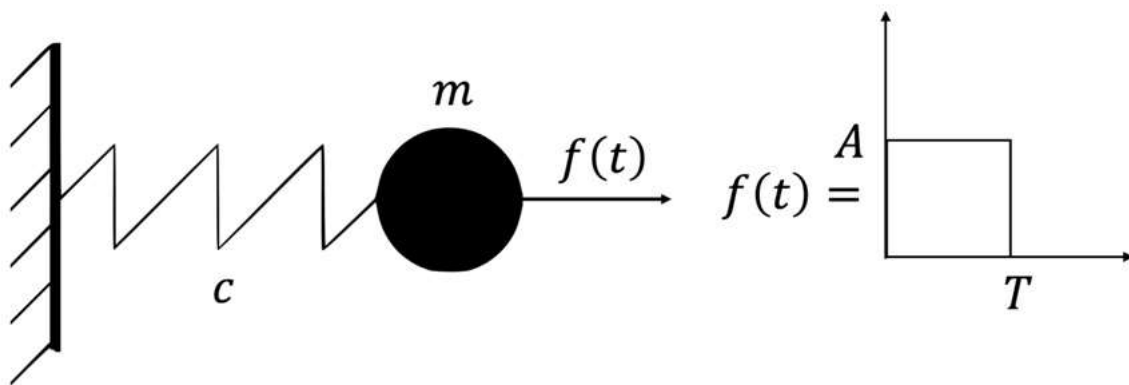


Рис. 1.1. Осциллятор и нагружающий импульс.

Задача (1.1) может быть решена для прямоугольного силового импульса, когда  $f(t) = A[H(t) - H(t - T)]$ , где  $A$  и  $T$  - амплитуда и длительность импульса соответственно, а  $H(t)$  - ступенчатая функция Хевисайда. Решение задачи (1.1) следующее:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{A}{c}(1 - \cos(\omega t)), & t \leq T \\ \frac{A}{c}(\cos(\omega(t - T)) - \cos(\omega t)), & t > T \end{cases} \quad (1.2),$$

где  $\omega = \sqrt{c/m}$  – собственная частота генератора. Если рассматривается разрушение системы и время разрушения обозначается  $t^*$ , уравнение  $x(t^*) = x_c$  может быть использовано для построения зависимости длительности импульса  $T$  от времени разрушения  $t^*$  для фиксированной амплитуды импульса. Если время разрушения превышает длительность импульса ( $t^* > T$ ), происходит задержка разрушения, так как разрушение происходит сразу после того, как разрывающая сила падает до нуля. Если  $t^* \leq T$ , и задержки нет, мы можем рассчитать минимально возможное время разрушения  $t_{min}^*$ :

$$t_{min}^* = T_{zero\ delay} = \frac{1}{\omega} \arccos\left(1 - \frac{f_c}{A}\right) \quad (1.3)$$

В (1.3) и далее  $f_c = cx_c$  – критическая статическая сила для рассматриваемой системы. Все импульсы длительностью более  $T(t_{min}^*)$  приводят к точно такому же времени разрушения  $t_{min}^*$  (вертикальная линии на графике  $T(t^*)$  на рис. 1.2).

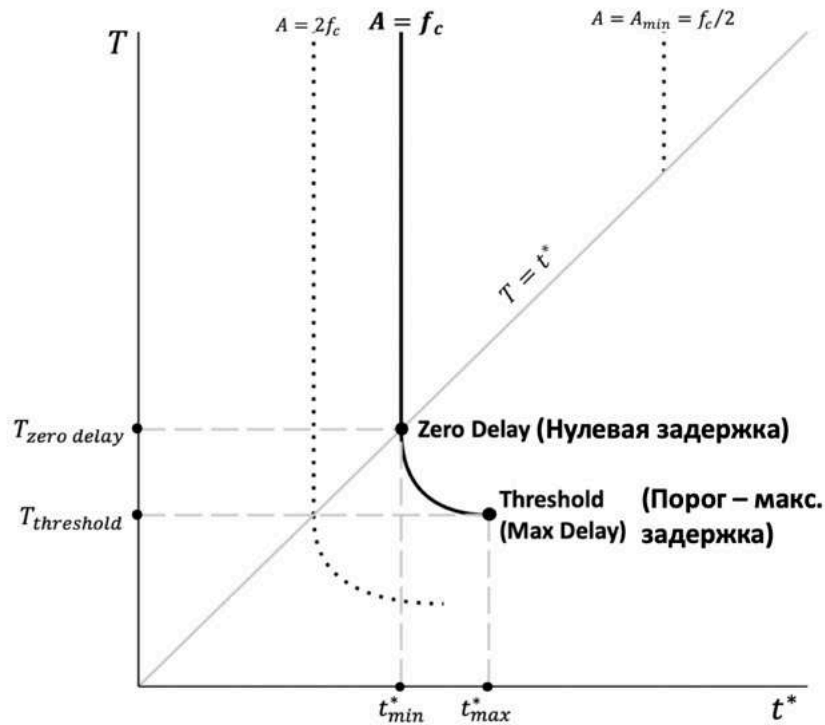


Рис. 1.2. Зависимость амплитуды импульса от времени разрушения для осциллятора, к которому приложены импульсы с фиксированной амплитудой.

Разрушение с задержкой может быть изучено при рассмотрении случая  $t > T$  из выражения (1.2). Для этого случая решение уравнения  $x(t^*) = x_c$  дает следующую зависимость  $T(t^*)$ :

$$T = -\frac{1}{\omega} \arccos\left(\frac{f_c}{A} + \cos(\omega t^*)\right) + t^* \quad (1.4).$$

Анализируя формулу (1.4), можно оценить минимальную длительность импульса для заданной амплитуды  $T_{threshold}$ , которая соответствует максимальному времени разрушения  $t_{max}^*$ , указывающему на максимальную задержку разрушения:

$$t_{max}^* = \frac{1}{\omega} \left( \pi - \arccos\left(\frac{f_c}{2A}\right) \right) \quad (1.5a),$$

$$T_{threshold} = \frac{1}{\omega} \left( \pi - 2\arccos\left(\frac{f_c}{2A}\right) \right) \quad (1.5b).$$

Формулы (1.5a,b) накладывают естественное ограничение на амплитуду импульса  $A$  из-за ограничений на аргумент арккосинуса, который должен принадлежать диапазону  $[-1,1]$ . Таким образом, чтобы вызвать разрушение системы, амплитуда импульса разрывающей силы должна быть равна или превышать половину статической критической силы (статическая сила, которая сломала бы пружину, если бы рассматривалась статическая задача):  $A \geq f_c/2$ . Если рассматривать минимальную амплитуду импульса  $A = f_c/2$ , точки  $t_{min}^*$  и  $t_{max}^*$  сливаются, и задержки разрушения не наблюдается, и, следовательно,  $T(t^*)$  вырождается в единую вертикальную линию. Напротив, большие амплитуды приводят к более длительному возможному времени задержки разрушения. Эти варианты зависимости  $T(t^*)$  показаны пунктирными линиями на рисунке 1.2.

Формула (1.3) может быть использована для построения зависимости длительности разрушающего импульса от амплитуды импульса для двух предельных случаев: для случая с нулевой задержкой  $t^* = T$  следует подставить

в (1.4), и, если рассматривается максимальная задержка разрушения, (1.5b) следует использовать для того, чтобы изучить пороговый случай. Соответствующие зависимости  $T(A)$  показаны на рисунке 1.3а. График показывает минимально допустимую амплитуду импульса, а более короткие импульсы требуют более высоких амплитуд, чтобы вызвать разрушение системы. Разрушение осциллятора происходит для импульсов, которые лежат между двумя линиями, поскольку мы предполагаем, что нагрузка прекращается в момент разрушения осциллятора – точки «опускаются» до кривой  $T(A)$ , соответствующей нулевой задержке разрушения, которая описывает случай перегрузки системы.

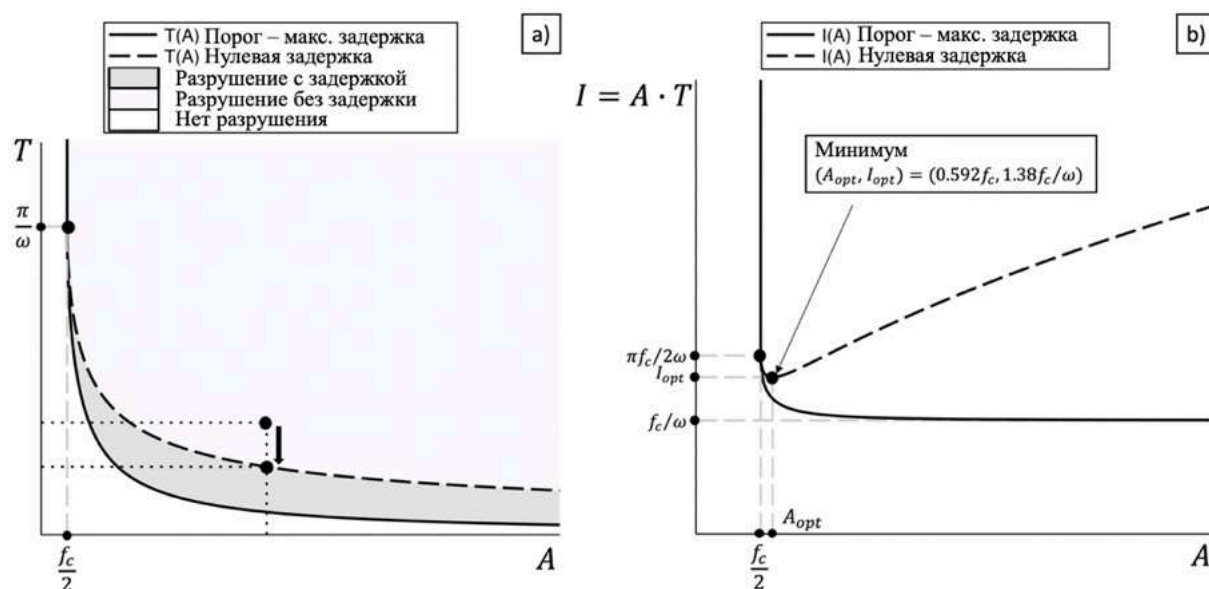


Рис. 1.3. Зависимости длительности импульса нагрузки (а) и импульса нагрузки (b) от амплитуды для импульсов, вызывающих разрушение с задержкой и без нее.

Наконец, мы можем использовать полученные кривые  $T(A)$  для исследования импульса нагружающей силы  $I = A \cdot T(A)$ , которая приводит к разрушению системы. Соответствующие кривые  $I(A)$  показаны на рисунке 1.3b. Зависимость  $I(A)$  с нулевой задержкой имеет минимальную точку  $(A_{opt}, I_{opt}) =$



$(0.592f_c, 1.38f_c/\omega)$ , обеспечивающую оптимальный (с точки зрения импульса прикладываемой силы) режим разрушения осциллятора в режиме перегрузки системы. Таким образом, чтобы разрушить осциллятор оптимально с точки зрения импульса нагрузки и без задержки разрушения (что является практически самым простым способом вызвать разрушение, поскольку нужно приложить нагрузку и ждать, пока система не выйдет из строя), система должна быть нагружена импульсом с амплитудой  $0.592f_c$ . Очевидно, что если рассматривается разрушение с задержкой, следует использовать очень короткие импульсы с высокой амплитудой, чтобы минимизировать импульс разрывающей силы.

Таким образом, было показано, что модель осциллятора может проявлять эффект задержки разрушения, если прикладываются короткие нагружающие импульсы. Параметры критических импульсов относятся к определенным интервалам в зависимости от того, какой режим рассматривается: пороговая загрузка или перегрузка системы. Более того, существует минимальное значение амплитуды импульса, необходимое для разрушения системы, которое равно половине критической статической силы  $f_c$ . В дополнение к этому можно рассчитать оптимальную (с точки зрения импульса нагружающей силы) амплитуду разрушающего импульса, если рассматривается нулевая задержка разрушения.

## **1.2. Критерий разрушения на основе концепции инкубационного времени**

Критерий разрушения на основе концепции инкубационного времени был первоначально предложен в работах [31,80,108]. Согласно данной модели разрушения макроскопическому событию разрушения требуется определенное время для развития – инкубационное время. Инкубационное время рассматривается как параметр материала, который должен быть определен на

основе доступных экспериментов по динамическому разрушению для рассматриваемого материала.

В соответствии с критерием на основе инкубационного времени разрушение в точке  $x$  и в момент времени  $t^*$  контролируется следующим неравенством:

$$\frac{1}{\tau} \int_{t^*-\tau}^{t^*} \frac{1}{d} \int_{x-d}^x \sigma(x', t') dx' dt' \geq \sigma_c \quad (1.6),$$

где  $\sigma(x, t)$  – зависящее от времени напряжение,  $\sigma_c$  – предельное напряжение для исследуемого материала, а  $\tau$  – инкубационное время. Критерий (1.6) также содержит параметр линейного размера  $d$ , который впервые был введен в [149,150]. Этот параметр рассматривается как размер зоны процесса разрушения, совпадающий с минимальным расстоянием, которое может пройти вершина трещины. Линейный размер  $d$  может быть рассчитан по формуле  $d = 2K_{Ic}^2 / \pi \sigma_c^2$ , где  $K_{Ic}$  – критический коэффициент интенсивности напряжений для исследуемого материала. Инкубационное время  $\tau$  считается свойством материала, которое должно быть определено экспериментально. Оно не зависит от других параметров, и лучший способ измерить его экспериментально – это провести эксперимент, в котором известны местоположение зоны разрушения  $x$ , время разрушения  $t^*$  и история напряжений в интересующих точках  $\sigma(x, t)$ . Таким образом, нужно подставить историю напряжений в интегральное условие и найти  $\tau$ , которое обеспечивает равенство в формуле (1.6). История напряжений может быть измерена экспериментально или может быть определена численно или даже аналитически. Другой способ заключается в работе с пороговыми нагрузками, которые иногда могут дать возможность рассчитать  $\tau$ , не зная времени разрушения  $t^*$ . Критерий разрушения (1.6) может быть упрощен для выполнения анализа старта трещины при приложении динамических нагрузок:

$$\frac{1}{\tau} \int_{t^*-\tau}^{t^*} K(t') dt' \geq K_{Ic} \quad (1.7).$$

Для относительно медленных нагрузок критерий (1.7) эквивалентен критерию Ирвина  $K_I \geq K_{Ic}$  [18], но не может быть использован для моделирования процесса распространения трещины [151].

### 1.3 Анализ старта трещины и аналогия с осциллятором

Все зависимости в данном разделе будут построены и продемонстрированы для экспериментов по старту трещин при импульсном нагружении из работ [2,5]. Во-первых, будет предоставлено подробное описание применения критерия инкубационного времени и последующей связи с моделью осциллятора для результатов из [5], где были испытаны образцы из стали. Аналогично проанализированы эксперименты с оргстеклом из [2].

Фактически задачи о старте трещин будут исследованы аналогично задаче о разрушении линейного осциллятора, описанной в части 1.1. Сначала будет построена зависимость длительности разрушающего нагружающего импульса от времени разрушения (старта трещины в данном случае)  $T(t^*)$  для некоторой фиксированной амплитуды  $A$ , чтобы показать наличие эффекта разрушения, затем будут исследованы зависимости длительности разрушающего импульса от амплитуды  $T(A)$  для разных сценарием разрушения – без задержки разрушения, а так же пороговый случай с максимальным значением задержки разрушения.

Эксперименты по старту трещин из-за импульсов давления в образцах стали 4340 из работы [5]

В [5] описаны эксперименты по старту трещин в образцах стали 4340 при нагружении прямоугольными импульсами. Авторы предоставляют данные об импульсах с пороговыми амплитудами (минимальная амплитуда для заданной

длительности импульса, приводящая к старту трещины) для трех длительностей импульсов – 18 мкс, 40 мкс и 80 мкс (рисунки 6 и 7 в [5]) для трещин с разной начальной длиной. В этом исследовании нас интересуют относительно длинные трещины, чтобы полубесконечное приближение можно было бы считать применимым и были бы доступны соответствующие формулы для критерия интенсивности напряжений.

Рассмотрим упругую плоскость с полубесконечным разрезом  $y = 0, x \leq 0$  (рис. 1.4). Если поведение материала считается упругим, то деформированное состояние определяется следующей системой уравнений:

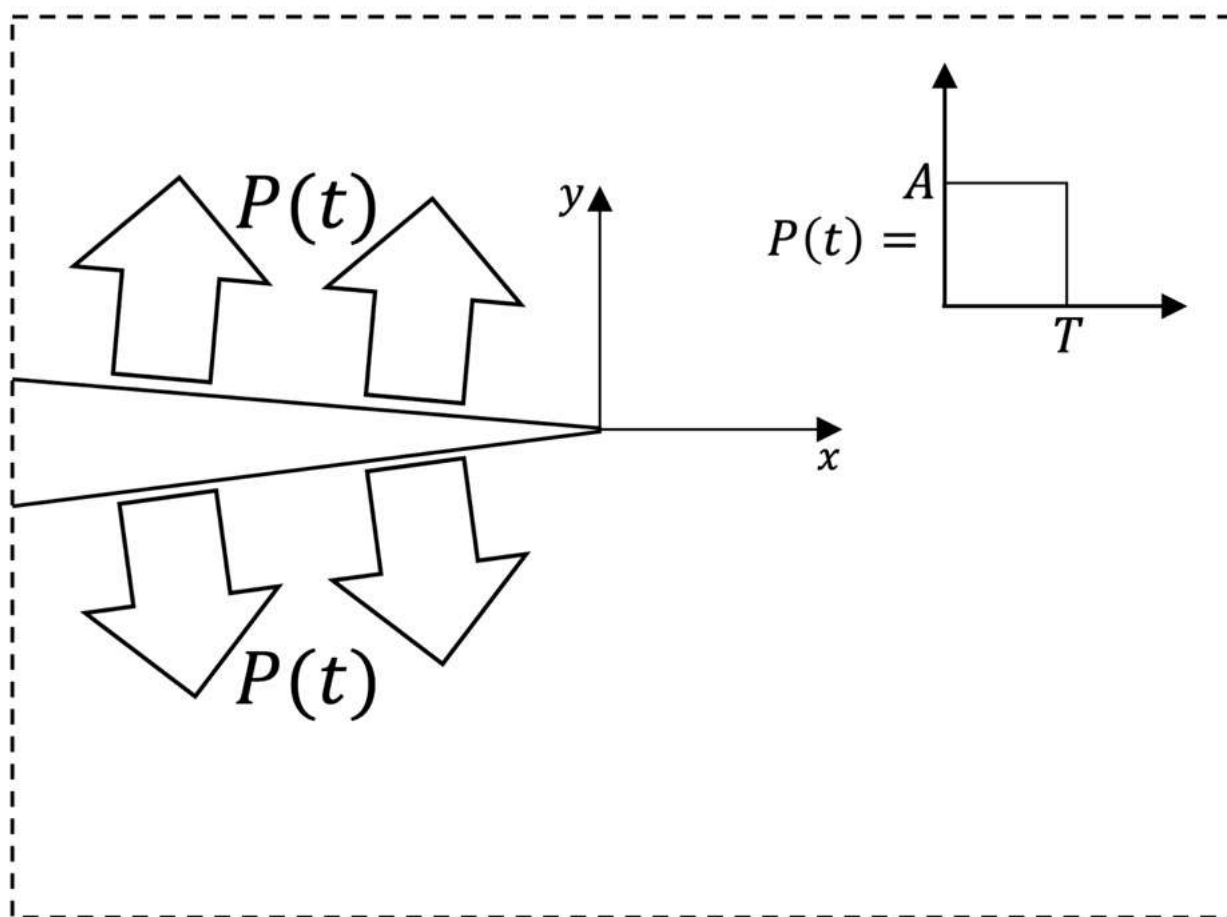


Рис. 1.4. Схема задачи о старте трещины. Образец не ограниченный, а трещина – полубесконечная.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (1.8),$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  – потенциалы разложения Гельмгольца,  $c_1$  и  $c_2$  – скорости упругих волн. Горизонтальные и вертикальные перемещения ( $u, v$ ) могут быть получены по формулам

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.9).$$

Предполагается, что берега трещины нагружены зависящим от времени нормальным давлением  $P(t)$ , а образец свободен от напряжений при  $t < 0$ . Таким образом, применяются следующие граничные условия и начальные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}|_{y=\pm 0, x < 0} &= 0 \\ \sigma_y|_{y=\pm 0, x < 0} &= P(t) \\ \varphi|_{t < 0} = \psi|_{t < 0} &= 0 \end{aligned} \quad (1.10).$$

Если рассматривать ступенчатую нагрузку  $P(t) = A \cdot H(t)$ , то коэффициент интенсивности напряжения определяется по формуле [63]

$$K^H(t) = A \cdot \alpha \cdot \sqrt{t}, \alpha = \frac{4c_2 \sqrt{c_1^2 - c_2^2}}{c_1 \sqrt{\pi c_1}} \quad (1.11).$$

Если к берегам трещины прикладывается произвольная нагрузка  $F(t)$ , выражение для соответствующей зависимости КИН  $K^F(t)$  вычисляется с использованием свертки:

$$K^F(t) = \int_0^t K^H(s) \cdot F'(t - s) ds \quad (1.12).$$

Таким образом, формула (1.12) может быть использована для определения функции  $K(t)$  для прямоугольной импульсной нагрузки  $P(t) = A(H(t) - H(t - T))$  с амплитудой  $A$  и длительностью импульса  $T$ :

$$K(t) = A \cdot \alpha \cdot (\sqrt{t} - \sqrt{t - T}) \quad (1.13)$$

В (1.13) и в остальных формулах предполагается, что корни умножаются на функцию Хевисайда с тем же аргументом. Теперь можно подставить (1.13) в критерий (1.7) (предположив, что в (1.7) имеет место равенство), чтобы исследовать старт трещины и получить выражение, связывающее момент разрушения (старта трещины)  $t^*$ , длительность нагрузки  $T$  и амплитуду  $A$ . Таким образом, для фиксированной амплитуды нагрузки может быть определена зависимость  $T(t^*)$ .

$$\frac{2A\alpha}{3\tau K_{Ic}} \left( (t^*)^{3/2} - (t^* - T)^{3/2} - (t^* - \tau)^{3/2} + (t^* - T - \tau)^{3/2} \right) = 1 \quad (1.14)$$

Если рассматривается случай с нулевой задержкой ( $t^* \leq T$ ), означающий, что разрушение происходит до того, как коэффициент интенсивности напряжения достигает своего максимума (см. рисунок 1.5), то второе и четвертое слагаемые формулы (1.14) исчезают (из-за умножения на функцию Хевисайда) и значение  $t_{min}^*$  может быть найдено численно из упрощенного уравнения. Следует отметить, что для случая, когда  $t^* < \tau$  (1.14), очевидно, дополнительно упрощается, предоставляя явную формулу для  $t_{min}^*$ . Значение  $t_{min}^*$  соответствует вертикальной линии в графике  $T(t^*)$  (рисунок 1.6).

Свойства стали 4340, использованные при анализе, перечислены в таблице 1.1. Значение инкубационного времени  $\tau = 7$  мкс обеспечивает наилучшее соответствие экспериментальных кривых теоретической пороговой кривой  $T(A)$  (рис. 1.7).

Свойство материала	Значение
Критический коэффициент интенсивности напряжений, $K_{Ic}$ $MPa\sqrt{m}$	47
Скорость продольных волн, $c_1$ , м/с	6000
Скорость поперечных волн, $c_2$ , м/с	3240
Инкубационное время, $\tau$ , с	$7e-6$

Таблица 1.1. Свойства стали 4340, использованные в расчетах.

Для исследования возможной задержки разрушения необходимо рассмотреть случай  $t^* > T$  и найти пороговую минимальную длительность импульса  $T_{min}$  для заданной фиксированной амплитуды  $A$ , которая соответствует максимальному времени разрушения  $t_{max}^*$  и, следовательно, максимальной задержке разрушения. Очевидно, что в точке  $t_{max}^*$  зависимость  $T(t^*)$  имеет минимум. Поскольку это пороговый случай, значение  $t = t_{max}^*$  можно найти как корень следующего уравнения, которое вытекает из (1.7):

$$\max_t \int_{t-\tau}^t K(t') dt' = \tau K_{Ic} \quad (1.15)$$

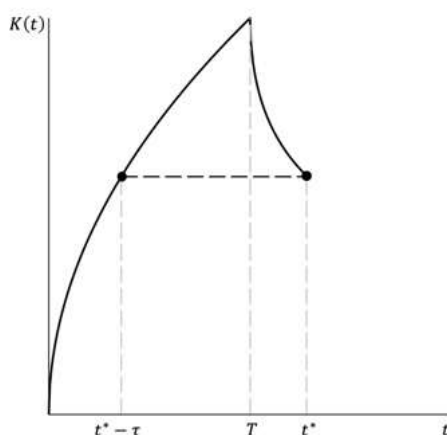


Рис. 1.5. Коэффициент интенсивности напряжений для импульсной нагрузки, приложенной к берегам трещины.

Продифференцировав по  $t$  интеграл в (1.15) можно вывести условие максимума. Таким образом,  $K(t_{max}^* - \tau) = K(t_{max}^*)$ . Если мы рассмотрим форму функции  $K(t)$  (см. рисунок 1.5), мы можем заключить, что  $t_{max}^* - \tau < T < t_{max}^*$  и что разрушение происходит после того, как функция  $K(t)$  прошла свой максимум и на стадии когда  $dK(t)/dt < 0$ . Таким образом, для вывода выражение для  $t_{max}^*$ , формулу (1.14) следует использовать без четвертого слагаемого, поскольку оно обращается в ноль из-за умножения на функцию Хевисайда:

$$\frac{2A\alpha}{3\tau K_{Ic}} \left( (t^*)^{3/2} - (t^* - T)^{3/2} - (t^* - \tau)^{3/2} \right) = 1 \quad (1.16)$$

Теперь выражение (1.16) может быть использовано для неявного вычисления минимума функции  $T(t^*)$ . Известная формула для минимума неявной функции позволяет получить следующее уравнение:

$$\sqrt{t} - \sqrt{t - T} = \sqrt{t - \tau} \quad (1.17).$$

Выражение (1.17) может быть преобразовано в квадратное уравнение относительно  $t^*$ , и один из его корней дает формулу для  $t_{max}^*$ :

$$t_{max}^* = \frac{1}{3} \left( T + \tau + 2\sqrt{T^2 + \tau T + \tau^2} \right) \quad (1.18)$$

На рисунке 1.6 показана зависимость  $T(t^*)$  для стали 4340 и амплитуды импульса нагрузки  $A = 500 \text{ MPa}$  (с добавлением двух дополнительных значений амплитуды). Также приведены расчетные значения для ключевых точек кривой. Зависимость выглядит почти идентично кривой  $T(t^*)$  для осциллятора (рисунок 1.2). Стоит отметить, что уменьшение амплитуды  $A$  приводит к уменьшению значения  $t_{max}^*$  и  $t_{max}^* \rightarrow t_{min}^*$ . Однако эти точки никогда не совпадают, поскольку нет минимальной амплитуды импульса, если для анализа используется приближение полубесконечной трещины: даже исчезающе малые амплитуды импульсов приведут к разрушению, если длительность



нагрузки достаточно велика, так как сигнал от нагрузки поступает из удаленных точек на берегах трещины. Этот факт также очевиден из формы функции  $K(t)$  (рисунок 1.5): коэффициент интенсивности напряжения увеличивается до тех пор, пока нагрузка не закончится, и, таким образом, длительность импульса  $T$  может быть выбрана достаточно большой, чтобы всегда можно было выполнить условие разрушения.

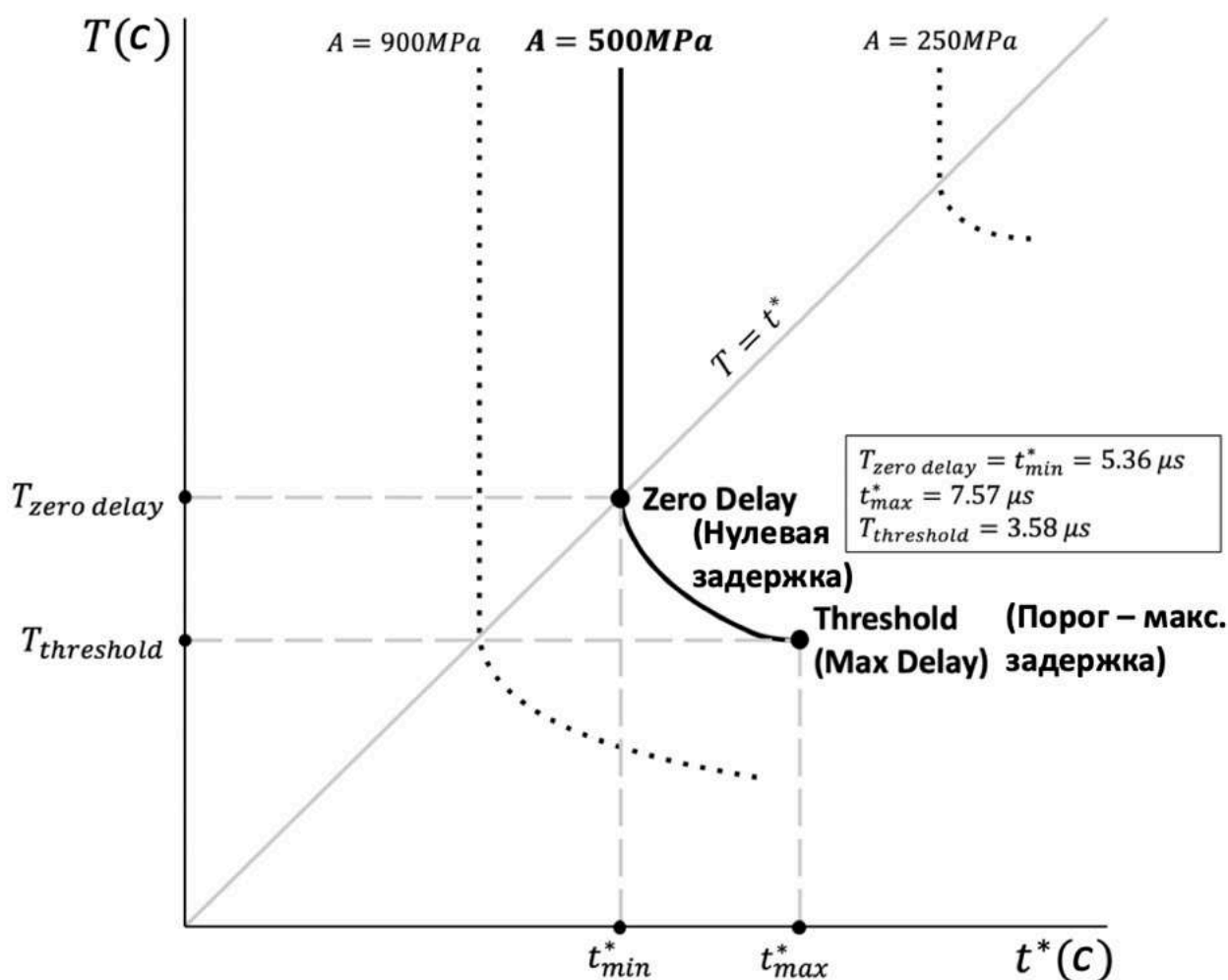


Рис. 1.6. Зависимость продолжительности нагрузки от времени разрушения для стали 4340 [5] и амплитуды импульса 500 Мпа.

Теперь значение  $t^*_{max}$  из (1.18) можно подставить в (1.14), чтобы получить уравнение, связывающее амплитуду импульса нагрузки  $A$  и длительность нагрузки  $T$  для случая максимальной задержки – порогового случая, когда для заданной амплитуды импульса мы получаем минимально допустимую

длительность импульса, вызывающую движение трещины. Другое соотношение  $T(A)$  может быть построено для разрушения с нулевой задержкой (случай перегрузки системы), подставляя  $t^* = T$  в формулу (1.14). Обе эти зависимости были построены с использованием инструментов неявного построения графиков (рисунок 1.7) для стали 4340, а пороговая кривая  $T(A)$  используется для оценки значения инкубационного времени  $\tau$  как параметра, обеспечивающего наилучшее соответствие экспериментальных данных. Аналогично модели осциллятора (см. рисунок 1.3а) возникновение трещины возможно для нагрузок, которые принадлежат к зоне, ограниченной построенными кривыми  $T(A)$  для случаев нулевой задержки и максимальной задержки. Однако для рассматриваемой задачи не существует минимально допустимой амплитуды импульса, и, таким образом, вертикальная ось является асимптотой для обеих кривых  $T(A)$ , в то время как модель осциллятора обеспечивает минимальную амплитуду импульса  $f_c/2$ . Этого следовало ожидать, поскольку мы рассматриваем задачу с полубесконечной нагруженной трещиной, и, если бы решалась задача для ограниченного образца (например, с использованием численных методов для получения функции  $K(t)$ ), можно было бы рассчитать минимальную амплитуду импульса нагрузки, приводящую к старту трещины. На рисунке 1.7 экспериментальные точки взяты из [5]. Экспериментальные данные лежат в диапазоне значений, которые не допускают заметной задержки разрушения, – исследуемые импульсы нагрузки слишком длинные, и образцы явно перегружены. Чтобы получить видимый эффект задержки разрушения, следует использовать гораздо более короткие импульсы с большей амплитудой (см. серую зону между двумя кривыми  $T(A)$  на рисунке 1.7).

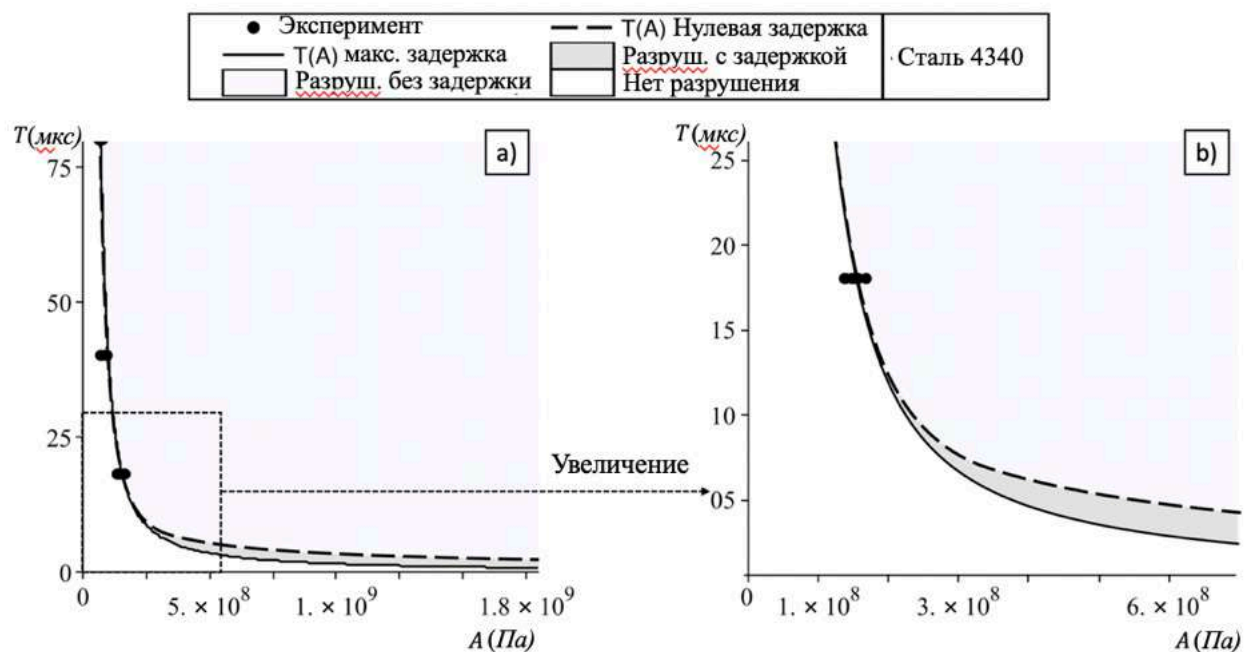


Рис. 1.7. Зависимости длительности импульса нагрузки от амплитуды. Область, описывающая импульсы, вызывающие разрушение, отмечена серым цветом.

Расчеты выполнены для экспериментов со сталью 4340, описанных в [5].

Наконец, можно рассчитать импульс нагрузки  $I(A) = A \cdot T(A)$  для двух изученных случаев (нулевая задержка и максимальная задержка). Эти две кривые  $I(A)$  показаны на рисунке 1.8а, и верхняя кривая имеет очевидный минимум, соответствующий оптимальному с точки зрения импульса нагружению, когда рассматривается разрушение с нулевой задержкой. Стоит отметить, что этот режим является наиболее простым для практической реализации, поскольку нагрузка с оптимальной амплитудой должна сохраняться до тех пор, пока не произойдет старт трещины. Этот минимум может быть определен численно для данного материала (сталь 4340):  $(A_{opt}^{crack}, I_{opt}^{crack}) = (2.93 \text{ МПа}, 30.48 \text{ Па} \cdot \text{с})$ .

#### Оценка параметров виртуального осциллятора для образцов стали 4340 из [5]

Как видно из построенных графиков, трещина, нагруженная короткими импульсами, демонстрирует поведение, очень похожее на поведение системы «масса на пружине» с точки зрения разрушения. Можно сказать, что процесс

разрушения (инициирование трещины в данном случае) обладает инерцией и не может происходить мгновенно. Таким образом, можно связать виртуальный осциллятор с конкретным материалом, содержащим трещину. В данном исследовании невозможно независимо рассчитать массу и жесткость виртуального осциллятора, поскольку для рассматриваемой постановки задачи о трещине отсутствует минимально допустимая амплитуда импульса нагрузки. Однако можно оценить собственную частоту виртуального осциллятора, используя выражения для минимума зависимости  $I(A)$  для случая с нулевой задержкой разрушения.

Как было показано в разделе 1.2, данный минимум для системы «масса на пружине» определяется по формуле  $(A_{opt}^{osc}, I_{opt}^{osc}) = (0.592f_c, 1.38f_c/\omega)$ . Таким образом, если мы предположим, что

$$\begin{aligned} (A_{opt}^{osc}, I_{opt}^{osc}) &= (0.592f_c, 1.38f_c/\omega) = \\ &= (2.93, 30.48) = (A_{opt}^{crack}, I_{opt}^{crack}) \end{aligned} \quad (1.19),$$

появляется возможность вычислить собственную частоту виртуального осциллятора  $\omega = 288.4 \text{ kHz}$ . Как было показано выше, для определения жесткости пружины и массы груза необходимо решать задачу об ограниченном образце, содержащем трещину. В таком случае появилась бы возможность определить минимальное значение амплитуды нагружающего импульса и сопоставить данное значение с минимальной амплитудой для осциллятора. Таким образом, было бы получено уравнение, дополняющее (1.19) и позволяющее определить массу и жесткость виртуального осциллятора.

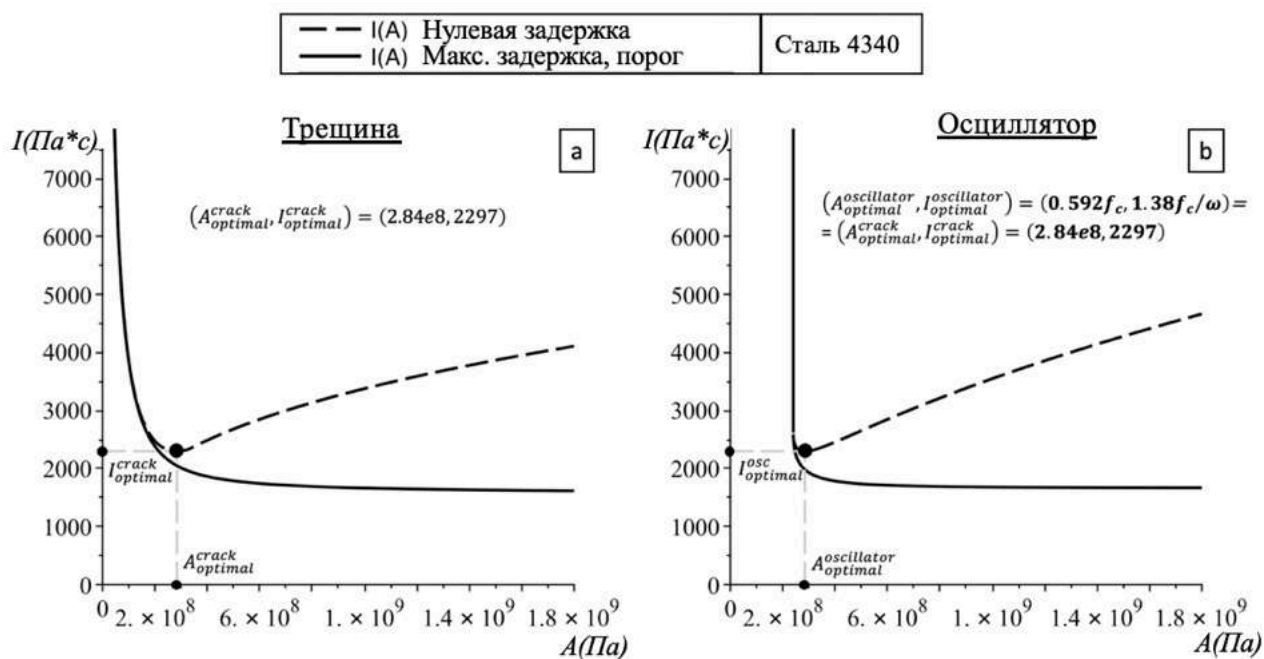


Рис. 1.8. Зависимости импульса нагрузки от амплитуды для трещины в стали 4340 [5] и для осциллятора. Указаны минимумы кривых нулевой задержки для обеих систем.

Следует отметить, что построенная аналогия использует тот факт, что для рассматриваемой задачи с трещиной падение локального поля напряжений начинается сразу после окончания импульса нагрузки ( $t = T$ , см. рисунок 1.5), и, таким образом, весь образец с трещиной ведет себя аналогично некоторому осциллятору, нагруженному прямоугольным силовым импульсом.

### Анализ экспериментов с поликарбонатом из работы [2]

В данном разделе будет полностью повторен анализ из предыдущего подраздела без вывода формул для экспериментов из [2]. В работе [2] образцы поликарбоната с круговыми трещинами нагружали прямоугольными импульсами давления длительностью 2,8 мкс. Авторов интересовали пороговые амплитуды для различных диаметров начальных трещин. Стоит отметить, что в этой конкретной работе авторы сообщают, что имела место задержка разрушения, однако они описывают этот эффект в несколько иных терминах, указывая, что разрушение происходит на стадии уменьшения функции  $K(t)$ .

Несмотря на то, что в [2] обсуждаются круговые трещины, вышеописанное приближение на основе полубесконечной трещины применимо, поскольку рассматриваемая длительность импульса мала, а авторы [2] сообщают о пороговой амплитуде импульса для относительно больших трещин. Свойства поликарбоната, использованные для расчетов, перечислены в таблице 1.2.

Свойство материала	Значение
Критический коэффициент интенсивности напряжений, $K_{Ic}$ МПа $\sqrt{м}$	3.08
Скорость продольных волн, $c_1$ , м/с	2264
Скорость поперечных волн, $c_2$ , м/с	1250
Инкубационное время, $\tau$ , с	5e-6

Таблица 1.2. Свойства стали поликарбоната, использованные в расчетах.

На рисунке 1.9 показаны зависимости  $A(T)$ , и  $A(T)$  для порогового случая (случай максимальной задержки разрушения) был использован для расчета значения инкубационного времени для исследуемого поликарбоната. В обсуждаемых экспериментах продолжительность нагрузки была достаточно короткой, чтобы можно было наблюдать задержку разрушения.

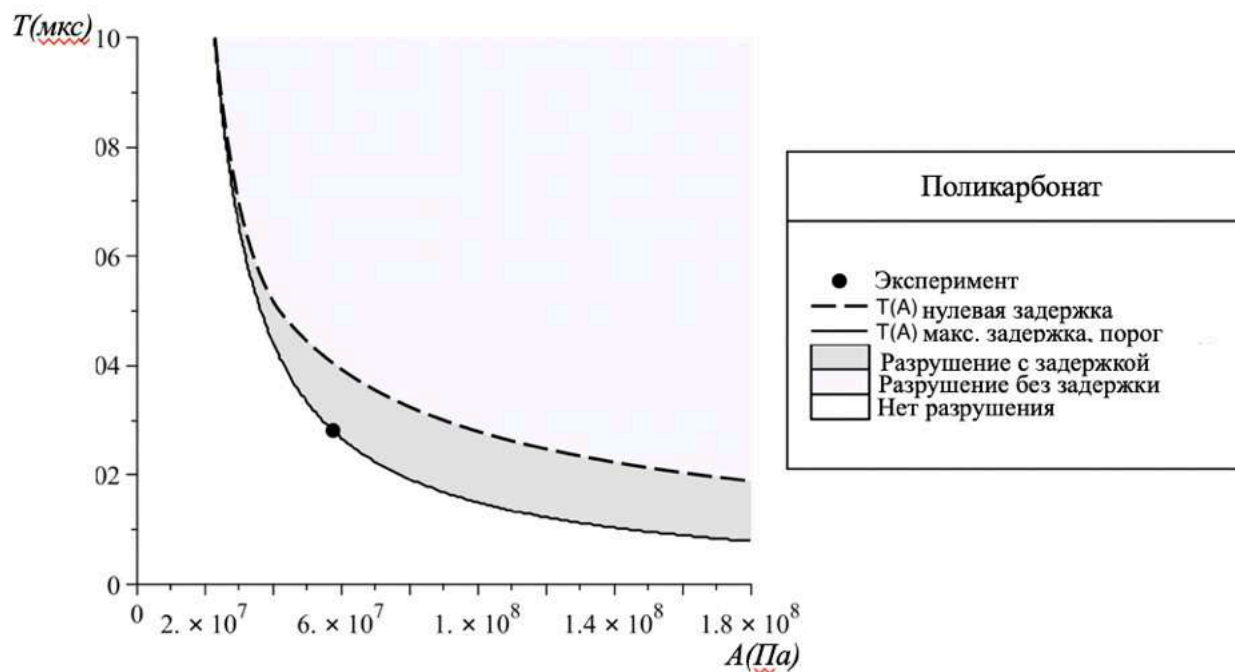


Рис. 1.9. Зависимости длительности нагружающего импульса от амплитуды импульса для образцов поликарбоната [2].

Полученные зависимости  $A(T)$  для поликарбоната могут быть использованы для оценки зависимости импульса нагрузки от амплитуды нагрузки  $I(A) = A \cdot T(A)$  как для сценариев нулевой задержки разрушения, так и для сценариев максимальной задержки разрушения. Эти зависимости показаны на рисунке 1.10. Опять же, кривая нулевой задержки  $I(A)$  имеет минимум, который обеспечивает оптимальную нагрузку с точки зрения требуемой минимизации импульса. Этот минимум может быть использован для определения собственной частоты соответствующего виртуального осциллятора:  $\omega = 403.8$  кГц.

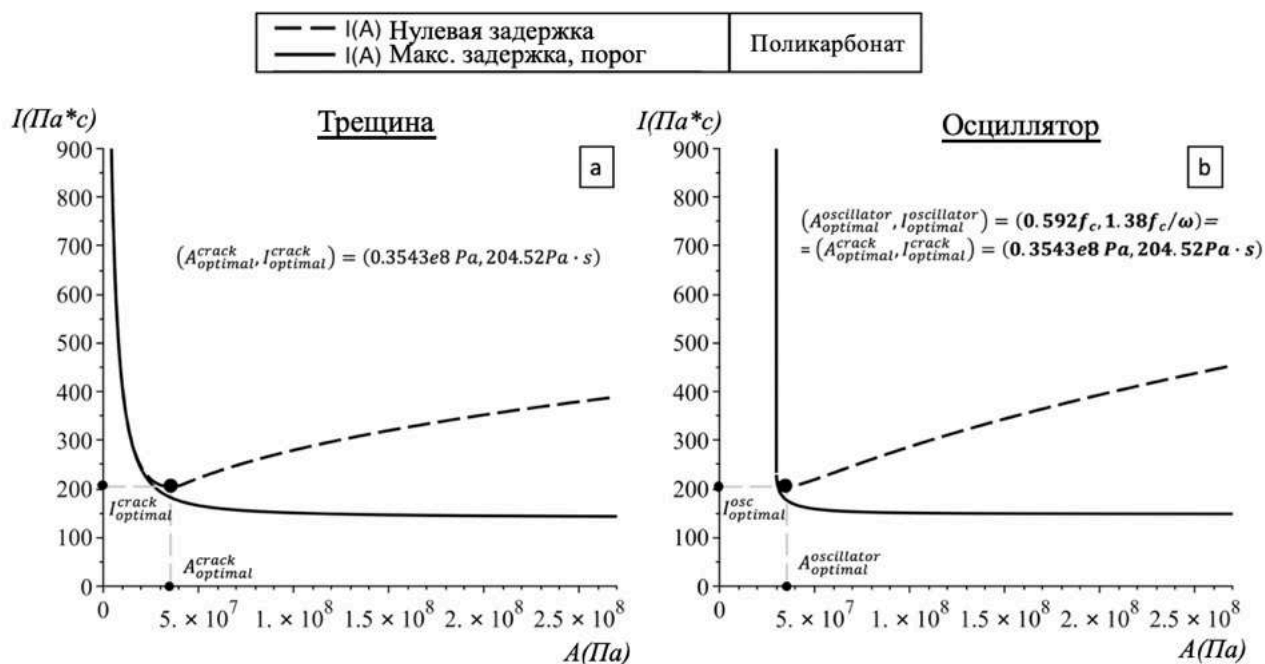


Рис. 1.10. Зависимости импульса нагрузки от амплитуды для трещины в образцах поликарбоната [2] и для калиброванного осциллятора. Указаны минимумы кривых для нулевой задержки для обеих задач.

## 1.4 Выводы к главе 1

Из проведенного исследования можно сделать следующие выводы. Во-первых, показано, что модель на основе инкубационного времени способна предсказать явление задержки разрушения в задаче о старте трещины. Данный критерий разрушения может быть применен на практике, где необходимо исследовать короткоимпульсные нагрузки (например, проектирование защитных систем с использованием подходов САПР). Это явление может иметь место, когда материал нагружается короткими импульсами и разрушение происходит после того, как локальные напряжения прошли свои пиковые значения. Широко распространенные модели на основе коэффициента интенсивности напряжений обычно не способны описать и предсказать этот эффект, но критерий на основе инкубационного времени вводит новый параметр материала, который учитывает подготовительные микроскопические процессы,



приводящие к макроскопическому разрушению. Для развития этих процессов требуется время, и, таким образом, макроскопическое разрушение может произойти после прохождения локального максимума напряжения. Инкубационное время представляет собой характерное время, связанное с этими процессами, и должно рассматриваться как свойство материала.

Также показано, что процесс старта трещины удивительно похож на разрушение линейного осциллятора, когда система загружена короткими импульсами. Это позволяет сделать вывод, что процесс разрушения может проявлять инерционные свойства, позволяющие приписать некоторый виртуальный осциллятор среде с трещиной. При этом можно определить собственную частоту данного осциллятора и, соответственно, приписать процессу разрушения некоторое характерное время.

В работе показано, что существует оптимальный (с точки зрения импульса нагрузки) режим нагружения, который приводит к разрушению. Пороговые импульсы (нижние кривые на рисунках 1.8, 1.10), обеспечивают минимальный импульс нагрузки. Таким образом, если разрушение благоприятно (например, при измельчении горных пород), наилучшей стратегией является приложение правильно рассчитанной короткой нагрузки, которая заканчивается до выхода системы из строя. Однако, даже если система нагружается до тех пор, пока она не выйдет из строя, существует оптимальный импульс, минимизирующий импульс нагрузки. Этот оптимальный импульс был найден для обеих рассматриваемых систем – линейного осциллятора и трещины, когда рассматривается случай перегрузки системы. Это позволило построить аналогию между системой «масса на пружине» и образцом с трещиной. Для рассматриваемой конкретной задачи невозможно однозначно рассчитать значения массы и жесткости соответствующего виртуального осциллятора, однако была определена его собственная частота. Данное ограничение может быть преодолено, если будет изучена более реалистичная задача с ограниченным образцом с трещиной.

Можно также сделать вывод, что для изучения динамического разрушения важно исследовать пороговые случаи, в которых проявляются наиболее важные временные эффекты, которые не вписываются в классические концепции прочности и трещиностойкости – концепции, которые основаны на локальном предельном напряжении и/или параметрах критического коэффициента интенсивности. В настоящей работе эти случаи описаны кривыми, соответствующими максимальной задержке разрушения. (нижние кривые на рисунках 1.3, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10). Такие нагрузки являются минимальными достаточными для разрушения и помогают выявить задержку разрушения – фундаментальный динамический эффект. Напротив, перегрузка системы (верхние кривые на рисунках 1.3, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10) скрывает эффекты (в данном конкретном случае задержку разрушения) от наблюдателя. Эти чрезмерные нагрузки гораздо легче реализовать экспериментально по сравнению с пороговыми нагрузками, которые, по-видимому, являются оптимальными для инициирования разрушения, по крайней мере, с точки зрения минимизации импульса нагрузки. Однако даже избыточные нагрузки, по-видимому, имеют оптимальные значения амплитуды и продолжительности. Вышеупомянутые результаты раскрывают фундаментальную особенность критерия на основе инкубационного времени: он способен корректно работать с пороговыми нагрузками. Это отличает данный критерий от классических квазистатических критериев, основанных на коэффициенте интенсивности напряжений, и их обобщений на динамические задачи.

Больше информации можно найти в [33,34,148].

## **Глава 2. Разрушение в системе «масса на пружине».**

### **Использование линейного осциллятора для прямого моделирования процессов динамического разрушения**

В данной главе рассматривается разрушение системы «масса на пружине» (линейного осциллятора) в следствие воздействия двух типов нагрузки: кратковременной импульсной нагрузки и линейно возрастающей нагрузки. В дополнение к результатам, полученным в главе 1 (исследован эффект задержки разрушения в системе «масса на пружине» при нагружении короткими импульсами силы) исследовано разрушение линейного осциллятора при воздействии линейно возрастающей нагрузки и, соответственно, показано, что эффект роста прочности системы при увеличении скорости нагружения может быть исследован на примере разрушения линейного осциллятора. Таким образом, инерция рассматриваемой системы позволяет выявить ключевые эффекты динамического разрушения, а именно задержку разрушения при нагружении короткими импульсами силы и возрастание прочности системы при увеличении скорости нагружения. Проведенные исследования наглядно продемонстрировали неприменимость стандартных моделей прочности сплошных сред при рассмотрении динамических нагрузок. Также в данном разделе приведены результаты по калибровке модели линейного осциллятора для описания экспериментов по старту трещин при динамическом нагружении, а также по откольному разрушению в стержнях. Модель демонстрирует хорошие результаты, несмотря на ее простоту и силу сделанных при моделировании предположений.

#### **2.1 Разрушение в системе «масса на пружине»**

В данном разделе будут рассмотрены задачи о разрушении в системе «масса на пружине» при нагружении короткими импульсами силы и линейно

возрастающей силы, решение которых позволяет исследовать эффекты задержки разрушения и эффект возрастания прочности системы при увеличении скорости нагружения.

### Нагрузка в виде прямоугольных импульсов

Повторяя некоторые из результатов первой главы приведем постановку задачи о разрушении в линейном осцилляторе, а также основные результаты, полученные для нагружающей силы в виде прямоугольных импульсов.

Рассмотрим следующую задачу о разрушении в линейном осцилляторе. Движение массы, закрепленной на пружине, описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + cx &= f(t) \\ x(0) = \dot{x}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{2.1},$$

где  $m$  – масса,  $c$  – жесткость пружины,  $f(t)$  – приложенная к массе сила. Рассматривается условие прочности системы на основе критического удлинения пружины:

$$x(t) \geq x_c \Leftrightarrow \text{разрушение} \tag{2.2}.$$

Условие (2.2) означает, что в статическом случае (если в (2.1) отсутствует инерционное слагаемое) разрушение пружины произойдет, если к системе приложена критическая сила  $f_c = cx_c$ .

Перемещение массы  $x(t)$  может быть определено при помощи интеграла Дюамеля:

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t f(s) \sin(\omega(t-s)) ds \tag{2.3},$$

где  $\omega = \sqrt{c/m}$  – собственная частота колебаний осциллятора. В случае относительно простых нагрузок формула (2.3) может быть использована для определения аналитических выражений для перемещения  $x(t)$ , что в свою очередь позволит исследовать режимы разрушения и параметры разрушающей нагрузки  $f(t)$ .

Приведем некоторые основные результаты из главы 1, полученные для случая разрушения осциллятора при воздействии прямоугольными импульсами. Так, зависимость длительности разрушающего прямоугольного импульса  $T$  от времени разрушения  $t^*$  и амплитуды импульса  $A$

$$T = -\frac{1}{\omega} \arccos \left( \frac{f_c}{A} + \cos(\omega t^*) \right) + t^* \quad (2.4)$$

позволяет показать наличие эффекта задержки разрушения, а также наличие минимальной амплитуды разрушающего импульса, которая равна половине критической статической силы  $f_c/2$ . Показано, что для случая нагружения системы прямоугольными импульсами, параметры разрушающих систему импульсов лежат в некоторой полосе значений на плоскости длительность – амплитуда ( $T - A$ ) в силу возможности разрушения с задержкой в том смысле, что разрушение имеет место после завершения нагружения (см. рисунок 1.3 в главе 1).

### Линейно возрастающая нагрузка

Множественные экспериментальные результаты свидетельствуют об увеличении прочности материала при увеличении скорости нагружения и/или скорости роста полей напряжений в материале – напряжения в момент разрушения могут существенно превышать показатели статической прочности материала. В данной секции будет показано, что данный эффект свойственен и системе «масса на пружине».

Рассмотрим случай, когда нагрузка в (2.1) растет с постоянной скоростью  $\alpha$ , и, таким образом,  $f(t) = \alpha t$ . Тогда решение системы (2.1) представляется в следующем виде согласно (2.3):

$$x(t) = \frac{\alpha}{c} \left( t - \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right), \omega = \sqrt{c/m} \quad (2.5).$$

Если обозначить момент разрушения за  $t^*$ , то сила, действующая на систему в момент разрушения равна  $f^* = \alpha t^*$  и трактуется как прочность системы. Перепишем условие разрушения (2.2) в двух формах:

$$\omega t^* - \sin(\omega t^*) = k; k = \frac{f_c \omega}{\alpha} \quad (2.6a)$$

$$\frac{f^*}{f_c} - 1 = \left( \frac{1}{k} \right) \sin(\omega t^*) = \left( \frac{1}{k} \right) \sin \left( \frac{\omega f^*}{\alpha} \right) \quad (2.6b)$$

Выражения (2.6ab) позволяют исследовать зависимость прочности системы  $f^*$  от скорости роста прилагаемой силы  $\alpha$ . Как обсуждалось выше,  $f_c$  — статическая критическая сила, являющаяся аналогом статического критического напряжения для хрупкого материала. Рассмотрим случай, когда значение  $\alpha$  велико и, соответственно,  $k \ll 1$ . В данном случае разрушение происходит в рамках динамического сценария: согласно (2.6a)  $\omega t^* \approx \sin(\omega t^*)$ , и, таким образом, из (2.6b) получаем, что  $\frac{f^*}{f_c} - 1 \gg 1$ . Данное выражение верно, если  $\frac{f^*}{f_c} \gg 1$ , что, в свою очередь, означает, что разрушение происходит при значениях действующей силы, которые значительно превышают статическую прочность системы. В разрушении твердых тел данное явление известно как динамическая ветвь кривой прочности. Если рассмотреть противоположный случай  $k \gg 1$ , из (2.6b) видно, что  $\frac{f^*}{f_c} - 1 \approx 0$ , в силу ограниченности  $\sin(\omega t^*)$ . Таким образом, в данном случае разрушение происходит в рамках статического режима — прочность системы равна статической прочности  $f^* \approx f_c$ , и на прочностной кривой присутствует так называемая статическая ветвь.

Выражение (2.6b) может быть использовано для построения кривой прочности с использованием неявных методов построения графиков. Рассмотрим две системы со следующими параметрами:  $\omega_i$  и  $f_{ci}, i = 1, 2$ . Эти параметры могут быть выбраны таким образом, чтобы система 1 была прочнее системы 2 при медленных или статических нагрузках ( $f_{c1} > f_{c2}$ ), но при более высоких скоростях нагружения ситуация меняется на противоположную, что означает, что кривые зависимости прочности пересекаются, и система 2 становится прочнее системы 1. На рисунке 2.1 показан такой случай для специально подобранных параметров осцилляторов. Это хорошо известное явление, наблюдаемое в экспериментах с реальными конструкционными материалами [152]. Пересечение кривых зависимости прочности от скорости происходит из-за того, что система 2 начинает работать в динамическом режиме раньше, чем система 1: определенная скорость нагрузки соответствует статической ветви кривой для системы 1, в то время как для второй системы активируется динамический режим. Как видно из графиков, существует четкий переходный режим с колебаниями, которые возникают из-за поведения функции при определенных значениях скорости нагружения. При низких скоростях нагружения («статическая ветвь») масса следует за нагрузкой практически без колебаний, образуя статическую ветвь кривой  $f^*(\alpha)$ . По мере увеличения скорости нагружения колебания становятся более выраженными, и кривая прочности переходит в промежуточную колебательную фазу. При самых высоких значениях  $\alpha$  условие разрушения (2.2) выполняется в пределах первого колебания функции  $x(t)$ , формирующей динамическую ветвь кривой прочности  $f^*(\alpha)$ .

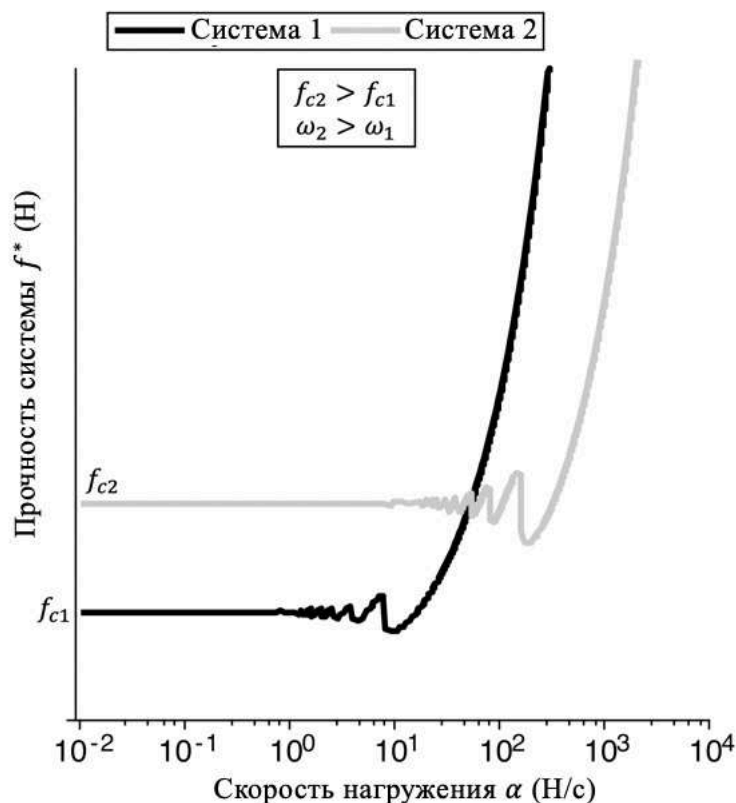


Рис. 2.1. Пересечение прочностных кривых для осцилляторов с разными параметрами

## 2.2 Эксперименты по старту трещин

Как показано выше, модель линейного осциллятора может выявить некоторые фундаментальные эффекты динамического разрушения. В данном разделе будут определены параметры осциллятора (масса  $m$ , жесткость пружины  $s$  и критическое удлинение пружины  $x_c$ ) для моделирования некоторых известных экспериментальных результатов по динамическому разрушению. При этом параметры модели будут вычислены через характеристики материала

Будут рассмотрены задачи о динамической инициации роста трещин при импульсном воздействии. Также будет рассмотрена задача об отколе в стержне.



### Старт роста трещины при динамическом нагружении

Концепция применения модели осциллятора к задачам о старте трещин заключается в следующем: трещина начинает распространяться, если в некотором виртуальном осцилляторе выполняется условие разрушения на основе (критическое удлинение пружины). Виртуальный осциллятор устанавливается вблизи вершины трещины, и его параметры рассчитываются на основе предполагаемого удлинения трещины  $\Delta l$  и параметров материала. Нагрузка, действующая на осциллятор, рассчитывается по аналитическим формулам для поля напряжений вблизи вершины трещины для соответствующей задачи о материале с трещиной.

Рассмотрим полубесконечную трещину  $x \leq 0, y = 0$ , которая нагружена ступенчатой функцией  $AH(t)$  ( $H(t)$  – функция Хэвисайда,  $A$  – амплитуда). Предполагается, что нагрузка приложена к берегам трещины, и задача ставится и решается в двумерной постановке (плоская деформация). Полное выражение для результирующего напряжения, действующего на траекторию трещины, приведено в нескольких работах (например, см. [63,153,154]), однако эта формула, хотя и является точной, сложна для дальнейших преобразований и расчетов. Таким образом, в представленной работе используется асимптотическое выражение для напряжений с двумя слагаемыми, которое упростило расчеты сохранив приемлемую точность. Процедура вывода асимптотики приведена в [154], здесь же используется конечный результат:

$$\sigma_{yy}^{AH(t)_{faces}}(x, t) = A \cdot \left( \frac{M\sqrt{t}}{\sqrt{x}} - \frac{N\sqrt{x}}{\sqrt{t}} - 1 \right) \cdot H(x - c_1 t)$$

$$M = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{c_1}\gamma\sqrt{1-\gamma^2}}{\pi}; N = \frac{\sqrt{2}\gamma\sqrt{1-\gamma^2}(2R_1\gamma_R + \gamma_R - 2)}{\pi\gamma_R\sqrt{c_1}} \quad (2.7).$$

$$R_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-1/\gamma}^{-1} \arctan \left( \frac{4\gamma^3 s^2 \sqrt{s^2 - 1} \cdot \sqrt{1 - \gamma^2 s^2}}{(1 - 2\gamma^2 s^2)^2} \right) ds$$

$$\gamma = \frac{c_2}{c_1}; \gamma_R = \frac{c_R}{c_1}$$

В (2.7)  $c_1$  и  $c_2$  обозначают скорости продольной и поперечной волн,  $c_R$  – скорость волн Рэлея.

Формула (2.7) используется для вывода функции Грина – решения задачи, соответствующего нагружению берегов трещины при помощи функции Дирака  $\delta(t)$ :

$$\sigma_{yy}^{\delta(t)\text{-}faces}(x, t) = G(x, t) = \frac{\partial \sigma_{yy}^H(x, t)}{\partial t} \cdot H(x - c_1 t) \quad (2.8),$$

которая в свою очередь может быть применена для определения напряжений на продолжении трещины  $\sigma_{yy}^{P(t)\text{-}faces}(x, t)$  для произвольной нагрузки  $P(t)$ , приложенной к берегам трещины:

$$\sigma_{yy}^{P(t)\text{-}faces}(x, t) = \int_0^t P(t)_{faces} \cdot G(x, t - s) ds \quad (2.9).$$

Формула (2.9) будет использована для определения растягивающих напряжений, действующих на продолжении трещины в рассматриваемых в работе задачах.

Модель осциллятора

$$m\ddot{U} + cU = f(t) \quad (2.10)$$

$$U(0) = \dot{U}(0) = 0$$

$$U \geq U_c \Leftrightarrow \text{разрушение}$$

калибруется через последовательное определение параметров  $m, c, U_c$  и нагрузки  $f(t)$  (рисунок 2.2). Для каждого из параметров приведена процедура вычисления и соответствующие предположения.

1) Сперва определяется масса  $m$ . Две квадратные области со стороной  $\Delta l$  виртуально вырезаются вблизи вершины трещины (см. рисунок 2.2а). Данные области формируют массу ( $\rho$  – плотность исследуемого образца)

$$m = \rho \Delta l^2 \quad (2.11).$$

Предполагается, что области с массой  $m$  соединены пружиной с жесткостью  $c$ . Удлинение пружины принимается равным  $2U(t)$ . Параметр  $\Delta l$  рассматривается как ключевой калибровочный параметр – предполагается, что выражения для параметров осциллятора и соответствующей нагрузки содержат только  $\Delta l$  и параметры материала. Стоит отметить, что увеличение  $\Delta l$  естественным образом влечет увеличение массы, делая эффекты, обусловленные инерцией системы, более заметными.

2) *Нагрузка.* Сила  $f(t)$ , прикладываемая к массе, вычисляется через интегрирование напряжений  $\sigma_{yy}^{P(t)-faces}(x, t)$  (2.9), действующих на площадку с размером  $\Delta l$ , расположенную на продолжении трещины.

$$f(t) = \int_0^{\Delta l} \sigma_{yy}^{P(t)-faces}(x', t) dx' \quad (2.12).$$

3) *Жесткость пружины* и критическое растяжение пружины  $U_c$ . Для вычисления данных параметров используются следующие предположения: модель на основе линейного осциллятора должна работать идентично критерию разрушения Ирвина ( $K_I \geq K_{Ic}$ ). Нагрузка, являющаяся критической согласно критерию Ирвина, должна быть критической и согласно модели линейного осциллятора. Таким образом, предполагается, что статическая критическая для осциллятора сила  $f_c$  связана с критическим коэффициентом интенсивности напряжений. Данную связь можно установить приняв, что в статической постановке справедлива корневая асимптотика для напряжений вблизи трещины. Тогда сила может быть получена интегрированием напряжения:

$$f_c = \int_0^{\Delta l} \frac{K_{Ic}}{\sqrt{2\pi x'}} dx' \quad (2.13).$$

Также предполагается, что при продвижении трещины на  $\Delta l$  коэффициент интенсивности напряжений измениться не сильно и его можно положить равным  $K_{Ic}$ . Соответствующее данному КИН раскрытие трещины, вычисленное на расстоянии  $\Delta l$  от вершины трещины, полагается равным  $2U_c$  – удвоенному критическому удлинению пружины (см. рисунок 2.2b). Раскрытие трещины, в свою очередь, может быть определено через формулы для перемещений для случая корневой асимптотики. Таким образом, для критического удлинения пружины  $U_c$  справедливо равенство:

$$U_c = \frac{K_{Ic}(1+k)\sqrt{\Delta l}}{2G\sqrt{2\pi}} \quad (2.14).$$

Зная критическую для осциллятора силу и критическое удлинение пружины легко определить жёсткость пружины  $c$ :

$$c = \frac{af_c}{U_c} \quad (2.15).$$

Отметим, что (2.15) содержит дополнительный параметр  $a$ . В идеальном случае в данном параметре отсутствует надобность, и можно считать, что  $a = 1$ , и модель работает с приемлемой точностью с использованием только одного параметра – удлинения трещины  $\Delta l$ . Однако предположения, используемые для определения параметров осциллятора, следует считать достаточно сильными. Действительно, при продвижении трещины на  $\Delta l$  КИН неизбежно снизится, также вычисление напряжений по формулам с корневой асимптотикой вдали от вершины трещины неизбежно приводит к ошибкам. С другой стороны, для одной из рассматриваемых задач удалось провести моделирование с  $a = 1$ , для другой же понадобилось незначительное снижение жесткости пружины – работа модели была согласована с экспериментом при  $a = 0,85$ , то есть, понадобилось уменьшить жесткость пружины на 15%.

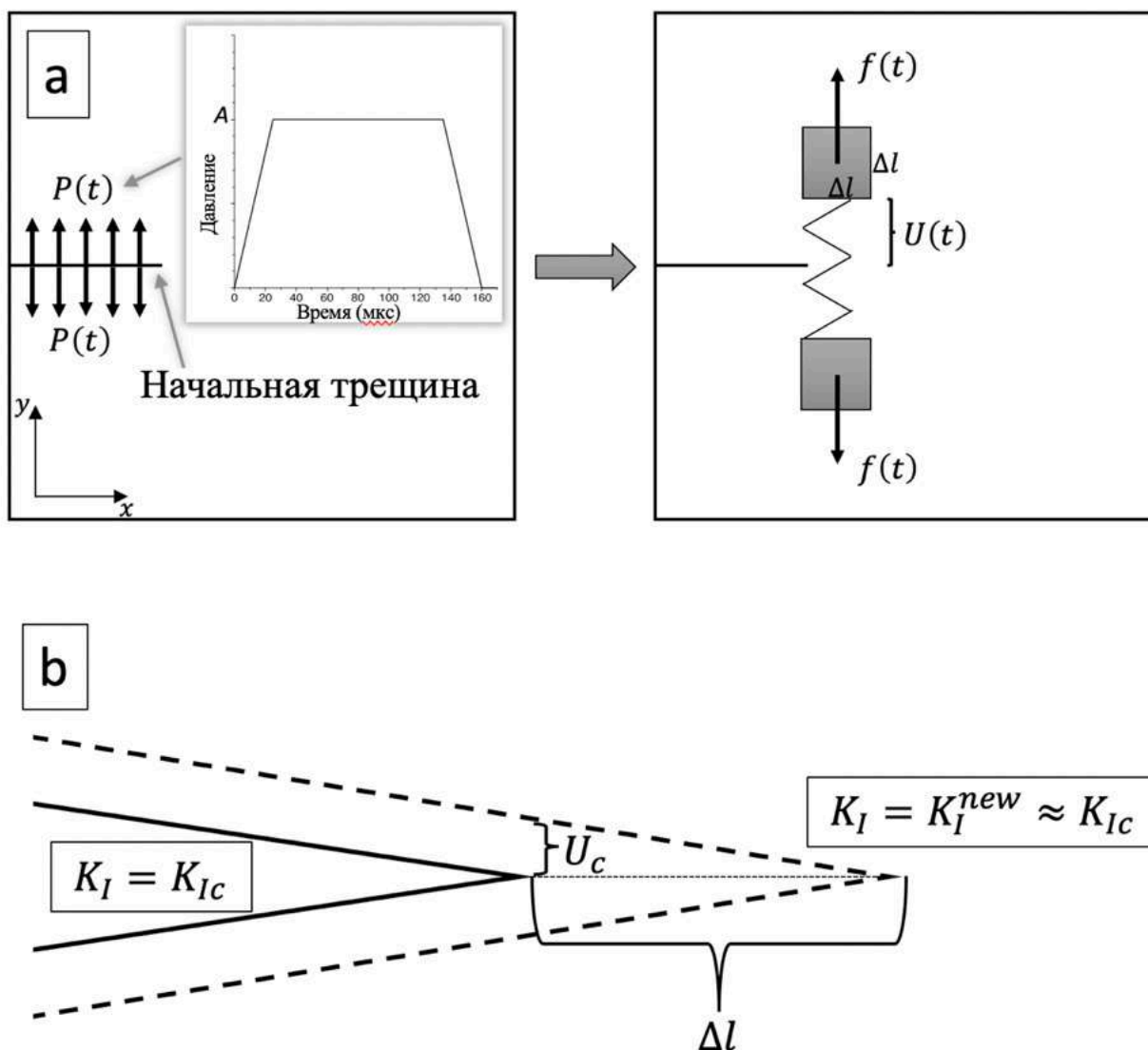


Рис. 2.2. Схема модели линейного осциллятора. Нагрузка  $P(t)$  из работы [4].  
Также указана схема определения критического удлинения пружины  $U_c$ .

Эксперименты с высокой скоростью нагружения, выполненные Ravi-Chandar и Knauss [1]

В известной работе [1] описаны следующие эксперименты: образцы Гомалита-100 с начальной трещиной нагружаются давлением, приложенным к берегам трещины. Давление растет в течение 25 мкс до некоторого контролируемого значения, что позволяет провести эксперимент в условиях разных скоростей нагружения, лежащих в диапазоне  $\left[2.1e4 \frac{MPa}{sec}, 6.2e5 \frac{MPa}{sec}\right]$ . В результате приложенной нагрузки трещина продвигается, и фиксируется время

разрушения – момент старта трещины  $t^*$ . Соответствующее стартовое значение коэффициента интенсивности напряжений (КИН)  $K_{ID}$  фиксируется при помощи метода каустик, что позволяет построить зависимость  $K_{ID}(t^*)$ . Согласно проведенным экспериментам для относительно медленных нагрузок значение  $K_{ID}$  практически равно статическому критическому КИН  $K_{Ic}$ , однако для высоких амплитуд нагружения и, соответственно, высоких скоростей нагружения время разрушения мало, а значение  $K_{ID}$  превышает  $K_{Ic}$ . Рассматривались образцы достаточно большие, чтобы исключить влияние границ на процесс старта трещины.

При моделировании описанных в [1] экспериментов использовалась следующая функция для описания нагрузки, приложенной к берегам трещины:

$$P(t)_{faces} = \begin{cases} \frac{A}{T}t, & t < T \\ A, & t \geq T \end{cases} \quad (2.16).$$

В (2.16)  $T$  – время роста давления,  $A$  обозначает амплитуду нагрузки. В [1] значение времени роста давления было зафиксировано  $T = 25\mu s$ , и, таким образом, изменение амплитуды  $A$  позволяло варьировать скорость нагружения в указанном выше диапазоне. Подстановка выражения (2.16) в формулу (2.9) позволяет получить формулу для напряжений, действующих на продолжении трещины:

$$\sigma_{yy}^{[4]}(x, t, A) = \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{c_1} \\ \frac{A(2M\sqrt{x}(c_1t)^{3/2} - 6Nx\sqrt{x}\sqrt{t}c_1^{3/2} + 3Nxc_1^2t - 3Mxc_1t + 3Nx^2c_1 + Mx^2)}{3c_1^{3/2}xT}, & \frac{x}{c_1} \leq t \leq \frac{x}{c_1} + T \\ \frac{A(2\sqrt{x}(c_1)^{3/2}((Mt^{3/2} - 3Nx\sqrt{t})\sqrt{t-T} + (t-T)(MT - Mt + 4Nx)) - 3xT\sqrt{t-T}(M - Nc_1))}{3c_1^{3/2}Tx\sqrt{t-T}}, & \frac{x}{c_1} + T < t \end{cases} \quad (2.17),$$

которая затем используется для вычисления силы, действующей на массу осциллятора, согласно формуле (2.12):

$$f(t, A) = \int_0^{\Delta l} \sigma_{yy}^{[1]}(x, t, A)(x', t) dx' \quad (2.18).$$

Использованные для вычислений параметры Гомалита-100 приведены в таблице 2.1.

Название параметра и единицы измерения	Значение
Модуль Юнга, $E$ (Па)	3900e6
Коэффициент Пуассона, $\nu$	0.35
Плотность, $\rho$ (кг/м <sup>3</sup> )	1230
Скорость продольных волн, $c_1$ (м/с)	2057
Скорость поперечных волн, $c_2$ (м/с)	1176
Скорость волн Рэлея, $c_R$ (м/с)	1081
Трещиностойкость, $K_{Ic}$ (МПа $\sqrt{м}$ )	0.48
<b>Длина зоны, <math>\Delta l</math> (м)</b>	<b>0.00463</b>
Масса, $m$ (кг)	0.2636
Жесткость пружины, $c$ (Н/м)	2.2222e9 или 1.8888e9 ( $\alpha = 0.85$ в (2.15))
Предельная деформация пружины, $U_c$ , м	0.1172e-4

Таблица 2.1. Механические свойства Гомалита-100, использованные для калибровки модели, а также полученные значения параметров осциллятора.

Модель осциллятора с полученными параметрами была использована для построения кривой  $K_{ID}(t^*)$ . Для каждого значения амплитуды нагрузки  $A$  дифференциальное уравнение (2.10) решалось численно, полученное решение использовалось для численного определения времени разрушения  $t^*$  из уравнения  $U(t^*) = U_c$ . Полученное значение  $t^*$  затем подставлялось в выражение для КИН [80] для рассматриваемой нагрузки

$$K_I(t) = \frac{2A\Phi(t^{3/2}H(t)-(t-T)^{3/2}H(t-T))}{3T}, \quad \Phi = \frac{4c_2\sqrt{c_1^2-c_2^2}}{c_1\sqrt{\pi c_1}} \quad (2.19)$$

и, таким образом, вычислялось значение  $K_{ID}$  для данного  $t^*$ .

Сначала при помощи взвешенного метода наименьших квадратов было определено значение  $\Delta l$ , которое бы соответствовало наилучшему приближению экспериментальной зависимости  $K_{ID}(t^*)$  с помощью модели осциллятора. Вычисленное значение 4.63 мм практически совпадает с толщиной образцов (4.8 мм), исследованных в [1]. Результаты моделирования для стандартной жесткости пружины ( $a = 1$  в формуле (2.15), в модели отсутствуют дополнительные параметры кроме  $\Delta l$ ) приведены на рисунке 2.3а. Динамическая ветвь зависимости  $K_{ID}(t^*)$ , описывающее разрушение для высоких скоростей нагружения, достаточно точно описывает экспериментальные результаты, однако, как видно из графика, статическая часть кривой лежит выше экспериментальных точек. С другой стороны, стоит отметить, что модель качественно описывает наблюдаемый экспериментально феномен возрастания прочности материала при увеличении скорости нагружения – значения  $K_{ID}$ , определенные для высоких скоростей нагружения и соответствующие малым временам разрушения, значительно превышают статическую трещиностойкость  $K_{IC}$ . Для лучшего описания экспериментальных результатов при более медленном нагружении жесткость пружины осциллятора была снижена на 15% при помощи поправочного коэффициента  $\alpha = 0.85$  в формуле (2.15). Зависимость, построенная с использованием сниженной жесткости пружины приведена на рисунке 2.3б. На рисунке 2.3 каждая точка, полученная при помощи модели, соответствует определенной амплитуде нагружения и, соответственно, определенной скорости нагружения.



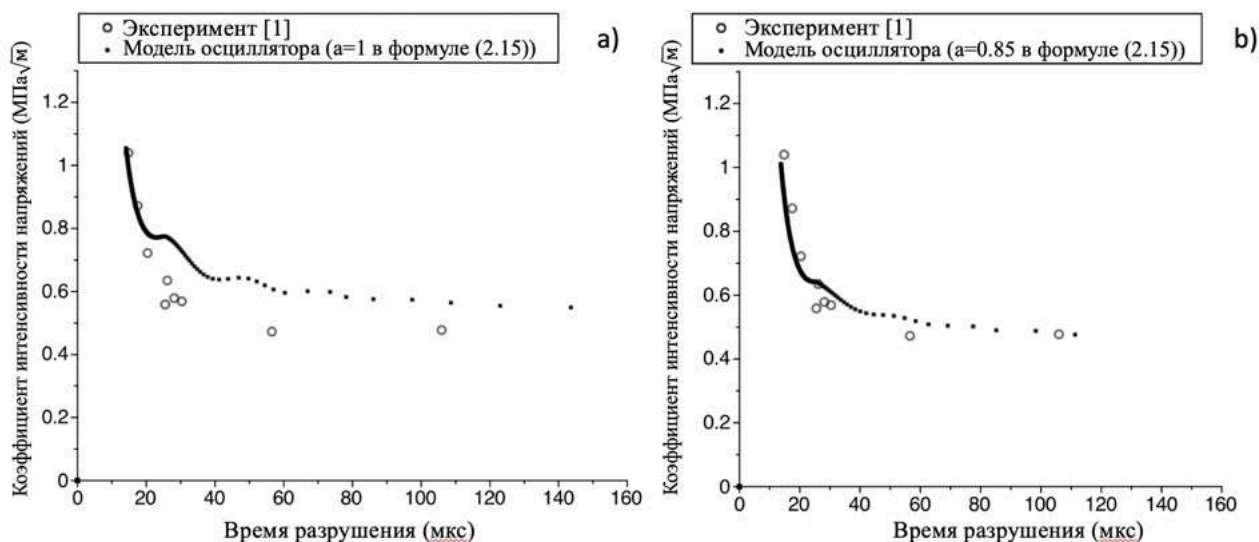


Рис. 2.3. Зависимость стартового КИН от времени разрушения: экспериментальные точки [1] и результаты моделирования с (а) стандартной жесткостью и со сниженной жесткостью осциллятора (b).

### Нагружение короткими импульсами и задержка разрушения

В данной части работы рассмотрены эксперименты по старту трещин в образцах из ПММА (полиметилметакрилат) в результате приложения к берегам трещины импульсной нагрузки. Детали эксперимента можно найти в работе [4]. Согласно работе [4] давление, действующее на берега трещины, хорошо описывается следующей формулой (см. рисунок 2.4)

$$P(t)_{faces}^{[4]} = P_0 \exp\left(-\frac{2t}{T_1}\right) \sin^2\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \quad (2.20),$$

в которой  $T \sim 5.5$  мкс, а  $T_1 \sim 4$  мкс. Для данных временных характеристик нагружения  $T$  и  $T_1$  нагрузка  $P(t)_{faces}^{[4]}$  достигает своего максимума  $P_m$  в момент времени  $t_m^{load} = 1.186$  мкс:

$$t_m = \frac{T}{2\pi} \arctan\left(\frac{2\pi T_1}{T}\right) \quad (2.21).$$

$$P_m = P(t_m)_{faces}^{[4]}$$

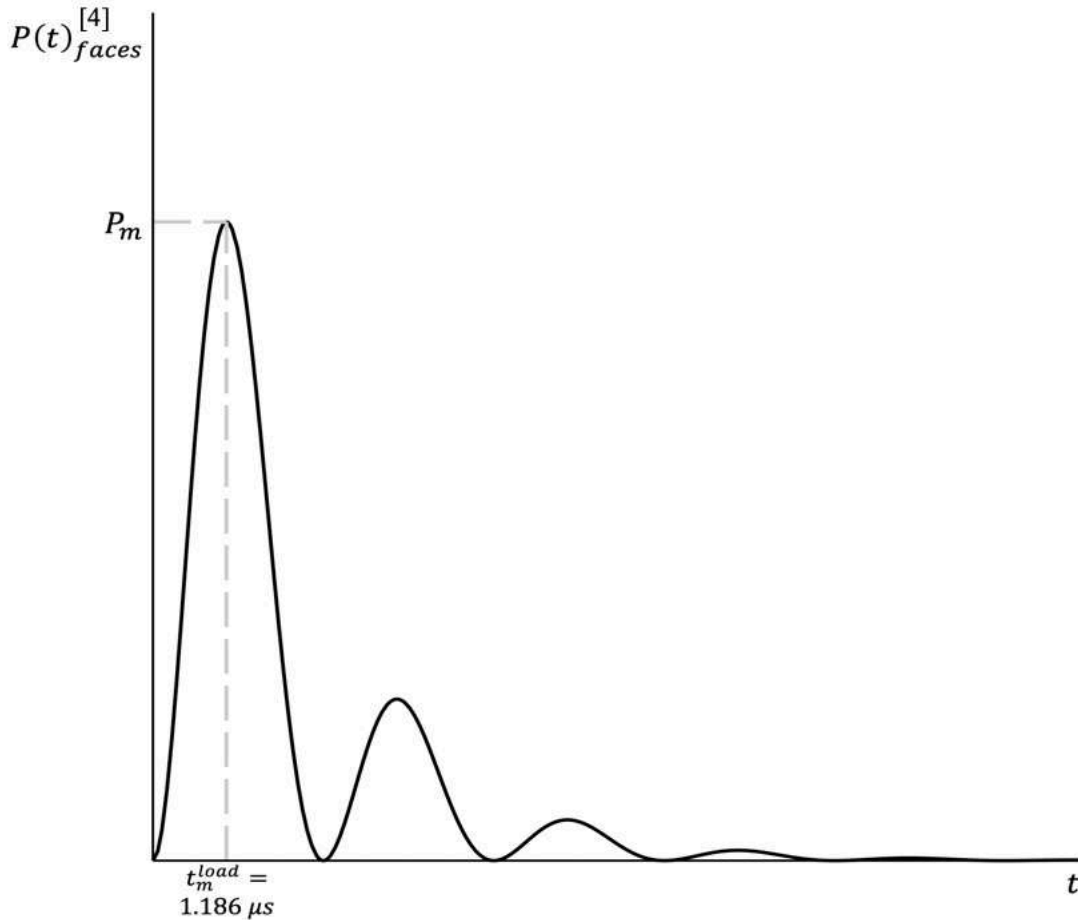


Рис. 2.4. Давление, прикладываемое к берегам трещины в работе [4].

Временные характеристики нагрузки:  $T = 5.5$  мкс,  $T_1 = 4$  мкс.

Соответствующая зависимость коэффициента интенсивности напряжений от времени может быть определена с использованием фундаментального решения  $K^\delta(t) = \alpha/2\sqrt{t}$ ,  $\alpha = 4c_2\sqrt{c_1^2 - c_2^2}/c_1\sqrt{\pi c_1}$ , полученного для случая  $P(t) = \delta(t)$ :

$$K(t) = \frac{\alpha}{2} \int_0^t \sqrt{s} P(t-s)_{faces}^{[4]} ds \quad (2.22).$$

Согласно вычислениям, проведенным по формуле (2.22), КИН достигает максимума в момент времени  $t_m^K = 1.675$  мкс. Таким образом, в экспериментах в работе [4] старт трещины происходит после того, как локальное поле напряжений (характеризуемое зависимостью КИН от времени (2.22)) и нагрузка

проходят свои максимальные значения, и, таким образом, наблюдается задержка разрушения.

В данной части модель на основе осциллятора применяется так же, как в предыдущей части, посвященной старту трещины: квадратная зона с размером  $\Delta l$  вырезается вблизи вершины трещины формируя массу согласно формуле (2.11). Остальные параметры осциллятора, а также действующая на массу сила определяются по формулам (2.11)-(2.15). Отметим, что в данном случае нагрузка (2.20) имеет гораздо более сложный вид и для напряжений, действующих на продолжении трещины, вывести аналитическое выражение затруднительно, если не невозможно.

Для рассматриваемой задачи параметр размера зоны  $\Delta l$  был выбран равным 9.7 мм, что с одной стороны позволяет достаточно точно описать экспериментальные результаты, а с другой практически совпадает с толщиной испытанных в [4] образцов – 10 мм. В экспериментах максимальное значение нагрузки  $P_m$  варьировалось в диапазоне 140-320 Мпа и для каждого значения  $P_m$  определялось время разрушения.

Модель разрушения на основе линейного осциллятора была использована для изучения двух режимов разрушения системы:

1) Первый режим соответствует нагружению, описанному в работе [4]: амплитуда нагрузки  $P_m$  варьируется в диапазоне 72-320 Мпа, временные же характеристики нагрузки имеют фиксированные значения  $T = 5.5$  мкс и  $T_1 = 4$  мкс. Отметим, что исследованный при помощи модели диапазон включает амплитуд нагрузки включает в себя указанный в эксперименте диапазон значений  $P_m$ . Значение  $P_m = 72$  Мпа является пороговым для временных параметров  $T = 5.5$  мкс и  $T_1 = 4$  мкс: если амплитуда ниже данного значения, то согласно модели разрушения не будет.

2) Во втором режиме длительность нагружения растягивается в то время, как амплитуда сохраняется пороговой. Значения  $T$  и  $T_1$  пропорционально увеличиваются ( $T_1 = T/1.375$ ) и для каждого нового значения  $T$  определяется пороговая амплитуда – минимально необходимая амплитуда для срабатывания критерия разрушения. На рисунке 2.5 приведена схема, поясняющая случаи порогового разрушения и разрушения с перегрузкой. При увеличении длительности нагружения  $T \rightarrow \infty$  пороговая нагрузка снижается к некоторому статическому значению  $P_m^{static}$  – критическому давлению, приложение которого к берегам трещины, приводит к срабатыванию разрушения согласно критерию Ирвина  $K_I = K_{Ic}$ .

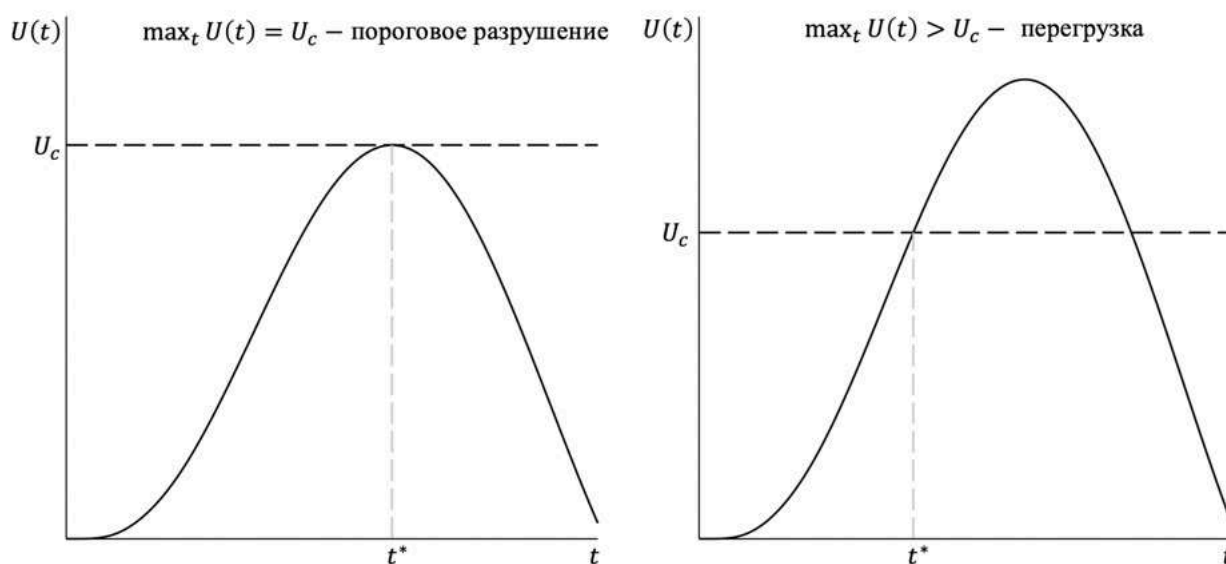


Рис. 2.5. Пороговое разрушение (слева) и разрушение с перегрузкой (справа).

Результаты моделирования в рамках первого режима нагружения приведены на рисунке 2.6а. Отметим, что точки, соответствующие низким временам разрушения (и, соответственно, высоким амплитудам нагрузки) хорошо описываются моделью осциллятора, однако наблюдаются расхождения для значений  $P_m$ , которые близки к нижней границе рассматриваемого диапазона. С другой стороны, модель осциллятора способна описать эффект задержки разрушения: разрушение имеет место после того, как сила, приложенная к массе и поле напряжений (выраженное через КИН  $K(t)$ ) прошли

свои максимальные значения. Нормированные функции  $K(t)$  и  $f(t)$  для длительности  $T = 5.5$  мкс показаны на рисунке 7б с точками, в которых достигается максимум данных функций. Свойства материала и параметры модели приведены в таблице 2.2.

<b>Название параметра и единицы измерения</b>	<b>Значение</b>
Модуль Юнга, $E$ (Па)	3300e6
Коэффициент Пуассона, $\nu$	0.35
Плотность, $\rho$ (кг/м <sup>3</sup> )	1230
Скорость продольных волн, $c_1$ (м/с)	2057
Скорость поперечных волн, $c_2$ (м/с)	1176
Скорость волн Рэлея, $c_R$ (м/с)	967
Трещиностойкость, $K_{Ic}$ (МПа $\sqrt{м}$ )	1.47
<b>Длина зоны, <math>\Delta l</math> (м)</b>	<b>0.0097</b>
Масса, $m$ (кг)	0.1157
Жесткость пружины, $c$ (Н/м)	1.8803e9
Предельная деформация пружины, $U_c$ , м	0.6143e-4

Таблица 2.2. Свойства ПММА, использованные при моделировании и параметры модели осциллятора.

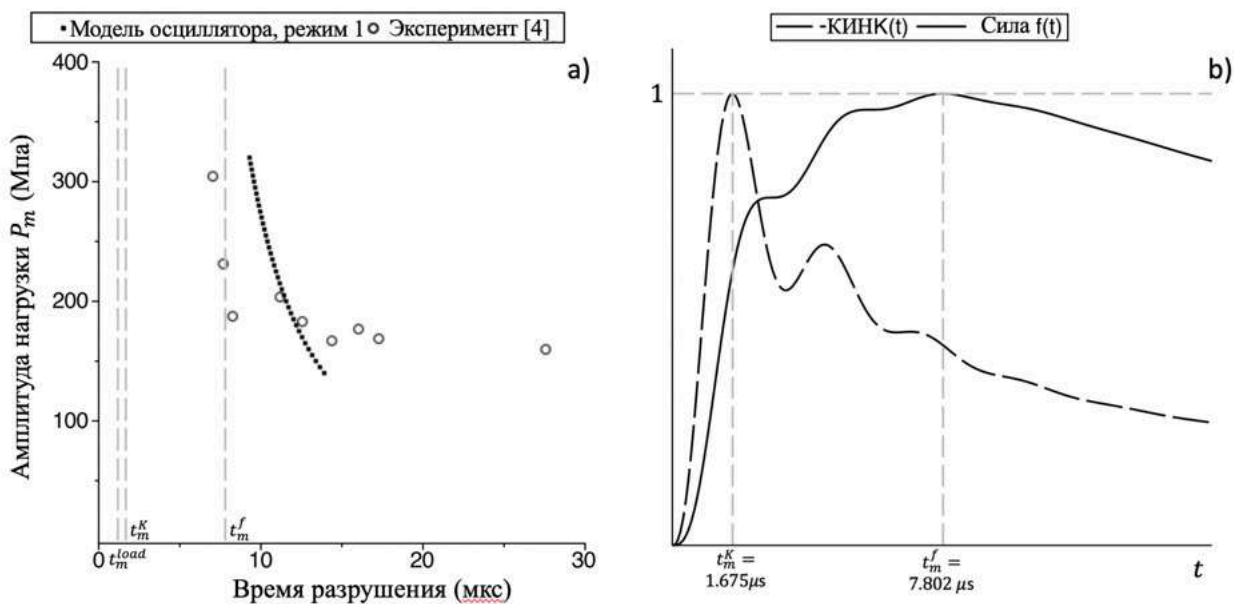


Рис. 2.6 (а): Зависимость амплитуды нагрузки от времени разрушения для нагрузок, описанных в работе [4]. Точки максимума для силы  $t_m^f$  и КИН  $t_m^K$  обозначены на обоих рисунках для длительности  $T = 5.5$  мкс, что позволяет увидеть наличие задержки разрушения согласно модели осциллятора. На рисунке (b) функции нормированы.

При исследовании второго режима разрушения амплитуда нагрузки снижается дальше, а длительность увеличивается. Для изначальной длительности нагрузки  $T = 5.5$  мкс значение  $P_m = 72.9$  МПа является пороговым и дальнейшее снижение амплитуды требует увеличения длительности импульса, чтобы имело место разрушение системы. Дальнейшее увеличение длительности воздействия обеспечивает плавный переход к статической прочности системы – пороговое значение амплитуды  $P_m$  снижается к некоторому статическому значению  $P_m^{static}$ . Приложение давления  $P_m^{static}$  к берегам трещины обеспечивает срабатывание критерия разрушения Ирвина  $K_I = K_{Ic}$ . Результаты моделирования для обоих режимов нагружения приведены на рисунке 2.7. На этом же рисунке отмечено статическое значение  $P_m^{static}$ , определённое при помощи метода конечных элементов. Как видно из

проведенных вычислений, экспериментальные точки их работы [4] принадлежат динамической части кривой  $P_m(t^*)$  согласно модели осциллятора.

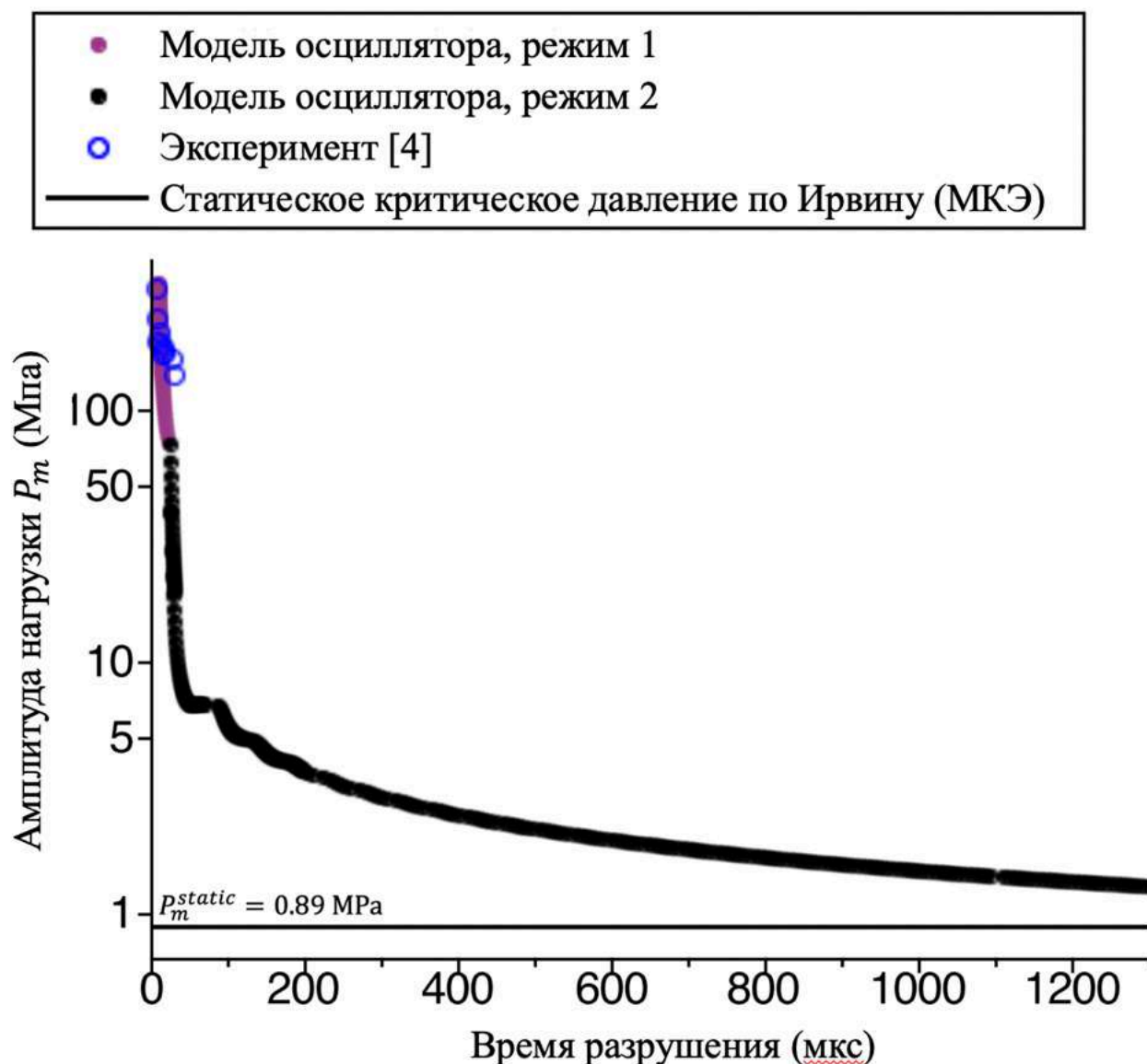


Рис. 2.7. Представлены оба режима разрушения. В первом режиме длительность нагрузки не меняется –  $T = 5.5 \mu s$  and  $T_1 = 4 \mu s$ . Во втором режиме длительность нагрузки увеличивается, а амплитуда снижается и сохраняется пороговой (минимальная амплитуда, приводящая к разрушению).

Отметим плавный переход к статической прочности системы.

Значение статической прочности образца  $P_m^{static}$  было определено при помощи метода конечных элементов. Давление  $P_m^{static}$ , приложенное к берегам трещины приводит к неустойчивости трещины согласно критерию Ирвина –

коэффициент интенсивности напряжений достигает критического значения, характерного для рассматриваемого материала. Вычисления были проведены в программе ANSYS, и в силу симметрии задачи рассматривалась только половина образца. Использовалась регулярная сетка с размером элемента, определенным в результате тестов на сходимость результатов при уменьшении размера элемента. Коэффициент интенсивности напряжений вычислялся через J-интеграл. На рисунке 2.7 приведен образец с разбиением на элементы, граничными условиями и приложенной нагрузкой. Также на рисунке 2.8 представлено решение задачи – поле нормальных напряжений  $\sigma_{yy}$ . В результате расчетов было получено значение  $P_m^{static} = 0.89$  Мпа: приложение данного давления к берегам разреза приводит к срабатыванию критерия Ирвина  $K_I = 1.47 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}} = K_{Ic}$ . Данное значение использовано на рисунке 2.7 (горизонтальная прямая).



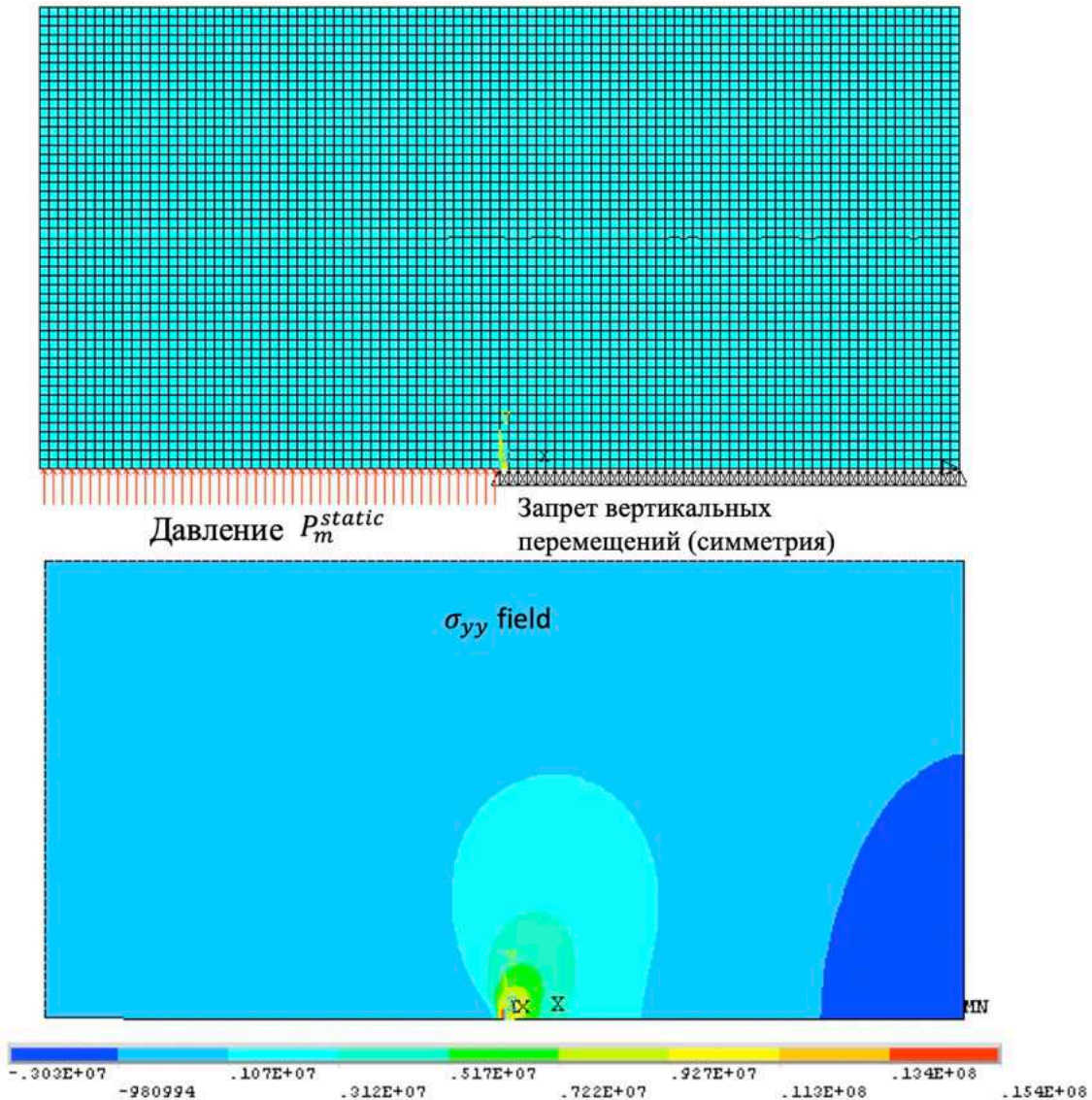


Рис. 2.8. МКЭ моделирование для определения статического критического давления  $P_m^{static}$  для задачи из работы [4].

Кратко подытожим раздел:

- Эксперименты по старту трещин в условиях интенсивного нагружения изучаются при помощи модели линейного осциллятора, которая позволила исследовать экспериментально наблюдаемые эффекты динамического разрушения: зависимость прочности от скорости нагружения [1] и задержки разрушения [4].

- Вблизи вершины трещины вырезается прямоугольная зона, формирующая массу осциллятора. Жесткость пружины осциллятора определяется исходя из статической прочности материала. Размер зоны является основным параметром модели.

- Сила, прикладываемая к массе, рассчитывается на основе аналитических решений для соответствующих задач упругости.

- В рассмотренных задачах при выборе размера зоны равным толщине образца модель осциллятора показывает достаточно высокую точность. Однако в одной из задач требовалось снижение жесткости пружины за счет ввода дополнительного параметра.

### **2.3 Эксперименты по отколу в стержнях**

В данном разделе модель осциллятора будет откалибрована для теоретического описания экспериментальных данных о прочности материала и динамическом разрушении при испытаниях на откол. В разделе использованы результаты работы [3], в которой использовались стальные образцы. При испытании материалов на откол в цилиндрический образец попадает снаряд, который создает волну сжатия, проходящую через образец; волна сжатия отражается от свободной границы образца и преобразуется в волну растягивающего напряжения, которая вызывает разрушение. Профиль напряжения может быть измерен с помощью определения скорости на свободной поверхности с последующей обработкой. Скорость нагружения может быть изменена за счет изменения длины снаряда и его скорости. В результате можно экспериментально построить зависимость прочности материала от скорости изменения напряжения в откольном сечении (рис. 10 в [3]). Более того, результаты работы [3] особенно интересны, поскольку в данном исследовании наблюдалась задержка разрушения: в некоторых экспериментах

разрушения было зарегистрировано растрескивание на стадии спада растягивающего напряжения (рисунок 4б в [3]).

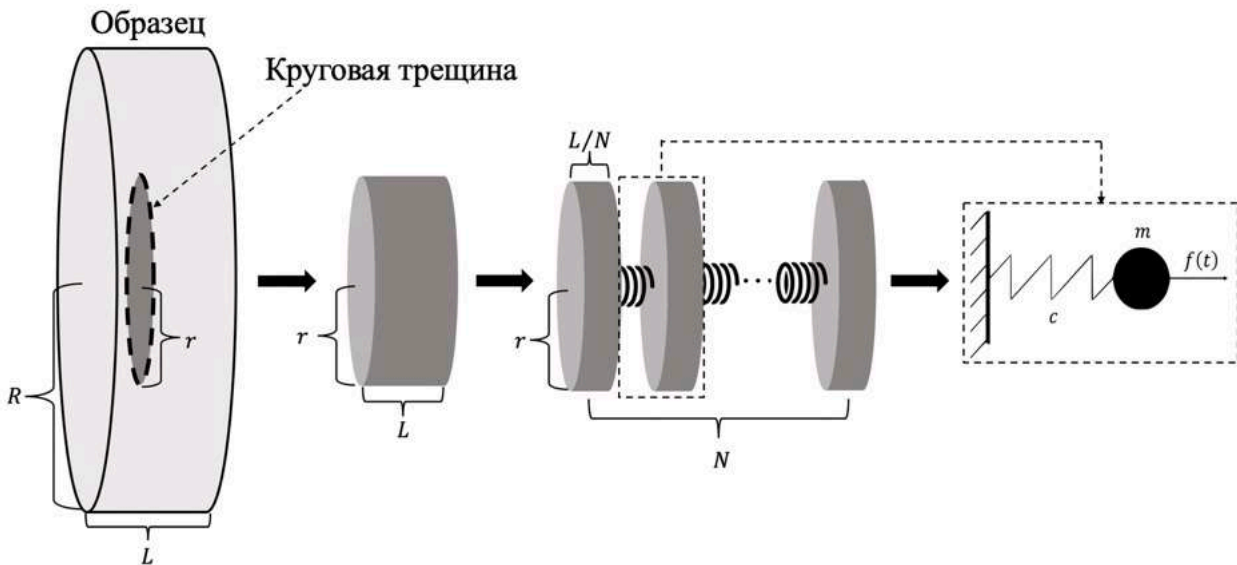


Рис. 2.9. Схема сведения задачи об отколе в стержне к задаче о разрушении линейного осциллятора.

В данном разделе задача об отколе в стержне сводится к задаче о разрушении линейного осциллятора, описанной в (2.10). Данная процедура состоит из следующих шагов (см. рисунок 2.9):

1) Образец заменяется стержнем с радиусом, равным радиусу экспериментально наблюдаемой трещины  $r$ , и длиной  $L$ , равной толщине образца.

2) Полученный стержень разделяется на  $N$  частей, соединенных  $N - 1$  пружинами. При этом масса одного сегмента  $m$  связана с массой всего стержня  $m_{rod}$ :

$$m_{rod} = \rho SL = Nm, \quad S = \pi r^2 - \text{площадь поперечного сечения стержня} \quad (2.23)$$

3) Следующие предположения делаются для определения жесткости пружины  $c$ . Предположим, что один конец стержня закреплен, а к свободному концу приложена сила  $f$ . Так как предполагается, что деформация стержня связана с напряжением по закону Гука  $\varepsilon = \sigma/E$  ( $\sigma = f/S$  – напряжение в стержне  $E$  – модуль Юнга), перемещение свободного конца стержня  $U$  вычисляется по формуле

$$U = L \frac{\sigma}{E} = \frac{L}{SE} f = \frac{f}{c_{rod}} \quad (2.24),$$

которая используется для определения жесткости стержня  $c_{rod}$ , которая в свою очередь равна жесткости цепочки осцилляторов. Жесткость одной пружины рассчитывается согласно формуле

$$c = c_{rod}(N - 1) = \frac{SE}{L}(N - 1) \quad (2.25).$$

4) Аналогично пункту 3 вычисляется критическое удлинение пружины  $U_c$  через критическое напряжение для исследуемой стали  $\sigma_c$ :

$$U_c = \frac{\sigma_c L}{E(N - 1)} \quad (2.26).$$

Далее будет показано, что при определенном выборе параметра  $N$ , модель линейного осциллятора способна описать прочностную кривую для исследования стали и даже предсказать эффект задержки разрушения, наблюдаемый экспериментально в работе [3]. Используемые для моделирования параметры приведены в таблице 2.3.

Название параметра и единицы измерения	Значение
Модуль Юнга, $E$ (Па)	200e9
Плотность, $\rho$ (кг/м <sup>3</sup> )	7850
Длина образца, $L$ (м)	0.0091

Масса, $m$ (кг)	0.033
Жесткость пружины, $c$ (Н/м)	6.11e10
Критическое удлинение пружины, $U_c$ (м)	0.1046e-4

Таблица 2.3. Параметры материала и параметры модели осциллятора.

Вычисления проведены для образца номер 6, представленные в работе [3]. Как видно из рисунка 4b в [3], разрушение происходит на этапе спада напряжений в откольном сечении. Если положить  $N = 3$  и если принять за нагружающую силу функцию  $f(t) = \sigma(t)S$ , где  $\sigma(t)$  – профиль напряжений для шестого образца, взяты с графика 4b [3], а  $S$  – площадь поперечного сечения стержня, то окажется, что осциллятор с выбранными параметрами (таблица 2.3) разрушается в момент времени  $t_{oscillator}^* = 3.2$  мкс. Данное время превышает время достижения напряжением своего максимума так же, как и экспериментально наблюдаемый момент разрушения  $t_{experiment}^* = 3.13$  мкс, и, таким образом, модель осциллятора предсказывает эффект задержки разрушения, наблюдаемый в [3] (см. рисунок 2.10a). В то же время значение  $N = 3$  позволяет достаточно точно описать построить кривую прочности для исследуемой стали (рисунок 2.10b), однако при  $N = 5$  модель лучше описывает экспериментальные данные. При этом значение  $N = 5$  не позволяет получить задержку разрушения: согласно модели осциллятора разрушение происходит на стадии роста напряжений в откольном сечении.

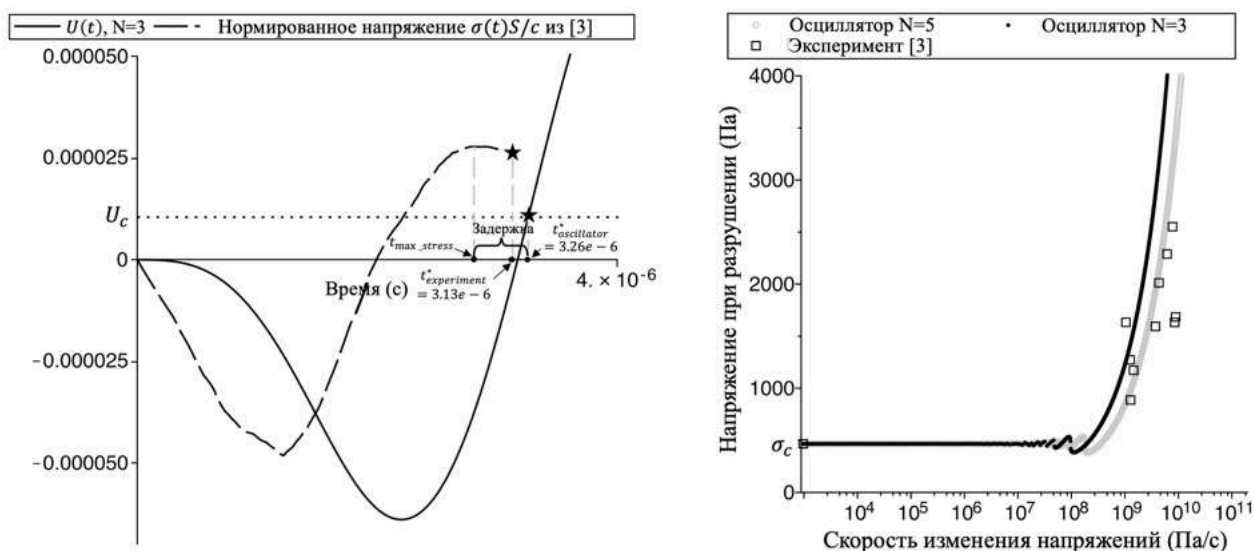


Рис. 2.10. Задержка разрушения, предсказанная согласно модели осциллятора и экспериментальный результат из [3] (слева); зависимость прочности от скорости изменения напряжений для двух значений  $N$  (справа).

Кривая прочности на рисунке 2.10 была построена в предположении, что к массе приложена линейно возрастающая нагрузка  $f(t) = RSt$ , где  $R$  – скорость роста нагрузки, а  $S$  – площадь поперечного сечения стержня. В действительности результаты не зависят от параметра  $r$ , описывающего радиус получающейся трещины и, соответственно, площадь сечения  $S$  не участвует в расчетах. Согласно формулам (2.23) – (2.26) масса, жесткость пружины и сила  $f(t)$  содержат  $S$  в качестве множителя и обе стороны дифференциального уравнения в (2.10) можно разделить на  $S$ . Критическая деформация пружина также не зависит от  $S$ . Таким образом,  $N$  – единственный свободный параметр модели в данном случае.

В результате проведенных вычислений было показано, что модель осциллятора способна предсказывать откольную прочность материала для разных скоростей нагружения/деформирования и даже способна описывать эффект задержки разрушения, описанный в работе [3].

## 2.4 Анализ полученных результатов

В главе 2 показано, что модель осциллятора может быть откалибрована для моделирования сложных динамических процессов, возникающих при проведении динамических испытаний несмотря на то, что она является простейшей из возможных динамических систем с инерцией. Параметры осциллятора вычислялись с использованием свойств материала и некоторых физических параметров задачи таких, как толщина образца. Такой подход неожиданно показал удовлетворительную точность, потребовав небольших дополнительных корректировок только в одной из рассмотренных задач про старт трещины при импульсном нагружении. Однако здесь стоит отметить, что продемонстрированные примеры применения модели осциллятора служат в основном демонстрационным и образовательным целям, поскольку успех моделирования, основанного на описанном подходе, может быть чистым совпадением. Самой большой проблемой продемонстрированной модели осциллятора является ее грубость – фактически, извлечение некоторого физического объема с относительно большими размерами является очень грубым усреднением и упрощением. Использование представленных в данной главе идей при построении дискретных моделей твердого тела может быть несостоятельным, так как получившиеся решетки окажутся со слишком большим шагом. Действительно, даже в рассмотренных в работе задачах о старте трещин дискретная модель образца насчитывала бы только один слой элементов, так как для описания экспериментальных эффектов размер элемента необходимо выбрать практически равным толщине образца. Другой способ применения предложенной модели для инженерных целей заключается в том, чтобы отойти от физической интерпретации массы осциллятора и рассматривать модель как условие разрушения. Например, если какая-то задача решается с использованием динамического метода конечных элементов, элемент может быть удален из сетки, если соответствующий виртуальный осциллятор выйдет из строя из-за напряжений, действующих на область внутри рассматриваемого элемента. Здесь

параметры осциллятора, особенно его масса, могут служить подгоночными параметрами, не имеющими адекватного механического и физического значения.

С другой стороны, в образовательных целях полезно показать, что процессу динамического разрушения может быть приписана некоторая инерция, которая обуславливает эффекты динамического разрушения, такие как увеличение прочности при высоких скоростях нагружения или задержка разрушения. Модель осциллятора показывает, что данных эффектов следует ожидать при кратковременных и/или высокоскоростных нагрузках на систему. Более того, обсуждаемая задача не включает в себя явно или неявно скорость деформирования или нагружения, что в модели не используются производные по времени первого порядка, и, таким образом, все эффекты наблюдаются в чисто упругой системе и обусловлены инерцией модели.

Также стоит отметить, что в главе 1 и в работе [148] процесс динамического разрушения характеризуется при помощи полностью виртуального осциллятора, и данный осциллятор был определен с точностью до собственной частоты. В данном разделе был использован более прямолинейный подход – масса осциллятора формировалась буквально из области рассматриваемого образца. В обоих случаях была введена некоторая частота  $\omega$ , привносящая в систему характерное время – период собственных колебаний  $T = 2\pi/\omega$ . Как показано в разделе 2.1 данной главы (рис. 2.1), статическая прочность осциллятора  $f_c = cx_c$  и его собственная частота  $\omega$  (или период колебаний  $T = 2\pi/\omega$ ) полностью определяют кривую динамической мощности. Данный набор параметров достаточно сильно схож с параметрами, необходимыми для описания скоростной кривой прочности с использованием критерия на основе инкубационного времени. В рамках данного подхода для анализа динамического разрушения учитываются процессы разрушения на микроуровне (например, развития микротрещин, слияния пор и т.д.), которые предшествуют макроскопическому разрушению и фактически являются его причиной, вводится



характерное время релаксации, называемое инкубационным временем  $\tau$ . В соответствии с простейшей реализацией подхода, основанного на инкубационном времени, разрушение в момент времени  $t^*$  происходит, если

$$\frac{1}{\tau} \int_{t^*-\tau}^{t^*} \sigma(t') dt' \geq \sigma_c \quad (2.27),$$

где  $\sigma_c$  – статическая прочность материала. Можно показать, что пара параметров  $(\tau, \sigma_c)$  полностью определяет скоростную кривую прочности для материала. Если рассматривать линейно возрастающие напряжения  $\sigma(t) = rt$ , где  $r$  – скорость роста напряжений), напряжение в момент разрушения  $\sigma^* = rt^*$ , которое трактуется как прочность материала, может быть соотнесено со скоростью нагружения  $r$  при помощи подстановки  $\sigma(t) = rt$  в условие разрушения (2.27):

$$\sigma^* = \sigma_c + \frac{\tau r}{2} \quad (2.28).$$

Если рассмотреть два материала, прочность которых характеризуется парами параметров  $(\tau_1, \sigma_{c1})$  и  $(\tau_2, \sigma_{c2})$ , в которых  $\tau_1 > \tau_2$  и  $\sigma_{c1} < \sigma_{c2}$ , соответствующие скоростные кривые прочности пересекутся, что означает, что материал 2 прочнее в условиях статического нагружения, но при высоких скоростях нагружения материал 1 обладает более высокой прочностью – см. рисунок 2.11.

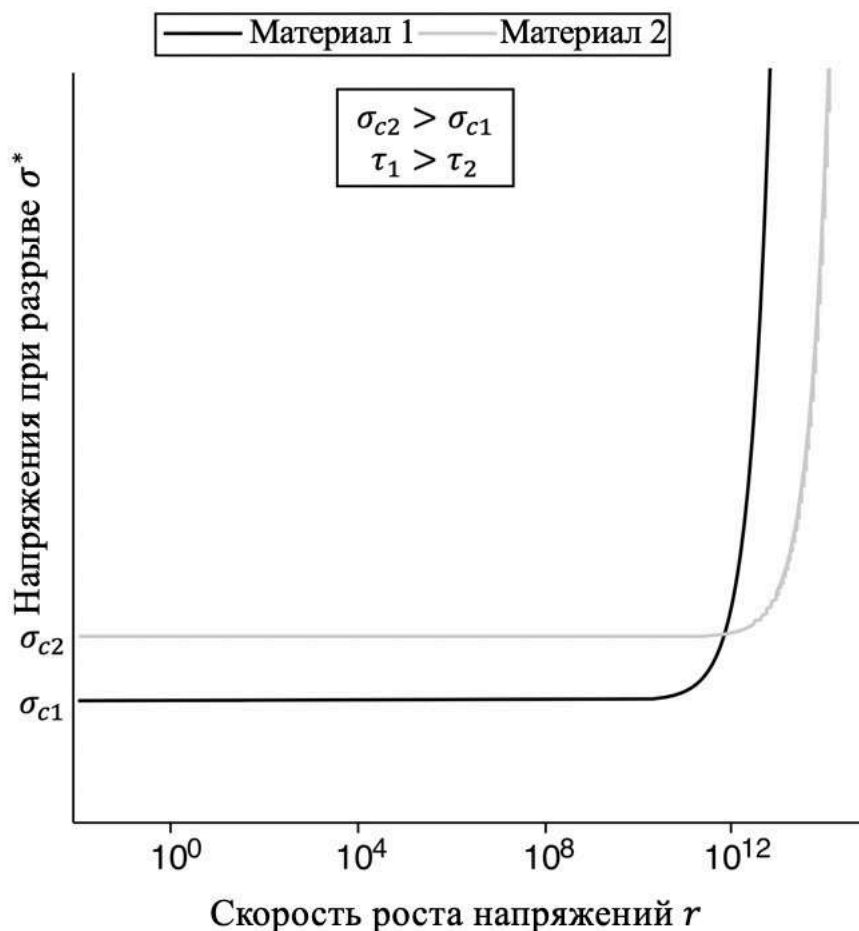


Рис. 2.11. Скоростные прочностные кривые, построенные при помощи критерия на основе инкубационного времени.

Согласно критерию на основе инкубационного времени при относительно низких скоростях роста напряжений («статическая ветвь» скоростной кривой прочности) прочность материала определяется статическим предельным напряжением  $\sigma_c$ . Прочность материала при более высоких скоростях определяется значением инкубационного времени  $\tau$  – «динамическая ветвь» скоростной кривой прочности сдвигается влево при более высоких значениях  $\tau$  и наоборот. Это полная аналогия с разрушением осциллятора при различных нагрузках, рассмотренным в разделе 2.1 данной главы. Для низких скоростей прочность системы, очевидно, определяется статической прочностью пружины – критической силой  $f_c$ , а динамическая прочность системы определяется собственной частотой генератора  $\omega = \sqrt{c/m}$ : меньшее значение  $\omega$  (и,

следовательно, большой собственный период  $T = 2\pi/\omega$ ) смещает «динамическую ветвь» кривой прочности влево, и наоборот, при увеличении  $\omega$  «динамическая ветвь» кривой двигается вправо. Обсуждаемая модель осциллятора не может рассматриваться как альтернатива модели на основе инкубационного времени, которая зарекомендовала себя как надежный инструмент для исследования динамического разрушения. Стоит отметить работу [157], в которой описывается схожая трактовка модели на основе инкубационного времени. Модель осциллятора стоит рассматривать как упрощенную иллюстрацию работы критерия на основе инкубационного времени. Однако продемонстрированные результаты могут быть интересны исследователям, работающим с дискретными моделями сплошной среды, поскольку они дают некоторое представление о возможном размере шага решетки и массы элементов, хотя, как обсуждалось выше, данные параметры могут оказаться неприемлемо большими для качественного моделирования, например, волновых процессов в твердом теле.

## 2.5 Выводы к главе 2

Во второй главе рассмотрено разрушение в системе «масса на пружине» – линейном осцилляторе, к которому приложены импульсные и интенсивные высокоскоростные нагрузки, изучены соответствующие эффекты разрушения. Было применено простое условие разрушения – когда отклонение массы достигает некоторого критического значения, система выходит из строя. Во-первых, было показано, что при нагрузке системы относительно короткими силовыми импульсами могут наблюдаться два режима выхода системы из строя: выход осциллятора из строя может происходить с задержкой (разрыв пружины происходит после завершения нагрузки) и без задержки – система разрушается до окончания действия импульса нагрузки. Последняя ситуация означает, что система была перегружена, и для разрушения осциллятора могут быть использованы импульсы меньшей амплитуды. Для обоих режимов разрушения

при меньшей длительности импульсов нагрузки ожидаемо требуются более высокие амплитуды. Если рассматривать прямоугольные импульсы нагрузки, то существует минимальная амплитуда импульса, достаточная для разрушения системы: амплитуда импульса должна составлять не менее половины критической статической силы. Во-вторых, были изучены нагрузки с различной интенсивностью – возрастающие с различной скоростью увеличения. Было показано, что более высокие значения скорости нагружения приводят к более высоким значениям силы, действующей на массу во время разрушения. Таким образом, показано существование двух характерных частей (ветвей) у зависимости прочности системы от скорости нагружения – статическая ветвь, где значение силы в момент разрушения равно критической статической силе, и динамическая ветвь, соответствующая более высоким скоростям нагружения и превышающим статические значения показателями прочности. В дополнение к этому было показано, что более высокая статическая прочность системы не означает априори, что система прочнее и для более высоких скоростей нагружения – кривые зависимости прочности от скорости нагружения могут пересекаться. Этот результат аналогичен поведению реальных хрупких материалов при исследовании высоких скоростей нагружения. Более того, показано, что разрушение осциллятора действительно имеет много схожих черт с разрушением конструкционных материалов, подвергающихся высоким нагрузкам, а модель осциллятора обладает характеристиками, аналогичными критерию разрушения на основе инкубационного времени: согласно обеим моделям, форма кривой скоростной прочностной кривой определяется статической прочностью системы или материала и некоторым характерным временем – инкубационным временем или периодом собственных колебаний в случае модели осциллятора.

Таким образом, было показано, что инерция массы в осцилляторе позволяет исследовать два ключевых эффекта динамического разрушения: зависимость прочности системы от скорости нагружения и задержку разрушения.

Затем были обработаны три набора экспериментальных результатов с использованием модели осциллятора. Было показано, что даже такая простая модель позволяет получать хорошее соответствие модельных и экспериментальных данных. При этом при калибровке модели использовался только один свободный параметр, имеющий физическую трактовку (за исключением одной из задач о старте трещины), а сама модель не содержит скоростей деформирования и нагружения. Полученные результаты служат демонстрационным и образовательным целям: показано, что ключевые динамические эффекты разрушения, наблюдаемые в многочисленных экспериментах, очень естественны и просты для понимания, поскольку их можно наблюдать в самой простой из возможных динамических систем – модели «масса на линейной пружине».

Больше информации можно найти в [33,34].

### **Глава 3. Особенности динамического разрушения периодических структур**

В третьей главе рассмотрено разрушение цепочки идентичных линейных осцилляторов. Рассматриваемая система состоит из произвольного конечного числа звеньев. Считается, что первая масса цепочки неподвижна. Рассмотрена следующая задача: в начальный момент времени цепочка равномерно растянута, затем совершает свободные колебания – через цепочку распространяется волна разгрузки. Задача решается аналитически – получены уравнения движения масс цепочки. Исследование полученного решения задачи позволило выявить эффект динамического разрушения, который связан с дискретным строением системы: распространяющаяся по цепи волна разгрузки искажается, и деформация некоторых звеньев может превышать критическое значение даже при неразрушающем первоначальном статическом нагружении (начальная деформация звеньев предполагается докритической). Полученные решения для цепочки осцилляторов сравниваются с решением аналогичной континуальной задачи – задачи о разгрузке упругого стержня. В работе продемонстрировано, что наблюдаемый в цепочке осцилляторов эффект не может быть обнаружен в одномерном стержне. Также в данном разделе проведены расчеты при помощи метода конечных элементов, подтверждающие гипотезу о возможности вторичного разрушения, следующего за разрывом одного из компонентов преднагруженной периодической структуры.

#### **3.1 Постановка задачи для одиночного осциллятора**

Данный подраздел повторяет постановку задачи о разрушении одиночного осциллятора, рассмотренную в предыдущих главах, однако содержит процедуру перехода к безразмерным координатам, играющую важную роль в анализе колебаний и разрушения цепочки с произвольным количеством звеньев.

Рассмотрим осциллятор, свободные колебания которого описываются уравнением

$$m\ddot{x} + cx = 0 \quad (3.1).$$

В (3.1)  $m$  – колеблющаяся масса, а  $c$  – жесткость пружины. Поставим условие целостности пружины

$$x \leq x_{crit} \quad (3.2)$$

В условии  $x_{crit}$  – растяжение пружины, при превышении которого происходит ее разрыв. Линейной заменой  $T = t\sqrt{c/m}$  перейдем к уравнению с безразмерными параметрами, в котором дифференцирование проходит по  $T$ :

$$\ddot{x} + x = 0 \quad (3.3)$$

Произведем замену координаты  $q = x/x_{crit}$ . Переход к новой координате позволит записать уравнение и условие целостности в следующем виде:

$$\ddot{q} + q = 0, \quad q \leq 1 \quad (3.4).$$

С такой же точки зрения рассмотрим цепочку из  $n$  связанных осцилляторов с одним свободным и одним закрепленным концами. Нас будет интересовать целостность цепочки. Колеблющиеся массы и пружины положим одинаковыми и равными  $m$  и  $c$  соответственно. В начальный момент времени условие целостности цепочки выполнено.

### 3.2 Система из двух осцилляторов

Рассмотрим систему, состоящую из двух звеньев. Введем обобщенные координаты  $q_1, q_2$ , описывающие смещения масс от положения равновесия при отсутствии нагрузки. Движение масс описывается системой линейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$A\ddot{Q} + CQ = 0 \quad (3.5),$$

где

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2c & -c \\ -c & c \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad (3.6).$$

Дифференцирование производится по времени  $t$ . Считается, что звено разрушено, если его деформация превышает некоторое критическое значение, и, соответственно, условие целостности системы имеет цепочки принимает вид:

$$\begin{cases} q_2 - q_1 \leq l_{crit} \\ q_1 - q_0 \leq l_{crit} \end{cases} \quad (3.7).$$

Здесь  $q_0 = 0$  – край цепочки закреплен, масса с нулевым номером неподвижна  $l_{crit}$  – критическое расстояние между массами. Будем считать, что в начальный момент времени цепочка равномерно деформирована, причем относительная деформация каждого звена равна  $l_{crit}$ . Тогда начальные условия принимают следующий вид:

$$\begin{cases} q_2(t=0) - q_1(t=0) = l_{crit} \\ q_1(t=0) = l_{crit} \\ \dot{q}_1(t=0) = 0 \\ \dot{q}_2(t=0) = 0 \end{cases} \quad (3.8).$$

При помощи замены  $T = t\sqrt{c/m}$  перейдем к системе уравнений с безразмерными параметрами. В результате использованной замены матрицы преобразуются следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.9).$$

Перейдем к новым обобщенным координатам  $l_1 = q_1 - q_0$ ,  $l_2 = q_2 - q_1$ . В матричном виде зависимость новых координат от старых запишется следующим образом:



$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} Q = SQ, L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \quad (3.10).$$

Следовательно,  $Q = S^{-1}L$ . Система (3.5) принимает вид  $\ddot{L} + FL = 0$ , где

$$F = SCS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.11).$$

Условие целостности звеньев принимает вид:

$$\begin{cases} l_1 \leq l_{crit} \\ l_2 \leq l_{crit} \end{cases} \quad (3.12).$$

Положим

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1/l_{crit} \\ l_2/l_{crit} \end{pmatrix} \quad (3.13).$$

Тогда систему уравнений можно переписать так:

$$\ddot{U} + FU = 0 \quad (3.14),$$

В результате произведенной замены условие целостности звеньев принимает вид:  $U_1 \leq 1, U_2 \leq 1$ . Начальные условия, соответственно, имеют следующий вид:  $U_1(t=0) = 1, U_2(t=0) = 1$ . Решим систему (3.14) с учетом начальных условий и условием закрепления первой массы.

Решение уравнения  $Det(F - \lambda E) = 0$  позволяет определить собственные числа матрицы  $F$  ( $Det$  – определитель матрицы), которые являются квадратами собственных частот колебаний системы:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}} \quad (3.15).$$

Определим собственные векторы матрицы  $F$ :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.16).$$

Итак, с учетом начальных и краевых условий решение системы уравнений (3.14) принимает следующий вид:

$$U_1 = \frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}} \cos(\omega_1 t) + \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}} \cos(\omega_2 t) \cong \\ \cong 1.17 \cos(\omega_1 t) - 0.17 \cos(\omega_2 t) \quad (3.17).$$

$$U_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \cos(\omega_1 t) + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \cos(\omega_2 t)$$

В (3.17) корректно использовать  $T$  для обозначения времени, учитывая произведенную замену. Однако начиная с данного момента для удобства примем  $c = m = 1$  и, соответственно,  $T = t$ .

Заметим, что в формуле для  $U_1$  перед косинусами стоят множители разных знаков, и при сложении они дают число больше единицы. Найдем такой момент времени  $t^*$ , когда  $\cos(\omega_1 t) = 1$ , а  $\cos(\omega_2 t) = -1$ :

$$\omega_1 t^* = 2\pi i, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.18a)$$

$$\omega_2 t^* = \pi + 2\pi k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.18b).$$

Из (3.18) получаем:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1 + 2k}{2i} \quad (3.19).$$

Значение  $(3 - \sqrt{5})/2$  (золотое сечение) будет приближаться подходящими дробями

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{3}{8}; \frac{5}{13}; \frac{8}{21} \dots \quad (3.20).$$

Выберем дробь  $3/8$ , тогда  $k = 1, i = 4$  и  $t^* = 15.534$  и  $t^* = 15.250$  согласно (3.18a) и (3.18b) соответственно. При подстановке данных значений получаем  $U_1 > 1$  – разрушение первого звена. Выбор следующих подходящих дробей, которая представима в виде (3.19) позволяет всё точнее получить значение  $t^*$  из (3.18).

### 3.4. Цепочка из произвольного конечного количества осцилляторов

Рассмотрим цепочку с произвольным числом звеньев  $n$ . Предполагается, что цепочка равно мерно растянута и в начальный момент времени по системе начинает распространяться волна разгрузки, например, в результате разрушения одного из звеньев, как изображено на рисунке 3.1.



Рис. 3.1. Статически нагруженная цепочка из произвольного конечного числа осцилляторов. Пунктиром обозначено разрушающееся звено.

Движение масс описывается системой дифференциальных уравнений

$$M\ddot{Q} + CQ = 0 \quad (3.21).$$

Замена  $T = t\sqrt{c/m}$  обеспечивает переход к безразмерным матрицам:

$M = E$  – единичная матрица  $n \times n$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.22).$$

Условия целостности цепочки выписываются для каждого звена:  $|q_i - q_{i-1}| \leq l_{crit}$ ,  $\forall i = 1..N$ , начальные условия принимают вид:

$$\begin{cases} q_i(t=0) - q_{i-1}(t=0) = l_{crit} \\ \dot{q}_i(t=0) = 0 \end{cases} \quad (3.23).$$

Условие закрепления –  $q_0(t) = 0 \forall t$ . Введем новые обобщенные координаты следующим образом:

$$\begin{aligned} l_i &= q_i - q_{i-1}, \forall i = 1..n, \\ L &= (l_1, l_2, \dots, l_n)^T \end{aligned} \quad (3.24)$$

Замена переменных проводится при помощи матрицы перехода  $S$ .

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.25),$$

причем  $L = SQ$  и, следовательно,  $Q = S^{-1}L$ . Итак, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\ddot{L} + FL = 0 \quad (3.26),$$

где

$$F = SCS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.27).$$

Начальные условия принимают вид:

$$\begin{cases} l_i(t=0) = l_{crit} \\ \dot{l}_i(t=0) = 0 \end{cases} \forall i = 1..n \quad (3.28).$$

Условие закрепления цепочки:  $l_0 = 0 \forall t$ . Условие целостности цепочки запишем так:

$$|l_i(t)| \leq l_{crit}, \quad \forall t, \forall i = 1..n \quad (3.29).$$

Сделаем замену переменных  $u_k = l_k/l_{crit}$  и получим систему дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$\begin{cases} \ddot{U} + FU = 0 \\ u_k(t=0) = 1 \\ \dot{u}_k(t=0) = 0 \end{cases} \forall k = 1..n \quad (3.30),$$

условием целостности звеньев

$$|u_i(t)| \leq 1, \quad \forall t, \forall i = 1..n \quad (3.31)$$

и условием закрепления  $U_0 = 0 \forall t$ .

### Собственные частоты системы

Собственные частоты определяются через вычисление собственных чисел матрицы  $F$ , определяемы, в свою очередь, из уравнения  $Det(F - \lambda A) = 0$ . Выпишем уравнение явно:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 - \lambda & -1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.32).$$

Пусть  $\alpha = 2 - \lambda$ , тогда:

$$\begin{vmatrix} \alpha - 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & \alpha & -1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & \alpha & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \alpha \end{vmatrix} = 0 \quad (3.33)$$

или  $D_n = 0$ , где  $D_k$  – определитель порядка  $k$ . Разложим определитель по последней строке и получим

$$D_n = \alpha D_{n-1} - D_{n-2} \quad (3.34)$$

Соотношение (3.34) является рекуррентным и дополнено условиями

$$D_0 = 1, D_1 = \alpha - 1 \quad (3.35).$$

Будем искать решение уравнения (3.34) в виде  $D_n = p^n$ . Подставляя данное решение в рекуррентное соотношение (3.34) и деля на  $p^{n-2}$ , получаем квадратное уравнение  $p^2 - \alpha p + 1 = 0$ . Его корни:

$$p_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2} \quad (3.36).$$

Тогда получаем выражение для  $D_n$

$$D_n = c_1 p_1^n + c_2 p_2^n \quad (3.37).$$

Произведем еще одну замену  $\alpha = 2\cos(\theta)$ . Тогда  $p_1 = e^{i\theta}$ ,  $p_2 = e^{-i\theta}$ . Из системы

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 e^{i\theta} + c_2 e^{-i\theta} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} - 1 \end{cases} \quad (3.38)$$

находим константы, подставляем их в (3.37) и получаем преобразованное уравнение:

$$2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right) = 0 \quad (3.39)$$

Его корни  $\theta_1 = 2\pi k$ ,  $\theta_2 = \frac{\pi(2k+1)}{2n+1}$ ,  $k = 1..n$ . Первая серия корней должна быть отброшена (матрица жесткости не вырождена). Вторая серия корней даёт набор из  $n$  квадратов частот

$$\lambda_k = 2 - 2\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2n+1}\right), k = 1..n \quad (3.40).$$

Таким образом, формула для собственных частот принимает следующий вид:

$$\omega_k = 2\sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{4n+2}\right), k = 1..n \quad (3.41).$$

### Определение компонент собственных векторов матрицы жесткости

С учетом начальных условий общее решение системы дифференциальных уравнений, описывающей движение цепи осцилляторов, записывается в виде:

$$U(t) = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{R}_j \cos(\omega_j t) \quad (3.42).$$

Здесь  $\mathbf{R}_j$  – собственные вектора матрицы жесткости  $F$ , а  $c_j$  – константы, удовлетворяющие начальным условиям.

Определим собственные векторы матрицы  $F$ . Для компоненты с номером  $i$  собственного вектора с номером  $j$  легко выводится рекуррентная формула:

$$r_i^{(j)} = (2 - \lambda_j)r_{i-1}^{(j)} - r_{i-2}^{(j)} \quad (3.43).$$

Положим  $r_1^{(j)} = 1, \forall j = 1..n$ . Заметим также, что  $r_2^{(j)} = 1 - \lambda_j, \forall j = 1..n$ . Положим  $r_0^{(j)} = 1$ , тогда для  $r_2^{(j)}$  рекуррентная формула будет тоже верна.

Для того чтобы решение удовлетворяло условию  $u_j(t=0) = 1, \forall j = 1..n$ , необходимо выполнение равенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n c_k = 1 \\ \sum_{k=1}^n c_k(1 - \lambda_k) = 1 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n c_k r_n^{(k)} = 1 \end{array} \right. \quad (3.44).$$

Определим компоненты собственных векторов. Введем обозначение  $2 - \lambda_j = v_j$ . Тогда рекуррентное соотношение для компонент собственных векторов (3.43) примет вид

$$r_i^{(j)} = v_j r_{i-1}^{(j)} - r_{i-2}^{(j)} \quad (3.45).$$

Данная рекуррентная формула в точности совпадает с рекуррентной формулой для многочленов Чебышева. Напомним формулы, верные для многочленов Чебышева:

$$T_i(y) = 2yT_{i-1}(y) - T_{i-2}(y) \quad (3.46).$$

При этом заданы определенные значения для первых двух многочленов:

$$T_0(y) = 1, T_1(y) = y \quad (3.47).$$

Временно опустим индекс  $(j)$  для упрощения выкладок. В нашем случае рекуррентное соотношение имеет следующий вид:

$$r_i(x_j) = 2x_j r_{i-1}(x_j) - r_{i-2}(x_j) \quad (3.48),$$

где  $x_j = v_j/2$  и соответственно  $r_1(x_j) = 1, r_2(x_j) = 2x_j - 1$ . Заметим, что при выборе  $r_0(x_j)$  равной 1 рекуррентное соотношение будет давать правильные выражения для компонент начиная со второй.

Использовать формулу для многочленов Чебышева мы не можем из-за различия в первых двух значениях. Обратимся к многочленам Чебышева второго рода, рекуррентное соотношение и нулевой многочлен для которых, точно такие



же, как и для многочленов Чебышева первого рода, однако, первый многочлен задается формулой

$$P_1(y) = 2y \quad (3.49).$$

Общая формула для многочленов Чебышева второго рода имеет следующий вид

$$P_{i-1}(y) = \frac{\sin(i * \arccos(y))}{\sin(\arccos(y))} \quad (3.50).$$

Теперь заметим очевидное соотношение

$$r_i(x_j) = P_{i-1}(x_j) - P_{i-2}(x_j) \quad (3.51).$$

Используя формулы (3.48) и (3.49) и учитывая, что

$$x_j = \frac{v_j}{2} = \frac{2 - \omega_j^2}{2} = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi(2j-1)}{4n+2}\right) = \cos\left(\frac{\pi(2j-1)}{2n+1}\right) \quad (3.52),$$

ВЫЧИСЛИМ

$$r_i^{(j)} = \frac{2\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2 - \omega_j^2}{2}\right)\right)\cos\left(\frac{2i-1}{2}\arccos\left(\frac{2 - \omega_j^2}{2}\right)\right)}{\sin\left(\arccos\left(\frac{2 - \omega_j^2}{2}\right)\right)} \quad (3.53).$$

После тригонометрических преобразований формула для компоненты с номером  $i$  собственного столбца с номером  $j$  принимает следующий вид:

$$r_i^{(j)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi(2i-1)(2j-1)}{4n+2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi(2j-1)}{4n+2}\right)} \quad (3.54),$$

где  $n$  — количество масс в цепи.

Вывод формул для констант, обеспечивающих выполнение начальных условий

С учетом формулы (3.51) система линейных уравнений для определения констант  $c_j$  примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} P_0(x_1) & P_0(x_2) & \cdots & P_0(x_n) \\ P_1(x_1) - P_0(x_1) & P_1(x_2) - P_0(x_2) & \cdots & P_1(x_n) - P_0(x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{n-1}(x_1) - P_{n-2}(x_1) & P_{n-1}(x_2) - P_{n-2}(x_2) & \cdots & P_{n-1}(x_n) - P_{n-2}(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0(1) \\ P_1(1) - P_0(1) \\ \vdots \\ P_{n-1}(1) - P_{n-2}(1) \end{pmatrix} \quad (3.55).$$

В правой части системы стоит единичный столбец, записанный удобным для преобразований способом. Сложение строк позволяет преобразовать систему следующим образом:

$$\begin{pmatrix} P_0(x_1) & P_0(x_2) & \cdots & P_0(x_n) \\ P_1(x_1) & P_1(x_2) & \cdots & P_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{n-1}(x_1) & P_{n-1}(x_2) & \cdots & P_{n-1}(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0(1) \\ P_1(1) \\ \vdots \\ P_{n-1}(1) \end{pmatrix} \quad (3.56).$$

Явная запись многочленов и последующие преобразования приводят к следующему виду системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.57).$$

Матрица системы (3.57) – матрица Вандермонда, для которой известно выражение для определителя. Определим константы  $c_j$ , по формулам Крамера

$$c_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (3.58),$$

где  $\Delta$  – определитель Вандермонда,  $\Delta_j$  – определитель матрицы, в которой столбец с номером  $j$  заменен на единичный. В результате элементарных преобразований получим:

$$c_j = \frac{(1 - x_1) \cdots (1 - x_{j-1})(1 - x_{j+1}) \cdots (1 - x_n)}{(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)} \quad (3.59).$$

Обозначений  $M_n(x) = 2^n \prod_{k=1}^n (x - x_k)$  позволяет переписать (3.59):

$$c_j = \frac{M_n(1)}{M_n'(x_j)(1 - x_j)} \quad (3.60).$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2} \arccos(x)\right)}{\cos\left(\frac{\arccos(x)}{2}\right)} \quad (3.61).$$

Покажем, что введенные выше  $x_j$  являются нулями  $f(x)$ :

$$f(x) = \frac{\cos\left(\frac{\pi(2j-1)}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi(2j-1)}{4n+2}\right)} = 0 \quad (3.62).$$

Заметим, что знаменатель  $f(x)$  отличен от нуля, так как угол  $\frac{\pi(2j-1)}{4n+2}$ ,  $j = 1..n$  лежит в интервале  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Легко убедиться в том, что  $f(x)$  является многочленом степени  $n$ , если (3.61) домножить и разделить на  $\sin(\arccos(x)/2)$ :

$$f(x) = \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2} \arccos(x)\right) \sin\left(\frac{\arccos(x)}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\arccos(x)}{2}\right) \sin\left(\frac{\arccos(x)}{2}\right)} = \frac{\sin((n+1) \arccos(x)) - \sin(n \arccos(x))}{\sin(\arccos(x))} \quad (3.63).$$

$$= P_n(x) - P_{n-1}(x)$$

При этом коэффициент при старшей степени  $P_n(x)$  равен  $2^n$ . Тогда

$$M_n(x) = 2^n \prod_{k=1}^n (x - x_k) = \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2} \arccos(x)\right)}{\cos\left(\frac{\arccos(x)}{2}\right)} = P_n(x) - P_{n-1}(x) \quad (3.64).$$

Очевидно, что  $M_n(1) = 1$  и следовательно

$$M_n'(x_j) = \frac{(-1)^{j+1}(2n+1)}{2 \sin\left(\frac{\pi(2j-1)}{2n+1}\right) \cos\left(\frac{\pi(2j-1)}{4n+2}\right)} \quad (3.65).$$

Таким образом, справедлива следующая формула для констант, обеспечивающих выполнение начальных условий:

$$c_j = \frac{(-1)^{j+1} 2 \sin\left(\frac{\pi(2j-1)}{2n+1}\right) \cos\left(\frac{\pi(2j-1)}{4n+2}\right)}{(2n+1) \left(1 - \cos\left(\frac{\pi(2j-1)}{2n+1}\right)\right)} \quad (3.66).$$

Решение системы

$$u_i(t) = 2 \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j+1} \sin\left(\frac{\pi(2j-1)}{2n+1}\right) \cos\left(\frac{\pi(2j-1)(2i-1)}{4n+2}\right)}{(2n+1) \left(1 - \cos\left(\frac{\pi(2j-1)}{2n+1}\right)\right)} \cos(\omega_j t) \quad (3.67).$$

Здесь  $i$  – номер звена в цепочке осцилляторов,  $\omega_j$  – собственные частоты колебаний системы, вычисляемые по формуле (3.41).

### Результаты вычислений для цепочек с разным количеством звеньев

На рисунке 3.2 приведены графики  $u_1(t)$  (деформация первого звена цепочки) для цепей, состоящих из 35 и 200 звеньев. Эффект превышения исходного расстояния между звеньями (а значит и разрушения) очевиден для обоих случаев. Доказательство существования обсуждаемого эффекта можно построить на основе теоремы Кронекера [157].

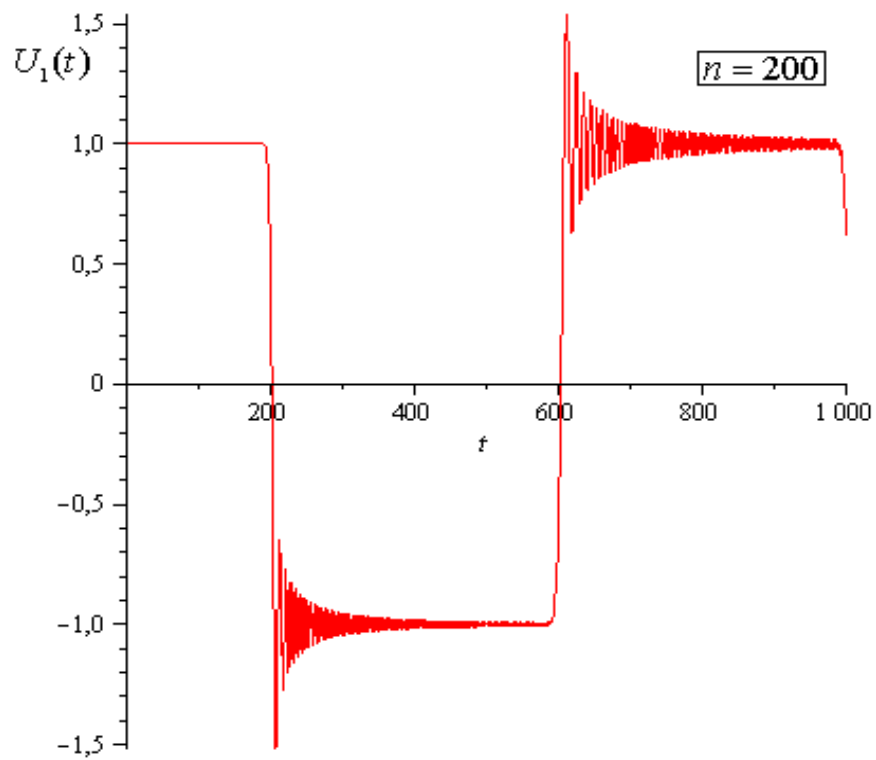
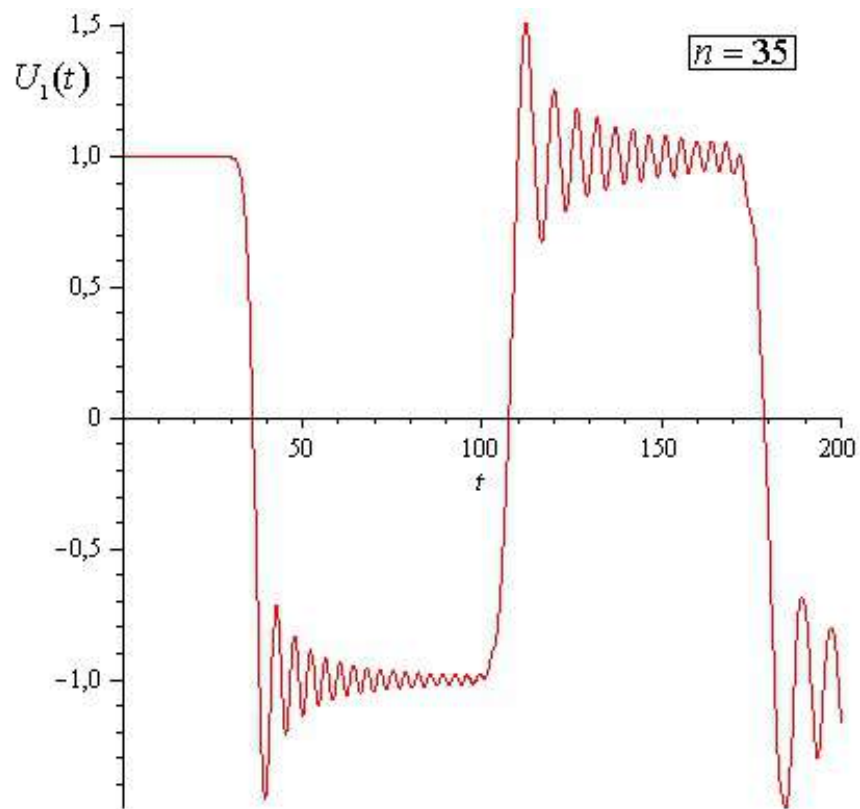


Рис. 3.2. Относительная деформация первого звена для цепочек с разным количеством звеньев.

### 3.5 Анализ полученного решения для цепочки и задача о продольных колебаниях упругого стержня. Явление Гиббса

Цепочка осцилляторов может быть основой для вывода одномерного волнового уравнения. Если обозначить расстояние между массами в состоянии равновесия параметром  $h = \frac{L}{n}$  ( $L$  – длина стержня), то формальный предельный переход  $h \rightarrow 0$  позволяет перейти к частным производным:

$$\frac{u_k}{h} \rightarrow \left. \frac{\partial U(y, t)}{\partial x} \right|_{y=\frac{kL}{n}} \quad (3.68).$$

$$\frac{q_{k-1} - 2q_k + q_{k+1}}{h^2} \rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

В (3.68)  $U$  – деформация стержня. Задачу о цепочке осцилляторов можно трактовать, как решение волнового уравнения методом конечных разностей с дискретизацией только по времени. Методом Даламбера решение соответствующей задачи для стержня находится в виде кусочно-линейной функции по времени.

Согласно проведенным для разного числа звеньев расчетам, превышение начального растяжения сохраняется для любого количества звеньев, и его величина (примерно 54%) не убывает с ростом количества звеньев  $n$ .

Рассмотрим эффект, который схож с полученным – явление Гиббса для рядов Фурье [158]. Решим задачу о продольных колебаниях закрепленного с одного конца упругого стержня методом Фурье. В начальный момент времени положим стержень равномерно растянутым. При нахождении уравнения движения стержня уделим внимание вопросу его разрушения. Для простоты будем считать длину стержня и скорость распространения волн в стержне равными единице, а  $\varepsilon = 1$  критическим значением деформации для рассматриваемого модельного материала, превышение которого приводит к

разрушению. Так же будем считать, что в начальный момент времени напряжение во всех точках стержня было равно единице.

Волновое уравнение для нашей системы будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} \quad (3.69).$$

Здесь  $U(x, t)$  – смещение точки  $x$  от положения равновесия. При этом граничные и начальные условия следующие:

$$\begin{cases} U(x, 0) = x \\ \left. \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \\ U(0, t) = 0 \\ \left. \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = H(-t) \end{cases} \quad (3.70).$$

Первое условие из (3.70) описывает равномерное растяжение стержня в начальный момент времени, третье условие означает закрепление одного из концов стержня, а четвертое – внезапную разгрузку стержня в начальный момент времени ( $H(t)$  – функция Хэвисайда). В результате применения метода Фурье решение (3.69) представляется в виде бесконечного ряда:

$$U(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8(-1)^k}{\pi^2(2k+1)^2} \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2}t\right) \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2}x\right) \quad (3.71).$$

Вычислим относительную  $\varepsilon$  деформацию в стержне при  $x = 0$  (место закрепления).

$$\varepsilon(x = 0) = \left. \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \sum_{k=0}^n \frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)} \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2}t\right) \quad (3.72).$$

Если в решении задачи для стержня ограничиться конечным числом слагаемых тригонометрического ряда, то вблизи точек разрыва будут

наблюдаться характерные «выбросы» причем превышение частичной суммы ряда над точным решением Даламбера (примерно 18%) не уменьшается с ростом числа слагаемых. На представленных ниже рисунках изображены графики зависимости относительной деформации стержня в точке закрепления от времени. Черными полосами изображено точное решение для задачи о продольных колебаниях стержня, полученное методом Даламбера.

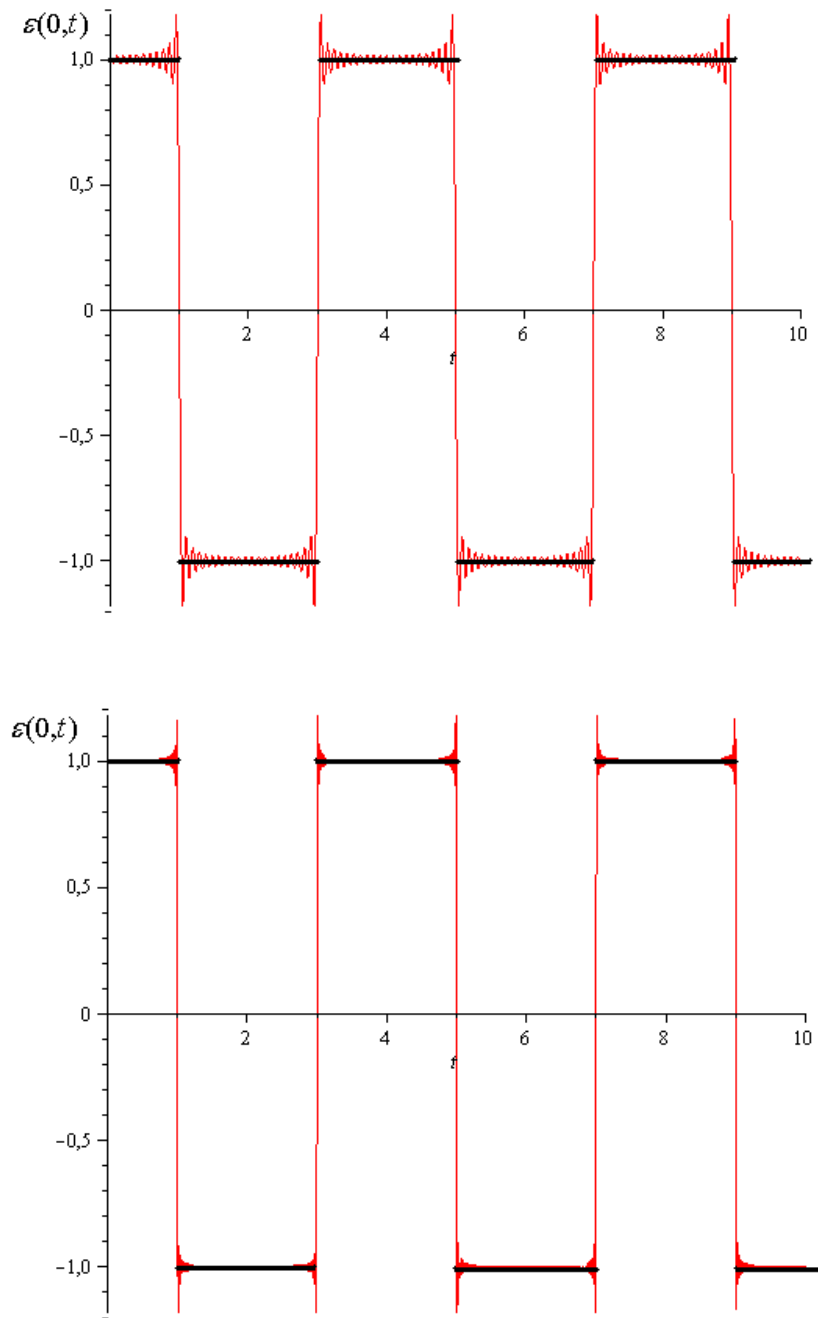


Рис. 3.3. Эффект Гиббса для конечной суммы ряда Фурье из 20 (a) и 200 (b) слагаемых. Черные линии – решение Даламбера.



Явление Гиббса напоминает изученный нами эффект в цепочке. Однако в задаче о цепочке «выбросы» наблюдаются только справа от точек, соответствующих разрывам решения задачи для сплошной среды. Кроме того, наблюдаемое превышение выражено гораздо более явно – в три раза больше, чем для явления Гиббса. Эффект, полученный для цепочки осцилляторов, следует рассматривать как физическое явление в отличие от эффекта Гиббса, фактически являющегося дефектом расчетной схемы.

Таким образом, применение численных методов для решения задач о распространении волн, основанных на пространственной дискретизации исследуемых областей (метод конечных разностей, метод конечных элементов и так далее) может порождать эффекты, которыми точное решение математической задачи не обладает, причем уменьшение сетки разбиения области ситуацию не меняет

Все реальные материалы обладают дискретной структурой. В условиях существенно динамического нагружения поведение дискретных структур может обнаруживать свойства, которые не учитываются непрерывными моделями. В подобных ситуациях уже сама механика сплошной среды может оказаться неадекватной изучаемому явлению.

### **3.7 Численное исследование разрушения в периодической структуре при разгрузке**

В данном разделе проводится численное исследование обнаруженного в цепочке осцилляторов эффекта. Проведено моделирование распространения волны разгрузки в образцах ПММА (полиметилметакрилат) с различным строением, в том числе, с периодической структурой. Исследовались образцы толщиной 2 мм и шириной рабочей зоны 10 мм, закрепленные в захватах. Считалось, что первичное разрушение происходит при некотором напряжении в определенной точке образца, находящейся вблизи верхней части образца. После

разрыва решалась динамическая задача о распространении волны разгрузки по образцу и исследовалось, возможно ли превышение начального напряжения в образце. На рисунке 3.4 приведены примеры исследованных образцов – стандартный образец, образец с дискретизацией, а также изображена часть разбиения на конечные элементы и обозначены утяжеленные зоны образца, в которых материал заменен на сталь.

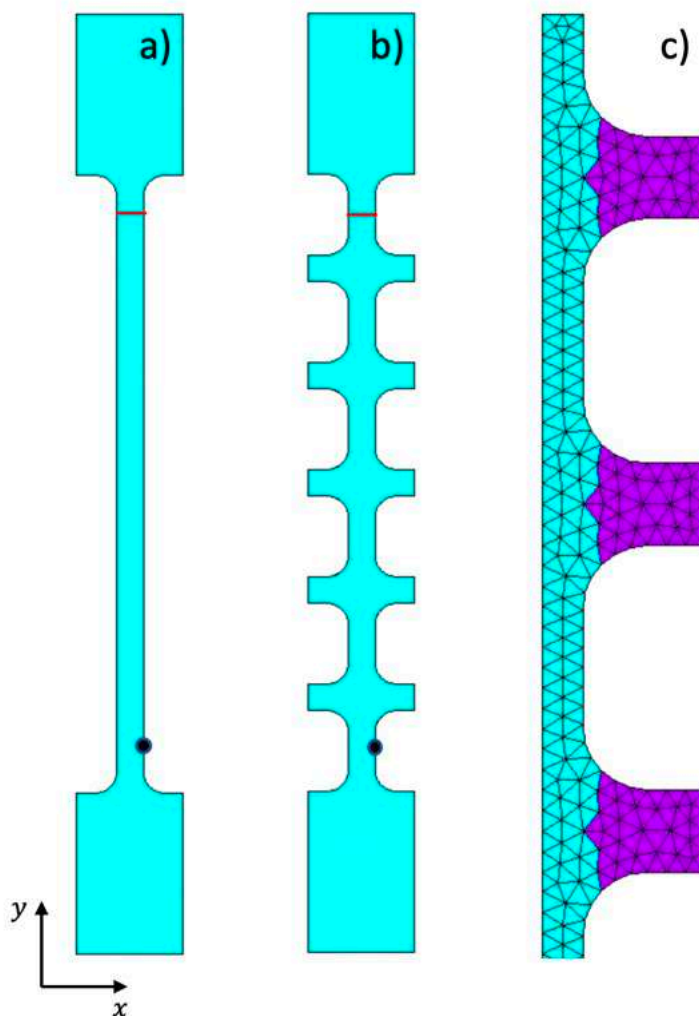


Рис. 3.4. Образцы, исследованные при помощи численного анализа. (a) – стандартный образец, (b) – образец с дискретизацией и (c) – элемент сетки конечных элементов, фиолетовым обозначены утяжеленные зоны, в которых свойства материала изменены – ПММА заменен на сталь. Черные кружки обозначают точки, в которых вычислялось напряжение  $\sigma_{yy}$ , красная линия обозначает начальный разрыв.

На рисунке 3.5 приведены результаты расчетов, а именно зависимость напряжения  $\sigma_{yy}$  от времени в обозначенных на рисунке 3.6 точках. Согласно полученным результатам начальное напряжение в образце преодолевается даже в стандартном образце, однако повышенные напряжения действуют сравнительно недолго – 15 мкс (рассматривается только первое превышение). Данное превышение может быть связано с численными особенностями получения решения – применением разбиения области на конечные элементы, что фактически является дискретизацией области.

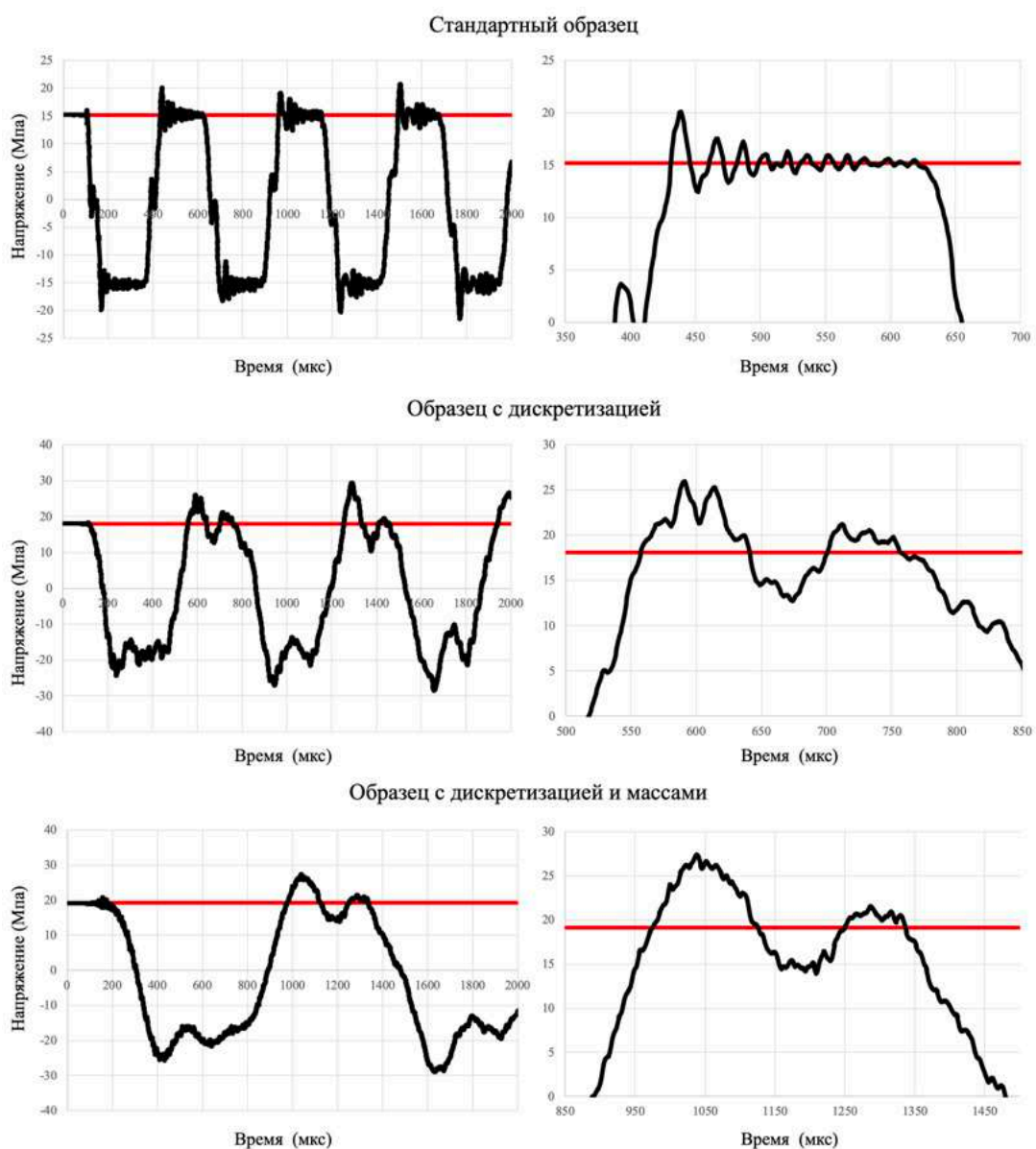


Рис. 3.7. Результаты расчетов. Зависимость напряжения  $\sigma_{yy}$  от времени в указанных точках на рисунке 3.6.

В образцах с искусственной дискретизацией максимальное превышение начального напряжения составляет 39,6% и длительность данного превышения составляет 85 мкс. Добавление масс приводит к такому же превышению начального напряжения – 38,9% однако длительность превышения составляет уже 156 мкс, что увеличивает вероятность вторичного разрыва в системе.

### **3.8 Выводы к главе 3**

Найдено точное аналитическое решение задачи о колебаниях однородной конечной цепочки линейных идентичных осцилляторов. Показано, что предварительно нагруженная (растянутая) цепочка может разрушиться при внезапном снятии статической нагрузки. Этот эффект отсутствует в соответствующей континуальной модели, но имеет место для цепочки произвольной конечной длины. Исследованный эффект аналогичен явлению Гиббса в тригонометрических рядах, однако гораздо более ярко выражен и, в отличие от явления Гиббса, может рассматриваться не как дефект расчетной схемы, а как реальное физическое явление. Эффект может иметь важное значение при анализе появления и размножения очагов разрушения в регулярных дискретных средах, в частности – наноструктурах.

Согласно проведенным расчетам эффект разрушения после внезапной разгрузки (например, после первичного разрыва) можно наблюдать во вполне реальных конструкциях. Так, показано, что внесение дискретности в форму образцов и добавление масс в их конструкцию (фактически, приближение свойств образца к рассмотренной в главе цепочке осцилляторов) приводит к значительному превышению начальных напряжений в материале (около 40%) в течение сотен микросекунд. Такое поле напряжений способно приводить к разрушению, и такая возможность должна учитываться при разработке строений и конструкций.

Больше информации можно найти в [17,156].

## **Глава 4. Пространственно-временная дискретность процесса распространения трещин**

В главе 4 рассматриваются вопросы динамического распространения трещин в хрупких материалах при различных воздействиях. Изучается распространение трещин при квазистатическом нагружении, а также при ударно-импульсном способе приложения нагрузки. Особое внимание уделяется зависимостям, характеризующим продвижение трещины и имеющим нестационарный характер. Так, для случая распространения трещины при квазистатическом нагружении исследуется вопрос осцилляций скорости продвижения трещины. Также рассматривается вопрос, связанный с наблюдаемым в ряде экспериментов разбросом значений коэффициента интенсивности напряжений при движении трещины под воздействием высокоскоростного воздействия. Исследования проводились на основе метода конечных элементов с внедренным в схему расчетов структурно-временным критерием разрыва среды, принципиально определяющим дискретный механизм реализации процесса разрушения на заданном масштабном уровне. Проводилось как количественное, так и качественное сравнение результатов расчётов с имеющимися экспериментальными данными. Показано, что учет пространственно-временной дискретности процесса позволяет предсказать и объяснить ряд экспериментально наблюдаемых эффектов, которые не укладываются в традиционные теоретические представления о динамическом разрушении. Также приведена расчетная схема для моделирования распространения трещин в произвольном направлении в условиях ударного нагружения. Данная численная модель позволяет исследовать фрагментацию в хрупких телах при динамическом нагружении, в частности, исследовать распределение фрагментов по размерам. Приведены результаты применения данной численной модели, полученные результаты качественно соответствуют экспериментам по фрагментации в хрупких телах.

#### **4.1 Критерий инкубационного времени для задач о распространении трещин**

Концепция критерия на основе инкубационного времени изложена в параграфе 1.3. Согласно данной модели, разрушение не является мгновенным событием, и даже если напряжения достигают определенного критического уровня в некоторой точке материала, для развития разрушения требуется определенное время (этот эффект динамического разрушения хорошо известен экспериментаторам, см., например, [2,5,159]). Наблюдаемое макроскопическое разрушение является результатом ряда предшествующих микроскопических событий, таких как рост и слияние микротрещин и/или микропор, и для учёта этих событий было введено понятие подготовительного инкубационного процесса. Термины «макроскопический» и «микроскопический» следует рассматривать как обозначения двух масштабных уровней, а динамическое разрушение рассматривается как эволюция «микроскопического» разрушения в «макроскопическое» событие разрушения, которое, по сути, развивается как процесс релаксации и может быть полностью охарактеризовано особым характерным временем – инкубационным временем  $\tau$ , который используется в (1.6). Инкубационное время рассматривается как свойство материала, которое может быть определено экспериментально. Модели разрушения, основанные на некотором временном параметре времени, также обсуждались в работах [28-30], где были представлены критерии разрушения, включающие критические интегралы по времени, но не были введены фундаментальные временные характеристики материала. В работе [2] была представлена теория короткоимпульсного разрушения, основанная на предположении, что разрушение происходит, если коэффициент интенсивности напряжений превышает критические значения в течение некоторого минимального времени. Этот минимальный временной интервал зависит от условий и истории приложенной нагрузки и четко проявляется в частном случае кратковременной

импульсной нагрузки с параметрами, близкими к пороговым. Исторически это был важный шаг в утверждении существования самого специального подготовительного процесса, но введенный минимальный временной параметр и соответствующие критические уровни коэффициента интенсивности напряжений не могут рассматриваться как свойства материала. Принципиально важно, что модель на основе инкубационного времени способна прогнозировать значения параметров, введенных в упомянутых моделях для различных условий нагружения.

Критерий инкубационного времени был успешно использован для изучения и прогнозирования некоторых эффектов динамического распространения трещин для различных материалов и условий нагружения. Были проведено успешное моделирование экспериментов как с квазистатическим [16], так и с динамическим нагружением [160]. Численно полученная траектория трещины вместе с экспериментальными данными из [16] показана на рисунке 4.1. Подход на основе инкубационного времени позволяет дать четкое объяснение более низкой предельной скорости трещины в сравнение с теоретически предсказываемой: трещина «замедляется» за счет того, что для продвижение трещины необходимо развитие микроскопических процессов разрушения, которое требует времени.

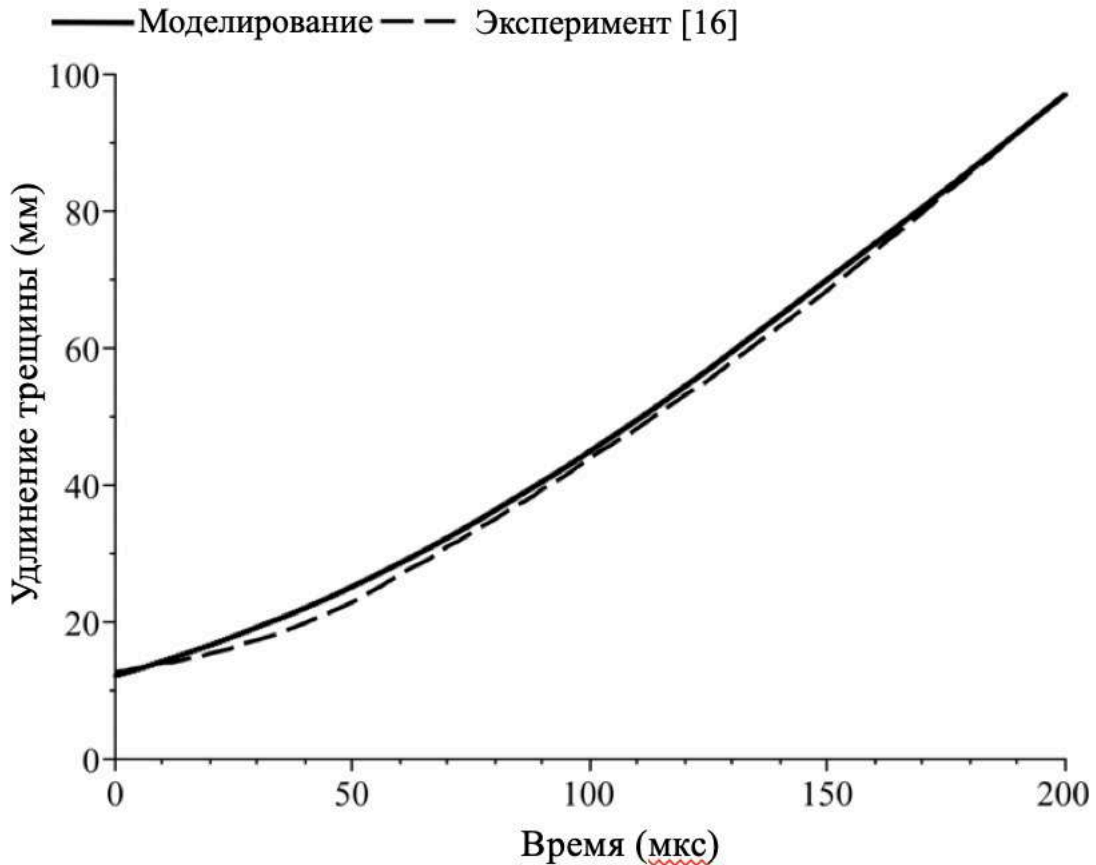


Рис. 4.1. Траектория трещины при квазистатическом нагружении – расчет при помощи метода конечных элементов и критерия инкубационного времени.

Экспериментальные данные из работы [16].

#### 4.2 Численная реализация подхода на основе инкубационного времени для моделирования динамического роста трещин

Для численного исследования и предсказания динамического распространения трещины критерий разрушения (1.6) используется в сочетании с методом конечных элементов. Критерий (1.6) внедряется в расчетный комплекс ANSYS в качестве внешней процедуры, созданной для контроля над процессом распространения трещины. Интегрирование по пространственной координате и по времени в (1.6) производится численно. Процедура сохраняет историю напряжений в узлах, лежащих на траектории трещины, что позволяет вычислить интеграл по времени на каждом шаге решения задачи. Пространственное



интегрирование производится по нескольким узлам, лежащим в интервале  $[0, d]$ , считая от вершины трещины. Данная расчетная схема позволяет решать задачи о прямолинейном распространении трещин в симметричных образцах и при симметричном способе приложения нагрузки, причем траектория трещины должна совпадать с линией симметрии. Несмотря на то, что разбиение области на элементы с размером  $d$  дает удовлетворительные результаты, были использованы элементы с размером  $d/3$  вдоль траектории трещины. Вдоль траектории трещины была использована регулярная сетка с равными квадратными элементами. Размер элементов постепенно увеличивался к верхней части образца, чтобы уменьшить общее количество элементов и, следовательно, повысить производительность схемы. Полная сетка и увеличенная область вблизи вершины трещины с регулярной сеткой показаны на рисунке 4.2.

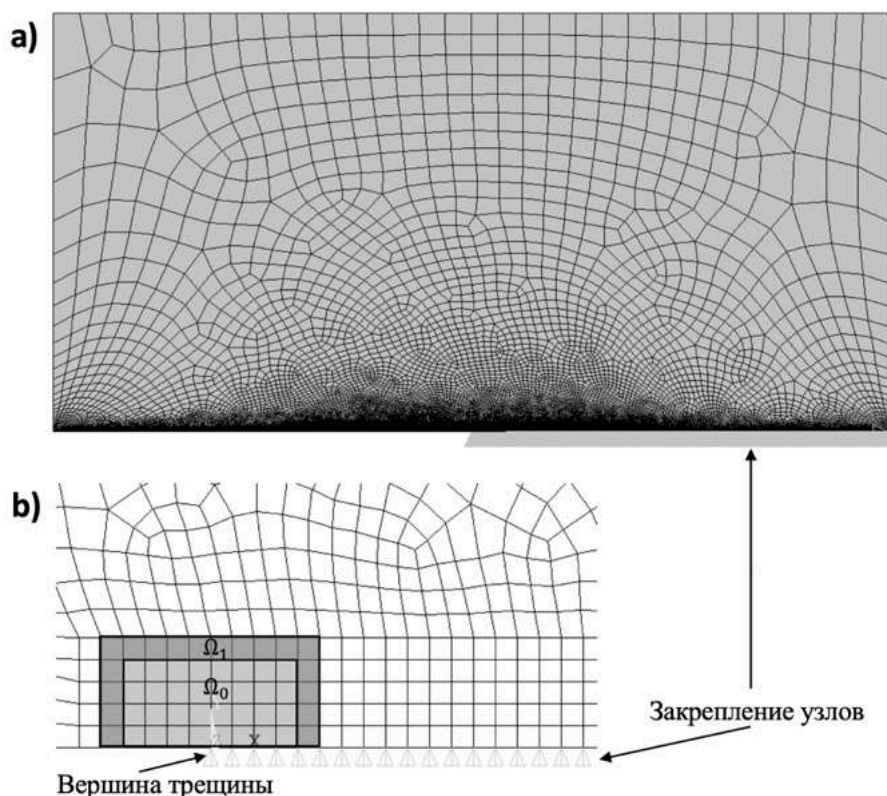


Рис. 4.2. Разбиение области, используемое в расчетах; а) – полная модель; б) – область вблизи вершины трещины с регулярной сеткой. Указаны области, участвующие в вычислении J-интеграла.

Если соотношение (1.6) выполняется в определенном наборе узлов, образующих зону процесса разрушения, ограничения на перемещение снимаются с этих узлов, и вершина трещины перемещается к следующему узлу, образуя новую вершину трещины. Таким образом, минимальное расстояние распространения трещины равно  $d$ , что соответствует подходу, основанному на концепции инкубационного времени: приращения трещины, меньшие, чем  $d$ , не рассматриваются как разрушение на выбранном масштабном уровне. Шаг по времени решения рассчитывается по формуле  $dt = d/c_d$ , где  $c_d$  – скорость продольной упругой волны. Интегралы в (1.6) вычисляются при помощи формулы трапеции как для временного, так и для пространственного интегралов. При расчетах используется сохраненная история растягивающих напряжений  $\sigma_{yy}$  в узлах, которые расположены на траектории трещины.

Задача решается в упругой постановке и в предположении малых деформаций. Таким образом, математическая постановка задачи выглядит следующим образом:

$$\rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla_i (\nabla \cdot \vec{U}) + \mu \Delta U_i \quad (4.1)$$

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \nabla \cdot \vec{U} + \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

Считалось, что в начальный момент времени перемещения и скорости нулю. При квазистатическом нагружении к точкам одной из границ тела медленно прикладывались перемещения. В (4.2) приведены начальные краевые условия для задачи о квазистатическом нагружении пластины с трещиной, нагрузка (перемещение) прикладывается к верхнему краю пластины (см. рисунок 4.3).

$$\vec{U}(X, 0) = 0; \quad \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}(X, 0) = 0 \quad (4.2)$$

$$\sigma_{22}(X \in \Gamma_3, t) = \sigma_{12}(X \in \Gamma_3, t) = 0$$

$U_2(X \in \Gamma_2, t) = 0, \sigma_{12}(X \in \Gamma_2, t) = 0$  – условие симметрии  
 $U_2(X \in \Gamma_1, t) = vt, v$  – скорость приложения нагрузки

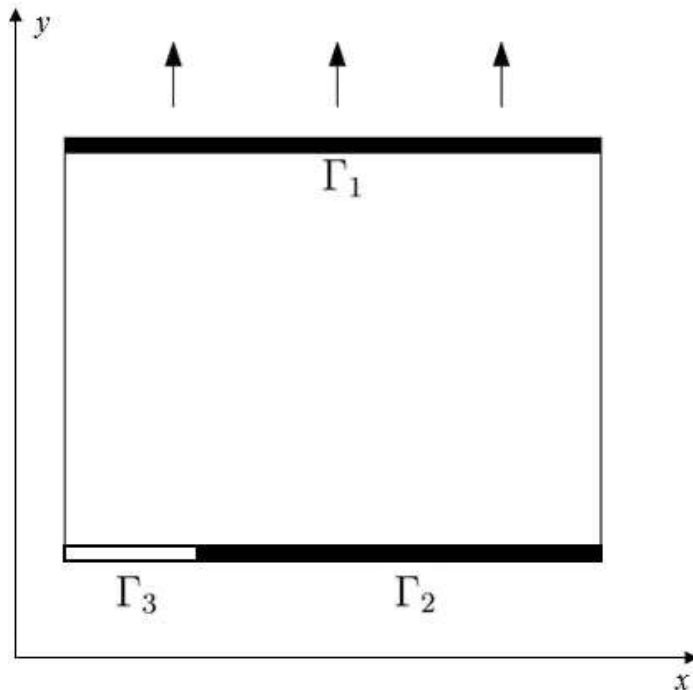


Рис. 4.3. Схема начально-краевой задачи для моделирования движения трещины при квазистатическом нагружении, приложенном к верхнему краю образца.

В (4.1) и (4.2)  $X = (x_1, x_2)$ ,  $\vec{U}(X, t) = (U_1(X, t), U_2(X, t))$  – вектор перемещений,  $\rho$  – плотность материала,  $\lambda$  и  $\mu$  – константы Лямэ.

#### Схема вычисления коэффициента интенсивности напряжений

КИН вычислялся через J-интеграл, для которого в свою очередь, была разработана программа, определяющая его значение для движущейся трещины согласно формуле

$$J = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left[ (U + T)m_1 - \sigma_{ij}m_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] \quad (4.3).$$

Выражение для  $J$  (4.3) может быть преобразовано, если перейти к интегрированию по области  $\Omega$  (ограничена контурами  $\Gamma$  и  $\Gamma_0$ , рисунок 4.4а) и выражение для кинетической энергии  $T = \frac{1}{2} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t}$ . Внешняя нормаль к области  $\Omega$  обозначена как  $\vec{n}$ , частные производные по времени и по координате  $x_1$  (совпадает с направлением движения трещины) связаны выражением  $\frac{\partial u_i}{\partial t} = -v \frac{\partial u_i}{\partial x_1}$ , где  $v$  – скорость трещины [161,162]

$$J = \int_{\Gamma_0} \left[ (U + T)n_1 - \sigma_{ij}n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Omega - \int_{\Omega} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1 \partial t} d\Omega - \int_{f^+ \cup f^-} t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma \quad (4.4).$$

В выражениях (4.3) и (4.4)  $U$  и  $T$  – плотности энергии деформации и кинетической энергии,  $\Gamma$  – сжимающийся контур вблизи вершины трещины,  $\Gamma_0$  – удаленный контур вокруг вершины трещины,  $f^+$  и  $f^-$  обозначают берега трещины с приложенной нагрузкой  $\vec{t}$ ,  $u_i$  – компонента вектора перемещения  $\vec{u}$  и  $\vec{m}$  векторы нормалей (рис. 4.4а). Чтобы избежать неточного интегрирования по контуру в (5), применяется метод виртуального продвижения трещины [161,162], и, таким образом, интегрирование по контуру заменяется интегрированием по площади. Строится дополнительная область, ограничивающая контур (рис. 4.4b), и вводится функция перехода  $q(x, y)$ , равная 1 в точках  $\Omega_0$  и  $\Gamma_0$  и равная 0 на контуре  $\Gamma_1$ .

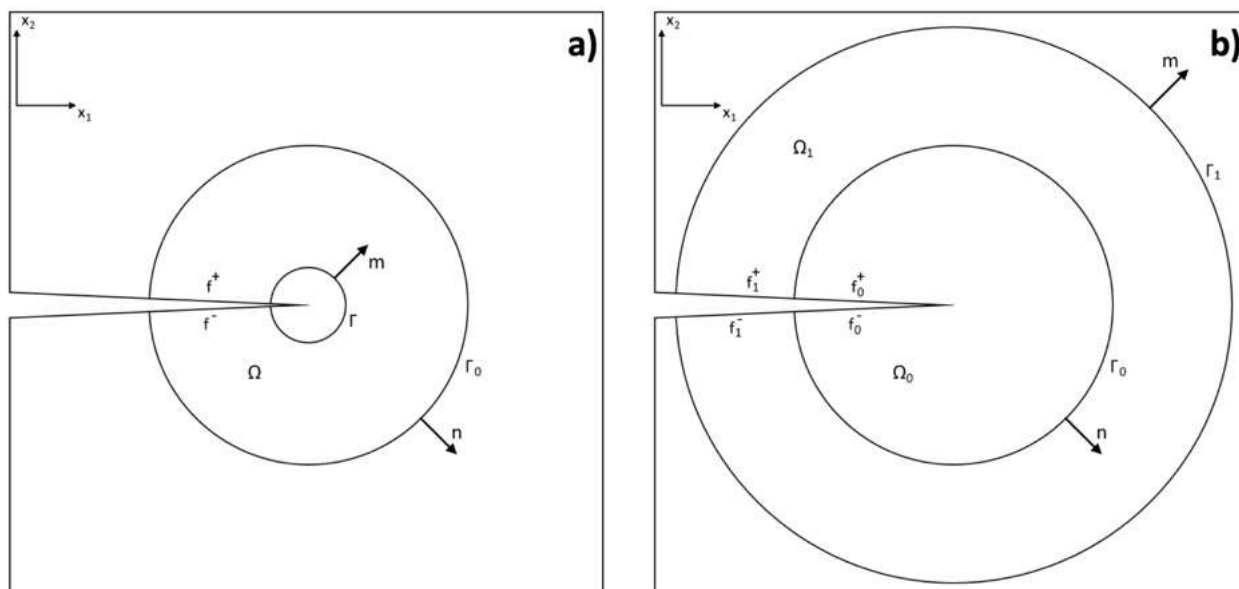


Рис. 4.4. Схемы контуров, использующихся для вычисления J-интеграла

Граница области  $\Omega_1$  составлена из контуров  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_0$  и берегов трещины  $f^+$  и  $f^-$  с внешней нормалью  $\vec{m}$ . Учитывая свойства функции  $q(x, y)$  и выражение для усилий на берегах  $t_i = \sigma_{ij}m_j$  трещины, справедливо следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\partial\Omega_1} \left[ (U + T)m_1 - \sigma_{ij}m_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] q d\Gamma \\
 &= \int_{\Gamma_0} \left[ (U + T)m_1 - \sigma_{ij}m_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] d\Gamma \\
 & \quad - \int_{f_1^+ \cup f_1^-} t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} q d\Gamma
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

С другой стороны, интеграл слева в выражении (4.5) может быть переписан при помощи теоремы Гаусса-Остроградского, и, таким образом, может быть получено выражение интеграла по контуру  $\Gamma_0$ :

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_0} \left[ (U + T)n_1 - \sigma_{ij}n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] d\Gamma &= \int_{\Omega_1} \left[ \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - (U + T)\delta_{1j} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} d\Omega \\
&+ \int_{\Omega_1} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} q d\Omega \\
&- \int_{\Omega_1} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1 \partial t} q d\Omega - \int_{f_1^+ \cup f_1^-} t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} q d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.6}$$

В (4.6)  $\delta_{1j}$  – символ Кронекера. Наконец, подстановка (4.6) в (4.4) дает формулу для J-интеграла, которая использовалась в расчетах:

$$\begin{aligned}
J &= \int_{\Omega_1} \left[ \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - (U + T)\delta_{1j} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega_{01}} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} q d\Omega \\
&- \int_{\Omega_{01}} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1 \partial t} q d\Omega - \int_{f_{01}^+ \cup f_{01}^-} t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} q d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.7}$$

в которой  $f_{01}^\pm = f_0^\pm \cup f_1^\pm$  и  $\Omega_{01} = \Omega_0 \cup \Omega_1$ .

Вычисление J-интеграла значительно упрощается, поскольку вдоль траектории трещины строится регулярная сетка. Область  $\Omega_0$  представляет собой квадрат с центром в вершине трещины и 8 элементами по стороне, а область  $\Omega_1$  представляет собой слой толщиной в 1 элемент, который окружает область  $\Omega_0$ . Однако из-за симметрии задачи при вычислении значения задействована только половина площади (рисунок 4.2b), а затем полученный результат умножается на два.

На каждом временном шаге значения перемещений для узла с номером  $n$  элемента  $e$ , а также производные по времени от перемещений  $\left( (u_i)_n^e, \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)_n^e, \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right)_n^e \right)$  импортируются из решения, полученного при помощи ANSYS. Для функции перехода  $q(x, y)$  используется следующая аппроксимация:

$$(q)_n^e = \begin{cases} 1, & \text{узел } n \text{ элемента } e \text{ принадлежит } \overline{\Omega_0} \\ 0, & \text{в ином случае} \end{cases} \tag{4.8}$$

Значения  $(u_i)^e$ ,  $(\frac{\partial u_i}{\partial t})^e$ ,  $(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2})^e$  и  $(q)^e$  (все обозначены как  $f^e$  для простоты) в произвольных точках  $(\xi_1, \xi_2)$  внутри элемента  $e$  вычисляются с использованием функций формы  $N_i(\xi_1, \xi_2)$  и значений в узлах  $f_n^e$ :

$$f^e(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^4 f_i^e N_i(\xi_1, \xi_2)$$

$$N_1(\xi_1, \xi_2) = (1 - \xi_1)(1 - \xi_2)$$

$$N_2(\xi_1, \xi_2) = \xi_1(1 - \xi_2)$$

$$N_3(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \xi_2$$

$$N_4(\xi_1, \xi_2) = (1 - \xi_1) \xi_2$$
(4.9).

Аппроксимация (4.9) также используется для вычисления производных по пространственной координате в (4.7). Выражения в (4.7) вычисляются в предположении малых деформаций и с использованием закона Гука. Интегралы по площади в (4.7) считаются суммированием по элементам, входящим в область интегрирования и с использованием формулы интегрирования Гаусса.

Примененный метод вычисления J-интеграла не предполагает априори, что для напряжений верна асимптотическая формула с квадратным корнем от расстояния до вершины трещины в знаменателе, что является преимуществом в сравнение со стандартными средствами вычисления КИН, встроенными в большинство МКЭ программ.

Коэффициент интенсивности напряжений вычисляется через J-интеграл согласно следующим формулам:

$$K_I = \sqrt{\frac{EJ}{(1 - \nu^2)A(\dot{a})}}$$
(4.10a),

где

$$A(\dot{a}) = \dot{a}^2 \alpha_d / ((1 - \nu) c_s^2 D), D = 4 \alpha_d \alpha_s - (1 + \alpha_s^2)^2, \quad (4.10b)$$

$$\alpha_d = \sqrt{1 - \dot{a}^2 / c_d^2}, \alpha_s = \sqrt{1 - \dot{a}^2 / c_s^2}$$

В формулах (4.10a,b) J-интеграл вычисляется при помощи выражения (4.7),  $E$  и  $\nu$  представляют собой упругие параметры материала (модуль Юнга и коэффициент Пуассона),  $c_d$  и  $c_s$  – скорости продольных и поперечных волн,  $\dot{a}$  – скорость трещины. Разработанная расчетная схема была протестирована для случая динамически нагруженной стационарной трещины. В тестовой задаче сравнивается история вычисленного КИН (с использованием как стандартной процедуры ANSYS CINT, так и разработанного программного обеспечения, реализующего (4.7)), и аналитического решения из [153]. Образец нагружается давлением, приложенным к берегам трещины: давление линейно растет до некоторого значения и удерживается на данном уровне. Результаты расчетов и нагрузка показаны на рисунке 4.5. Значения, полученные при помощи встроенных в ANSYS процедур, совпадают с аналитической формулой, в то время как значения, полученные с помощью (4.7), немного ниже. Это можно объяснить тем фактом, что разработанное программное обеспечение не использует никаких асимптотических формул для напряжений, в то время как процедуры ANSYS и аналитическое решение предполагают, что напряжения вблизи вершины трещины обратно пропорциональны корню от расстояния до вершины.



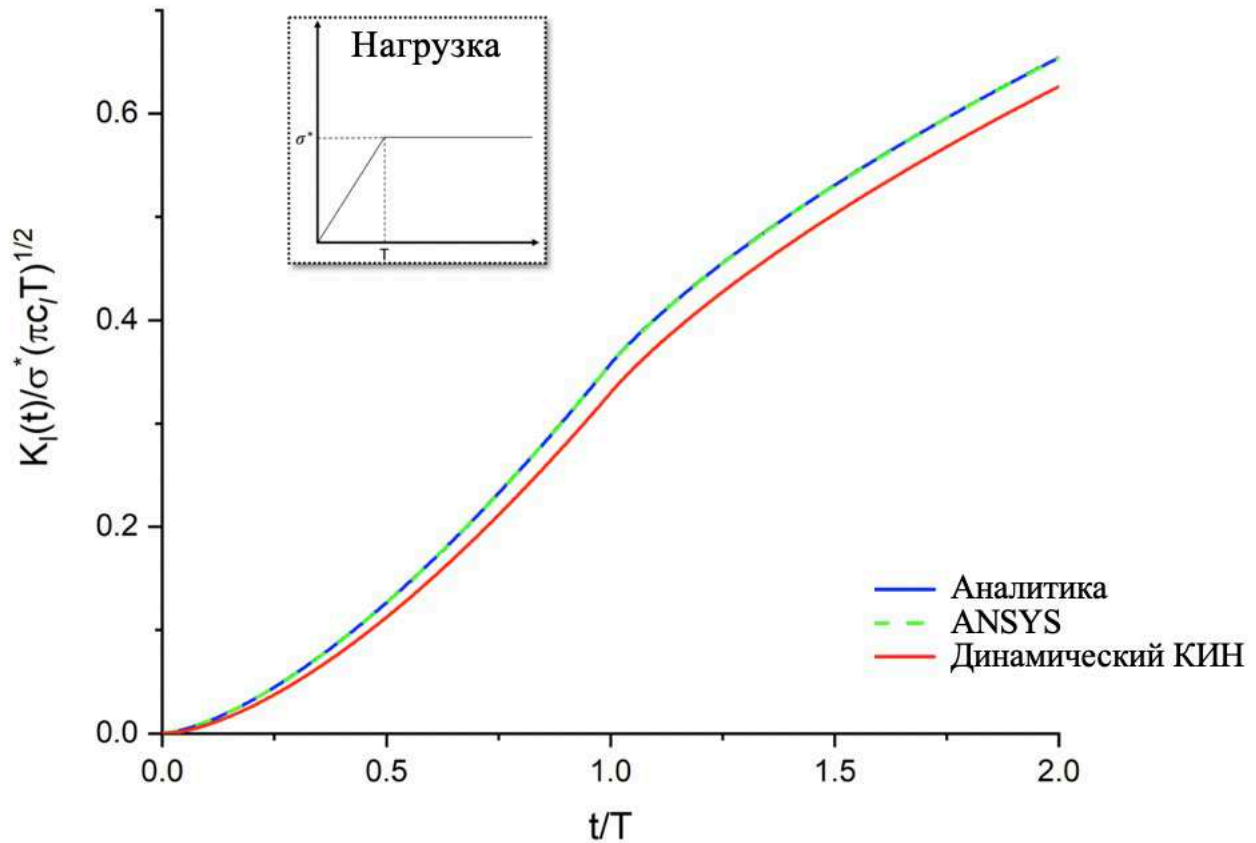


Рис. 4.5. Сравнение аналитической формулы для  $K_I(t)$  с численными результатами. Красная линия получена при помощи формулы (4.7).

### 4.3 Нестабильное поведение КИН для движущихся трещин

В работе [82] представлены экспериментальные данные по динамическому распространению трещин в образцах из Аралдита Б трех типов: двойная консольная балка, образец с боковым надрезом, образец смешанного типа. Для измерения коэффициента интенсивности напряжений для движущейся трещины использовался метод каустик. В дополнение к этому регистрировалось положение вершины трещины и, таким образом, определялась скорость трещины. Все образцы имели искусственную начальную трещину, которая начинала распространяться из-за нагрузки клино. Форма и размеры исследованных образцов показаны на рисунке 4.6.

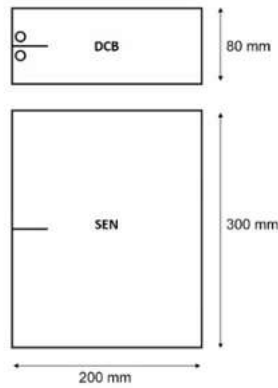


Рис. 4.6. Геометрия образцов, исследованных в работе [82].

Свойства материала для моделирования были взяты из [163]. Инкубационное время для Аралдита Б по-прежнему недоступно, и было использовано значение 1.1 мкс.

Результаты выполненных расчетов вместе с экспериментальными данными из [82] показаны на рисунке 4.7. Поскольку интегрирование по времени и пространству в (1.6) позволяет учесть историю напряжений и, следовательно, процессы, которые предшествуют минимальному расширению трещины, численно полученные значения скорости трещины соответствуют экспериментальным значениям. Было достигнуто хорошее совпадение экспериментальных и численных данных, особенно для режимов с высокой скоростью распространения трещины, которые являются наиболее репрезентативными для исследуемой задачи. Важно подчеркнуть, что свойства материала как для образцов типа двойной балки, так и для образцов с боковым разрезом были идентичны.

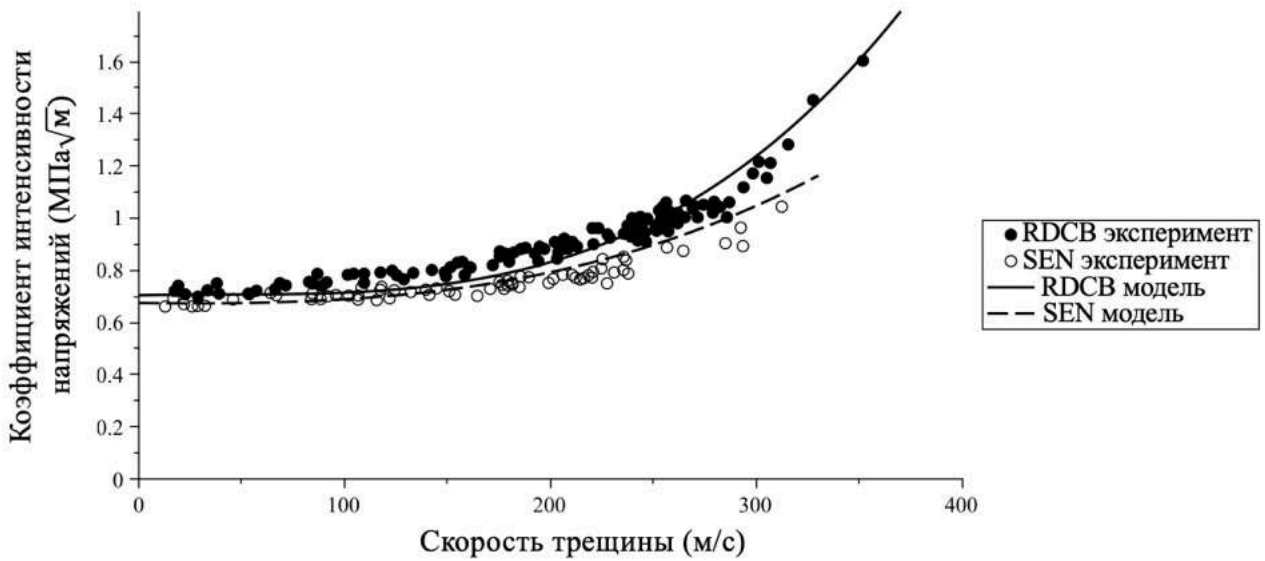


Рис. 4.7. Зависимость коэффициента интенсивности напряжений от скорости образования трещин для образцов типа двойной балки (RDCB) и образцов с боковым разрезом (SEN). Экспериментальные данные из работы [82] и результаты моделирования.

Согласно работам Рави-Чандара и Кнаусса [70], широкий диапазон значений коэффициента интенсивности напряжений может соответствовать трещине, движущейся с постоянной скоростью в случае динамического нагружения равномерным импульсным давлением, приложенным к берегам трещины. Напротив, медленное или квазистатическое нагружение приводило к четко установленной зависимости  $K_I - \dot{a}$ . Для изучения этих двух случаев было проведено моделирование распространения для модельного материала со свойствами, аналогичными свойствам ПММА. Для обоих случаев образцы имели квадратную форму со стороной 200 мм. Квазистатический случай был реализован с использованием применения медленного смещения к краям берегов трещины, а импульсное нагружение применялось ко всей площади граней трещины, что представляет собой схему нагружения Рави-Чандара и Кнаусса. На рисунке 4.8 показаны численно полученные значения зависимости вместе со схемами нагружения.

На рисунке 4.8a показаны результаты моделирования в виде дискретных данных – отдельным скоростям соответствуют «столбики» значений КИН (высота столбиков определяет разброс значений), а также кривая, аппроксимирующая данные значения, являющаяся классической зависимостью  $K_I - \dot{a}$ . В соответствии с подходом, основанным на инкубационном времени, трещина распространяется с конечными приращениями, которые равны  $d$ , а динамическое решение задачи предполагает некоторый конечный шаг по времени. Таким образом, скорость трещины приобретает дискретные значения, поскольку вершина трещины остается на некоторое количество временных шагов в определенном узле, а затем проходит расстояние  $d$ , когда выполняется (1.6). Такая численная дискретизация качественно отражает экспериментально наблюдаемые данные о скачкообразном распространении трещины, поскольку экспериментально наблюдались прерывистые траектории движения вершины трещины (см., например, [164]). Та же процедура аппроксимации была использована при моделировании тестов Кальтхоффа (рисунок 4.7).

На рисунке 4.8b показаны только полученные при помощи вычислений данные без применения аппроксимации. Разброс значений КИН для высоких скоростей значительно выше в сравнение с более низкими скоростями, которые показаны на рисунке 4.8a. Для получения данного результата берега начальной трещины были нагружены трапециевидным импульсом давления. Амплитуда и длительность фазы роста импульса были скорректированы таким образом, чтобы инициировать движение трещины до выхода нагрузки на постоянное значение. В ходе данного моделирования наблюдалось только несколько значений скорости трещины, и каждому из них соответствует широкий диапазон значений КИН. Полученные данные качественно соответствуют экспериментальным результатам, полученным Рави-Чандаром и Кнауссом [1,69-71], и, таким образом, как квазистатический, так и динамический варианты нагружения были получены с использованием численного моделирования и модели на основе инкубационного времени при одинаковой форме образцов и одинаковых

свойствах материала. Изменение размера элементов не влияет на полученный результат, как это было видно из проведенных тестов на чувствительность результатов к размерам разбиения: дискретные значения скорости трещины незначительно изменилось, однако разброс значений КИН остался высоким для сравнительно больших скоростей трещины.

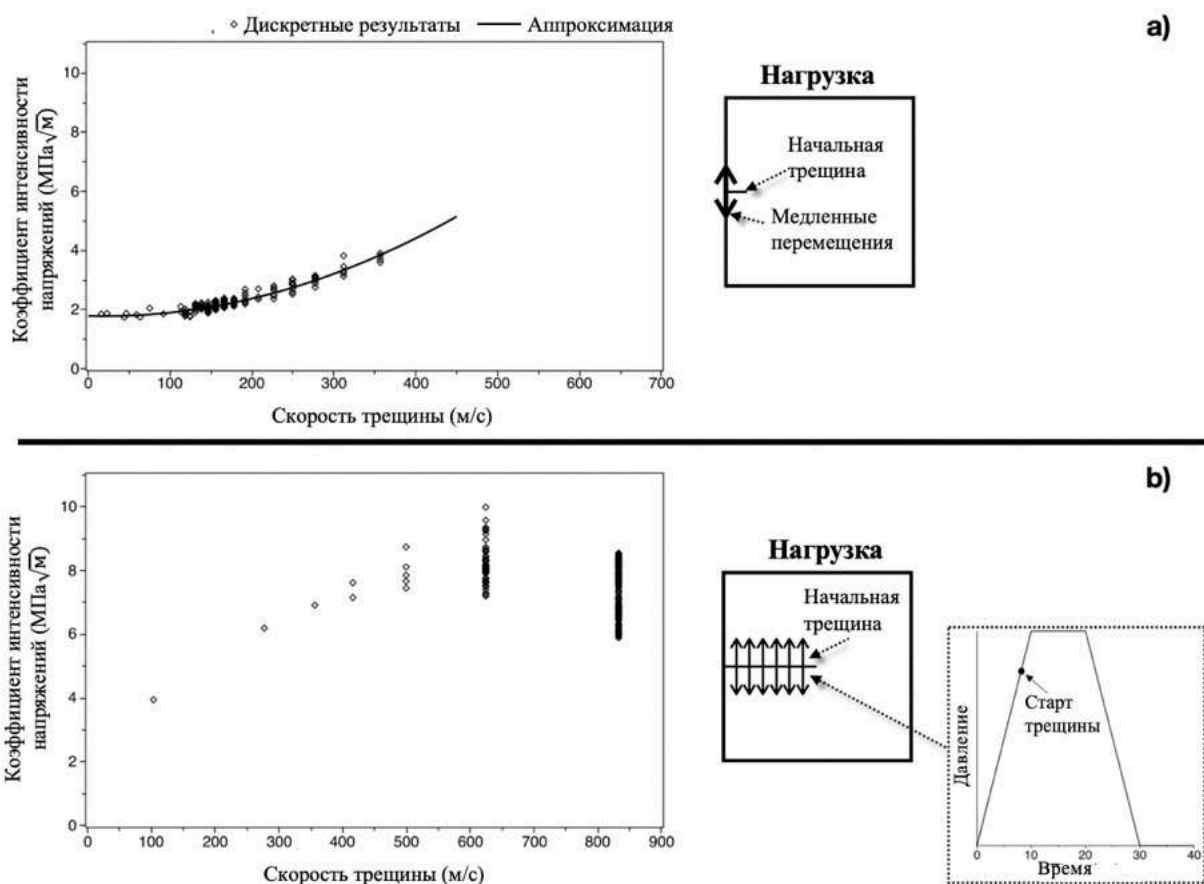


Рис. 4.8.  $K_I - \dot{a}$  зависимость для модельного материала; а – квазистатическое нагружение берегов трещины; б – импульс давления, приложенный к берегам трещины.

#### 4.4 Осцилляции скорости трещины

Как было отмечено выше, динамическое распространения трещин может сопровождаться нестабильным поведением характеристик и зависимостей, описывающих данный процесс. Рассмотренный в предыдущей секции эффект

разброса значений КИН при относительно высоких скоростях движения трещины относится к такого рода неустойчивостям. Данный раздел посвящен численному исследованию эффекта осцилляций скорости трещин, который наблюдался в ряде экспериментальных исследований (см., например, работы [15,16,164,165]).

В работе [16] исследовалось распространение трещины в пластинах из ПММА под воздействием перемещений, прикладываемых к верхней и нижней границам образцов. Авторы работы [16] регистрировали позицию вершины трещины и текущую скорость трещины. При этом авторы отмечают заметные осцилляции скорости трещины.

На рисунке 4.9 приведены экспериментальные данные из [16], а также результаты расчетов с использованием критерия (1.6). Выбор характерного размера  $d = 0.2$  мм согласно формуле  $d = 2K_{Ic}^2 / \pi \sigma_c^2$  позволяет численно получить осцилляции скорости трещины, амплитуды которых хорошо соответствует экспериментально наблюдаемому явлению.

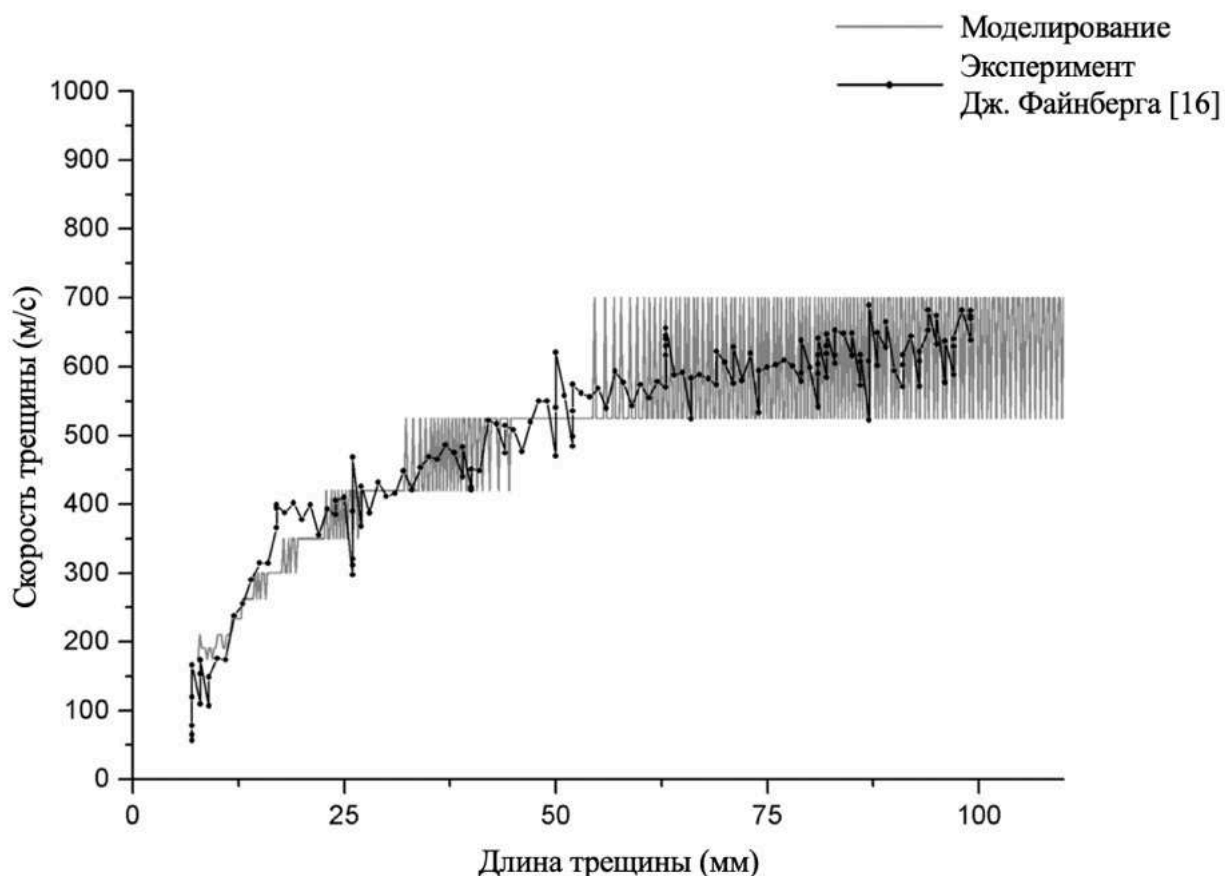


Рис. 4.9. Осцилляции скорости трещины. Экспериментальные данные из [16] и результаты моделирования с использованием структурно-временного подхода.

В работе [15] приведены результаты экспериментального и численные исследования динамического распространения трещины в образцах ПММА (экспериментальные исследования проведены И.В. Смирновым). В результате применения разработанного численного подхода удалось получить достаточно точное соответствие между численными результатами и экспериментальными данными. Например, зависимость длины трещины от времени практически полностью совпадает с экспериментальной кривой (рисунок 4.10). Некоторое отличие наблюдается в ускорении трещины – в эксперименте скорость трещины быстрее выходит на постоянное значение.

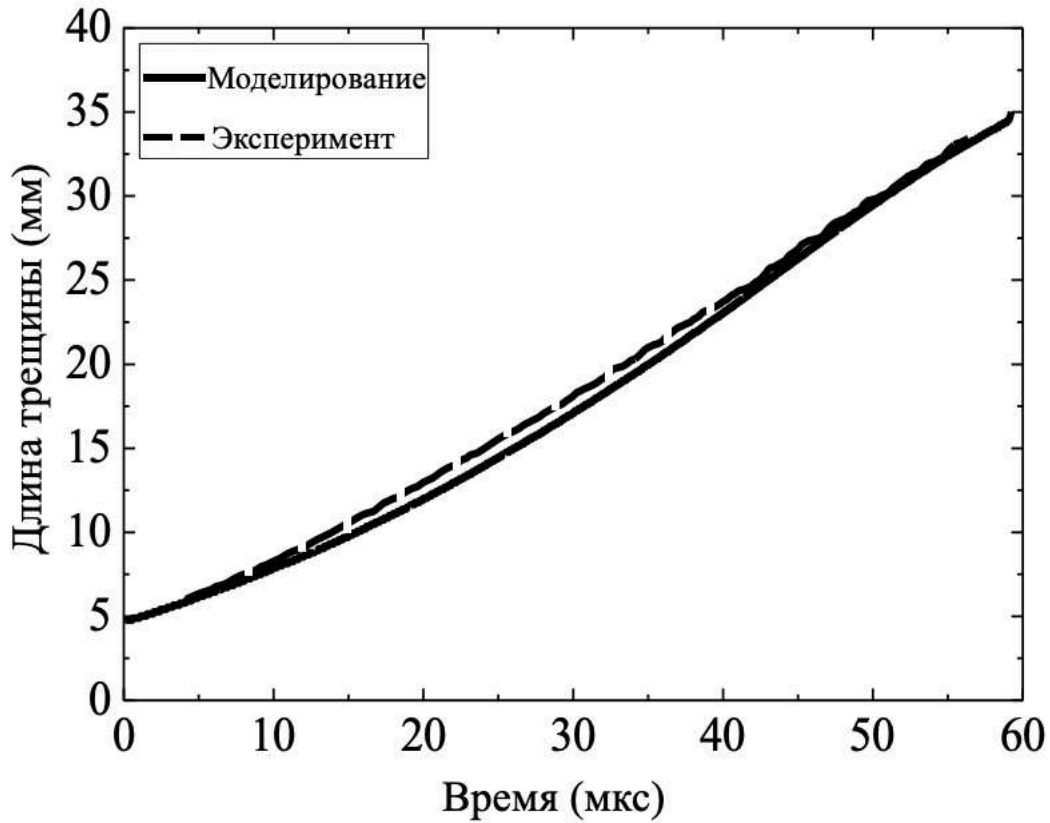


Рис. 4.10. Зависимость длины трещины от времени. Эксперимент и обработка экспериментальных результатов проведены И.В. Смирновым.

Этапы численного моделирования приведены на рисунке 4.11, на котором изображена эволюция поля напряжений (компонента  $\sigma_{yy}$ ) и продвижение трещины за счет снятия закрепления с узла, в котором выполнилось условие (1.6).



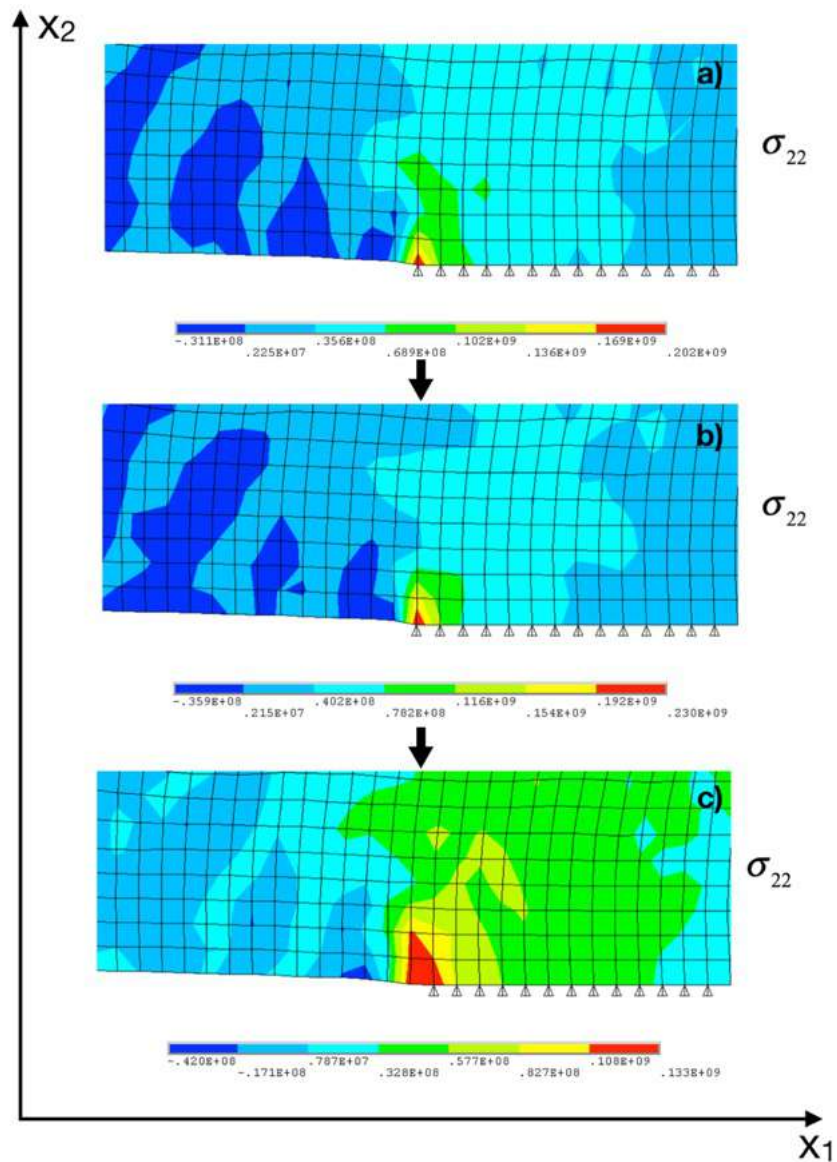


Рис. 4.11. Процесс распространения трещины: развитие напряженного состояния в окрестности трещины (a, b) и последующий сдвиг вершины трещины к следующему узлу (снятие ограничения на перемещение в узле), когда выполняется условие (1.6) (c).

Для экспериментов, проведенных в работе [15], также удалось численно исследовать осцилляции скорости трещины. Полученные при помощи разработанной численной схемы амплитуды осцилляций скорости трещины вписываются в экспериментально полученные значения (рисунок 4.12).

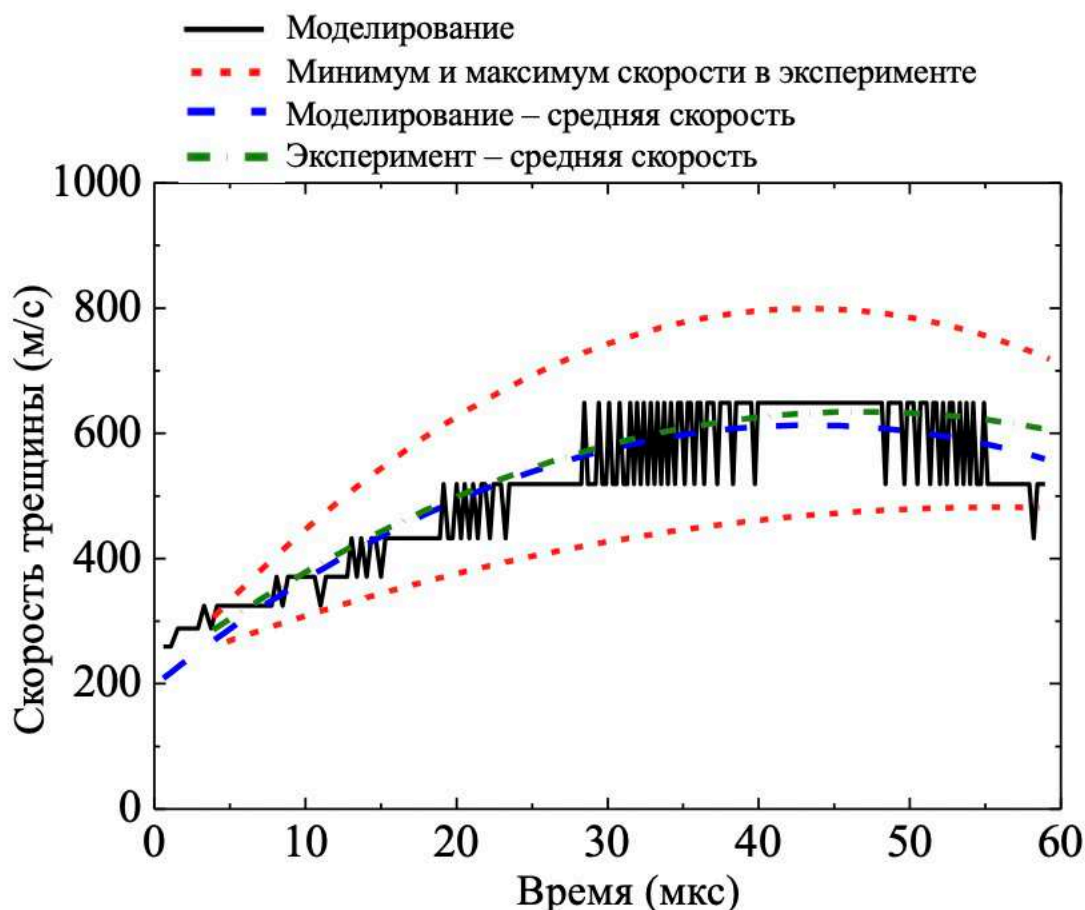


Рис. 4.12. Зависимость скорости трещины от времени. Эксперимент и обработка экспериментальных данных проведены И.В. Смирновым.

#### 4.5 Распространение множественных трещин в произвольном направлении. Динамическая фрагментация

Задачи динамического разрушения при ударе позволяют исследовать переход между масштабными уровнями разрушения. В действительности использование модели разрушения на основе инкубационного времени для моделирования распространения трещин также позволяет описать данный переход. Согласно критерию (1.6) масштаб разрушения определяется линейным размером  $d$ , который определяет минимальный характерный размер зоны регистрируемого разрушения. Таким образом, распространение магистральной трещины является совокупностью дискретных приращений с характерным

размером  $d$  и фактически распространение трещины – это результат эволюции разрушения с уровня с уровня, характеризуемого параметр  $d$  на следующий масштабный уровень. В случае задач о пробивании аналогом такого перехода является фрагментация преграды: разрушение на масштабном уровне, характеризуемом размером  $d$  приводит к образованию более крупных фрагментов, что можно трактовать как переход разрушения на более крупный масштабный уровень.

В данном разделе приведены результаты по численному моделированию процессов динамического фрагментирования хрупких материалов и исследованию характеристик данного процесса. Для исследования динамической фрагментации была разработана двумерная расчетная схема на основе МКЭ и критерия на основе инкубационного времени. Стоит отметить, что в данной схеме разрушение реализуется способом, отличным от примененного в трехмерном варианте схемы, рассмотренном в главе 5.

В разделе рассматривается модельная задача о пробивании круглых керамических преград стальными цилиндрическими ударниками. Использовались механические свойства керамик  $Al_2O_3$  и  $ZrO_2(Y_2O_3)$  (таблица 4.1 [166-168]), оба материала (керамическая мишень и стальной ударный элемент) считаются упругими. Мишень имеет следующие размеры: диаметр 100 мм и толщина 10 мм, в то время как длина стального ударного элемента составляет 100 мм, а диаметр - 10 мм. Разработанная численная схема основана на методе конечных элементов в двумерной осесимметричной постановке с неявным интегрированием по времени. Для расчета напряженно-деформированного состояния использовался решатель ANSYS, а для реализации критерия (1.6) и управления ходом решения были разработаны внешние управляющие процедуры. На рисунке 4.13 показана часть сетки конечных элементов и полная модель с примененным расширением симметрии.

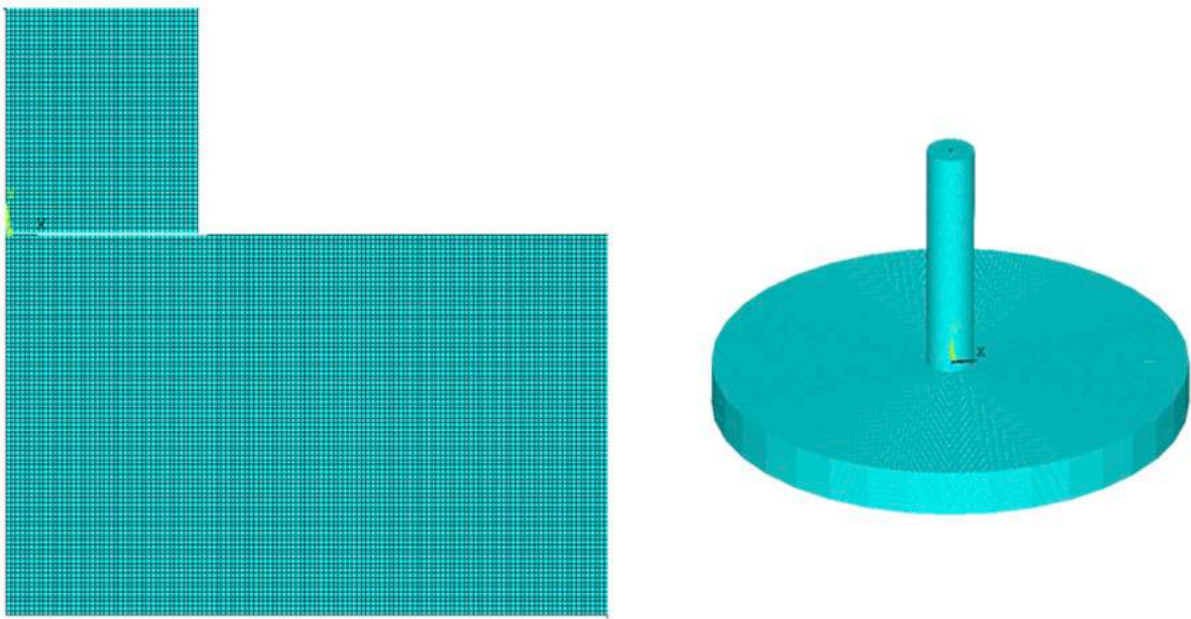


Рис. 4.13. Часть конечно-элементной сетки (контактная зона) и полная модель с примененным расширением симметрии.

	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	ZrO <sub>2</sub> (Y <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )	Steel projectile
Young's modulus, $E$ , GPa	366	200	200
Poisson's ratio, $\nu$	0.21	0.25	0.25
Density, $\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	3880	6000	7860
Ultimate stress, $\sigma_c$ , MPa	260	750	—
Incubation time, $\tau$ , $\mu$ s	1	1	—

Таблица 4.1. Используемые в расчетах механические свойства материалов.

Для решения задачи о пробивании и последующего анализа характеристик фрагментации была построена специальная сетка конечных элементов. В представленном случае сетка для решения методом конечных элементов была построена с использованием скрипта, расставляющего узлы и создающего элементы по узлам. Элементы не имеют общих узлов, однако узлы с одинаковыми координатами имеют связанные степени свободы и действуют как единый узел. Это ограничение сохраняется до тех пор, пока не будет выполнено условие (1.6). Когда происходит разрушение в соответствии с (1.6), связи с узлов

снимаются, а элементы разделяются, что приводит к образованию поверхности разрушения (см. рисунок 4.14). Поскольку применяется осевая симметрия, каждая трещина вносит свой вклад в общую площадь поверхности разрушения ( $S$ ) в соответствии с уравнением  $S = S + 4d * 2\pi R$ , где  $R$  – расстояние между трещиной и осью симметрии.

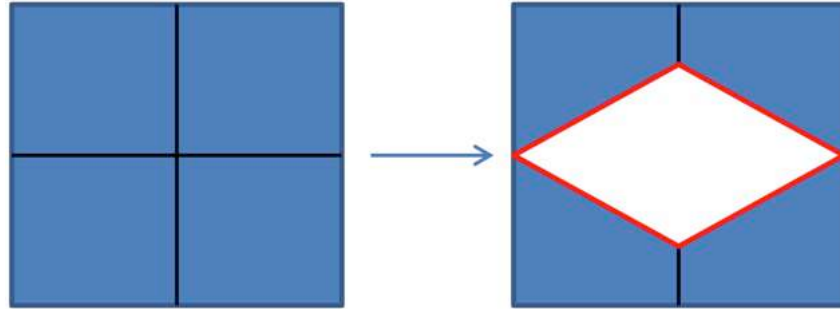


Рис. 4.14. Снятие связи с совпадающих узлов и образование новой поверхности.

Размер элемента равен  $d$ , и, следовательно, минимальное приращение длины трещины равно  $d$ , что соответствует концепции структурно-временного подхода. Временной шаг решения выбран таким образом, чтобы он был меньше времени, необходимого для прохождения расстояния  $d$  самой быстрой волной.

Для анализа фрагментации керамических мишеней была разработана отдельная программа. Конечно-элементная сетка рассматривается как граф, элементы которого являются узлами графа. Таким образом, отдельные фрагменты объекта являются связанными компонентами графа элементов, что позволило использовать стандартные алгоритмы для анализа связности графов.

#### Результаты моделирования процессов динамического фрагментирования

*Площадь поверхности разрушения.* В данном разделе представлены результаты расчетов площади поверхности разрушения. На рисунке 4.15 показана типичная эволюция поверхности разрушения во времени: резкий рост площади поверхности указывает на активное растрескивание образца, а значение площади поверхности разрушения достигает своего максимума и прекращает расти, когда процесс разрушения завершен.

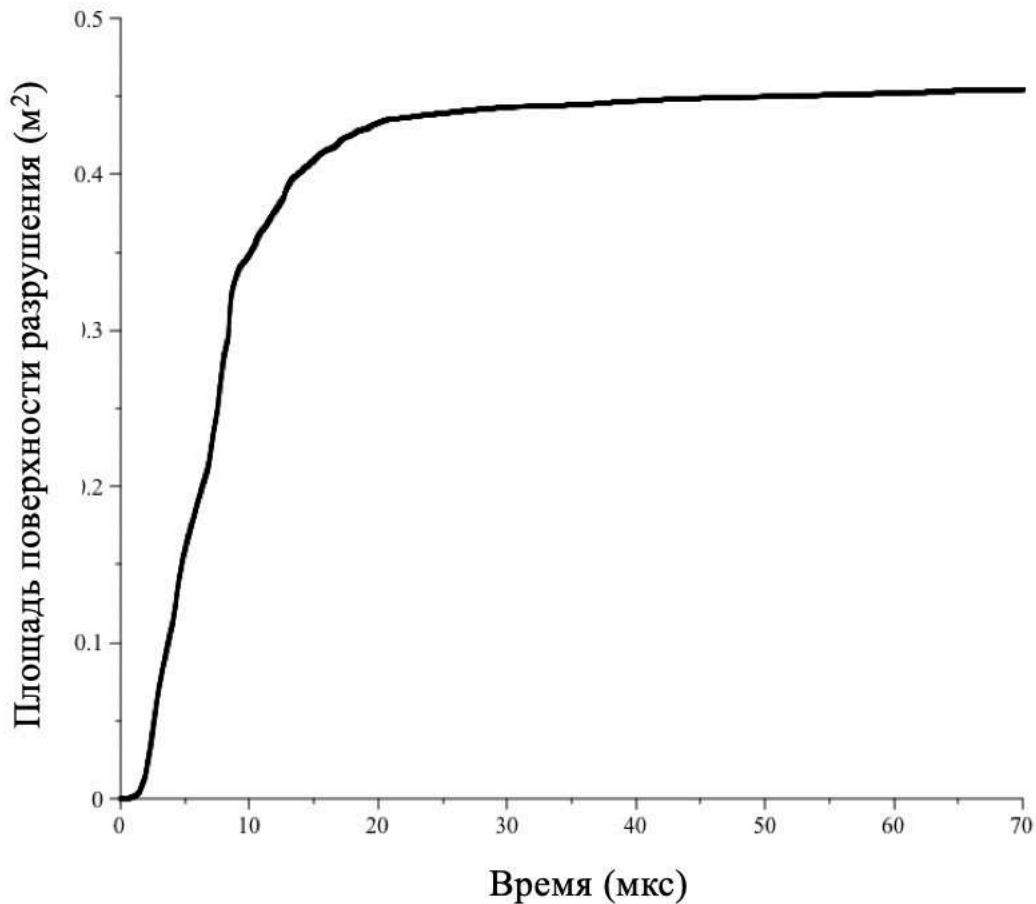


Рис. 4.15. Изменение площади поверхности разрушения во времени.

Представлены данные для мишени из  $Al_2O_3$  и скорости ударника 350 м/с.

Расчеты были выполнены с параметром времени инкубации 1 мкс для обоих материалов. Зависимость площади поверхности разрушения от скорости ударного элемента показана на рисунке 4.16. Для исследованных режимов площадь поверхности разрушения увеличивается с увеличением скорости ударного элемента для материала  $Al_2O_3$ . Однако для керамики  $ZrO_2(Y_2O_3)$  результаты стабилизируются в зоне высоких скоростей. Это может свидетельствовать о том, что в процессе динамического разрушения достигнут максимальный уровень поглощения энергии.

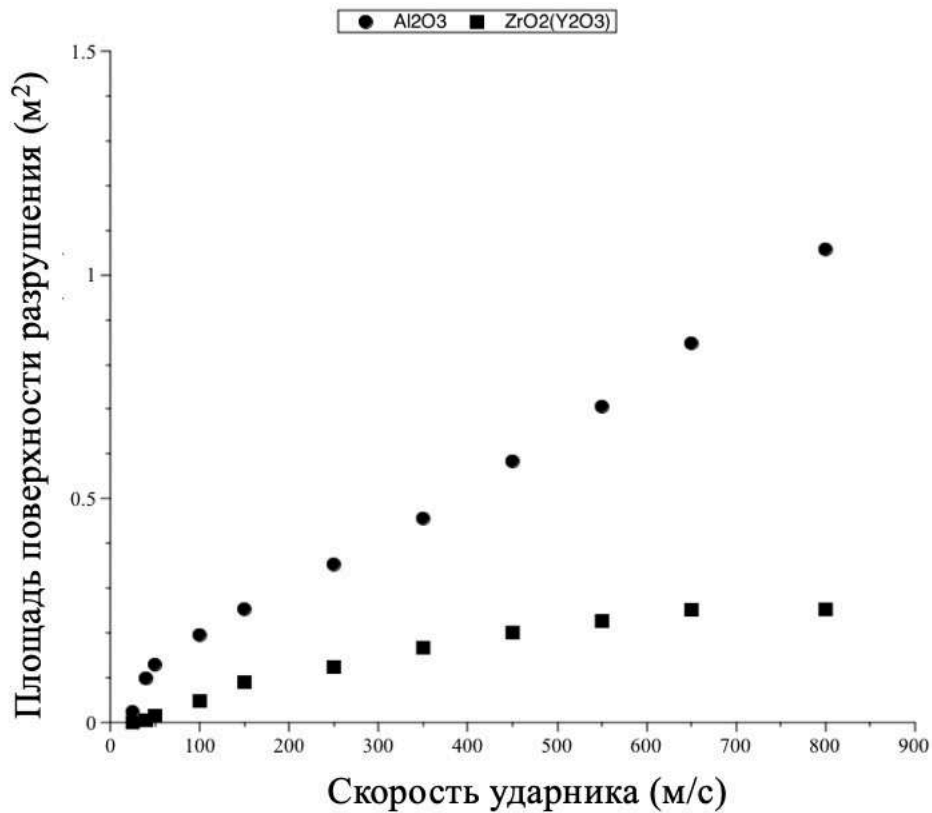


Рис. 4.16. Зависимость площади поверхности разрушения от скорости удара.

*Остаточная скорость ударника.* На рисунке 4.17 представлена зависимость остаточной скорости ударника от начальной скорости. Отрицательные остаточные скорости указывают на то, что ударник не пробил мишень и отскочил от нее. Для обоих материалов остаточная скорость ударника линейно зависит от начальной скорости при проникновении в мишень. В целом, керамика  $ZrO_2(Y_2O_3)$  продемонстрировала гораздо лучшие баллистические характеристики при гораздо более высокой предельной скорости (около 380 м/с) по сравнению с примерно 80 м/с для мишени из  $Al_2O_3$ . Для всех расчетов в этом разделе использовалось время инкубации, равное 1 мкс.

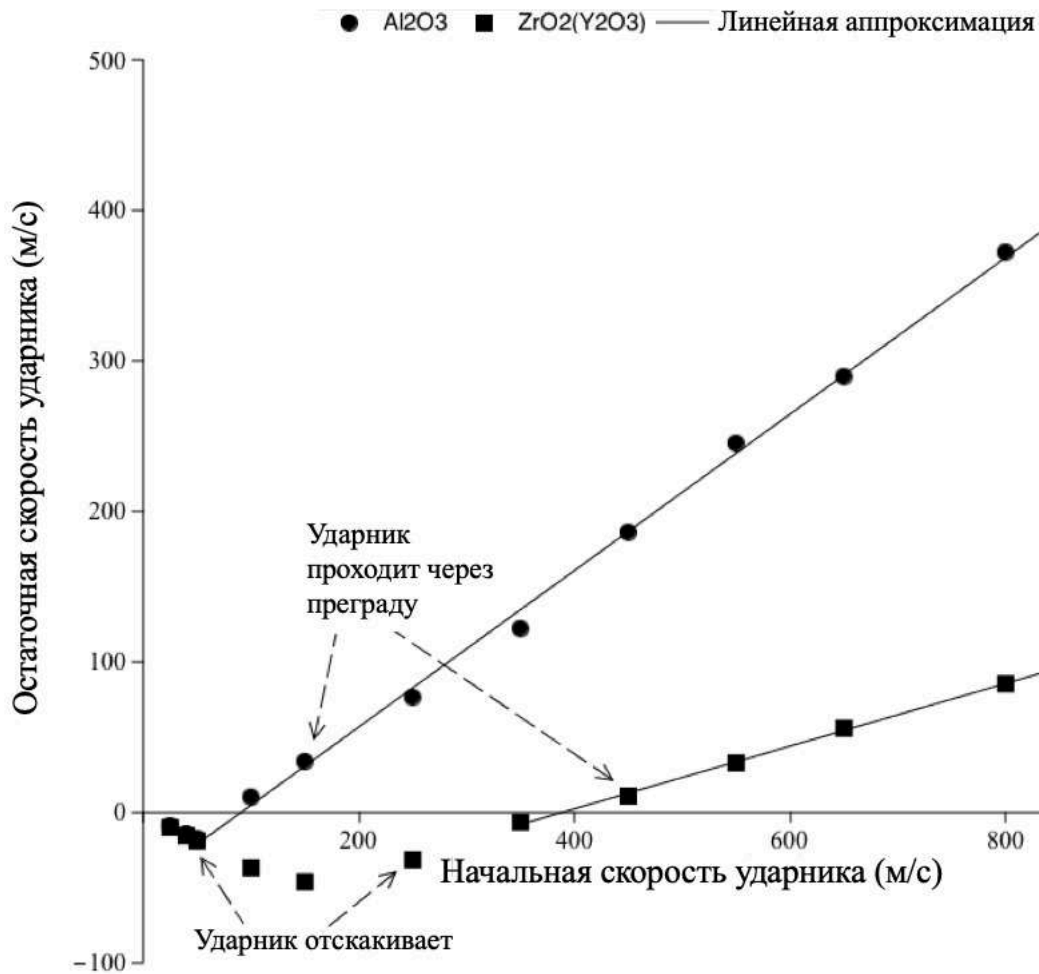


Рис. 4.17. Зависимость остаточной скорости ударника от начальной скорости.

*Динамическое фрагментация. Количество фрагментов.* На рисунке 4.18 представлена зависимость общего количества фрагментов от скорости удара. Более высокие скорости удара приводят к более интенсивному дроблению цели и большему общему количеству осколков. Этот результат естественным образом коррелирует с зависимостью поверхности разрушения от скорости удара (рисунок 4.16): для керамики ZrO<sub>2</sub>(Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) количество осколков остается практически постоянным при скорости удара выше 700 м/с.



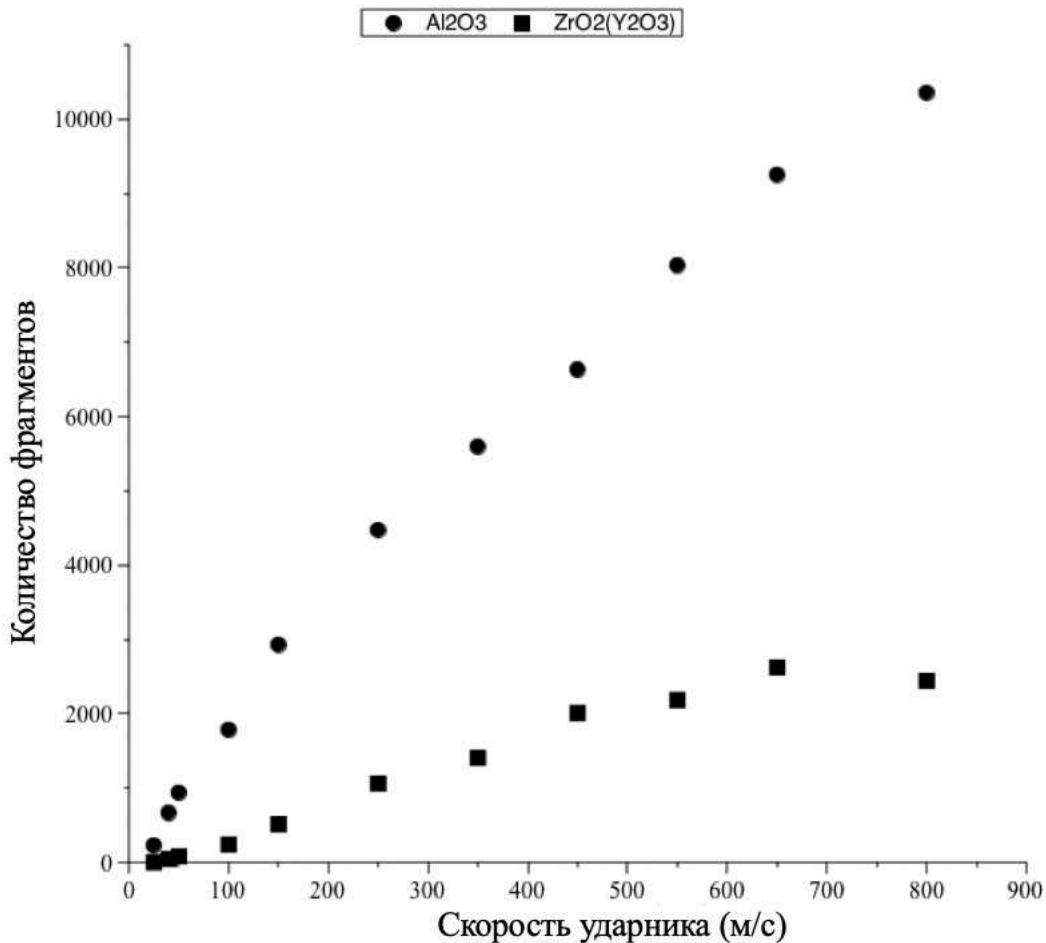


Рис. 4.18. Зависимость количества осколков от скорости удара.

*Динамическая фрагментация. Распределение фрагментов по размерам.* В данном разделе представлено распределение фрагментов по размерам. Суммарная доля фрагментов всех размеров представлена с использованием осей логарифмического масштаба. Размер фрагмента измеряется как количество элементов, из которых он состоит. Экспериментальные исследования процесса динамического дробления обычно выявляют степенное распределение фрагментов [89]. Степенная аппроксимация (прямая линия в логарифмическом масштабе) достаточно хорошо работает для области распределения небольших фрагментов, в то время как для более крупных фрагментов могут возникнуть расхождения. На рисунке 4.19 показано распределение размеров фрагментов, представленное в работе [169], где можно наблюдать вышеупомянутую тенденцию.

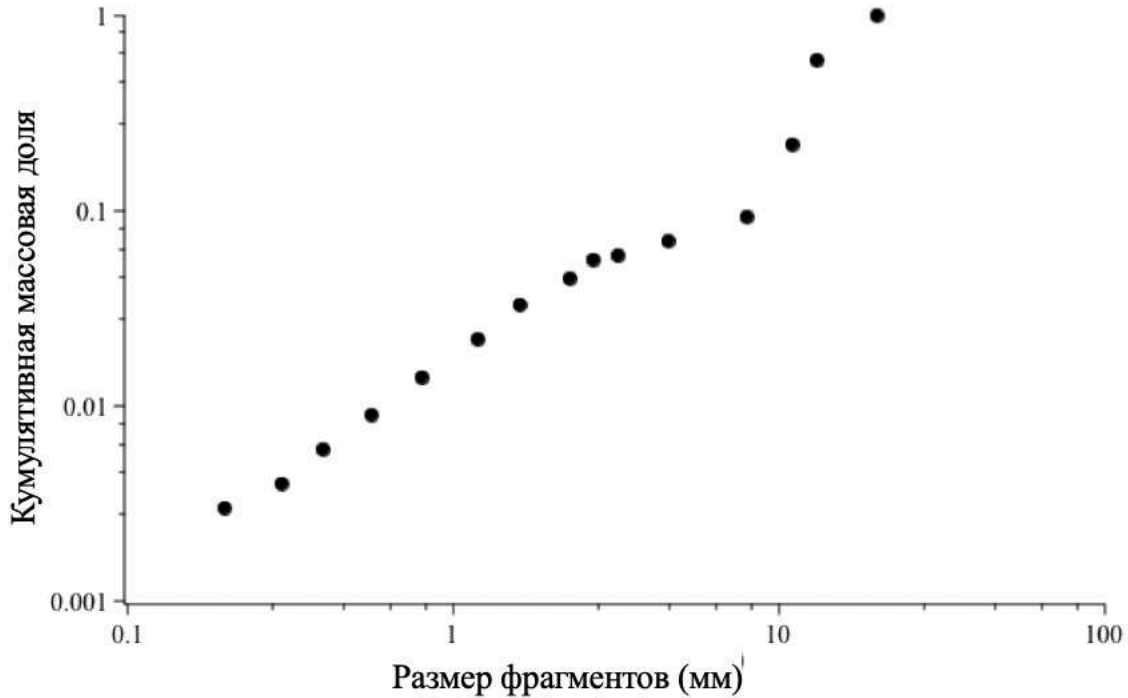


Рис. 4.19. Экспериментальные результаты по фрагментации стекла [169].

Полученные численные результаты качественно описывают экспериментальные зависимости – для фрагментов меньшего размера наблюдается линейная зависимость кумулятивной доли фрагментов от их размера, для фрагментов с размером выше среднего эта зависимость приобретает нелинейный характер. На рисунке 4.20 представлено типичное распределение фрагментов для обоих материалов и скорости удара со скоростью 350 м/с. Соответствующие схемы фрагментации, показывающие фрагменты, различающиеся по цвету (за исключением самых маленьких одноэлементных фрагментов, которые все окрашены в черный цвет), показаны под каждым графиком.

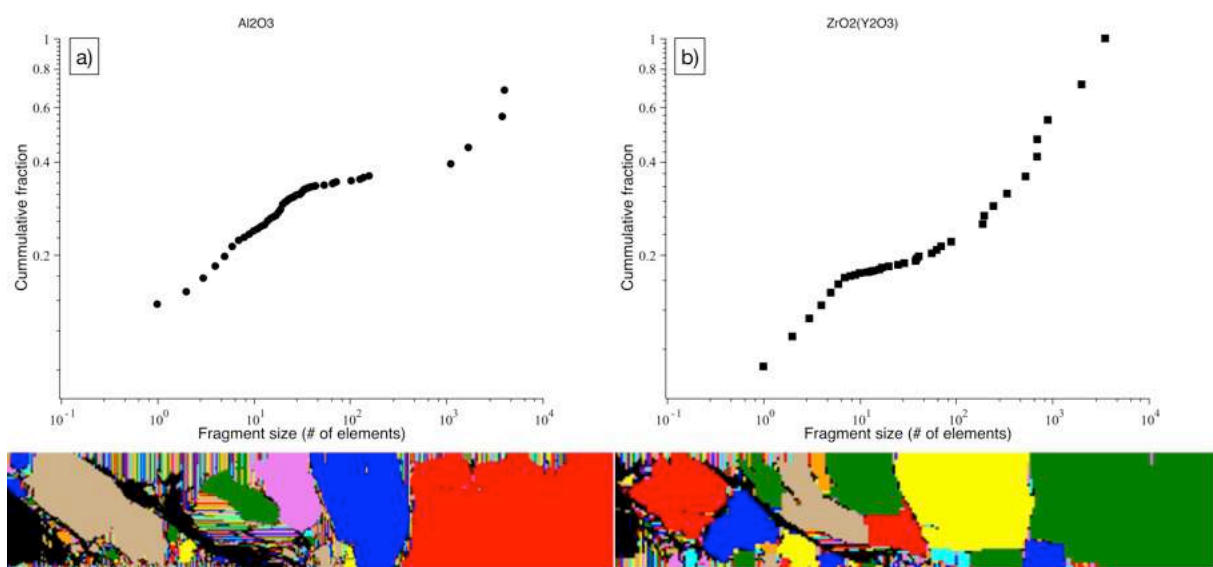


Рис. 4.20. Кумулятивная доля фрагментов в зависимости от их размера и соответствующие схемы фрагментирования; а) – Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, б) – ZrO<sub>2</sub>. Левый край представленных структур фрагментации совпадает с осью симметрии мишени.

#### 4.6 Выводы к главе 4

В главе 4 были проанализированы нестационарные эффекты, сопровождающие динамическое распространение трещины в хрупких материалах. Численные исследования проводились при помощи метода конечных элементов и структурно-временного критерия разрушения. Структурно-временная модель разрушения подразумевает пространственную и временную дискретизацию процесса разрушения, так как в рамках данной модели используется минимальный рассматриваемый объем разрушающегося материала (в случае движения трещины – минимальный возможный проскок трещины), а также характерное время разрушения – инкубационное время.

Дискретизация процесса разрушения в рамках структурно-временного подхода позволяет получить ряд принципиальных результатов, согласующихся с экспериментами. Во-первых, внедрение минимального продвижения трещины согласно структурно-временному критерию разрушения позволяет численно исследовать нестационарное поведение скорости движущейся трещины: так,

были получены экспериментально наблюдаемые осцилляции скорости трещины, распространяющейся в пластинах из ПММА в условиях разгона динамической трещины, вызванного квазистатическим нагружением. Амплитуда осцилляций скорости трещины, полученная при помощи расчетов, хорошо совпадает с экспериментальными значениями.

Также использование структурно-временного подхода позволяет исследовать вопрос единственности зависимости коэффициента интенсивности напряжений от скорости трещины ( $K_I - \dot{a}$  зависимость). Вследствие дискретного характера распространения трещины при использовании структурно-временной модели и метода конечных элементов наблюдается заметный разброс значений КИН, соответствующих выбранным значениям скорости трещины. При этом разброс значений КИН для случая квазистатического нагружения относительно невелик, и классическая зависимость  $K_I - \dot{a}$  «в среднем» может быть построена. В случае же высокоскоростного нагружения значительный разброс значений КИН не позволяет построить такую зависимость: трещина может двигаться с практически постоянной скоростью, тогда как соответствующий ее значению коэффициент интенсивности изменяется в широком диапазоне. Такое поведение соответствует экспериментам [70,71].

Таким образом, с одной стороны, использование структурно-временного подхода позволяет разрешить противоречия, возникшие относительно единственности зависимости  $K_I - \dot{a}$  для данного материала, а с другой стороны обойтись без априорного знания данной зависимости для прикладных расчетов динамики трещин. Это определяет существенное преимущество развитого подхода по сравнению с традиционными, так как экспериментальное определение зависимости КИН от скорости трещины – весьма трудоемкий процесс, приводящий к неоднозначным результатам.

Больше информации в работах [14,15,86,87,88,183,184,186,187,188,190].

## **Глава 5. Структурно-временной подход в задачах о пробивании преград**

В данной главе представлены экспериментальные и численные результаты по динамическому разрушению пластин из хрупких материалов, подвергнутых ударной нагрузке. Экспериментальные испытания проводились с использованием стального снаряда цилиндрической формы, разгоняемого с помощью газовой пушки. Для оценки характеристик испытываемых образцов остаточная скорость удара была определена с помощью высокоскоростной фотосъемки. Образцы ПММА квадратной формы трех толщин были исследованы с использованием различных начальных скоростей снаряда. Для всех трех типов образцов были экспериментально получены баллистические пределы. Проведенные эксперименты были численно смоделированы с использованием метода конечных элементов с явной схемой интегрирования по времени и модели разрушения на основе инкубационного времени для прогнозирования разрушения материала. Эксперименты со всеми тремя конфигурациями образцов были успешно смоделированы с использованием одного параметра – инкубационного времени, которое было оценено по существующим экспериментальным данным о динамическом разрушении ПММА. В дополнение к моделированию проведенных экспериментов были проведены оценки прочности образца с размерами, для которых экспериментальные данные отсутствовали.

Также в пятой главе предложен подход к преодолению типичных для задач о пробивании проблем – высоких требований к вычислительным ресурсам и потенциальным численным нестабильностям, возникающим из-за высоких напряжений в зоне контакта и высоких скоростей деформации. Подход основан на применении искусственных нейронных сетей (ИНС), обученных на массивах численных результатов решения задач о пробивании. Работа подхода

продемонстрирована на примере задачи о пробивании перфорированных пластин.

### **5.1 Использование структурно-временного подхода для моделирования разрушения при пробивании преград**

Данный раздел посвящен экспериментальным и численным исследованиям динамического разрушения при ударном воздействии, а именно моделированию пробивания преград ударниками. Экспериментальные исследования проведены с использованием газовой пушки и оборудования для высокоскоростной съемки, а моделирование проводится при помощи метода конечных элементов (МКЭ) и критерия на основе концепции инкубационного времени.

#### Экспериментальные исследования

Эксперименты проводились с использованием квадратных пластин (100 мм x 100 мм) пластины из ПММА трех толщин (4 мм, 6 мм и 10 мм). Образец был закреплен в держателе с четырьмя захватами (см. рисунок 5.1).



Рис. 5.1. Схема закрепления образца.

Схема всей экспериментальной установки показана на рисунке 5.2. Начальная скорость снаряда регулировалась давлением воздуха в системе и соответствующим выбором мембран, используемых в затворной системе. В затворе использовались две мембраны, каждая из которых могла выдерживать половину рабочего давления. Из-за падения давления во вспомогательной камере мембраны лопаются, и снаряд начинает движение по стволу. Начальная скорость была измерена с помощью магнитной катушки, расположенной на конце ствола, в то время как остаточная скорость удара была оценена с помощью высокоскоростного фотографического оборудования HSFC pro производства PCO AG. Эта установка состоит из четырех модулей Dicom pro, которые позволяют снимать восемь кадров с переменным временным интервалом. Практически для всех экспериментов интервал между кадрами составлял 150 мкс.

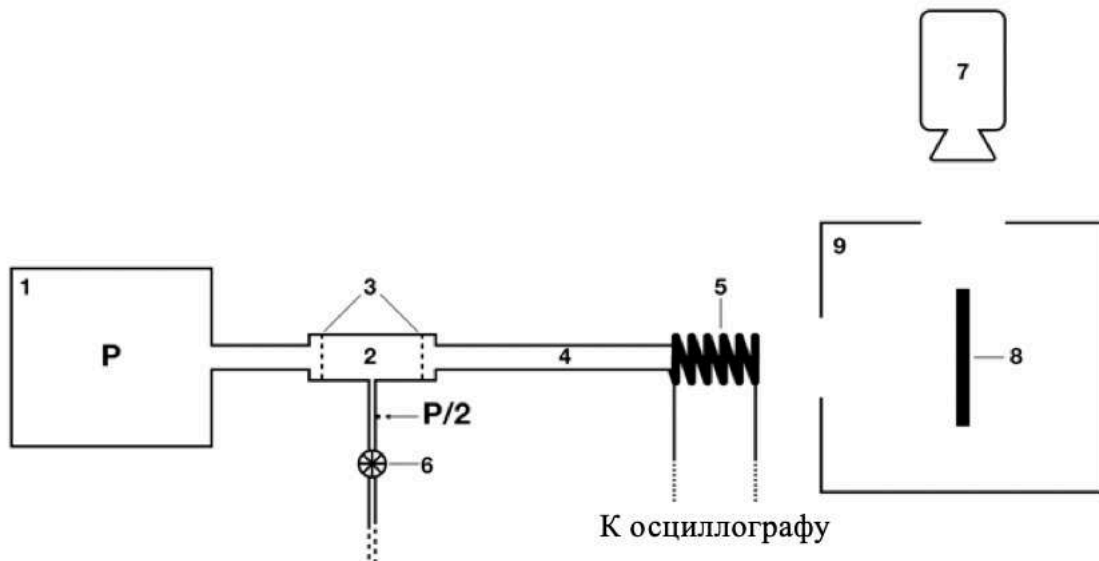


Рис. 5.2. Схема экспериментальной установки: 1 – камера высокого давления, 2 – затворное устройство, 3 – мембраны, 4 – барабан, 5 – магнитная катушка для измерения скорости снаряда, 6 – клапан сброса давления для запуска выстрела, 7 - высокоскоростная камера, 8 – образец, 9 – защитная камера; P указывает на давление.

Стальной цилиндрический ударник (диаметр 6.9 мм, длина 30 мм, масса 8.7 г) разгонялся до скоростей в диапазоне от 40 до 350 м/с. Снаряд помещается в разгонный модуль с диаметром, соответствующим диаметру ствола. Разгонный модуль останавливается в конце ствола в результате удара о барьер, снаряд же продолжает движение. При ударе разгонного модуля о барьер замыкается электрическая цепь и включается высокоскоростная съемка с программируемой временной задержкой.

### Численная схема

Для моделирования проведенных в рамках исследования экспериментов была разработана численная схема, основанная на методе конечных элементов с явным интегрированием по времени. В качестве решателя используется программное обеспечение LS-DYNA. Процесс динамического разрушения контролируется при помощи критерия инкубационного времени, детальное описание которого дано в разделе 1.3.

В соответствии с критерием инкубационного времени условие начала разрушения в бездефектной среде в точке  $x$  момент времени  $t$  выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \frac{1}{d} \int_{x-d}^x \sigma(x', t') dx' dt' \geq \sigma_c \quad (5.1),$$

где  $\sigma(x, t)$  – зависящее от времени и координаты нормальное напряжение, действующее на рассматриваемую площадку,  $\sigma_c$  – статическое критическое напряжение при растяжении материала,  $\tau$  обозначает инкубационное время.

Левая часть неравенства (5.1) содержит интегрирование по времени и, таким образом, учитывает историю напряжений. Предполагается, что процессы микроскопического разрушения развиваются из-за действующих на рассматриваемую площадку нормальных напряжений  $\sigma(x, t)$ , и для развития



макроскопического разрушения требуется определенное время. При этом разрушение происходит по рассматриваемой площадке, то есть, объем с характерным размером  $d$  разделяется на 2 части по рассматриваемой площадке.

Значение инкубационного времени может быть определено в экспериментах по динамическому разрушению. Для этого необходимо зарегистрировать время начала разрушения и определить зависимость напряжения от времени в рассматриваемой точке. Функция зависимости напряжения от времени затем подставляется в формулу (5.1) и значение  $\tau$  подбирается так, чтобы согласно (5.1) разрушение происходило в зарегистрированное время начала разрушения. Для определения  $\tau$  можно использовать, например, эксперименты по откольному разрушению или эксперименты по старту трещин.

Здесь следует отметить, что правильный выбор уровня масштаба разрушения имеет решающее значение для корректности моделирования. Следует определить уровень масштаба разрушения, который будет учитываться в исследуемой задаче, а затем использовать соответствующее значение, которое было измерено на соответствующем уровне масштаба. Для более подробного обсуждения масштабов разрушения можно обратиться к работе [170].

Критерий инкубационного времени был реализован с помощью пользовательского материала (процедура UMAT41) в коде LS-DYNA. Эволюция напряжений для каждого элемента сохраняется в дополнительном параметре массива, а интеграл по времени в неравенстве (5.1) вычисляется в соответствии с правилом трапециевидного интегрирования. Размер элемента равен линейному размеру  $d$ , используемому в критерии разрушения (5.1), и для моделирования развития трещины используется метод удаления элемента. Элемент удаляется из сетки, если в нем на одной из рассматриваемых площадок выполняется условие (5.1). Анализ зависимости результатов от размера сетки показал, что дальнейшее уменьшение размера элемента не влияет на результаты вычислений.

Было обнаружено, линейный элемент с 8 точками интегрирования является наиболее надежным с точки зрения стабильности численного моделирования. Сетка конечных элементов показана на рисунке 5.3. Задача решается в трехмерной постановке, и граничные условия выполнены благодаря ограничениям на перемещение, наложенным на узлы, расположенные под захватами держателя (см. рисунок 5.1).

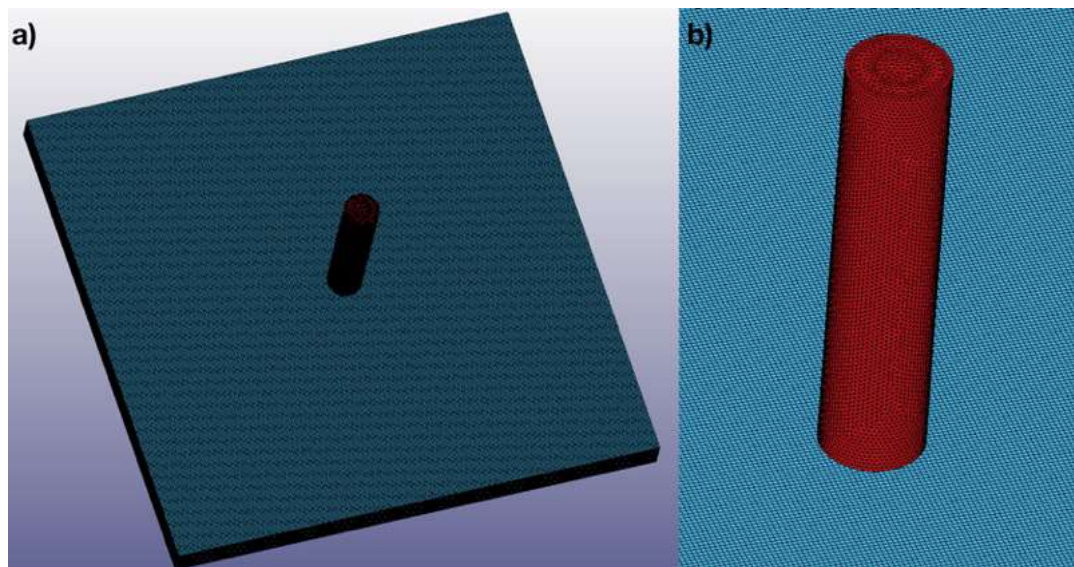


Рис. 5.3. Конечно-элементная сетка с увеличенной зоной контакта (b). Показана модель для пластины толщиной 6 мм.

Параметры материала, использованные при моделировании, приведены в таблице 5.1. Все свойства были взяты либо из информации, предоставленной производителем ПММА, либо из других источников [171]. Предполагалось, что поведение материала определяется законом Гука, и, таким образом, двух параметров материала (модуля Юнга и коэффициента Пуассона) было достаточно для описания зависимости напряжения от деформации. Значение инкубационного времени, равное течению 1 мкс, обеспечило хорошее совпадение численных результатов с экспериментальными данными. Это значение близко к инкубационному времени ПММА для микроуровня (0,8 мкс), рассчитанному в [170]. Согласно [170], значение 0,8 мкс было получено в результате экспериментов по отколу в стержнях из ПММА, где было зарегистрировано

микрорастрескивание. Удаление элемента (так называемая эрозия элемента) из расчета, примененное разработанной расчетной схеме, также можно рассматривать как мелкомасштабное разрушение, поскольку размер элемента невелик по сравнению с размерами образца.

Таким образом, в рассматриваемом случае использовалось значение инкубационного времени, равное 1 мкс. Значения  $\tau$ , близкие к 1 мкс, также использовались для моделирования динамического распространения трещин в образцах из ПММА [14,15].

	<b>ПММА (преграда)</b>	<b>Сталь (снаряд)</b>
Модуль Юнга, $E$ , Па	3.3e9	2.09e11
Коэффициент Пуассона, $\nu$	0.35	0.28
Плотность, $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	1180	7720
Критическое статическое напряжение, $\sigma_c$ , Па	72e6	-
Критический коэффициент интенсивности напряжений $K_{Ic}$ , МПа $\sqrt{м}$	1.7	-
Инкубационное время, $\tau$ , мкс	1	-

Таблица 5.1. Свойства материалов, использованные при моделировании.

### Результаты

В данном подразделе приведены как экспериментальные результаты, так и результаты численного моделирования с использованием разработанной расчетной схемы. На рисунке 5.4 показан типичный набор кадров с высокоскоростной камеры, полученных в результате проведенных испытаний. Кадры 5-8 были использованы для расчета остаточной скорости снаряда.

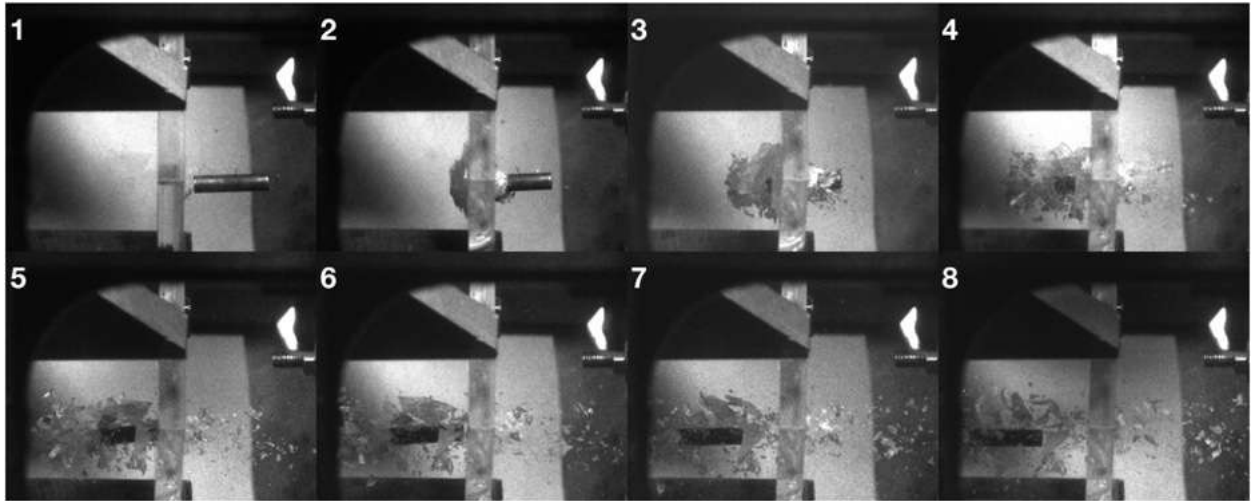


Рис. 5.4. Последовательность кадров скоростной фотосъемки, использованная для расчета остаточной скорости ударного элемента. Изображен случай мишени толщиной 10 мм и начальной скорости ударного элемента 144 м/с. Эксперименты проведены совместно с В.В. Баландиным и В.В. Баландиным мл.

Типичный случай пороговой скорости ударника (баллистический предел) показан на рисунке 5.5. Ударник почти полностью останавливается мишенью, и полного пробития не наблюдается, однако мишень серьезно повреждена.

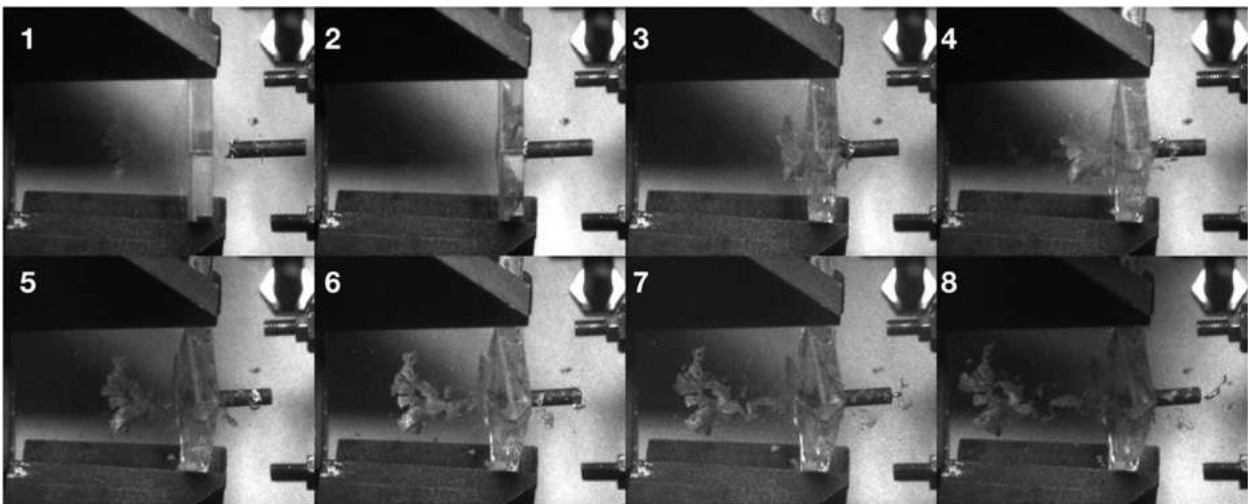


Рис. 5.5. Высокоскоростная фотосъемка удара с пороговой скоростью: толщина пластины 10 мм, скорость удара 70 м/с. Эксперименты проведены совместно с В.В. Баландиным и В.В. Баландиным мл.

Экспериментально и численно полученные зависимости остаточной скорости удара ( $V_r$ ) от начальной скорости удара ( $V_i$ ) показаны на рисунке 5.6 вместе с баллистическими пределами. Зависимости могут быть аппроксимированы прямой линией для средних и высоких скоростей удара, в то время как значения  $V_r$  резко падают в диапазоне скоростей, близких к баллистическому пределу. Некоторые графики численных результатов на рисунок 5.6 содержат отрицательные значения, что означает, что снаряд отскочил от цели и пробития не произошло.

Численные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными, особенно для более тонких пластин. Во всех случаях численная модель могла надежно предсказать баллистический предел для исследуемых мишеней. Зависимость  $V_r - V_i$  была предсказана численно с использованием модели для пластины толщиной 5 мм и был оценен баллистический предел для данной конфигурации преграды.

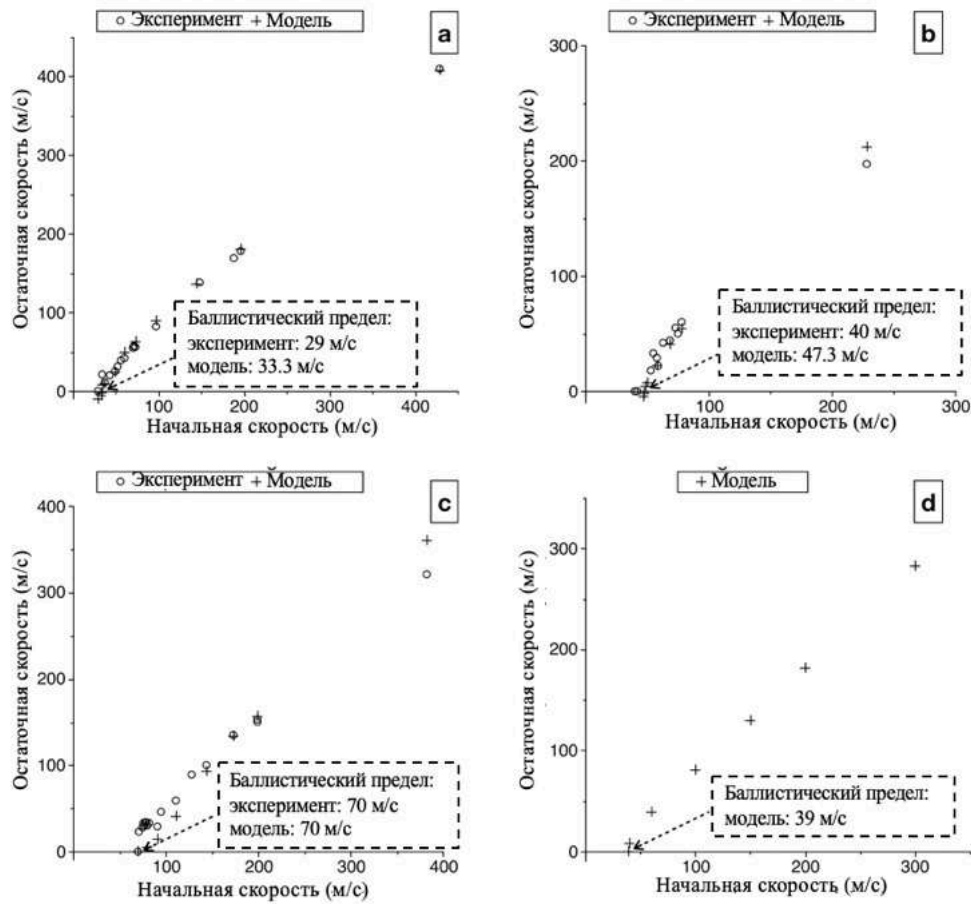


Рис. 5.6. Зависимости остаточной скорости снаряда от его начальной скорости для образцов различной толщины; (a)–(c) сравнение экспериментальных данных и численных результатов; (d) – численный прогноз, стрелки указывают баллистический предел.

На рисунке 5.7 показаны как экспериментальные, так и расчетные зависимости баллистического предела от толщины образца, а также численный прогноз для пластины толщиной 5 мм.

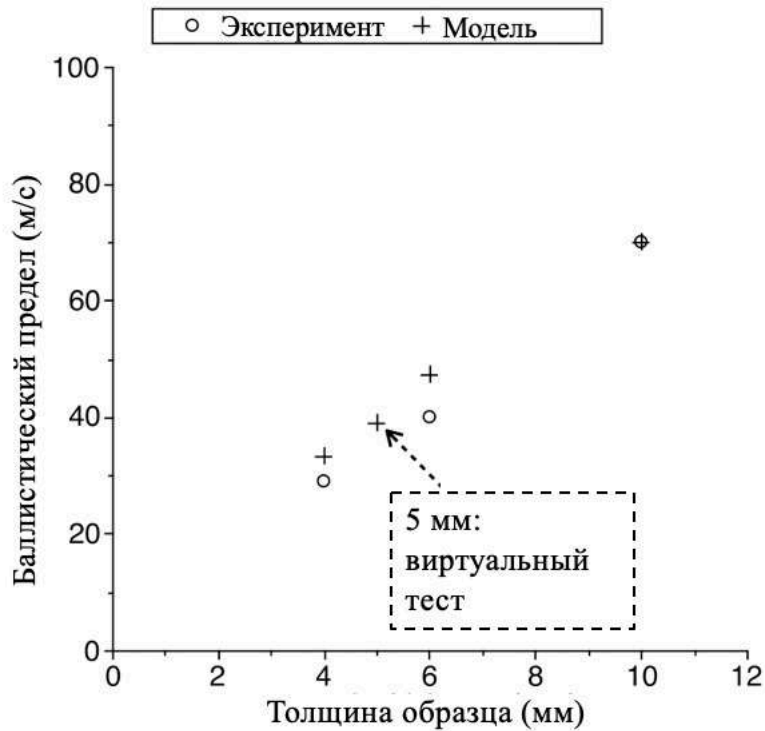


Рис. 5.7. Зависимость баллистического предела от толщины образца; точка 5 мм – численный прогноз.

Полученные при помощи разработанной численной схемы характеристики разрушения в целом соответствуют экспериментальным результатам. В результате удара образуются кратеры и трещины, распространяющиеся к краям образца. При относительно низких скоростях удара картина разрушения аналогична. Более высокие скорости удара приводят к образованию более коротких трещин по сравнению с результатами эксперимента. Характер разрушения при относительно низких скоростях удара напоминает таковые в чисто квазистатическом случае – трещины распространяются в направлении зажимов. Характер разрушения меняется при более высоких скоростях удара, поскольку в этом случае эффект от метода фиксации менее выражен из-за меньшего времени взаимодействия мишени и снаряда. Относительно короткое время взаимодействия приводит к концентрации энергии удара в пятне контакта, что приводит к более локализованному разрушению. На рисунке 5.8 сравниваются численные результаты и экспериментальные схемы разрушения

пластины толщиной 10 мм при трех скоростях удара, включая пороговую (70 м/с).

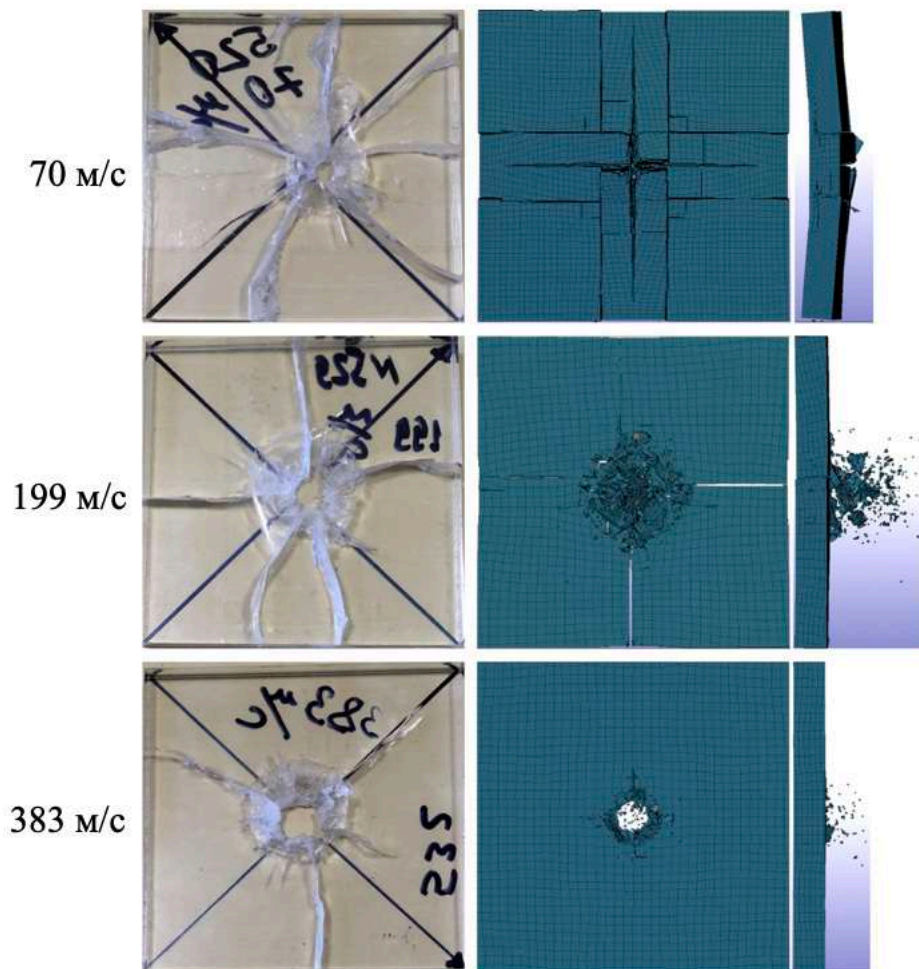


Рис. 5.8. Схемы развития разрушения: эксперимент и численное моделирование; показаны результаты для пластины толщиной 10 мм.

Таким образом, применение критерия на основе концепции инкубационного времени позволило получить достаточно точное соответствие между расчетными и экспериментальными зависимостями, описывающими динамическое разрушение при пробивании преград. В частности, была получена зависимость остаточной скорости ударника от начальной скорости, а также пороговые значения скорости снаряда (баллистический предел) для трех толщин образцов. Используемая модель содержит фактически один новый параметр материала – инкубационное время, а также параметр, характеризующий



пространственную дискретизацию процесса разрушения и выбор масштабного уровня, на котором происходит анализ разрушения.

## **5.2 Применение искусственных нейронных сетей для предсказания прочности перфорированных преград**

Решение задач о пробивании преград обычно требуют больших вычислительных мощностей и занимает много времени. Например, решение задачи из первого параграфа данной главы требовало около 100 гигабайт оперативной памяти и занимало около 10 часов при использовании процессора с 16 вычислительными ядрами. В данном конкретном случае это во многом обусловлено моделью разрушения – согласно структурно-временному критерию разрушения выбирается масштабный уровень при помощи параметра  $d$ , что в свою очередь обуславливает выбор размера элемента. В параграфе 5.1  $d = 0.3$  мм и общее количество элементов достигало 2 миллионов (для преграды с толщиной 10 мм). Быстро получить решение такой задачи невозможно, как и невозможно одновременное решение нескольких таких задач. Также стоит отметить, что при моделировании задач о пробивании вычислительные трудности не являются редкостью. Иногда элементы сетки искажаются из-за высоких напряжений в зоне контакта и высоких скоростей деформации. В частности, при решении задачи, описанной в 5.1 для скоростей ударника выше 150 м/с была активирована опция принудительного выключения элементов из расчетов (так называемая эрозия элементов) при их чрезмерной деформации. Такое принудительное удаление элементов приводит к разрушению, которое не вызвано физическими причинами, что, естественно, снижает точность моделирования.

В данном разделе рассматривается возможный подход к решению описанных проблем, возникающих при моделировании пробития преград. В качестве примера используются преграды с дискредитированной структурой, а

именно пластины с перфорацией. Метод основан на применении искусственных нейронных сетей (ИНС) для быстрой численной оценки остаточной скорости ударника для семейства перфорированных мишеней из ПММА (полиметилметакрилата).

Прочность мишени характеризуется остаточной скоростью снаряда после прохождения через мишень: чем выше остаточная скорость снаряда, тем ниже прочность мишени. Обученная ИНС способна предсказать остаточную скорость снаряда для конфигураций, отсутствующих в обучающем наборе данных, а определение остаточной скорости ударника с использованием ИНС выполняются мгновенно по сравнению с довольно трудоемкими расчетами с использованием МКЭ. Такой подход может быть полезен для определенных случаев использования (например, прочностные расчеты с использованием маломощных мобильных устройств или для САПР веб-приложений, где ожидается, что результат будет получен мгновенно и одновременно несколькими пользователями). Кроме того, некоторые схемы перфорации пластин оказываются проблематичными с точки зрения их обработки при помощи МКЭ из-за сильного искажения сетки, что приводит к преждевременному завершению процедуры решения. В таких ситуациях прогнозы при помощи ИНС могут быть полезны, поскольку результат (приближенный) может быть получен без каких-либо изменений настроек решателя и тем более изменения постановки задачи. Стоит отметить, что чрезмерная деформация элементов является распространенной проблемой при моделировании удара на основе МКЭ, особенно при высоких скоростях полета снаряда и сложной форме цели [172].

### Постановка задачи и подходы к решению

Цель проведенного исследования может быть формализована следующим образом: рассмотрим семейство из  $M$  задач, каждая из которых характеризуется

вектором из  $N$  параметров  $P^j = (P_1^j, P_2^j, \dots, P_N^j), j \in [1, M]$ . Каждой задаче (конфигурации)  $P^j$  сопоставляется результат  $R^j$

$$\{P^j \rightarrow R^j\}, j \in [1, M], P^j = (P_1^j, P_2^j, \dots, P_N^j) \quad (5.2)$$

при помощи расчета методом конечных элементов или при помощи другого численного метода. Ситуации, когда для какой-то конфигурации решения нет ( $R^j = \emptyset$ ) тоже рассматриваются.

Цель исследования – построить алгоритм, позволяющий получить решение  $R^{M+1}$  без проведения полного расчета для задачи с конфигурацией  $P^{M+1}$ , которой нет в тренировочном массиве задач. При этом если в массиве данных есть конфигурации, для которых решения нет ( $R^j = \emptyset$ ), алгоритм может быть использован и для них. Вектор  $P^j$  в (5.2) может описывать свойства материала, форму преграды, характеристики нагружения и другие параметры задачи. В данном исследовании вектор  $P^j$  описывает схему перфорации преграды, а искусственная нейронная сеть выступает в качестве алгоритма для предсказания остаточной скорости ударника. ИНС обучалась на массиве из  $M$  решенных задач с разными схемами перфорации. Размер массива  $M$  считался достаточным для достижения высокой точности ИНС.

В разделе рассмотрены две задачи: перед основной задачей о пробое рассмотрена очень простая задача о статической деформации пластины, чтобы протестировать предлагаемый подход и увидеть, как механические аспекты задачи потенциально могут повлиять на архитектуру и эффективность ИНС. Для задачи о деформации пластины решение является бинарным: пластина отклоняется либо влево, либо вправо. Решением задачи об ударе является остаточная скорость снаряда – вещественное число.

Для обсуждаемых задач используется двумерная постановка, однако в задаче об ударе применяется осевая симметрия. Модели образцов состоят из двух типов квадратных ячеек – обычной сплошной ячейки и ячейки с отверстием

– перфорированной ячейки. Комбинация этих ячеек составляет рисунок перфорации, что позволяет генерировать произвольные конфигурации, формируя массив задач и их решений. Размер ячейки может варьироваться, и таким образом можно получать схемы перфорации с различным количеством ячеек (разрешение рисунка перфорации). Таким образом,  $N$  обозначает количество клеток, из которых состоит, а компонента вектора параметров  $P_i$  равна нулю или единице и описывает сплошную или перфорированную ячейку.

Следующие вопросы обсуждаются для рассматриваемых задач:

- Достаточный размер набора данных для каждого набора конфигураций, который обеспечивает высокую эффективность ИНС и, следовательно, возможность быстрого получения решения проблемы без проведения полного МКЭ-анализа.
- Подходящая архитектура ИНС для конкретной задачи: достигается баланс между сложностью архитектуры, точностью модели и требуемым размером набора данных.
- Возможность получения результата для конфигураций, которые вызывают сбой в работе МКЭ-решателя, с использованием обученных ИНС.

Для решения обеих задач используется материал ПММА (свойства приведены в таблице 5.2), и предполагается, что поведение материала является упругим.

	<b>Преграда ПММП</b>	<b>Стальной ударник</b>
Модуль Юнга, $E$ , Па	3.3e9	2.09e11
Коэффициент Пуассона, $\nu$	0.35	0.28
Плотность, $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	1180	7720

Критическое напряжение, $\sigma_c$ , Па	72e6	-
Критический КИН, $K_{IC}$ , МПа	1.4	-
Инкубационное время, $\tau$ , мкс	2.1	-

Таблица 5.2. Свойства материалов, использованных в исследовании.

### Статическая задача о деформации пластины

Рассматривается прямоугольная пластина из ПММА с размерами размером 20 мм x 51 мм. Используется область захвата толщиной 1 мм и площадь перфорации 20 мм x 50 мм. Нижний край пластины фиксируется, а к верхнему краю пластины прикладывается растягивающее усилие в 60 МПа. Изучаются пять разрешений рисунков перфорации: 2 ячейки на 5 ячеек (в дальнейшем для разрешения перфорации будет использоваться обозначение 2x5), 6x15, 10x25, 14x35 и 20x50. Нагрузка вызывает неоднородную деформацию пластины и, следовательно, отклонение образца влево или вправо в зависимости от типа перфорации. В этом случае результатом расчета является отклонение пластины влево или вправо, и предполагается, что ИНС предсказывает его для произвольной конфигурации перфорации.

Программное обеспечение ANSYS используется как для создания конфигураций, так и для получения решения. Ячейки, пример конфигурации и полученная деформация показаны на рисунке 5.9. Нижние граничные узлы закреплены во всех направлениях. Изгиб пластины измеряется с использованием усредненных горизонтальных перемещений трех узлов, расположенных на верхнем краю пластины.

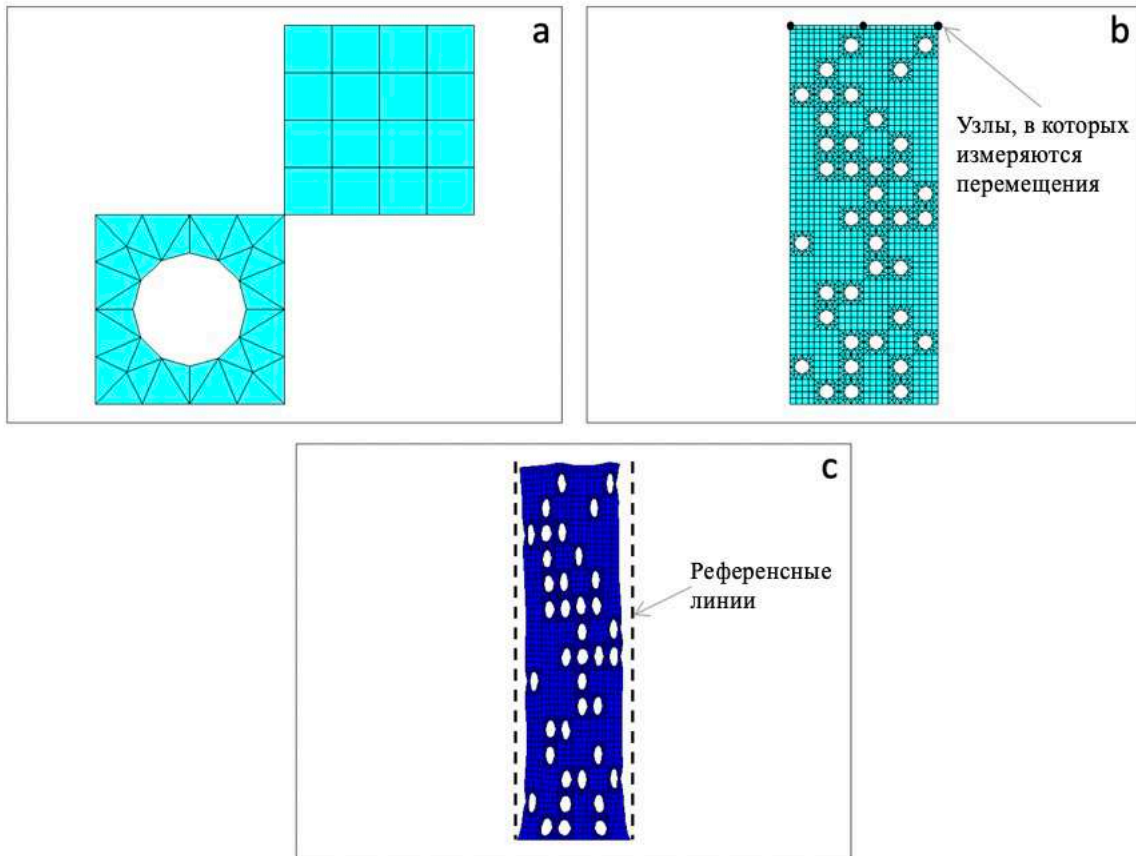


Рис. 5.9. Конкретная конфигурация 6x15 для статической задачи. Ячейки сетки (а), собранная сетка (б) и изгиб пластины влево, как видно из сравнения с пунктирными вертикальными опорными линиями; в (с) для отображения изгиба пластины используется 15-кратное увеличение.

### Задача о пробивании преграды

В круглую пластину из ПММА толщиной 10 мм и диаметром 100 мм попадает стальной снаряд цилиндрической формы (свойства материала приведены в таблице 5.2). Снаряд имеет следующие размеры: диаметр 6,9 мм и высоту 30 мм. Задача решена в двумерной постановке с применением осевой симметрии, что означает, что мишень и снаряд моделируются прямоугольниками, а перфорационные отверстия на самом деле являются концентрическими каналами внутри мишени. Край мишени фиксирован.

Снаряд замедляется из-за взаимодействия с мишенью, и результатом расчета является остаточная скорость снаряда. Очевидно, что замедление

снаряда зависит от конфигурации отверстий, поэтому предполагается, что ИНС предсказывает остаточную скорость снаряда для данной схемы перфорации преграды.

Изучаются три разрешения схем перфорации и, следовательно, три набора конфигураций: 2 ячейки по 12 ячеек (2x12), 4x24 и 8x48, кроме того, предполагается, что пластина должна иметь неперфорированный слой для стабилизации контакта – образцы моделей пластин показаны на рисунке 5.10. Модель базовой конфигурации (без перфорации) откалибрована с использованием результатов экспериментов по пробиванию пластин из ПММА, описанных в разделе 5.1.

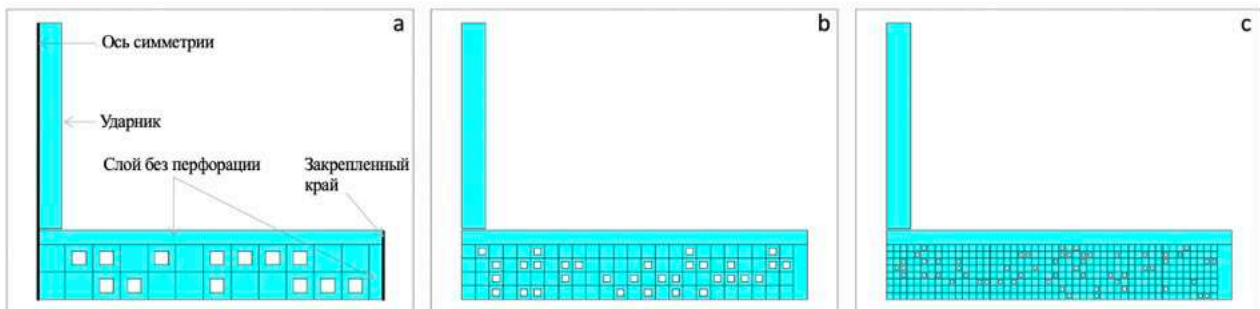


Рис. 5.10. Представители трех наборов конфигураций: 2x12 ячеек (a), 4x24 (b), 8x48 (c). Все конфигурации имеют неперфорированный слой.

Для каждой размерности конфигураций были получены наборы решений, что позволило произвести обучение нейронных сетей для предсказания решения задачи для конкретной конфигурации без проведения полного расчета.

В случае задачи о пробивании модель мишени так же собираются из сплошных и перфорированных ячеек с использованием скрипта ANSYS APDL. Однако задача решается с помощью кода LS-DYNA с явной схемой интегрирования по времени. Таким образом, генерируются входные данные LS-DYNA, которые затем модифицируются для реализации пользовательского критерия динамического разрушения – критерия инкубационного времени (5.1). Модель разрушения интегрирована в расчет при помощи пользовательской

программы UMAT41. Истории напряжений записываются в специальные массивы, а интегрирование по времени в (5.1) выполняется с использованием правила трапеций. Размер элемента сетки выбирается равным  $d$  (для всех моделей используется обычная сетка с квадратными элементами), а значения напряжений, рассчитанные в четырех точках интегрирования, усредняются и, таким образом, вычисляется интеграл по внутреннему пространству в (5.1). Если критерий (5.1) предсказывает разрушение любой из восьми площадок внутри элемента, элемент удаляется из сетки. Учитываются следующие углы площадок (см. рисунок 5.11b)  $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pm \frac{\pi}{3}, \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{\pi}{6}$ .

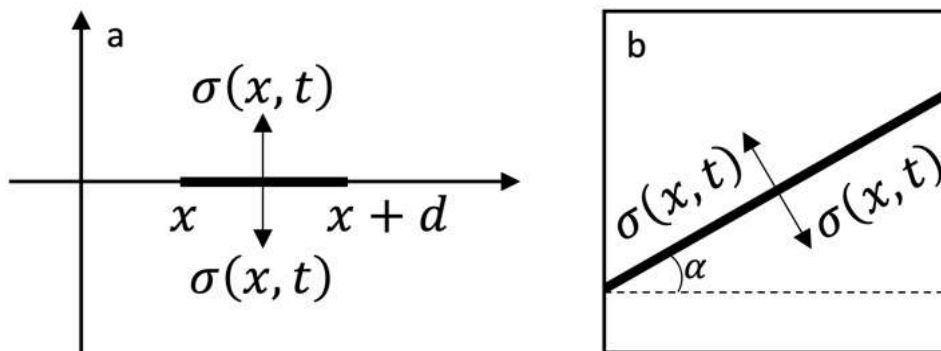


Рис. 5.11. Интервал пространственного интегрирования в модели разрушения на основе инкубационного времени (a) и элемент с областью разрушения, где

$$\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pm \frac{\pi}{3}, \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{\pi}{6}$$

Разработанная двумерная модель откалибрована для соответствия экспериментальным результатам по пробиванию пластин из ПММА: базовая модель без перфорации с инкубационным временем 2,1 мкс хорошо согласуется с экспериментальными данными (см. рисунок 5.12).



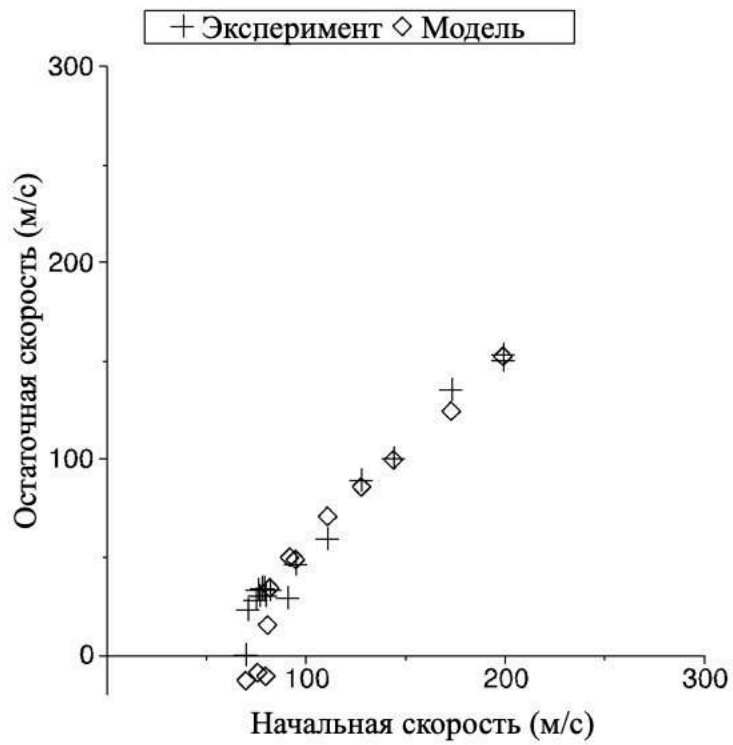


Рис. 5.12. Калибровка двумерной МКЭ модели – базовая конфигурация без перфорации; экспериментальные результаты из [109].

Ячейки сетки, конкретная конфигурация перфорации и результирующая картина разрушения при ударе со скоростью 95 м/с показаны на рисунке 5.13.

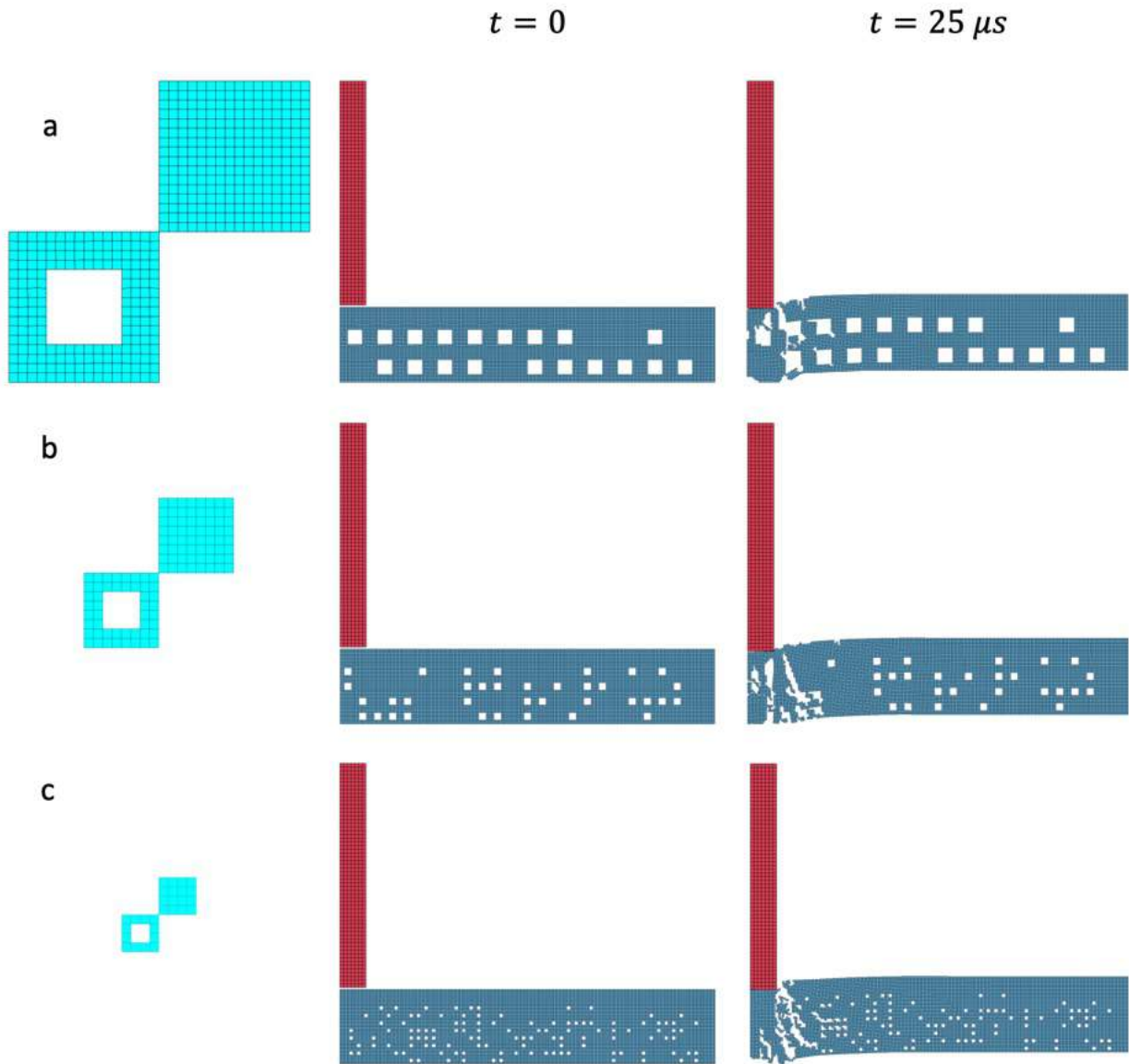


Рис. 5.13. Ячейки, полная модель и разрушение на 25 микросекунде для конкретных конфигураций 2x12 (а), 4x24 (b) и 8x48 (с).

### Использованные архитектуры искусственных нейронных сетей

Упрощённо говоря, искусственная нейронная сеть – это сложная функция, которая способна сопоставлять некоторый набор данных с определенным результатом. Эта функция содержит множество параметров (веса для полностью подключенных сетей и параметры фильтров для сверточных сетей), которые настраиваются для получения наилучшего соответствия заданному набору данных, и, таким образом, устанавливаются некоторые тенденции и зависимости, позволяющие прогнозировать результат с определенным уровнем

точности. Этот процесс настройки параметров известен как обучение. В рассматриваемом случае элемент набора данных кодируется матрицей, содержащей информацию о перфорации образца: 1 обозначает перфорированную ячейку, а 0 – сплошную. Результатами являются отклонение пластины (влево или вправо) или остаточная скорость снаряда в зависимости от задачи.

Исследованы два типа ИНС. Полносвязные модели составляют первый класс, который также содержит базовую модель линейной регрессии. Изучаемые задачи напоминают некоторые известные проблемы обработки изображений (например, категоризацию изображенных объектов), и поэтому справедливо предположить, что методы машинного обучения, используемые в этой области, могут быть применимы для обсуждаемых механических задач. Таким образом, вторым используемым типом модели является сверточная нейронная сеть (CNN) [173]. Тестируются модели с различным количеством промежуточных слоев. Фильтр  $3 \times 3$  используется в сверточной архитектуре (рисунок 5.16b).

Для полносвязной ИНС матрица, описывающая схему перфорации, преобразуется в столбец: столбцы матрицы накладываются друг на друга, и полученный один вектор затем используется в качестве входных данных для полносвязной ИНС. Сверточные нейронные сети работают с матрицами без преобразования. Далее в тексте ИНС обозначаются с помощью следующих сокращений:  $FC[n_1, n_2, \dots, n_m]$  обозначает полносвязную модель с  $m$  промежуточными слоями размером  $n_i$ , а  $FC[0]$  – простую линейную модель, в то время как  $CONV[n_1, n_2, \dots, n_m]$  обозначает сверточную ИНС с  $m$  сверточными слоями, содержащими  $n_i$  фильтров. Во всех случаях применялась активация ReLU. Для сверточных ИНС использовались фильтры  $3 \times 3$ . Для оптимизации параметров использовался алгоритм ADAM.

Эффективность и точность работы двух архитектур моделей исследуются как для статической задачи, так и для задачи пробивания. Выбор архитектуры

модели производится на основе эффективности модели, её простоты (максимально простая конструкция слоев и фильтров) и универсальности (высокая эффективность модели для всех наборов конфигураций). Все модели были построены с использованием библиотек Python Scikit-learn и PyTorch.

Эффективность ИНС оценивается с использованием двух показателей в зависимости от задачи. Показатель R2, который является широко распространенным инструментом для оценки эффективности ИНС, используется для анализа моделей, предсказывающих остаточную скорость снаряда, в то время как показатель точности используется для случаев с бинарными результатами – для задачи о статической пластине. Показатель R2 основан на коэффициенте детерминации [174], который показывает преимущество модели перед базовым прогнозом – константой, которая соответствует среднему значению данных. Если набор данных представляет собой массив из  $n$  значений  $\{y_i\}$ , предсказания модели равны  $\{p_i\}$ , а  $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$  – среднее значение по данным, то коэффициент детерминации вычисляется в соответствии со следующим выражением:

$$R2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (p_i - y_i)^2}{\sum_{i=1}^n (\bar{y} - y_i)^2} \quad (5.3).$$

Очевидно, что R2 находится в диапазоне от  $-\infty$  до 1 и  $R2 = 1$  указывает на максимально возможную эффективность модели, в то время как  $R2=0$  соответствует базовому прогнозу. Показатель точности – это отношение количества правильных прогнозов к общему количеству прогнозов. Точность 0,5-0,6 для задач со сбалансированными наборами двоичных результатов (например, слева или справа; да или нет) считаются низкими, поскольку модель, по сути, пытается угадать ответ.

Наборы данных разделены на обучающие и тестовые непересекающиеся подмножества. Для большинства изученных задач тестовая часть содержит 1000

задач, за исключением шаблонов перфорации с наименьшим разрешением (задачи 2x5 и 2x12).

### Решение задачи о статической деформации пластины

На рисунке 5.14 представлены результаты обучения ИНС, разработанных для различных наборов конфигураций статической задачи. На всех графиках на рисунке 5.14 по оси X показано количество конфигураций, использованных для обучения модели, а по оси Y - показатель точности модели. Модель FC[0] оказалась наиболее эффективной для решения этой конкретной статической задачи: будучи самой простой, она требует наименьшего количества данных, чтобы показатель точности модели стабилизировался на самом высоком уровне. Гораздо более сложные модели с большим количеством промежуточных слоев в лучшем случае не менее эффективны, чем линейная модель, требующая больше данных для обучения. Более того, сверточные модели в этом случае оказываются гораздо менее эффективными, не достигая даже 0,6 балла точности для наборов конфигураций с более высоким разрешением. Вероятно, этого следовало ожидать, поскольку изгиб пластины определяется тем, как сбалансированы отверстия в левой и правой половинах пластины. Сверточная нейронная сеть ищет определенные локальные паттерны, которые включают соседние ячейки, игнорируя соответствующие расположения отверстий в левой и правой половинах пластины. Напротив, полносвязные нейронные сети учитывают положение каждой ячейки и, таким образом, способны анализировать, как сбалансированы отверстия и целые ячейки в левой и правой половинах пластины.

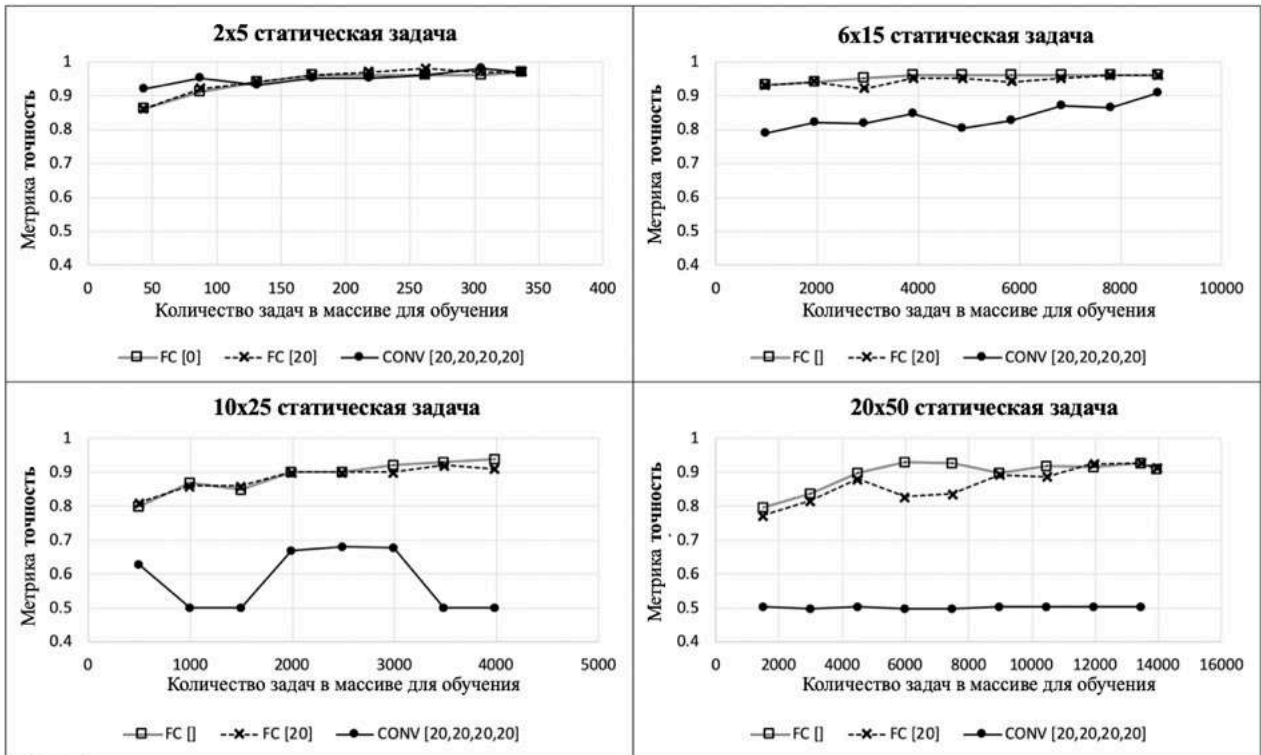


Рис. 5.14. Зависимость показателя точности ИНС, построенных для задачи статического деформирования пластины. Рассмотрены разные разрешения схем перфорации.

Эффективность построенных ИНС, примененных к различным наборам конфигурации, представлена в таблице 5.3.

Конфигурация \ Архитектура ИНС	Конфигурация				
	2x5	6x15	10x25	14x35	20x50
FC []	0,97	0,956	0,91	0,937	0,911
FC [5]	0,97	0,954	0,919	0,931	0,936
FC [10]	0,97	0,962	0,902	0,926	0,906
FC [20]	0,97	0,959	0,897	0,91	0,914
FC [50]	0,98	0,952	0,903	0,918	0,92
FC [200]	0,97	0,956	0,906	0,919	0,933
FC [20, 20]	0,98	0,951	0,91	0,906	0,924

FC [20, 20, 20]	0,97	0,958	0,909	0,909	0,916
FC [20, 20, 20, 20]	0,97	0,958	0,908	0,909	0,911
FC [20, 20, 20, 20, 20]	0,97	0,958	0,892	0,918	0,919
CONV [20, 20]	0,96	0,8	0,653	0,683	0,632
CONV [20, 20, 20]	0,97	0,858	0,751	0,687	0,502
CONV [20, 20, 20, 20]	0,97	0,909	0,739	0,754	0,502
CONV [20, 20, 20, 20, 20]	0,97	0,519	0,5	0,644	0,502
CONV [20, 20, 20, 20, 20, 20]	0,96	0,519	0,5	0,644	0,502
CONV [30, 30, 30, 30]	0,97	0,887	0,5	0,764	0,502

Таблица 5.3. Показатели точности различных архитектур ИНС для задачи о статическом изгибе пластины; выделена оптимальная архитектура. Для всех конфигураций подмножество тестовых данных содержит 1000 задач, за исключением случая 2x5 со 100 задачами в тестовом подмножестве.

Подводя промежуточный итог, можно сказать, что для задачи о статическом прогибе пластины были получены следующие результаты:

- ИНС обеспечивают высокую точность прогнозирования, как это, вероятно, и ожидалось, поскольку наблюдатель может предсказать сторону прогиба пластины для рисунков перфорации с более низким разрешением (2x5, 6x15), просто взглянув на рисунок перфорации.
- Простейшая полносвязная модель, по-видимому, является точной и простой в построении и обучении, в то время как сверточные модели не дают точных прогнозов несмотря на то, что формулировка задачи аналогична задачам обработки изображений.

#### Решение задачи о пробивании преграды

Для решения задачи о пробивании исследован ряд архитектур нейронных сетей. В таблице 5.4 приведена информация о производительности различных

архитектур ИНС. В этом случае две модели представляются предпочтительными с точки зрения точности, универсальности и требуемого объема обучающих данных: полносвязная модель с двумя промежуточными слоями (FC[20,20]) и сверточная нейронная сеть с четырьмя слоями – CONV[20,20,20,20]. Информация об обучении этих двух моделей для изучаемых наборов конфигураций приведена на рисунке 5.15.

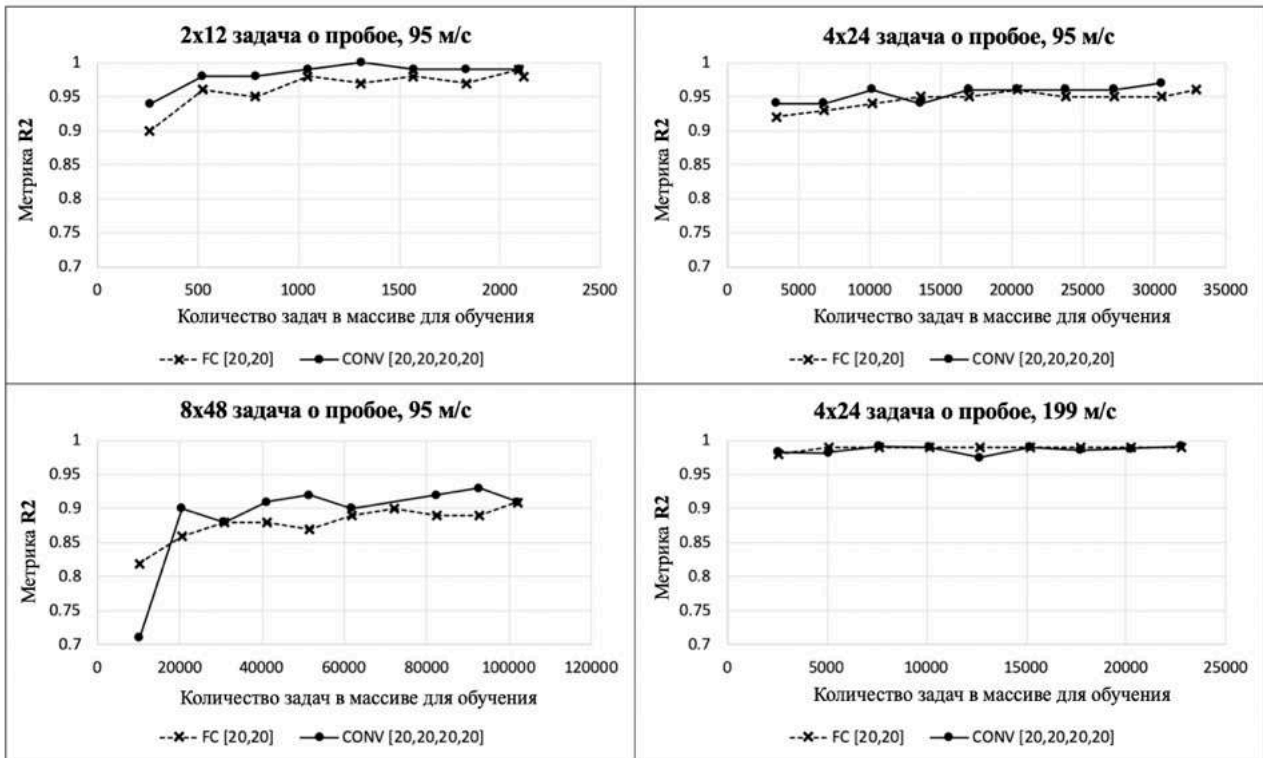


Рис. 5.15. Эффективность (показатель R2) двух типов нейронных сетей в зависимости от размера набора данных для решения задачи об ударе.

Архитектура ИНС \ Конфигурация	2x12	4x24 95	8x48 95	4x24 199
	95 м/с	м/с	м/с	м/с
FC []	0,78	0,81	0,78	0,95
FC [5]	0,97	0,92	0,84	0,98
FC [10]	0,97	0,95	0,87	0,99
FC [20]	0,97	0,95	0,88	0,99



FC [50]	0,98	0,96	0,89	0,99
FC [200]	0,98	0,96	0,89	0,99
FC [20, 20]	0,98	0,96	0,91	0,99
FC [20, 20, 20]	0,99	0,95	0,90	0,99
FC [20, 20, 20, 20]	0,98	0,95	0,89	0,99
FC [20, 20, 20, 20, 20]	0,99	0,95	0,89	0,99
CONV [20, 20]	0,97	0,92	0,74	0,98
CONV [20, 20, 20]	0,99	0,95	0,86	0,98
CONV [20, 20, 20, 20]	0,99	0,97	0,91	0,98
CONV [20, 20, 20, 20, 20]	0,99	0,95	0,90	0,98
CONV [20, 20, 20, 20, 20, 20]	0,98	0,95	0,85	0,99
CONV [30, 30, 30, 30]	0,98	0,96	0,91	0,99

Таблица 5.4. Эффективность (показатель R2) различных архитектур ИНС для различных конфигураций задачи о пробивании. Для каждой задачи указана скорость снаряда. Выделены оптимальные модели. Для всех конфигураций подмножество тестовых данных содержит 1000 задач, за исключением случая 2x12 с 500 задачами в тестовом подмножестве.

На рисунке 5.16 схематично показаны два используемых типа ИНС, в то время как на рисунке 5.17 показаны диаграммы со сравнением прогнозов ИНС с результатами МКЭ. Разброс результатов для задач со скоростью 199 м/с меньше по сравнению с другими случаями, поскольку для более высокой скорости снаряда результат в основном определяется количеством отверстий в зоне контакта, а не их точным расположением – многие конфигурации неотличимы с точки зрения ИНС, что снижает сложность задачи.

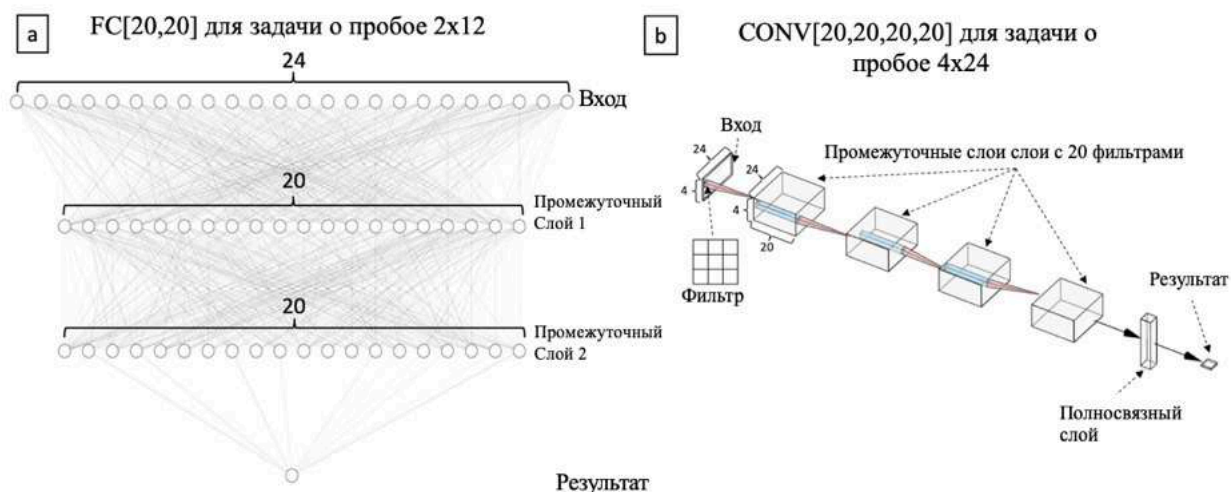


Рис. 5.16. Схематическое изображение двух использованных архитектур ИНС: а) – полносвязная ИНС (FC[20,20] для задачи об ударе с размерностью 2x12); б) – сверточная ИНС с четырьмя сверточными слоями из 20 фильтров, каждый (CONV[20,20,20,20] и последний полносвязный слой для классификации

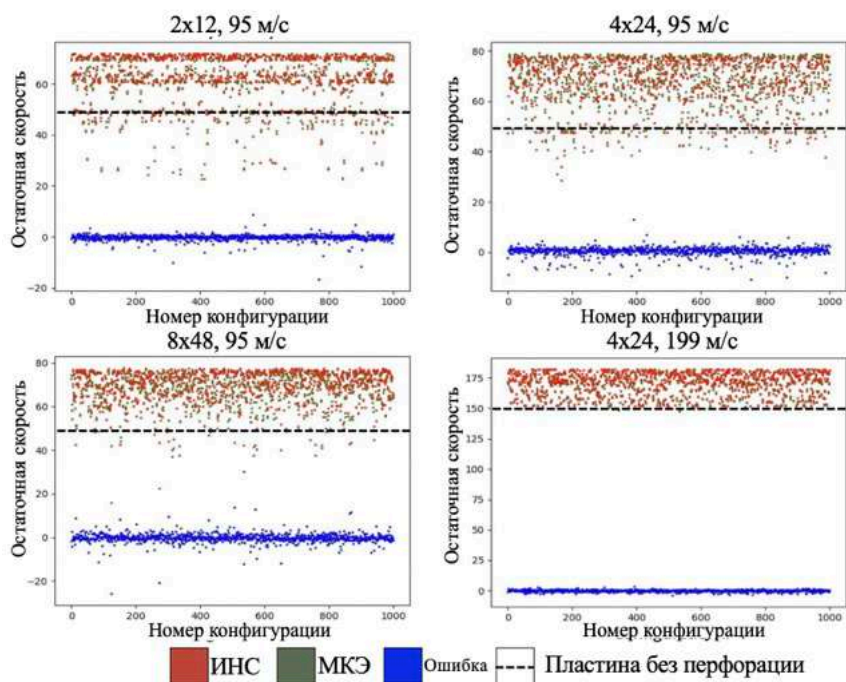


Рис. 5.17. Точность ИНС, разработанных для задачи о пробивании, каждая точка указывает на одну задачу из набора тестовых конфигураций, пунктирная линия указывает на значение остаточной скорости снаряда для сплошной преграды.

Как и ожидалось, требуемый размер набора данных увеличивается для задач с более высоким разрешением рисунков перфорации, и это увеличение гораздо более заметно по сравнению с задачей об изгибе пластины. Конфигурация 8x48 оказалась довольно сложной, требующей большого количества данных, чтобы надежно превзойти уровень эффективности  $R2=0,9$ .

Прогнозы с использованием обученных ИНС занимают значительно меньше времени по сравнению с полным расчетом при помощи МКЭ: доли секунды по сравнению примерно с 50 секундами (8-ядерный процессор).

Известно, что конечно-элементные сетки могут быть подвержены значительным искажениям при решении задач с высокими деформациями и высокими скоростями деформации, что приводит к ошибкам и преждевременным остановкам вычислений [175-177].

Общие рекомендации для исправления подобных ситуаций включают сокращение временного шага, изменение сетки, изменение параметров контактного взаимодействия, изменение реологических свойств материала [178], методы перестроения сетки [175,179] и простое удаление сильно деформированных элементов, которые приводят к разрушению без каких-либо физических причин. Для работы с сильно деформированными средами могут быть использованы альтернативные вычислительные методы, такие как метод материальной точки, гидродинамика сглаженных частиц [180,181], перидинамика [182-184] или сочетание различных методов [185].

Все наборы данных для задачи о пробивании содержат конфигурации, которые привели к чрезмерной деформации элементов в сетке, что вызвало отказ решателя. Для набора конфигураций 4x24 и скорости снаряда 95 м/с не удалось получить решение для 199 конфигураций (из 25000). Проблема гораздо более очевидна для случая со скоростью 199 м/с: 7828 случаев преждевременного завершения вычислений из-за ошибки (из 48000).

Некоторые из неудачных конфигураций были обработаны с использованием МКЭ с уменьшенным временным шагом (с  $7,15e-8$  с до  $5,56e-8$  с), что привело к нормальному завершению вычислений. Эти результаты были использованы для оценки эффективности ИНС, примененных к проблемным конфигурациям, и была получена точность по метрике  $R2=0,961$  для перфорации  $4 \times 24$  и скорости снаряда  $199$  м/с. Эти цифры указывают на то, что ИНС применимы к конфигурациям, которые трудно обработать с помощью разработанной схемы МКЭ без дополнительных настроек и корректировок.

Пример проблемной конфигурации  $4 \times 24$  со скоростью удара  $199$  м/с показан на рисунке 5.18а, а на рисунке 5.18б показана зона с чрезмерно деформированными элементами, приводящими к преждевременному завершению вычислений. Эта конкретная конфигурация не могла быть исправлена путем уменьшения временного шага, и прогнозируемая при помощи ИНС остаточная скорость –  $151,2$  м/с.

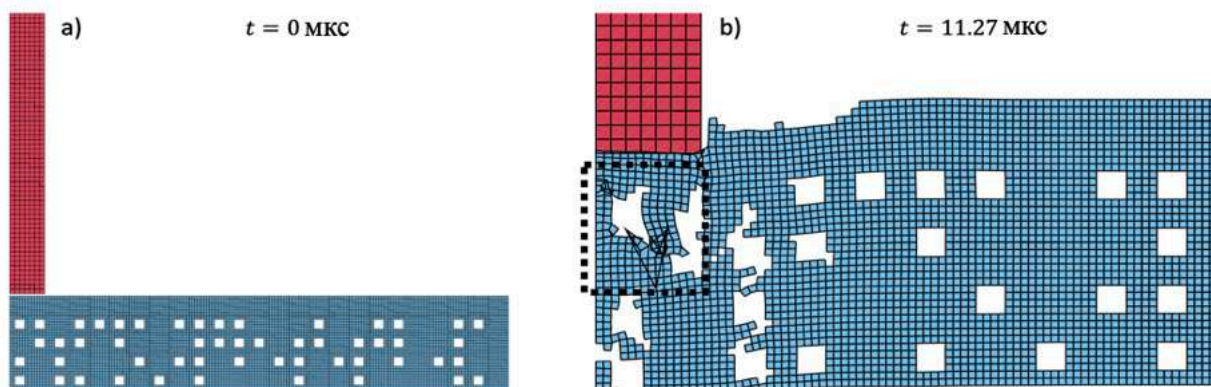


Рис. 5.18. Пример конфигурации  $4 \times 24$ , приводящей к сбою вычислений, и зона с интенсивной деформацией элементов (b).

В результате проведенных исследований было установлено, что искусственные нейронные сети являются мощным инструментом для снижения вычислительных затрат при решении конкретной задачи, связанной с ударом перфорированных пластин. ИНС были обучены с использованием

предварительно полученного набора результатов МКЭ, а количество необходимых данных зависит от разрешения рисунка перфорации. С одной стороны, для получения набора данных требуются значительные вычислительные ресурсы (например, для задачи об ударе 8x48 необходимо решить более 100 000 задач), с другой стороны, после получения набора данных решение каждой следующей задачи может быть получено мгновенно и с высокой точностью. Более того, для каждого следующего запуска вычислений не требуется никакого программного обеспечения для МКЭ расчетов, которое часто является дорогостоящим и требует лицензий. Кроме того, создание набора данных является полностью автоматизированной процедурой, что также выгодно для снижения затрат на разработку. Таким образом, если общее количество задач, которые необходимо решить, превышает необходимый размер набора данных, стоит рассмотреть подход, основанный на ИНС. Такой подход может быть полезен для прототипирования, когда интересны общие вопросы прочности проектируемой структуры и необходимо протестировать множество вариантов конструкции для получения желаемых показателей. Другим возможным вариантом использования является одновременное решение нескольких задач, например, при использовании веб-приложений САПР. Следует отметить, что реалистичные инженерные задачи будут включать в себя сложный набор изменяемых параметров, которые описывают форму объекта, свойства материала и условия нагружения или даже сочетание этих параметров, и каждый случай следует изучать отдельно. Как оказалось, даже для решения схожих задач могут потребоваться разные архитектуры нейронных сетей: в то время как сверточная нейронная сеть оказалась успешной для решения задачи об ударе, было обнаружено, что она неприменима для решения задачи об отклонении пластины по чисто механическим причинам.

В дополнение к сокращению вычислительного времени и затрат разработанный подход может быть использован для преодоления некоторых известных вычислительных трудностей МКЭ (или, фактически, любого другого численного метода), применяемых для решения задач об ударном воздействии.

К таким проблемам можно отнести нестабильность контактного взаимодействия или чрезмерное искажение элементов сетки из-за высоких напряжений и высоких скоростей деформирования. В исследуемом случае некоторые схемы перфорации приводили к ошибкам при использовании МКЭ, однако информация, полученная из остального набора данных, помогла нейронной сети предсказать решение и для проблемных случаев. Было обнаружено, что проблемные конфигурации не обладают какими-либо специфическими особенностями, которые можно было бы распознать с помощью нейронной сети, и, таким образом, они не образуют отдельный подкласс внутри набора данных с точки зрения нейронной сети. Это косвенно подтверждает, что разработанные ИНС могут быть использованы для прогнозирования результатов для проблемных случаев, поскольку они имеют общие характеристики с остальным набором данных.

### **5.3 Выводы к главе 5**

В главе 5 представлены результаты исследования динамического разрушения в результате ударного воздействия. В частности, работа содержит экспериментальные и численные результаты по пробиванию пластин из ПММА различной толщины стальным снарядом. Зависимость между начальной ( $V_i$ ) и остаточной ( $V_r$ ) скоростью снаряда. В дополнение к этому был получен баллистический предел для всех трех типов образцов. Экспериментальные данные были использованы для тестирования и подтверждения численного подхода, который использует метод конечных элементов и модель разрушения на основе инкубационного времени. Применяемая схема довольно проста и включает ограниченное количество параметров материала. Все параметры являются либо стандартными данными о материале, либо могут быть оценены на основе экспериментов с ПММА, описанных в литературе.

Результаты моделирования представляются многообещающими: как баллистический предел, так и функция  $V_r - V_i$  могут быть предсказаны с помощью относительно простой численной схемы. Таким образом, разработанный численный подход может быть применен для прогнозирования разрушения при ударе в других случаях: для других хрупких материалов (например, керамики) и образцов другой конфигурации. Например, в работе представлены численные оценки баллистического предела и зависимости  $V_r - V_i$  для пластины из ПММА толщиной 5 мм.

Второй параграф главы 5 посвящен попытке частично решить фундаментальные трудности задачи численного моделирования динамического разрушения в результате ударного нагружения. В качестве модельной задачи была выбрана задача о пробивании преграды с дискретной структурой – пластин с перфорацией. Суть подхода заключается в решении массива похожих задач (в данном случае задач с разными схемами перфорации) и последующем обучении искусственной нейронной сети на полученном массиве. Обученная ИНС способна мгновенно предсказать решение для задачи с новой схемой перфорации, а также обработать задачи, для которых применение прямого расчета с использованием МКЭ затруднительно.

Больше информации можно найти в [109,118].

## Заключение

- В работе исследованы дискретные особенности процессов динамического разрушения, предложены дискретные модели для анализа данного явления. В частности, открыта аналогия между процессами разрушения при старте трещины в условиях импульсного нагружения и разрушением в системе «масса на пружине». Данная аналогия построена благодаря использованию критерия разрушения на основе инкубационного времени для решения задач о старте трещины в условиях нагружения прямоугольными импульсами. Аналогия позволяет трактовать процессы динамического разрушения как «инерционные» процессы и, таким образом, предоставляет естественное и простое объяснение ключевых эффектов разрушения, например, эффекта задержки разрушения. Также предложен простой инженерный подход к задачам о предсказании инициации разрушения при динамических нагрузках. Модель основана на явлении разрыва линейного осциллятора. Как показано в исследовании, инерция данной системы позволяет наблюдать ключевые эффекты динамического разрушения материалов – зависимость прочности системы от скорости нагружения и задержку разрушения при нагружении короткими импульсами. Показана возможность применения данной модели для предсказания разрушения конструкционных материалов в условиях быстро растущих и кратковременных нагрузок.
- Полученные в работе результаты и разработанная модель подчеркивают значимость инкубационных характеристик процесса динамического разрушения и позволяют построить параллели между разрушением в системе «масса на пружине» и структурно-временным критерием разрушения, основанном на концепции инкубационного времени. Обе модели подразумевают наличие характерных времён процессов динамического разрушения и, соответственно, позволяют задать временной масштаб, на котором рассматриваются данные процессы.



- Структурно-временной критерий разрушения основан на пространственной и временной дискретизации процесса динамического разрушения. Согласно данному подходу вводится минимальный размер зоны разрушения, что позволяет задать масштабный уровень, на котором проводится анализ. Также в качестве параметра материала вводится характерное время релаксации при разрушении – инкубационное время. Структурно-временной подход, предполагающий, в частности, дискретный характер распространения трещин, был внедрен в метод конечных элементов, и позволил численно исследовать ряд эффектов, наблюдаемых при движении трещин. Так, показано, что дискретизация процесса распространения трещин позволяет получить экспериментально наблюдаемые осцилляции скорости трещины. Также разработанный численный подход позволил разрешить вопрос об единственности зависимости текущего значения коэффициента интенсивности напряжений от скорости трещины: для интенсивного нагружения и высоких скоростей трещины наблюдается сильный разброс значений КИН, не позволяющий построить единую кривую, что является предметом дискуссий о применимости классического подхода. При медленных нагрузках и относительно невысоких скоростях трещины разброс значений КИН невелик, и аппроксимация позволяет построить зависимость КИН-скорость трещины. Более того, подходы, разработанные для моделирования распространения прямолинейных трещин, были переработаны для анализа трещин, распространяющихся в произвольном направлении. Данная модификация численной схемы позволила исследовать фрагментацию хрупких тел при ударном нагружении и получить наблюдаемые экспериментально характеристики процесса фрагментации, например, распределение фрагментов по размерам.
- Переход от континуальных моделей к дискретным системам, которые во многом более реалистично описывают конструкционные материалы, позволяет исследовать новые эффекты, предсказание которых в рамках механики

сплошных сред на основе традиционных подходов было бы невозможно. На примере цепочек линейных осцилляторов доказана возможность разрушения при прохождении через систему волны разгрузки, инициированной первоначальным разрывом. В упругом стержне, являющемся континуальным аналогом цепочки линейных осцилляторов, такая разгрузка не может привести к разрушению. Однако согласно проведенным численным расчетам, данный эффект может наблюдаться в специально спроектированных объектах с дискретной периодической структурой. Таким образом, исследование дискретной модели – цепочки линейных осцилляторов – позволило обнаружить эффект, который может быть реализован и в настоящих конструкциях и который должен быть учтен при проектировании.

- В работе предложены новые численные методы, применимые при проектировании конструкций и анализе их прочности в условиях ударного нагружения. Разработанные численные схемы основаны на методе конечных элементов и структурно-временном подходе, базирующемся на понятии инкубационного времени. Основой для разработанных численных схем служат коммерческие пакеты вычислительных программ, что является залогом простого внедрения представленных подходов в инженерную практику. Работа численной схемы продемонстрирована на примере задачи о пробивании преграды ударниками – численно построены экспериментальные зависимости остаточной скорости ударника от начальной, а также определены пороговые значения скорости ударника для преград разной толщины.
- Применение разработанного численного подхода для моделирования экспериментов по пробиванию преград в полной мере выявило особенности задач, связанных с динамическим разрушением в условиях интенсивного нагружения. Такие задачи зачастую весьма требовательны к вычислительным ресурсам и даже на мощных компьютерах решаются долго. Помимо этого, в задачах с высокими скоростями деформации и высокими значениями напряжений (к которым задачи о пробивании относятся в полной мере) зачастую

наблюдаются вычислительные трудности, связанные чрезмерным искажением элементов и нестабильной работой контактных алгоритмов. В исследовании предложен подход, позволяющий частично решить указанные трудности, основанный на искусственных нейронных сетях (ИНС). ИНС обучаются на массиве решений семейства задач и предсказывают решение нового представителя семейства. При этом решение может быть предсказано и для тех представителей семейства, для которых решение не может быть получено при помощи полного расчета из-за вычислительных трудностей. Успешное применение разработанного подхода было продемонстрировано на примере задачи о пробивании преград с дискретным строением и набором дискретных параметров. Исследовалось влияние перфорации на прочность пластин при пробивании. Разработанная ИНС, обученная на массиве результатов для различных схем перфорации, способна предсказывать результат для новых схем перфорации и также позволяет получить результат для конфигураций, для которых решение при помощи МКЭ затруднительно в силу чрезмерного искажения элементов сетки. В качестве параметров, описывающих конкретную задачу, могут выступать разные величины – свойства материала, геометрия образцов, параметры нагружения и многие другие. В рассмотренном случае задача описывается схемой перфорации, что существенно упрощает применение предлагаемого подхода и позволяет решать модельную задачу. Предлагаемый подход выглядит многообещающим для практических целей, особенно для получения приблизительных решений задач в сложных с точки зрения вычислений случаях.

В исследовании использовался широкий арсенал методов для решения поставленных задач – от аналитических решений дифференциальных уравнений до численных методов и экспериментальных исследований. Полученные в работе результаты могут быть полезны с точки зрения теории – как задел для дальнейших исследований, однако практическая ценность разработанных подходов также очевидна. Например, эффект разрушения в периодических структурах при разгрузке требует экспериментального подтверждения и может

быть использован для нагружения материалов короткими импульсами. Модели разрушения на основе линейного осциллятора демонстрируют фундаментальность ключевых эффектов динамического разрушения. Также данные модели могут быть использованы как простой инструмент для анализа разрушения и прочности. Разработанные же численные схемы и подходы могут быть использованы для анализа прочности при разработке конструкций.

## Литература

- 1) K. Ravi-Chandar, W.G. Knauss, An experimental investigation into dynamic fracture: I. Crack initiation and arrest, *Int J Fract* 25, 1984, 247–262
- 2) J.F. Kalthoff, D.A. Shockey, Instability of cracks under impulse loads, *J. Appl. Phys.* 48, 1977, 986-993
- 3) N.V. Mikhailova, I.V. Smirnov, V.V. Balandin, V.VI. Balandin, A.M. Bragov, Yu.V. Petrov, The spall failure delay: Experimental observation and theoretical analysis, *International Journal of Impact Engineering* 164, 2022, 104194
- 4) A.N. Berezkin, S. I. Krivosheev, Yu. V. Petrov, A.A. Utkin, Effect of Delayed Crack Nucleation under Threshold Pulse Loading, *Doklady Physics* 45(11), 2000, 617-619
- 5) D.A. Shockey, D.C. Erlich, J.F. Kalthoff, H. Homma, Short-pulse fracture mechanics, *International Journal of Fracture* 23(1), 1986, 311-319
- 6) F. Jiang, K.S. Vecchio, A. Rohatgi, Analysis of modified split Hopkinson pressure bar dynamic fracture test using an inertia model, *International Journal of Fracture* 126, 2004, 143-164
- 7) A.G. Dutton, R.A.W. Mines, Analysis of the Hopkinson Pressure Bar loaded Instrumented Charpy Test using an inertial modelling technique, *International Journal of Fracture* 51, 1991, 187-206
- 8) Z. Guangping, S. Xinhui, W. Yanwei & C. Zhongliang, Dynamic stress intensity factor of 2A12T4 Al compact tension specimen with loading point displacement and spring mass model, *Materials Research Innovations* 19(sup9), 2015, S9-42-S9-45
- 9) J.G. Williams, The analysis of dynamic fracture using lumped mass-spring models, *International Journal of Fracture* 33, 1987, 47-59

- 10) L. Slepyan, Dynamics of a crack in a lattice, *Sov. Phys. Dokl.* 26, 1981, 538-540
- 11) N. Gorbushin, G. Mishuris, Dynamic fracture of a dissimilar chain, *Phil. Trans. R. Soc. A* 377, 2019, 20190103
- 12) H. Gao, A theory of local limiting speed in dynamic fracture, *J. Mech. Solids* 44(9), 1996, 1453-1474
- 13) T. Goldman, A. Livne, J. Fineberg, Acquisition of Inertia by a Moving Crack, *Physical Review Letters* 104, 2010, 114301
- 14) N.A. Kazarinov, V.A. Bratov, Yu.V. Petrov, Simulation of dynamic crack propagation under quasi-static loading, *Doklady Physics* 59(2), 2014, 99-102
- 15) I. Smirnov, N. Kazarinov, Y. Petrov, Experimental observation and numerical modeling of unstable behaviour of a fast crack velocity, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 101, 2019, 53-58
- 16) J. Fineberg, S.P. Gross, M. Marder, H.L. Swinney, Instability in the propagation of fast cracks, *Physical Review B* 45(10), 1992, 5146-5154
- 17) Yu.V. Petrov, A.A. Gruzdkov, N.A. Kazarinov, Features of the dynamic fracture of one-dimensional linear chains, *Doklady Physics* 53(11), 2008, 595-599
- 18) G. Irwin, Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate, *Journal of Applied Mechanics* 24, 1957, 361-364
- 19) E. Cadoni, Dynamic Characterization of Orthogneiss Rock Subjected to Intermediate and High Strain Rates in Tension, *Rock Mech Rock Eng* 43, 2010, 667-676
- 20) V.V. Skripnyak, E.G. Skripnyak, V.A. Skripnyak, I.K. Vaganova, A.M. Bragov, A.K. Lomunov, et al., Multiscale Simulation of Porous Quasi-Brittle Ceramics Fracture, *AMM* 756, 2015, 196-204
- 21) J. Campbell, The dynamic yielding of mild steel, *Acta Metall* 1(6), 1953, 706-710

- 22) W. Mocko, J.A. Rodriguez-Martinez, Z.L. Kowalewski, A. Rusinek, Compressive viscoplastic response of 6082-T6 and 7075-T6 aluminium alloys under wide range of strain rate at room temperature: Experiments and modelling, *Strain* 48(6), 2012, 498-509
- 23) N.V. Mikhailova, G.A. Volkov, Y.I. Meshcheryakov, Y.V. Petrov, A.A. Utkin, Failure-delay effect in destruction of steel samples under spalling conditions, *Tech Phys* 62, 2017, 547-552
- 24) K. Ravi-Chandar, Dynamic fracture of nominally brittle materials, *International Journal of Fracture* 90, 1998, 83–102
- 25) J.W. Dally, W.L. Fourney, G.R. Irwin, On the uniqueness of the stress intensity factor – crack velocity relationship, *Int. J. Fract* 27, 1985, 159-168
- 26) A.J. Rosakis, G. Ravichandran, Dynamic failure mechanics, *J. Mech. Mater. Struct.* 37, 2000, 331-348
- 27) G.R. Johnson, T.J. Holmquist, An improved computational constitutive model for brittle materials, *AIP Conference Proceedings* 309, 1994, 981-984
- 28) V.S. Nikiforovskii, S.I. Sabitova, A.E. Strelyaev, Fracture of solid bodies by dynamic loads, *Sov Min Sci* 6, 1970, 517-524
- 29) V.S. Nikiforovskii, Kinetic nature of the brittle fracture of solid bodies, *J Appl Mech Tech Phys* 17, 1976, 721-726
- 30) F.R. Tuler, B.M. Butcher, A criterion for the time dependence of dynamic fracture, *Int J Fract Mech* 4, 1968, 431-437
- 31) Y.V. Petrov, A.A. Utkin, Dependence of the dynamic strength on loading rate, *Sov Mater Sci* 25, 1989, 153-156
- 32) B.A. Crouch, J.G. Williams, Modelling of dynamic crack propagation in the three-point bend impact specimen, *J.Mech.Phys.Solids* 1, 1988, 1-13
- 33) N. Kazarinov, Y. Petrov, A. Smirnov, Dynamic fracture effects observed in discrete mechanical systems, *Procedia Structural Integrity* 28, 2020b, 2168–2173

- 34) N.A. Kazarinov, S.A. Smirnov, Y.V. Petrov, Revisiting mass-on-spring model to address key dynamic fracture effects, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 132, 2024, 104470
- 35) M.J. Nieves, A.B. Movchan, I.S. Jones, G.S. Mishuris, Propagation of Slepyan's crack in a non-uniform elastic lattice, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 61, 2013, 1464–1488
- 36) G.S. Mishuris, A.B. Movchan, L.I. Slepyan, Dynamical extraction of a single chain from a discrete lattice, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 56, 2008, 487–495
- 37) J. Wu, C.Q. Ru, A refined cohesive zone model that accounts for inertia of cohesive zone of a moving crack, *Mechanics Research Communications*, 76, 2016, 78–85
- 38) S. Chakraborty, A. Shaw, A pseudo-spring based fracture model for SPH simulation of impact dynamics, *International Journal of Impact Engineering* 58, 2013, 84-95
- 39) S.K. Hui, T.X. Yu, Modelling of the effectiveness of bicycle helmets under impact, *International Journal of Mechanical Sciences* 44, 2002, 1081–1100
- 40) K. Tsubota, S. Wada, Elastic force of red blood cell membrane during tank-treading motion: Consideration of the membrane's natural state, *International Journal of Mechanical Sciences*, 52, 2010, 356–364
- 41) A. Szekrényes, Fracture mechanical stability of DCB and 4ENF tests complemented with linear springs, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 125 (2023), 103900
- 42) Л.И. Слепян, Нестационарные упругие волны, Судостроение, Ленинград, 1972, 376с.
- 43) Л.И. Слепян, Механика трещин, Судостроение, Ленинград, 1990, 296с.
- 44) Д.И. Трубецков, Линейные колебания и волны, Москва, Физматлит, 2001, 465с.



- 45) G.M.L. Gladwell, *Inverse Problems in Vibration*, Dordrecht/Boston/London, Kluwer Academic Publishers, 2008, 457p.
- 46) Рабинович М.И., Трубецков Д.И., *Введение в теорию колебаний и волн*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000, 560с
- 47) L. Brillouin, *Wave Propagation in Periodic Structures*, Dover Publications Inc., 1953, 255p.
- 48) V.A. Kuzkin, A.M. Krivtsov, Energy transfer to a harmonic chain under kinematic and force loadings: Exact and asymptotic solutions. *Journal of Micromechanics and Molecular Physics* 3(1,2), 2018, 1850004
- 49) Xu, A. Needleman, Numerical simulations of dynamic crack growth along an interface, *Int J Fract* 74, 1995, 289–324
- 50) S. Zhu, H. Yu, X. Wu, L. Hao, Z. Shen, J. Wang, L. Guo, Dynamic fracture analysis in nonhomogeneous piezoelectric materials with a new domain-independent interaction integral, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 122, 2022, 103614
- 51) D. Yang, X. He, X. Liu, Y. Deng, X. Huang, A peridynamics-based cohesive zone model (PD-CZM) for predicting cohesive crack propagation, *International Journal of Mechanical Sciences* 184, 2020, 105830
- 52) A. Karma, D. Kessler, H. Levine, Phase-Field Model of Mode III Dynamic Fracture, *Physical Review Letters* 87(4), 2001, 045501
- 53) L. Zhou, Z. Zhu, Y. Dong, Y. Fan, Q. Zhou, S. Deng, The influence of impacting orientations on the failure modes of cracked tunnel, *International Journal of Impact Engineering* 125, 2019, 134-142
- 54) Z. Deng, L. Zhou, Z. Zhu, L. Ma, J. Chen, F. Dai, T. Peng, Study of the fracture properties of twin tunnel surrounds subjected to the coupling of dynamic and static loads, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 130, 2024, 104308
- 55) W. Riedel, K. Thoma, S. Hiermaier, Penetration of Reinforced Concrete by BETA-B-500 Numerical Analysis Using a New Macroscopic Concrete Model for Hydrocodes. *Proc 9, ISIEMS, Berlin, 1999, 315-322*

- 56) E. Sharon, J. Fineberg, Confirming the continuum theory of dynamic brittle fracture for fast cracks, *Nature* 397, 1999, 333-335
- 57) Z. Zhuang, P.E. O'Donoghue, The recent development of analysis methodology for rapid crack propagation and arrest in gas pipelines, *Int. J. Fract.* 101, 2000, 269-290
- 58) M.F. Kanninen, P. O'Donoghue, Research challenges arising from current and potential applications of dynamic fracture mechanics to the integrity of engineering structures, *Int. J. Solids Structures* 32(17/18), 1995, 2423-2445
- 59) W. Shen, Y.-P. Zhao, Combined effect of pressure and shear stress on penny-shaped fluid-driven cracks, *Journal of Applied Mechanics* 85(3), 2017, 031003
- 60) K.B. Broberg On the Speed of a Brittle Crack, *J. Appl. Mech.* 31, 1964, 546-547
- 61) K.B. Broberg, The near-tip field at high crack velocities, *Int J. Fract.* 39, 1989, 1-13
- 62) B.V. Kostrov, Crack propagation at variable velocity *Int J. Fract.* 11(1), 1975, 47-56
- 63) L.B. Freund, *Dynamic fracture mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990
- 64) L.B. Freund, Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading. I: Constant rate of extension, *J Mech Phys Solid* 20, 1972, 129-140
- 65) L.B. Freund, Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading. II: Nonuniform rate of extension, *J Mech Phys Solid* 20, 1972, 141-152
- 66) L.B. Freund, Energy flux into the tip of an extending crack in an elastic solid. *J Elast* 2, 1972, 341-349
- 67) J.D. Achenbach, Z.P. Bazant, Elastodynamic near-tip stress and displacement fields for rapidly propagating crack in orthotropic media. *Journal of Applied Mechanics* 42, 1975, 183-189

- 68) J.D. Achenbach, V. Dunayevsky, Fields near a rapidly propagating crack tip in an elastic-perfectly plastic material, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 29, 1981, 283-303
- 69) K. Ravi-Chandar, W.G. Knauss, An experimental investigation into dynamic fracture: II. Microstructural aspects, *Int J Fract* 26, 1984, 65–80
- 70) K. Ravi-Chandar, W.G. Knauss, An experimental investigation into dynamic fracture: III. On steady state crack propagation and crack branching, *Int J Fract* 26, 1984, 141–154
- 71) K. Ravi-Chandar, W.G. Knauss, An experimental investigation into dynamic fracture: IV. On the interaction of stress waves with propagating cracks, *Int J Fract* 26, 1984, 189–200
- 72) A.S. Kobayashi, B.G. Wade, W.B. Bradley, S.T. Chiu, Crack branching in Homalite-100 plates, *Eng Fract Mech* 6, 1974, 81–92
- 73) T. Kobayashi, J.W. Dally, Relation between Crack Velocity and the Stress Intensity Factor in Birefringent Polymers, *Fast Fracture and Crack Arrest. ASTM STP 627*, 1977, 257–273
- 74) J.W. Dally, Dynamic photoelastic studies of fracture, *Exp Mech* 19, 1979, 349–361
- 75) J.F. Kalthoff, J. Beinert, S. Winkler, Measurements of dynamic stress intensity factors for fast running and arresting cracks in double-cantilever-beam specimens *ASTM STP 627*, 1977, 161-176
- 76) A.J. Rosakis, J. Duffy, L.B. Freund, The determination of the dynamic fracture toughness of AISI 4340 steel by the shadow spot method, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 34, 1984, 443–460
- 77) A.T. Zehnder, A.J. Rosakis, Dynamic fracture initiation and propagation in 4340 steel under impact loading, *Int. J. Fract* 43, 1990, 271–285

- 78) H. Maigre, D. Rittel, Dynamic fracture detection using the force-displacement reciprocity: application to the compact compression specimen, *Int. J. Fract.* 73, 1995, 67-79
- 79) J.F. Kalthoff, Modes of dynamic shear failure in solids, *Int. J. Fract.* 101, 2000, 1-31
- 80) Y.V. Petrov, N.F. Morozov, On the modeling of fracture of brittle solids, *J Appl Mech* 61, 1994, 710-712
- 81) D.M. Owen, S. Zhuang, A.J. Rosakis, G. Ravichandran, Experimental determination of dynamic crack initiation and propagation fracture toughness in thin aluminum sheets, *Int. J. Fract.* 90, 1998, 153-174
- 82) J.F. Kalthoff, On some current problems in Experimental Fracture dynamics, Workshop on dynamic fracture, California Institute of Technology, 1983, 11-25
- 83) A. Shukla, H. Nigam, A note on the stress intensity factor and crack velocity relationship for Homalite 100, *Eng. Fract. Mech* 25(1), 1986, 91-102
- 84) K. Arakawa, T. Mada, K. Takahashi, Correlations among dynamic stress intensity factor, crack velocity and acceleration in brittle fracture, *Int. J. Fract.* 105, 2000, 311-320
- 85) Y. Hwangbo, C.-K. Lee, S.-M. Kim, J.-H. Kim, K.-S. Kim, B. Jang, H.-J. Lee, S.-K. Lee, S.-S. Kim, J.-H. Ahn, S.-M. Lee, Fracture Characteristics of Monolayer CVD-Graphene, *Scientific Reports* 4: 4439 (2014) PMID 24657996.
- 86) N.A. Kazarinov, Y.V. Petrov, A.V. Cherkasov, Instability effects of the dynamic crack propagation process, *Engineering Fracture Mechanics*, 242(1), 2021, 107438
- 87) N.A. Kazarinov, Y.P. Petrov, A.V. Cherkasov, Spatial and Temporal Discreteness as a Crucial Property of the Dynamic Fracture Process, *Mechanics of Solids* 55(5), 2020, 673-678

- 88) N.A. Kazarinov V.A. Bratov, Dynamic fracture of ceramic plates due to impact loading. Numerical investigation, *Materials physics and mechanics* 4(42), 2019, 389-395
- 89) D.E. Grady, Fragment size distributions from the dynamic fragmentation of brittle solids, *International Journal of Impact Engineering*, 35, 2018;35: 1557-62
- 90) О.Б. Наймарк, С.В. Уваров, М.М. Давыдова, И.А. Банникова, Многомасштабные статистические закономерности динамической фрагментации, *Физическая мезомеханика* 20, 2017, 94-205
- 91) A.M Ignatova, O.B. Naimark, M.V. Yudin, V.L. Voronov, M.N. Ignatov, Experimental determination of fragment dynamics of refractory non-metallic silicate material under high-velocity impact. *Procedia Structural Integrity* 40 2022, 185-193
- 92) ) А.В. Герасимов, С.В. Пашков, Численное моделирование естественного дробления твердых тел, *Физическая мезамеханика* 7(У.1), 2004, 313-316
- 93) M.B. Liu, G.R. Liu, Smoothed particle hydrodynamics (SPH): an overview and recent developments, *Arch Comput Methods Eng* 17(1), 2010, 25–76
- 94) G.R. Johnson, Artificial viscosity effects for SPH impact computations. *Int J Impact Eng* 18(5), 1996, 477–488,
- 95) L.E. Kosteski, I. Iturrioz, A. Cisilino, R.B. D’ambra, V. Pettarin, L. Fasce, P. Frontini, A lattice discrete element method to model the falling-weight impact test of PMMA specimens, *International Journal of Impact Engineering* 87, 2016, 120–131
- 96) T. Belytschko, P. Krysl, Y. Krongauz, A three-dimensional explicit element-free Galerkin method, *International Journal of Numerical Methods in Fluids* 24(12), 1997, 1253-1270
- 97) J. Lee, W. Liu, J-W. Hong, Impact fracture analysis enhanced by contact of peridynamic and finite element formulations, *International Journal of Impact Engineering* 87, 2016, 108–119
- 98) P.N. Demmie, S.A. Silling, An approach to modeling extreme loading of structures using peridynamics, *J Mech Mater Struct* 2, 2007, 1921–1945

- 99) E. Cadoni, C. Albertini, G. Solomos, Analysis of the concrete behaviour in tension at high strain-rate by a modified Hopkinson bar in support of impact resistant structural design, *J. Phys. IV France* 134, 2006, 647-652
- 100) A.M. Bragov, A.K. Lomunov, Methodological aspects of studying dynamic material properties using the Kolsky method, *Int.J.Imp.Eng.* 16(2), 1995, 321-330
- 101) J. Fineberg, E. Bouchbinder, Recent developments in dynamic fracture: Some perspectives, *Int.J Fract.* 196, 2015, 33–57
- 102) G. Johnson, W. Cook, Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures, *Eng. Fract. Mech.* 21(1) 1985, 31-48
- 103) G.R. Johnson, W.H. Cook, A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and high, *Proceedings of the 7th International Symposium on Ballistics*, 1983, 541-547
- 104) M.A. Iqbal, K. Senthil, P. Bhargava, N.K. Gupta, The characterization and ballistic evaluation of mild steel, *International Journal of Impact Engineering* 78 2015, 98-113
- 105) D.J. Allen, W.K. Rule, S.E. Jones, Optimizing Material Strength Constants Numerically Extracted from Taylor Impact Data, *Experimental Mechanics* 37(3) 1997, 333-338
- 106) S. Chung Kim Yuen, G.N. Nurick, G.S. Langdon, Y. Iyer, Deformation of thin plates subjected to impulsive load: Part III – an update 25 years on, *International Journal of Impact Engineering* 107, 2017, 108-117
- 107) Y. P. Zhao, Suggestion of a new dimensionless number for dynamic plastic response of beams and plates, *Archive of Applied Mechanics* 68, 1998, 524-538
- 108) Y.V. Petrov, On "quantum" nature of dynamic failure of brittle media, *Dokl Akad Nauk SSSR* 321(1), 1991, 66-68

- 109) N.A. Kazarinov, V.A. Bratov, N.F. Morozov, Y.V. Petrov, V.V. Balandin, M.A. Iqbal, N.K. Gupta, Experimental and numerical analysis of PMMA impact fracture, *International Journal of Impact Engineering* 143, 2020, 103597
- 110) A. Dorogoy, A. Godinger, D. Rittel, Application of the incubation time criterion for dynamic brittle fracture, *International Journal of Impact Engineering* 112, 2018, 66–73
- 111) J.S. Stenzler, N.C. Goulbourne, The effect of polyacrylate microstructure on the impact response of PMMA/PC multi-laminates, *International Journal of Impact Engineering* 38, 2011, 567-576
- 112) G.I. Kanel, Spall fracture: methodological aspects, mechanisms and governing factors, *Int.J.Fract* 163, 2010, 173–191
- 113) И.П. Пархоменко, А.В. Уткин, Откольная прочность плексигласа. Исследование свойств вещества в экстремальных условиях, ИВТАН, Москва, 1990
- 114) Z. Rosenberg, Z. Surujon, Y. Yeshurun, Y. Ashuach, E. Dekel, Ricochet of 0.3'' AP projectile from inclined polymeric plates, *International Journal of Impact Engineering* 31, 2005, 221–233
- 115) D.J. Benson, J. Hallquist, Computation for transient and impact dynamics, *Encyclopedia of Vibration*, 2001, 278–286
- 116) V. Kumar, K. Ramamurthy, Meshfree and finite element modelling of impact: A comparative study, *International Journal of Impact Engineering* 90, 2016, 146-153
- 117) W.Y. Li, C. Zhang, C.J Li, H. Liao, Modeling Aspects of High Velocity Impact of Particles in Cold Spraying by Explicit Finite Element Analysis, *J Therm Spray Tech* 18, 2009, 921-933
- 118) N. Kazarinov, A. Khvorov, Predicting impact strength of perforated targets using artificial neural networks trained on FEM-generated datasets, *Defense Technology* 32, 2024, 32-44

- 119) P. Garnier, J. Viquerat, J. Rabault, A. Larcher, A. Kuhnle, E. Hachem, A review on deep reinforcement learning for fluid mechanics, *Computers & Fluids* 225, 2021,104973
- 120) X. Zhang, F. Xie, T. Ji, Z. Zhu, Y. Zheng, Multi-fidelity deep neural network surrogate model for aerodynamic shape optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 373, 2021, 113485
- 121) S. Lee, D. You, Data-driven prediction of unsteady flow over a circular cylinder using deep learning. *Journal of Fluid Mechanics* 879, 2019, 217-254
- 122) D.W. Abueidda, M. Almasri, R. Ammourah, U. Ravaioli, I. M. Jasiuk, N. A. Sobh, Prediction and optimization of mechanical properties of composites using convolutional neural networks, *Composite Structures* 227, 2019, 111264
- 123) M. Lefik, D.P. Boso, B.A. Schrefler, Artificial Neural Networks in numerical modelling of composites, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(21–26), 2009, 1785-1804
- 124) C. Yang, Y. Kim, S. Ryu, G.X. Gu, Using convolutional neural networks to predict composite properties beyond the elastic limit, *MRS Communications* 9, 2019, 609–617
- 125) I. Sosnovik, I. Oseledets, Neural networks for topology optimization, *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling* 34(4), 2019, 215-223
- 126) K. Greff, R. M. J. van Damme, J. Koutnik, H.J. Broersma, J.O. Mikhal, C. P. Lawrence, W. G. van der Wiel, J. Schmidhuber, Using neural networks to predict the functionality of reconfigurable nano-material networks, *International journal on advances in intelligent systems*, 9(3&4), 2017, 339-351
- 127) H.T. Kollmann, D.W. Abueidda, S. Koric, E. Guleryuz, N.A. Sobh, Deep learning for topology optimization of 2D metamaterials, *Materials & Design* 196, 2020, 109098



- 128) M.V. Mousavi, H. Khoramishad, Investigation of energy absorption in hybridized fiber-reinforced polymer composites under high-velocity impact loading, *International Journal of Impact Engineering* 146, 2020, 103692
- 129) A.M. Remennikov, T.A. Rose, Predicting the effectiveness of blast wall barriers using neural networks, *International Journal of Impact Engineering* 34(12), 2007, 1907–1923
- 130) M. Yong, B.G Falzon, L. Iannucci, On the application of genetic algorithms for optimising composites against impact loading. *International Journal of Impact Engineering* 35(11), 2008, 1293–1302.
- 131) N. KılıÇ, B. Ekici, S. Hartomacıođlu, Determination of penetration depth at high velocity impact using finite element method and artificial neural network tools, *Defence Technology* 11(2), 2015, 110-122
- 132) C.P. Kohar, L. Greve, T.K. Eller, D.S. Connolly, K. Inal, A machine learning framework for accelerating the design process using CAE simulations: An application to finite element analysis in structural crashworthiness, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 385, 2021, 114008
- 133) L. Lanzi, C. Bisagni, S. Ricci, Neural network systems to reproduce crash behavior of structural components, *Computers & Structures*, 82(1), 2004, 93-108
- 134) E. Sakaridis, N. Karathanasopoulos, D. Mohr, Machine-learning based prediction of crash response of tubular structures, *International Journal of Impact Engineering* 166, 2022, 104240
- 135) N. Karathanasopoulos, K. S. Pandya, D. Mohr, Self-piercing riveting process: Prediction of joint characteristics through finite element and neural network modeling, *Journal of Advanced Joining Processes* 3, 2021, 100040
- 136) Y. Gao, D. Li, W. Zhang, Z. Guo, C. Yi, Y. Deng, Constitutive modelling of the TiB<sub>2</sub>-B<sub>4</sub>C composite by experiments, simulation and neural network. *International Journal of Impact Engineering* 132, 2019, 103310

- 137) B. Jordan, M. B. Gorji, D. Mohr, Neural network model describing the temperature- and rate-dependent stress-strain response of polypropylene, *International Journal of Plasticity* 135, 2020, 102811
- 138) A. Zhang, D. Mohr, Using neural networks to represent von Mises plasticity with isotropic hardening, *International Journal of Plasticity* 132, 2020, 102732
- 139) L. Greve, B. Schneider, T. Eller, M. Andres, J.-D. Martinez, B. van de Weg, Necking-induced fracture prediction using an artificial neural T network trained on virtual test data, *Engineering Fracture Mechanics* 219, 2019, 106642
- 140) X. Li, C.C. Roth, D. Mohr, Machine-learning based temperature- and rate-dependent plasticity model: Application to analysis of fracture experiments on DP steel, *International Journal of Plasticity* 118, 2019, 320-344
- 141) A.E. Gongora, S. Mysore, B. Li, W. Shou, W. Matusik, E.F. Morgan, K.A. Brown, E. Whiting, Designing Composites with Target Effective Young's Modulus using Reinforcement Learning. In Proceedings of the 6th Annual ACM Symposium on Computational Fabrication (SCF '21). Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, 2021, Article 2, 1–1
- 142) O. Ibragimova, A. Brahme, W. Muhammad, J. Lévesque, K. Inal, A new ANN based crystal plasticity model for FCC materials and its application to non-monotonic strain paths. *International Journal of Plasticity* 144, 2021, 103059
- 143) A. Toghroli, M. Mohammadhassani, M. Suhatri, M. Shariati, Z. Ibrahim, Prediction of shear capacity of channel shear connectors using the ANFIS model, *Steel Compos. Struct* 17(5), 2014, 623-639
- 144) M. Shariati, M. Mafipour, P. Mehrabi, A. Bahadori, Y. Zandi, M.N, Salih, H. Nguyen, J.Dou, X. Song, S.P. Ngian, Application of a Hybrid Artificial Neural Network-Particle Swarm Optimization (ANN-PSO) Model in Behavior Prediction of Channel Shear Connectors Embedded in Normal and High-Strength Concrete. *Applied Sciences* 9(24), 2019, 5534

- 145) R.S. Yang, C.X. Ding, L.Y. Yang, P. Xu, C. Chen, Hole Defects Affect the Dynamic Fracture Behavior of Nearby Running Cracks, *Shock and Vibration* 2018(1), 2018, 5894356
- 146) Y. Wang, R. Yang, G. Zhao, Influence of empty hole on crack running in PMMA plate under dynamic loading, *Polymer Testing* 58, 2017, 70-85
- 147) M.F. Basoglu, Z. Zerín, A. Kefal, E. Oterkus, A computational model of peridynamic theory for deflecting behavior of crack propagation with micro-cracks, *Computational Materials Science* 162, 2019, 33-46
- 148) N. Kazarinov, Yu. Petrov, A. Utkin, Fracture delay effect: analogy between crack initiation due to short pulse loads and mass-spring system failure, *International Journal of Impact Engineering* 175, 2023, 104513
- 149) H. Neuber, *Kerbspannunglehre: Grundlagen für Genaue Spannungsrechnung*, Springer-Verlag, Berlin, 1937
- 150) V.V. Novozhilov, About the necessary and sufficient brittle strength criterion, *Prikl. Mat. Mekh.* 33(2), 1969, 212-222
- 151) C. Ma, L.B. Freund, The extent of the stress intensity factor field during crack growth under dynamic loading conditions, *ASME J Appl Mech* 53, 1986, 303–310
- 152) A.M. Bragov, Yu.V. Petrov, B.L. Karihaloo, A.Yu. Konstantinov, D.A. Lamzin, A.K. Lomunov, I.V. Smirnov, Dynamic strengths and toughness of an ultra-high performance fibre reinforced concrete, *Engineering Fracture Mechanics* 110, 2013, 477-488
- 153) C. Liu, W.G. Knauss, A.J. Rosakis, Loading rates and the dynamic initiation toughness in brittle solids, *International Journal of Fracture* 90, 1998, 103-118
- 154) V. Bratov, Y. Petrov, A. Utkin, Transient near tip fields in crack dynamics. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy* 54(7), 2011, 1309-1318
- 155) X. Yang, Z.-C. Ou, C. Yan, Z. Duan, F. Huang, A Microscopical Model for Incubation Time and Its Associated Dynamic Load-Carrying Capacity, *International Journal of Applied Mechanics* 14(6), 2022, 2250060

- 156) N.A. Kazarinov, Y.V. Petrov, A.A. Gruzdkov, On dynamic fracture of one-dimensional elastic chain, *Advanced Structured Materials* 164, 2022, 303-314
- 157) Б.М. Левитан, В.В. Жиков, Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: издательство МГУ, 1978, 204с.
- 158) А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, Мир, Москва, 1965, 616с.
- 159) H. Homma, D.A. Shockey, Y. Murayama, Response of cracks in structural materials to short pulse loads, *J. Mech. Phys. Solids* 31(3), 1983, 261-279
- 160) V. Bratov, Y. Petrov, Application of incubation time approach to simulate dynamic crack propagation, *Int. J. Fract.* 146, 2007, 53-60
- 161) T. Nakamura, C.F. Shih, L.B. Freund, Computational methods based on an energy integral in dynamic fracture, *International Journal of Fracture* 27, 1985, 229-243
- 162) C.F. Shih, B. Moran, T. Nakamura, Energy release rate along a three-dimensional crack front in a thermally stressed body, *International Journal of Fracture* 30, 1986, 79-102
- 163) K. Ravi-Chandar, *Dynamic fracture*, Elsevier, 2004, 264p.
- 164) Yu.A. Kostandov, A.N. Ryzhakov, S.I. Fedorkin, Failure of solid polymers under pulse tension, *Problemy Prochnosti* 7, 1992, 18-21
- 165) I. Smirnov, Y. Sudenkov, Crack Propagation in PMMA Plates under Various Loading Conditions, 3th International Conference on Fracture June 16–21, 2013, Beijing, China
- 166) T. Masaki, Mechanical Properties of Toughened ZrO<sub>2</sub>-Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub> Ceramics. *Journal of American Mechanical Society* 69(8), 1986, 638-640
- 167) A.J.A Winnbust, K. Keiser, A.J. Burggraaf, Mechanical Properties and Fracture Behaviour of ZrO<sub>2</sub>-Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub> Ceramics, *Journal of Materials Science* 18, 1983, 1958-1966

- 168) J. Jiusti, E.H. Kammer, L. Neckel, N.J. Lóh, W. Trindade, A.O. Silva, O.R.K. Montedo, A. De Noni Jr., Ballistic performance of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> mosaic armors with gap-filling materials, *Ceramics International* 143, 2017, 2697-2704
- 169) H.C. Bergstrom, C.L. Sollenberger, W. Mitchel, Energy aspects of single particle crushing. *Trans AIME* 220, 1961, 367–372
- 170) Yu.V. Petrov, A.A. Gruzdkov, V.A. Bratov, Structural-temporal theory of fracture as a multiscale process, *Physical Mesomechanics* 15(3-4), 2012, 232-237
- 171) H. Varela-Rizo, M. Weisenberger, D.R. Bortz, I. Martin-Gullon, Fracture toughness and creep performance of PMMA composites containing micro and nanosized carbon filaments, *Composites Science and Technology* 70, 2010, 1189–1195
- 172) D.G. Spear, A.N. Palazotto, R.A. Kemnitz, Modeling and Simulation Techniques Used in High Strain Rate Projectile Impact, *Mathematics* 9(3), 2021, 274
- 173) Y. Lecun, L. Bottou, Y. Bengio, P. Haffner, Gradient-based learning applied to document recognition, *Proceedings of the IEEE* 86(11), 1998, 2278-2324,
- 174) M. Golberg, H.A. Cho, University of Nevada, Las Vegas, USA, *Introduction to Regression Analysis*, WIT press, 2010, 452p.
- 175) D.J. Benson, J. Hallquist, Computation for transient and impact dynamics, *Encyclopedia of Vibration* (Editors: David J. Ewins, Simon G. Braun, Singiresu S. Rao), 2001, 278–286
- 176) V. Kumar, K. Ramamurthy, Meshfree and finite element modelling of impact: A comparative study, *International Journal of Impact Engineering* 90, 2016, 146-153
- 177) W.Y. Li, C. Zhang, C.J Li, H. Liao. Modeling Aspects of High Velocity Impact of Particles in Cold Spraying by Explicit Finite Element Analysis, *J Therm Spray Tech* 18, 2009, 921-933
- 178) <https://www.dynasupport.com/howtos/material/negative-volume-in-soft-materials>

- 179) D. Scheffler, J. Zukas, Practical aspects of numerical simulation of dynamic events: material interfaces, *International Journal of Impact Engineering* 24(8), 2000, 821–842
- 180) S. Ma, X. Zhang, X.M. Qiu, Comparison study of MPM and SPH in modeling hypervelocity impact problems, *International Journal of Impact Engineering* 36(2), 2009, 272-282
- 181) L. Wang, W.M. Coombs, C.E. Augarde, M. Cortis, T.J. Charlton, M.J. Brown, J. Knappett, A. Brennan, C. Davidson, D. Richards, A. Blake, On the use of domain-based material point methods for problems involving large distortion, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 355, 2019, 1003-1025
- 182) E. Oterkus, I. Guven, E. Madenci, Impact damage assessment by using peridynamic theory, *Cent.Eur.J.Eng* 2, 2012, 523–531
- 183) M.O. Ignatiev, Y.V. Petrov, N.A Kazarinov, Simulation of Dynamic Crack Initiation Based on the Peridynamic Numerical Model and the Incubation Time Criterion, *Technical Physics* 66(3), 2021, 422-425
- 184) M.O. Ignatiev, Y.V. Petrov, N.A. Kazarinov, E. Oterkus, Peridynamic formulation of the mean stress and incubation time fracture criteria and its correspondence to the classical Griffith's approach, *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 35(4), 2023, 1523-1534
- 185) Y.P. Lian, X. Zhang, Y. Liu, An adaptive finite element material point method and its application in extreme deformation problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 241–244, 2012, 275-285
- 186) N.A. Kazarinov, Y.V. Petrov, A.V. Cherkasov, Spatial and Temporal Discreteness as a Crucial Property of the Dynamic Fracture Process, *Mechanics of Solids* 55(5), 2020, 673-678
- 187) N. Kazarinov, V. Bratov, Y. Petrov, Simulation of dynamic crack propagation under quasistatic loading, *Applied Mechanics and Materials* 532, 2014, 337-341

- 188) N.A. Kazarinov, V.A. Bratov, Yu.V. Petrov, G.D. Fedorovsky, Evaluation of fracture incubation time from quasistatic tensile strength experiment, *Materials Physics and Mechanics* 19(1), 2014, 16-24
- 189) Y.V. Petrov, A.V. Cherkasov, N.A. Kazarinov, Instability of critical characteristics of crack propagation, *Acta Mechanica* 232(5), 2021, 1997-2003
- 190) N.A. Kazarinov, Y.V. Petrov, V.A. Bratov, V.Yu. Slesarenko, Numerical investigation of stress intensity factor - crack velocity relation for a dynamically propagating crack, *Materials Physics and Mechanics* 29(1), 2016, 39-42
- 191) Y. Petrov, N. Kazarinov, Instabilities encountered in the dynamic crack propagation process under impact loading as a natural consequence of the dynamic fracture discreteness, *Procedia Structural Integrity* 28, 2020, 1975-1980
- 192) N. Kazarinov, I. Smirnov, Y. Sudenkov, Y. Petrov, V. Slesarenko, Experimental investigation of dynamic crack propagation in PMMA plates, *Procedia Structural Integrity* 6, 2017, 83-89
- 193) N.A. Kazarinov, A.D. Evstifeev, Y.V. Petrov, S.A. Atroshenko, R.R. Valiev, The Effect of Grain Refinement on Solid Particle Erosion of Grade 5 Ti Alloy, *Journal of Materials Engineering and Performance*, 2018, 27(6), 3054-3059
- 194) Y.V. Petrov, S.A. Atroshenko, N.A. Kazarinov, A.D. Evstifeev, V.Y. Solov'ev, Dynamic fracture of the surface of an aluminum alloy under conditions of high-speed erosion, *Physics of the Solid State* 59(4), 2017, 661-666
- 195) N.A. Kazarinov, A.D. Evstifeev, Y.V. Petrov, S.A. Atroshenko, V.A. Lashkov, R.Z. Valiev, A.S. Bondarenko, Surface Roughness Investigation of Ultrafine-Grained Aluminum Alloy Subjected to High-Speed Erosion, *Journal of Materials Engineering and Performance* 25(9), 2016, 3573-3579
- 196) A.D. Evstifeev, Y.V. Petrov, N.A. Kazarinov, R.R. Valiev, Strength of the Ti-6Al-4V Titanium Alloy under Conditions of Impact and Short Pulse Loading, *Physics of the Solid State* 60(12), 2018, 2358-2362

- 197) A.D. Evstifeev, N.A. Kazarinov, Y.V. Petrov, S.A. Atroshenko, R.R. Valiev, High-rate erosion of Ti–6Al–4V ultrafine-grained titanium alloy obtained via intensive plastic torsional deformation, *Physics of the Solid State* 59(9), 2017, 1794-1797
- 198) Y.V. Petrov, A.M. Bragov, N.A. Kazarinov, A.D. Evstifeev, Experimental and numerical analysis of the high-speed deformation and erosion damage of the titanium alloy VT-6, *Physics of the Solid State* 59(1), 2017, 93-97
- 199) A. Evstifeev, N. Kazarinov, Y. Petrov, L. Witek, A. Bednarz, Experimental and theoretical analysis of solid particle erosion of a steel compressor blade based on incubation time concept, *Engineering Failure Analysis* 87, 2018, 15-21
- 200) V. Slesarenko, N. Kazarinov, S. Rudykh, Distinct failure modes in bio-inspired 3D-printed staggered composites under non-aligned loadings, *Smart Materials and Structures* 26(3), 2017, 35053
- 201) R.Z. Valiev, E.A. Prokofiev, N.A. Kazarinov, G.I. Raab, T.B. Minasov, J. Stráský, Developing nanostructured Ti alloys for innovative implantable medical devices, *Materials* 13(4), 967
- 202) N. Kazarinov, A. Stotskiy, A. Polyakov, R.Z. Valiev, N. Enikeev, Finite Element Modeling for Virtual Design to Miniaturize Medical Implants Manufactured of Nanostructured Titanium with Enhanced Mechanical Performance, *Materials* 15(21), 2022, 7417