

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Горыня Екатерина Валерьевна

Математическое моделирование конкурентной среды

Научная специальность

1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Колпак Евгений Петрович

Санкт-Петербург

2024

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Теория биологических и экономических систем	14
§ 1. Теория биологических систем	
1.1.1. Конкуренция в экосистемах	14
1.1.2. Экологическая ниша	16
1.1.3. Теория нейтрализма	19
§ 2. Теория экономических систем	
1.2.1. Конкуренция в экономических сообществах	21
1.2.2. Показатели конкуренции и модели рынка.....	24
Глава 2. Статистический анализ конкуренции мирового рынка продовольствия.....	27
2.1. Групповой критерий анализа рынка.....	28
2.2. Корреляционный критерий анализа рынка	32
2.3. Долевое распределение экономических субъектов	34
2.4. Кумулятивные методы прогнозирования	36
2.5. Прогнозирование уровня конкуренции кумулятивными методами.....	38
2.6. Прогнозирование индекса концентрации методами анализа временных рядов	40
2.7. Анализ темпов роста объема экспорта.....	43
2.8. Частотный критерий анализа рынка.....	45
2.9. Долевой критерий анализа рынка.....	47
Глава 3. Математические модели конкуренции	50
§ 1. Точечные математические модели конкуренции	
3.1.1. Математические модели конкуренции	54
3.1.2. Интерференционная модель конкуренции	56
3.1.3. Иерархическая модель конкуренции.....	64
3.1.4. Фрагментарная модель конкуренции.....	70

3.1.5. Ресурсная модель конкуренции	76
3.1.6. Эксплуатационная модель конкуренции	82
3.1.7. Математическая модель «пассивного» ухода от конкуренции	89
3.1.8. Математическая модель сезонности конкуренции	95
3.1.9. Двухкамерная модель динамики численности одионочной популяции	102
§ 2. Пространственные математические модели конкуренции	
3.2.1. Математическая модель гетерогенного ареала	109
3.2.2. Математическая модель Базыкина-Вольтерра	116
3.2.3. Конкуренция на отрезке со встречаей на ресурсе	125
3.2.4. Эксплуатационная модель конкуренции	128
Заключение	131
Список литературы	133

Введение

Конкурентные взаимоотношения встречаются в различных средах. Основными являются биологическая и экономическая. Экономическая среда регулярно претерпевает сильные изменения: создаются новые рабочие места, наблюдается рост производства в различных сферах промышленности, улучшаются технологии. В биологической среде конкуренция внутри популяции и между различными популяциями также является важным биологическим взаимодействием [1]. Конкуренция является одним из многих взаимодействующих биотических и абиотических факторов, которые влияют на структуру сообщества, видовое разнообразие и динамику популяций. Однако, несмотря на значительный успех в изучении процессов конкуренции в биологических и экономических системах, вопрос анализа и оценки уровня конкуренции по-прежнему остаётся актуальным.

Непрерывный процесс эволюции привел к образованию множества видов. Существуют следующие взаимоотношения между видами: хищник-жертва, симбиоз и конкуренция по классификации биологов [2]. В биологической среде важным показателем конкуренции является численность популяций. На основании этого для описания изменения численности популяции рассматриваются модели популяционной динамики [3].

Разработаны различные концепции конкуренции и методы количественного измерения. Одна из них – гибель большинства популяций вследствие конкуренции. Парадоксы мирного сосуществования многочисленных конкурирующих за ресурсы видов привели к разработке теории нейтрализма, объясняющей эффект мирного существования многочисленных биологических популяций на одном и том же трофическом ресурсе [4]. Условия проведения полевых исследований не позволяют установить уровень конкуренции и найти внутривидовую конкуренцию, чтобы оценить конкурентные взаимоотношения между особями [5]. Единственный эксперимент был поставлен Гаузе с 2 видами инфузорий. Впоследствии, на базе

проведенного эксперимента возникает принцип конкурентного исключения Гаузе [6].

Математические модели взаимодействующих популяций начали разрабатываться в начале XX в. Первые модели конкуренции Вольтерра согласуются с принципом Гаузе [7]. В России математические модели взаимодействующих популяций разрабатывал Базыкин А.Д. [8]. За рубежом наиболее полное обоснование таких моделей дал Мюррей Дж. [9]. В большинстве моделей не учитывается наличие ниш, трофический ресурс, временной фактор, смена ареала [10-11]. Некоторые разработанные математические модели считаются устаревшими, так как они не характеризуют современное состояние конкурентной среды [12-15]. Также не найдены математические модели для n популяций. Некоторые авторы проводят теоретический анализ графов взаимосвязей для n популяций. Однако, в указанных выше литературных источниках отсутствуют математические модели для n популяций и имитационное моделирование [16-19]. В диссертационной работе разработанные модели учитывают различные факторы и имитационное моделирование для случая n популяций.

Со временем математические модели изменения численности популяций начали применяться и для экономических субъектов. В частности, в экономической динамике данные модели использовал Прасолов А.В. [20]. В экономике существуют методы измерения уровня конкуренции. В научных исследованиях используется индекс Херфиндаля-Хиршмана. В российском законодательстве антимонопольный комитет использует индекс концентрации [21]. В законе конкуренция определяется как равенство всех взаимодействующих субъектов. Также введены термины, связанные с концентрированностью рынка. Предварительные оценки говорят о многочисленности мелких предприятий, по сравнению с количеством крупных, что говорит в определенной степени об отсутствии монополистов [22]. Необходимо проверить действительно ли наблюдается данная тенденция и имеет ли место гипотеза теории нейтрализма на мировом рынке продовольствия.

Актуальность темы

В русском языке конкуренция трактовалась как борьба за достижение больших выгод, преимуществ. В конце XIX в России под конкуренцией в области народного хозяйства понималось «соперничество нескольких лиц в достижении одной и той же цели» [23]. М. И. Туган-Барановский рассматривал «свободную» конкуренцию без вмешательства в нее, как благотворное явление, но способное при определенных условиях переродиться в монополию. Задолго до исследований М. И. Туган-Барановского в 1859 году Б. Калиновский на основе анализа результатов свободной торговли в Европейских странах сделал вывод о необходимости ее постоянного ограничения [24]. К настоящему моменту все больше ведется споров о значении конкуренции. В некоторых работах термин конкуренции рассматривается как понятие, оторванное от своей сущности [25]. В работе автор придерживается позиции, что конкуренция это борьба старых технологий с новыми [26]. С техногенными изменениями, затрагивающими экосистему и экономическую среду меняется и сущность данного понятия. Поэтому термин конкурентных взаимоотношений нуждается в переопределении.

Цели работы и задачи

Основная цель исследования — разработка математических моделей конкурентной среды, учитывающих иерархические взаимоотношения, трофический ресурс, смену ареала, временной фактор, и разработка моделей выживаемости в конкурентной среде, а также анализ мирового рынка существующими показателями конкуренции и разработка новых критериев для оценки рыночной конкуренции, пороговых значений концентрированности рынка и прогнозирования его развития.

В качестве основных задач можно выделить следующие:

- Анализ индекса концентрации, скорости роста объемов экспорта и корреляционных зависимостей рыночных позиций с целью выявления наиболее и наименее конкурентной отрасли, а также субъектов, занимающих лидирующие позиции;

- Прогноз индекса концентрации и объема экспорта с помощью методов анализа временных рядов и разработанных кумулятивных методов с целью выявления наилучшего метода прогнозирования;
- Разработка и верификация новых критериев анализа конкурентного взаимодействия экономических субъектов рынка – групповой, корреляционный и долевого критерий;
- Разработка и верификация новых моделей конкуренции – эксплуатационная модель конкуренции, иерархическая модель, фрагментарная модель, двухкамерная модель, модель пассивного ухода от конкуренции, сезонная модель конкуренции и др.;
- Проведение имитационного моделирования с целью выявления уровня выживаемости популяций и установление пороговых значений индекса концентрации.

Методы исследования

В процессе проведения исследования автор опирался на научную методологию проведения исследований, общепризнанные принципы и подходы к исследовательской деятельности в области прикладной математики, математического моделирования, статистики, теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений в частных производных.

Численные результаты для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений получены с помощью библиотеки **odeint** языка Python. Численные результаты для решения систем дифференциальных уравнений в частных производных получены с помощью библиотеки **pde** языка Python. Для визуализации результатов использовалась библиотека **Matplotlib** языка Python.

Научная новизна

- Разработаны новые методы анализа мирового рынка продовольствия;
- Разработаны три новых критерия для оценки состояния рынка – групповой, корреляционный и долевого;
- Обосновано и проведено имитационное моделирование конкурентных систем;
- Разработаны математические модели конкурентных взаимоотношений, учитывающие формирование ниш, трофический ресурс, временной фактор, иерархические взаимоотношения.

Достоверность полученных результатов

Достоверность результатов обеспечена корректностью постановки задачи с учётом современных представлений и концепций конкурентных взаимоотношений, а также обоснована публикацией оригинальных результатов в научных журналах и обсуждением результатов на международных конференциях и научных семинарах. Качественные теоретические результаты согласуются с результатами статистического анализа мирового рынка продовольствия.

Апробация работы

Результаты диссертационной работы были представлены на научных семинарах Кафедры вычислительных методов механики деформируемого твёрдого тела Санкт–Петербургского государственного университета и на следующих международных и всероссийских конференциях:

- VII Международная научная конференция аспирантов и студентов «Современные Методы Прикладной Математики, Теории Управления И Компьютерных Технологий (ПМТУКТ-2014)», 2014, Воронеж, Россия;
- XLVI Международная научная конференция аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» (CPS'15), 2015, Санкт-Петербург, Россия;

- IX Международная научная конференция аспирантов и студентов «Современные Методы Прикладной Математики, Теории Управления И Компьютерных Технологий (ПМТУКТ-2016)», 2016, Воронеж, Россия;
- X Международная научная конференция аспирантов и студентов «Современные Методы Прикладной Математики, Теории Управления И Компьютерных Технологий (ПМТУКТ-2017)», 2017, Воронеж, Россия;
- Всероссийская научная конференция аспирантов и студентов «Богатство России», 2018, Москва, Россия;
- Всероссийская научная конференция аспирантов и студентов «Богатство России», 2019, Москва, Россия;
- L Международная научная конференция аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» (CPS'19), 2019, Санкт-Петербург, Россия;
- XVI Международная научная конференция аспирантов и студентов «Современные Методы Прикладной Математики, Теории Управления И Компьютерных Технологий (ПМТУКТ-2023)», 2023, Воронеж, Россия.

Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в двадцати семи научных публикациях [27–53], пять — в изданиях индексируемые SCOPUS и Web Of Science [27-31], три — в журналах, включённых в перечень ВАК [51-53].

Личный вклад

Диссертация является самостоятельным научным исследованием, свидетельствующем о профессиональной квалификации её автора. Консультации на стадии разработки новых моделей проводились с Е. П. Колпаком. Личный вклад соискателя заключается в непосредственном участии во всех этапах диссертационного исследования. Автор диссертации осуществлял реализацию разработанных методов решения поставленных задач и написание компьютерных

программ. Обработка и анализ полученных результатов также выполнялись соискателем.

Поддержка

Часть исследования выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта мол_а № 18-31-00323.

Объём и структура работы

Структура диссертационной работы состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 149 страниц с 55 рисунками и 26 таблицами. Список литературы содержит 125 наименований.

Содержание работы

Во введении представлен анализ современного состояния исследований по изучаемой тематике, раскрыта актуальность работы, её научная и практическая значимость. Также сформулированы цель и задачи исследования, приведены основные положения, выносимые на защиту, и методы исследования. В конце введения приводится краткое содержание работы по каждой главе.

В **Главе 1** представлены основные концепции и определения теории биологических и экологических систем – варианты конкурентных взаимоотношений в экономической среде и экосистеме, описание понятия экологической ниши, ее свойства и характеристики, теория нейтрализма и принцип конкурентного исключения Гаузе.

Глава 2 посвящена статистическому анализу мирового рынка продовольствия и разработке новых критериев анализа и оценки уровня рынка. Проведен статистический анализ с применением классических подходов и критериев. Частью статистического анализа является оценка уровня конкуренции. Анализируется мировой рынок продовольствия по 120 позициям, 12 продуктовым категориям и 190 экономическим субъектам. Выбор рынка продовольствия обусловлен его стабильностью и устойчивостью. Для анализа объема экспорта используются

критерии оценки уровня конкуренции – индекс концентрации, индекс Херфиндаля-Хиршмана и индекс Линда.

Разработаны 3 новых критерия оценки уровня конкуренции:

- групповой критерий позволяет дать оценку продуктовой категории и выявить монополистические взаимоотношения;
- корреляционный критерий позволяет дать оценку состояния рынка;
- долевого критерий позволяет установить ядро рынка.

Также разработаны кумулятивные методы прогнозирования объемов продовольствия и проведен сравнительный анализ существующих методов прогнозирования.

Глава 3 состоит из двух разделов. Первый раздел посвящен разработке локальных математических моделей конкурентных взаимоотношений, второй раздел посвящен пространственно-временным моделям. В рамках каждой модели проводится анализ на поиск и устойчивость стационарных точек. Разработанные математические модели учитывают фактор среды, временной фактор, трофический ресурс, иерархические взаимоотношения и другие факторы. Для каждой модели проведено имитационное моделирование, в ходе которого анализируется плотность распределения уровня выживаемости и индекса концентрации, исследуется зависимость фактора среды и устанавливаются пороговые значения количества субъектов низкоконцентрированной среды.

В **заключении** сформулированы основные результаты работы.

Основные научные результаты

В диссертационной работе проведен статистический анализ мирового рынка экспорта продовольствия с применением классических подходов и критериев. Частью статистического анализа мирового рынка является оценка уровня конкуренции. В работе анализируется мировой рынок различных продуктовых категорий за последние 60 лет. Для анализа объема экспорта используются

критерии оценки уровня конкуренции – индекс концентрации, индекс Херфиндаля-Хиршмана и Линда. Результаты проведенного анализа могут служить основанием для внесения поправок в закон о защите конкуренции. Теоретический анализ рынка показал, что существующих критериев недостаточно, чтобы сделать однозначное заключение о рыночной ситуации. Разработанные критерии статистического анализа позволяют дать точную оценку состояния рынка, установить пороговые значения концентрированности рынка и дать прогноз его развития [51].

В большинстве существующих моделей не учитывается наличие ниш, трофический ресурс, временной фактор, смена ареала и тд. Также не найдены математические модели для n популяций. В диссертационной работе разработанные модели учитывают эти факторы. Также проводится имитационное моделирование для случая n популяций для различных вариантов взаимоотношений – интерференция [52], эксплуатация [28], иерархия [53]. Результаты моделирования позволяют выявить факторы, которые влияют на гибель популяции, оценить динамику выживаемости популяций, установить влияние среды на конкурентные взаимоотношения [31].

Полученные результаты могут быть использованы биологическими органами управления для рационального использования заповедной территории или контроля численности популяций. Также разработанные критерии и метрики могут быть использованы антимонопольными органами или другими организациями [29, 30], регулируемыми конкурентные взаимоотношения на рынке, для расширения, уточнения или переопределения существующих методов оценки конкуренции и выявления монополии или олигополии на рынке.

Основные положения, выносимые на защиту

- Долевой критерий анализа рынка;
- Групповой критерий анализа рынка;
- Корреляционный критерий анализа рынка;
- Кумулятивные методы прогнозирования;
- Иерархическая модель конкуренции;

- Фрагментарная модель конкуренции;
- Ресурсная модель;
- Эксплуатационная модель конкуренции;
- Двухкамерная модель динамики численности одиночной популяции;
- Математическая модель «пассивного» ухода от конкуренции;
- Математическая модель сезонности конкуренции;
- Пространственная эксплуатационная модель конкуренции;
- Конкуренция на отрезке со встречами на ресурсе.

Глава 1. Теория биологических и экономических систем

§ 1. Теория биологических систем

1.1.1. Конкуренция в экосистемах

Конкуренцией в экосистемах являются симбиотические отношения между живыми существами, которые конкурируют за ресурсы, а именно трофический ресурс, территорию, экологический статус и т. д. [54-56]. Конкуренция является одной из симбиотических отношений, происходящих в природе. Такое взаимодействие возможно, как между различными популяциями, так и внутри одной популяции. Особи одной популяции имеют близкие потребности в ресурсах, обеспечивающих их выживание, рост и размножение [57]. В случае биологической конкуренции рассматривается следующая классификация [58-61].

Конкуренция по типу взаимодействия между видами:

- *Межвидовая конкуренция* возникает, когда особи двух видов совместно используют ограниченный ресурс на одном и том же ареале обитания.
- *Внутривидовая конкуренция* возникает, когда представители одного и того же вида соревнуются за схожие ресурсы в экосистеме.

Конкуренция по типу взаимодействия с ресурсом:

- *Эксплуатационная конкуренция* происходит косвенно, когда обе популяции используют общий ресурс, не взаимодействуя с особями другого вида.
- *Интерференционная конкуренция* происходит, когда организмы взаимодействуют напрямую, борясь за ограниченные ресурсы.

Конкуренция по пропорциональным характеристикам:

Ресурсы могут быть пространственно разобщены. Дифференциальное использование ресурсов может сопровождаться расхождением по локальным местам обитания, либо географическим распространением. Доступность ресурсов может быть разной во времени (сутки, сезоны).

- *Симметричная конкуренция.* Все особи получают одинаковое количество ресурсов, независимо от их размера.
- *Асимметричная конкуренция.* Самые крупные особи используют все имеющиеся ресурсы.

Факторы экологической системы. Территориальное распределение особей популяции зависит от наличия трофического ресурса, внутривидовой конкуренции, давления других популяций, климатических условий, характера местности и внешних факторов экологической системы [62]. К этим факторам относятся:

- *Внутреннее динамическое равновесие.* Любое изменение энергетических, информационных и качественных показателей систем вызывает функционально-структурные качественные и количественные изменения в системе.
- *Снижение экологических факторов* может привести к гибели организмов или деструкции экосистемы. В социальных системах к этому приводят снижение экономических условий и материального обеспечения.
- *Уменьшение биоты* в экосистемах или численности населения социальных систем ниже порогового значения лишает устойчивости окружающую среду или социальную систему.
- *При внешнем воздействии,* выводящем систему из состояния устойчивого равновесия, равновесие смещается в направлении наименьшего эффекта внешнего воздействия.

1.1.2. Экологическая ниша

Многочисленные примеры мирного взаимодействия популяций растений и животных ставят под сомнение наличие постоянной межвидовой конкуренции [63]. Множество видов мирно сосуществуют на одном и том же трофическом ресурсе, не вступая друг с другом в соперничество. Для объяснения такого взаимодействия предложены две основные концепции:

- Два вида могут сосуществовать на одном ареале без соперничества, не расходясь по своим нишам – одна из концепций теории нейтрализма.
- Виды в процессе эволюции создают или находят свои непересекающиеся ниши – эволюционная концепция (конкуренция была в прошлом).

Уровень конкуренции на различных территориях и временных интервалах может быть разным. Поэтому в случае конкурентных взаимоотношений гибель слабого вида происходит не всегда. Даже слабый конкурент может вытеснить более сильного соперника, получив достаточное преимущество.

Концепция экологической ниши возникла в 70-х годах [64]. Ранние определения варьировались от ниши как роли, которую играет вид в сообществе, до типа окружающей среды, которую занимает вид. Экологическая ниша описывает положение вида в экосистеме, его экологическую роль в ней и ряд условий, необходимых для устойчивости этого вида. Экологическая ниша представляет собой полную и фундаментальную концепцию, так как она учитывает взаимодействия видов как с биотической, так и с абиотической средой.

Также концепция экологической ниши учитывает условия среды, которые оказывают влияние на вид, а также влияние самого вида на окружающую среду. Выделяют 3 концепции экологической ниши – ниша как описание потребности вида в среде обитания, ниша как функциональная роль вида в экосистеме и ниша как динамическое положение вида в сообществе [65].

Ниша как описание потребности вида в среде обитания. В рамках этой концепции учитываются условия окружающей среды, которые необходимы для комфортного существования вида и поддержания численности его популяции. Впервые эту концепцию ввел Гринел в 1928 году, где упоминал нишу, как единицу пространственного распределения, в пределах которой может существовать вид [66]. То есть в рамках этой концепции экологическая ниша это территория, занимаемая видом, и она определяется его абиотическими потребностями, пищевыми предпочтениями, характеристиками микросреды обитания, избеганием хищников и тд. Знание экологической ниши рассматриваемого вида необходимо для понимания и прогнозирования его географического распространения. Таким образом, эта концепция ниши более уместна в биогеографии и макроэкологии, чем в экологии сообщества или экосистемы [67].

Ниша как функциональная роль вида в экосистеме. В этой концепции ниши каждый вид играет определенную роль в экосистеме и ее динамике. Эту роль могут выполнять разные виды на различных территориях. Наблюдение за отдаленными видами, приспособившимся к эквивалентным экологическим ролям, повлияло на Чарльза Элтона, который подчеркнул функциональные роли видов. Он выделил сходство между тушканчиками и кенгуровыми крысами, между многими плацентарными и сумчатыми видами. Таким образом, функциональная ниша относится к положению вида в трофических цепях и пищевых цепях. Данная концепция особенно актуальна для экологии экосистем.

Ниша как динамическое положение вида в сообществе. Внимание к многообразию экологических сообществ привело к формализации концепции ниш и ее свойствах, которые позволяют разным видам сосуществовать в среде обитания. В 1957 г. эколог Г.Е. Хатчинсон сформулировал определение ниши, как «гиперобъем» в многомерном экологическом пространстве, определяемом потребностями вида для размножения и выживания [68]. Ниши являются динамическими, поскольку присутствие одного вида ограничивает присутствие другого за счет межвидовой конкуренции, которая изменяет положение ниш в

многомерном пространстве. На формирование ниши влияют биологически значимые факторы окружающей среды [69].

С термином «ниша» неразрывно связан принцип Гаузе [6], который гласит о том, что два вида не могут сосуществовать, если они занимают одну экологическую нишу. Сам Гаузе дает такое определение ниши – место, занимаемое видом в сообществе, то есть его привычки, пища и образ жизни.

Считается, что существует несколько факторов, которые позволяют разным видам одновременно мирно сосуществовать на одном ареале или достаточно быстро найти или создать свою экологическую нишу. На создание экологической ниши влияют несколько факторов:

- *Пространственная неоднородность.*
- *Климатические колебания.*
- *Эволюционное время.*

Ограничение экологических ниш в экосистеме. Существует концепция об ограниченности имеющихся ниш для рассматриваемой среды, так как экологическое пространство неоднородно и распределение ресурсов, доступных сообществу, ограничено. Всегда существует ограниченный потенциал для размера сообщества, определяемого общим объемом ресурсов. Для организма в окружающей среде количество возможных ниш определяется количеством возможных способов использования ресурса [70-72].

1.1.3. Теория нейтрализма

Историческое развитие теории ниши тесно связано с проблемой конкуренции и сосуществованием видов. С самого начала развития концепции экологической ниши предполагалось, что не допускается использование одной ниши двумя видами.

«Принцип конкурентного исключения» Гаузе заключается в том, что использование ограниченного ресурса ведет к его истощению, а рост популяции приводит к моменту, когда уровень ресурса недостаточен для дальнейшего роста. В случае двух видов, разделяющих ресурс, скорее всего, будет существовать уровень ресурсов, при котором первый вид все еще может расти, даже если второй не может. Это приведет к дальнейшему снижению темпов роста второй популяции и к его вымиранию. Даже если два вида, разделяющие несколько ресурсов, имеют абсолютно одинаковые потребности и способность их использовать, сосуществование таких видов не является стабильным из-за экологической или демографической стохастичности: со временем один из видов в конечном итоге случайно вымрет.

«Принцип конкурентного исключения» является основным принципом экологии сообществ, и большая часть этой области посвящена изучению того, как могут сосуществовать виды со схожими экологическими требованиями.

Сосуществование видов часто обеспечивается разделением ниш. Сдвиг ниши может быть следствием конкурентного исключения одного вида из той части экологического пространства, где ниши перекрываются, или коэволюции конкурирующих видов. Разделение ниш может быть связано с процессами, которые имели место в прошлом.

Если виды схожи в использовании ресурсов, конкурентное исключение может занять очень много времени. Если ротация особей является случайным процессом, тогда преобладание конкретного вида также является случайным процессом.

Основоположником теории нейтрализма в России стал Гиляров А.М., за рубежом – Хаббелл [73]. Сейчас существует две основные версии ухода от конкуренции. Первая это нахождение своей пространственной или трофической ниши. Она не предполагает совместное сосуществование на одной территории нескольких видов. Вторая концепция предполагает мирное сосуществование видов без расхождения их по своим нишам. Главная часть этой теории состоит в том, что виды могут обитать вместе именно благодаря схожести экологических характеристик друг друга [74].

§ 2. Теория экономических систем

1.2.1. Конкуренция в экономических сообществах

Человек, опираясь на природные ресурсы и богатство экосистем, тысячи лет назад стал формировать для себя среду обитания, в которой он создавал необходимые трофические ресурсы для своего существования. Необходимые ресурсы постепенно стали распределяться неравномерно как между членами сообществ, так и между производителями товаров. В системе производства и реализации товаров на каком-то этапе ее эволюции стали возникать многочисленные производители одного и того же товара. Изобилие товаров на рынках привело к соперничеству между производителями (продавцами), которое стало называться конкуренцией. Возникли и отдельные производители, стремящиеся монополизировать производство и реализацию товаров или отстранить (включая уничтожение) аналогичных производителей.

Считается, что конкуренция определяет характер взаимодействия в сфере экономики между производителями продукции и покупателями [75]. Она является принципом устройства рыночного хозяйства, механизмом взаимодействия и способом реализации экономических целей. Конкуренция провозглашается непреходящей ценностью, обеспечивающей прогрессивное движение человечества, а также является по некоторым представлениям естественным законом в социальном обществе. На некоторых рынках конкурентный процесс может являться объектом регулирования [76]. Конкурентные взаимоотношения оказывают непрерывное влияние на состояние рынка. Стабильность и устойчивость рынка обусловлены следующими условиями [77-79]:

- ранговая иерархия субъектов определена и может меняться с течением времени;
- контроль субъектов осуществляется равномерно;

- барьеры на пути движения товаров, услуг, капиталов отсутствуют (свобода входа на рынок);
- обеспечена однородность продукции.

В работе Васильева А.Н. конкуренция трактовалась как борьба за достижение больших выгод и преимуществ [80]. В конце XIX в. в России под конкуренцией в области народного хозяйства понималось «соперничество нескольких лиц в достижении одной и той же цели».

Противоречивость определения конкуренции нашла свое отражение и в российском законе о конкуренции [21] – под конкуренцией понимается «соперничество хозяйствующих субъектов, при котором самостоятельными действиями каждого из них исключается или ограничивается возможность каждого из них в одностороннем порядке воздействовать на общие условия обращения товаров на соответствующем товарном рынке». Одновременно с этим введено понятие недобросовестной конкуренции – «любые действия хозяйствующих субъектов (группы лиц), которые направлены на получение преимуществ при осуществлении предпринимательской деятельности...». Таким образом, под конкуренцией следует понимать среду производства и реализации товаров и услуг, в которой действующие организации и лица не мешают ни в чем друг другу.

В законе описаны и признаки ограничения конкуренции, которые можно рассматривать как некую «размытую» границу между «конкуренцией» и «недобросовестной конкуренцией». Количественные критерии выявления наличия конкуренции в законе не предусмотрены. Дается лишь критерий определения доминирующего положения трех хозяйствующих объектов. В зарубежных источниках также существует понятие недобросовестной конкуренции [81].

В рамках недобросовестной конкуренции концепция ниши для экономического субъекта в экономике может быть связана с возможностью субъекта предотвратить конкуренцию с другими субъектами и, следовательно, получить максимальный уровень защищенности.

В случае конкуренции в экономической среде рассматривается следующая классификация [82].

Виды конкуренции по масштабам развития:

- Индивидуальная;
- Территориальная;
- Внутриотраслевая;
- Межотраслевая;
- Глобальная.

Виды конкуренции по характеру развития:

- Свободная/Регулируемая;
- Ценовая/Неценовая.

В случае ценовой конкуренции происходит искусственное изменение цен на товар. При неценовой конкуренции происходит непосредственное изменение самого товара с помощью совершенствования технологий производства.

Виды конкуренции по направленности:

- Конкуренция за ресурс;
- Конкуренция за товары/услуги.

В диссертационной работе разрабатываются математические модели конкурентных взаимоотношений популяций в экономической и экологической системах. Под популяцией можно трактовать сообщество людей, проживающих на территории и связанных между собой посредством экономических взаимоотношений, объединения коллективов, производящих конкретные виды товаров и услуг, регионы и государства, экономически взаимодействующие между собой. Внутривидовой конкуренцией в данном случае выступают издержки производства, а под межвидовой конкуренцией понимается форма конкуренции, возникающая путем продажи товаров на рынке.

1.2.2. Показатели конкуренции и модели рынка

За основу берется гипотеза о том, что конкуренция зависит от числа участников процесса производства и реализации товаров [26]. Выделяют в зависимости от числа участников несколько типов рынка. Основные из них – монополия, олигополия, монополистическая конкуренция, чистая конкуренция. Отсутствуют пороговые значения для определения «количественных» границ между этими рынками. Такая классификация также не отражает интенсивность происходящих на рынках процессов.

Одна из концепций анализа интенсивности конкуренции на рынке основывается на использовании финансовых показателей фирм. Низкая норма прибыли говорит о незначительной рыночной власти, а высокая – о власти, ограничивающей конкуренцию [83].

В основе следующего подхода лежит предположение, что уровень конкуренции находится в обратной зависимости от концентрации рыночных долей фирм на рынке – чем выше концентрация экономических субъектов, тем менее конкурентноспособной считается рыночная среда. В экономике существуют методы измерения конкуренции. В научных исследованиях используются индекс концентрации [84], индекс Херфиндаля–Хиршмана [85], коэффициент относительной концентрации [86], коэффициент энтропии [87], модифицированный коэффициент Джинни [88], ранговый индекс концентрации [89] и другие индексы. Ниже рассматриваются индексы, в которых количественная оценка концентрации производства оценивается по долям экономического субъекта в общем балансе реализуемых товаров на рынке.

Коэффициент концентрации рынка CR_n рассчитывается по формуле:

$$CR_n = \frac{\sum_{k=1}^n V_k}{\sum_{k=1}^N V_k},$$

где V_k ($k = 1, 2, \dots, N$) – доля k -ого субъекта на рынке, n – количество самых крупных субъектов рынка, N – общее количество субъектов рынка. Индекс

концентрации измеряется в относительных долях (или процентах). При равных долях всех операторов $CR_n = \frac{n}{N}$. При фиксированном выборе n в этом случае $CR_n \rightarrow 0$, если $N \rightarrow \infty$.

Пороговые значения индекса концентрации:

- $CR_3 \in [0, 0.45)$ - неконцентрированный рынок;
- $CR_3 \in [0.45, 0.7)$ - умеренно концентрированный рынок;
- $CR_3 \in [0.7, 1]$ - высоко концентрированный рынок.

Индекс Херфиндаля—Хиршмана учитывает доли всех фирм и рассчитывается по формуле:

$$H_N = \sum_{k=1}^N V_k^2.$$

В случае равных долей ($V_k = \frac{1}{N}, k = 1, 2, \dots, N$) $H_N = \frac{1}{N}$. То есть с увеличением числа равноправных участников индекс Херфиндаля—Хиршмана уменьшается. Если доля хотя бы одного оператора увеличивается, а остальных уменьшается, то H увеличивается, приближаясь к 1.

Пороговые значения индекса Херфиндаля—Хиршмана:

- $H \in [0, 0.1)$ – низкая концентрация;
- $H \in [0.1, 0.2)$ – средняя концентрация;
- $H \in [0.2, 1)$ – высокая концентрация.

Индекс Линда используется в странах Европейского союза для анализа различий в группе крупнейших экономических субъектов. С его помощью определяется «ядро» рынка. Для этого рыночные доли экономических субъектов располагаются в порядке убывания $V_1 \geq V_2 \geq \dots V_N$.

Индекс Линда для двух фирм рассчитывается по формуле:

$$IL = \frac{V_1}{V_2};$$

для трех фирм –

$$IL = \frac{1}{2} \left(2 \frac{V_1}{V_2 + V_3} + \frac{V_1 + V_2}{2V_3} \right);$$

для четырех фирм –

$$IL = \frac{1}{3} \left(3 \frac{V_1}{V_2 + V_3 + V_4} + \frac{V_1 + V_2}{V_3 + V_4} + \frac{1}{3} \frac{V_1 + V_2 + V_3}{V_4} \right);$$

для пяти фирм –

$$IL = \frac{1}{4} \left(4 \frac{V_1}{V_2 + V_3 + V_4 + V_5} + \frac{3}{2} \frac{V_1 + V_2}{V_3 + V_4 + V_5} + \frac{2}{3} \frac{V_1 + V_2 + V_3}{V_4 + V_5} + \frac{1}{4} \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{V_5} \right).$$

Если доли всех экономических субъектов одинаковы, то индекс Линда равен единице. Если доля одного субъекта будет расти, то индекс Линда будет увеличиваться. Поэтому добавление каждого нового субъекта должно сопровождаться уменьшением индекса. Если, начиная с $k + 1$ -го субъекта, индекс увеличивается, то первые k субъектов образуют «ядро» рынка.

Глава 2. Статистический анализ конкуренции мирового рынка продовольствия

В данной главе представлены основные результаты статистического анализа мирового рынка экспорта. В работе проанализированы данные по 120 рыночным позициям мирового рынка продовольствия с открытого официального источника ООН FAOSTAT для временного промежутка 1961-2019 гг [90]. Рынок продовольствия был выбран, так как он стабилен и устойчив [91]. Мировой рынок продовольствия является неоднородным. Под неоднородностью понимается большой разброс объемов экспорта экономических субъектов и недостаток статистических данных для определенного временного промежутка рассматриваемого интервала времени. Под экономическим субъектом понимается страна-экспортер.

Все рыночные позиции были разбиты на продуктовые категории. Объединение товаров в однородные группы позволяет сделать однозначное заключение о состоянии рынка каждой продуктовой категории. Всего было рассмотрено 12 продуктовых категорий. Аналогичный подход в литературных источниках не найден. На представленных данных был проведен полный статистический анализ и прогнозирование значений, в частности:

- Анализ мирового рынка продовольствия независимыми методами;
- Прогнозирования уровня конкуренции с помощью кумулятивных методов;
- Разработка новых критериев измерения конкуренции – групповой, долевого и корреляционный;
- Алгоритм количественного анализа конкуренции на рынке;
- Разработка алгоритма определения пороговых значений интенсивности рынка;
- Проверка принципа Гаузе на мировом рынке продовольствия.

2.1. Групповой критерий анализа рынка

Расчет индекса концентрации был проведен для всех рыночных позиций за период с 1961 по 2019 гг. Характер изменения индекса концентрации зависит от вида рынка. Для частного случая рыночной позиции «яблоки» на рисунке 1 (А) показан результат изменения индекса концентрации. Для временного интервала 1961-1981 гг – $CR_3 \in [0.45, 0.7)$, для 1981-2019 гг $CR_3 \in [0, 0.45)$. То есть для рыночной позиции «яблоки» рынок считается неконцентрированным. Примером умеренно концентрированного рынка является мировой объем экспорта бананов. На рисунке 1 (Б) отражено изменение индекса концентрации для рыночной позиции «бананы». Для временного интервала 1961-2019 гг – $CR_3 \in [0.45, 0.7)$.

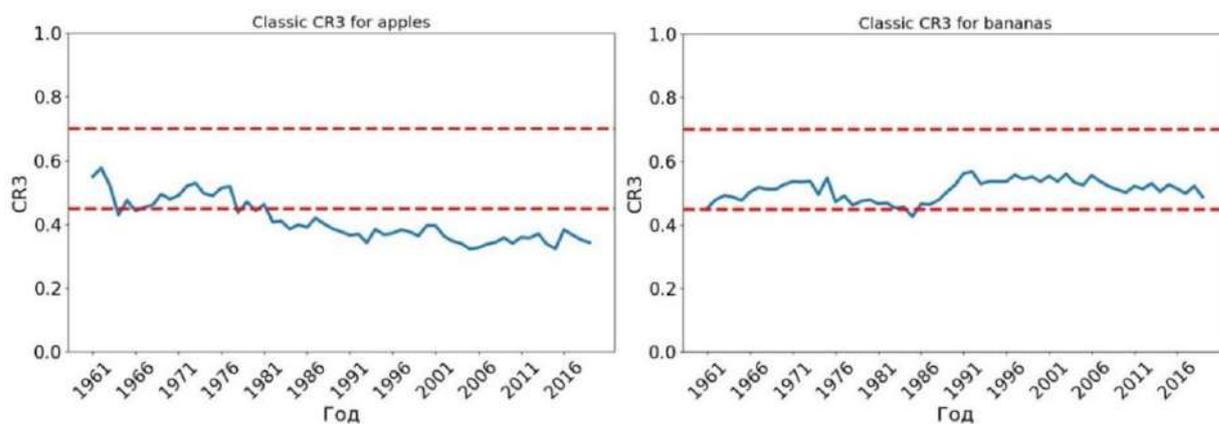


Рис.1. А – Индекс концентрации для объема экспорта яблок,
Б - Индекс концентрации для объема экспорта бананов.

На рисунке 2 (А) отражено изменение индекса концентрации для объемов экспорта гречи. Индекса концентрации для временного интервала 1961-2012 гг $CR_3 \in [0.7, 1)$, для 2012-2019 гг $CR_3 \in [0.45, 0.7)$. Рынок был высоко концентрированным, но с 2012 года рынок стал умеренно концентрированным. Перепады до 2012 года можно объяснить наличием монополистической конкуренции. Позднее рынок стабилизировался, так как на нем появились новые участники. На рисунке 2 (Б) отражено изменение индекса концентрации для объема экспорта чеснока. Индекса концентрации для временного интервала 1961-1997 гг $CR_3 \in [0.45, 0.8)$, для 1997-2019 гг $CR_3 \in [0.7, 1)$. Рынок был умеренно концентрированным, но с 1997 года рынок стал высоко

концентрированным. Как следует из анализа, рынок экспорта чеснока переходит из средней концентрированности в высокую.

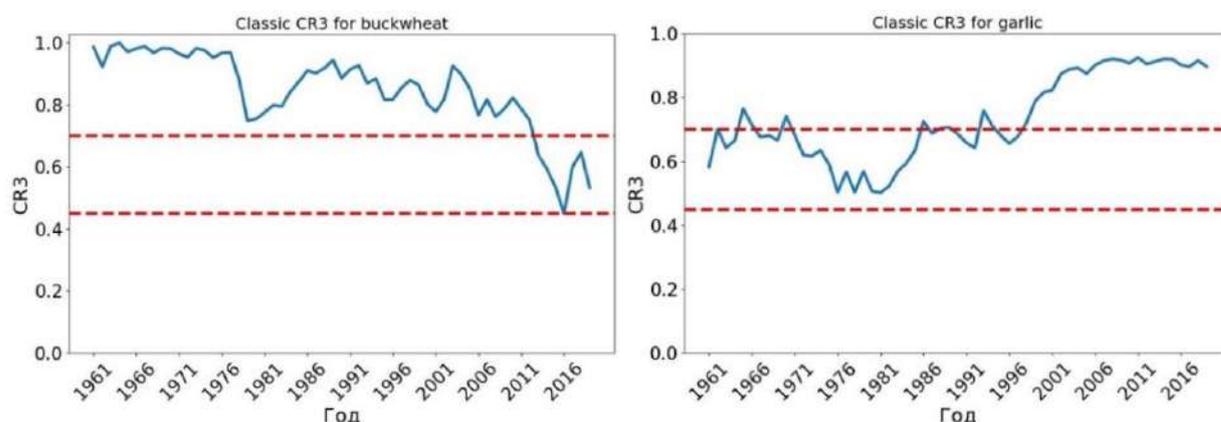


Рис.2. А - Индекс концентрации для объема экспорта гречи,
Б – Индекс концентрации для объема экспорта чеснока.

В таблице 1 приведены результаты анализа мирового рынка экспорта для 120 рыночных позиций с использованием индекса концентрации. В расчете индекса концентрации используются статистические данные за 2019 год. Для каждого интервала индекса концентрации рассчитывается доля рыночных позиций, удовлетворяющих этому интервалу.

Таблица 1. Долевое соотношение групп и интервалов индекса концентрации.

Группа	$CR_3 \in [0, 0.45)$	$CR_3 \in [0.45, 0.7)$	$CR_3 \in [0.7, 1)$
Фрукты	0.23	0.64	0.13
Овощи	0.1	0.57	0.33
Зерновые	0.21	0.64	0.15
Молочная продукция	0.67	0.165	0.165
Сладкое	0.6	0.2	0.2
Масло	0.33	0.67	0
Мясо	0	0.83	0.17
Орехи и сухофрукты	0	0.375	0.625
Специи	0.2	0.2	0.6
Алкогольные напитки	0.6	0.2	0.2
Безалкогольные напитки	0.2	0.8	0
Другое	0.4	0.6	0

Из проведенных исследований следует, что доли рыночных позиций в рассматриваемых интервалах порогового значения коэффициента концентрации несбалансированны. Поэтому однозначный вывод о состоянии рынка сделать затруднительно. Вводится следующая целевая функция:

$$f(x_1, x_2, x_3) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 \rightarrow \max$$

$$w_1 = \frac{3}{10}, w_2 = \frac{2}{10}, w_3 = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 = \text{share}_{cr0.45}, x_2 = \text{share}_{cr0.7}, x_3 = \text{share}_{cr1}$$

Где w_i – веса долей, x_i – доли рыночных позиций в продуктовой категории. Весовые коэффициенты нормируются следующим образом:

$$\sum_i |w_i| = 1$$

Данный критерий позволяет оценить каждую продуктовую категорию в целом. Весовые коэффициенты функции задают приоритетность влияния рыночных позиций на общую оценку группы. Вводится следующий групповой критерий анализа продуктовых категорий.

Критерий: рынок считается стабильным и конкурентноспособным если целевая функция неотрицательна. В противном случае, считается, что на рынке присутствует монополистическая конкуренция

$$f(x_1, x_2, x_3) \geq 0.$$

В таблице 2 приведены результаты расчета группового критерия. Согласно результатам, к стабильным и сбалансированным мировым рынкам экспорта относятся следующие продуктовые категории – молочная продукция, масло и безалкогольные напитки. К монополизированным рынкам относятся группа специй, орехов и сухофруктов.

Таблица 2. Значения группового критерия $f(x)$.

Группа	$f(x)$
Фрукты	0.1
Овощи	0.0
Зерновые	0.1
Молочная продукция	0.2
Сладкое	0.1
Масло	0.2
Мясо	0.1
Орехи и сухофрукты	-0.2
Специи	-0.2

Алкобольные напитки	0.1
Безалкогольные напитки	0.2
Другое	0.2

Выводы:

- Разработан групповой критерий, позволяющий оценить состояние рынка рассматриваемой продуктовой категории. Если значение целевой функции неотрицательное, то рынок считается конкурентоспособным и стабильным. В противном случае, на рынке присутствует монополистическая конкуренция.
- Анализ конкуренции рыночных позиций различных групп показал, что основной тенденцией является улучшение рыночной ситуации, либо сохранение наблюдаемой тенденции.
- Анализ коэффициента концентрации в рамках групп показал, что 1/3 рассматриваемых продуктовых категорий наиболее конкурентоспособны. 1/2 категорий являются умеренно концентрированными. На мировом рынке продовольствия для некоторых продуктовых категорий (1/6) наблюдаются определенные ограничения для вхождения на рынок и внутренние или внешние рычаги воздействия на него.

2.2. Корреляционный критерий анализа рынка

В каждой продуктовой категории для каждой рыночной позиции была построена корреляционная матрица Пирсона и Спирмена. Высоким уровнем корреляции считается:

$$corr_{ij} > 0.95$$

Из анализа следует, что коэффициент корреляции Пирсона и Спирмена дают близкий результат. В данном случае анализ выявляет ряд экономических субъектов, которые могут быть взаимозависимы. Далее выдвигается гипотеза о зависимости высокой корреляции и уровня конкуренции.

Установить однозначную зависимость между коэффициентом корреляции и индексом концентрации затруднительно. Поэтому количество зависимых экономических субъектов было усреднено для каждого интервала индекса концентрации:

$$\overline{object_{\Delta CR}} = \frac{\sum_i object_i}{amount_{object}}$$

Где ΔCR – интервал индекса концентрации, $\sum_i object_i$ – общее количество зависимых экономических субъектов, которые находятся в интервале индекса концентрации ΔCR , $amount_{object}$ – количество измерений, которые находятся в ΔCR . Данные значения были аппроксимированы экспоненциальной функцией:

$$f(x) = e^{a+\mu x}, a = 4.4, \mu = -0.63$$

На рисунке 3 изображены усредненные значения количества зависимых экономических субъектов для каждого интервала индекса концентрации, которые аппроксимированы экспоненциальной функцией. Система черных точек соответствует усредненным значениям поинтервально – $\overline{object_{\Delta CR}}$. Голубая линия соответствует экспоненциальной аппроксимации.

Зависимость между коэффициентом корреляции и индексом концентрации

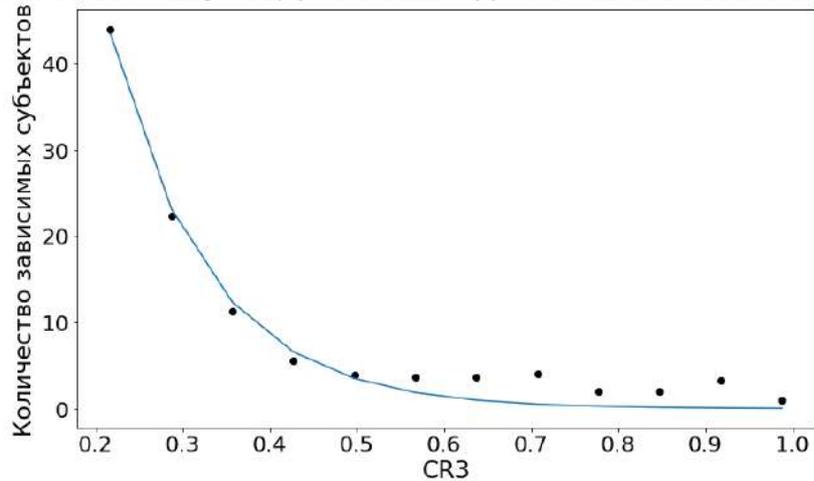


Рис. 3. Аппроксимация усредненных данных экспоненциальной функцией

Из проведенного анализа следует, что существует зависимость между количеством корреляционных взаимосвязей между экономическими субъектами и индексом концентрации. Разработанный критерий позволяет оценить уровень конкуренции рынка через коэффициент корреляции. Чем больше присутствует на рынке взаимосвязей между экономическими субъектами, тем ниже индекс концентрации и выше коэффициент корреляции. В таблице 3 приведены пороговые значения количества взаимосвязанных субъектов для соответствующего уровня концентрированности рынка.

Таблица 3. Пороговые значения количества взаимосвязанных субъектов.

Концентрированность рынка	Пороговое значение количества взаимосвязанных субъектов
Низкая	$k > 5$
Умеренная	$k \in [0, 5]$
Высокая	$k = 0$

Критерий: рынок считается стабильным и конкурентноспособным если $k > 5$, то есть количество взаимосвязанных субъектов не менее 6. В противном случае, рынок считается умеренно или высоко концентрированным.

2.3. Долевое распределение экономических субъектов

Для каждой рыночной позиции всех продуктовых категорий строится гистограмма частот. Количество разрядов при построении гистограммы принималось следующим:

$$\text{bins} = 0.4 * \text{len}(\text{data})$$

где $\text{len}(\text{data})$ – количество экономических субъектов на рынке рассматриваемой рыночной позиции. Наблюдаются две тенденции – равномерное распределение субъектов на рынке и формирование различных групп экономических субъектов. Количество групп лежит в интервале [2, 3]. На рисунке 4 изображена гистограмма объема экспорта яблок. В данном примере есть две основные группы субъектов.

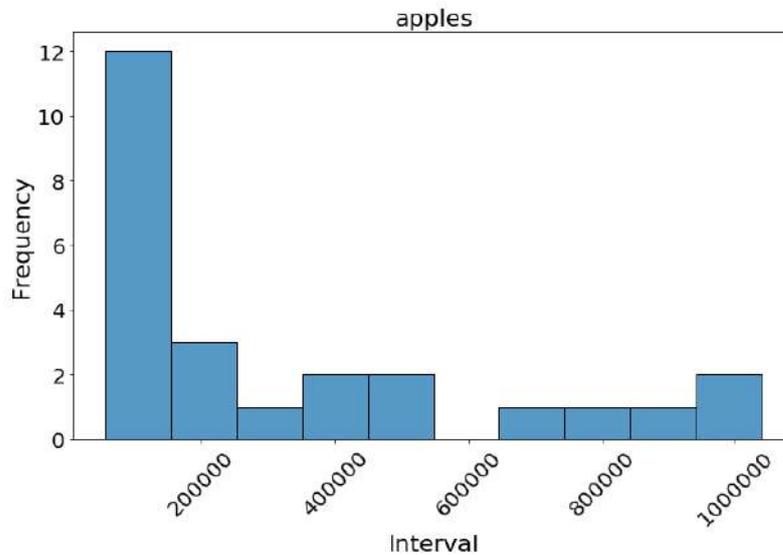


Рис. 4. Гистограмма объема экспорта яблок.

В таблице 4 представлены результаты по формированию нескольких групп по отдельным позициям и их количество. Все продуктовые категории, кроме группы сладости, предрасположены к образованию 2 групп. Наблюдается склонность к равномерному распределению относительно образования 3 и более групп.

Таблица 4. Формирование групп продуктовой категории

Группа	Отсутствие группы	2 группы	3 группы и более
Фрукты	8/22 = 36%	13/22 = 59%	1/22 = 5%
Овощи	8/22 = 36%	11/22 = 50%	3/22 = 14%
Зерновые	2/14 = 14%	10/14 = 71%	2/14 = 15%
Молочная продукция	1/6 = 17%	4/6 = 67%	1/6 = 16%

Сладости	1/5 = 20%	1/5 = 20%	3/5 = 60%
Масло	1/3 = 33%	2/3 = 67%	0%
Мясо	2/6 = 33%	3/6 = 50%	1/6 = 17%
Орехи и сухофрукты	2/14 = 14%	10/14 = 71%	2/14 = 15%
Специи	2/5 = 40%	3/5 = 60%	0%
Алкогольные напитки	1/5 = 20%	3/5 = 60%	1/5 = 20%
Безалкогольные напитки	1/5 = 20%	3/5 = 60%	1/5 = 20%
Другое	0%	4/5 = 80%	1/5 = 20%

Вывод: из результатов проведенного анализа следует, что в зависимости от продуктовой категории рынок может приводить к образованию нескольких групп. Наиболее часто встречается разбиение на 2 группы экономических субъектов.

2.4. Кумулятивные методы прогнозирования

Локальный кумулятивный метод заключается в суммировании объемов экспорта для каждого года рассматриваемого временного интервала:

$$v_{year} = \sum_{countries} (v_{year}^{country_1} + \dots + v_{year}^{country_N})$$

Для всех рыночных позиций был применен локальный кумулятивный метод. Для большинства рыночных позиций наблюдается экспоненциальная зависимость. Для сгенерированных кумулятивными методами объемов экспорта справедлив индекс концентрации:

$$CR_n = \frac{\sum_{k=1}^n \bar{V}_k}{\sum_{k=1}^N \bar{V}_k},$$

где \bar{V}_k – локальный кумулятивный объем экспорта экономического субъекта.

На рисунке 5 представлены результаты расчета индекса концентрации для рыночной позиции «яблоки». Кумулятивный метод позволяет сгладить кривую индекса концентрации. Для остальных рыночных позиций наблюдаются аналогичные результаты.

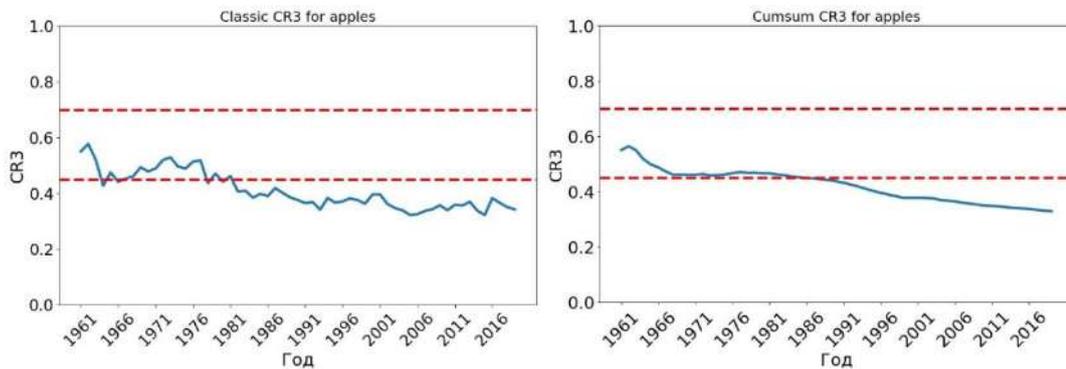


Рис. 5. Результаты применения индекса концентрации для локального кумулятивного метода для яблок.

Полный кумулятивный метод. В данном методе происходит полное суммирование по формуле:

$$v_{year} = \sum_{years} \left(\sum_{countries} (v_{year_1}^{country_1} + \dots + v_{year_t}^{country_N}) \right)$$

Объем экспорта измеряется в рыночных единицах. Для всех рыночных позиций был применен полный кумулятивный метод. На рисунке 6 изображены результаты применения локального (А) и полного (Б) кумулятивных методов. Желтой системой точек является результат применения метода для рыночной позиции «миндаль». Объемы экспорта экономических субъектов с применением полного и локального кумулятивных методов были аппроксимированы экспоненциальной функцией. Для данной рыночной позиции можно утверждать, что кумулятивный объем экспорта изменяется экспоненциально.

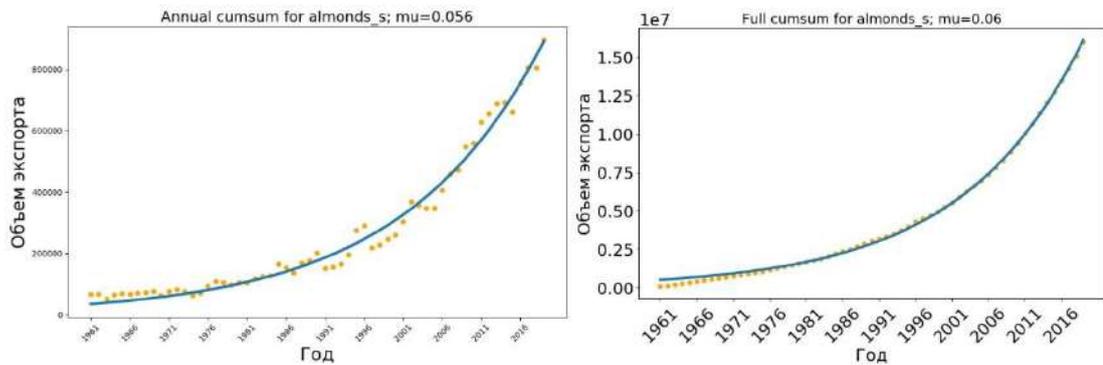


Рис. 6. А - Результат локального кумулятивного метода для миндаля
 Б - Результаты полного кумулятивного метода для миндаля.

2.5. Прогнозирование уровня конкуренции кумулятивными методами

Для всех рыночных позиций всех продуктовых категорий рассчитан прогнозный объем экспорта разработанными кумулятивными методами. Границей прогнозирования является 10%, то есть допустимое отклонение от прогноза $\pm 10\%$. На рисунке 7 представлен результат сравнительного анализа для продуктовой категории орехи и сухофрукты. Красная горизонтальная линия соответствует допустимой границе прогнозирования.

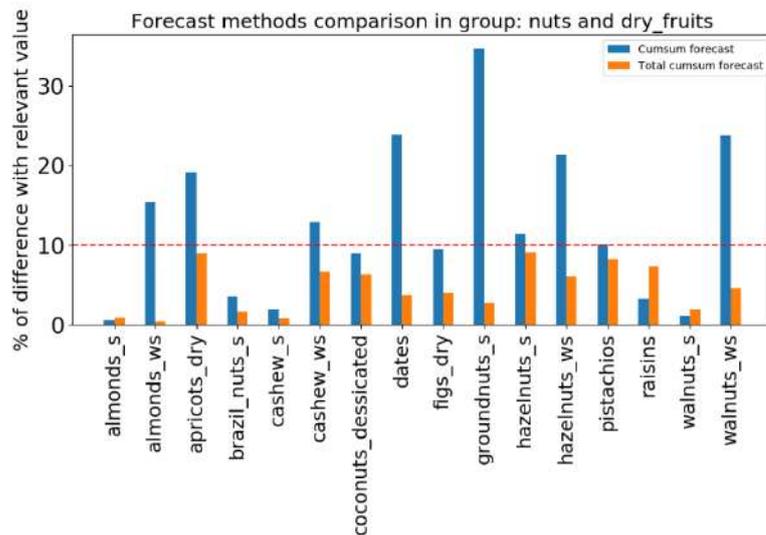


Рис. 7. Результат сравнительного анализа для продуктовой категории – орехи и сухофрукты

Для продуктовой категории орехи и сухофрукты наблюдается допустимое отклонение объемов экспорта, рассчитанным полным кумулятивным методом, для всех рыночных позиций. Локальный кумулятивный метод в большинстве случаев не лежит в допустимом диапазоне. Для остальных продуктовых категорий наблюдается аналогичная тенденция.

В таблице 5 представлены результаты сравнительного анализа двух кумулятивных методов для каждой продуктовой категории, а именно доля рыночных позиций, для которых рассматриваемый метод эффективен.

Таблица 5. Сравнительный анализ кумулятивных методов.

Группа	Локальный кумулятивный метод	Полный кумулятивный метод
Орехи и сухофрукты	0.2	0.8
Фрукты	0.2	0.8
Молочная продукция	0.33	0.67
Алкогольные напитки	0.2	0.8
Безалкогольные напитки	0.2	0.8
Мясо	0.17	0.83
Зерновые	0.3	0.7
Овощи	0.2	0.8
Сладости	0	1
Специи	0	1
Масло	0	1
Другое	0.2	0.8

Выводы:

- Был проведен сравнительный анализ двух кумулятивных методов. В ходе сравнения двух методов было выявлено, что полный кумулятивный метод в общем случае работает эффективнее, чем локальный.
- Была применена экспоненциальная аппроксимация для прогнозирования объемов экспорта. Гипотеза об экспоненциальном росте мирового экспорта верна.
- Для 90% рыночных позиций применим полный кумулятивный метод.

2.6. Прогнозирование индекса концентрации методами анализа временных рядов

В данной главе представлены результаты прогнозирования индекса концентрации методами анализа временных рядов. Для всех рыночных позиций рассчитаны прогнозные значения на 2019 год 5 различными методами:

- AR - авторегрессионная модель;
- MA – модель скользящего среднего;
- ARMA - модель авторегрессии — скользящего среднего;
- ARIMA - модель Бокса — Дженкинса;
- SES - экспоненциальное сглаживание.

На рисунке 8 изображены результаты сравнительного анализа временных рядов. Наилучшие результаты показывают модель Бокса – Дженкинса и экспоненциальное сглаживание.

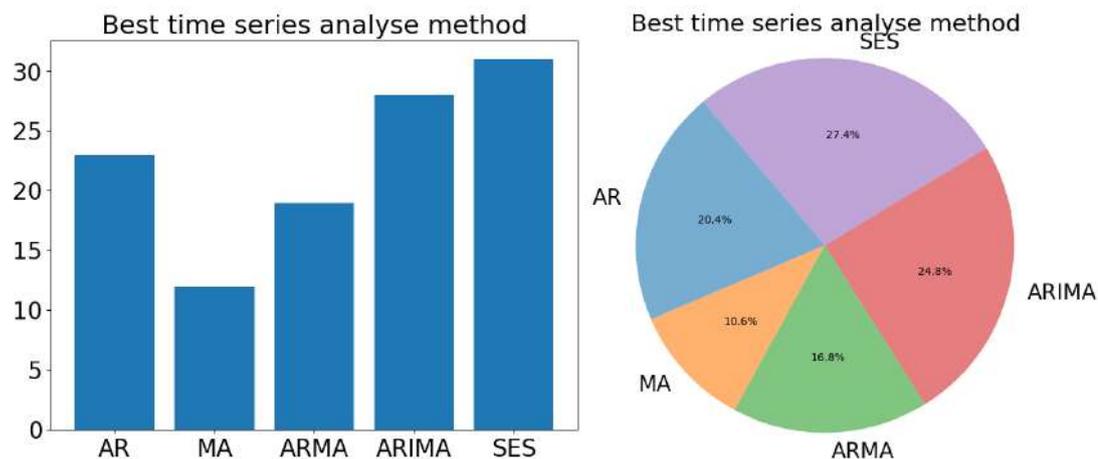


Рис. 8. Результат сравнительного анализа временных рядов

На рисунке 9 представлены результаты сравнительного анализа для продуктовой категории орехи и сухофрукты. Красными пунктирными линиями изображены пороговые значения индекса концентрации.

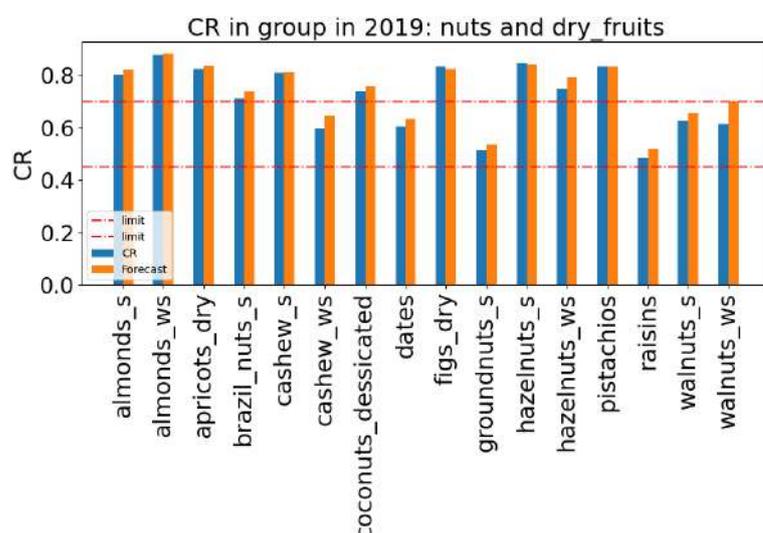


Рис. 9. Результаты сравнительного анализа для продуктовой категории – орехи и сухофрукты

Граница прогнозирования является 10%, то есть допустимое отклонение от прогноза $\pm 10\%$. Для всех позиций наблюдается допустимое отклонение в рамках установленного интервала. Для остальных продуктовых категорий наблюдаются аналогичные результаты. В таблице 6 приведены результаты анализа индекса концентрации методами временных рядов.

Таблица 6. Точность выполнения методов анализа временных рядов и среднее отклонение от истинного значения для всех продуктовых категорий.

Группа	Точность выполнения методов	Среднее отклонение от истинного значения
Орехи и сухофрукты	75.0 %	3.9 %
Фрукты	81.8 %	2.7 %
Молочная продукция	66.7 %	3.5 %
Алкогольные напитки	80.0 %	9.3 %
Безалкогольные напитки	100 %	0.7 %
Мясо	80.0 %	3.1 %
Зерновые	71.4 %	4.7 %
Овощи	90.4 %	1.6 %
Сладости	80.0 %	2.2 %
Специи	100 %	1.8 %
Масло	100 %	0.2 %
Другое	80.0 %	2.4 %

Выводы: был проведен сравнительный анализ 5 методами прогнозирования временных рядов. В ходе анализа было выявлено, что наилучшими методами прогнозирования являются модель Бокса – Дженкинса и экспоненциальное

сглаживание. Рассматриваемые методы дают требуемую точность в 84% случаев. Для продуктовых категорий, таких как безалкогольные напитки, специи и масла, наблюдается 100% точность методов анализа временных рядов, а также низкое среднее отклонение от истинного значения индекса концентрации.

2.7. Анализ темпов роста объема экспорта

Одной из характеристик конкуренции является темп роста продукции - μ . Для всех рыночных позиций каждой продуктовой категории рассчитаны темпы роста объемов экспорта. На рисунке 10 представлены результаты для всех продуктовых категорий. Системы точек соответствуют всем продуктовым категориям. Точки отвечают рыночным позициям в группе. Пунктирная линия отвечает мировой скорости роста населения [92].

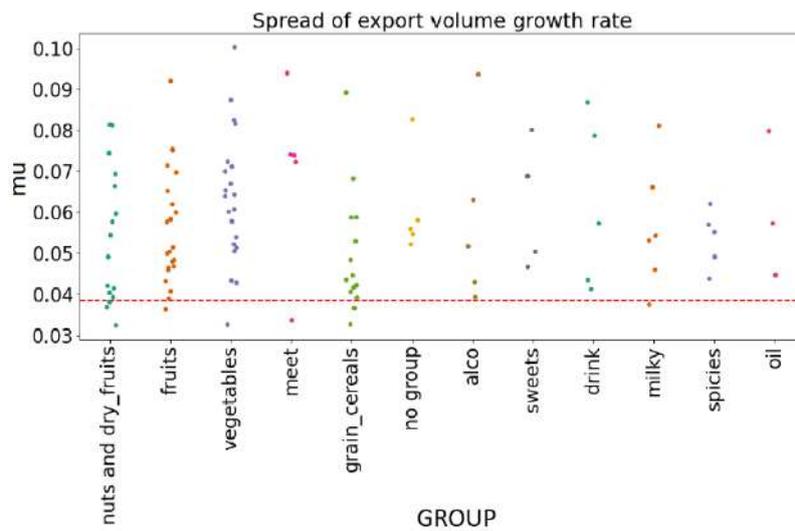


Рис. 10. Темпы роста объема экспорта для всех продуктовых категорий

В таблице 7 приведен интервал скорости роста в рамках каждой группы. Интервал $[0.032, 0.1]$ является общим для всех рыночных позиций. Как следует из таблицы 6 и рисунка 10, все продуктовые категории развиваются равномерно.

Таблица 7. Интервал изменения скорости роста в рамках каждой продуктовой категории.

Группа	μ_{min}	μ_{max}
Орехи и сухофрукты	0.032	0.081
Фрукты	0.036	0.092
Молочная продукция	0.038	0.081
Алкогольные напитки	0.039	0.094
Безалкогольные напитки	0.041	0.087
Мясные изделия	0.034	0.095
Зерно	0.033	0.089
Овощи	0.033	0.1
Сладости	0.047	0.08
Другое	0.052	0.083
Специи	0.044	0.062
Масла	0.045	0.08

Выводы: Все продуктовые категории развиваются равномерно. Из проведенного анализа следует, что рынок мирового экспорта продовольствия развивается равномерно и является стабильным.

2.8. Частотный критерий анализа рынка

Для анализа ядра рынка принято использовать индекс Линда, позволяющий определить степень неравенства между лидирующими субъектами на рынке. Как следует из теоретического анализа, индекс Линда дает противоречивые результаты. С учетом этого, предлагается альтернативный способ анализа лидеров рынка – частотный критерий. Частота появления стран-лидеров рассчитывается следующим образом:

$$frequency_{country} = \frac{\sum_{t_1}^{t_2} top_{value}}{\Delta t},$$

где Δt – исследуемый интервал, top_{value} отражает частоту появления субъекта в трех лидирующих позициях в течение рассматриваемого интервала. Этот критерий был применен для исследования лидеров рынка для всех рыночных позиций в рамках каждой группы. На рисунке 11 представлен график распределения лидеров для рынка экспорта яблок.

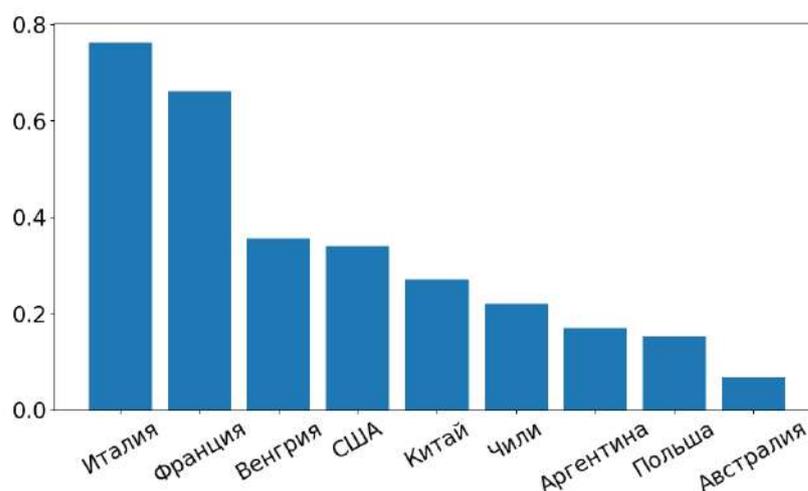


Рис. 11. Результаты применения частотного критерия для яблок

Италия находилась в лидерах $\frac{3}{4}$ временного промежутка, затем следует Франция, которая находилась $\frac{2}{3}$ временного промежутка. Остальные страны находились в лидерах менее половины промежутка времени.

Для остальных рыночных позиций получены аналогичные результаты. В таблице 8 представлен результат применения частотного критерия для всех

продуктовых категорий, а именно долю рыночных позиций в рамках продуктовой категории, когда субъект занимал лидирующие позиции.

Таблица 8. Результаты применения частотного критерия

Группа	Лидеры групп
Орехи и сухофрукты	0.56 - США, 0.25 - Турция
Фрукты	0.41 - Испания, 0.32 - Италия, США, 0.18% - Мексика
Молочная продукция	0.5 - Испания
Алкогольные напитки	0.6 - Франция, 0.4 - Великобритания, Испания, Италия
Безалкогольные напитки	0.6 - Германия, 0.4 - Нидерланды
Мясные изделия	0.4 - Нидерланды, США, Франция
Зерно	0.57 - США, 0.5 - Канада, 0.28 - Германия
Овощи	0.48 - Нидерланды, 0.38 - Мексика, 0.33 - Испания
Сладости	0.4 - Китай, Нидерланды, Германия
Другое	0.6 - США, 0.4 - Греция
Специи	0.4 - Индия, Китай, Индонезия, Сингапур
Масла	0.33 - Италия, Тунис, Испания, Индонезия, США

Выводы: был разработан частотный критерий для анализа лидирующих позиций для продуктовых категорий. С помощью этого критерия были проанализированы все продуктовые категории. Для каждой категории были выявлены экономические субъекты, занимающие лидирующие позиции. В частых лидерах находится США. Согласно результатам группового критерия (Глава 2, 2.1, стр. 31), монополизированным рынком является продуктовая категория «орехи и сухофрукты», в которой лидирующую позицию также занимает США. Аналогичные исследования проводятся в работе [93].

2.9. Долевой критерий анализа рынка

Для анализа объемов экспорта был разработан долевой критерий анализа ядра рынка. Долевой критерий для отсортированных кумулятивных объемов экспорта рассматриваемой рыночной позиции рассчитывается следующим образом:

$$countries = \sum country_{share} < 0.8,$$

где $country_{share}$ – доля экспорта экономического субъекта.

Данный критерий позволяет оценить количество экономических субъектов, которые формируют 80% рынка экспорта. Данное множество экономических субъектов также можно назвать ядром рынка.

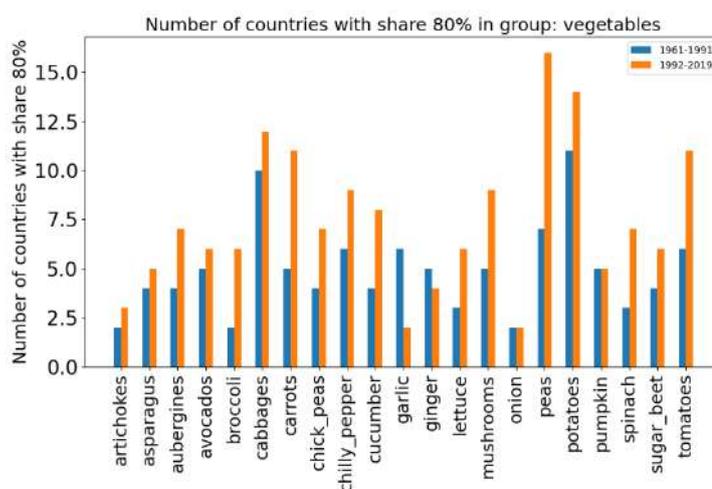


Рис. 12. Результаты долевого критерия для 1991 и 2019 года для овощей

Чтобы проанализировать изменение ядра рынка с течением времени, временной промежуток был разделен на две части – [1961 год, 1991 год] и [1991 год, 2019 год]. На рисунке 12 представлены результаты долевого критерия для 1991 и 2019 года для продуктовой категории – овощи. Синий столбец соответствует количеству стран, формирующих ядро рынка к 1991 году, оранжевый – к 2019 году. Практически для всех рыночных позиций наблюдается расширение ядра рынка. Из результатов следует, что рынок стабилизируется и становится менее концентрированным. В таблице 9 приведено среднее количества стран в рамках продуктовой отрасли, которые образуют ядро рынка к концу 1991 и 2019 года.

Таблица 9. Среднее количество стран в ядре рынка к 1991 и 2019 году.

Группа	Среднее количество стран в ядре рынка в 1991	Среднее количество стран в ядре рынка в 2019
Орехи и сухофрукты	2.5	3.9
Фрукты	6.3	8.3
Молочная продукция	5.5	10.2
Алкогольные напитки	7	11.8
Безалкогольные напитки	6.6	11.6
Мясные изделия	3.8	6
Зерно	5.7	8.5
Овощи	4.9	7.4
Сладости	11.2	17
Другое	6	10.4
Специи	5.8	6.8
Масла	6.3	8.3

На рисунке 13 изображено количество стран, входящих в ядро рынка, каждой рыночной позиции в рамках группы к концу 1991 года и 2019 года. Здесь наблюдается аналогичная тенденция к увеличению ядра рынка. Из этого следует, что рынок продовольствия в целом становится менее концентрированным с течением времени.

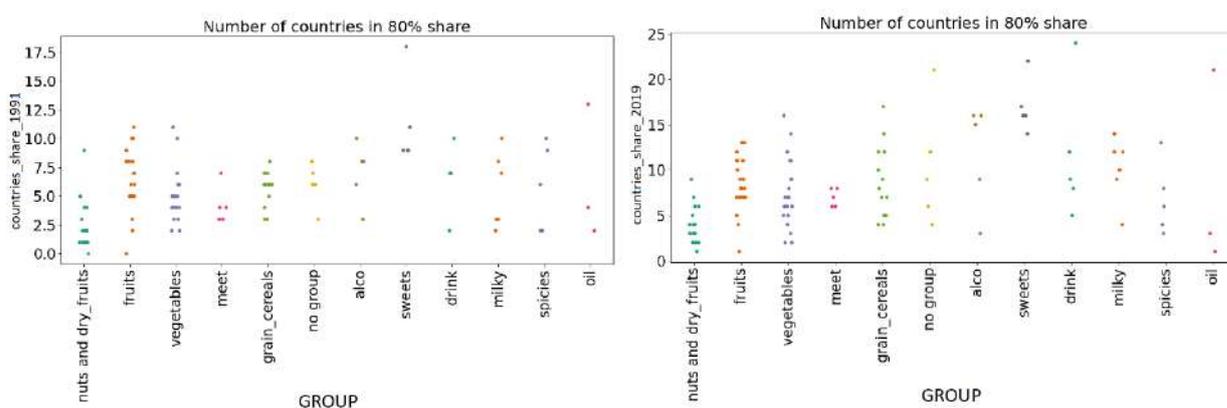


Рис. 13. Результаты долевого критерия для 1991 и 2019 года

На рисунке 14 изображена зависимость индекса концентрации в 2019 году и количество экономических субъектов в ядре рынка. Наблюдается зависимость между коэффициентом концентрации и количеством экономических субъектов, входящих в ядро рынка – чем больше количество стран, входящих в ядро рынка, тем рынок более стабилен и низко концентрирован.

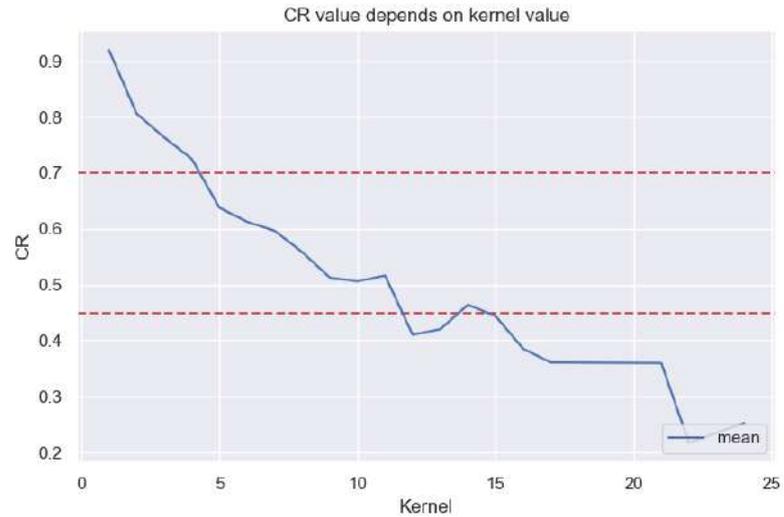


Рис. 14. Зависимость индекса концентрации от количества экономических субъектов в ядре рынка

Критерий: для того, чтобы рынок был стабильным, конкурентноспособным и низко концентрированным необходимо, чтобы количество экономических субъектов, входящих в ядро рынка, было не менее 12 участников.

Глава 3. Математические модели конкуренции

Данная глава посвящена математическому моделированию биологических и экономических процессов. Математическое моделирование позволяет оценить поведение биологического или экономического процесса. Самыми распространенными являются популяционные модели для одного вида, а также модели взаимодействующих популяций. Описание изменения численности популяции во времени составляет предмет популяционной динамики. В основе популяционных моделей или моделей роста лежит предположение о пропорциональности скорости роста численности популяции. Первая модель непрерывного роста была предложена Мальтусом в 1798 году в книге «О росте народонаселения» и имеет вид [94]:

$$\frac{dN}{dt} = bN - dN,$$

где b, d – положительные константы, $N(0) = N_0$ – начальная численность населения. В данной модели численность популяции растет неограниченно по экспоненте. Впоследствии этот эффект стал называться мальтузинством или законом Мальтуса. Для большинства видов данный закон не применим, так как существуют внешние ограничения и факторы, которые останавливают экспоненциальный рост. Однако, на начальном этапе экспоненциальный рост для некоторых видов имеет место, но затем характер кривой меняется. Исключением является рост человеческого населения, который до недавних пор рос быстрее, чем экспонента. В математических моделях может присутствовать автокаталитический член, который описывает увеличение скорости изменения величины с ростом самой величины. Базовой моделью ограниченного роста является модель Ферхюльста [95]:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

При малых значениях x данная функция возрастает экспоненциально, как в законе Мальтуса, но при больших значениях она приближается к K , где K является

емкостью популяции или емкостью экологической ниши. Емкость популяции носит системный характер и может зависеть от множества факторов, таких как ограниченная пищевая база, наличие ниши и т.д. Для ограничения пищевого ресурса используется модель Моно (или уравнение Михаэлиса-Ментен), которая описывает зависимость скорости роста μ от ресурса [96]:

$$\mu(S) = \frac{\mu_0 S}{K_s + S}$$

где K_s – концентрация ресурса, μ_0 – максимальная скорость роста. В условиях ограниченного ресурса скорость роста популяции пропорциональна концентрации ресурса. Если ресурс является избыточным, то численность популяции стабилизируется с течением времени.

Также в моделировании можно встретить эффект Олли [97]. Это явление в биологии, характеризующееся корреляцией между размером или плотностью популяции и средней индивидуальной приспособленностью популяции (часто измеряемой как скорость роста популяции на душу населения).

Модель популяции имеет 2 уровня описания:

- Индивидуальный. На этом уровне учитываются состояние вида, возраст, гибель, влияние внешней среды на особь.
- Популяционный. На этом уровне задается начальное распределение особей, интенсивность рождения, текущее распределение по территории.

Существует множество биологических процессов, таких как управление возобновимыми ресурсами, межвидовые сообщества, взаимоотношения видов друг с другом, взаимодействие между популяциями и т.д. Существует три основных типа взаимодействия между популяциями:

- Система взаимоотношений «хищник-жертва». Случай уменьшения скорости роста одной популяции и увеличения другой [98-99].
- Конкуренция. Когда скорость роста обеих популяций уменьшается.
- Мутуализм или симбиоз. Увеличение скорости роста обеих популяций [100].

Если рассмотреть систему дифференциальных уравнений (1), то коэффициенты модели будут определять характер взаимодействия популяций.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1x_1 + b_{12}x_1x_2 - c_1x_1^2 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_2x_2 + b_{21}x_1x_2 - c_2x_2^2 \end{cases} \quad (1)$$

Зависимость типов взаимодействия между популяциями от значения коэффициентов представлена в таблице 10.

Таблица 10. Типы взаимодействия видов.

	a_i	c_i	
Симбиоз	+	+	$b_{12}, b_{21} > 0$
Комменсализм	+	0	$b_{12} > 0, b_{21} = 0$
Хищник-жертва	+	-	$b_{12} > 0, b_{21} < 0$
Аменсализм	0	-	$b_{12} = 0, b_{21} < 0$
Конкуренция	-	-	$b_{12}, b_{21} < 0$
Нейтрализм	-	0	$b_{12} = b_{21} = 0$

Данная глава состоит из двух частей. В первой части приводится анализ и разработка локальных моделей, во второй – пространственно-временных. В представленной главе:

- Разработаны интерференционные и эксплуатационные математические модели конкуренции, учитывающие смену ареала, временной фактор, наличие ниш, трофический ресурс, сезонность конкуренции и другие факторы. В рамках каждой модели вводится фактор среды.
- Для случая двух субъектов проанализированы стационарные состояния системы и доказана устойчивость. Для распределенных систем проанализирована устойчивость тривиальных состояний.

В рамках каждой разработанной модели проведено имитационное моделирование. Рассматривается 3 сценария:

- В первом сценарии валидируется «принцип конкурентного исключения» Гаузе путем построения плотности распределения уровня выживаемости популяций и плотности распределения коэффициента концентрации.
- Во втором сценарии анализируется влияние фактора среды на систему популяций и устанавливаются пороговые значения фактора среды для соответствующего уровня концентрированности среды.

- В третьем сценарии устанавливаются пороговые значения количества субъектов в рамках соответствующего уровня концентрированности среды.

Численное решение получено в Python, используя модуль `odeint` из пакета `scipy.integrate` для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для решения систем дифференциальных уравнений в частных производных используется библиотека `pde`.

§ 1. Точечные математические модели конкуренции

3.1.1. Математические модели конкуренции

Первые математические модели взаимодействующих популяций в 1930-е года разрабатывались В. Вольтерра [7]. Основное внимание в его работах уделено системе «хищник-жертва», и видам, «пожирающих» друг друга. К 1980-м годам появились многочисленные математические модели, которые были систематизированы в работе Базыкина [8].

Одной из первых моделей Вольтерра была модель видов, борющихся за один и тот же пищевой ресурс. Для случая двух видов модель выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 F(N_1, N_2)) \\ \frac{dN_2}{dt} = N_2(\varepsilon_2 - \gamma_2 F(N_1, N_2)) \end{cases}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – коэффициент прироста, N_1, N_2 – численность видов, γ_1, γ_2 – константы, соответствующие потребностям видов в пищевом ресурсе. Данная модель описывает случай вымирания одного вида при возрастании численности второго вида в борьбе за пищу. $F(N_1, N_2)$ – функция, описывающая уровень взаимодействия.

В рамках этой модели один из видов погибает. Для случая n видов введен термин взаимного конкурентного исключения или принцип Гаузе, поскольку погибают все виды, кроме тех, кто быстрее всех размножается при минимальном потреблении ресурсов. С течением времени эта модель стала рассматриваться как модель конкуренции. Позднее, модель двух видов, пожирающих друг друга, стала иметь вид [101] (2):

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} - b_{12} \frac{N_2}{K_1} \right) \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} - b_{21} \frac{N_1}{K_2} \right) \end{cases} \quad (2)$$

где r_1, r_2 – коэффициент прироста численности, N_1, N_2 – численность видов, K_1, K_2 – емкость среды, b_{12}, b_{21} – меры влияния видов друг на друга. Данная модель в современных публикациях рассматривается как модель конкуренции двух видов.

3.1.2. Интерференционная модель конкуренции

Интерференционная конкуренция – это конкуренция, когда участники биологических или экономических сообществ взаимодействуют напрямую, борясь за ограниченные ресурсы, мешая или вытесняя друг друга. У животных конкуренция с вмешательством – это стратегия, которую в основном используют более крупные и сильные организмы в среде обитания. Таким образом, популяции с высоким уровнем конкурентного вмешательства имеют циклы поколений, управляемых взрослыми особями. Математическая модель (2) заменой переменных $t = \frac{\tau}{r_1}, N_1 = K_1 u_1, N_2 = K_2 u_2$ позволяет привести систему уравнений (2) к виду (3):

$$\begin{cases} \frac{du_1}{d\tau} = u_1(1 - u_1 - \gamma_1 u_2) \\ \frac{du_2}{d\tau} = \gamma u_2(1 - u_2 - \gamma_2 u_1) \end{cases} \quad (3)$$

где u_1, u_2 – численности популяций, γ_1, γ_2 – параметры, характеризующие ингибирующее влияние друг на друга. Данная модель учитывает как внешнюю, так и внутреннюю конкуренцию.

Система уравнений (3) имеет четыре стационарные точки:

1. $u_1 = 0, u_2 = 0.$
2. $u_1 = 1, u_2 = 0.$
3. $u_1 = 0, u_2 = 1.$
4. $u_1 = \frac{1-\gamma_1}{1-\gamma_1\gamma_2}, u_2 = \frac{1-\gamma_2}{1-\gamma_1\gamma_2},$ если $\gamma_1 > 1$ и $\gamma_2 > 1$ или $\gamma_1 < 1$ и $\gamma_2 < 1.$

Первая стационарная точка является неустойчивой, вторая будет устойчивой, если $\gamma_1 < 1$ и $\gamma_2 > 1$, а третья, если $\gamma_1 > 1$ и $\gamma_2 < 1$. Четвертая стационарная точка реализуется и будет устойчивой, если $\gamma_1 < 1$ и $\gamma_2 < 1.$

В четвёртой стационарной точке собственные значения матрицы Якоби правой части уравнений (3), являющиеся корнями квадратного уравнения:

$$\lambda^2 + (u_1 + \gamma u_2)\lambda + \gamma(1 - \gamma_1\gamma_2)u_1u_2 = 0$$

отрицательные. Поэтому эта стационарная точка будет устойчивым фокусом. Таким образом, модель конкуренции (3) допускает одновременное устойчивое существование двух биологических или экономических субъектов при $\gamma_i < 1$. На рисунках 15 изображено поведение численности популяций с течением времени с различными параметрами.

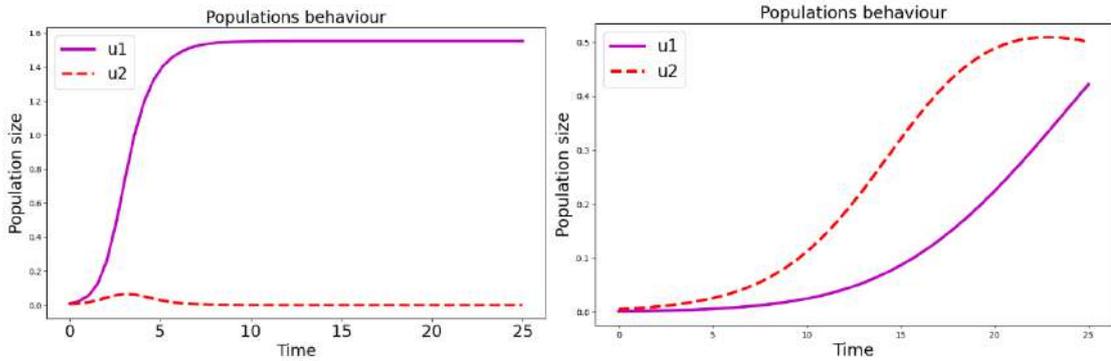


Рис. 15. А - Изменение численности двух популяций для случая $\gamma = 0.2, \gamma_1 = 1.03, \gamma_2 = 0.8, K_1 = 1.4, K_2 = 1.6, u_{10} = 0.002, u_{20} = 0.003$,
 Б - Изменение численности двух популяций для случая $\gamma = 0.3, \gamma_1 = 0.6, \gamma_2 = 0.5, K_1 = 1, K_2 = 1.6, u_{10} = 0.001, u_{20} = 0.002$

При имитационном моделировании также наблюдается совместное сосуществование популяций при выполнении условия для γ . В остальных случаях наблюдается принцип конкурентного исключения Гаузе, а именно гибель одного из двух видов [102].

Для случая n видов модель (3) принимает вид (4):

$$\frac{du_i}{dt} = \mu_i u_i \left(1 - u_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n \gamma_{ij} u_j \right) \quad i = 1, \dots, n \quad (4)$$

где γ_{ij} – параметры, характеризующие ингибирование i – го вида j -ым видом. В общем случае считается, что $\gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}$. В отсутствие взаимодействия при $\gamma_{ij} = 0$ виды «сосуществуют» независимо друг от друга. Стационарное положение равновесия $u_i = 0$ будет неустойчивым, а $u_i = 1$ – устойчивым. Стационарное состояние системы уравнений (4) находится как решение системы уравнений:

$$1 - u_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n \gamma_{ij} u_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

При малых значениях параметров γ_{ij} в силу непрерывной зависимости решения от параметров решение системы уравнений (4) будет близким к решению $u_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Собственные значения матрицы Якоби правой части уравнений (4) будут иметь отрицательные вещественные части, если согласно теореме Гершгорина [103], для всех $i = 1, \dots, n$ выполняются неравенства

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n \gamma_{ij} < 1.$$

В этом случае решение системы уравнений (4) при малых значениях γ_{ij} в окрестности точки $u_i = 1$ может иметь устойчивое решение. При достаточно больших значениях каких-либо параметров γ_{ij} , как это следует из анализа системы уравнений (3), часть популяций может погибнуть.

В модели (4) конкуренция определяется непосредственным контактом особей популяций. На конкуренцию также оказывает влияние общее состояние экосистемы при неизменном характере межвидового взаимодействия. Это может определяться климатическими условиями, антропогенным давлением и другими факторами.

Конкуренция экономических субъектов может зависеть от уровня технологического различия субъектов, сегментации рынка, ограниченности ресурса и роста потребностей и тд. В современном технологическом укладе новые технологии внедряются достаточно быстро у большинства субъектов при благоприятных рыночных условиях и отсутствия барьеров для вхождения на рынок. С учетом того, что межвидовое взаимодействие в модели (4) возникает, если хотя бы одно из значений параметров γ_{ij} становится положительным, фактор экосистемы можно учесть введением параметра ε :

$$\frac{du_i}{dt} = \mu_i u_i \left(1 - u_i - \varepsilon \sum_{j=1, j \neq i}^n \gamma_{ij} u_j \right) \quad i = 1, \dots, n \quad (5)$$

При $\varepsilon = 0$ межвидовая конкуренция отсутствует, при выполнении $\varepsilon \sum_{j=1, j \neq i}^n \gamma_{ij} > 1$ один из видов может исчезнуть, как и в случае системы уравнений (4). Параметр ε определяет интенсивность конкуренции или уровень воздействия среды на особей биологического сообщества. В экономическом сообществе данный параметр может охарактеризовать уровень технологического различия.

Модель (5) позволяет объяснить исчезновение отдельных конкурирующих видов не их взаимодействием, а общим изменением состояния экосистемы, усиливающим или ослабляющим конкурентные взаимоотношения между всеми видами без введения временных зависимостей в правую часть уравнений (4).

Как следует из анализа полученных результатов при $\varepsilon = 0$ численность всех популяций равна 1. Появление конкурентных взаимоотношений приводит к уменьшению численности всех конкурирующих популяций.

На рисунке 16 приведено распределение выживших популяций при $\varepsilon = 0.003$ и $\varepsilon = 0.5$. Уровень выживаемости популяций уменьшается с ростом интенсивности фактора среды ε , что доказывает предположение о том, что экосистема подвергается изменению в целом, а не на уровне отдельных популяций.

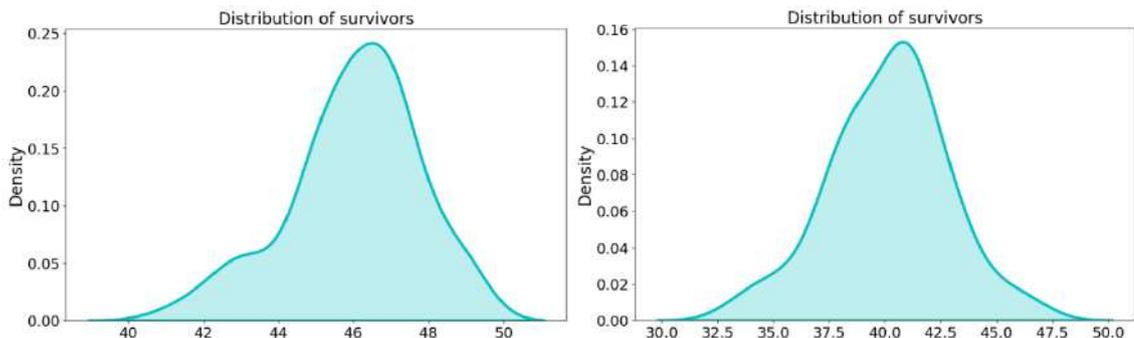


Рис. 16. А – Плотность распределения выживших популяций при $\varepsilon = 0.003$,
Б – Плотность распределения выживших популяций при $\varepsilon = 0.5$

Сценарий №1. Конкуренция n популяций в условиях низкого фактора среды. В системы уравнений входят параметры μ_i и γ_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Конкретный набор этих параметров можно сопоставить с экологическими характеристиками конкретных популяций [104] и характеристиками экономической среды [105]. Выбирая эти параметры случайным образом для n популяций из установленного интервала изменения данных параметров, можно

построить вероятностное распределение «выживших» в конкурентной борьбе популяций.

Предполагается, что конкурирующие виды обитают вместе и имеют схожие экологические характеристики. В расчете на одну особь у разных видов сохранится примерно одна и та же вероятность размножиться, умереть, заселить свободное пространство. Так как конкуренция происходит не на уровне видов, а на уровне особей, то в имитационном моделировании параметры μ_i и γ_{ij} значительно не отличаются. Для конкуренции среди экономических субъектов также принимается, что данные параметры близки.

В данном сценарии приводятся результаты имитационного моделирования для модели (5) в условиях низкой интенсивности фактора среды. Число популяций $n = 50$, число экспериментов $N = 500$. В данном сценарии в каждом эксперименте находится решение системы (5) для 50 популяций со следующей генерацией коэффициентов:

$$\mu_i = rand_{0.03,0.1}, \gamma_{ij} = rand_1, u_{i0} = rand_1, \varepsilon = 0.003$$

Где $rand_{0.03,0.1}$ соответствует случайному рациональному числу в интервале $[0.03, 0.1]$, $rand_1$ соответствует случайному рациональному числу в интервале $[0, 1]$.

Строится плотность распределения индекса концентрации CR_3 и уровня выживаемости популяций. На рисунке 17 (А) изображена плотность распределения коэффициента концентрации CR_3 для 500 экспериментов. Вероятностный индекс концентрации для 500 экспериментов соответствует $CR_3 = 0.22$, что говорит о низкой концентрированности конкурентной среды. На рисунке 17 (Б) изображена плотность распределения уровня выживаемости популяций для 500 экспериментов. Средний уровень выживаемости соответствует $alive = 47$. Таким образом, из 50 популяций выживает 94% популяций в данном сценарии.

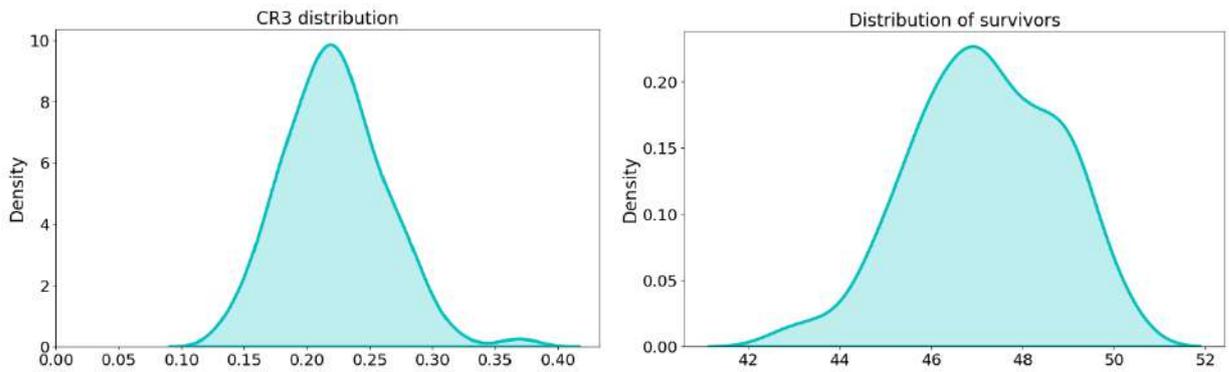


Рис. 17. А – Плотность распределения индекса концентрации
Б – Плотность распределения выживших популяций

Сценарий №2. Конкуренция n популяций в условиях варьирования интенсивности фактора среды. Число популяций $n = 50$, число экспериментов $N = 500$. Генерация коэффициентов осуществляется аналогичным образом, кроме ε :

$$\varepsilon \in [0.01, 150]$$

В данном сценарии рассматривается зависимость индекса концентрации и уровня выживаемости популяций от фактора среды. На рисунке 18 (А) изображена зависимость коэффициента концентрации от фактора среды. На рисунке 18 (Б) изображена зависимость количества выживших популяций от фактора среды. Чем выше фактор среды, тем ниже уровень выживаемости популяций – при низкой интенсивности конкуренции выживает 46 популяций, что составляет 92%. При высокой интенсивности $\varepsilon = 150$ уровень выживаемости составляет 10 популяций или 20%. При факторе среды $\varepsilon > 10$ кривая уровня выживаемости (Б) начинает убывать.

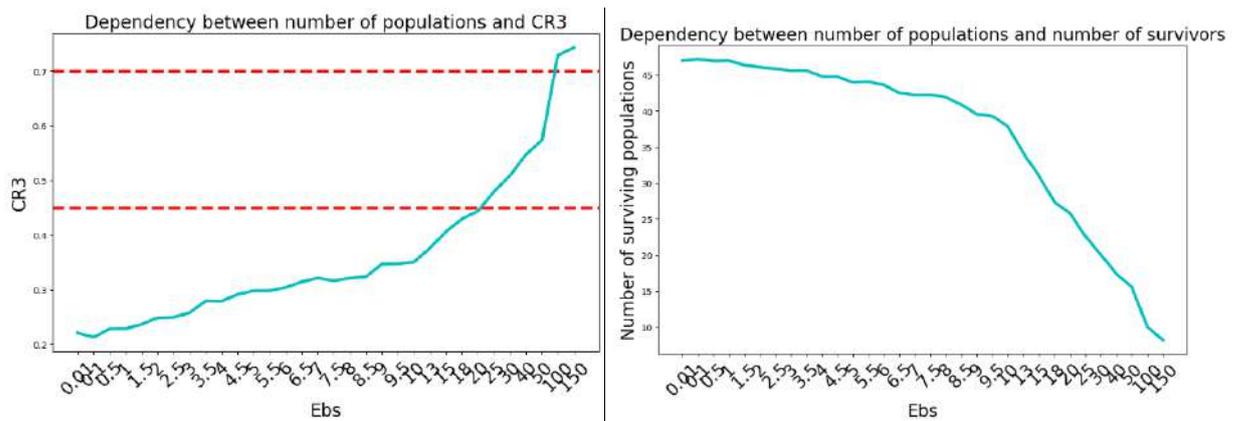


Рис. 18. А – Зависимость коэффициента концентрации от фактора среды
Б – Зависимость количества выживших популяций от фактора среды

Пороговые значения индекса концентрации и уровня выживаемости для определения концентрированности среды приведены в таблице 11.

Таблица 11. Пороговые значения фактора среды и уровня выживаемости

Концентрированность среды	Пороговые значения фактора среды	Пороговые значения уровня выживаемости
Низкая	$\varepsilon < 18$	$alive > 25$
Умеренная	$\varepsilon \in [18, 50)$	$alive \in [13, 25)$
Высокая	$\varepsilon > 50$	$alive < 13$

На рисунке 19 изображена зависимость численности популяций от фактора среды. Увеличение фактора среды на численность популяций не оказывает влияния – популяции остаются многочисленными.

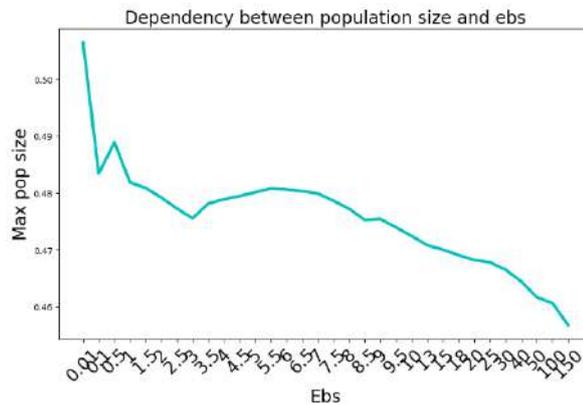


Рис. 19. Зависимость численности популяций от фактора среды

Сценарий №3. Динамическое имитационное моделирование. Число популяций $n = 50$, число экспериментов $N = 500$. На первом шаге рассматривается 2 популяции, на втором шаге 3 популяции и так далее до 50 популяций. На каждом шаге проводится 500 экспериментов. В данном сценарии взаимодействия в каждом эксперименте находится решение системы (5) для k популяций со следующей генерацией коэффициентов:

$$\mu_i = rand_{0.03,0.1}, \gamma_{ij} = rand_1, u_{i0} = rand_1, \varepsilon = 0.003, i = 1, \dots, k$$

В данном сценарии рассматривается зависимость индекса концентрации от общего числа популяций, а также зависимость уровня выживаемости видов от общего числа популяций аналогичным образом относительно предыдущего сценария. На рисунке 20 (А) изображена зависимость коэффициента концентрации от общего числа популяций. Чтобы обеспечить конкурентные условия среды, необходимое количество участников конкуренции должно быть не менее 19

субъектов. На рисунке 20 (Б) изображена зависимость количества выживших популяций от количества популяций. Уровень выживания растет пропорционально.

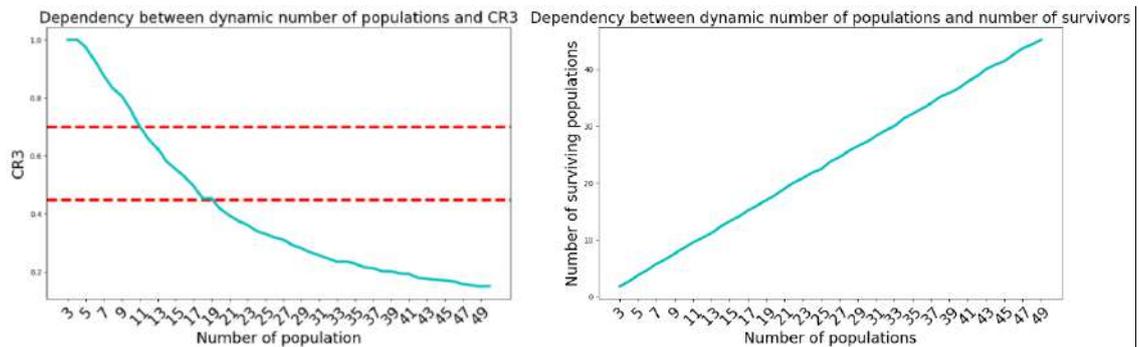


Рис. 20. А – Зависимость коэффициента концентрации от общего числа популяций,
Б – Зависимость количества выживших популяций от общего числа популяций

Пороговые значения количества субъектов для определения концентрированности среды приведены в таблице 12.

Таблица 12. Пороговые значения количества субъектов

Концентрированность среды	Пороговые значения количества субъектов
Низкая	$k > 19$
Умеренная	$k \in [11, 19)$
Высокая	$k < 11$

3.1.3. Иерархическая модель конкуренции

Существование конкурирующих видов объясняется ограниченностью ресурсов, различным влиянием хищников на особей, внешними условиями и другими многочисленными факторами. Особи одной и той же популяции всегда будут иметь одинаковые потребности, поэтому их конкуренция за ограниченные ресурсы становится более интенсивной. Организмы конкурируют за партнеров, территорию размножения, пищу, пространство.

При пространственном распределении популяций в экосистеме возможно образование перекрывающихся участков обитания с возникновением иерархической структуры конкурирующих популяций. Популяции, живущие группами, или популяции в одной экосистеме могут разделять ресурсы. Особи получают ресурсы в соответствии со своим рангом и статусом. Их ранговая система называется социальной иерархией. Чаще всего в ранговой системе присутствует популяция-доминант, которая занимает высший ранг. Популяции с высоким рангом имеют очевидные преимущества — они питаются первыми. Доминирующие самцы оставляют больше потомства, чем подчиненные самцы.

Структура группы дает больше возможностей для поиска пищи и увеличивает шансы на выживание отдельных членов группы в сложных условиях или в присутствии хищников. Группа обеспечивает заботу о молодых особях популяции посредством социальных связей и увеличивает шансы популяций на выживание.

Различные типы социальной иерархии:

- *Линейная иерархия доминирования.* Каждая популяция признается либо доминирующей, либо подчиненной по отношению к любой другой популяции, создавая линейное распределение рангов.
- *Сложная иерархия доминирования.* Группа имеет социальную структуру, контролируемую доминирующим членом.

Иерархии устанавливаются популяциями или особями, конкурирующими за ранг. Это предполагает агрессию и борьбу на раннем этапе, но как только

конкурентные взаимоотношения стабилизируются, борьба останавливается [107]. Борьба начнется только в том случае, если появится новая популяция, которая возобновит конкурентные отношения.

Математическая модель иерархических конкурентных взаимоотношений представлена системой уравнений:

$$\frac{du_i}{dt} = \mu_i u_i \left(1 - u_i - \varepsilon \sum_{j=1, j \neq i}^{i-1} \gamma_{ij} u_j \right) \quad i = 1, \dots, n \quad (6)$$

где γ_{ij} – матрица конкурентных взаимоотношений ($\gamma_{ij} = 0$, если $j \geq i$). Тогда матрица имеет вид:

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 \\ \dots & \ddots & 0 \\ \gamma_{n1} & \dots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

В этой модели на популяцию, занимающую первый ранг, конкуренты не оказывают влияния, то есть данная популяция является доминантом. На вторую оказывает влияние только первая популяция и тд. На последнюю популяцию влияют все популяции выше рангом. Стационарные точки системы уравнений (6) находятся из рекуррентных соотношений:

$$u_1 = 0$$

$$u_i = 1 - \varepsilon \sum_{j=1, j \neq i}^{i-1} \gamma_{ij} u_j \quad (i = 2, \dots, n)$$

При этом принимается, что $u_i = 0$, если $1 - \varepsilon \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} u_j \leq 0$. В зависимости от значений параметров $\varepsilon \gamma_{ij}$ могут погибнуть популяции не самые «слабые».

В российских и международных источниках математической интерпретации иерархической модели конкуренции найдено не было.

Сценарий №1. Конкуренция n популяций в условиях низкого фактора среды. В данном сценарии приводятся результаты имитационного моделирования для модели (6) в условиях низкой интенсивности фактора среды. Число популяций $n = 50$, число экспериментов $N = 500$. В данном сценарии в каждом эксперименте

находится решение системы (5) для 50 популяций со следующей генерацией коэффициентов:

$$\mu_i = rand_{0.03,0.1}, \gamma_{ij} = rand_1, u_{i0} = rand_1, \varepsilon = 0.003$$

Где $rand_{0.03,0.1}$ соответствует случайному рациональному числу в интервале $[0.03, 0.1]$, $rand_1$ соответствует случайному рациональному числу в интервале $[0, 1]$.

Строится плотность распределения индекса концентрации CR_3 и уровня выживаемости популяций. На рисунке 21 (А) изображена плотность распределения коэффициента концентрации CR_3 для 500 экспериментов. Вероятностный индекс концентрации для 500 экспериментов соответствует $CR_3 = 0.12$, что говорит о низкой концентрированности конкурентной среды. На рисунке 21 (Б) изображена плотность распределения уровня выживаемости популяций для 500 экспериментов. Средний уровень выживаемости соответствует $alive = 34$. Таким образом, из 50 популяций выживает 68% популяций в данном сценарии.

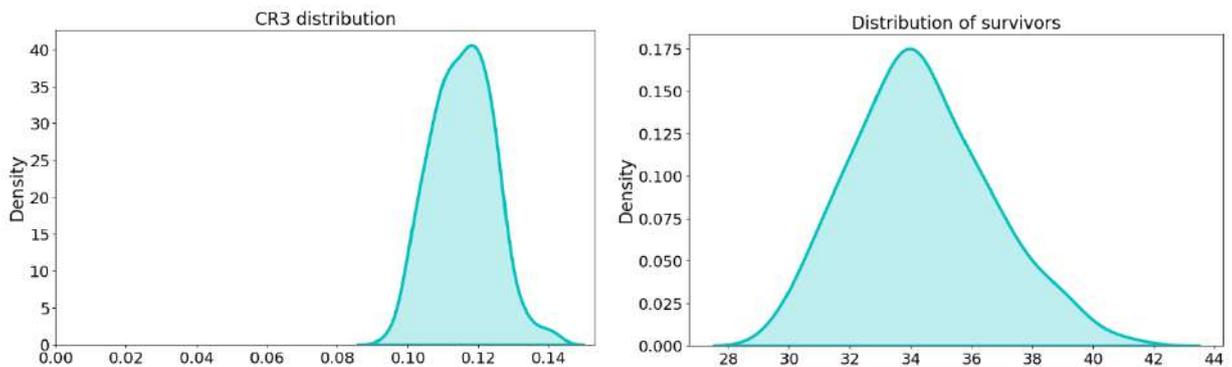


Рис. 21. А - Плотность распределения индекса концентрации, Б - Плотность распределения выживших популяций

На рисунке 22 представлены три диаграммы распределения выживших популяций в рамках позиций при низком $\varepsilon = 0.003$, среднем $\varepsilon = 10$ и высоком факторе среды $\varepsilon = 50$. Первый столбец соответствует рангу первой популяции в модели, на которую не оказывает влияние ни одна из остальных популяций. Вторым столбцом соответствует рангу второй популяции, на которую оказывает влияние только первая популяция и так далее. Вероятность выживания популяции зависит от фактора среды. При средней и высокой интенсивности фактора среды вероятность выживания популяций, имеющих ранг более 20, мала. Чем меньшее

количество популяций вступают во взаимодействие, тем выше вероятность выжить. Когда уровень интенсивности $\varepsilon > 100$, выживает только доминант, то есть популяция с высшим рангом.

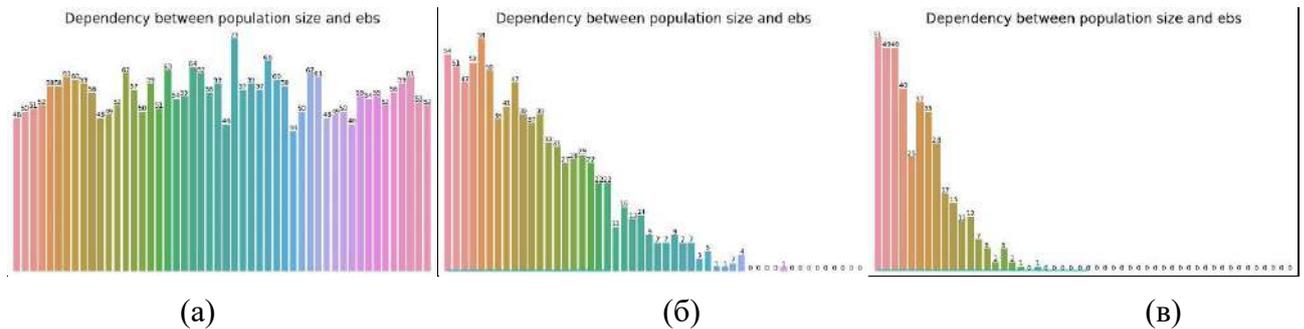


Рис. 22. Плотность распределения выживших популяций при $\varepsilon = 0.003$, $\varepsilon = 10$ и при $\varepsilon = 50$

Сценарий №2. Конкуренция n популяций в условиях варьирования интенсивности фактора среды. Число популяций $n = 50$, число экспериментов $N = 500$. Генерация коэффициентов осуществляется аналогичным образом, кроме ε :

$$\varepsilon \in [0.01, 150]$$

В данном сценарии рассматривается зависимость индекса концентрации и уровня выживаемости популяций от фактора среды. На рисунке 23 (А) изображена зависимость коэффициента концентрации от фактора среды. Иерархическая модель подходит для описания экологических или экономических сообществ, в которых ярко выражены конкурентные взаимоотношения, в отличие от интерференционной модели. На рисунке 23 (Б) изображена зависимость количества выживших популяций от фактора среды. При низкой интенсивности конкуренции выживает 18 популяций, что составляет 36%. Это подтверждает предположение о сильно концентрированной среде в случае иерархической модели. При высокой интенсивности $\varepsilon = 150$ уровень выживаемости составляет 0 популяций, то есть гибнут все популяции.

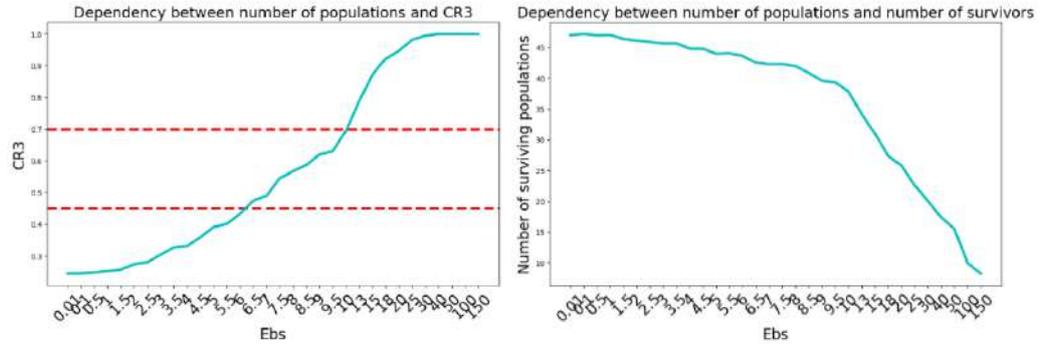


Рис. 23. А – Зависимость коэффициента концентрации от фактора среды
 Б – Зависимость количества выживших популяций от фактора среды

Пороговые значения индекса концентрации и уровня выживаемости для определения концентрированности среды приведены в таблице 13.

Таблица 13. Пороговые значения фактора среды и уровня выживаемости

Концентрированность среды	Пороговые значения фактора среды	Пороговые значения уровня выживаемости
Низкая	$\varepsilon < 6$	$alive > 7$
Умеренная	$\varepsilon \in [6, 10]$	$alive \in [3, 7]$
Высокая	$\varepsilon > 10$	$alive < 3$

На рисунке 24 изображена зависимость численности популяций от фактора среды. Кривая монотонно убывает. Несмотря на убывание кривой, все популяции остаются малочисленными в рамках модели.

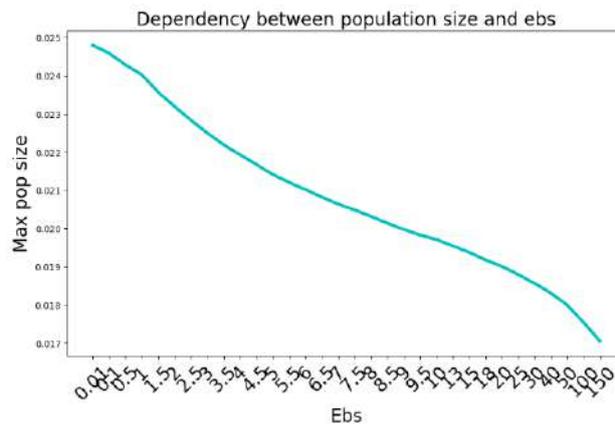


Рис. 24. Зависимость численности популяций от фактора среды

Сценарий №3. Динамическое имитационное моделирование. Число популяций $n = 50$, число экспериментов $N = 500$. На первом шаге рассматривается 2 популяции, на втором шаге 3 популяции и так далее до 50 популяций. На каждом шаге проводится 500 экспериментов. В данном сценарии

взаимодействия в каждом эксперименте находится решение системы (6) для k популяций со следующей генерацией коэффициентов:

$$\mu_i = rand_{0.03,0.1}, \gamma_{ij} = rand_1, u_{i0} = rand_1, \varepsilon = 0.003, i = 1, \dots, k$$

В данном сценарии рассматривается зависимость индекса концентрации от общего числа популяций, а также зависимость уровня выживаемости видов от общего числа популяций аналогичным образом относительно предыдущего сценария. На рисунке 25 (А) изображена зависимость коэффициента концентрации от общего числа популяций. Чтобы обеспечить конкурентные условия среды, необходимое количество участников конкуренции должно быть не менее 25 субъектов. На рисунке 25 (Б) изображена зависимость количества выживших популяций от количества популяций. Уровень выживания растет пропорционально.

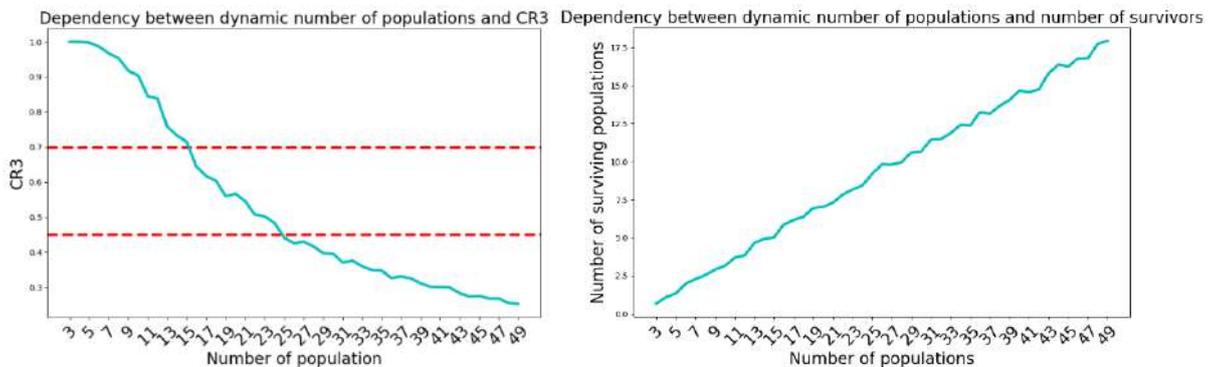


Рис. 25. А – Зависимость коэффициента концентрации от общего числа популяций,
Б – Зависимость количества выживших популяций от общего числа популяций

Пороговые значения количества субъектов для определения концентрированности среды приведены в таблице 14.

Таблица 14. Пороговые значения количества субъектов

Концентрированность среды	Пороговые значения количества субъектов
Низкая	$k > 25$
Умеренная	$k \in [15, 25]$
Высокая	$k < 15$

3.1.4. Фрагментарная модель конкуренции

Участниками конкурентного взаимодействия могут быть не все участники экологического или экономического сообщества. Пусть в конкуренции принимают участие $\frac{u_1}{b_1+u_1}$ часть первого сообщества и $\frac{u_2}{b_2+u_2}$ часть второго сообщества. Это главное отличие фрагментарной модели от интерференционной модели конкуренции. В этом случае модель (5) принимает вид (7):

$$\begin{cases} \frac{du_1}{d\tau} = \mu_1 u_1 \left(1 - u_1 - a_1 \frac{u_1}{b_1 + u_1} \frac{u_2}{b_2 + u_2} \right) \\ \frac{du_2}{d\tau} = \mu_2 u_2 \left(1 - u_2 - a_2 \frac{u_1}{b_1 + u_1} \frac{u_2}{b_2 + u_2} \right) \end{cases} \quad (7)$$

где a_1, a_2, b_1 и b_2 неотрицательные параметры.

В стационарных точках:

- $u_1 = 0, u_2 = 0$
- $u_1 = 1, u_2 = 0$
- $u_1 = 0, u_2 = 1$

Матрица Якоби правой части уравнений (7) имеет положительное значение. Поэтому эти точки неустойчивые. Нетривиальные стационарные точки находятся из системы уравнений (8):

$$\begin{cases} u_2 = 1 + \frac{a_2}{a_1} (u_1 - 1) \\ 1 - u_1 - a_1 \frac{u_1}{b_1 + u_1} \frac{1 + \frac{a_2}{a_1} (u_1 - 1)}{b_2 + 1 + \frac{a_2}{a_1} (u_1 - 1)} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Левая часть второго уравнения при $u_1 = 0$ принимает положительное значение, а при $u_1 = 1$ – отрицательное. Поэтому второе уравнение имеет корни на промежутке $0 < u_1 < 1$. А из первого уравнения в (8) следует, что физический смысл будет иметь такое решение $u_1 = u_1^*$, которое удовлетворяет условию $u_1^* > 1 - \frac{a_1}{a_2}$. При $u_1 = 1 - \frac{a_1}{a_2}$ правая часть второго уравнения в (8) принимает

положительное значение равно $\frac{a_1}{a_2}$. Это означает, что система уравнений имеет решение такое, что $0 < u_1 < 1$ и $0 < u_2 < 1$.

Компоненты матрицы Якоби в этой стационарной точке подсчитываются по формулам:

$$J_{11} = -\mu_1 u_1 \left(1 + a_1 \frac{b_1}{(b_1 + u_1)^2} \frac{u_2}{b_2 + u_2} \right)$$

$$J_{12} = -\mu_1 u_1 a_1 \frac{b_2}{(b_2 + u_2)^2} \frac{u_1}{b_1 + u_1}$$

$$J_{21} = -\mu_2 u_2 a_2 \frac{b_1}{(b_1 + u_1)^2} \frac{u_2}{b_2 + u_2}$$

$$J_{22} = -\mu_2 u_2 \left(1 + a_2 \frac{b_2}{(b_2 + u_2)^2} \frac{u_1}{b_1 + u_1} \right)$$

Сумма собственных значений этой матрицы $\lambda_1 + \lambda_2 = -(J_{11} + J_{22})$ принимает отрицательное значение, а произведение положительное:

$$\lambda_1 \lambda_2 = \mu_1 u_1 \mu_2 u_2 \left(1 + a_1 \frac{b_1}{(b_1 + u_1)^2} \frac{u_2}{b_2 + u_2} \right) \left(1 + a_2 \frac{b_2}{(b_2 + u_2)^2} \frac{u_1}{b_1 + u_1} \right)$$

Соответственно, эта стационарная точка будет устойчивой.

Для n популяций модель принимает вид:

$$\frac{du_i}{dt} = \mu_i u_i \left(1 - u_i - \varepsilon \frac{u_i}{b_i + u_i} \sum_{j=1, j \neq i}^n \gamma_{ij} \frac{u_j}{b_j + u_j} \right) \quad i = 1, \dots, n \quad (9)$$

$$a_{ii} = 0, A = \{\gamma_{ij}\}$$

где A – матрица взаимодействия популяций, ε – фактор среды.

Сценарий №1. Конкуренция n популяций в условиях низкого фактора среды. В данном сценарии приводятся результаты имитационного моделирования для модели (9) в условиях низкой интенсивности. Число популяций $n = 50$, число экспериментов $N = 500$. В данном сценарии взаимодействия в каждом эксперименте находится решение системы (9) для 50 популяций со следующей генерацией коэффициентов:

$$\mu_i = rand_{0.03,0.1}, b_i = rand_1, \gamma_{ij} = matrix(rand_1), u_{i0} = rand_{0.01}, \varepsilon = 0.003,$$

где $rand_{0.03,0.1}$ соответствует случайному рациональному числу в интервале $[0.03, 0.1]$, $rand_1$ соответствует случайному рациональному числу в интервале $[0, 1]$, $rand_{0.01}$ соответствует случайному рациональному числу в интервале $[0, 0.01]$, $matrix(rand_1)$ это матрица $n \times n$ со случайными рациональными числами в интервале $[0, 1]$. Строится плотность распределения индекса концентрации CR_3 и уровня выживаемости популяций. На рисунке 26 (А) изображена плотность распределения коэффициента концентрации CR_3 для 500 экспериментов.

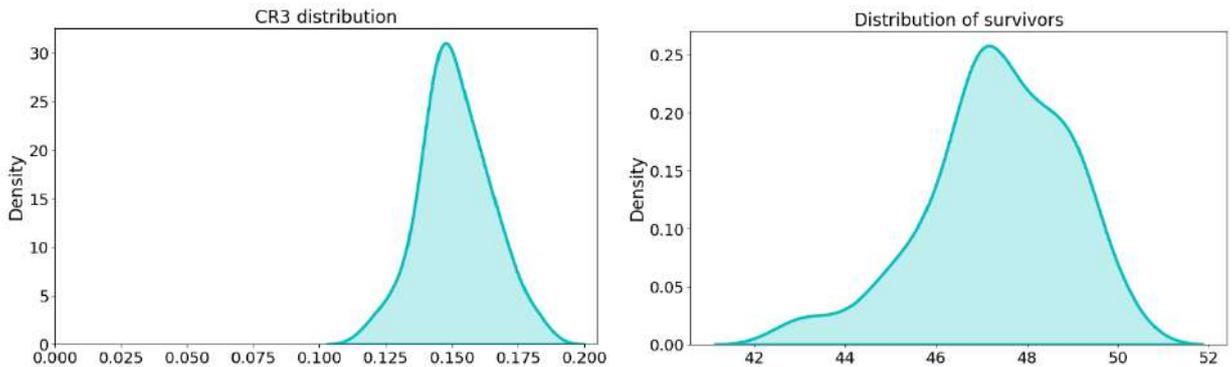


Рис. 26. А - Плотность распределения индекса концентрации,
Б - Плотность распределения выживших популяций

Вероятностный индекс концентрации для 500 экспериментов соответствует $CR_3 = 0.15$, что говорит о низкой концентрированности конкурентной среды. На рисунке 26 (Б) изображена плотность распределения уровня выживаемости популяций для 500 экспериментов. Средний уровень выживаемости соответствует $alive = 47$. Таким образом, из 50 популяций выживает 94% популяций в данном сценарии.

Сценарий №2. Конкуренция n популяций в условиях варьирования интенсивности фактора среды. Число популяций $n = 50$, число экспериментов $N = 500$. Генерация коэффициентов осуществляется аналогичным образом, кроме ε :

$$\varepsilon \in [0.01, 150]$$

В данном сценарии рассматривается зависимость индекса концентрации и уровня выживаемости популяций от интенсивности фактора среды. На рисунке 27 (А) изображена зависимость коэффициента концентрации от интенсивности

фактора среды. Можно полагать, что в данной модели порог интенсивности конкуренции высокий. Фрагментарная модель подходит для описания слабо или средне конкурирующих сообществ.

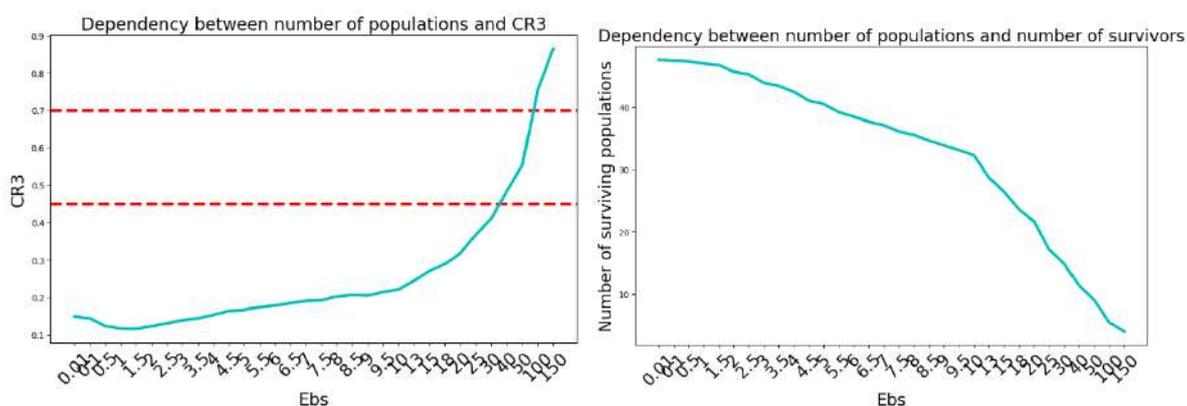


Рис. 27. А – Зависимость коэффициента концентрации от фактора среды
Б – Зависимость количества выживших популяций от фактора среды

На рисунке 27 (Б) изображена зависимость количества выживших популяций от фактора среды. Чем выше интенсивность фактора среды, тем ниже уровень выживаемости популяций – при низкой интенсивности выживает 46 популяций, что составляет 92%. При высокой интенсивности $\varepsilon = 150$ уровень выживаемости составляет 2 популяций, или 4%, то есть практически все популяции погибают. При $\varepsilon = 10$ наблюдается изменение угла наклона кривой, после которого следует увеличение скорости убывания кривой.

Для фрагментарной модели конкуренции зависимость пороговых значений от уровня концентрированности среды представлены в таблице 15.

Таблица 15. Пороговые значения фактора среды и уровня выживаемости

Концентрированность среды	Пороговые значения фактора среды	Пороговые значения уровня выживаемости
Низкая	$\varepsilon < 30$	$alive > 13$
Умеренная	$\varepsilon \in [30, 100)$	$alive \in [3, 13)$
Высокая	$\varepsilon > 100$	$alive < 3$

На рисунке 28 изображена зависимость численности популяций от фактора среды. Численность популяции монотонно убывает при увеличении фактора среды. В фрагментарной модели с увеличением интенсивности конкуренции среднечисленные популяции становятся малочисленными.

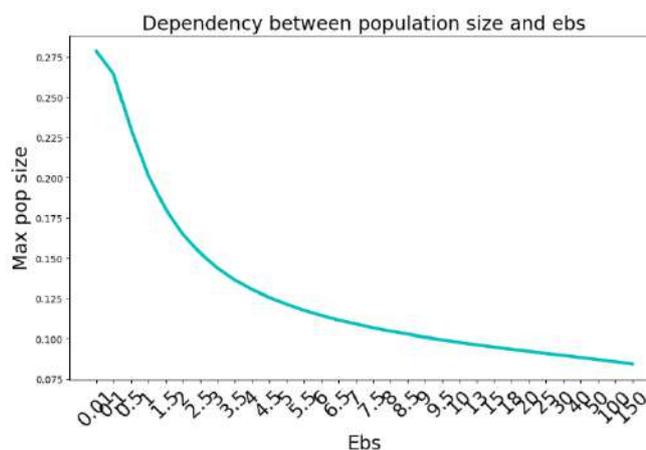


Рис. 28. Зависимость численности популяций от фактора среды

Сценарий №3. Динамическое имитационное моделирование. Число популяций $n = 50$, число экспериментов $N = 500$. На первом шаге рассматривается 2 популяции, на втором шаге 3 популяции и тд пока не будут рассмотрены 50 популяций. На каждом шаге проводится 500 экспериментов и выбирается среднее значение. В данном сценарии взаимодействия в каждом эксперименте находится решение системы (9) для k популяций со следующей генерацией коэффициентов:

$$\mu_i = rand_{0.03,0.1}, b_i = rand_{0.1}, \gamma_{ij} = matrix(rand_{0.1}),$$

$$u_{i0} = rand_{0.01}, \varepsilon = 0.003, i = 1, \dots, k$$

В данном сценарии рассматривается зависимость индекса концентрации от общего числа популяций, а также зависимость уровня выживаемости видов от общего числа популяций аналогичным образом относительно предыдущего сценария. На рисунке 29 (А) изображена зависимость коэффициента концентрации от общего числа популяций. То есть, чтобы обеспечить конкурентные условия среды, необходимое количество участников конкуренции должно быть не менее 14 субъектов в рамках фрагментарной модели. Фрагментарная модель подходит для средне или слабо конкурирующих сообществ.

На рисунке 29 (Б) изображена зависимость количества выживших популяций от количества популяций. Наблюдается линейный рост. Уровень выживаемости растет пропорционально. В фрагментарной модели гибнет каждая 10 популяция.

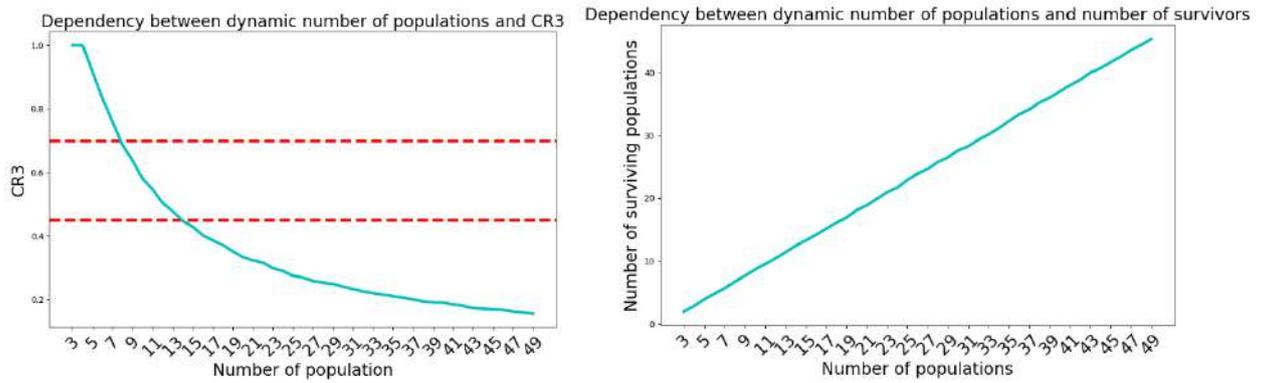


Рис. 29. А – Зависимость коэффициента концентрации от общего числа популяций,
 Б – Зависимость количества выживших популяций от общего числа популяций

Пороговые значения количества субъектов для определения концентрированности среды приведены в таблице 16.

Таблица 16. Пороговые значения количества субъектов

Концентрированность среды	Пороговые значения количества субъектов
Низкая	$k > 14$
Умеренная	$k \in [8, 14]$
Высокая	$k < 8$

3.1.5. Ресурсная модель конкуренции

В обобщенной модели Вольтерра не учитывается ресурс, потребляемый обеими популяциями. Модель (4), фактически, является моделью взаимного уничтожения двух популяций. Пусть S - трофический ресурс, используемый популяциями. Тогда модель конкуренции двух популяций на трофическом ресурсе может быть представлена системой уравнений (10):

$$\begin{cases} \frac{du_1}{d\tau} = \mu_1 u_1 \left(1 - \frac{u_1}{K_1} - \frac{\gamma_{12} u_2 S}{S + b_{12}} \right) \\ \frac{du_2}{d\tau} = \mu_2 u_2 \left(1 - \frac{u_2}{K_2} - \frac{\gamma_{21} u_1 S}{S + b_{21}} \right) \\ \frac{dS}{dt} = \mu_s S \left(1 - \frac{S}{K_s} \right) - \left(\alpha_1 \mu_1 \frac{\gamma_{12} S}{S + b_{12}} \right) u_1 u_2 \end{cases} \quad (10)$$

В этой модели при отсутствии ресурса (при $S = 0$) популяции существуют независимо друг от друга. Система уравнений (10) имеет четыре стационарные точки:

1. $u_1 = 0, u_2 = 0, S = K_s$. Неустойчивая стационарная точка.
2. $u_1 = 1, u_2 = 1, S = 0$. В этой стационарной точке собственными значениями матрицы Якоби правой части уравнений (10) будут $\lambda_1 = -\mu_1, \lambda_2 = -\mu_2, \lambda_s = \mu_s - \left(\frac{\alpha_1}{b_1} + \frac{\alpha_2}{b_2} \right)$. При выполнении неравенства $\mu_s > \frac{\alpha_1}{b_1} + \frac{\alpha_2}{b_2}$ стационарная точка будет неустойчивой. Поскольку параметры α_1, α_2 и b_1, b_2 характеризуют скорость потребления ресурса, то при малых удельных скоростях восполнения ресурса μ_s он будет исчерпан.
3. $u_1 = 1, u_2 = 0, S = K_s$. В этой стационарной точке собственными значениями матрицы Якоби правой части уравнений будут $\lambda_1 = -\mu_1, \lambda_2 = \mu_2 \left(1 - \gamma_2 \frac{K_s}{b_2 + K_s} \right), \lambda_s = -\mu_s$. При выполнении неравенства $1 < \gamma_2 \frac{K_s}{b_2 + K_s}$ эта стационарная точка будет устойчивой. То есть второй вид погибает. В модели (4) второй вид выживает, если выполняется неравенство $\gamma_2 < 1$, в модели (10) – при выполнении неравенства $\gamma_2 < 1 + \frac{b_2}{K_s}$. Отсюда следует, что порог

выживаемости (верхняя граница параметра γ_2) увеличивается при уменьшении емкости среды трофического ресурса (при $K_s \rightarrow 0$).

4. $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$. Стационарная точка, в которой $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$, находится как решение системы уравнений

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{d} \left(1 - \gamma_1 \frac{S}{b_1 + S} \right) \\ u_2 = \frac{1}{d} \left(1 - \gamma_2 \frac{S}{b_2 + S} \right) \\ \mu_s S \left(1 - \frac{S}{K_s} \right) - \frac{1}{d^2} \left(\alpha_1 \frac{S u_1}{b_1 + S} + \alpha_2 \frac{S u_2}{b_2 + S} \right) = 0 \end{cases}$$

где $d = 1 - \gamma_2 \frac{S}{b_2 + S} \gamma_1 \frac{S}{b_1 + S}$.

Функция $f(S) = \mu_s S \left(1 - \frac{S}{K_s} \right) - \frac{1}{d^2} \left(\alpha_1 \frac{S u_1}{b_1 + S} + \alpha_2 \frac{S u_2}{b_2 + S} \right)$ при $S = 0$, преобразуется в (11). При $S \rightarrow \infty, f(S) \rightarrow \infty$.

$$f(0) = \mu_s - \left(\frac{\alpha_1}{b_1} + \frac{\alpha_2}{b_2} \right) \quad (11)$$

Поэтому при выполнении неравенств $\gamma_1 \frac{K_s}{b_1 + K_s} < 1, \gamma_2 \frac{K_s}{b_2 + K_s} < 1, \frac{\alpha_1}{b_1} + \frac{\alpha_2}{b_2} < \mu_s$ система уравнений (10) будет иметь хотя бы одно решение, лежащее в первом октанте. То есть при избытке ресурса и быстром его восстановлении.

В качестве примера истощения ресурса, представленного на рисунке 30, рассматривается случай $\mu_1 = 1, \mu_2 = 0.5, \mu_s = 0.18, b_1 = 0.015, b_2 = 0.2, \alpha_1 = 0.07, \alpha_2 = 0.06, K_s = 2.0$, а коэффициенты γ_1 и γ_2 зависят от времени $\gamma_1 = \frac{1 - \sin(\pi \omega t)}{2}, \gamma_2 = \frac{1 - \cos(\omega t)}{4}, \omega = 0.02$. При заданном наборе констант выполняется неравенство $\mu_s < \frac{\alpha_1}{b_1} + \frac{\alpha_2}{b_2}$. На рисунке отражена зависимость функций $u_1(t), u_2(t), S(t)$ от времени. Со временем ресурс истощается, конкуренция прекращается.

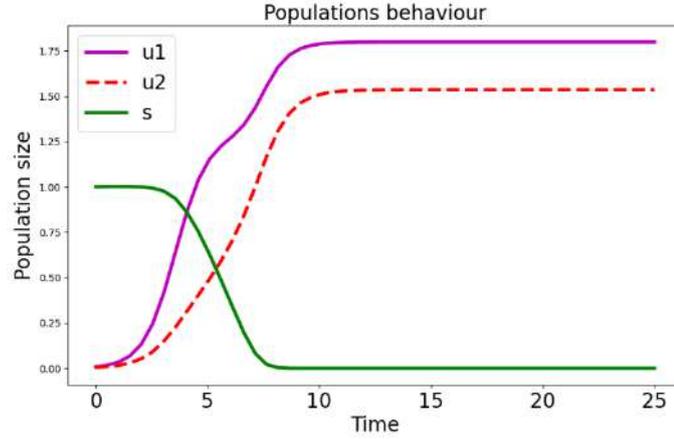


Рис. 30. Изменение численности двух популяций во времени

Примем, что в конкурентных взаимоотношениях на трофическом ресурсе S участвует n популяций. Интерференционная конкуренция, с учетом ресурса, описывается системой дифференциальных уравнений (12):

$$\begin{cases} \frac{du_i}{dt} = \mu_i u_i \left(1 - \frac{u_i}{K_i} - \varepsilon \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{\gamma_{ij} u_j S}{S + b_{ij}} \right) \\ \frac{dS}{dt} = \mu_s S \left(1 - \frac{S}{K_s} \right) - \varepsilon \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i u_i \sum_{j=1, j \neq i}^n \gamma_{ij} \frac{S}{b_{ij} + S} u_j \end{cases} \quad i = 1, \dots, n \quad (12)$$

Сценарий №1. Конкуренция n популяций в условиях низкого фактора среды. Сегодняшняя система экономических взаимоотношений, технологии производства, подготовка персонала и т.п. позволяют участникам производства и реализации товаров иметь близкие показатели по скоростям производства и реализации продукции. Аналогично и для биологической конкурентной среды. То есть в рамках модели (12) можно считать, что значения коэффициентов $\mu_i, b_i, \alpha_i, K_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) близки. Поэтому при анализе выбираем их значения следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu_i &= \text{rand}_{0.03, 0.1}, K_i = \text{rand}_{0.1}, \alpha_i = \text{rand}_{0.1}, u_{i0} = \text{rand}_{0.01}, \\ b_{ij} &= \text{matrix}(\text{rand}_{0.1}), \gamma_{ij} = \text{matrix}(\text{rand}_{0.1}), \varepsilon = 0.003, \\ \mu_s &= \text{rand}_{0.1}, K_s = \text{rand}_{0.1}, i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

где rand_1 соответствует случайному рациональному числу в интервале $[0, 1]$, $\text{rand}_{0.01}$ соответствует случайному рациональному числу в интервале $[0, 0.01]$, $\text{matrix}(\text{rand}_1)$ это матрица $n \times n$ со случайными рациональными числами в

интервале $[0, 1]$, $rand_{0.03,0.1}$ соответствует случайному рациональному числу в интервале $[0.03, 0.1]$.

Строится плотность распределения индекса концентрации CR_3 и уровня выживаемости популяций. На рисунке 31 (А) изображена плотность распределения коэффициента концентрации CR_3 для 500 экспериментов. Вероятностный индекс концентрации для 500 экспериментов соответствует $CR_3 = 0.15$, что говорит о низкой концентрированности конкурентной среды. На рисунке 31 (Б) изображена плотность распределения уровня выживаемости популяций для 500 экспериментов. Средний уровень выживаемости соответствует $alive = 49$. Таким образом, из 50 популяций выживает 96% популяций в данном сценарии.

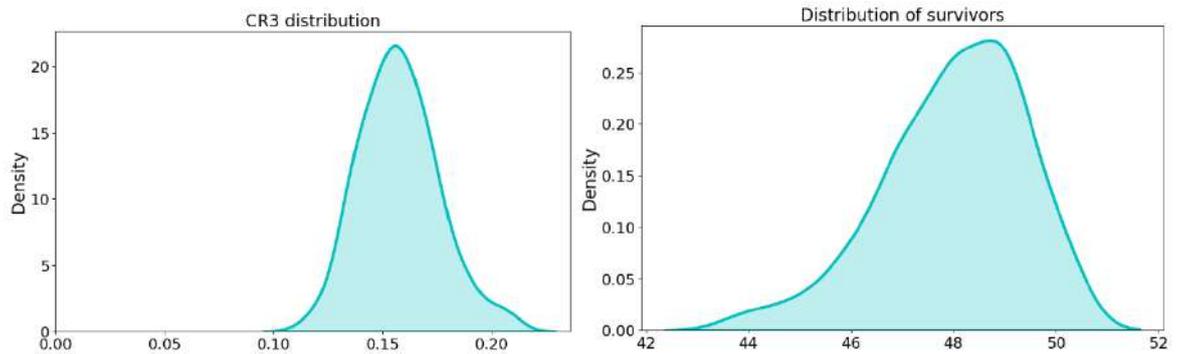


Рис. 31. А – Плотность распределения индекса концентрации
Б – Плотность распределения выживших популяций

Сценарий №2. Конкуренция n популяций в условиях варьирования интенсивности фактора среды. Число популяций $n = 50$, число экспериментов $N = 500$. Генерация коэффициентов осуществляется аналогичным образом, кроме ε :

$$\varepsilon \in [0.01, 150]$$

В данном сценарии рассматривается зависимость индекса концентрации и уровня выживаемости популяций от интенсивности фактора среды. На рисунке 32 (А) изображена зависимость коэффициента концентрации от фактора среды. В данной модели порог интенсивности конкуренции очень высокий для низкой концентрированной среды. Данная модель подходит для описания слабо конкурирующих сообществ и сообществ с одновременным сосуществованием видов. Это говорит о стабильной конкурентной среде.

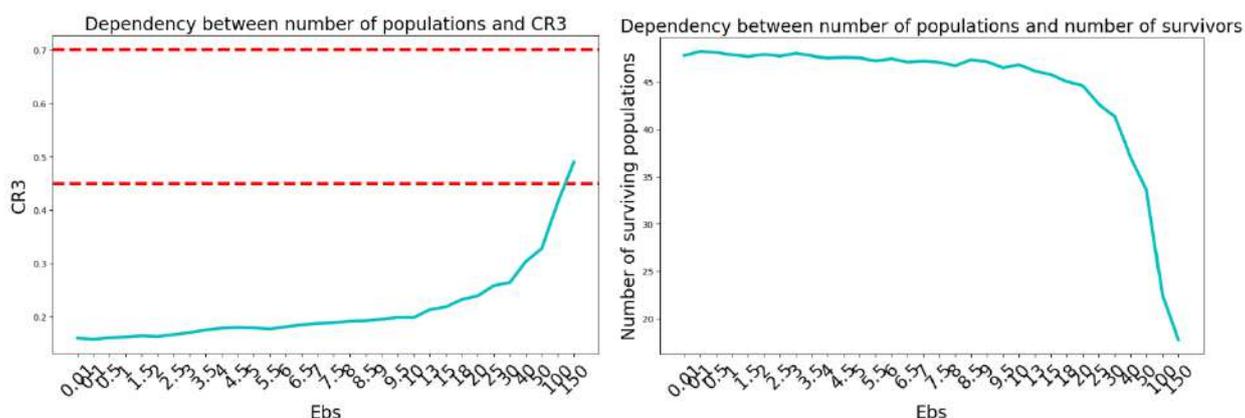


Рис. 32. А – Зависимость коэффициента концентрации от фактора среды
 Б – Зависимость количества выживших популяций от фактора среды

На рисунке 32 (Б) изображена зависимость количества выживших популяций от фактора среды. При $\varepsilon < 20$ уровень выживаемости стабилен и лежит в диапазоне [45, 47] или 90 - 94%. При $\varepsilon \geq 20$ наблюдается резкое убывание кривой выживаемости. Нижняя граница для модели является 10 популяций, что составляет 20%. На рисунке 33 изображена зависимость численности популяций от фактора среды. Закономерности в данных, представленных на рисунке, выявить затруднительно, однако можно утверждать, что численность популяции не меняется и популяция остается среднечисленной.

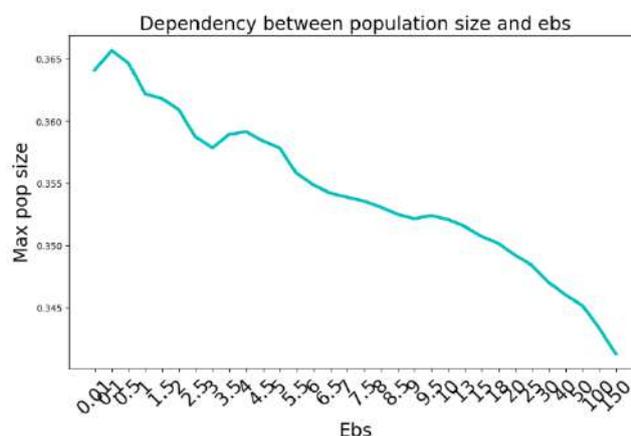


Рис. 33. Зависимость численности популяций от фактора среды

Сценарий №3. Динамическое имитационное моделирование. Число популяций $n = 50$, число экспериментов $N = 500$. На первом шаге рассматривается 1 популяция, на втором шаге 2 популяции и тд пока не будут рассмотрены 50 популяций. На каждом шаге проводится 500 экспериментов и выбирается среднее значение. В данном сценарии взаимодействия в каждом

эксперименте находится решение системы (12) для k популяций с аналогичной генерацией коэффициентов.

$$\begin{aligned}\mu_i &= \text{rand}_{0.03,0.1}, K_i = \text{rand}_{0.1}, \alpha_i = \text{rand}_{0.1}, u_{i0} = \text{rand}_{0.01} \\ b_{ij} &= \text{matrix}(\text{rand}_{0.1}), \gamma_{ij} = \text{matrix}(\text{rand}_{0.1}), \varepsilon = 0.003, \\ \mu_s &= \text{rand}_{0.03,0.1}, K_s = \text{rand}_{0.1}, i = 1, \dots, k\end{aligned}$$

В данном сценарии рассматривается зависимость индекса концентрации от общего числа популяций, а также зависимость выживаемости видов от общего числа популяций аналогичным образом относительно предыдущего сценария. На рисунке 34 (А) изображена зависимость коэффициента концентрации от общего числа популяций. Чтобы обеспечить стабильные конкурентные условия среды, необходимое количество участников конкуренции должно быть не менее 14 в рамках модели. На рисунке 34 (Б) изображена зависимость количества выживших популяций от количества популяций. Наблюдается линейная зависимость.

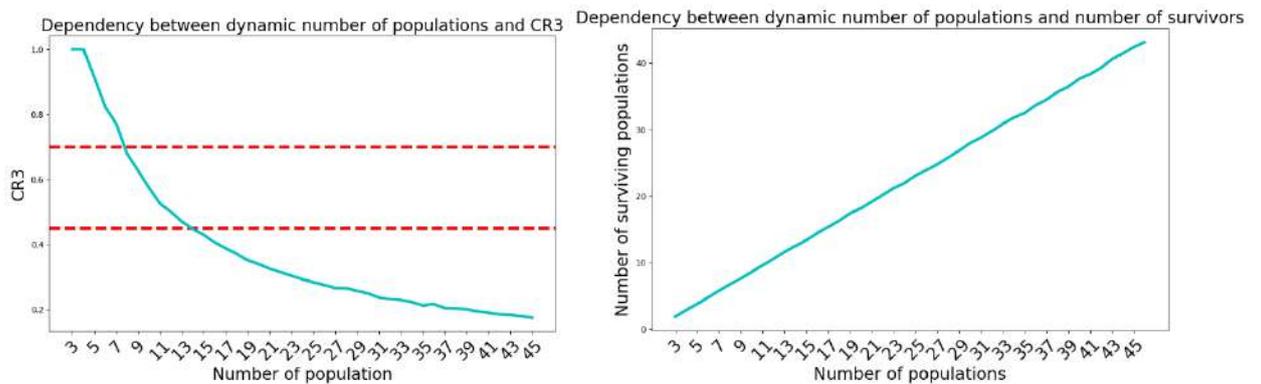


Рис. 34. А – Зависимость коэффициента концентрации от общего числа популяций
Б – Зависимость уровня выживаемости от общего числа популяций

Пороговые значения количества субъектов для определения концентрированности среды приведены в таблице 17.

Таблица 17. Пороговые значения количества субъектов

Концентрированность среды	Пороговые значения количества субъектов
Низкая	$k > 14$
Умеренная	$k \in [8, 14]$
Высокая	$k < 8$

3.1.6. Эксплуатационная модель конкуренции

Эксплуатационная модель с участием одной популяции. Предлагается альтернативная математическая модель, где отдельным дифференциальным уравнением выступает ресурс (13). В отличие от модели интерференции в данной модели нет прямого взаимодействия популяций. В данной модели происходит конкуренция за счет потребления ресурса. В математической модели (13) участвует одна популяция u , которая потребляет ресурс s .

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \mu u \left(\frac{s}{b+s} - u \right) \\ \frac{ds}{dt} = \mu_s s(1-s) - \gamma \mu \frac{us}{b+s} \end{cases} \quad (13)$$

где u – объем популяции; μ – удельная скорость роста популяции; s – количество ресурса; γ – коэффициент переработки или потребления ресурса; $f(s) = \frac{s}{b+s}$ – функция, характеризующая влияние количество ресурса на скорость его потребления; μ_s – удельная скорость роста ресурса. Все константы положительные. Матрица Якоби будет иметь вид:

$$J = \begin{pmatrix} \mu \left(\frac{s}{b+s} - u \right) - \mu u & \frac{\mu u b}{(b+s)^2} \\ -\frac{\gamma \mu s}{b+s} & \mu_s (1-2s) - \frac{\gamma \mu u s}{(b+s)^2} \end{pmatrix}$$

Стационарные точки:

1. $u=0, s=0$. В этой стационарной точке матрица Якоби $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu_s \end{pmatrix}$ имеет положительное собственное значение. Поэтому стационарная точка неустойчива.
2. $u=0, s=1$. В этой стационарной точке матрица Якоби $J = \begin{pmatrix} \mu \frac{1}{b+1} & 0 \\ -\frac{\gamma \mu}{b+1} & -\mu_s \end{pmatrix}$ имеет положительное собственное значение. Поэтому стационарная точка неустойчива.

3. $u = \frac{s}{b+s}$, $f(s) = \mu_s(1 - s) - \gamma\mu \frac{s}{(b+s)^2}$. Нетривиальное стационарное

значение s находится как корень уравнения (14):

$$1 - \frac{s}{\mu_s} - \gamma\mu \frac{s}{\mu_s(b+s)^2} = 0 \quad (14)$$

Уравнение (14) в зависимости от значений параметров может иметь один или три корня. Так как стационарные точки 1 и 2 неустойчивы и решение не уходит на бесконечность, значит, одна из данных трех точек будет устойчива по критерию Лагранжа.

Эксплуатационная модель с участием двух популяций. Расширяя модель (12) на две популяции, получим систему дифференциальных уравнений (15):

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = \mu_1 u_1 \left(\frac{S}{S+b_1} - u_1 \right) \\ \frac{du_2}{dt} = \mu_2 u_2 \left(\frac{S}{S+b_2} - u_2 \right) \\ \frac{dS}{dt} = -\gamma_1 \mu_1 u_1 \frac{S}{S+b_1} - \gamma_2 \mu_2 u_2 \frac{S}{S+b_2} + \mu_s S \left(1 - \frac{S}{K} \right) \end{cases} \quad (15)$$

где u_1, u_2 – объем первой и второй популяции; μ_1, μ_2 – удельная скорость роста первой и второй популяции; S – количество ресурса; K – емкость среды (максимальное количество ресурса, который может быть произведен); γ_1, γ_2 – коэффициент переработки или потребления ресурса; $f(s) = \frac{s}{b+s}$ – функция, характеризующая влияние количество ресурса на скорость его потребления; μ_s – удельная скорость роста ресурса. Все константы положительные. Если ресурс не восполняется, то в третьем уравнении $\mu_s = 0$.

Матрица Якоби будет иметь вид:

$$J = \begin{pmatrix} \mu_1 \left(\frac{s}{b_1+s} - 2u_1 \right) & 0 & \frac{u_1 \mu_1 b_1}{(b_1+s)^2} \\ 0 & \mu_2 \left(\frac{s}{b_2+s} - 2u_2 \right) & \frac{u_2 \mu_2 b_2}{(b_2+s)^2} \\ -\frac{\gamma_1 \mu_1 s}{b_1+s} & -\frac{\gamma_2 \mu_2 s}{b_2+s} & -\frac{\gamma_1 \mu_1 b_1 u_1}{(b_1+s)^2} - \frac{\gamma_2 \mu_2 b_2 u_2}{(b_2+s)^2} + \mu_s \left(1 - 2 \frac{s}{K} \right) \end{pmatrix}$$

Тогда стационарные точки:

1. $u_1 = 0, u_2 = 0, s = 0$. В этой стационарной точке матрица Якоби $J =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_s \end{pmatrix}$$

имеет положительное собственное значение. Поэтому стационарная точка неустойчива.

2. $u_1 = 0, u_2 = 0, s = K$. В этой стационарной точке матрица Якоби

$$J = \begin{pmatrix} \mu_1 \frac{K}{b_1 + K} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 \frac{K}{b_2 + K} & 0 \\ -\frac{\gamma_1 \mu_1 K}{b_1 + K} & -\frac{\gamma_2 \mu_2 K}{b_2 + K} & -\mu_s \end{pmatrix}$$

имеет положительное собственное значение. Поэтому стационарная точка неустойчива.

3. $u_1 = 0, u_2 = \frac{s}{s+b_2}, f(s) = -\gamma_2 \mu_2 \frac{s}{(s+b_2)^2} + \mu_s \left(1 - \frac{s}{K}\right)$. В этой стационарной точке матрица Якоби

$$J = \begin{pmatrix} \mu_1 \left(\frac{s}{b_1 + s}\right) & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_2 \frac{s}{b_2 + s} & \frac{s \mu_2 b_2}{(b_2 + s)^3} \\ -\frac{\gamma_1 \mu_1 s}{b_1 + s} & -\frac{\gamma_2 \mu_2 s}{b_2 + s} & -\frac{\gamma_2 \mu_2 b_2 s}{(b_2 + s)^3} + \mu_s \left(1 - 2 \frac{s}{K}\right) \end{pmatrix}$$

имеет положительное собственное значение. Поэтому стационарная точка неустойчива.

4. $u_2 = 0, u_1 = \frac{s}{s+b_1}, f(s) = -\gamma_1 \mu_1 \frac{s}{(s+b_1)^2} + \mu_s \left(1 - \frac{s}{K}\right)$. В этой стационарной точке матрица Якоби

$$J = \begin{pmatrix} -\mu_1 \frac{s}{b_1 + s} & 0 & \frac{s\mu_1 b_1}{(b_1 + s)^3} \\ 0 & \mu_2 \frac{s}{b_2 + s} & 0 \\ -\frac{\gamma_1 \mu_1 s}{b_1 + s} & -\frac{\gamma_2 \mu_2 s}{b_2 + s} & -\frac{\gamma_1 \mu_1 b_1 s}{(b_1 + s)^3} + \mu_s \left(1 - 2\frac{s}{K}\right) \end{pmatrix}$$

имеет положительное собственное значение. Поэтому стационарная точка неустойчива.

$$5. \quad u_1 = \frac{s}{s+b_1}, u_2 = \frac{s}{s+b_2}, f(s) = -\gamma_1 \mu_1 \frac{s}{(s+b_1)^2} - \gamma_2 \mu_2 \frac{s}{(s+b_2)^2} + \mu_s \left(1 - \frac{s}{K}\right).$$

Единственное нетривиальное решение здесь уравнения $f(s) = 0$. При $s=0$ правая часть положительна, при $s=\infty$, правая часть отрицательна, значит, данное уравнение будет иметь хотя бы одно решение. Аналогично предыдущей модели, получаем, что один из корней уравнения является стационарной точкой.

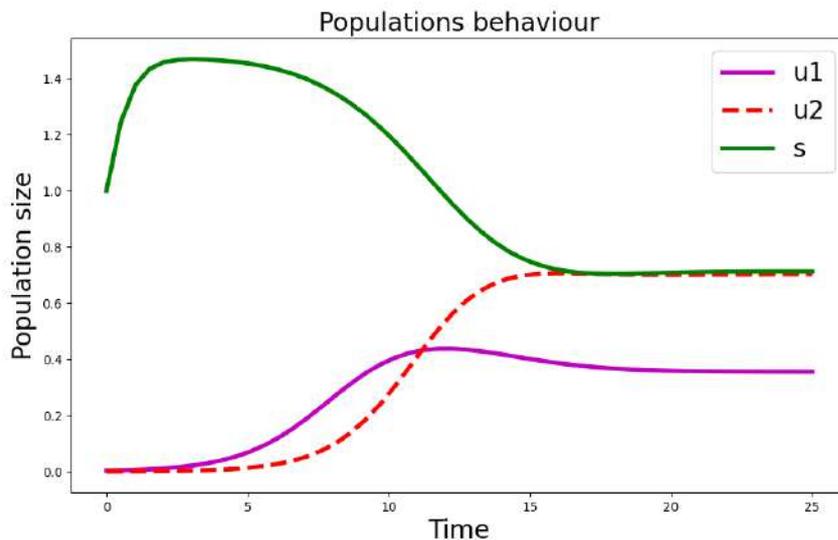


Рис. 35. Изменение численности двух популяций

На рисунке 35 отображено изменение численности двух популяций в начальный момент популяций на невозобновляемом трофическом ресурсе для случая $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 2$, $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $\gamma_1 = 1.4$, $\gamma_2 = 1.6$, $\mu_s = 1$, $K = 10$, $u_0^1 = 0.001$, $u_0^2 = 0.002$, $S_0 = 1$. Наблюдается совместное существование популяций.

Эксплуатационная модель с участием n популяций. Можно построить аналогичную модель (16) для n популяций, которая позволит оценить границы изменения индексов концентрации в зависимости от n .

Согласно (13) имеем:

$$\begin{cases} \frac{du_i}{dt} = \mu_i u_i \left(\frac{s}{s+b_i} - \frac{u_i}{K_i} \right) \\ \frac{ds}{dt} = - \sum_{i=1}^n \gamma_i \mu_i u_i \frac{s}{s+b_i} + \mu_s s \left(1 - \frac{s}{K} \right) \end{cases} \quad (16)$$

где u_i – объем i -ой популяции; μ_i – удельная скорость роста i -ой популяции; s – количество ресурса; K_i, K – емкость среды (максимальное количество ресурса, который может быть произведен); γ_i – коэффициент переработки ресурса; $f(s) = \frac{s}{s+b_i}$ – функция, характеризующая влияние количество ресурса на скорость его потребления; μ_s – удельная скорость роста ресурса. Все константы положительные. Также полагаем:

1. $\frac{\partial u_m}{\partial t} = \mu_m u_m$ – это скорость наращивания объема популяции (выпуска продукции), если ресурс неограничен;
2. $\left(\frac{s}{b_m+s} - \frac{u_m}{K_m} \right)$ – это доля возможностей развития объемов популяции (что можно произвести) на ограниченном ресурсе, если рассматриваемый объем популяции u_m .

Сценарий №1. Конкуренция n популяций в условиях низкого фактора среды.

Далее, чтобы установить границы индексов, осуществляем генерацию констант и начальных данных для n популяций следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu_i &= rand_{0.03,0.1}, K_i = rand_{0.1}, \alpha_i = rand_{0.1}, \\ u_{i0} &= rand_{0.01}, b_{ij} = matrix(rand_{0.1}), \gamma_{ij} = matrix(rand_{0.1}) \\ \varepsilon &= 0.003, \mu_s = rand_{0.03,0.1}, K_s = rand_{0.1}, \end{aligned}$$

где $rand_1$ соответствует случайному рациональному числу в интервале $[0, 1]$, $rand_{0.01}$ соответствует случайному рациональному числу в интервале $[0, 0.01]$, $matrix(rand_1)$ это матрица $n \times n$ со случайными рациональными числами в интервале $[0, 1]$, $rand_{0.03,0.1}$ соответствует случайному рациональному числу в интервале $[0.03, 0.1]$. Выбирается данная генерация для того, чтобы избежать сингулярности в правой части системы дифференциальных уравнений.

Строится плотность распределения индекса концентрации CR_3 и уровня выживаемости популяций. На рисунке 36 (А) изображена плотность распределения коэффициента концентрации CR_3 для 500 экспериментов. Вероятностный индекс концентрации для 500 экспериментов соответствует $CR_3 = 0.2$, что говорит о низкой концентрированности конкурентной среды. На рисунке 36 (Б) изображена плотность распределения уровня выживаемости популяций для 500 экспериментов. Средний уровень выживаемости соответствует $alive = 49$. Таким образом, из 50 популяций выживает 98% популяций в данном сценарии.

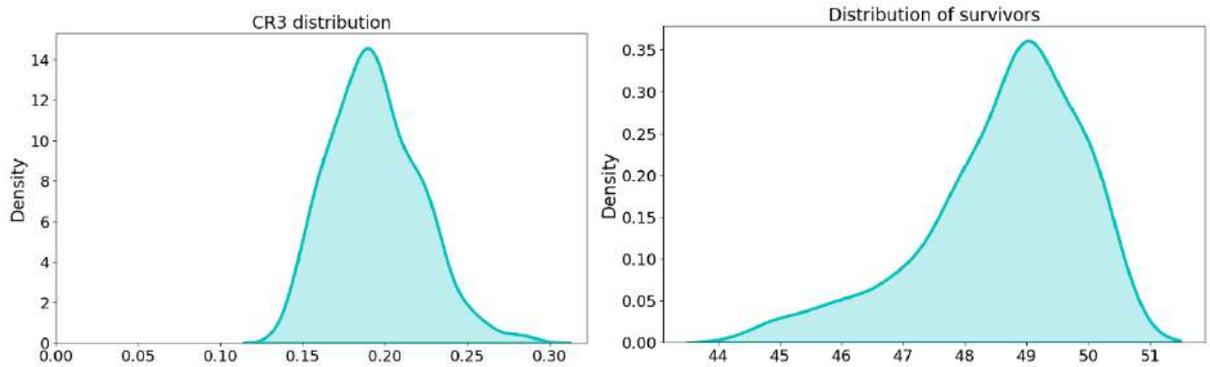


Рис. 36. А – Плотность распределения индекса концентрации
Б – Плотность распределения выживших популяций

Сценарий №3. Динамическое имитационное моделирование. Число популяций $n = 50$, число экспериментов $N = 500$. На первом шаге рассматривается 2 популяции, на втором шаге 3 популяции и так далее до 50 популяций. На каждом шаге проводится 500 экспериментов и выбирается среднее значение. В данном сценарии взаимодействия в каждом эксперименте находится решение системы (16) для k популяций с аналогичной генерацией коэффициентов.

В данном сценарии рассматривается зависимость индекса концентрации от общего числа популяций, а также зависимость выживаемости видов от общего числа популяций аналогичным образом относительно предыдущего сценария. На рисунке 37 (А) изображена зависимость коэффициента концентрации от общего числа популяций.

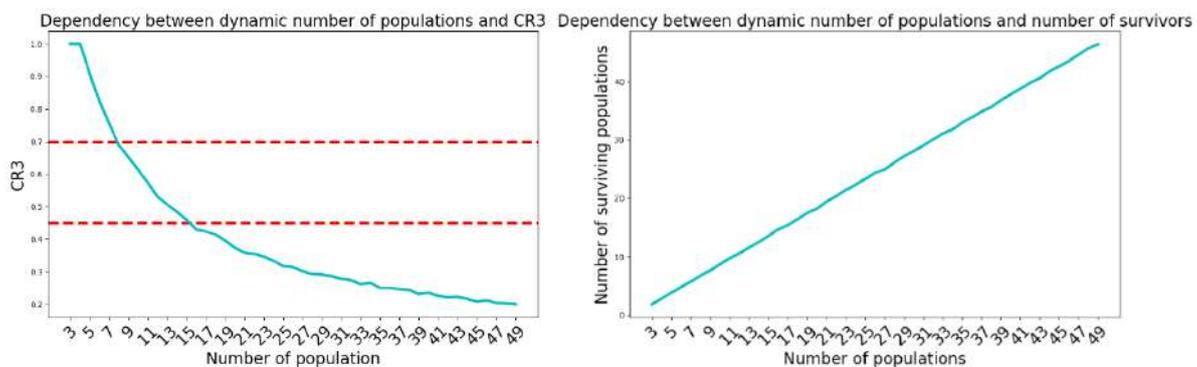


Рис. 37. А – Зависимость коэффициента концентрации от общего числа популяций
 Б – Зависимость уровня выживаемости от общего числа популяций

То есть чтобы обеспечить здоровые конкурентные условия среды, необходимое количество участников конкуренции должно быть не менее 15 в рамках модели. На рисунке 37 (Б) изображена зависимость количества выживших популяций от количества популяций. Уровень выживаемости соответствует 100%, что говорит о том, что ни одна популяция не гибнет в рамках этой модели. То есть наблюдается одновременное сосуществование популяций. Пороговые значения количества субъектов для определения концентрированности среды приведены в таблице 18.

Таблица 18. Пороговые значения количества субъектов

Концентрированность среды	Пороговые значения количества субъектов
Низкая	$k > 15$
Умеренная	$k \in [8, 15]$
Высокая	$k < 8$

С увеличением числа субъектов индекс концентрации уменьшается, что подтверждается теорией (Глава 1, 1.2.2, стр. 27). Полученные результаты коррелируют с результатами, полученными с помощью долевого критерия (Глава 2, 2.9, стр. 51), что также доказывает валидность разработанной эксплуатационной модели.

3.1.7. Математическая модель «пассивного» ухода от конкуренции

Выше рассматривались модели конкуренции, где предполагалось непосредственное взаимодействие популяций между собой или взаимодействий через ресурс. Далее будут рассмотрены модели, подходящие для описания слабо конкурирующих или не конкурирующих экологических сообществ, которые стремятся уйти от конкуренции путем нахождения своей экологической ниши.

Биологические популяции способны сосуществовать на одной территории или разойтись по экологическим нишам в зависимости от:

- наличия мутирующих видов;
- способности популяции экономно и полно использовать имеющийся ресурс;
- способности популяции слабо реагировать на внешние факторы.

В этой модели предполагается, что уход от конкуренции происходит «естественным» путем (17):

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_1(1 - u_1 - \gamma_1 e^{-\alpha_1 u_1} u_2) \\ \frac{du_2}{dt} = \gamma u_2(1 - u_2 - \gamma_2 e^{-\alpha_2 u_2} u_1) \end{cases} \quad (17)$$

В первом уравнении введена функция $e^{-\alpha_1 u_2}$, которая убывает с ростом u_2 . То есть предполагается, что увеличивающаяся численность второй популяции приводит к уходу от конкуренции естественным путем. Нетривиальная стационарная точка, в которой $0 < u_1 < 1, 0 < u_2 < 1$, находится как решение системы уравнений (18):

$$\begin{cases} 1 - u_1 - \gamma_1 e^{-\alpha_1 u_1} u_2 = 0 \\ 1 - u_2 - \gamma_2 e^{-\alpha_2 u_2} u_1 = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Функция $f(z) = 1 - \alpha e^{-\beta_0 z}$ в точке $z = 0$ положительна ($f(0) = 1$) и является убывающей ($f'(0) = -\alpha$), а в точке $z = 1$ будет принимать

положительные значения, если выполняется неравенство $\alpha e^{-\beta} < 1$. Экстремум функции $f(z)$ достигается в точке $z = \frac{1}{\beta}$.

При выполнении неравенства $\beta < 1$ на промежутке $[0,1]$ $f(z)$ будет монотонно убывающей функцией. Поэтому при одновременном выполнении неравенств $\gamma_1 e^{-\alpha_1} < 1, \gamma_2 e^{-\alpha_2} < 1, \alpha_1 < 1, \alpha_2 < 1$ система уравнений (17) будет иметь единственное решение, удовлетворяющее условиям $0 < u_1 < 1, 0 < u_2 < 1$.

При выполнении неравенства $\beta > 1$ функция $f(z)$ будет иметь минимум на промежутке $[0,1]$. Поэтому при выполнении неравенства $\alpha_1 > 1$ или $\alpha_2 > 1$ система уравнений (17), в зависимости от значений постоянных, может иметь два решения, удовлетворяющих условиям $0 < u_1 < 1, 0 < u_2 < 1$.

Собственные значения матрицы Якоби правой части уравнений (17) являются корнями полинома:

$$\lambda^2 + (u_1 + \gamma u_2)\lambda + \gamma u_1 u_2 (1 - \gamma_1 \gamma_2 e^{-\alpha_1 u_2 - \alpha_2 u_1} (1 - \alpha_1 u_2)(1 - \alpha_2 u_1)) = 0.$$

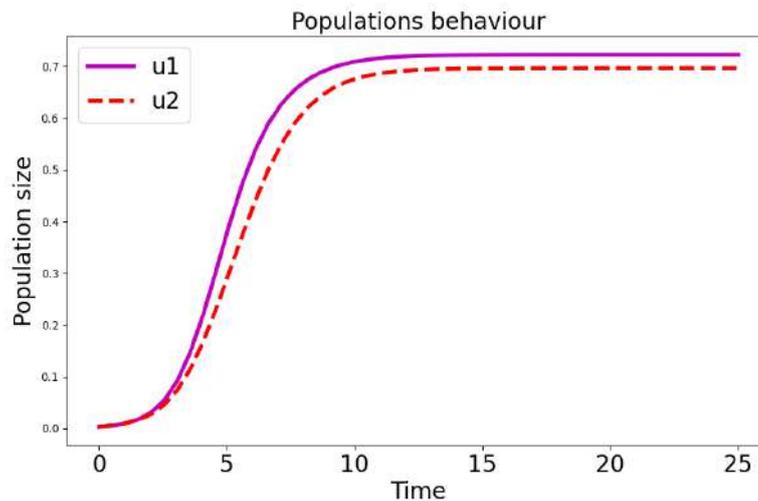


Рис. 38. Зависимость функций u_1 и u_2 от времени

При одновременном выполнении неравенств $\gamma_1 e^{-\alpha_1} < 1, \gamma_2 e^{-\alpha_2} < 1, \alpha_1 < 1, \alpha_2 < 1$ свободный член этого полинома положителен, его корни будут иметь отрицательные вещественные части и, соответственно, нетривиальная стационарная точка будет устойчивой. На рисунке 38 представлено поведение модели (17) с течением времени.

Примером пассивного ухода является изменение внутреннего метаболизма в ходе эволюции. В работе Бигона [57] встречается эксперимент с популяциями

Lebistes reticulatus, который подтверждает данное предположение. Часть представителей данного вида подверглись окрашиванию в ходе проведения эксперимента. Позднее было обнаружено, что *Lebistes reticulatus* с необычной окраской почти не подвергались нападению со стороны хищников.

Для n популяций модель пассивного ухода от конкуренции (17) будет иметь вид (19):

$$\frac{du_i}{d\tau} = \mu_i u_i \left(1 - u_i - \varepsilon \sum_{j=1, j \neq i}^n \gamma_j e^{-\alpha_i u_i u_j} \right) \quad (19)$$

где ε – фактор среды.

Сценарий №1. Конкуренция n популяций в условиях низкого фактора среды. Далее, чтобы установить границы индексов, осуществляем генерацию констант и начальных данных для n популяций следующим образом:

$$\mu_i = rand_{0.03, 0.1}, \gamma_i = rand_1, \alpha_i = rand_1, \varepsilon = 0.003,$$

где $rand_1$ соответствует случайному рациональному числу в интервале $[0, 1]$, $rand_{0.03, 0.1}$ соответствует случайному рациональному числу в интервале $[0.03, 0.1]$. Строится плотность распределения индекса концентрации CR_3 и уровня выживаемости популяций. Вероятностный индекс концентрации для 500 экспериментов соответствует $CR_3 = 0.07$, что говорит о низкой концентрированности конкурентной среды. Уровень выживаемости соответствует 50 популяциям, то есть в рамках модели пассивного ухода с низким фактором среды выживают все популяции.

Сценарий №2. Конкуренция n популяций в условиях варьирования интенсивности фактора среды. Число популяций $n = 50$, число экспериментов $N = 100$. Генерация коэффициентов осуществляется аналогичным образом, кроме ε :

$$\varepsilon \in [0.01, 150].$$

В данном сценарии рассматривается зависимость индекса концентрации и уровня выживаемости популяций от интенсивности фактора среды. На рисунке 39

(А) изображена зависимость коэффициента концентрации от интенсивности фактора среды. Можно полагать, что в модели порог интенсивности конкуренции достаточно высокий для низкой концентрированной среды. Данная модель подходит для описания слабо конкурирующих сообществ или сообществ, которые стремятся найти экологическую нишу.

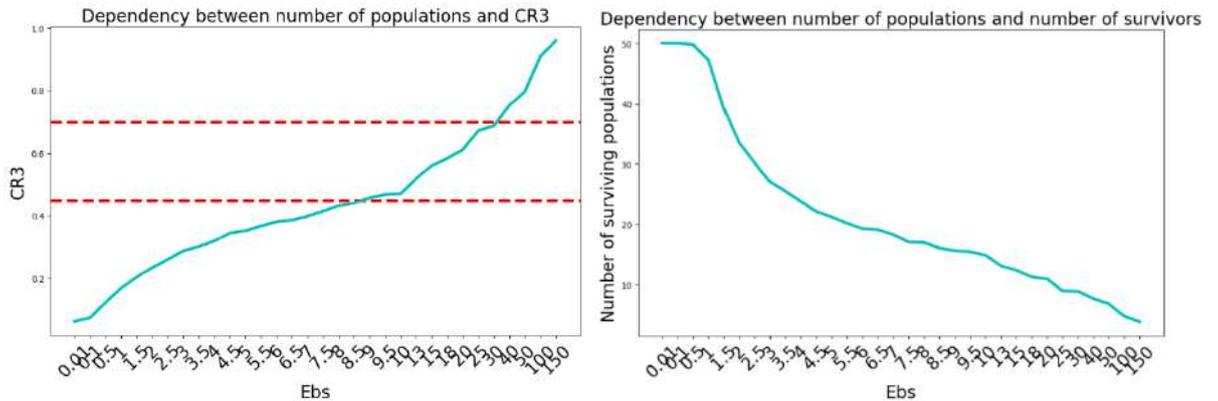


Рис. 39. А – Зависимость коэффициента концентрации от фактора среды
Б – Зависимость количества выживших популяций от фактора среды

На рисунке 39 (Б) изображена зависимость количества выживших популяций от интенсивности конкуренции. Интенсивность конкуренции $\varepsilon = 0.5$ является пороговым значением для низкой интенсивности. При $\varepsilon > 0.5$ наблюдается убывание уровня выживаемости – уровень выживаемости уменьшается с 50 до 5, или с 100% до 2%. Чем выше интенсивность конкуренции, тем ниже выживаемость популяций.

Зависимость фактора среды и уровня выживаемости от концентрированности среды представлены в таблице 19.

Таблица 19. Пороговые значения фактора среды и уровня выживаемости

Концентрированность среды	Пороговые значения фактора среды	Пороговые значения уровня выживаемости
Низкая	$\varepsilon < 9$	<i>alive</i> > 18
Умеренная	$9 < \varepsilon < 25$	<i>alive</i> \in [10, 18]
Высокая	$\varepsilon > 25$	<i>alive</i> < 10

На рисунке 40 изображена зависимость численности популяций от фактора среды. Численность популяций убывает при увеличении интенсивности фактора среды, однако популяция остается многочисленной.

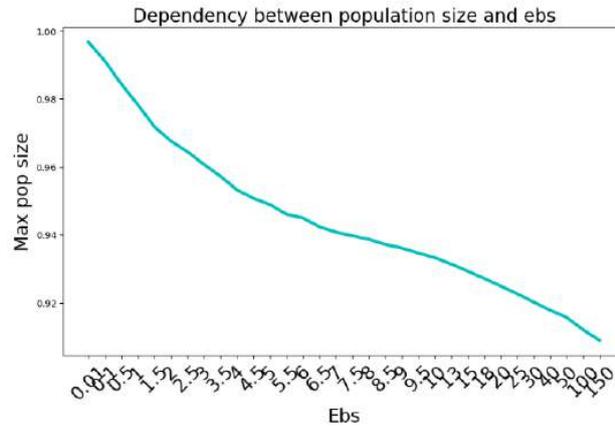


Рис. 40. Зависимость численности популяций от фактора среды

Сценарий №3. Динамическое имитационное моделирование. Число популяций $n = 50$, число экспериментов $N = 500$. На первом шаге рассматривается 2 популяции, на втором шаге 3 популяции и так далее до 50 популяций. На каждом шаге проводится 500 экспериментов и выбирается среднее значение. В данном сценарии взаимодействия в каждом эксперименте находится решение системы (19) для k популяций с аналогичной генерацией коэффициентов.

$$\mu_i = rand_{0.03,0.1}, \gamma_i = rand_{0.1}, \alpha_i = rand_{0.1}, \varepsilon = 0.003, i = 1 \dots k$$

В данном сценарии рассматривается зависимость индекса концентрации от общего числа популяций, а также зависимость выживаемости видов от общего числа популяций аналогичным образом относительно предыдущего сценария. На рисунке 41 (А) изображена зависимость коэффициента концентрации от общего числа популяций. То есть чтобы обеспечить конкурентные условия среды, необходимое количество участников конкуренции должно быть не менее 14 субъектов в рамках модели. На рисунке 41 (Б) изображена зависимость количества выживших популяций от количества популяций. Наблюдается линейная зависимость.

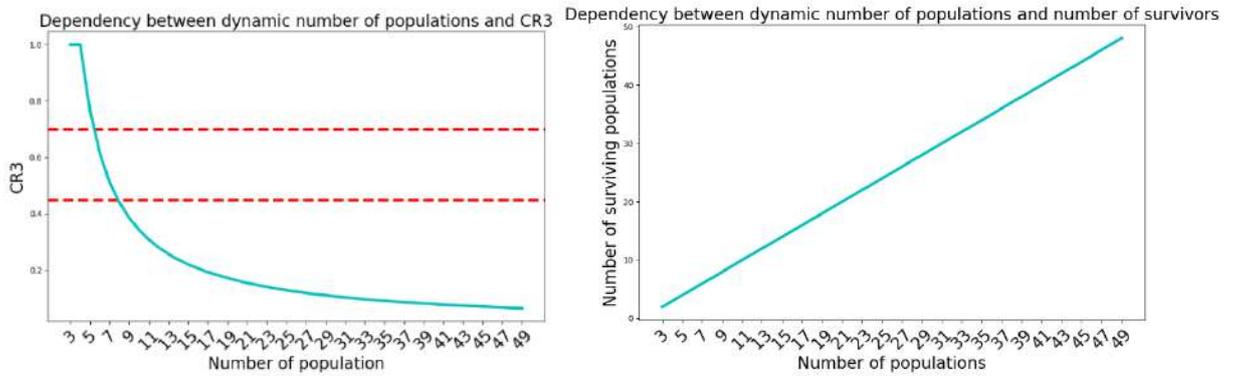


Рис. 41. А – Зависимость коэффициента концентрации от общего числа популяций
 Б – Зависимость уровня выживаемости от общего числа популяций

Пороговые значения количества субъектов для определения концентрированности среды приведены в таблице 20.

Таблица 20. Пороговые значения количества субъектов

Концентрированность среды	Пороговые значения количества субъектов
Низкая	$k > 8$
Умеренная	$k \in [5, 8]$
Высокая	$k < 5$

3.1.8. Математическая модель сезонности конкуренции

Для биологических и экологических систем характерны различные колебания. Эти колебания могут зависеть от природных условий, биологических ритмов, геофизических ритмов, периодичности рождения потомства, физических возможностей особей и других причин. То есть интенсивность конкурентных взаимоотношений может зависеть от времени. Примерами подобных систем являются колебания в сердечной мышце или колебания концентрации кальция в клетках. Для экономических систем также характерны сезонные закупки.

Колебания численности в биологических популяциях можно учесть в модели (20), введя функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, зависящие от времени:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_1(1 - u_1 - \gamma_1\varphi_1(t)u_2) \\ \frac{du_2}{dt} = \gamma u_2(1 - u_2 - \gamma_2\varphi_2(t)u_1) \\ \varphi_1(t) = \frac{1}{1 + |a_1|} (1 - \alpha_1 \cos\omega_1 t) \\ \varphi_2(t) = \frac{1}{1 + |a_2|} (1 - \alpha_2 \cos\omega_2 t) \end{cases} \quad (20)$$

где $|a_1| \leq 1$ и $|a_2| \leq 1$. В качестве начальных условий рассматриваются $u_1(0) = 1$ и $u_2(0) = 1$. Это соответствует случаю, когда конкурентные взаимоотношения начинаются в начальный момент времени при максимальных значениях u_1 и u_2 . При принятых значениях $\gamma_1 = 1.1$ и $\gamma_2 = 1.3$ в случае $\omega_1 = 0$ и $\omega_2 = 0$, как это следует из анализа уравнений (20), одновременное существование двух популяций невозможно. На рисунке 42 изображено изменение численности двух популяций с течением времени.

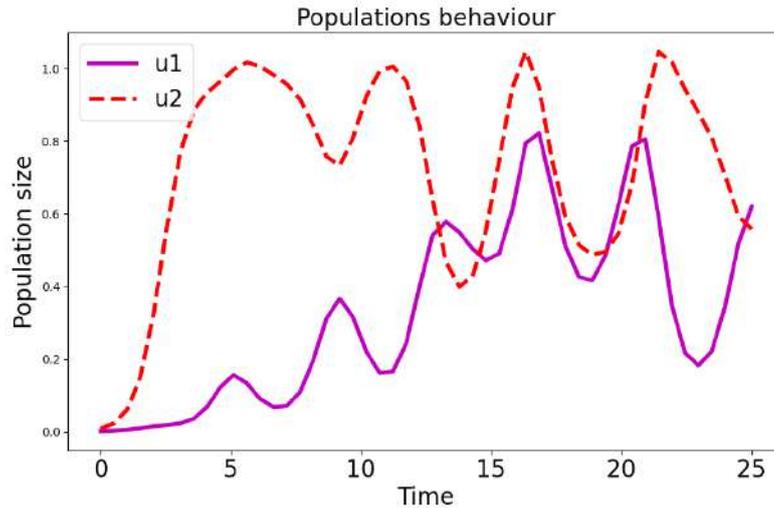


Рис. 42. Зависимость функций u_1 и u_2 от времени

В экономике сезонность конкуренции может зависеть от таких причин как влияние психологических или эмоциональных факторов, влияние популярности на спрос тех или иных товаров, погодные явления [107-108]. Также существует множество примеров и в биологической системе. Например, в Сибири совместно живут буроzubки, лемминги и мыши. Размножение бурозубок Сибири (около 10 видов) начинается в конце апреля – начале мая, а заканчивается в конце августа. Лемминг начинает размножаться еще в апреле, а заканчивает в конце июня. Полевая мышь - в середине апреля, а заканчивает в сентябре. В октябре и ноябре наблюдается периодическая вспышка развития диатомовых водорослей [109-111].

Размножение всех мелких млекопитающих начинается при их малой численности. Трофический ресурс (семена, листья растений, насекомые) для всех одинаковый, но его созревание также зависит от времени. Поэтому конкуренция за трофический ресурс в течение сезона сдвинута во временных интервалах. В результате наблюдается межвидовая асинхронность изменения численности популяций – максимумы и минимумы сезонной численности у всех видов также сдвинуты во времени [112].

В природе численность популяций испытывает колебания. В связи с размерами ареала популяций может значительно изменяться и численность особей в популяциях. Так, у насекомых и мелких растений открытых пространств численность особей в отдельных популяциях может достигать сотен тысяч и

миллионов особей. Напротив, популяции животных и растений могут быть сравнительно небольшие по численности.

Различают периодические и непериодические колебания численности популяций. Первые совершаются в течение сезона или нескольких лет, вторые – это вспышки массового размножения некоторых вредителей полезных растений при нарушениях условий среды обитания (засухи, необычно холодные или теплые зимы, слишком дождливые сезоны вегетации), непредвиденные миграции в новые местообитания. Периодические и непериодические колебания численности популяций под влиянием биотических и абиотических факторов среды, свойственные всем популяциям, именуется популяционными волнами.

Для некоторых экологических сообществ справедливо правило колебаний (цикличности) численности: никакая популяция не находится в состоянии абсолютного баланса числа особей. Зачастую помимо сезонных изменений численности особей возникают периодические флуктуации, обусловленные внешними по отношению к популяции факторами, и осцилляции, связанные с внутренними динамическими изменениями популяции. Помимо этого, существует обобщающее правило максимума размера колебаний плотности популяционного населения. Ю. Одум формулирует это правило следующим образом: «Существуют определенные верхние и нижние пределы для размеров популяции, которые соблюдаются в природе или которые теоретически могли бы существовать в течение сколь угодно длительного отрезка времени» [113].

В экономических сообществах также присутствует цикличность. Под экономической цикличностью понимаются периоды роста, за которыми следует спад экономической активности. Изменения в экономической активности имеют последствия для благосостояния широких слоев населения, а также для частных учреждений. Зачастую экономические циклы отслеживаются изменением экономических показателей, например ВВП [114]. Цикличность экономических процессов может также проявляться в волнах Кондратьева, которые представляют собой гипотетические циклоподобные события в современной мировой экономике. Это явление тесно связано с жизненным циклом технологии. Считается, что период

волны колеблется от 40 до 60 лет, циклы состоят из чередующихся интервалов высокого отраслевого роста и интервалов относительно медленного роста [115-116].

Для n популяций модель сезонности конкуренции (20) будет иметь вид (21):

$$\begin{cases} \frac{du_i}{dt} = u_i(1 - u_i - \varepsilon \sum_{j=1, j \neq i}^n \gamma_j \varphi_j(t)u_j) \\ \varphi_i(t) = \frac{1}{1 + a_i} (1 - \alpha_i \cos \omega_i t) \end{cases} \quad (21)$$

где ε – фактор среды.

Сценарий №1. Конкуренция n популяций в условиях низкого фактора среды. Далее, чтобы установить границы индексов, осуществляем генерацию констант и начальных данных для n популяций следующим образом:

$$\mu_i = rand_{0.03,0.1}, \gamma_i = rand_{0.1}, \alpha_i = rand_{0.1}, \omega_i = rand_{0.1}, \varepsilon = 0.003,$$

где $rand_1$ соответствует случайному рациональному числу в интервале $[0, 1]$, $rand_{0.03,0.1}$ соответствует случайному рациональному числу в интервале $[0.03, 0.1]$. Строится плотность распределения индекса концентрации CR_3 и уровня выживаемости популяций. Вероятностный индекс концентрации для 500 экспериментов соответствует $CR_3 = 0.07$, что говорит о низкой концентрированности конкурентной среды. Уровень выживаемости соответствует 50 популяциям, то есть в рамках модели сезонной конкуренции с низкой интенсивностью фактора среды выживают все популяции.

Сценарий №2. Конкуренция n популяций в условиях варьирования интенсивности фактора среды. Число популяций $n = 50$, число экспериментов $N = 500$. Генерация коэффициентов осуществляется аналогичным образом, кроме ε :

$$\varepsilon \in [0.01, 150].$$

В данном сценарии рассматривается зависимость индекса концентрации и зависимость уровня выживаемости популяций от фактора среды. На рисунке 42 (А) изображена зависимость коэффициента концентрации от фактора среды. В модели

порог фактора среды достаточно высокий для низкой концентрированной среды. Данная модель подходит для описания слабо конкурирующих сообществ или сообществ с одновременным сосуществованием видов. Это говорит о стабильной конкурентной среде.

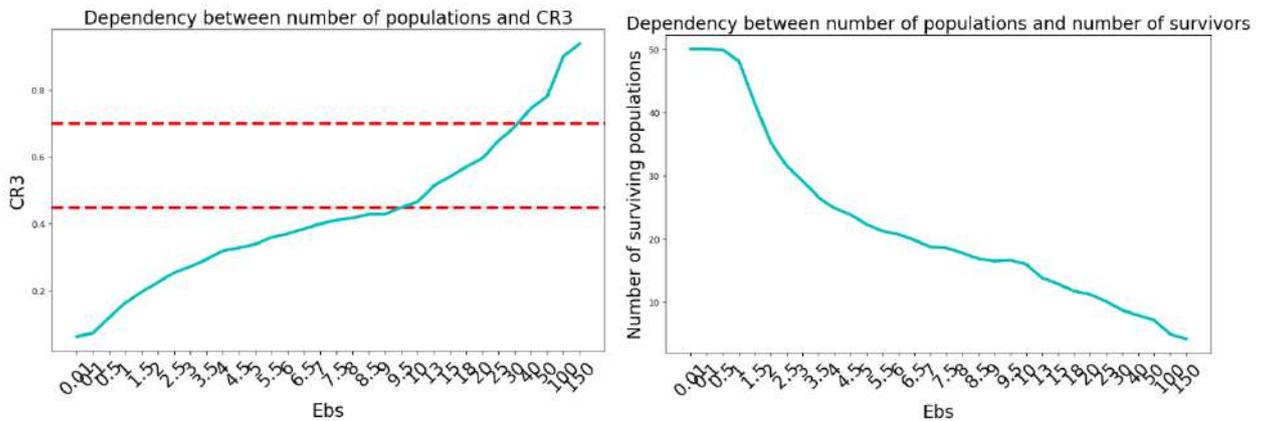


Рис. 42. А – Зависимость коэффициента концентрации от фактора среды
Б – Зависимость количества выживших популяций от фактора среды

На рисунке 42 (Б) изображена зависимость количества выживших популяций от фактора среды. Фактор среды $\varepsilon = 1$ является пороговым значением для низкой интенсивности. При $\varepsilon > 1$ наблюдается убывание уровня выживаемости – уровень выживаемости уменьшается с 50 до 5, или с 100% до 2%. Чем выше интенсивность конкуренции, тем ниже выживаемость популяций. Зависимость фактора среды и уровня выживаемости от концентрированности среды представлены в таблице 21.

Таблица 21. Пороговые значения фактора среды и уровня выживаемости

Концентрированность среды	Пороговые значения фактора среды	Пороговые значения уровня выживаемости
Низкая	$\varepsilon < 9.5$	$alive > 15$
Умеренная	$9.5 < \varepsilon < 30$	$alive \in [10,15]$
Высокая	$\varepsilon > 30$	$alive < 10$

На рисунке 43 изображена зависимость численности популяций от фактора среды. Численность популяций убывает при увеличении интенсивности конкуренции, однако численность популяции не меняется и популяция остается многочисленной.

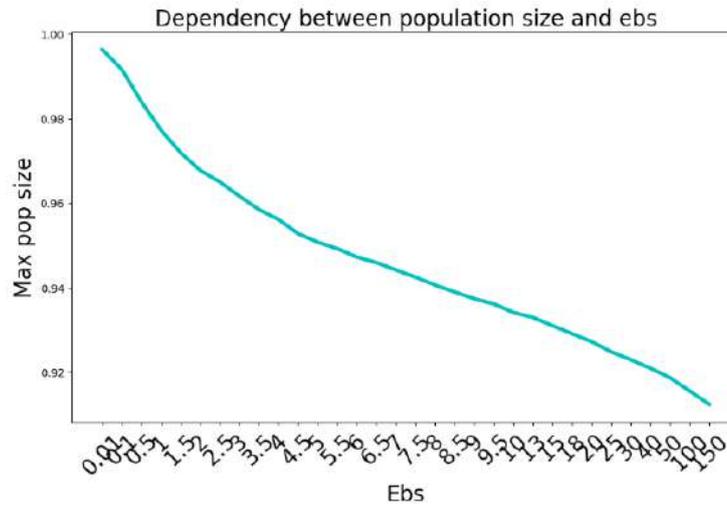


Рис. 43. Зависимость численности популяций от фактора среды

Сценарий №3. Динамическое имитационное моделирование. Число популяций $n = 50$, число экспериментов $N = 500$. На первом шаге рассматривается 2 популяции, на втором шаге 3 популяции и так далее до 50 популяций. На каждом шаге проводится 500 экспериментов и выбирается среднее значение. В данном сценарии взаимодействия в каждом эксперименте находится решение системы (21) для k популяций с аналогичной генерацией коэффициентов.

$$\mu_i = rand_{0.03,0.1}, \gamma_i = rand_{0.1}, \alpha_i = rand_{0.1},$$

$$\omega_i = rand_{0.1}, \varepsilon = 0.003, i = 1, \dots, k$$

В данном сценарии рассматривается зависимость индекса концентрации от общего числа популяций, а также зависимость выживаемости видов от общего числа популяций. На рисунке 44 (А) изображена зависимость коэффициента концентрации от общего числа популяций. Чтобы обеспечить стабильные конкурентные условия среды, необходимое количество участников конкуренции должно быть не менее 14 в рамках модели. На рисунке 44 (Б) изображена зависимость количества выживших популяций от количества популяций. Наблюдается линейная зависимость.

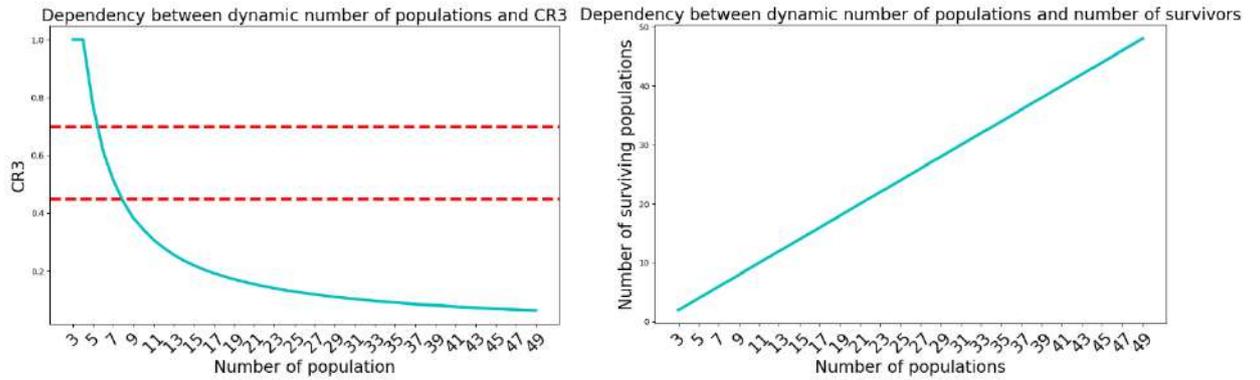


Рис. 44. А – Зависимость коэффициента концентрации от общего числа популяций
 Б – Зависимость уровня выживаемости от общего числа популяций

Пороговые значения количества субъектов для определения концентрированности среды приведены в таблице 22.

Таблица 22. Пороговые значения количества субъектов

Концентрированность среды	Пороговые значения количества субъектов
Низкая	$k > 8$
Умеренная	$k \in [5, 8]$
Высокая	$k < 5$

3.1.9. Двухкамерная модель динамики численности одиночной популяции

В экосистеме чаще всего наблюдается перемещение популяции в рамках ее среды обитания. Пусть две группы особей одной и той же популяции существуют на двух соседних ареалах с разными биофизическими свойствами (рождаемость, смертность, внутривидовая конкуренция). При этом происходит переход особей из одного ареала в другой. Модель взаимодействия двух таких групп одной и той же популяции описывается системой уравнений (22). Эта модель подходит для описания подвижных и часто перемещающихся популяций.

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = F_1(N_1) - v_1 N_1 + v_2 N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} = F_2(N_2) + v_1 N_1 - v_2 N_2 \end{cases} \quad (22)$$

где v_1 – доля особей, переходящих из первого ареала во второй, а v_2 – из второго в первый. На v_1 и v_2 накладывается ограничение: $v_1 < 1$ и $v_2 < 1$.

Система уравнений (22) заменой переменных $u_1 = \frac{N_1}{K_1}$, $u_2 = \frac{N_2}{K_2}$ сводится к системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = f_1(u_1) - v_1 u_1 + a v_2 u_2 \\ \frac{du_2}{dt} = f_2(u_2) + \frac{1}{a} v_1 u_1 - v_2 u_2 \end{cases} \quad (23)$$

где $a = \frac{K_2}{K_1}$, а функции $f_1(u) = \frac{1}{K_1} F_1(N_1)$, $f_2(u) = \frac{1}{K_2} F_2(N_2)$, удовлетворяют следующим условиям: $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = 0$, $f_1(1) = 0$, $f_2(1) = 0$.

Особыми точками системы уравнений (23) будут $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ и решения системы алгебраических уравнений (24):

$$\begin{cases} f_1(u_1) - v_1 u_1 + a v_2 u_2 = 0 \\ f_2(u_2) + \frac{1}{a} v_1 u_1 - v_2 u_2 = 0 \end{cases} \quad (24)$$

Из уравнений (24) следует, что в стационарных точках выполняется равенство

$$f_1(u_1) + a f_2(u_2) = 0 \quad (25)$$

Равенство (25), поскольку $f_1(u) < 0$ и $f_2(u) < 0$ при $u > 1$, может выполняться только в том случае, если численность одной популяции будет больше единицы, а второй – меньше единицы. Если $v_1 = v_2$ и емкости сред одинаковы, то системе уравнений (23) удовлетворяет решение $u_1 = u_2 = 1$ независимо от вида функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

В отсутствие переходов обе группы популяции существуют независимо друг от друга. Устойчивой стационарной точкой в этом случае является $u_1 = u_2 = 1$. При возникновении миграции со временем произойдет переход в новое положение равновесия, определяемое как решение системы уравнений (24). При малых значениях v_1 и v_2 из разложения в ряд левых частей уравнения (24) в первом приближении с точностью до величин второго порядка малости можно принять, что:

$$u_1 = 1 - \frac{1}{\mu_1}(v_1 - av_2), u_2 = 1 + \frac{1}{a\mu_2}(v_1 - av_2)$$

$$\text{где } \mu_1 = -f_1'(1), \mu_2 = -f_2'(1)$$

Отсюда следует, что при $v_1 = v_2$ должна увеличиться численность того ареала, емкость которого меньше. При одинаковых емкостях сред ($a = 1$) численность ареала, доля переходящих особей из которого больше, уменьшится.

Собственные значения матрицы Якоби правой части системы уравнений (23) являются корнями характеристического полинома:

$$\lambda^2 - (f_1' - v_1 + f_2' - v_2)\lambda + f_1'f_2' - f_1'v_2 - f_2'v_1 = 0,$$

где производные вычисляются в стационарных точках:

$$f_1' = \frac{\partial f_1(u_1)}{\partial u_1}, f_2' = \frac{\partial f_2(u_2)}{\partial u_2}$$

Стационарные точки, являющиеся решением системы уравнений (23), будут устойчивыми, если выполняются неравенства:

$$f_1' - v_1 + f_2' - v_2 < 0, \quad 0 < f_1'f_2' - f_1'v_2 - f_2'v_1$$

Эти неравенства выполняются, если в стационарных точках $f_1' < 0$, $f_2' < 0$.

В первой стационарной точке характеристический полином будет иметь оба корня с отрицательными вещественными частями, если одновременно выполняются неравенства:

$$\mu_1 \left(\frac{v_1}{\mu_1} - 1 \right) + \mu_2 \left(\frac{v_2}{\mu_2} - 1 \right) > 0, \quad \frac{v_1}{\mu_1} + \frac{v_2}{\mu_2} < 1$$

При выполнении второго неравенства, а оно удовлетворяется только в том случае, если одновременно $\frac{v_1}{\mu_1} < 1, \frac{v_2}{\mu_2} < 1$ первое выполняться не может. Поэтому хотя бы один корень характеристического полинома будет иметь положительную вещественную часть и, соответственно, тривиальное решение неустойчиво. Для случая, когда $f_1(x) = f_2(x), v_1 = v_2, a = 1$, устойчивой стационарной точкой является $u_1 = 1, u_2 = 1$.

Двухкамерная модель одиночной популяции с учетом ограниченного трофического ресурса может быть представлена системой уравнений (26):

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = \mu_1 u_1 \left(\frac{S_1}{b_1 + S_1} - \frac{u_1}{K_1} \right) - v_1 u_1 + v_2 u_2 \\ \frac{du_2}{dt} = \mu_2 u_2 \left(\frac{S_2}{b_2 + S_2} - \frac{u_2}{K_2} \right) + v_1 u_1 - v_2 u_2 \\ \frac{dS_2}{dt} = \mu_{s1} S_1 \left(1 - \frac{S_1}{S_{10}} \right) - \alpha_1 \frac{S_1}{b_1 + S_1} u_1 \\ \frac{dS_1}{dt} = \mu_{s2} S_2 \left(1 - \frac{S_2}{S_{20}} \right) - \alpha_2 \frac{S_2}{b_2 + S_2} u_2 \end{cases} \quad (26)$$

В этой модели предполагается, что особи популяции могут перемещаться из одной камеры в другую, трофический ресурс в каждой камере неподвижен, восполняется с локальными удельными скоростями μ_{s1} и μ_{s2} , а емкость сред трофических ресурсов S_{10} и S_{20} , K_1 и K_2 – емкости сред для первой и второй популяций, а μ_1 и μ_2 их локальные удельные скорости роста. Параметры $b_1, b_2, \alpha_1, \alpha_2$, характеризующие скорости потребления трофического ресурса популяциями и скорости его изъятия. На рисунке 45 для случая $\mu_1 = 2, \mu_2 = 2, b_1 = 1, b_2 = 1, \gamma_1 = 1.4, \gamma_2 = 1.6, \mu_s = 1, K = 10, u_0^1 = 0.001, u_0^2 = 0.002, S_0 = 1$ отражено изменение функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ во времени.

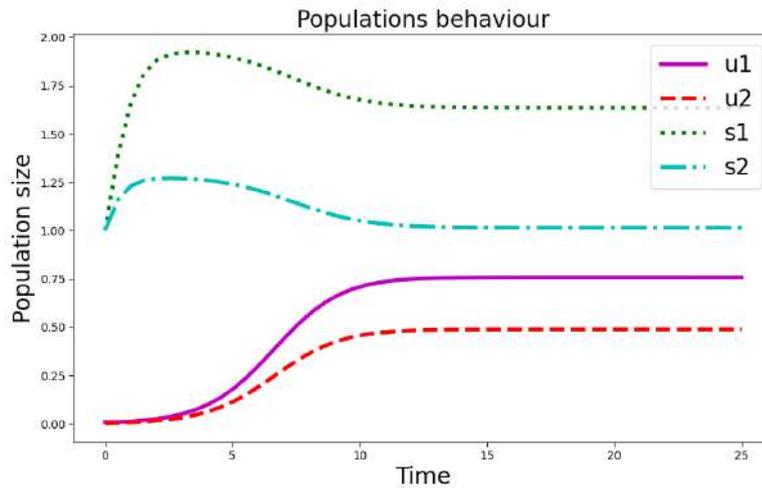


Рис. 45. Изменение численности двух популяций

Степень обособленности соседних популяций вида очень различна. В некоторых случаях они резко разделены территорией, непригодной для обитания, и четко локализованы в пространстве, или наоборот, наблюдается плотное заселение видом обширных территорий. Границы между популяциями в таких случаях почти не выражены. Поскольку совместно обитающие особи контактируют между собой чаще, чем с представителями других частей ареала, население удаленных друг от друга мест можно считать разными популяциями. В пределах одного и того же вида могут быть популяции как с хорошо различимыми, так и с нечеткими границами.

Двухкамерная модель одиночной популяции с учетом ограниченного трофического ресурса может быть расширена на n камер формулой (27):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_l}{dt} = \mu_l u_l \left(\frac{S_l}{b_l + S_l} - \frac{u_l}{K_l} \right) - v_l u_l + v_k u_k \\ \frac{du_k}{dt} = \mu_k u_k \left(\frac{S_k}{b_k + S_k} - \frac{u_k}{K_k} \right) + v_l u_l - v_k u_k \\ \frac{dS_k}{dt} = \mu_{sl} S_l \left(1 - \frac{S_l}{S_{l0}} \right) - \alpha_l \frac{S_l}{b_l + S_l} u_l \\ \frac{dS_l}{dt} = \mu_{sk} S_k \left(1 - \frac{S_k}{S_{k0}} \right) - \alpha_k \frac{S_k}{b_k + S_k} u_k \end{array} \right. \quad (27)$$

Рассматривается n камер, где n четное. Генерируются случайные непересекающиеся пары взаимодействующих камер. Аналогичное поведение

перемещения по камерам и нахождения своей ниши будет наблюдаться в рамках модели для m популяций.

Сценарий №1. Конкуренция в n камерах в условиях низкого фактора среды.

Далее, чтобы установить границы индексов, осуществляем генерацию констант и начальных данных для n популяций следующим образом:

$$\mu_i = rand_{0.03,0.1}, K_i = rand_1, \alpha_i = rand_1, u_{i0} = rand_{0.01},$$

$$b_i = rand_1, v_i = rand_{0.1}, \mu_s = \mu_i = rand_{0.03,0.1}, S_{i0} = rand_1,$$

где $rand_1$ соответствует случайному рациональному числу в интервале $[0, 1]$, $rand_{0.03,0.1}$ соответствует случайному рациональному числу в интервале $[0.03, 0.1]$.

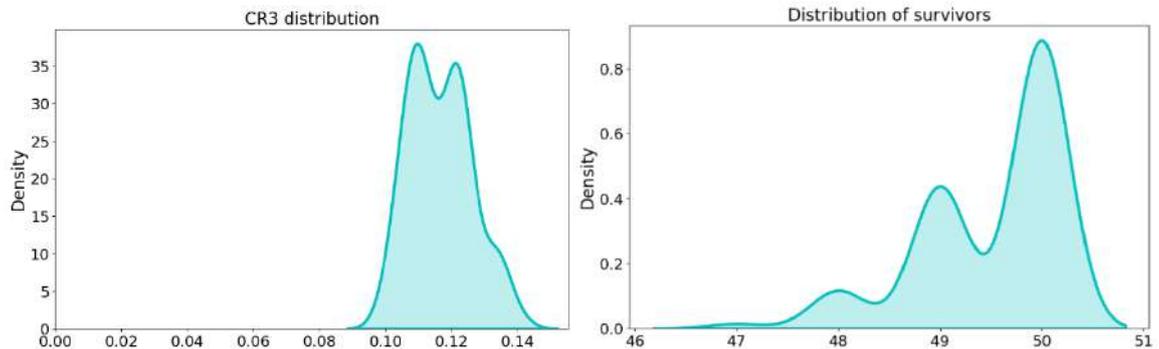


Рис. 46 А – Плотность распределения индекса концентрации
Б – Плотность распределения выживших популяций

Строится плотность распределения индекса концентрации CR_3 и уровня выживаемости групп популяций. На рисунке 46 (А) изображена плотность распределения коэффициента концентрации CR_3 для 500 экспериментов. Вероятностный индекс концентрации для 500 экспериментов соответствует $CR_3 = 0.13$, что говорит о низкой концентрированности конкурентной среды. На рисунке 46 (Б) изображена плотность распределения уровня выживаемости групп популяции для 500 экспериментов. Средний уровень выживаемости соответствует $alive = 50$. То есть наиболее вероятно, что вся популяция выживет в данном сценарии. Это можно интерпретировать также как то, что все особи одиночной популяции распределяются по камерам равномерно, то есть все особи находят свою экологическую нишу. Горбистость кривых может быть связана со элементом случайных перемещений по камерам.

Сценарий №3. Динамическое имитационное моделирование. Число популяций $n = 50$, число экспериментов $N = 500$. На первом шаге рассматривается 2 группы популяции, на втором шаге 3 группы популяции и так далее до 50 групп популяций. На каждом шаге проводится 500 экспериментов и выбирается среднее значение. В данном сценарии взаимодействия в каждом эксперименте находится решение системы (27) для k групп популяций с аналогичной генерацией коэффициентов.

$$\begin{aligned}\mu_i &= rand_{0.03,0.1}, K_i = rand_{0.1}, \alpha_i = rand_{0.1}, \\ u_{i0} &= rand_{0.01}, b_i = rand_{0.1}, v_i = rand_{0.1} \\ \mu_i &= rand_{0.03,0.1}, S_{i0} = rand_{0.1}, i = 1 \dots k\end{aligned}$$

В данном сценарии рассматривается зависимость индекса концентрации от общего числа групп популяций, а также зависимость выживаемости видов от общего числа групп популяций. На рисунке 47 (А) изображена зависимость коэффициента концентрации от общего числа групп популяций. Чтобы обеспечить стабильные конкурентные условия среды, необходимое количество участников конкуренции должно быть не менее 13 в рамках модели. На рисунке 47 (Б) изображена зависимость количества групп выживших популяций от общего количества групп популяций. Имея 50 камер, выживают все подгруппы популяции.

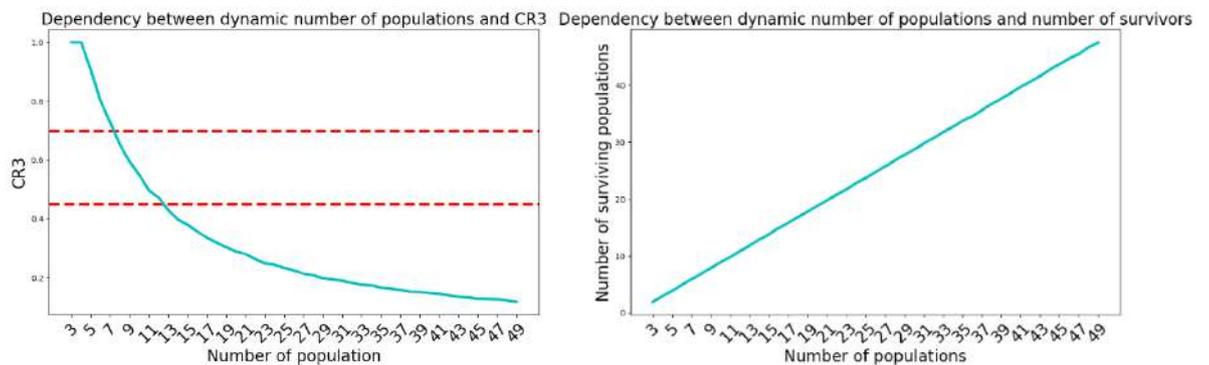


Рис. 47. А – Зависимость коэффициента концентрации от общего числа популяций
Б – Зависимость уровня выживаемости от общего числа популяций

Пороговые значения количества субъектов для определения концентрированности среды приведены в таблице 23.

Таблица 23. Пороговые значения количества субъектов

Концентрированность среды	Пороговые значения количества субъектов
Низкая	$k > 13$
Умеренная	$k \in [8, 13]$
Высокая	$k < 8$

§ 2. Пространственные математические модели конкуренции

3.2.1. Математическая модель гетерогенного ареала

Все биологические системы являются активными распределенными системами. Биологическим и экономическим сообществам не свойственна однородность. Так, например, в биоценозах в зависимости от климатических условий на различных территориях растут разные виды деревьев, а их плотность зависит от градиента температуры. В экономической сфере это проявляется в различных традициях, разнообразных ресурсах и территориальных промышленных центрах разной мощности.

Все виды живут на территориях, в пространственно-ограниченных ареалах со своими климатическими условиями и трофическими ресурсами. Для пространственно-неоднородных ареалов необходимо учитывать и неоднородность пространственного распределения особей по территории [117]. При построении математических моделей таких ареалов используется аппарат дифференциальных уравнений в частных производных. Основная гипотеза в этих моделях предполагает, что особи на территории перемещаются случайным образом.

Природные ресурсы также распределены на территории случайно. Аналогичным образом происходило расселение человека на территории Земли и соответственно создание промышленности. В математических моделях в первом приближении будем считать, что сегодняшнее распределение ресурсов на территории происходит случайным образом. В качестве территории, на которой происходит конкуренция, рассмотрим линейный ареал.

В пространственно-временных биологических системах возможно распространение импульсов и волн возбуждения, образование стационарных пространственно-неоднородных распределений веществ и другие явления самоорганизации, которые получили название автоволновых процессов [118].

Рассмотрим задачу о распространении вида на территории, богатой пищевым ресурсом. В любой точке прямой размножение вида описывается уравнением $f(x) = x(1 - x)$. Слева от нуля территория занята видом, справа – пустая территория. В начальный момент времени вид начинает распространяться в правую сторону. Данная модель будет иметь вид:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(x) + \frac{D \partial^2 x}{\partial r^2}$$

В этих уравнениях r – координата, x – линейная плотность популяции, t – время, D – параметр, характеризующий подвижность особей, $f(x)$ – трофическая функция, характеризующая поведение популяции.

Для $t > 0$ в данном случае будет распространяться волна. Эта волна является результатом:

- Случайного перемещения особей популяции.
- Размножения, которое описывает функция $f(x)$.

Фронт волны перемещается вправо и достигает определенного предельного значения. Скорость волны можно найти по формуле:

$$\lambda = 2\sqrt{D}f'(0)$$

Для системы хищник-жертва в неограниченном пространстве будут распространяться волны «бегства и погони». Для ограниченного пространства будут иметь места автоволны (стационарные пространственно-неоднородные структуры) [119]. В линейных системах диффузия приводит к выравниванию концентрации популяции на территории. Если наблюдается нелинейное взаимодействие между видами, тогда будут иметь место неустойчивость стационарного состояния. Как следствие, образуются вышеупомянутые автоволны. Условием возникновения диссипативных структур является различие коэффициентов диффузии.

Взаимодействующие популяции на отрезке. В качестве примеров линейных ареалов могут служить каналы, дороги, береговые линии озер и рек [120-121].

Математическая модель двух взаимодействующих на отрезке популяций представляется системой эволюционных уравнений (28):

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + f_1(u_1, u_2) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + f_2(u_1, u_2) \end{cases} \quad (28)$$

В этих уравнениях x – координата, t – время, $u_1 = u_1(t, x)$, $u_2 = u_2(t, x)$ – линейные плотности популяций, D_1, D_2 – параметры, характеризующие подвижности особей, $f_1(u_1, u_2)$, $f_2(u_1, u_2)$ – трофические функции, характеризующие взаимодействие между популяциями.

К системе уравнений (28) для случая отрезка длины l необходимо добавить начальные и граничные условия. В качестве начальных условий задается значение функций $u_1 = u_1(t, x)$, $u_2 = u_2(t, x)$ в начальный момент времени: при $t = 0 \rightarrow u_1(x) = u_{10}(x)$, $u_2(x) = u_{20}(x)$.

В качестве граничных условий рассматриваются два варианта:

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_2}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u_2}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad (29)$$

и

$$u_1|_{x=0} = \left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad u_2|_{x=0} = \left. \frac{\partial u_2}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad (30)$$

Условие обращения в ноль функций u_1 и u_2 на границе отрезка соответствует невозможности существования популяции в этой точке, а условие обращения в ноль производных $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ и $\frac{\partial u_2}{\partial x}$ (условие наполнения среды [122]) допускает свободный рост численности популяций.

Общая численность первой и второй популяций ($M_1(t)$ и $M_2(t)$) на отрезке в момент времени t подсчитываются по формулам:

$$M_1 = \int_0^l u_1(t, x) dx, \quad M_2 = \int_0^l u_2(t, x) dx.$$

Для двух конкурирующих популяций функции $f_1(u_1, u_2)$ и $f_2(u_1, u_2)$ должны удовлетворять следующим условиям при $u_1 = 0$ и $u_2 = 0$:

$$f_1(u_1, u_2) = 0, f_2(u_1, u_2) = 0, \frac{\partial f_1}{\partial u_1} > 0, \frac{\partial f_2}{\partial u_2} > 0$$

В качестве моделей хищник-жертва ниже рассматриваются две модели с трофическими функциями:

$$f_1(u_1, u_2) = u_1 - u_1 u_2, f_2(u_1, u_2) = -\gamma u_2 + u_1 u_2 \quad (31)$$

и

$$f_1(u_1, u_2) = u_1(1 - u_1) - u_1 u_2, f_2(u_1, u_2) = -\gamma u_2 + u_1 u_2 \quad (32)$$

Точечная модель следует из (28) при $D_1 = 0$ и $D_2 = 0$

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = f_1(u_1, u_2) \\ \frac{du_2}{dt} = f_2(u_1, u_2) \end{cases} \quad (33)$$

Стационарные точки этой системы уравнений находятся как решение системы алгебраических уравнений

$$f_1(u_1, u_2) = 0, f_2(u_1, u_2) = 0.$$

Устойчивость решений. Стационарные точки системы уравнений (33) (пусть $u_1 = u_1^*, u_2 = u_2^*$) будут устойчивыми, если собственные значения матрицы Якоби

$$J = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix},$$

$$f_{11} = \frac{\partial f_1(u_1^*, u_2^*)}{\partial u_1}, f_{12} = \frac{\partial f_1(u_1^*, u_2^*)}{\partial u_2}$$

$$f_{21} = \frac{\partial f_2(u_1^*, u_2^*)}{\partial u_1}, f_{22} = \frac{\partial f_2(u_1^*, u_2^*)}{\partial u_2}$$

в стационарных точках будут иметь отрицательные вещественные части. В нулевой стационарной точке оба собственных значения будет положительным и, соответственно, эта стационарная точка будет неустойчивой.

Стационарные решения системы уравнений (28) будут являться и решениями системы уравнений (33) при граничных условиях (29), если в качестве начальных

условий принять $u_{10}(x) = u_1^*$, $u_{20}(x) = u_2^*$. Пусть наряду с этим решением существует близкое к нему решение:

$$u_1(t, x) = u_1^* + \delta u_1(t, x), \quad u_2(t, x) = u_2^* + \delta u_2(t, x)$$

такое, что $\delta u_1(t, x)$ и $\delta u_2(t, x)$ малые по сравнению с u_1^* и u_2^* величины. Тогда с точностью до величин второго порядка малости из системы уравнений (33) следуют уравнения для $\delta u_1(t, x)$ и $\delta u_2(t, x)$ (34):

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta u_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 \delta u_1}{\partial x^2} + f_{11} \delta u_1 + f_{12} \delta u_2, \\ \frac{\partial \delta u_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 \delta u_2}{\partial x^2} + f_{21} \delta u_1 + f_{22} \delta u_2, \end{cases} \quad (34)$$

Решения этих линейных уравнений, удовлетворяющие граничным условиям (29), ищутся в виде тригонометрических рядов:

$$\begin{aligned} \delta u_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \\ \delta u_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t) \cos(k\pi x/l). \end{aligned}$$

Коэффициенты $A_k(t)$ и $B_k(t)$ должны удовлетворять уравнениям ($\mu_k = \frac{k\pi}{l}$, $k = 0, 1, 2, \dots$):

$$\begin{cases} \frac{dA_k}{dt} = -D_1 \mu_k^2 A_k + f_{11} A_k + f_{12} B_k, \\ \frac{dB_k}{dt} = -D_2 \mu_k^2 A_k + f_{21} A_k + f_{22} B_k \end{cases} \quad (35)$$

Решение этих уравнений будет устойчивым, если собственные значения матрицы Якоби:

$$J_k = \begin{pmatrix} -D_1 \mu_k^2 + f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & -D_2 \mu_k^2 + f_{22} \end{pmatrix} \quad (36)$$

правой части этих уравнений будут иметь отрицательную вещественную часть для всех $k = 0, 1, 2, \dots$. Для случая трофических функций (31) стационарная точка системы уравнений (33) $u_1 = \gamma$, $u_2 = 1$ является центром, поскольку собственными

значениями матрицы Якоби будут $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\gamma}$. Для случая системы уравнений (35) матрица Якоби (36):

$$J_k = \begin{pmatrix} -D_1\mu_k^2 & -\gamma \\ 1 & -D_2\mu_k^2 \end{pmatrix}$$

имеет собственные значения с отрицательной вещественной частью для всех $k = 0, 1, 2, \dots$, а для $k = 0$ собственные значения совпадают с собственными значениями матрицы Якоби системы уравнений (33). Поэтому в окрестности этого положения равновесия $A_0(t)$ и $B_0(t)$ будут изменяться по гармоническому закону, а $A_k(t)$ и $B_k(t)$ для $k = 0, 1, 2, \dots$ будут со временем стремиться к нулю. Соответственно, общее решение системы уравнений со временем перестанет зависеть от пространственной координаты.

Для трофических функций (32) стационарной точкой уравнений (33) является $u_1 = \gamma, u_2 = 1 - \gamma$. Собственными значениями матрицы Якоби в этой стационарной точке будет пара комплексно сопряженных корней $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-\gamma \pm i\sqrt{\gamma(4-\gamma)})$, поскольку выполняются неравенства $0 < \gamma < 1$, и, соответственно, стационарная точка является устойчивым фокусом.

Собственные значения матрицы Якоби (36) системы уравнений (35):

$$J_k = \begin{pmatrix} -D_1\mu_k^2 - \gamma & -\gamma \\ 1 & -D_2\mu_k^2 \end{pmatrix}$$

для всех $k = 0, 1, 2, \dots$ будут иметь отрицательные вещественные части. Поэтому при малых отклонениях от положения равновесия решение системы уравнения (34) будет стремиться к гомогенному решению $u_1(t, x) = \gamma, u_2(t, x) = 1 - \gamma$.

Для случая граничных условий (30) стационарной системе уравнений (28) удовлетворяет решение:

$$u_1(x) = 0, u_2(x) = 0.$$

Решение уравнений для возмущений (34), удовлетворяющее граничным условиям (30), в окрестности этого стационарного решения представляется в виде тригонометрического ряда

$$\delta u_1 = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) \sin \mu_k x, \delta u_2 = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t) \mu_k \sin \mu_k x \left(\mu_k = \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right) \pi}{l} \right).$$

Матрица Якоби

$$J_k = \begin{pmatrix} -D_1 \mu_k^2 + |f_{11}| & f_{12} \\ f_{21} & -D_2 \mu_k^2 - |f_{22}| \end{pmatrix} \quad (37)$$

правой части уравнений (35) будет иметь собственные значения

$$\lambda_1 = -D_2 \mu_k^2 - |f_{22}| \text{ и } \lambda_2 = -D_1 \mu_k^2 + |f_{11}|.$$

Первое собственное значение отрицательное, а второе будет отрицательным, для всех $k = 1, 2, \dots$, если выполняется условие $D_1 \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 > \frac{\partial f_1}{\partial u_1}$. При выполнении этого неравенства тривиальное решение будет устойчивым.

3.2.2. Математическая модель Базыкина-Вольтерра

Примерами линейных ареалов служат трубопроводы, обочины дорог, лесные просеки. Математическая модель конкуренции двух видов (3) на отрезке представляется системой эволюционных уравнений (38):

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + u_1 f_1(u_1, u_2), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + f_2(u_1, u_2), \end{cases} \quad (38)$$

В этих уравнениях x – координата, t – время, $u_1 = u_1(t, x)$ и $u_2 = u_2(t, x)$ – линейные плотности популяций, D_1 и D_2 – параметры, характеризующие подвижности особей. В качестве начальных условий задается значение функций $u_1 = u_1(t, x)$ и $u_2 = u_2(t, x)$ в начальный момент времени: при $t = 0$ $u_1(x) = u_{10}(x)$, $u_2(x) = u_{20}(x)$.

В качестве граничных условий для случая отрезка длиной l рассматриваются два варианта:

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_2}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u_2}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad (39)$$

и

$$u_1|_{x=0} = \left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad u_2|_{x=0} = \left. \frac{\partial u_2}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad (40)$$

Условие обращения в ноль функций u_1 и u_2 на границе отрезка соответствует невозможности существования популяции в этой точке, а условие обращения в ноль производных $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ и $\frac{\partial u_2}{\partial x}$ (условие наполнения среды) допускает свободный рост численности популяций.

Общие численности популяций $M_1(t)$ и $M_2(t)$ на отрезке в момент времени t подсчитываются по формулам

$$M_1 = \int_0^l u_1(t, x) dx, \quad M_2 = \int_0^l u_2(t, x) dx.$$

Рассмотрим модель конкуренции по Вольтерра в частных производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + u_1(1 - u_1) - \gamma_1 u_1 u_2, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \gamma u_2(1 - u_2) - \gamma_2 u_1 u_2 \end{cases} \quad (41)$$

Системе уравнений (41) при граничных условиях (39) удовлетворяют функции, не зависящие от пространственной координаты. Потому устойчивость решений уравнений (41) при граничных условиях (39) будет совпадать и с устойчивостью решений уравнений (3). Поэтому ниже будет исследоваться устойчивость решений, удовлетворяющих только граничным условиям (40).

В стационарном случае системе уравнений (41) при граничных условиях (40) удовлетворяет тривиальное решение $u_1 = 0, u_2 = 0$. Возмущение этого равновесного состояния представляется в виде $u_1 = \delta u_1, u_2 = \delta u_2$, где δu_1 и δu_2 малые по сравнению с единицей величины:

$$0 \leq \delta u_1 \leq 1, 0 \leq \delta u_2 \leq 1.$$

Тогда уравнения (41) с точностью до величин второго порядка малости приводятся к виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta u_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 \delta u_1}{\partial x^2} + u_1 \delta, \\ \frac{\partial \delta u_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 \delta u_2}{\partial x^2} + \gamma u_2 \delta. \end{cases} \quad (42)$$

Решение этих уравнений, удовлетворяющее граничным условиям (40), представляется в виде тригонометрических рядов:

$$\delta u_1 = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) \sin \left(k\pi - \frac{\pi}{2} \right) \frac{x}{l}$$

$$\delta u_2 = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t) \sin \left(k\pi - \pi/2 \right) \frac{x}{l}.$$

При этом коэффициенты разложения должны удовлетворять уравнениям:

$$\begin{cases} \frac{dA_k}{dt} = \left(1 - D_1 \left(\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l}\right)^2\right) A_k, \\ \frac{dB_k}{dt} = \left(\gamma - D_2 \left(\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l}\right)^2\right) B_k. \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Отсюда следует, что при выполнении неравенства $\left(\frac{2l}{\pi}\right)^2 < D_1$ все коэффициенты A_k будут убывающими функциями времени и, соответственно, решение $u_1 = 0$ будет устойчивым. А при выполнении неравенства:

$$\gamma \left(\frac{2l}{\pi}\right)^2 < D_2$$

будет устойчивым решение $u_2 = 0$. Последнее означает, что при высокой подвижности особей малочисленные популяции в рассматриваемой модели погибают.

Биологии и экономике не свойственна однородность. Так, например, в биологии в зависимости от климатических условий на различных территориях растут разные виды деревьев. В экономике это проявляется в разных традициях, ресурсах и так далее.

Численное решение. Построить аналитическое решение нелинейных уравнений (41) не представляется возможным. Поэтому используются различные методы аппроксимаций уравнений (41) или их решений [123]. Наибольшее распространение получили конечно-разностная аппроксимация уравнений и вариационные методы, основанные на представлении решения в виде линейной комбинации аналитических функций. Численное решение уравнений (41), удовлетворяющее граничным условиям (40) на отрезке ищется в виде суммы тригонометрических функций [124]:

$$u_1 = \sum_{k=1}^n A_k(t) \sin(k\pi - \pi/2) \frac{x}{l}, u_2 = \sum_{k=1}^n B_k(t) \sin(k\pi - \pi/2) \frac{x}{l}. \quad (43)$$

Система функций $\sin\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) \frac{x}{l}$ ($k = 1, 2, \dots$) удовлетворяет граничным условиям (40), является полной и ортогональной на отрезке $[0, l]$. После

подстановки выражений (43) в уравнения (41), умножения последних на $\sin\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)\frac{x}{l}$ ($k = 1, 2, \dots$) и последующего интегрирования по промежутку $[0, l]$ будет получена система обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов A_k и B_k ($k = 1, 2, \dots$):

$$\begin{cases} \frac{dA_k}{dt} = -D_1 \left(\frac{k\pi - \frac{\pi}{2}}{l}\right)^2 A_k + \frac{2}{l} \int_0^l u_1(1 - u_1 - \gamma_1 u_2) \sin\left(\frac{k\pi - \frac{\pi}{2}}{l}x\right) dx, \\ \frac{dB_k}{dt} = -D_2 \left(\frac{k\pi - \frac{\pi}{2}}{l}\right)^2 B_k + \frac{2}{l} \int_0^l \gamma u_2(1 - u_2 - \gamma_2 u_1) \sin\left(\frac{k\pi - \frac{\pi}{2}}{l}x\right) dx \end{cases} \quad (44)$$

Начальные условия для функций $A_k(t)$ и $B_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) определяются из соотношений:

$$\begin{cases} A_k(0) = \frac{2}{l} \int_0^l u_{10}(x) \sin(k\pi - \pi/2) \frac{x}{l} dx, \\ B_k(0) = A_k(0) = \frac{2}{l} \int_0^l u_{20}(x) \sin(k\pi - \pi/2) \frac{x}{l} dx. \end{cases}$$

Для одного члена разложения ($n = 1$) в (43) для случая отрезка единичной длины ($l = 1$) коэффициенты $A_1(t)$ и $B_1(t)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = -\frac{\pi^2}{4} D_1 A_1 + A_1 - \frac{8}{3\pi} A_1 (A_1 + \gamma_1 B_1), \\ \frac{dB_1}{dt} = -\frac{\pi^2}{4} D_2 B_1 + \gamma B_1 - \frac{8}{3\pi} \gamma B_1 (\gamma_2 A_1 + B_1). \end{cases} \quad (45)$$

Матрица Якоби правой части этих уравнений:

$$J = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\pi^2}{4} D_1 - \frac{8}{3\pi} (2A_1 + \gamma_1 B_1) & -\frac{8}{3\pi} \gamma_1 A_1 \\ -\frac{8}{3\pi} \gamma \gamma_2 B_1 & \gamma - \frac{\pi^2}{4} D_2 - \frac{8}{3\pi} \gamma (\gamma_2 A_1 + 2B_1) \end{pmatrix}.$$

Система уравнений (45) имеет четыре стационарные точки:

1. $A_1 = 0, B_1 = 0$. В этой стационарной точке собственные значения

$$\lambda_1 = 1 - \frac{\pi^2}{4} D_1, \lambda_2 = \gamma - \frac{\pi^2}{4} D_2$$

матрицы Якоби будут отрицательными, если выполняются неравенства $\frac{4}{\pi^2} < D_1$ и $\frac{4\gamma}{\pi^2} < D_2$. В этом случае тривиальная стационарная точка будет устойчивой. То есть при высокой подвижности особей обе популяции могут погибнуть.

2. $\mathbf{A}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{B}_1 = \frac{3\pi}{8} \left(\mathbf{1} - \frac{\pi^2}{4\gamma} \mathbf{D}_2 \right)$. Эта стационарная точка будет устойчивой, если собственные значения матрицы Якоби будут отрицательными:

$$\lambda_1 = 1 - \frac{\pi^2}{4} D_1 - \gamma_1 \left(1 - \frac{\pi^2}{4\gamma} D_2 \right), \lambda_2 = - \left(\gamma - \frac{\pi^2}{4} D_2 \right).$$

3. $\mathbf{A}_1 = \frac{3\pi}{8} \left(\mathbf{1} - \frac{\pi^2}{4\gamma} \mathbf{D}_1 \right), \mathbf{B}_1 = \mathbf{0}$. Эта стационарная точка будет устойчивой, если собственные значения матрицы Якоби будут отрицательными.

$$\lambda_1 = - \left(1 - \frac{\pi^2}{4} D_1 \right), \lambda_2 = \gamma - \frac{\pi^2}{4} D_2 - \gamma\gamma_2 \left(1 - \frac{\pi^2}{4} D_1 \right).$$

4. $\mathbf{A}_1 = \frac{1}{1-\gamma_1\gamma_2} \frac{3\pi}{8} \left(\mathbf{1} - \gamma_1 - \frac{\pi^2}{4} \mathbf{D}_1 + \frac{\pi^2}{4\gamma} \mathbf{D}_2 \right),$
 $\mathbf{B}_1 = \frac{1}{1-\gamma_1\gamma_2} \frac{3\pi}{8} \left(\mathbf{1} - \gamma_2 - \frac{\pi^2}{4\gamma} \mathbf{D}_2 + \frac{\pi^2}{4} \mathbf{D}_1 \right) \quad (46)$

При выполнении неравенства $\gamma_1\gamma_2 < 1$ при положительных значениях A_1 и B_1 вторая и третья стационарные точки будут неустойчивыми. Собственные значения матрицы Якоби в рассматриваемой стационарной точке являются корнями квадратного уравнения:

$$\lambda^2 + \frac{8}{3\pi} (A_1 + \gamma B_1) \lambda + \left(\frac{8}{3\pi} \right)^2 \gamma (1 - \gamma_1\gamma_2) A_1 B_1 = 0.$$

Корни этого уравнения при выполнении неравенств $\gamma_1 < 1$ и $\gamma_2 < 1$ будут иметь отрицательные вещественные части. То есть эта стационарная точка будет устойчивой, если $A_1 > 0$ и $B_1 > 0$. При этом вторая и третья стационарные точки будут неустойчивыми.

Общая численность популяции на отрезке подсчитывается по формулам – $M_1 = \frac{2A_1}{\pi}$ и $M_2 = \frac{2B_1}{\pi}$. И как следует из (46) увеличение подвижности одной популяции (параметров D_1 или D_2) приводит к уменьшению ее общей численности на отрезке и увеличению общей численности конкурирующей популяции.

Таким образом, условия существования четвертой стационарной точки при условии, что $\gamma_1 < 1$ и $\gamma_2 < 1$, определяются системой неравенств

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{4} D_1 < 1 < \frac{\pi^2}{4\gamma} D_2 < 1 \\ 0 < \frac{4}{\pi^2} (1 - \gamma_1) - D_1 + \frac{1}{\gamma} D_2 \\ 0 < \frac{4}{\pi^2} (1 - \gamma_2) - \frac{1}{\gamma} D_2 + D_1 \end{aligned}$$

В системе координат (D_1, D_2) эти неравенства определяют область значений параметров D_1 и D_2 , в которой четвертая стационарная точка реализуется и является устойчивой. Анализ поведения решения при большем числе слагаемых в представлениях (43) не представляется возможным без использования численных методов. Решение задачи Коши для системы уравнений (44) осуществлялось с применением метода конечных разностей. В некоторых литературных источниках модель конкуренции по Вольтерра анализируется на устойчивость, но имитационное моделирование не проводится [125].

Модель (41) для n популяций, учитывающей фактор среды, будет иметь вид (47):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = D_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \mu_i u_i \left(1 - u_i - \varepsilon \sum_{j=1, j \neq i}^n \beta_{ij} u_j \right) \quad i = 1, \dots, n \quad (47)$$

Сценарий №1. Конкуренция n популяций в условиях низкого фактора среды. В данном случае генерация параметров для модели (41) следующая:

$$D_i = rand_{0,001}, \mu_i = rand_{0.03,0.1}, \beta_i = 1 + rand_{0,1}$$

где $rand_{0,001}$ соответствует случайному рациональному числу в интервале $[0, 0.001]$, $rand_{0,1}$ соответствует случайному рациональному числу в интервале $[0, 0.1]$, $rand_{0.03,0.1}$ соответствует случайному рациональному числу в интервале $[0.03, 0.1]$. В качестве начальных условий генерируется сетка 10×10 , где начинается распространение популяций согласно формуле:

$$Grid = \left| \frac{\sin(x)}{x} - r_1 \right| * \left| \frac{\sin(y)}{y} - r_2 \right|,$$

где $r_1 = rand_1, r_2 = rand_1, rand_1$ – случайное целое число из интервала $[0,1]$. Строится плотность распределения индекса концентрации CR_3 и уровня выживаемости популяций. На рисунке 48 изображена плотность распределения коэффициента концентрации CR_3 для 500 экспериментов. Вероятностный индекс концентрации для 500 экспериментов соответствует $CR_3 = 0.15$, что говорит о низкой концентрированности конкурентной среды. Средний уровень выживаемости соответствует $alive = 50$.

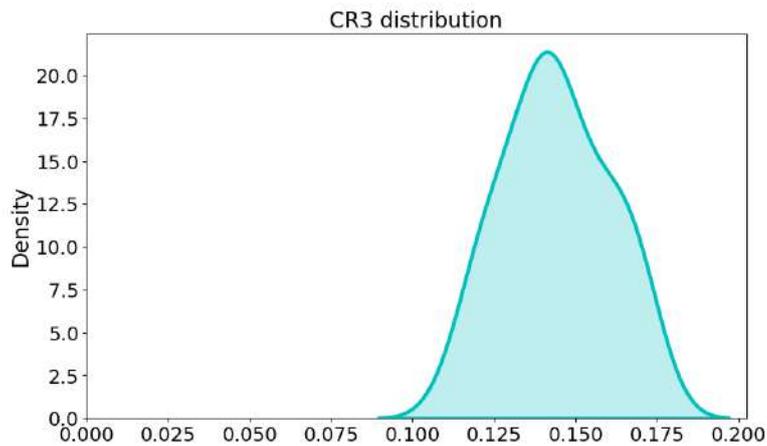


Рис. 48. Плотность распределения индекса концентрации

Сценарий №2. Конкуренция n популяций в условиях варьирования интенсивности фактора среды. Число популяций $n = 50$, число экспериментов $N = 500$. Генерация коэффициентов осуществляется аналогичным образом, кроме ε :

$$\varepsilon \in [0.01, 150].$$

В данном сценарии рассматривается зависимость индекса концентрации и уровня выживаемости популяций от интенсивности фактора среды. На рисунке 49 (А) изображена зависимость коэффициента концентрации от интенсивности фактора среды. На рисунке 49 (Б) изображена зависимость количества выживших популяций от фактора среды. Фактор среды $\varepsilon = 8$ является пороговым значением для низкой интенсивности. Чем выше интенсивность конкуренции, тем ниже выживаемость популяций.

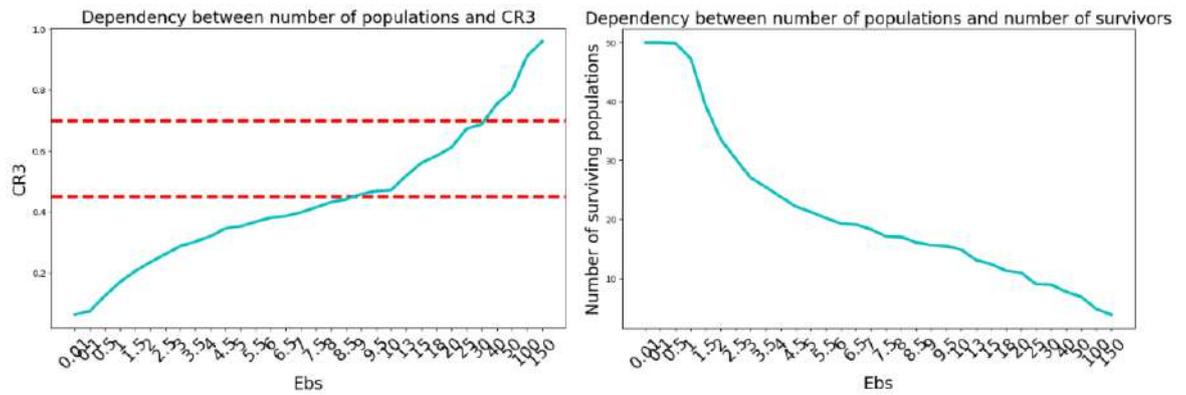


Рис. 49. А – Зависимость коэффициента концентрации от фактора среды
 Б – Зависимость количества выживших популяций от фактора среды

Зависимость пороговых значений и уровня выживаемости от концентрированности среды представлены в таблице 24.

Таблица 24. Пороговые значения фактора среды и уровня выживаемости

Концентрированность среды	Пороговые значения фактора среды	Пороговые значения уровня выживаемости
Низкая	$\varepsilon < 9$	$alive > 19$
Умеренная	$9 < \varepsilon < 25$	$alive \in [10, 19]$
Высокая	$\varepsilon > 25$	$alive < 10$

На рисунке 50 изображена зависимость численности популяций от фактора среды. Численность популяций убывает при увеличении интенсивности конкуренции, однако численность популяции сильно не меняется, и популяция остается многочисленной.

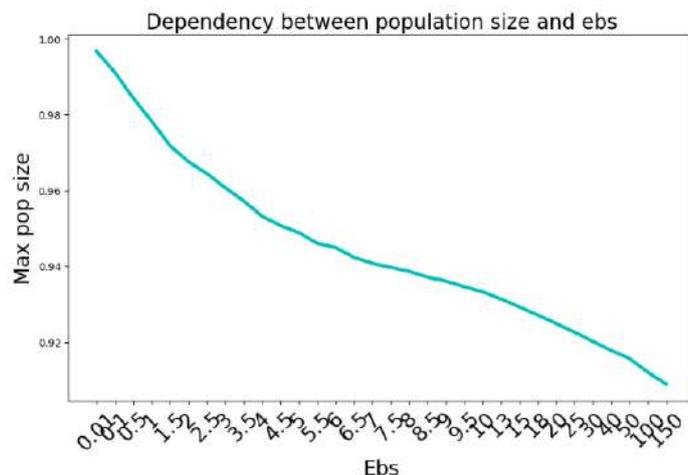


Рис. 50. Зависимость численности популяций от фактора среды

Сценарий №3. Динамическое имитационное моделирование. Число популяций $n = 50$, число экспериментов $N = 500$. На первом шаге

рассматривается 2 популяции, на втором шаге 3 популяции и так далее до 50 популяций. На каждом шаге проводится 500 экспериментов и выбирается среднее значение. В данном сценарии взаимодействия в каждом эксперименте находится решение системы (47) для k популяций с аналогичной генерацией коэффициентов.

$$D_i = rand_{0,001}, \mu_i = rand_{0.03,0.1}, \beta_i = 1 + rand_{0,1}, i = 1 \dots k$$

В данном сценарии рассматривается зависимость индекса концентрации от общего числа популяций, а также зависимость выживаемости видов от общего числа популяций аналогичным образом относительно предыдущего сценария. На рисунке 51 (А) изображена зависимость коэффициента концентрации от общего числа популяций. Чтобы обеспечить конкурентные условия среды, необходимое количество участников конкуренции должно быть не менее 16 субъектов в рамках модели. На рисунке 51 (Б) изображена зависимость количества выживших популяций от количества популяций.

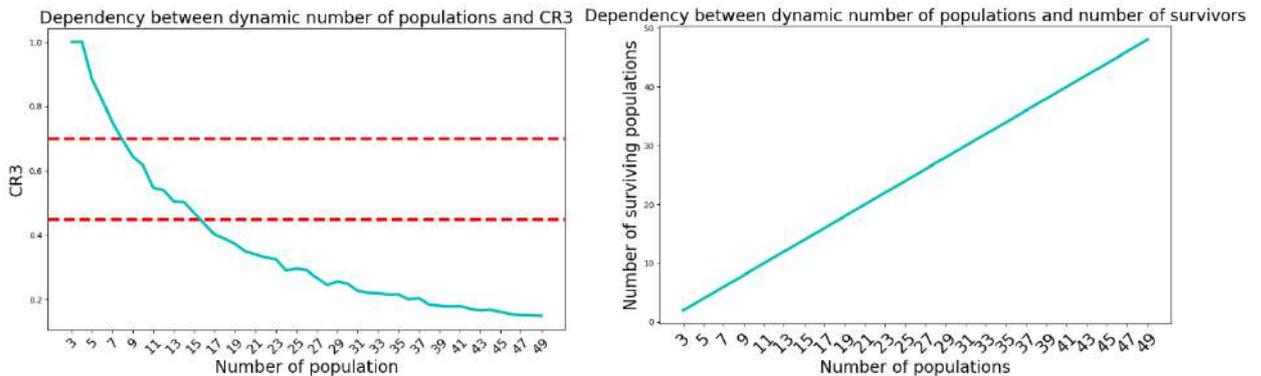


Рис. 50. А – Зависимость коэффициента концентрации от общего числа популяций,
Б – Зависимость уровня выживаемости от общего числа популяций

3.2.3. Конкуренция на отрезке со встречей на ресурсе

Разработанная модель (48) является ресурсной. В рамках предложенной модели конкуренция начинается только в тот момент, когда происходит встреча видов на данном ресурсе.

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \mu_1 u_1 \left(1 - \frac{u_1}{K_1}\right) - a_{12} u_1 u_2 \frac{S}{b_1 + S}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \mu_2 u_2 \left(1 - \frac{u_2}{K_2}\right) - a_{12} u_1 u_2 \frac{S}{b_1 + S}, \\ \frac{\partial S}{\partial t} = -\gamma_1 \frac{S}{b_1 + S} u_1 - \gamma_2 \frac{S}{b_2 + S} u_2 + \mu_3 S \left(1 - \frac{S}{K}\right) \end{cases} \quad (48)$$

То есть в рамках этой модели конкуренция возникает в момент встречи двух популяций и начала потребления ресурса. Для n популяций модель (48) примет вид (49):

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} = D_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \mu_i u_i \left(1 - \frac{u_i}{K_i}\right) - u_i \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j \frac{S}{b_j + S}, \\ \frac{\partial S}{\partial t} = -\gamma \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j \frac{S}{b_j + S} + \mu_s S \left(1 - \frac{S}{K_s}\right) \end{cases} \quad (49)$$

Сценарий №1. Конкуренция n популяций в условиях низкого фактора среды. В данном случае генерация параметров для модели (49) следующая:

$$D_i = rand_{0,001}, \mu_i = rand_{0,03,0,1}, a_i = rand_{0,1}, \\ \gamma_i = rand_{0,1}, b_i = rand_{0,1}$$

где $rand_{0,001}$ соответствует случайному рациональному числу в интервале $[0, 0.001]$, $rand_{0,1}$ соответствует случайному рациональному числу в интервале $[0, 0.1]$, $rand_{0,03,0,1}$ соответствует случайному рациональному числу в интервале $[0.03, 0.1]$. Строится плотность распределения индекса концентрации CR_3 и уровня выживаемости популяций. На рисунке 52 (А) изображена плотность распределения коэффициента концентрации CR_3 для 500 экспериментов. Вероятностный индекс концентрации для 500 экспериментов соответствует $CR_3 = 0.21$, что говорит о низкой концентрированности конкурентной среды. На рисунке

52 (Б) изображена плотность распределения уровня выживаемости популяций для 500 экспериментов. Средний уровень выживаемости соответствует $alive = 50$. Таким образом, из 50 популяций выживает 100% популяций в данном сценарии.

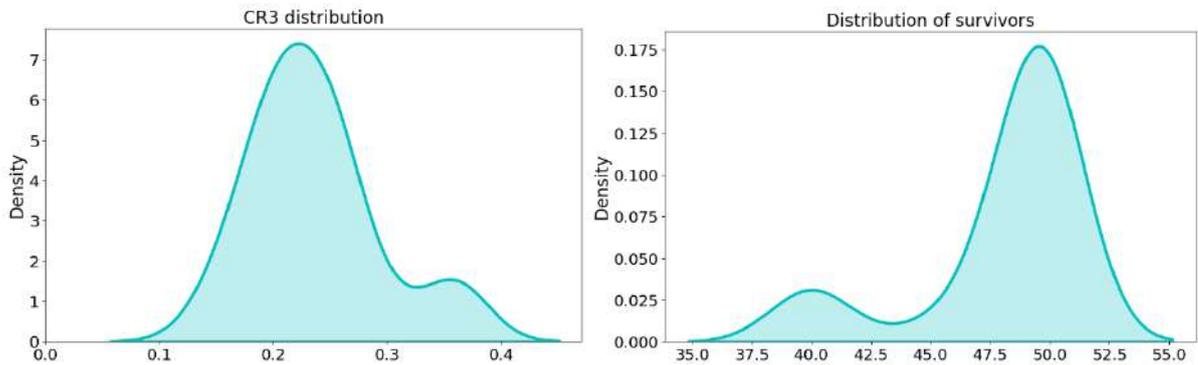


Рис. 52. А – Плотность распределения индекса концентрации
Б – Плотность распределения выживших популяций

Сценарий №3. Динамическое имитационное моделирование. Число популяций $n = 50$, число экспериментов $N = 500$. На первом шаге рассматривается 2 популяции, на втором шаге 3 популяции и так далее до 50 популяций. На каждом шаге проводится 500 экспериментов и выбирается среднее значение. В данном сценарии взаимодействия в каждом эксперименте находится решение системы (49) для k популяций с аналогичной генерацией коэффициентов.

$$D_i = rand_{0,001}, \mu_i = rand_{0.03,0.1}, a_i = rand_{0,1},$$

$$\gamma_i = rand_{0,1}, b_i = rand_{0,1} \quad i = 1 \dots k$$

В данном сценарии рассматривается зависимость индекса концентрации от общего числа популяций, а также зависимость выживаемости видов от общего числа популяций аналогичным образом относительно предыдущего сценария. На рисунке 53 (А) изображена зависимость коэффициента концентрации от общего числа популяций. Чтобы обеспечить конкурентные условия среды, необходимое количество участников конкуренции должно быть не менее 15 субъектов в рамках модели. На рисунке 53 (Б) изображена зависимость количества выживших популяций от количества популяций.

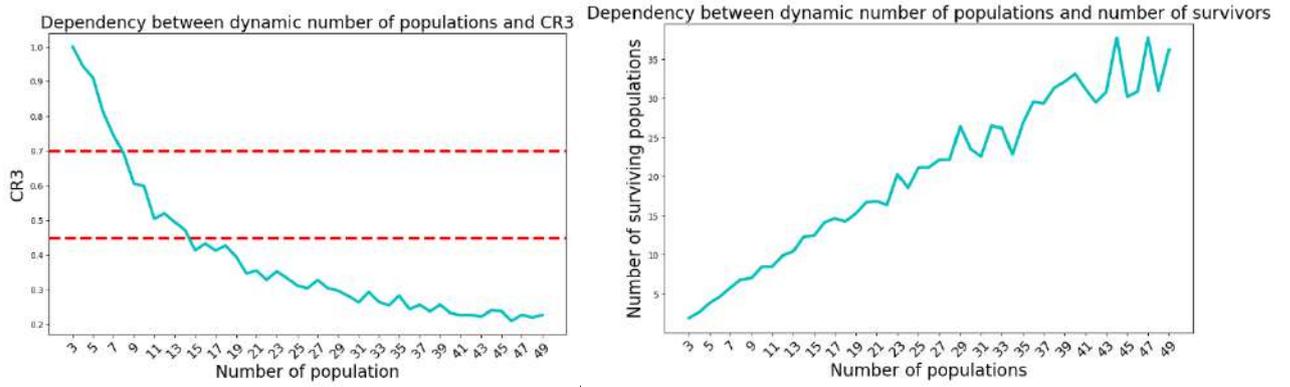


Рис. 53. А – Зависимость коэффициента концентрации от общего числа популяций
 Б – Зависимость уровня выживаемости от общего числа популяций

Пороговые значения количества субъектов для определения концентрированности среды приведены в таблице 25.

Таблица 25. Пороговые значения количества субъектов.

Концентрированность среды	Пороговые значения количества субъектов
Низкая	$k > 15$
Умеренная	$k \in [8, 15]$
Высокая	$k < 8$

3.2.4. Эксплуатационная модель конкуренции

Аналогично локальной эксплуатационной модели конкуренции рассматривается пространственно-временная эксплуатационная модель (50):

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \mu_1 u_1 \left(\frac{s}{s+b_1} - u_1 \right) - \beta_1 f(u_1, u_2), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \mu_2 u_2 \left(\frac{s}{s+b_2} - \frac{u_2}{K_2} \right) - \beta_2 f(u_1, u_2), \\ \frac{\partial S}{\partial t} = D_3 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \gamma_1 \mu_1 \frac{S}{b_1+S} u_1 - \gamma_2 \mu_2 \frac{S}{b_2+S} u_2 + \mu_S S \left(1 - \frac{S}{K} \right) \end{cases} \quad (50)$$

Функции $\frac{s}{s+b_1}$ и $\frac{s}{s+b_2}$ характеризуют долю потребляемого ресурса каждой популяцией отдельно. Функции $\beta_1 f(u_1, u_2)$ и $\beta_2 f(u_1, u_2)$ характеризуют влияние популяций друг на друга за счет непосредственного контакта или через внешние факторы. Предлагается, что функция $f(u_1, u_2)$ может иметь вид:

$$f(u_1, u_2) = \frac{u_1 u_2}{(\alpha_1 + u_1)(\alpha_2 + u_2)}$$

Если $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0$, то:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \mu_1 u_1 \left(\frac{s}{s+b_1} - u_1 \right), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \mu_2 u_2 \left(\frac{s}{s+b_2} - u_2 \right), \\ \frac{\partial S}{\partial t} = D_3 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \gamma_1 \mu_1 \frac{S}{b_1+S} u_1 - \gamma_2 \mu_2 \frac{S}{b_2+S} u_2 + \mu_S S \left(1 - \frac{S}{K} \right) \end{cases} \quad (51)$$

В этой модели конкуренция происходит только на трофическом ресурсе S . Для n популяций модель (51) примет вид (52):

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} = D_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \mu_i u_i \left(\frac{s}{s+b_i} - u_i \right) \\ \frac{ds}{dt} = D_s \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \sum_{i=1}^n \gamma_i \mu_i u_i \frac{s}{s+b_i} + \mu_S S \left(1 - \frac{S}{K} \right) \end{cases} \quad (52)$$

Сценарий №1. Конкуренция n популяций в условиях низкого фактора среды. В данном случае генерация параметров для модели (52) следующая:

$$D_i = rand_{0,001}, \mu_i = rand_{0.03,0.1}, a_i = rand_{0,1},$$

$$\gamma_i = rand_{0,1}, b_i = rand_{0,1}$$

где $rand_{0,001}$ соответствует случайному рациональному числу в интервале $[0, 0.001]$, $rand_{0,1}$ соответствует случайному рациональному числу в интервале $[0, 0.1]$, $rand_{0.03,0.1}$ соответствует случайному рациональному числу в интервале $[0.03, 0.1]$. Строится плотность распределения индекса концентрации CR_3 и уровня выживаемости популяций. На рисунке 54 изображена плотность распределения коэффициента концентрации CR_3 для 500 экспериментов. Вероятностный индекс концентрации для 500 экспериментов соответствует $CR_3 = 0.15$, что говорит о низкой концентрированности конкурентной среды. Средний уровень выживаемости соответствует $alive = 50$.

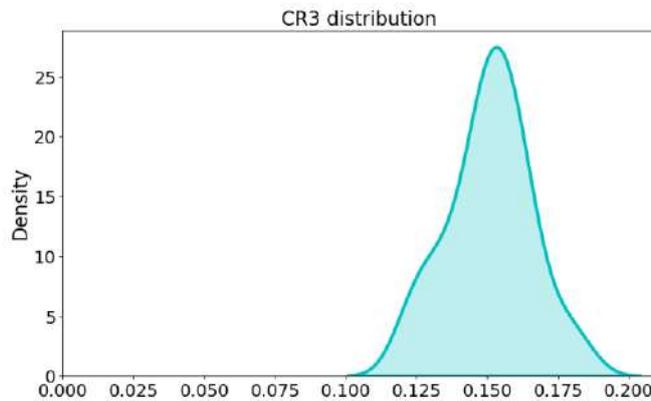


Рис. 54. Плотность распределения индекса концентрации CR_3

Сценарий №3. Динамическое имитационное моделирование. Число популяций $n = 50$, число экспериментов $N = 500$. На первом шаге рассматривается 2 популяции, на втором шаге 3 популяции и так далее до 50 популяций. На каждом шаге проводится 500 экспериментов и выбирается среднее значение. В данном сценарии взаимодействия в каждом эксперименте находится решение системы (52) для k популяций с аналогичной генерацией коэффициентов.

В данном сценарии рассматривается зависимость индекса концентрации от общего числа популяций, а также зависимость выживаемости видов от общего числа популяций аналогичным образом относительно предыдущего сценария. На

рисунке 55 (А) изображена зависимость коэффициента концентрации от общего числа популяций. Чтобы обеспечить конкурентные условия среды, необходимое количество участников конкуренции должно быть не менее 15 субъектов в рамках модели. На рисунке 55 (Б) изображена зависимость количества выживших популяций от количества популяций.

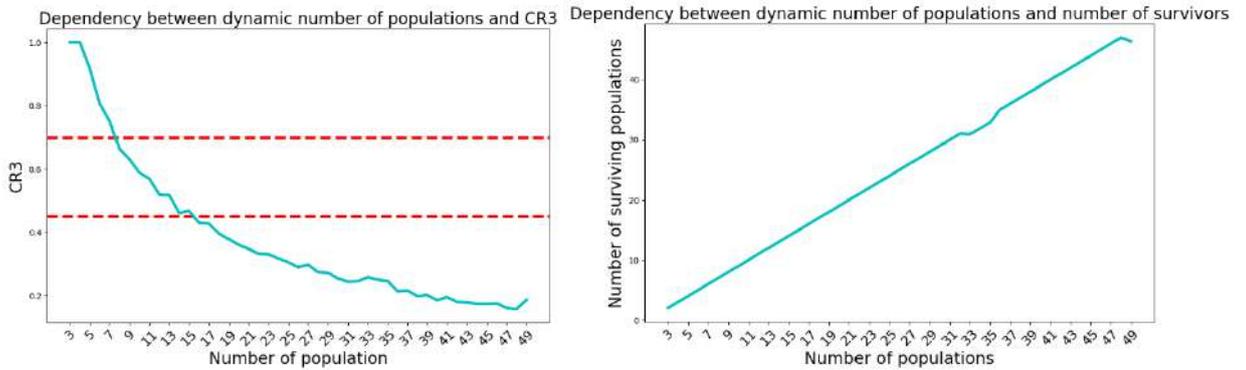


Рис. 55. А – Зависимость коэффициента концентрации от общего числа популяций, Б – Зависимость уровня выживаемости от общего числа популяций

Пороговые значения количества субъектов для определения концентрированности среды приведены в таблице 26.

Таблица 26. Пороговые значения количества субъектов

Концентрированность среды	Пороговые значения количества субъектов
Низкая	$k > 15$
Умеренная	$k \in [7, 15]$
Высокая	$k < 7$

Заключение

Настоящая работа посвящена проблеме анализа конкурентной среды в биологических и экономических системах. Теоретический анализ мирового рынка продовольствия показал, что существующих критериев недостаточно, чтобы сделать однозначное заключение о рыночной ситуации и существующие индексы оценки уровня рыночной конкуренции нуждаются в переопределении. Анализ существующих моделей конкурентных взаимоотношений показал, что в большинстве моделей не учитываются ключевые показатели конкуренции – смена ареала, детерминированность ниши, иерархические взаимоотношения, трофический ресурс. В ходе диссертационного исследования были получены следующие ключевые результаты:

- Проанализирован международный рынок продовольствия по 120 позициям, 12 продуктовым категориям и 190 экономическим субъектам. Анализ статистических данных Faostat показал, что в ходе конкуренции большинство экономических субъектов остаются на рынке на исследуемом временном интервале в 60 лет, то есть доля ушедших с рынка стран – низкая.
- На основе статистического анализа рынка продовольствия разработаны три критерия оценки рыночного состояния и измерения уровня конкуренции экономических субъектов – групповой, корреляционный и долевого критерий. Групповой критерий позволяет дать оценку продуктовой категории и выявить монополистические взаимоотношения, корреляционный критерий дает оценку состояния рынка, долевого критерий определяет ядро рынка.
- Разработано 11 новых локальных и распределенных моделей для интерференционной и эксплуатационной конкуренции, учитывающих фактор среды, временной фактор, трофический ресурс и другие факторы.
- Для всех предложенных моделей была также разработана модель для n популяций. Также было проведено имитационное моделирование. С помощью имитационного моделирования был проанализирован принцип

конкурентного исключения Гаузе, определены пороговые значения фактора среды и количества конкурирующих субъектов для соответствующего уровня конкуренции.

- Принцип конкурентного исключения Гаузе не был подтвержден для рассмотренных моделей. Наиболее вероятная причина гибели популяции — это влияние внешней среды на экосистему. Часть полученных результатов согласуется с некоторыми позициями теории нейтрализма.
- В рамках всех моделей были проанализированы стационарные состояния системы и доказана устойчивость. При малом факторе среды стационарная точка также устойчива в силу непрерывности.
- Для распределенных систем проанализирована устойчивость тривиальных состояний. Аналитические и количественные результаты для распределенных моделей согласуются с результатами локальных моделей.

Список литературы

1. Полуэктов Р.А. Динамическая теория биологических популяций. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Mayr E. The growth of biological thought. Diversity, evolution, and inheritance. Cambridge (Mass.); L.: Belknap Press of Harvard Univ. Press, 1982. P. 974.
3. Мюррей Дж. Математическая биология. Том 1. Введение. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. 776 с.
4. Гиляров А. М. В поисках универсальных закономерностей организации сообществ: прогресс на пути нейтрализма // Журнал общей биологии. 2010. Т. 71. № 5. С. 386–401.
5. Назаров В.И. Эволюция не по Дарвину: смена эволюционной модели. М.: Ленанд, 2023. 520 с.
6. Гаузе Г.Ф. Борьба за существование. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 159 с.
7. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 288 с.
8. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 368 с.
9. Мюррей Дж. Математическая биология. Том II. Пространственные модели и их приложение в медицине. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2011. 1104 с.
10. Петросян Л.А., Захаров В.В. Математические модели в экологии. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 1997. 256 с.
11. Chen F., Wu L., Li Z. Permanence and global attractivity of the discrete Gilpin-Ayala type population model // Comput. Math. Appl. 2007. Vol. 53. P. 1214-1227.

12. Гинзбург Л.Р., Коновалов Н.Ю., Эпельман Г.С. Математическая модель взаимодействия двух популяций // Журнал общей биологии. 1974. Т. 35. №4. С. 613.
13. Chow P.L., Tam W.C. Periodic and travelling wave solutions of Volterra-Lotka equations with diffusion // Bull. Math. Biol. 1976. Vol. 38. P. 1214-1227.
14. Gilpin M.E., Ayala F.J. Global models of growth and competition // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1973. Vol. 70. P. 3590-3593.
15. Бейли Н. Математика в биологии и медицине. М.: Мир, 1970. 327 с.
16. Kim S., McKee T.A., McMorris F.R., Roberts F.S. p-Competition numbers // Discrete Applied Mathematics. 1993. Vol. 46. P. 87-92.
17. Kim S., McKee T.A., McMorris F.R., Roberts F.S. p-Competition graphs DIMACS Technical Report 89-19, Center for Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Rutgers Univ., Piscataway, N.J. 08855, Nov. 1989.
18. Sano Y. Characterizations of competition multigraphs // Discrete Applied Mathematics. 2009. Vol. 157. P. 2978-2982.
19. McKee T.A. Niche space, multigraphs, and the Helly condition // Mathematical and Computer Modelling. 1995. Vol. 22(3). P. 1-8.
20. Прасолов А.В. Математические методы экономической динамики. СПб.: Лань, 2008. 352 с.
21. Федеральный закон о защите конкуренции. URL: https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_61763/
22. Статистические данные федеральной службы. URL: <https://rosstat.gov.ru/folder/11189#>
23. Туган-Барановский М. И. Конкуренция. Б.-Э. СПб.: тип. И. А. Ефрона, т. XVI. 480 с.
24. Калиновский Б. О развитии и распространении идеи свободной торговли и применении ее к положительным законодательствам в главных западноевропейских государствах. С. Петербург, тип. Рюмина и комп. 1859. 221 с.

25. Светуных М.Г., Волков А.В. Проблема измерения уровня конкуренции в целях разработки предпринимательских решений (с учетом многоуровневой модели рынка) // Вестник Оренбургского государственного университета. 2010. № 8 (114). С. 107-113.
26. Кроливецкий Э. Н., Андреев П. А. Виды конкуренции и сопутствующие им модели рынка // Петербургский экономический журнал. 2015. № 2. С. 55-69.
27. Kolpak E.P., Gorynya E.V., Kabrits S.A. Mathematical modeling of competition indicators // Journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems. 2019. Vol. 11(8). P. 689-697.
28. Kolpak E.P., Gorynya E.V. Mathematical model of operational competition // International Journal of Engineering and Technology (UAE). 2018. Vol. 7(3). P. 85-91.
29. Kolpak E.P., Gorynya E.V., Shaposhnikova A.I., Khasenova K.E., Zemlyakova N.S. Special aspects of leasing activities and its meaning in conditions of enterprise competitiveness // International Review of Management and Marketing. 2016. Vol. 6(6). P. 126-133.
30. Doronina I.I., Borobov V.N., Ivanova E.A., Gorynya E.V., Zhukov B.M. Agro-industrial clusters as a factor of increasing competitiveness of the region // International Journal of Economics and Financial Issues. 2016. Vol. 6(1S). P. 295-299.
31. Kolpak E.P., Gorynya E.V. Mathematical models of ecological niches search // Applied Mathematical Sciences. 2016. Vol. 10(37-40). P. 1907-1921.
32. Горыня Е.В. Долевой критерий анализа рынка // Сборник трудов международной научной конференции: современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2023). 2023. С. 15-17.
33. Колпак Е. П., Горыня Е. В. Математические модели «ухода» от конкуренции // Молодой ученый. 2015. № 11. С. 59-70.

34. Колпак Е.П., Горыня Е.В., Крылова В.А., Полежаев Д.Ю. Математическая модель конкуренции двух популяций на линейном ареале // Молодой ученый. 2014. № 12 (71). С. 12-22.
35. Колпак Е.П., Горыня Е.В., Полежаев В.Ю. Математическая модель конкуренции двух популяций (линейный ареал) // Сборник трудов VII Международной конференции: современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2014). 2014. С. 206-209.
36. Колпак Е.П., Горыня Е.В. Математические модели «ухода» от конкуренции // Молодой ученый. 2015. № 11 (91). С. 59-70.
37. Горыня Е.В., Колпак Е.П. Математические модели поиска экологической ниши // Материалы III Международной конференции: Устойчивость и процессы управления. 2015. С. 469-470.
38. Колпак Е.П., Горыня Е.В., Селицкая Е.А. О моделях А. Д. Базыкина «хищник – жертва» // Молодой ученый. 2016. № 2 (106). С. 12-20.
39. Колпак Е.П., Горыня Е.В., Иванова А.А. Показатели конкуренции. Международная торговля россии в XIX веке // Молодой ученый. 2016. № 3 (107). С. 534-547.
40. Колпак Е.П., Горыня Е.В., Иванова А.А. Показатели конкуренции. Международная торговля СССР // Молодой ученый. 2016. № 4 (108). С. 402-413.
41. Колпак Е.П., Ефремова Е.А., Горыня Е.В., Иванова А.А. Показатели конкуренции. Международная торговля Российской Федерации // Молодой ученый. 2016. № 12 (116). С. 1302-1314.
42. Горыня Е.В., Колпак Е.П. Математическая модель «сезонной» конкуренции // Сборник трудов IX международной конференции: современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2016). 2016. С. 98-101.
43. Горыня Е.В., Ефремова Е.А. Показатели конкуренции: внешняя торговля России // Сборник трудов IX международной конференции: современные

- методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2016). 2016. С. 101-104.
44. Горыня Е.В. Математическая модель создания экологической ниши // Сборник трудов IX международной конференции: современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2016). 2016. С. 104-107.
 45. Петрова И.С., Горыня Е.В., Еременко В.Р. Исследование удельной скорости роста экспорта, как метод оценки уровня конкуренции // Ростовский научный журнал. 2017. № 12. С. 322-333.
 46. Горыня Е.В., Петрова И.С. Статистический анализ мирового рынка продовольствия // Сборник трудов X международной конференции: современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2017). 2017. С. 119-122.
 47. Французова И.С., Горыня Е.В., Колпак Е.П. Математическое моделирование механизмов опухолевого роста // Сборник докладов: Богатство России. 2019. С. 106-108.
 48. Горыня Е.В., Колпак Е.П. Математические модели конкуренции на трофическом ресурсе // Международный научно-исследовательский журнал. 2019. № 4-1 (82). С. 14-22.
 49. Горыня Е.В. Интерференционная и эксплуатационная модели конкуренции // Процессы управления и устойчивость. 2019. Т. 6. № 1. С. 163-167.
 50. Горыня Е.В., Колпак Е.П., Гасратова Н.А. Динамика внешней торговли РФ // Международный научно-исследовательский журнал. 2022. № 7-1 (121). С. 126-132.
 51. Горыня Е.В. Сравнительный анализ критериев оценки уровня конкуренции // Наука и бизнес: пути развития. 2022. № 3 (129). С. 15-19.
 52. Горыня Е.В., Колпак Е.П., Гасратова Н.А. Имитационная модель конкуренции // Наука и бизнес: пути развития. 2023. № 8 (146). С. 12-18.

53. Горыня Е.В., Колпак Е.П., Гасратова Н.А., Гончарова А.Б. Математическая модель иерархической конкуренции // Перспективы науки. 2023. № 8(167). С. 103-109.
54. Begon M., Harper J. L., Townsend C. R. Ecology: Individuals, populations and communities. Oxford: Blackwell, 1996. 1068 p.
55. Schenk H.J. Root competition: beyond resource depletion // Journal of Ecology. Vol. 94 (4). P. 725–739.
56. Haque M., Wang B., Mvuyekure A.L., Chaves B.D. Validation of competition and dynamic models for Shiga toxin-producing Escherichia coli (STEC) growth in raw ground pork during temperature abuse // Food Microbiology. 2024. Vol. 117.
57. Begon M., Mortimer M., Thompson D.J. Population ecology: A united study of animals and plants. Oxford: Blackwell, 1996. 256 p.
58. Nishikawa S., Takamatsu A., Ohsawa S., Igaki T. Mathematical model for cell competition: Predator–prey interactions at the interface between two groups of cells in monolayer tissue // Journal of Theoretical Biology. 2016. Vol. 404. P. 40–50.
59. Laguna M.F. Abramson G., Kuperman M.N., Lanata J.L., Monjeau J.A. Mathematical model of livestock and wildlife: Predation and competition under environmental disturbances // Ecological Modelling. 2015. Vol. 309-310(N1). P. 110-117.
60. Дедю И. И. Экологический энциклопедический словарь. Кишинев: Молд. совет. энцикл., 1989. 406 с.
61. Keddy P.A., Shipley B. Competitive Hierarchies in Herbaceous Plant Communities // Oikos. 1989. Vol. 54 (2). P. 234-241.
62. Sahney S., Benton M.J., Ferry P.A. Links between global taxonomic diversity, ecological diversity and the expansion of vertebrates on land // Biology Letters. 2010. Vol. 6 (4). P. 544-547.
63. Cobos M.E., Peterson A.T., Osorio-Olvera L., Jimenez-Garcia D. An exhaustive analysis of heuristic methods for variable selection in ecological

- niche modeling and species distribution modeling // *Ecological Informatics*. 2019. Vol.53.
64. MacArthur R., Levins R. The limiting similarity, convergence, and divergence of coexisting species // *American Naturalist*. 1967. Vol. 101. No. 921. P. 377-385.
 65. Polechova J., Storch, D. Ecological Niche // *Encyclopedia of Ecology*. 2019. Vol. 3. P. 72-80.
 66. Grinnell J. The niche-relationships of the California thrasher // *The Auk*. 1917. Vol. 34. No. 4. P. 427-433.
 67. Bellouquid A., Delitala M. *Mathematical Modeling of Complex Biological Systems*. Boston, 2006. 188 p.
 68. Hutchinson G. E. Homage to Santa Rosalia, or why are there so many kinds of animals? // *American Naturalist*. 1959. V. 93. P. 145–159.
 69. Chase J.M., Leibold M.A. *Ecological niches: Linking classical and contemporary approaches*. University of Chicago Press, 2003. 221 p.
 70. Tisdell C., Seidl I. Niches and economic competition: implications for economic efficiency, growth and diversity // *Structural Change and Economic Dynamics*. 2004. Vol. 15. P. 119-135.
 71. Chesson P. A need for niches? // *Trends in Ecology & Evolution*. 1991. Vol. 6. P. 26–28.
 72. Chesson P., Warner R.R. Environmental variability promotes coexistence in lottery competitive systems // *The American Naturalist*. 1981. Vol. 117. P. 923–943.
 73. Hubbell S.P. Neutral theory in community ecology and the hypothesis of functional equivalence // *Functional ecology*. 2005. Vol. 19. P. 166-172.
 74. Бигон М., Харпер Дж., Таунсенд К. *Экология. Особи, популяції и сообщества: в 2-х т. Т. 2. М.: Мир, 1989. 477 с.*
 75. Siljak D.D. Competitive economic systems: stability, decomposition and aggregation // *IEEE Conf. Decentr. Contr. San Diego*. 1973. P. 265-275.

76. Тарануха Ю. В. Конкуренция: система и процесс: монография. М.: Издательство «Дело и Сервис», 2012. 672 с.
77. Arrow K.J., Debreu G. Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy // *Econometrica*. 1954. Vol.22 (3). P. 265-290.
78. Флигстин Н. Рынки как политика: политико-культурный подход к рыночным институтам // *Экономическая социология*. 2003. Т. 4. № 1. С. 45-63.
79. Кураков Л.П., Кураков В.Л., Кураков А.Л. Экономика и право: словарь-справочник. М.: Вуз и школа, 2004. 1072 с.
80. Васильев А. Н. Конкуренция. М.: Большая Советская энциклопедия, 2010. Т. 15. 767 с.
81. Marino D., Timpano F., Lafuente J.G. The competition between legal and illegal firms in the market: Theoretical models and empirical evidence // *European Research on Management and Business Economics*. 2023. Vol. 29(3).
82. Игнатъев В.М., Бочкова Е.В. Классификация конкуренции // *Экономика и социум*. 2014. Т.4-3. №13. С. 89-99.
83. Puu T. *Nonlinear economic dynamics*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1989. 276 p.
84. Dranove D., Besanko D., Shanley M., Schaefer M. *Economics of Strategy*. Wiley. P. 162.
85. Kelly Jr., William A. A Generalized Interpretation of the Herfindahl Index // *Southern Economic Journal*. 1981. Vol. 48 (1). P. 50–57.
86. Семёнычев Е.В., Павлова К.Э. Методика оценки уровня региональной конкуренции в банковской сфере // *Финансы и кредит*. 2008. № 14. С. 11–18.
87. Дыганова Р.Р. Оценка концентрации рынка дистанционной торговли // *Universum: экономика и юриспруденция*. 2017. № 8 (41).
88. Yitzhaki S. More than a Dozen Alternative Ways of Spelling Gini // *Economic Inequality*. 1997. Vol. 8. P. 13–30.

89. Кривошлыков В.С., Жахов Н.В., Шатохин М.В. Диагностика конкурентной среды функционирования регионального агропродовольственного рынка // Вестник Курской государственной сельскохозяйственной академии. 2016. №5. С. 33-40.
90. Faostat URL: <https://www.fao.org/faostat/en/>
91. Baldwin C.J. Sustainability in the Food Industry. Wiley, 2009. P. 274.
92. Faostat. Population Stat. URL: <https://www.fao.org/faostat/en/#data/OA>
93. Минтусов В.К. Теоретические и методические аспекты анализа мирового рынка продовольствия // Вестник университета. 2016 №3. С.34-39.
94. Malthus T.R. An essay on the principle of population, as it affects the future improvement of society with remarks on the speculations of Mr. Godwin, Mr. Condorcet, and other writers. London: Printed for J. Johnson, in St. Paul's Church-Yard, 1978.
95. Verhulst P.F. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. Corresp. Math. Et Phys. 1838. Vol. 10. P. 113-121.
96. Michaelis L., Menten M.I. Die Kinetik der Invertinwirkung. Biochem. Z. 1913. Vol. 49. P. 333-369.
97. Allee W.C., Bowen E. S. Studies in animal aggregations: mass protection against colloidal silver among goldfishes // Journal of Experimental Zoology. 1932. Vol. 61 (2). P. 185–207.
98. Yang Y., Wu D., Shen C., Lu F. Allee effect in a diffusive predator–prey system with nonlocal prey competition // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2023. Vol. 615.
99. Anggriani N., Panigoro H.C., Rahmi E, Olumuyiwa J. P., Sayooj A. J. A predator–prey model with additive Allee effect and intraspecific competition on predator involving Atangana–Baleanu–Caputo derivative // Results in Physics. 2023. Vol. 49.
100. Yaying D., Zipeng H., Shanbing L. Coexistence solutions for a Lotka–Volterra competition model with density-dependent motion // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2023. Vol. 122.

101. Murray D. D. *Mathematical biology*. N.Y. Springer, 2002. 551 p.
102. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
103. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972. 232 с.
104. Гиляров М.С. Биологический энциклопедический словарь. М.: Большая рос. энцикл., 1995. 863 с.
105. Российский статистический ежегодник 2022. URL: <https://rosstat.gov.ru/folder/210/document/12994>
106. Patterson, S. K., Strum, S. C., Silk, J. B. Resource competition shapes female–female aggression in olive baboons, *Papio Anubis // Animal Behaviour*. 2021. Vol. 176. P. 23–41.
107. Палеев Д.Л., Черняев М.В. Анализ аномального потребления природного газа в условиях температурных колебаний методами нелинейной динамики // ЭТАП: экономическая теория, анализ, практика. 2018. С. 123-134.
108. Хвалынский Д.С. Цикличность развития публичных закупок в России: что нас ждет после закона о контрактной системе // Научный журнал НИУ ИТМО. Серия "Экономика и экологический менеджмент". 2015. №3(22). С. 35-41.
109. Биология океана. Т. 1. Биологическая структура океана / Под ред. Виноградова М.Е. М.: Наука, 1977. 398 с.
110. Богоров В.Г. Планктон Мирового Океана. М.: Наука, 1974. 320 с.
111. Дуболадова М.И., Старков В.Н. Исследование модели Стила динамики численности морского планктона // Тезисы докладов Всероссийской конференции, посвященной 80-летию Зубова В.И. СПб.: ВВМ, 2010. С. 279-280.
112. Doukilo I., Belhsen O.K., Hmimid F., Idhalla M., Manchih K., Mouttaki B., Errhif A. Seasonal changes in reproductive biology and biochemical composition of the grooved razor shell *Solen marginatus* (Bivalvia: Solenidae)

- from Oualidia Lagoon, Morocco // *Regional Studies in Marine Science*. 2022. Vol. 54.
113. Odum E.P. (1953). *Fundamentals of Ecology*. Philadelphia, Pennsylvania, USA: Saunders, 1953. 624 p.
114. Harvey A. C. Trimbur T. M. Van Dijk H. C. Trends and cycles in economic time series: A Bayesian approach // *Journal of Econometrics*. 2007. Vol. 140 (2). P. 618–649.
115. Korotayev A. V., Tsirel S. V. A Spectral Analysis of World GDP Dynamics: Kondratiev Waves, Kuznets Swings, Juglar and Kitchin Cycles in Global Economic Development, and the 2008–2009 Economic Crisis // *Structure and Dynamics*. 2010. Vol. 4 (1). P. 3–57.
116. Ayres R. U. Barriers and breakthroughs: an "expanding frontiers" model of the technology-industry life cycle // *Technovation*. 1988. Vol. 7 (2). P. 87–115.
117. Александров А.Ю., Платонов А.В., Старков В.Н., Степенко Н.А. Математическое моделирование и исследование устойчивости биологических сообществ: Учебное пособие. СПб.: Лань, 2016. 272 с.
118. Жижин Г.В. Саморегулируемые волны химических реакций и биологических популяций. СПб.: Наука, 1988. 296 с.
119. Feng W., Lu X. Traveling waves and competitive exclusion in models of resource competition and mating interference // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2015. Vol. 424(1). P. 542-562.
120. Исаев А.С., Хлебопрос Р.Г., Недорезов Л.В. Популяционная динамика лесных насекомых. М.: Наука, 2001. 374 с.
121. Громов В. С. Пространственно - этологическая структура популяций грызунов. М.: Т-во научн. изданий КМК. 2008. 581 с.
122. Колпак Е. П., Жукова И. В., Степанова Д. С., Крицкая А. В. О численных методах решения эволюционных уравнений на примере математической модели «хищник-жертва» // *Молодой ученый*. 2014. № 4. С. 20–30.

123. Бахвалов Н. С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1975. С. 535-618
124. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
125. Acharya A., Bandyopadhyay S., Cronin J.T., Goddard II J., Muthunayake A., Shivaji R. The diffusive Lotka–Volterra competition model in fragmented patches I: Coexistence // *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 2023. Vol. 70.