

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Гао Цзинцзин

Моменты влияния как стратегия в
теоретико-игровых моделях динамики мнений
в социальных группах

Научная специальность: 1.2.3. Теоретическая информатика,
кибернетика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Перевод с английского языка

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент, Е. М. Парилина

Санкт-Петербург

2024

Оглавление

Введение	4
Глава 1 Динамика мнений в социальных группах, ориентированных на среднее мнение, с ограничениями на моменты валидации	25
1.1 Случай, когда имеют значение мнения в терминальный момент времени.....	25
1.2 Числовые примеры для Раздела 1.1	29
1.3 Случай валидации мнений в ограниченное число моментов времени.....	32
1.4 Численное моделирование для раздела 1.3	37
1.4.1 Описание эксперимента.....	37
1.4.2 Блок-схема эксперимента.....	38
1.4.3 Результаты численного моделирования.....	40
1.5 Заключение к Главе 1	50
Глава 2 Динамика мнений в малых социальных группах, ориентированных на среднее мнение, когда моменты влияния являются стратегией игрока	52
2.1 Модель динамики мнений в небольших социальных группах при выборе игроком моментов влияния на мнения агентов	52
2.2 Случай выбора игроком моментов влияния и валидации мнений агентов в одинаковые моменты времени	59

2.3	Случай различных моментов влияния и валидации мнений.....	66
2.4	Численное моделирование	72
2.4.1	Численный пример для Раздела 2.1	72
2.4.2	Численное моделирование для раздела 2.2	74
2.4.3	Пример для раздела 2.3	76
2.5	Заключение к главе 2.....	79
Глава 3 Динамика мнений в небольших социальных группах с		
двумя центрами влияния		
3.1	Случай, когда два игрока валидируют мнения агентов в терминальный момент времени	80
3.2	Случай наличия у игроков одинакового набора моментов валидации мнений агентов	85
3.3	Случай выбора двумя игроками разных наборов моментов времени для управления мнениями агентов.....	92
3.4	Численное моделирование	99
3.4.1	Примеры для раздела 3.1.....	99
3.4.2	Численные примеры для раздела 3.2.....	103
3.4.3	Численные примеры для раздела 3.3.....	105
3.5	Заключение к главе 3.....	111
Заключение.....		113
Список литературы.....		116
Приложение		126

Введение

Актуальность темы диссертационного исследования

С древних времен люди обменивались мыслями и мнениями, начиная с личного общения, обмена письмами, и заканчивая современными онлайн-платформами. Мы все вовлечены в социальные взаимодействия, такие как обсуждения популярных тем в социальных сетях, принятие решений избирателями во время политических выборов и небольшие взаимодействия в повседневной жизни. Социальная среда, в которой живут люди, их взаимодействие с другими людьми, влияние СМИ на них и многие другие факторы могут влиять на мысли и мнения людей, тем самым создавая сложную сеть формирования мнений. В этой сети распространение, принятие и трансформация мнений являются не только результатом индивидуального поведения, но и отражением динамики группового или общественного мнения. В этом динамическом процессе люди могут достичь консенсуса, а могут возникнуть разногласия. В работе изучаются эти процессы и предлагаются математические модели процесса формирования мнений, называемого «динамикой мнений».

Изучение динамики мнений охватывает несколько дисциплинарных областей, включая социальные науки, компьютерные науки, математику и физику, и используется для понимания и анализа ряда сложных социальных явлений. Результаты данного исследования динамики мнений могут быть использованы политическими деятелями и помочь им лучше понять тенденции

в динамике общественного мнения и сформулировать политические решения, соответствующие общественным потребностям и ожиданиям. Исследователи также могут проводить поиск влиятельных и ключевых узлов среди людей в социальных сетях, которые могут играть важную роль в распространении информации, тем самым помогая эффективно направлять общественное мнение и достигать целевого мнения. В моделях динамики мнений также изучаются закономерности изменений в сетях для лучшего определения путей распространения информации в сети и предложения стратегий распространения информации в реальном времени, например, для профилактики и контроля эпидемий, предупреждения о стихийных бедствиях и т.п. Кроме того, изучение динамики мнений может помочь компаниям лучше понять спрос и предпочтения потребителей для разработки более эффективных маркетинговых стратегий по увеличению продаж и узнаваемости бренда. Предприятия также могут прогнозировать поведение потребителей и намерения покупки для оптимизации продаж, выработки стратегий ценообразования и продвижения продукции.

В целом, можно сказать, что моделирование динамики мнений проводится для выработки индивидуальных стратегий. Это означает, что моделирование динамики мнений чувствительно к новым идеям, которые могут влиять на динамический процесс. Чтобы найти лучшую модель для описания процесса динамики мнений, многие исследователи склонны использовать в своих моделях теорию игр. Теория игр — математическая область для изучения взаимодействия людей, и в сочетании с изучением динамики мнений она помогает углубить анализ передачи информации между людьми. Такой комплексный подход позволяет математическому моделированию учитывать особенности предметной области и находить соответствующие решения. Например, в маркетинге выбор правильного времени рекламы и промоакций имеет решающее

значение для продаж продукта. Аналогичная проблема выбора правильного времени для совершения действия, например, влияния на социальную сеть, возникает и во время политических дебатов, предотвращения дезинформации и т.п. Кроме того, учет влияния других людей и их количества также влияет на изменение индивидуальных мнений. Поэтому влияние структуры социальных сетей на динамику мнений также является одним из приоритетов моего исследования.

Эта диссертация посвящена моделированию динамики мнений в небольших социальных сетях. В предлагаемых моделях рассматриваются аспекты выбора «правильного времени» для влияния на мнения агентов в социальной сети, а также валидации мнений агентов в сети, когда присутствуют игроки или инфлюенсеры, решающие задачи минимизации своих затрат. Стоит надеяться, что проведенные исследования могут дать некоторые идеи для решения реальных проблем в социальных сетях.

Степень разработанности проблемы в литературе

В соответствии с различными целями социального развития моделирование динамики мнений имеет много классификаций. Например, модели подразделяются на модели с непрерывными мнениями [11, 20] и дискретными мнениями [15, 28]. Модели динамики мнений можно изучать на макро- или микроуровне с учетом сложности социальных сетей. Макромодели обычно используются для описания эволюции мнений в больших социальных сетях, которые могут упростить правила их эволюции и анализа, например, модель Изинга [55, 73] и модель избирателя [14, 47, 70]. Напротив, микромодели подходят для небольших социальных сетей, которые описывают эволюцию мнения с точки зрения отдельного человека, например, модель ДеГроота [19]. Микроскопические модели также подходят и для описания больших социальных

сетей, но с поправками. Динамика мнений изучалась в статье Френча [25], в которой модель построена на простых предположений о межличностных отношениях, но может быть применена к описанию многих сложных явлений, она использовалась в социологии и психологии. Позже Г. Рэй Фанкхаузер предложил модель динамики общественного мнения [27], показав, что новости в СМИ играют важную роль в формировании общественного мнения и восприятия реальности. Основываясь на исследованиях Френча, ДеГроот предложил свою модель достижения консенсуса, которая сделала его модель классической и фундаментальной в этой области. Он был одним из первых, кто использовал теорию марковских процессов для моделирования динамики мнений в социальных сетях.

Модель ДеГроота применима к различным сценариям, она позволяет делать различные модификации, из нее получена модель ограниченного доверия, учитывающая тот факт, что на мнение отдельного человека влияют только мнения других людей, не отличающихся от его собственного мнения более чем на определенную величину. Среди моделей ограниченного доверия наиболее репрезентативными являются модели Деффюанта-Вайсбуха [18] и Хегсельмана-Краузе [46]. Они довольно похожи, но различаются правилами обновления мнений, причем первая фокусируется на взаимодействиях между двумя индивидуумами, а вторая — на межгрупповых взаимодействиях. Модель Фридкина-Джонсена [26, 69] предлагает модификацию модели ДеГроота, предполагающую, что индивидуумы частично упрямы, т. е. индивидуумы будут придерживаться своих первоначальных мнений с некоторым коэффициентом.

Модели в [67, 50] используются для изучения многомерной динамики мнений в социальных сетях. Обе модели имеют схожие информационные структуры. Первая учитывает влияние таких факторов, как индивидуальные вза-

имодействия, упрямство агентов и скорость изменения мнений или для достижения консенсуса или диссенсуса, в то время как вторая фокусируется на игровой постановке и предлагает реализацию равновесия по Нэшу. Изучая групповое поведение [66], можно проанализировать факторы, влияющие на формирование мнения в многослойных сетях, в частности, такими факторами могут быть раса и идеология. Работа [6] рассматривает многопопуляционную игру среднего поля (MPMFG), эта модель может использоваться для оценки и прогнозирования того, как на поведение людей разных групп или популяций влияют убеждения и мнения других групп.

Модель максимизации мнений может быть использована для разработки подходящих алгоритмов для моделирования распространения информации в группах. Работа [44] рассматривает динамику активации мнений (предыдущие исследования, в которых мнения остаются неизменными после активации узла, не соответствуют реальным сценариям, где мнения меняются со временем), алгоритм улучшает моделирование распространения рациональных мнений. В [36] авторы предлагают практические и эффективные алгоритмы для формирования позитивных мнений у целевых агентов, формируя общие позитивные мнения при распространении информации. Исследование [57] объединяет оценку мнений и распространение влияния при маркетинговых мероприятиях, целью которых является максимизация количества пользователей, знающих о продукте от активированного ранее пользователя. Предлагаемая структура активного обучения улучшает общее распространение мнений в социальных сетях. Взаимодействие между социальным влиянием, индивидуальным упрямством и эволюцией мнений рассматривается в [5], где демонстрируется, что динамика мнений приходит к консенсусу при определенных условиях, и предполагает разумные изменения в социальных отношениях и индивидуальных убеждениях. В статье [68] изучается фор-

мирование консенсуса в социальных сетях с использованием динамической некооперативной игровой модели, в которой каждый участник минимизирует функцию издержек.

В настоящее время исследователи интересуются изучением и моделированием социальных сетей в динамике. Существует большое количество участников сети, а также внешних сил, пытающихся повлиять на этих участников. Участники социальной сети обычно называются агентами, а внешние силы, влияющие на их мнения, — игроками. Развитие теории многоагентных систем [21] позволяет решить проблему сложности социальных сетей. Эти системы служат инструментом для декомпозиции и моделирования сложных взаимодействий агентов, которые используют собранную информацию для принятия решений. Такие системы широко используются для моделирования динамики мнений. Модели предназначены для описания обмена информацией между участниками социальной сети. Со временем на мнение участника сети могут влиять его соседи или внешние силы. Важно понимать, как пользователи сети обновляют свои мнения на основе мнений своих соседей и глобальной структуры мнений, которая формируется, когда пользователи обновляют свои мнения интерактивно. Статья [16] предлагает модель предвзятого избирателя, изучающую обновление мнений пользователей на основе мнений их соседей. Она также выдвигает предварительную теорию конвергенции и структуры мнений во всей сети. Однако, в реальной жизни консенсус редко достигается в динамике мнений. Как же тогда люди формируют свои собственные мнения? Статья [12] изучает социологическую модель, интерпретируя повторное усреднение как динамику наилучших ответов в базовой игре с заданными выигрышами, и исследует стоимость несогласия (диссенсуса) для этой модели. Предположим, что каждый агент обменивается мнениями со всеми своими соседями на каждом шаге. В частности, в модели

Хегсельмана-Краузе определение соседей каждого агента требует доступа к мнениям всех агентов. Однако это предположение может быть сомнительным в современном обществе. Поэтому в статье [24] рассматриваются свойства конвергенции динамических представлений с локальными взаимодействиями и ограниченным обменом информацией. Авторы предлагают достаточно общую модель, в которой агенты обновляют свои мнения, округленные до средневзвешенного значения мнений в их районе. Рассматриваются два варианта модели Хегсельмана-Краузе, одна из которых предполагает фиксированную социальную сеть, а другая ограничивается некоторой областью агентов, определяемой случайной выборкой на каждом шаге. Определение правил взаимодействия важно при изучении динамики мнений и условий достижения консенсуса. В статье [64], вдохновленной теорией газовой динамики, предлагается модель динамики мнений в многоагентной системе, состоящей из двух классов агентов. Поскольку понимание закономерностей изменения общественного мнения часто игнорируется, в статье [54] авторы предлагают многосубъектную модель, которую можно использовать для выявления некоторых механизмов, вызывающих изменение мнения. Изменение общественного мнения в этой модели представляет собой процесс индивидуальных сдвигов мнений, вызванных изменениями во мнениях высокоррелированных субъектов.

Теория игр среднего поля широко использовалась в изучении динамики мнений. В работе [53] выбор стратегии одного агента зависит от массового поведения других агентов. Эта теория активно применяется во многих областях, включая экономику, физику, биологию и инженерные науки (см. [1, 8, 9, 42]). Для ситуации, когда взаимодействуют несколько социальных групп, авторы [10] изучают эмуляцию, имитацию и стадное поведение агентов. В статье представлен подробный анализ результатов игры среднего поля.

Объединение динамики мнений с теорией оптимизации приводит к некоторым новым результатам, например, линейно-квадратичная задача оптимального управления или игра [61] фокусируется на влиянии различных структур коммуникации на формирование мнений и решается задача минимизации затрат на управления мнениями. Исследование [7] анализирует задачу оптимизации управления информацией и предлагает сведение определенного класса задач динамического управления к типичной задаче исследования управляемости и проектирования линейных дискретных систем управления. Некоторые работы по динамике мнений также формулируются как линейно-квадратичные задачи или игры с дискретным временем [48, 58]. Модели динамики мнений с кооперативными и некооперативными влияющими факторами рассматриваются в [71, 72]. Задачи оптимального управления в среднем поле изучаются в [2, 22, 23]. Многие существующие модели показывают, что внешние факторы играют чрезвычайно важную роль в достижении консенсуса среди агентов. Целью статьи [77] является исследование влияния внешних факторов на участников для достижения консенсуса в социальных сетях. Задачи удержания мнения всех участников около predetermined уровня были рассмотрены в оптимизационной и игровой постановке с одним или двумя игроками, а оптимальное управление и равновесие были найдены с использованием уравнений Беллмана. Существует несколько исследований, рассматривающих влияние среднего мнения в обществе на мнения отдельных лиц с ограниченными возможностями в линейно-квадратичной задаче оптимального управления [32, 33]. В работах [31] и [30] рассматриваются линейно-квадратичные задачи оптимизации в моделировании динамики мнений. Первая работа фокусируется на валидации мнений агентов в конечном время временного интервала. Последняя работа фокусируется на задаче оптимизации с учетом разницы между мнениями агентов и социально желательными

мнениями для заданного количества моментов валидации мнений агентов сети.

Моделирование динамики мнений может играть важную роль в решении проблемы распространения информации в социальных сетях. В этом контексте данное исследование рассматривает многогранную тему конкурентной динамики мнений при различных социальных сценариях, таких как интернет-маркетинг, реклама, акции, голосование [13, 40, 52] и т.д. Основная цель — изучить сложные механизмы, лежащие в основе конкуренции и распространения мнений, которые являются ключевыми факторами в формировании мнений в рамках связанных сообществ. Сценарий, в котором два центра влияния конкурируют за внимание агентов внутри сети, рассматривается в [62]. Проводится анализ ограничений, налагаемых сетевой структурой. Авторы находят необходимые условия равновесия по Нэшу и устойчивого состояния для заданной динамики состояния. Модель SI_1SI_2S вводится для управления распространением двух мнений [41]. Авторы находят стратегии равновесия по Нэшу в классе программных стратегий, которые позволяют агитаторам активно отслеживать распространение мнений и с учетом адаптировать свои стратегии. Инновационная перспектива предлагается посредством введения проблемы рентабельной конкуренции (СЕС) [59]. Разработан многоцелевой подход к оптимизации (МОСЕС), нацеленный на достижение большего количества голосов с минимальными затратами. В отличие от модели ДеГрота, исследование [45] вводит инновационное измерение, учитывающее как индивидуальную конкуренцию, так и методы переключения в социальной сети. Анализ показывает, влияет ли структура сети (сбалансированная или нет) на мнения для достижения консенсуса. В статье [60] рассматривается проблема максимизации влияния в социальной сети, где два игрока конкурируют с помощью динамических стратегий нацеливания. Теоретико-игровая модель

конкурентного распространения информации в социальной сети предлагается в [78]. Показано, что скорость распространения информации зависит от характеристик индивидов. В статье [39] авторы исследуют идею поддержания скалярного мнения каждого агента выше заданного уровня в течение конечного временного интервала. Они получают оптимальную траекторию управления, используя принцип максимума Понтрягина.

Инфлюенсеры или медиацентры используют различные методы для управления мнениями участников социальных сетей по заданной теме, а затем пытаются удержать мнения ближе к желаемому уровню, этот процесс можно смоделировать как динамическую игру конкуренции за мнения агентов [29, 49, 51].

Цели работы

Основная цель этой работы — изучить динамику мнений в небольших социальных сетях в некооперативных и игровых условиях, принимая во внимание два аспекта: (i) инфлюенсер или игрок может оптимально выбирать моменты валидации мнений, в которые мнения агентов в сети учитываются в его целевой функции, (ii) игрок может оптимально выбирать моменты влияния, в которые он контролирует (дает некоторый импульс) мнения агентов, и эти множества моментов времени могут быть одинаковыми или разными в зависимости от цели моделирования. Требуется найти соответствующие оптимальные стратегии, оптимальные траектории состояний в задачах оптимизации, а также равновесные стратегии и соответствующие траектории состояний для заданных игровых постановок. Требуется провести эксперименты для анализа модели на чувствительность к ее параметрам. Три главы этой диссертации отвечают на конкретные исследовательские вопросы:

Вопрос 1: Каков оптимальный набор «значимых» периодов, которые сле-

дует учитывать в целевой функции игрока?

Вопрос 2: Какой набор моментов времени будет оптимальным для игрока, чтобы в эти моменты влиять на мнения агентов?

Вопрос 3: Каково влияние конкуренции между игроками на динамику мнений и каковы их издержки, когда количество игроков больше одного? Каким будет равновесие?

Основные задачи

Для решения задач оптимального управления динамикой мнений, изучения конкурентные модели с ограничениями на поведение игроков и ответа на приведенные выше исследовательские вопросы, я формулирую следующие задачи своей работы:

1. Рассмотрим задачу выбора моментов валидаций мнений членов сети для небольших социальных групп. Предполагаем, что используются разные модели выбора таких моментов времени: 1) игрок предполагает, что мнение агента в последний момент времени является значимым, и мы включаем слагаемое с мнениями агентов в терминальный момент времени в функционал игрока, никакие другие мнения не включены в его функционал; 2) игрок может выбрать множество моментов времени, являющихся значимыми, и включить их в свой целевой функционал. Задача состоит в том, чтобы найти оптимальное решение, т. е. оптимальный набор таких моментов времени, минимизирующий затраты игрока.
2. Рассмотрим задачу выбора множество моментов влияния на мнения агентов сети. Изучим три сценария: 1) игрок валидирует мнения агентов сети в каждый момент времени, но он может выбрать множество моментов влияния в ограниченном количестве, в эти моменты игрок контролирует

мнения агентов; 2) игрок выбирает множество моментов влияния ограниченной мощности, и именно в эти моменты времени мнения агентов сети валидируются; 3) игрок может выбрать два различных набора моментов времени (оба ограниченных размеров), в которых он влияет на мнения агентов и валидирует их в другие моменты. Задача состоит в том, чтобы найти оптимальную стратегию игрока и оптимальную траекторию состояния при этих ограничениях.

3. Изучим модель конкуренции между игроками, когда они оба влияют на мнения агентов. При увеличении числа игроков сохраняются правила формирования мнений в обществе. Сценарии, рассматриваемые в первых двух пунктах, могут быть рассмотрены в игровой постановке. Задача состоит в нахождении равновесия по Нэшу и соответствующей ему траектории состояния.

Научная новизна

Диссертация содержит результаты исследования динамики мнений и предлагает несколько новых моделей с ограничениями на поведение игроков или инфлюенсеров. Подробно анализируются факторы влияния на решения сформулированных задач оптимизации, включая множество моментов валидации мнений, множество моментов влияния на мнения агентов и конкуренцию между игроками. Полученные результаты могут быть полезными для лиц, принимающих решения при изучении проблем, возникающих в социальных сетях.

В данной диссертации находятся оптимальные стратегии для лиц, принимающих решения при отсутствии сотрудничества или конкуренции. Время является ключевым фактором, влияющим на динамику мнений. Изучается,

в какое время игроки валидируют мнения и в какие моменты влияют на мнения агентов, стремясь минимизировать свои издержки. Во-первых, игрокам не нужно постоянно следить за процессом обновления мнений, что может снизить издержки. Во-вторых, игроки принимают решения или влияют на агентов сети в нужные моменты времени, что может значительно повысить эффективность действий лиц, принимающих решения.

Наконец, проведен сравнительный анализ влияния различных факторов на результаты работы и выполнено численное моделирование полученных результатов. Экспериментальные результаты демонстрируют применение необходимых условий, представленных в теоремах. Все модели написаны в Matlab. Все теоретические результаты и программные коды, использованные в данной диссертации, созданы автором данной работы самостоятельно.

Методы исследования

В диссертации использовались основные понятия и методы теории игр (равновесие по Нэшу, оптимальность по Парето и игры в нормальной форме) и динамической теории игр (равновесие по Нэшу в классе программных стратегий, метод уравнений Эйлера и принцип максимума Понтрягина), теории оптимизации и основные понятия математического программирования. Сравнительный анализ применяется в экспериментальной части диссертации.

Теоретическая и практическая значимость

Теоретические результаты этой работы позволяют расширить применение моделей динамики мнений, ориентированной на среднее мнение, рассмотренных с точки зрения теории некооперативных игр. По сравнению с исследованиями, требующими большого количества реальных данных, такими как глу-

бокое обучение и искусственный интеллект, модели, которые построены в данной работе для моделирования и анализа, могут относительно точно отражать реальную ситуацию. Это связано с тем, что в реальности данные о мнении людей часто трудно получить, и многие из них неоднозначны. Более того, часто бывает трудно напрямую анализировать эти данные. Вместо этого моделирование проблемы путем упрощения правил взаимодействия может предоставить идеи для лиц, принимающих решения.

В главе 1 предлагаются модели динамики мнений с двумя типами ограничений на поведение игрока. Модели применимы к реальным ситуациям, поскольку в реальности инфлюенсеры не валидируют мнения общества все время, а скорее находят некоторые определенные моменты, значимые для понимания того, как развиваются мнения в динамике. Мной охарактеризовано оптимальное поведение игрока в этих случаях.

В главе 2, в основном, рассматривается вопрос принятия решений с временными ограничениями на моменты влияния. В новых моделях, представленных в этой главе, игрок может выбирать ограниченное количество моментов валидации мнений и влияния на мнения агентов. Мной сформулированы задачи оптимизации и охарактеризовано оптимальное поведение при различных ограничениях на множество моментов влияния.

Глава 3 обобщает модели и результаты, представленные в главах 1 и 2, для случая нескольких игроков. Исследование в этой главе представляет больше возможностей для моделирования и выработки рекомендаций для практического принятия решений и помогает лицам, принимающим решения, учитывать различные сценарии. В этой главе мной охарактеризованы равновесия по Нэшу для игр с двумя игроками во всех рассмотренных случаях.

Исследование, проведенное в диссертации, поддержано стипендией правительства Китая (CSC), № 202109010042 (2021-2024), и грантом Российского

научного фонда (РНФ), № 22-21-00346 «Теоретико-игровые методы управления динамикой мнений в социальных сетях» (2022-2023).

Краткое описание работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложений. Каждая глава начинается с описания модели и формулировки проблемы, затем приводятся теоретические результаты с их доказательствами. Результаты, включая численное моделирование, иллюстрирующее теорию, представлены в конце каждой главы. Диссертация написана на 128 страницах (124 страницах в версии на английском языке), включает 19 таблиц и 38 рисунков. Библиография организована в алфавитном порядке и содержит 78 наименований.

Глава 1 посвящена изучению различных схем выбора моментов валидации мнений агентов. В разделе 1.1 описывается модель небольшой социальной сети, в которой игрок валидирует мнения агентов только в терминальный момент времени, вводится необходимая терминология, доказывается теорема о необходимых условиях существования оптимального управления. В разделе 1.2 проводится численное моделирование. В разделе 1.3 описывается модель, в которой игроки валидируют мнения агентов в ограниченное число моментов времени, приводится теорема о необходимых условиях оптимального управления с доказательством. В разделе 1.4 описываются численные эксперименты при меняющихся целевых мнениях игрока и количестве моментов валидации. Раздел 1.5 подытоживает результаты главы 1.

В главе 2 описываются модели динамики мнений при трех сценариях выбора моментов влияния на мнения агентов. В разделе 2.1 дается модель динамики мнений, в которой игроки влияют на мнения агентов в ограниченном количестве моментов времени, доказана соответствующая теорема. В разделе

2.2 описывается модель, в которой игрок как валидирует мнения, и влияет на них в одни и тех же моменты времени, кратко описываются обозначения и правила обновления мнений, доказывается теорема о необходимом условии оптимального управления. В разделе 2.3 рассматривается динамика мнений, когда моменты валидации и влияния на мнения агентов представлены двумя непересекающимися множествами моментов. Раздел 2.4 содержит численное моделирование и анализ всех моделей этой главы и, в частности, приводятся сравнительные эксперименты в разделах 2.4.2 и 2.4.3 для сравнения лучших и худших результатов с точки зрения затрат. Раздел 2.5 подытоживает главу.

Глава 3 приводит результаты моделирования некооперативной динамики мнений в присутствии конкуренции между игроками. Эта глава, в основном, обобщает модели, представленные в главах 1 и 2, на случай двух игроков: модель раздела 3.1 является обобщением модели раздела 1.1. Раздел 3.2 является обобщением раздела 1.2. Раздел 3.3 является обобщением раздела 2.1. Первые три раздела этой главы содержат соответствующие описания моделей, теоремы и доказательства. В разделе 3.4 приводится численное моделирование для каждой модели, дается сравнительный анализ полученных равновесий по Нэшу. Глава завершается выводами, приведенными в разделе 3.5.

Заключение диссертации содержит краткое описание результатов, полученных в работе.

Положения, выносимые на защиту

1. Представлены модели динамики мнений с различными сценариями ограничений на поведение игроков или инфлюенсеров в небольших социальных сетях. Ограничения следующие: 1) игрок валидирует мнение агента в последний момент времени, считая его значимым и включает мнения

агентов в терминальный момент времени в свой функционал, никакие другие мнения в функционале не рассматриваются; 2) игрок может выбрать множество моментов времени для включения их в набор значимых, и включить их в свой целевой функционал. Для всех этих моделей сформулированы задачи оптимизации для случая одного игрока. Найдены необходимые условия для оптимальных стратегий. Проведена серия численных экспериментов для проверки результатов и выводов о влиянии параметров на оптимальные стратегии.

2. Представлены модели динамики мнений с различными сценариями ограничений на моменты влияния игроков или инфлюенсеров на мнения агентов в небольших социальных группах. Ограничения следующие: 1) игрок может выбирать периоды, когда он влияет на мнения агентов, и мощность этого множества ограничена; 2) игрок может выбирать множество моментов влияния на мнения агентов, но они должны отличаться от моментов, когда он валидирует мнения агентов. Для всех этих моделей сформулированы задачи оптимизации и получены необходимые условия для оптимальных стратегий. Проведена серия численных экспериментов для наглядного представления теоретических результатов.
3. Получены необходимые условия для равновесий по Нэшу и соответствующих им траектории состояний для нескольких теоретико-игровых моделей, основанных на моделях из пунктов 1 и 2. Здесь предполагается наличие двух игроков, влияющих на агентов сети, и конкуренции за мнения агентов.

Основные научные результаты

1. В исследовании решается задача выбора оптимальных моментов валидации мнений агентов в социальной сети при ограничении на количество таких моментов, см. статью [33] в библиографии (личный вклад составляет не менее 80%).
2. Найдены равновесия по Нэшу в динамических играх, моделирующих соревнование двух игроков, которые минимизируют издержки от влияния на агентов при ограниченном числе моментов влияния, см. статью [35] в библиографии (личный вклад не менее 100%).
3. В случае, когда игрок влияет на мнение агента в определенные моменты времени, чтобы приблизить мнение в социальной сети к своему целевому мнению и минимизировать издержки, найдено оптимальное решение, см. статью [34] в библиографии (личный вклад не менее 100%).
4. В случае, когда игроки могут оказывать влияние на агентов только в течение ограниченного количества моментов времени и минимизируют издержки за счет выбора моментов влияния, найдено оптимальное решение, см. статью [32] в библиографии (личный вклад не менее 80%).
5. Решена задача минимизации издержек центра влияния, который оказывает влияние на агентов сети только при заданном количестве моментов времени, и учитывает разницу между мнением агента и общественно целевым мнением, см. статью [30] в библиографии (личный вклад не менее 80%).
6. Решена задача минимизации издержек от влияния на мнения агентов, когда мнения агентов сети валидируются только в конечный период вре-

мени, найдено оптимальное решение задачи, см. статью [31] в библиографии (личный вклад не менее 80%).

7. Рассматривается игра двух лиц, минимизирующих свои издержки на влияние на мнения агентов при ограниченном числе моментов валидации мнений, найдено равновесие по Нэшу в программных стратегиях, см. работу [29] в библиографии (личный вклад не менее 100%).

Апробация результатов

Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались на Международных конференциях «Теория игр и менеджмент» (Санкт-Петербург, 2021, 2022); Международной научной конференции «Процессы управления и устойчивость» (Санкт-Петербург, 2021, 2022), на семинарах кафедры математической теории игр и статистических решений СПбГУ.

Публикации

По результатам диссертационной работы опубликованы следующие работы: [29, 30, 31, 32, 33, 34, 35]. Статьи [34] и [35] опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК РФ. Работы [30, 32, 33] индексируются в Scopus и Zentralblatt MATH.

Публикации по теме работы

- I. Gao J. Two-player opinion control game with limited observation moments // Control Processes and Stability. 2022. Vol. 9. N. 1. P. 464-468.
- II. Gao J., Parilina E. M. Opinion Control Problem with Average-Oriented Opinion Dynamics and Limited Observation Moments // Contributions to

- Game Theory and Management. 2021. Vol. 14. P. 103-112.
- III. Gao J., Parilina E. M. Average-oriented opinion dynamics with the last moment of observation // Control Processes and Stability. 2021. V. 8, N. 1. P. 505-509.
- IV. Gao J., Parilina E. M. Optimal control in a multiagent opinion dynamic system // Contributions to Game Theory and Management. 2022. Vol. 15. P. 51-59.
- V. Gao J., Parilina E. M. Opinion dynamics in multiagent systems with optimal choice of opinion verification moments // Doklady Mathematics, 2023. Vol. 108. Suppl. 1. P. S75-S85.
- VI. Gao J. Controlled opinion formation in multiagent systems with constraints on control set // In: Petrosyan, L.A., Mazalov, V., Zenkevich, N.A. (eds) Frontiers of Dynamic Games. GTA 2022. Trends in Mathematics. Birkhäuser, Cham. 2024. P. 27-42.
- VII. Gao J. Competition on agents' opinions in average-oriented opinion small dynamic systems with limited number of controls // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2024. Vol. 20. N. 3. P. 402-413.

Благодарности

Прежде всего, я хотела бы поблагодарить своего руководителя Елену Парилину. Она руководила моими исследованиями в России в течение 5 лет. Ее терпение и мягкость свели на нет все мои тревоги, переживания и ошибки. Ее стиль ведения дел оказал на меня положительное влияние. Профессор, я

всегда буду считать вас своим образцом для подражания. Во-вторых, я хотела бы поблагодарить свою семью за их постоянную поддержку и ободрение. В частности, я хотела бы поблагодарить свою маму, г-жу Сюй Ся, за ее бескорыстную любовь и поддержку, которые позволяют мне сохранять оптимистичный настрой даже в чужой стране. Я верю, что судьба предопределена, и я в конечном итоге добьюсь успеха.

Глава 1

Динамика мнений в социальных группах, ориентированных на среднее мнение, с ограничениями на моменты валидации

1.1 Случай, когда имеют значение мнения в терминальный момент времени

Рассмотрим небольшую социальную сеть, состоящую из двух агентов. Агенты могут влиять друг на друга, и их мнения меняются со временем, которое является дискретным и конечным. Определим мнение агента 1 в момент времени t как $x_1(t) \in \mathbb{R}, t = 0, \dots, T$, а мнение агента 2 в момент времени t как $x_2(t) \in \mathbb{R}, t = 0, \dots, T$. Вектор $(x_1(t), x_2(t))$ представляет переменную состояния в момент времени t .

Мы также предполагаем, что есть игрок, который может влиять на агента 1 в любой момент времени $t = 0, \dots, T - 1$ с помощью управляющей переменной $u(t)$. Игрок не влияет на мнение агента 1 в момент времени T . У игрока есть целевое мнение s , и он заинтересован в сведении мнений агентов к этому целевому мнению в терминальный момент, т. е. он стремится миними-

зировать разницу между целевым мнением и мнениями агентов в социальной сети в терминальный момент времени. Также предположим, что у игрока нет возможности проверить мнения агентов во времени.

Динамика мнений двух агентов 1 и 2 задается таким образом:

$$x_1(t+1) = x_1(t) + a_1 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_1(t) \right) + u(t), \quad (1.1)$$

$$x_2(t+1) = x_2(t) + a_2 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_2(t) \right) \quad (1.2)$$

с начальным условием

$$x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0, \quad (1.3)$$

где $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$.

Функционал игрока есть

$$J(u) = \sum_{t=0}^{T-1} \delta^t (cu^2(t)) + \delta^T \left((x_1(T) - s)^2 + (x_2(T) - s)^2 \right), \quad (1.4)$$

и он стремится его минимизировать.

Theorem 1.1. Пусть $\{u^*(t) : t = 0, \dots, T-1\}$ — оптимальная стратегия, минимизирующая функционал (1.4) при начальных условиях (1.3) и динамике (1.1) и (1.2), и $\{(x_1^*(t), x_2^*(t)) : t = 0, \dots, T\}$ — соответствующая траектория состояния, тогда оптимальная стратегия $u^*(t), t = 0, \dots, T-1$ определяется следующим образом:

$$u^*(t) = z^*(t+1) - Az^*(t),$$

и соответствующая оптимальная траектория состояния $(x_1^*(t), x_2^*(t)), t =$

$1, \dots, T$ удовлетворяет уравнениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} cA\delta^2 z(t+1) - Bz(t) + Cz(t-1) - Acz(t-2) = 0, \\ t = 2, \dots, T-1, \\ -\left(cA - \frac{a_2\delta}{2}\right) z(T) + \left(A^2c + \frac{c}{\delta}\right) z(T-1) - A\frac{c}{\delta}z(T-2) \\ = -\delta a_2 (x_2(T) - s), \\ \frac{c}{\delta} (z(T) - Az(T-1)) + z(T) + x_2(T) - s = 0, \\ x_2(t+1) = x_2(t) + \frac{a_2}{2}z(t), \quad t = 1, \dots, T-1, \end{array} \right. \quad (1.5)$$

где $z^*(t) = x_1^*(t) - x_2^*(t)$, $A = 1 - \frac{a_1+a_2}{2}$, $B = cA\delta + c\delta + cA^2\delta$, и $C = c + cA\delta + cA^2\delta$.

Доказательство. Рассмотрим новую переменную $z(t)$:

$$z(t) = x_1(t) - x_2(t), t = 0, \dots, T.$$

Из уравнений состояния (1.1), (1.2), подставляя $z(t)$, получаем новые уравнения состояния:

$$z(t+1) = Az(t) + u(t), \quad (1.6)$$

$$x_2(t+1) = x_2(t) + \frac{a_2}{2}z(t) \quad (1.7)$$

с начальным условием

$$z(0) = x_1^0 - x_2^0, x_2(0) = x_2^0,$$

где $A = 1 - \frac{a_1+a_2}{2}$.

Находим выражение для $u(t)$ из (1.6):

$$u(0) = z(1) - Az(0),$$

$$u(t) = z(t+1) - Az(t) = q(z(t), z(t+1)), t = 0, \dots, T-1.$$

Затем подставляем выражение в $\sum_{t=0}^T \delta^t g_t(x(t), x(t+1))$, и получаем:

$$\begin{aligned} J(z, x_2) &= c(z(1) - Az(0))^2 + \sum_{t=1}^{T-1} \delta^t \left[c(z(t+1) - Az(t))^2 \right] \\ &+ \delta^T \left[(z(T) + x_2(T) - s)^2 + (x_2(T) - s)^2 \right]. \end{aligned}$$

Для минимизации $J(z, x_2)$ при динамике (1.6)-(1.7), формируем функцию Лагранжа

$$L(z, x_2, k) = J(z, x_2) + \sum_{t=1}^{T-1} k_t \left(x_2(t+1) - x_2(t) - \frac{a_2}{2} z(t) \right).$$

Условия оптимальности первого порядка: $\frac{\partial L(z, x_2)}{\partial z(t)} = 0, t = 1, \dots, T$ и $\frac{\partial L(z, x_2)}{\partial x_2(t)} = 0, t = 1, \dots, T$.

Используя метод уравнений Эйлера, получаем:

$$\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial z(t)} = 2c(z(t) - Az(t-1)) - 2A\delta c \{z(t+1) - Az(t)\},$$

$$\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial x_2(t)} = 0, \forall t \neq T,$$

$$\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial x_2(T)} = \delta^T \{2(z(T) + x_2(T) - s) + 2(x_2(T) - s)\},$$

$$\begin{cases} -\frac{cA}{\delta} z(t-1) + z(t) \left(\frac{c}{\delta} + cA^2 \right) - cAz(t+1) = \frac{a_2}{4} k_t \delta^{-t}, \\ t = 1, \dots, T-1, \\ \frac{c}{\delta} (z(T) - Az(T-1)) + z(T) + x_2(T) - s = 0, t = T, \\ k_{t-1} - k_t = 0, t = 2, \dots, T-1, \\ \delta^t [2z(t) + 4(x_2(t) - s)] + k_{t-1} = 0, t = T \end{cases} \quad (1.8)$$

с начальным условием $z(0) = x_1^0 - x_2^0, x_2(0) = x_2^0$.

Исключая k_t из системы (1.8), получим:

$$\begin{cases} cA\delta^2 z(t+1) - Bz(t) + Cz(t-1) - Acz(t-2) = 0, & t = 2, \dots, T-1, \\ -\left(cA - \frac{a_2\delta}{2}\right) z(T) + \left(A^2c + \frac{c}{\delta}\right) z(T-1) - A\frac{c}{\delta} z(T-2) = -\delta a_2 (x_2(T) - s), \\ \frac{c}{\delta} (z(T) - Az(T-1)) + z(T) + x_2(T) - s = 0, \end{cases}$$

где $B = cA\delta + c\delta + cA^2\delta$, и $C = c + cA\delta + cA^2\delta$.

Теорема доказана. □

1.2 Числовые примеры для Раздела 1.1

Пример 1.1. Пусть $a_1 = 0.2, a_2 = 0.6, \delta = 1, c = 2$ и начальные значения $x_1(0) = 0.7, x_2(0) = 0.2$. Для $T = 10$ и целевого значения $s = 0.4$ оптимальные траектории состояния и управления представлены в таблице 1.1. Оптимальное значение функционала (1.4) равно 0.068.

Таблица 1.1: Оптимальные траектории управления и состояния.

t	0	1	2	3	4	5
$x_1(t)$	0.7000	0.4714	0.4159	0.4024	0.3991	0.3984
$x_2(t)$	0.2000	0.35	0.3864	0.3953	0.3974	0.3979
$z(t)$	0.5000	0.1214	0.0295	0.0071	0.0017	0.0005
$u(t)$	-0.1786	-0.04334	-0.0106	-0.00256	-0.00052	-0.0004
t	6	7	8	9	10	
$x_1(t)$	0.398	0.3984	0.3976	0.3984	0.3989	
$x_2(t)$	0.3981	0.398	0.3982	0.398	0.3981	
$z(t)$	-0.0001	0.0004	-0.0006	0.0004	0.0008	
$u(t)$	0.00046	-0.00084	0.00076	0.00056		

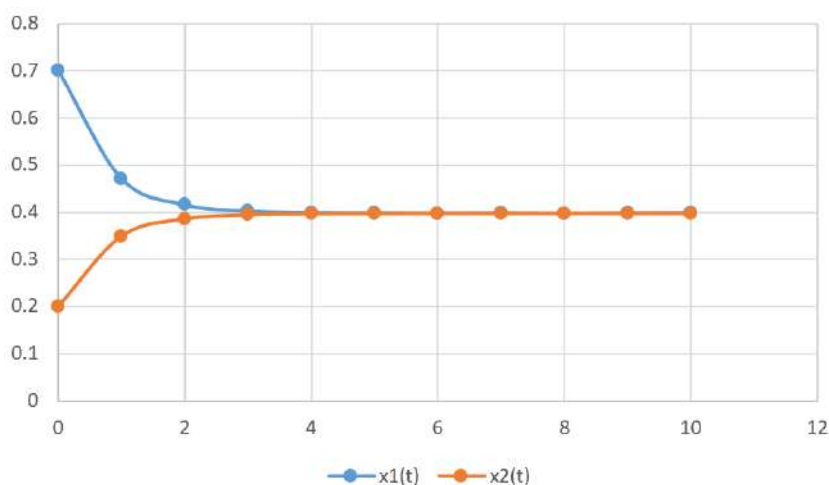


Рис. 1.1: Траектории состояния (синий — $x_1(t)$, красный — $x_2(t)$).

Для тех же параметров и продолжительности $T = 10$ представим оп-

тимальные траектории состояния и управления на рис. 1.1 и 1.2 соответственно.

На рис. 1.1 видно, что мнения обоих агентов постепенно приближаются к целевому мнению под влиянием игрока. На рис. 1.2 видно, что влияние игрока на агентов также становится стабильным.

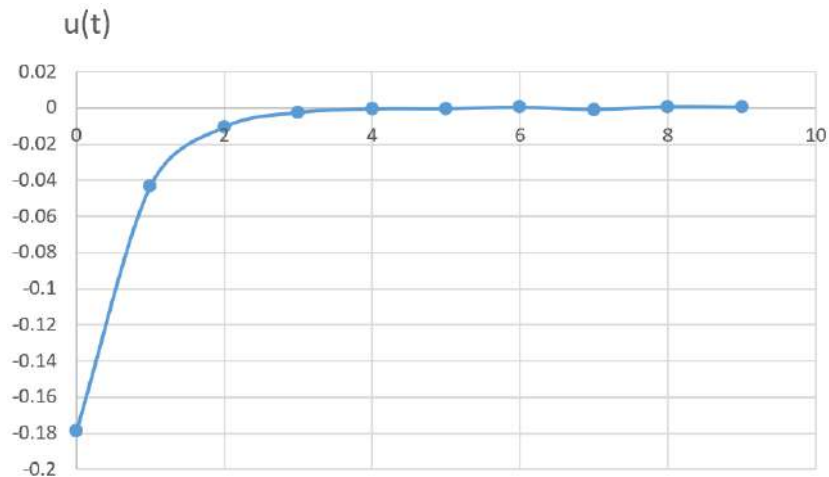


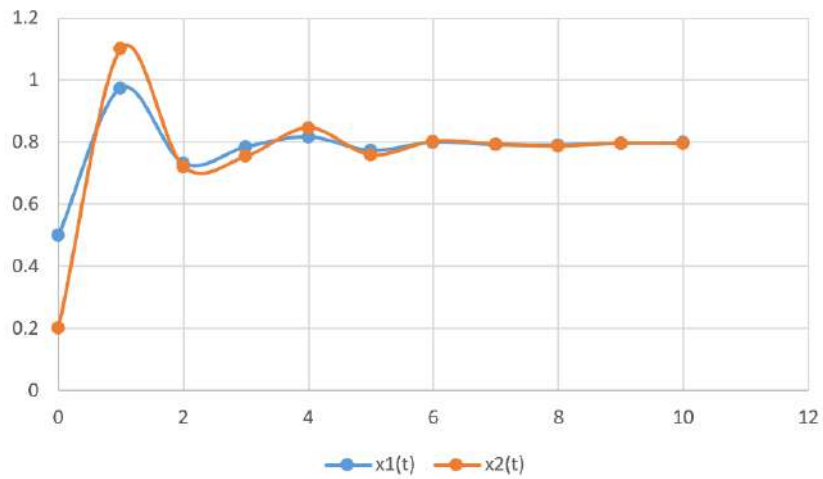
Рис. 1.2: Траектория управления $u(t)$.

Пример 1.2. Пусть $a_1 = 2, a_2 = 6, \delta = 1, c = 2$, и начальные мнения $x_1(0) = 0.5, x_2(0) = 0.2$. Для $T = 10$ и целевого мнения $s = 0.8$ оптимальные траектории состояния и управления представлены в таблице 1.2. Оптимальное значение функционала игрока (1.4) равно 1.499.

Таблица 1.2: Оптимальные траектории управления и состояния.

t	0	1	2	3	4	5
$x_1(t)$	0.5000	0.9738	0.7323	0.7847	0.8171	0.7735
$x_2(t)$	0.2000	1.1	0.7215	0.7539	0.8463	0.7588
$z(t)$	0.3000	-0.1262	0.0108	0.0308	-0.0292	0.0147
$u(t)$	0.7738	-0.3678	0.0632	0.0632	-0.0729	0.0411
t	6	7	8	9	10	
$x_1(t)$	0.7998	0.7918	0.7908	0.796	0.7978	
$x_2(t)$	0.8028	0.7938	0.7878	0.7967	0.7945	
$z(t)$	-0.003	-0.002	0.003	-0.0007	0.0033	
$u(t)$	-0.011	-0.003	0.0083	0.0012		

Представим оптимальные траектории состояния и управления на рис. 1.3 и 1.4 соответственно.

Рис. 1.3: Траектории состояния (синий - $x_1(t)$, красный - $x_2(t)$).

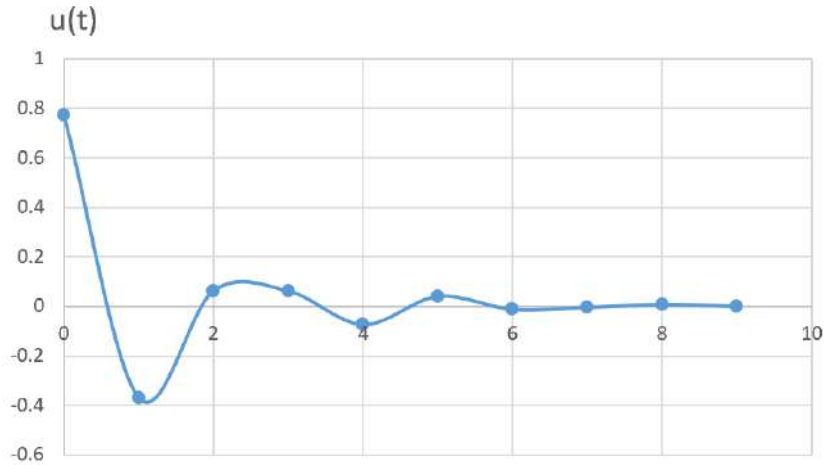


Рис. 1.4: Траектория управления $u(t)$.

На рис. 1.3 мы видим, что мнения обоих агентов под влиянием игрока постепенно приближаются к целевому мнению. По рис. 1.4 видно, что влияние игрока на агента также имеет тенденцию к стабилизации.

1.3 Случай валидации мнений в ограниченное число моментов времени

Рассмотрим модель социальной сети с двумя агентами.¹ Мнение агента 1 (агента 2) обозначается через x_1 (x_2). Агенты могут влиять на мнения друг друга посредством взаимодействия, поэтому их мнения со временем меняются. Предполагаем, что время дискретно и конечно. Определим мнение агента 1 в момент времени t как $x_1(t) \in \mathbb{R}$, $t = 0, \dots, T$ и мнение агента 2 в момент времени t как $x_2(t) \in \mathbb{R}$, $t = 0, \dots, T$. Вектор $(x_1(t), x_2(t))$ представляет переменную состояния в момент времени t .

Предположим также, что в социальной сети есть игрок, который может влиять на одного агента сети, скажем, агента 1. Обозначим его влияние на агента 1 в момент времени $t = 0, \dots, T - 1$ через $u(t) \in U \subset \mathbb{R}$. Игрок не

¹Модель легко обобщается на случай с любым конечным числом агентов. В работе демонстрируются результаты на двухагентной модели для упрощения интерпретации результатов.

влияет на мнение агента 1 в конечный момент времени T .

Динамика мнения агента зависит от текущего состояния и управления игрока. Мнение агента 1 в следующий момент времени зависит от текущего мнения агента 1, среднего социального мнения и уровня влияния или управления игрока. Мнение агента 2 в следующий момент времени зависит от текущего мнения агента 2 и среднего общественного мнения. Динамика мнений агентов определяется следующими уравнениями:

$$x_1(t+1) = x_1(t) + a_1 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_1(t) \right) + u(t), \quad (1.9)$$

$$x_2(t+1) = x_2(t) + a_2 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_2(t) \right) \quad (1.10)$$

с начальными условиями:

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0. \quad (1.11)$$

В уравнениях (1.9) и (1.10) константы $a_1 > 0, a_2 > 0$ обозначают убеждения или чувствительность агентов к среднему общественному мнению.

Предполагаем, что игрок может отслеживать или валидировать уровень мнения вдоль траектории только в некоторые моменты времени. Количество этих моментов равно k и оно фиксировано: $1 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq T - 1$, где $k < T$ известно, но неизвестно, какие периоды выбраны. Целевое мнение игрока равно $s \in \mathbb{R}$. Игрок стремится выбрать моменты $1 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq T - 1$ так, чтобы минимизировать свои затраты, имеющие вид:

$$J(u) = \sum_{t=0}^{T-1} \delta^t (cu^2(t)) + \sum_{j=1}^k \delta^{t_j} \left((x_1(t_j) - s)^2 + (x_2(t_j) - s)^2 \right) + \delta^T \left((x_1(T) - s)^2 + (x_2(T) - s)^2 \right), \quad (1.12)$$

где $\delta \in (0, 1]$ — дисконт-фактор и $c > 0$ — удельные издержки игрока на влияние.

Theorem 1.2. Пусть $\{u^*(t) : t = 0, \dots, T - 1\}$ — оптимальная стратегия, минимизирующая функционал (1.12) при начальных условиях (1.11) и уравнении динамики состояний (1.9) и (1.10), а также $\{(x_1^*(t), x_2^*(t)) : t = 0, \dots, T\}$ — соответствующая траектория состояния. Моменты $1 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq T - 1$ заданы. Тогда оптимальная стратегия $u^*(t), t = 0, \dots, T - 1$, определяемая как

$$u^*(t) = z^*(t + 1) - Az^*(t)$$

и соответствующая оптимальная траектория состояний $(x_1^*(t), x_2^*(t)), t = 1, \dots, T$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} Ac\delta z(t + 1) + Bz(t - 1) - Cz(t) \\ \quad - \frac{Ac}{\delta} z(t - 2) = 0, t = 2, \dots, T - 1, \\ Dz(t) - Ez(t - 1) - A\delta cz(t + 1) + \frac{Ac}{\delta} z(t - 2) \\ \quad = (a_2 - 1)\delta(x_2(t) - s) + x_2(t - 1) - s, \\ \quad t = t_j, j = 2, \dots, k, \\ c(z(t) - Az(t - 1)) + \delta(z(t) + x_2(t) - s) = 0, t = T, \\ \left(\frac{c}{\delta} + A^2c\right)z(T - 1) - \frac{Ac}{\delta}z(T - 2) - \left(Ac - \frac{a_2\delta}{2}\right)z(T) \\ \quad = a_2(x_2(T) - s), \\ x_2(t + 1) = x_2(t) + \frac{a_2}{2}z(t), t = 1, \dots, T - 1, \end{array} \right. \quad (1.13)$$

где $z^*(t) = x_1^*(t) - x_2^*(t)$, $A = 1 - \frac{a_1 + a_2}{2}$, $B = Ac + \frac{c}{\delta} + A^2c$, $C = Ac - c - A^2\delta c$, $D = c + A^2\delta c + \delta + Ac - \frac{a_2\delta}{2}$ и $E = Ac + \frac{c}{\delta} + A^2c + 1$.

Доказательство. Введем новую переменную $z(t)$:

$$z(t) = x_1(t) - x_2(t), t = 0, \dots, T.$$

Из уравнений динамики состояний (1.9), (1.10), принимая во внимание выражение $z(t)$, получаем новые уравнения динамики состояний:

$$z(t + 1) = Az(t) + u(t), \quad (1.14)$$

$$x_2(t+1) = x_2(t) + \frac{a_2}{2}z(t), \quad (1.15)$$

с начальным условием

$$z(0) = x_1^0 - x_2^0, x_2(0) = x_2^0,$$

где $A = 1 - \frac{a_1+a_2}{2}$.

Найдем выражение для $u(t)$ из уравнения (1.14) и получим

$$u(t) = z(t+1) - Az(t), \quad (1.16)$$

а также

$$u(0) = z(1) - Az(0).$$

Подставляя эти выражения в $\sum_{t=0}^T \delta^t g_t(x(t), x(t+1))$, можно переписать функционал в следующем виде:

$$\begin{aligned} J(z, x_2) = & c(z(1) - Az(0))^2 + \sum_{t=0}^{T-1} \delta^t \left[c(z(t+1) - Az(t))^2 \right] \\ & + \sum_{j=1}^k \delta^{t_j} \left[(z(t_j) + x_2(t_j) - s)^2 + (x_2(t_j) - s)^2 \right] \\ & + \delta^T \left[(z(T) + x_2(T) - s)^2 + (x_2(T) - s)^2 \right]. \end{aligned}$$

Чтобы минимизировать $J(z, x_2)$ при заданных уравнениях (1.15) и (1.16), запишем функцию Лагранжа:

$$L(z, x_2, k) = J(z, x_2) + \sum_{t=1}^{T-1} k_t \left(x_2(t+1) - x_2(t) - \frac{a_2}{2}z(t) \right).$$

Условия оптимальности первого порядка: $\frac{\partial L(z, x_2, k)}{\partial z(t)} = 0, t = 1, \dots, T$ и $\frac{\partial L(z, x_2, k)}{\partial x_2(t)} = 0, t = 1, \dots, T$.

Сначала находим производные и записываем полученные уравнения:

$$\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial z(t)} = \delta^{t-1} 2c(z(t) - Az(t-1)) - \delta^t 2Ac(z(t+1) - Az(t)),$$

$$t = 1, \dots, T-1, t \neq t_j,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial z(t)} &= \delta^{t-1} 2c(z(t) - Az(t-1)) - \delta^t 2Ac(z(t+1) - Az(t)) \\
&\quad + \delta^t 2(z(t) + x_2(t) - s), t = t_j, j = 1, \dots, k, \\
\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial x_2(t)} &= 0, t = 1, \dots, T-1, t \neq t_j, \\
\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial x_2(t)} &= \delta^t [2(z(t) + x_2(t) - s) + 2(x_2(t) - s)], t = t_j, j = 1, \dots, k,
\end{aligned}$$

Далее запишем систему условий первого порядка:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{c}{\delta}(z(t) - Az(t-1)) - Ac(z(t+1) - Az(t)) = \frac{a_2}{4} k_t \delta^{-t}, \\
t = 1, \dots, T-1, t \neq t_j, \\
\frac{c}{\delta}(z(t) - Az(t-1)) - Ac(z(t+1) - Az(t)) \\
+ (z(t) + x_2(t) - s) = \frac{a_2}{4} k_t \delta^{-t}, t = t_j, j = 1, \dots, k, \\
c(z(t) - Az(t-1)) + \delta(z(t) + x_2(t) - s) = 0, t = T, \\
k_{t-1} - k_t = 0, t = 1, \dots, T-1, t \neq t_j, \\
\delta^t [2z(t) + 4(x_2(t) - s)] - k_t + k_{t-1} = 0, t = t_j, j = 2, \dots, k, \\
\delta^t [2z(t) + 4(x_2(t) - s)] + k_{t-1} = 0, t = T,
\end{array} \right. \quad (1.17)$$

с начальными условиями $z(0) = x_1^0 - x_2^0$, $x_2(0) = x_2^0$.

Исключая k_t из системы (1.17), получаем систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l}
Ac\delta z(t+1) + Bz(t-1) - Cz(t) - \frac{Ac}{\delta}z(t-2) = 0, t = 2, \dots, T-1, \\
Dz(t) - Ez(t-1) - A\delta cz(t+1) + \frac{Ac}{\delta}z(t-2) \\
= (a_2 - 1)\delta(x_2(t) - s) + x_2(t-1) - s, t = t_j, j = 2, \dots, k, \\
c(z(t) - Az(t-1)) + \delta(z(t) + x_2(t) - s) = 0, t = T, \\
\left(\frac{c}{\delta} + A^2c\right)z(T-1) - \frac{Ac}{\delta}z(T-2) - \left(Ac - \frac{a_2\delta}{2}\right)z(T) = a_2(x_2(T) - s),
\end{array} \right.$$

где $B = Ac + \frac{c}{\delta} + A^2c$, $C = Ac - c - A^2\delta c$, $D = c + A^2\delta c + \delta + Ac - \frac{a_2\delta}{2}$ и $E = Ac + \frac{c}{\delta} + A^2c + 1$.

Теорема доказана. □

1.4 Численное моделирование для раздела 1.3

1.4.1 Описание эксперимента

Проведем 6 наборов экспериментов. Параметры $a_1, a_2, \delta, c, x_0, y_0, T$ будут одинаковыми во всех экспериментах. В экспериментах 1-3, фиксируя одно и то же целевое мнение и изменяя только количество моментов валидации, мы сравним траекториях состояний и траектории оптимальных управлений. Затем не меняя количество моментов валидации в экспериментах 1-3, будем менять только целевое мнение для каждого эксперимента, это будут эксперименты 4-6. Сравним траектории состояний и траектории оптимальных управлений.

Эксперимент 1 Начальные параметры: $a_1 = 0.2; a_2 = 0.8; \delta = 1; c = 0.1; x_1(0) = 0.9; x_2(0) = 0.1; T = 10$. Целевое мнение: $s = 0.4$ и количество моментов валидации равно $k = 3$. Получаем 84 варианта выбора трех моментов.

Эксперимент 2 Начальные параметры: $a_1 = 0.2; a_2 = 0.8; \delta = 1; c = 0.1; x_1(0) = 0.9; x_2(0) = 0.1; T = 10$. Целевое мнение: $s = 0.4$ и количество моментов валидации равно $k = 4$. Получаем 126 вариантов выбора четырех моментов.

Эксперимент 3 Начальные параметры: $a_1 = 0.2; a_2 = 0.8; \delta = 1; c = 0.1; x_1(0) = 0.9; x_2(0) = 0.1; T = 10$. Целевое мнение: $s = 0,4$ и количество моментов валидации равно $k = 5$. Получаем 126 вариантов выбора пяти моментов.

Эксперимент 4 Начальные параметры: $a_1 = 0.2; a_2 = 0.8; \delta = 1; c = 0.1; x_1(0) = 0.9; x_2(0) = 0.1; T = 10$. Целевое мнение: $s = 0.5$ и количество моментов валидации равно $k = 3$. Получаем 84 варианта выбора трех моментов.

Эксперимент 5 Начальные параметры: $a_1 = 0.2; a_2 = 0.8; \delta = 1; c =$

$0.1; x_1(0) = 0.9; x_2(0) = 0.1; T = 10$. Целевое мнение: $s = 0.5$ и количество моментов валидации равно $k = 4$. Получаем 126 вариантов выбора четырех моментов.

Эксперимент 6 Задаем начальные параметры $a_1 = 0.2; a_2 = 0.8; \delta = 1; c = 0.1; x_1(0) = 0.9; x_2(0) = 0.1; T = 10$. Целевое мнение: $s = 0.5$ и количество моментов валидации равно $k = 5$. Получаем 126 вариантов выбора пяти моментов.

1.4.2 Блок-схема эксперимента

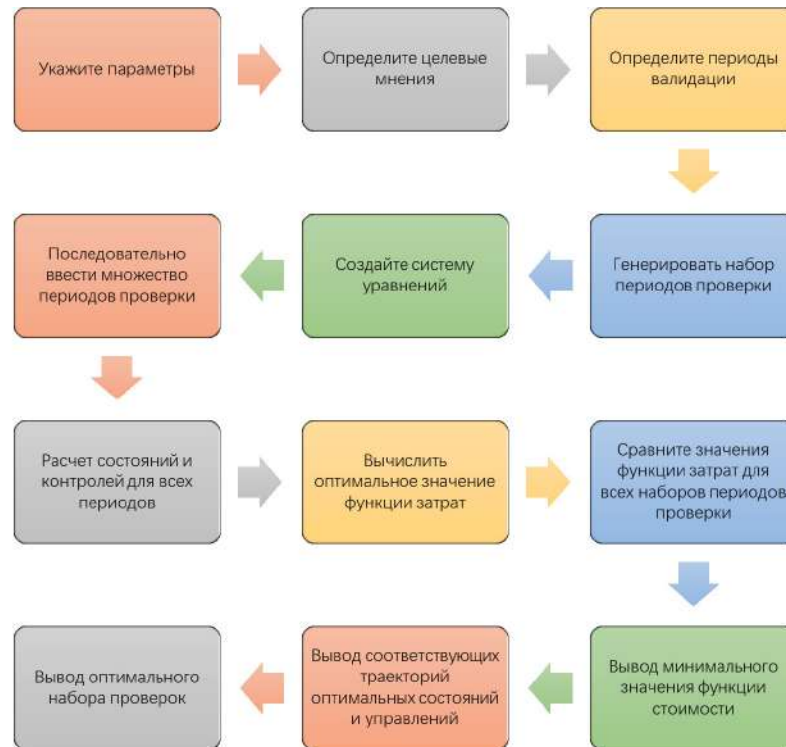


Рис. 1.5: Блок-схема эксперимента.

Подробное описание эксперимента

1. Задать параметры: $a_1 = 0.2; a_2 = 0.8; \delta = 1; c = 0.1; x_1(0) = 0.9; x_2(0) = 0.1; T = 10$.
2. Установить целевое мнение: $s = 0.4$ (например, эксперименты 1, 2, 3) или $s = 0,5$ (например, эксперименты 4, 5, 6).

3. Зафиксировать количество моментов валидации: $k = 3$ (в экспериментах 1 и 4) или 4 (в экспериментах 2 и 5) или 5 (в экспериментах 3 и 6).
4. Генерировать наборов моментов валидации: три момента случайным образом выбираются из периодов $1, \dots, 9$ для формирования набора $\{t_1, t_2, t_3\}$, например, $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$, всего 84 набора моментов времени. Из периодов $1, \dots, 9$ случайным образом выбираются четыре периода для формирования набора периодов проверки $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$, например, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$, и всего — 126 набора. Из периодов $1, \dots, 9$ выбирается пять периодов $\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$, например, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4, 5, 6\}$, всего — 126 наборов.
5. Задать систему уравнений: выписать систему (1.13) из теоремы 1.2, чтобы сформировать систему уравнений.
6. Ввести последовательно наборы моментов валидации: подставить выбранные наборы в систему (1.13) соответственно.
7. Получить оптимальные управления и соответствующие состояния, из решения системы (1.13).
8. Вычислить функцию издержек: подставить набор моментов валидации, полученные управления, соответствующие состояния в функцию издержек (1.12).
9. Сравнить значения издержек для всех наборов моментов валидации мнений: в каждом из шести экспериментов сравнить все значения стоимости для эксперимента.
10. Вывести минимальное значение издержек для каждого эксперимента.
11. Вывести соответствующее состояние и управление: в соответствии с набором моментов валидации, соответствующим минимальному значению

издержек, вывести этот набор, соответствующие траектории состояний и управлений.

12. Получить оптимальный набор моментов валидации: набор, соответствующий минимальному значению издержек, является оптимальным, вывести этот набор.

1.4.3 Результаты численного моделирования

В этом разделе представим результаты численного моделирования.

Пример 1.3. *Начинаем с $k = 3$. Решаем задачу минимизации (1.12) относительно периодов $1 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq 9$. Целевое мнение равно $s = 0.4$. В оптимуме игрок выбирает моменты валидации: 2, 3, 4. Оптимальное состояние и траектории управления представлены в таблице 1.3. Оптимальные издержки для игрока равны 0.016417.*

Таблица 1.3: Оптимальная траектория состояния и управления

t	0	1	$t_1 = 2$	$t_2 = 3$	$t_3 = 4$	5
$x_1(t)$	0.9000	0.4252	0.3977	0.4001	0.4045	0.4061
$x_2(t)$	0.1000	0.42	0.4221	0.4123	0.4075	0.4063
$z(t)$	0.8000	0.0052	-0.0244	-0.0122	-0.0029	-0.0001
$u(t)$	-0.3948	-0.027	0.000003	0.0032	0.0013	-0.0016
t	6	7	8	9	10	
$x_1(t)$	0.4045	0.4056	0.4112	0.3974	0.3999	
$x_2(t)$	0.4062	0.4055	0.4056	0.4078	0.4036	
$z(t)$	-0.0017	0.0001	0.0056	-0.0105	-0.0038	
$u(t)$	0.001	0.0055	-0.0133	0.0014		

При этом наборе данных игрок получает оптимальную траекторию со-

стояния и оптимальное управление, выбирая моменты 2, 3, 4 для валидации мнений из моментов от 0 до $T = 10$ (см. рис. 1.6 и 1.7).

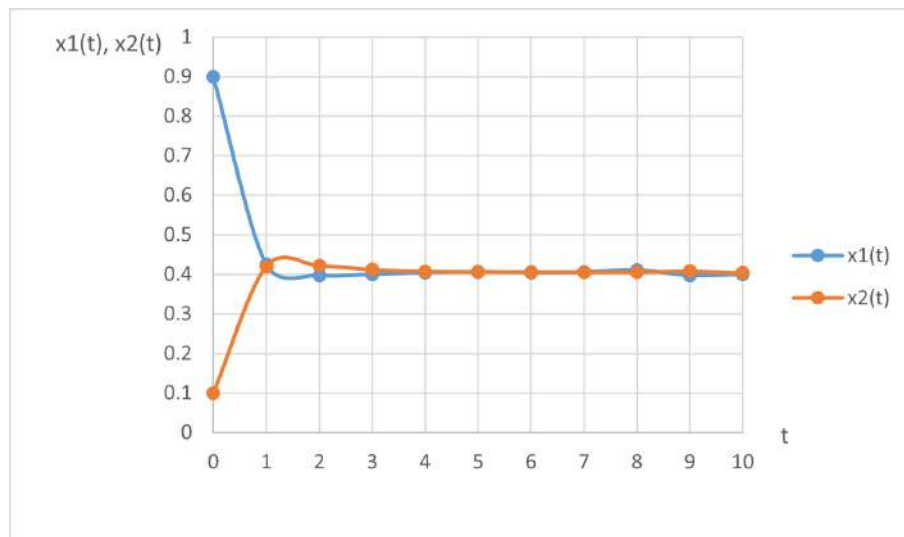


Рис. 1.6: Оптимальные траектории состояний, моменты валидации: 2, 3, 4 (синий — $x_1(t)$, красный — $x_2(t)$).

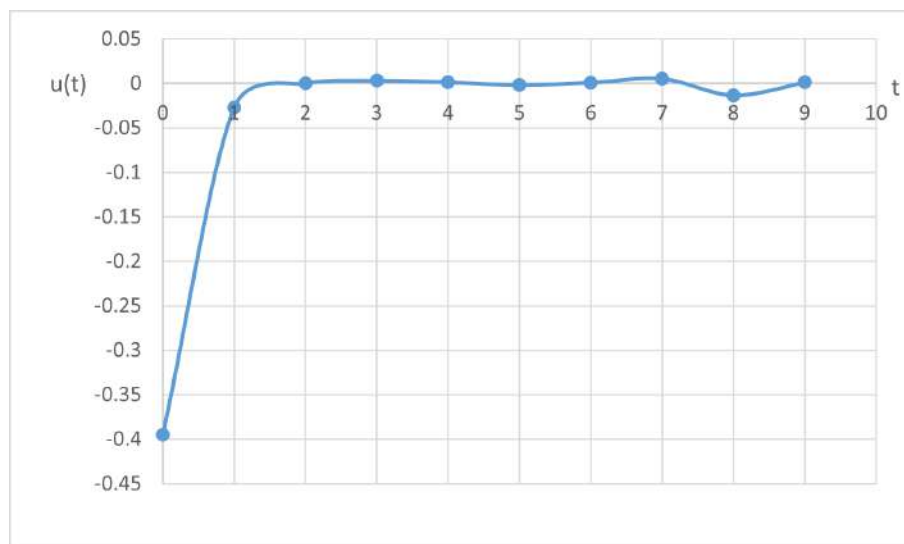


Рис. 1.7: Оптимальная траектория управлений $u(t)$.

Пример 1.4. Пусть теперь $k = 4$, целевое мнение игрока равно $s = 0.4$. Решением задачи является выбор моментов валидации: 2, 3, 4, 5. Оптимальные состояния и траектория управления представлены в таблице 1.4. Оптимальные издержки игрока равны 0.016413. Следует отметить, что

издержки для $k = 3$ немного больше, чем для $k = 4$. Это можно легко объяснить дополнительным членом в функции (1.12) в случае этого примера.

Таблица 1.4: Оптимальная траектория состояния и управление.

t	0	1	$t_1 = 2$	$t_2 = 3$	$t_3 = 4$	$t_4 = 5$
$x_1(t)$	0.9000	0.4246	0.3965	0.3979	0.4002	0.4026
$x_2(t)$	0.1000	0.42	0.4219	0.4117	0.4062	0.4038
$z(t)$	0.8000	0.0046	-0.0253	-0.0139	-0.0059	-0.0012
$u(t)$	-0.3954	-0.0276	-0.0012	0.001	0.0018	-0.0005
t	6	7	8	9	10	
$x_1(t)$	0.4022	0.4028	0.4057	0.3987	0.3999	
$x_2(t)$	0.4033	0.4029	0.4029	0.404	0.4019	
$z(t)$	-0.0011	-0.00002	0.0028	-0.0053	-0.0019	
$u(t)$	0.0006	0.0028	-0.0067	0.0007		

Также замечаем, что когда мы добавляем еще один период, в оптимальном решении задачи новый дополнительный период $t = 5$ добавляется к набору $\{2, 3, 4\}$, но последний набор остается прежним. Оптимальные траектории состояния и управления представлены на рис. 1.8 и 1.9 соответственно.

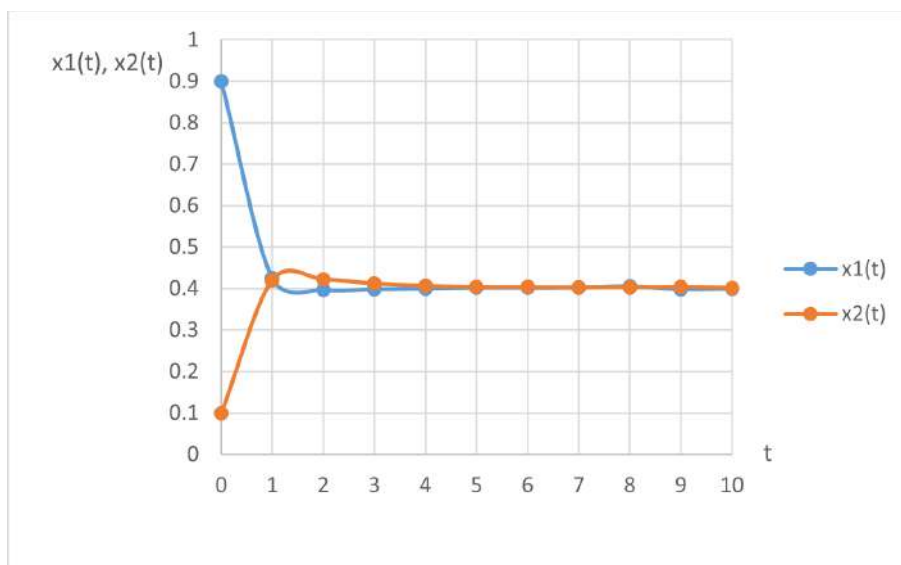


Рис. 1.8: Оптимальные траектории состояний, моменты валидации: 2, 3, 4, 5 (синий — $x_1(t)$, красный — $x_2(t)$).

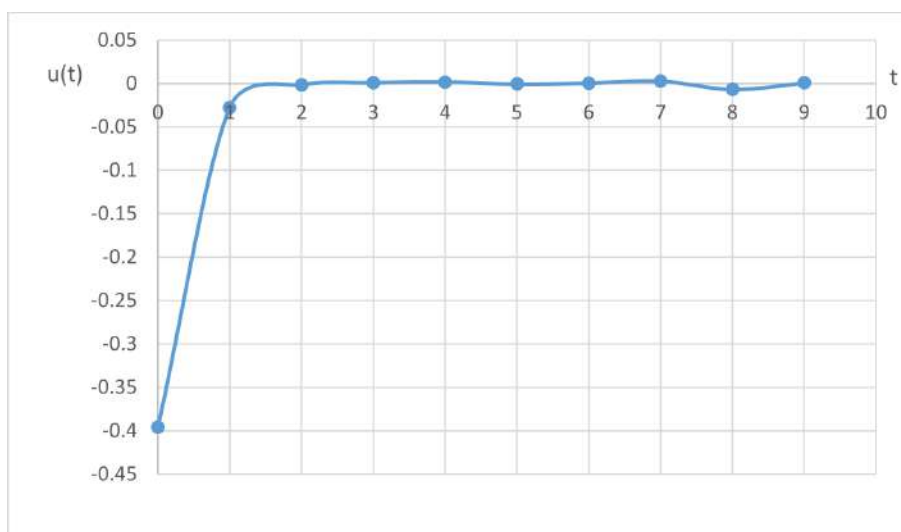
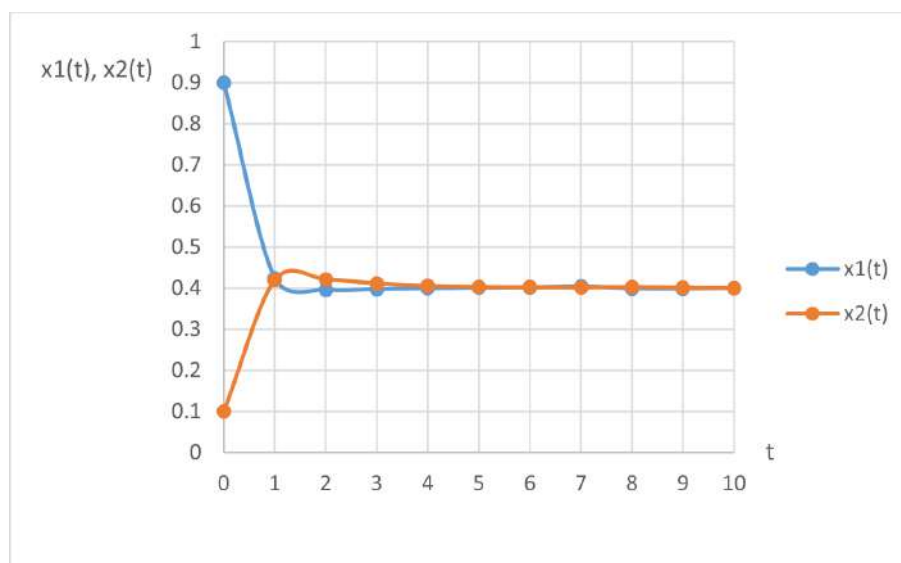


Рис. 1.9: Оптимальная траектория управления $u(t)$.

Пример 1.5. Пусть теперь $k = 5$, и целевое мнение игрока равно $s = 0.4$. Решение задачи состоит в выборе моментов 2, 3, 4, 5, 9 в качестве моментов валидации мнений. Оптимальные состояния и траектория управления представлены в таблице 1.5. Оптимальные издержки игрока равны 0.016405. Отметим, что издержки для $k = 4$ также немного больше, чем для $k = 5$.

Таблица 1.5: Оптимальные траектории состояний и управления

t	0	1	$t_1 = 2$	$t_2 = 3$	$t_3 = 4$	$t_4 = 5$
$x_1(t)$	0.9000	0.4245	0.3963	0.3974	0.3993	0.4009
$x_2(t)$	0.1000	0.42	0.4218	0.4116	0.4059	0.4033
$z(t)$	0.8000	0.0045	-0.0255	-0.0142	-0.0066	-0.0023
$u(t)$	-0.3955	-0.0278	-0.0015	0.0005	0.001	0.0006
t	6	7	8	$t_5 = 9$	10	
$x_1(t)$	0.4018	0.4045	0.399	0.3987	0.3999	
$x_2(t)$	0.4023	0.4021	0.4031	0.4015	0.4004	
$z(t)$	-0.0005	0.0024	-0.004	-0.0027	-0.0005	
$u(t)$	0.0026	-0.0052	-0.0007	0.0009		

Рис. 1.10: Оптимальные траектории состояний, моменты валидации: 2, 3, 4, 5, 9 (blue — $x_1(t)$, red — $x_2(t)$).

Заметим, что когда мы добавляем еще один период, в оптимальном решении задачи, новый дополнительный период $t = 9$ добавляется к набору $\{2, 3, 4, 5\}$. Оптимальная траектория состояния и траектория управления представлены на рис. 1.10 и 1.11 соответственно.

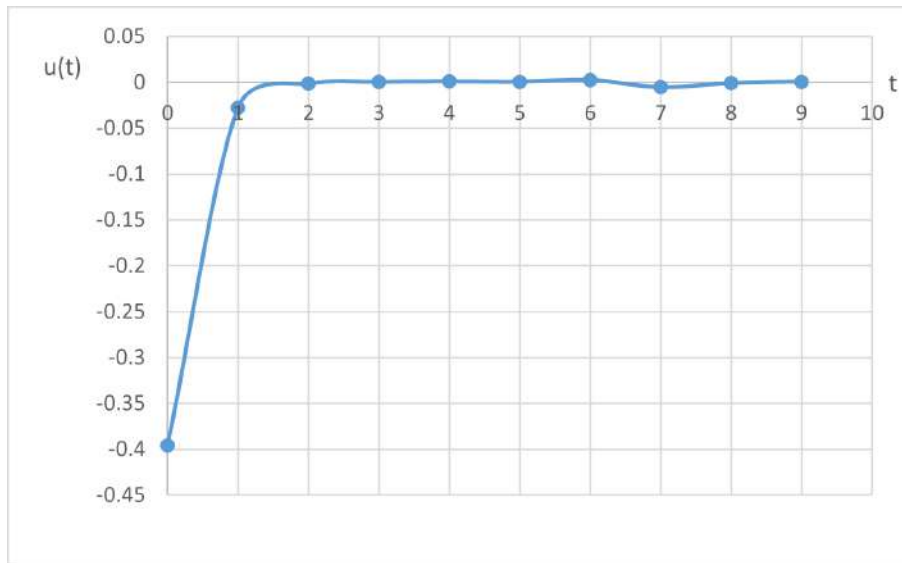


Рис. 1.11: Оптимальная траектория управления $u(t)$.

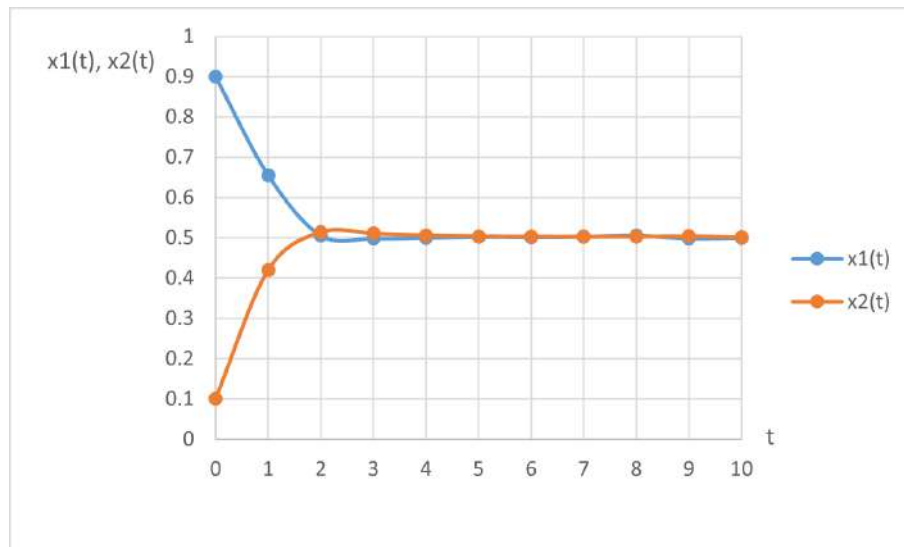
Из примеров 1.3-1.5 мы видим, что когда целевое мнение $s = 0.4$, то два агента могут быстро достичь консенсуса под влиянием игрока. Управление игрока имеет тенденцию стабилизироваться после периода 2. Не наблюдается существенного влияния на приближение мнений агентов к целевому мнению после каждого увеличения одной точки проверки. Соответствующее значение издержек также немного уменьшается.

Пример 1.6. Пусть $k = 3$, а целевое мнение игрока равно $s = 0.5$. Решением является выбор игроком периодов 3, 4, 5 в качестве моментов валидации. Траектории оптимальных состояний и управления представлены в таблице 1.6. Оптимальные издержки игрока равны 0.004486.

В этом эксперименте игрок получает оптимальное управление, выбирая периоды 3, 4, 5 в промежутке от 0 до $T = 10$, на рис. 1.12 и 1.13 изображены оптимальные траектории состояний и управления соответственно.

Таблица 1.6: Оптимальная траектория состояния и управления

t	0	1	2	$t_1 = 3$	$t_2 = 4$	$t_3 = 5$
$x_1(t)$	0.9000	0.6556	0.5061	0.4986	0.5003	0.5026
$x_2(t)$	0.1000	0.42	0.5142	0.511	0.506	0.5037
$z(t)$	0.8000	0.2356	-0.0082	-0.0124	-0.0057	-0.0012
$u(t)$	-0.1644	-0.126	-0.0083	0.0005	0.0017	-0.0005
t	6	7	8	9	10	
$x_1(t)$	0.5021	0.5028	0.5056	0.4987	0.4999	
$x_2(t)$	0.5033	0.5028	0.5028	0.5039	0.5018	
$z(t)$	-0.0011	-0.00002	0.0028	-0.0053	-0.0019	
$u(t)$	0.0006	0.0028	-0.0067	0.0007		

Рис. 1.12: Оптимальные траектории состояний, моменты валидации: 3, 4, 5 (синий — $x_1(t)$, красный — $x_2(t)$).

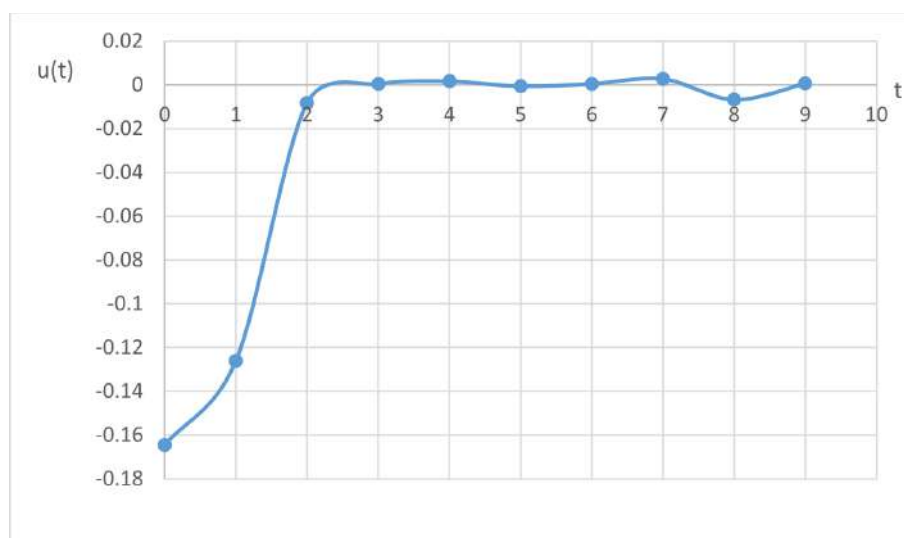


Рис. 1.13: Оптимальная траектория управления $u(t)$.

Пример 1.7. Пусть количество моментов валидации $k = 4$, игрок имеет целевое мнение $s = 0.5$. Оптимальным является выбор периодов 3, 4, 5, 6 в качестве моментов валидации. Оптимальные состояния и управления представлены в таблице 1.7. Оптимальные издержки игрока равны 0.004472 .

Таблица 1.7: Оптимальные состояния и управление.

t	0	1	2	$t_1 = 3$	$t_2 = 4$	$t_3 = 5$
$x_1(t)$	0.9000	0.6561	0.5057	0.4978	0.4987	0.4997
$x_2(t)$	0.1000	0.42	0.5144	0.5109	0.5057	0.5029
$z(t)$	0.8000	0.2361	-0.0088	-0.0132	-0.007	-0.0032
$u(t)$	-0.1639	-0.1268	-0.0088	-0.0004	0.0003	0.0005
t	$t_4 = 6$	7	8	9	10	
$x_1(t)$	0.5005	0.501	0.5021	0.4995	0.5	
$x_2(t)$	0.5016	0.5011	0.5011	0.5015	0.5007	
$z(t)$	-0.0011	-0.0002	0.001	-0.002	-0.0007	
$u(t)$	0.0004	0.0011	-0.0025	0.0003		

Заметим, что когда мы добавляем еще один период $t = 6$, оптималь-

ная траектория состояния и оптимальное управление получаютя путем выбора периодов 3, 4, 5, 6 в пределах от 0 до $T = 10$, они изображены на рис. 1.14 и 1.15 соответственно.

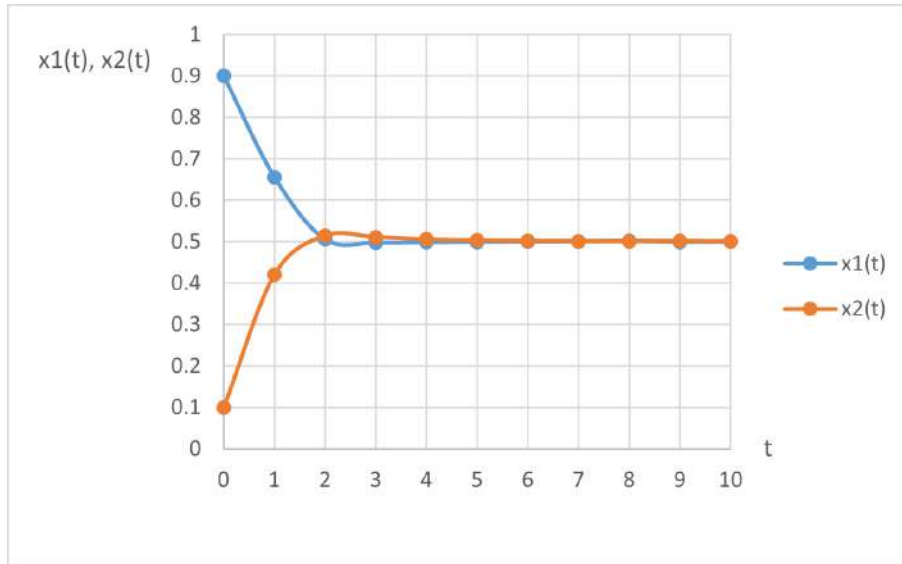


Рис. 1.14: Оптимальные траектории состояний, моменты валидации: 3, 4, 5, 6 (синий — $x_1(t)$, красный — $x_2(t)$).

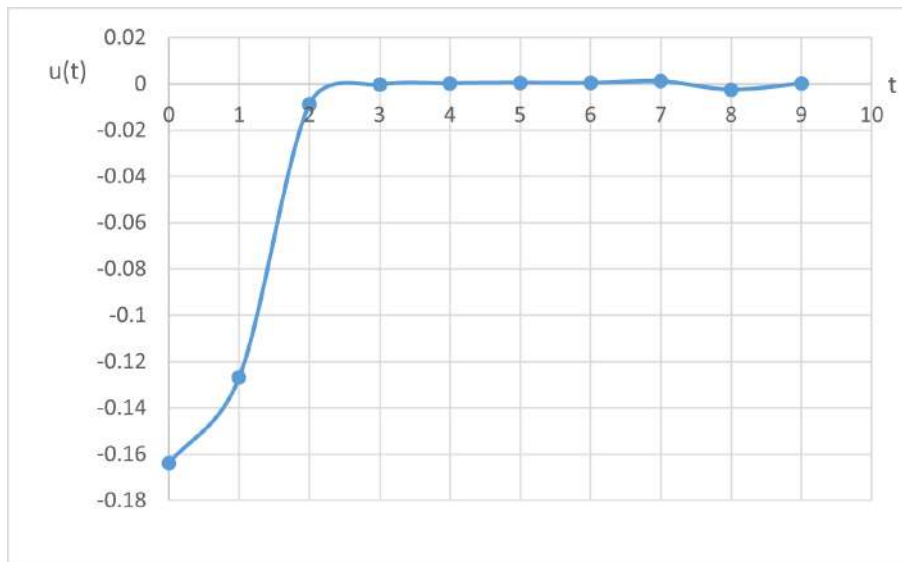


Рис. 1.15: Оптимальная траектория управления $u(t)$.

Пример 1.8. Пусть $k = 5$, целевое мнение игрока равно $s = 0.5$. При оптимальном решении игрок выбирает периоды 3, 4, 5, 6, 7 в качестве моментов

валидации. Оптимальные состояния и управления представлены в таблице 1.8. Оптимальные издержки игрока равны 0.004474.

Таблица 1.8: Оптимальная траектория состояния и управления.

t	0	1	2	$t_1 = 3$	$t_2 = 4$	$t_3 = 5$
$x_1(t)$	0.9000	0.6561	0.5056	0.4977	0.4986	0.4994
$x_2(t)$	0.1000	0.42	0.5145	0.5109	0.5056	0.5028
$z(t)$	0.8000	0.2361	-0.0088	-0.0132	-0.0071	-0.0034
$u(t)$	-0.1639	-0.1269	-0.0088	-0.0005	0.0001	0.0002

t	$t_4 = 6$	$t_5 = 7$	8	9	10
$x_1(t)$	0.5	0.5006	0.5014	0.4996	0.5
$x_2(t)$	0.5015	0.5009	0.5008	0.501	0.5005
$z(t)$	-0.0015	-0.0003	0.0006	-0.0014	-0.0005
$u(t)$	0.0004	0.0008	-0.0017	0.0002	

В этом эксперименте, выбирая периоды 3, 4, 5, 6, 7 в качестве моментов валидации, мы получаем оптимальную траекторию состояния и оптимальное управление, представленные на рис. 1.16 и 1.17 соответственно.

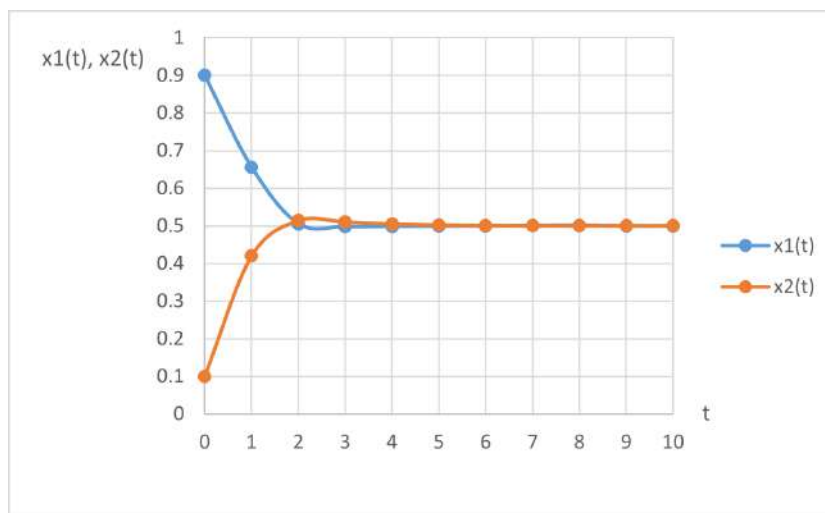


Рис. 1.16: Оптимальные траектории состояний, моменты валидации: 3, 4, 5, 6, 7 (синий — $x_1(t)$, красный — $x_2(t)$).

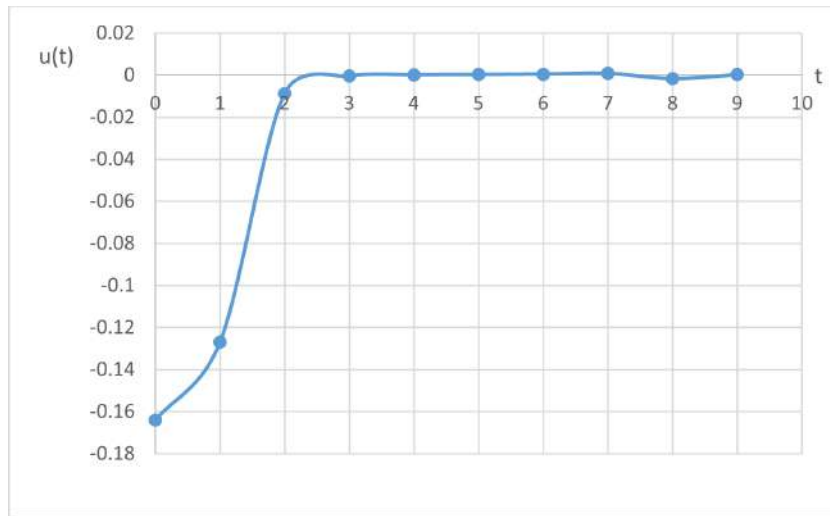


Рис. 1.17: Оптимальная траектория управления $u(t)$.

Из примеров 1.6-1.8, при неизменных остальных параметрах, изменяется только целевое мнение $s = 0.5$. Управление игрока «стабилизируется» после периода 3. Хотя в последних трех наборах экспериментов большее целевое мнение ($s = 0.5$), чем в первых трех набора экспериментов ($s = 0.4$), мы обнаружили, что изменение целевого мнения привело к тому, что агенты достигли консенсуса быстрее. Оптимальные издержки уменьшились для последних трех экспериментов.

1.5 Заключение к Главе 1

В этой главе предложены две модели динамики мнений, в которых игрок имеет возможность выбирать моменты валидации мнений агентов. Цель игрока в первой модели — приблизить общественное мнение к целевому мнению за конечное время и минимизировать суммарные затраты на влияние. Когда в социальной сети есть единственный центр влияния, можно найти оптимальное управление для этого игрока. Мы используем метод уравнения Эйлера для поиска оптимальной стратегии игрока. В численном моделировании, когда игрок валидирует мнения агентов только в конечном периоде и не

заботится о других периодах, он может минимизировать затраты и сделать мнение агента близким к целевому мнению.

Для случая, когда игрок валидирует мнения агентов в нескольких моментах времени, мы проводим сравнительный эксперимент с различными целевыми мнениями, таким образом, находя оптимальный набор моментов валидации мнений. Обнаружено, что оптимальные издержки уменьшаются при увеличении количества периодов подтверждения. Также отметим, что если мы увеличиваем количество моментов валидации, в то время как другие значения параметров остаются постоянными, оптимальный набор моментов валидации при меньшем их количестве включается в оптимальный набор моментов валидации при большем их количестве. Можно обобщить модель на случай большего количества агентов и игроков. Когда есть более одного игрока, то может возникнуть конкуренция за мнения агентов, если участники имеют разные целевые мнения в долгосрочной перспективе.

Глава 2

Динамика мнений в малых социальных группах, ориентированных на среднее мнение, когда моменты влияния являются стратегией игрока

2.1 Модель динамики мнений в небольших социальных группах при выборе игроком моментов влияния на мнения агентов

Рассмотрим многоагентную систему, представляющую собой небольшую социальную сеть с двумя агентами. Пусть $x_1(t) \in \mathbb{R}$ ($x_2(t) \in \mathbb{R}$) — мнение агента 1 (агента 2) в момент времени t , $t = 0, \dots, T$. Предположим, что игрок, не являющийся агентом в системе, может контролировать агента 1 в нескольких (ограниченном числе) периодах, но считает мнения агентов значимыми в любой момент времени t . Обозначим влияние игрока на агента 1 в момент времени t через $u(t) \in \mathbb{R}$, $t = 0, \dots, T - 1$. Множество моментов времени, в которые игрок контролирует агента 1, обозначается через G и называется *множеством моментов управления*. Число элементов во множестве G

задано, и оно равно $k < T$. Рассмотрим задачу, когда k известно игроку, но набор моментов управления G не фиксирован. Пусть этот набор будет таким: $G = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$.

Когда момент времени t принадлежит G , будущее мнение агента 1 зависит от его собственного текущего мнения, текущего среднего мнения общества и управления игрока в этот момент времени. Когда время t не принадлежит множеству G , будущее мнение агента 1 зависит от его собственного текущего мнения и текущего среднего мнения общества. Агент 2 не подвержен влиянию игрока, и его будущее мнение зависит от его собственного текущего мнения и текущего среднего мнения общества. Динамика мнений агентов определяется следующими уравнениями:

$$x_1(t+1) = x_1(t) + a_1 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_1(t) \right) + u(t), \quad t \in G, \quad (2.1)$$

$$x_1(t+1) = x_1(t) + a_1 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_1(t) \right), \quad t \notin G, \quad (2.2)$$

$$x_2(t+1) = x_2(t) + a_2 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_2(t) \right), \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (2.3)$$

с начальным условием

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0. \quad (2.4)$$

В уравнениях динамики (2.1)–(2.3) константы $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ обозначают убеждения агента 1 и агента 2 относительно среднего общественного мнения соответственно.

Игроку необходимо определить множество моментов управления $G = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ для заданного k . Пусть $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq T-1$, где $k < T$. Целевое мнение игрока равно $s \in \mathbb{R}$. Игрок стремится минимизировать свои затраты, выбирая множество моментов управления и величину управления в эти моменты из множества допустимых значений управления. Сначала мы решаем задачу выбора величины управления для заданного множества

моментов управления G , потом будем решать задачу минимизации затрат по множеству G . Функционал игрока для первой задачи оптимизации имеет вид:

$$\min_u J(u) = \sum_{j=1}^k \delta^{t_j} (cu^2(t_j)) + \sum_{t=0}^T \delta^t \left((x_1(t) - s)^2 + (x_2(t) - s)^2 \right), \quad (2.5)$$

где $\delta \in (0, 1]$ — коэффициент дисконтирования, а $c > 0$ — стоимость единицы влияния.

Для второй оптимизационной задачи, мы выбираем множество G из всех возможных с минимальными затратами игрока.

Необходимые условия задачи оптимального управления (2.5) с учетом динамики (2.1)–(2.3) с начальным условием (2.4) приведены в следующей теореме.

Theorem 2.1. Пусть $\{u^*(t) : t = t_1, t_2, \dots, t_k\}$ — оптимальная стратегия, минимизирующая функционал (2.5) при начальных условиях (2.4) и уравнениях динамики состояния (2.1), (2.2) и (2.3), а $\{(x_1^*(t), x_2^*(t)) : t = 0, \dots, T\}$ — соответствующая траектория состояния. Заданы моменты времени $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq T - 1$, тогда оптимальная стратегия $u^*(t), t = t_1, t_2, \dots, t_k$ определяется как

$$u^*(t) = z^*(t + 1) - Az^*(t)$$

и соответствующая оптимальная траектория состояния $(x_1^*(t), x_2^*(t)), t =$

$1, \dots, T$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \left(\frac{a_2\delta}{2} - \delta \right) z(t) + z(t-1) = (\delta - a_2\delta)(x_2(t) - s) - x_2(t-1) + s, \\
 t = 1, \dots, T-1, \quad t, t-1 \notin \{t_1, t_2, \dots, t_k\}, \\
 Bz(t) + Cz(t-1) - Acz(t-2) = (\delta^2 - a_2\delta^2)(x_2(t) - s) \\
 - \delta(x_2(t-1) - s), \quad t = 1, \dots, T-1, \\
 t \notin \{t_1, t_2, \dots, t_k\}, t-1 \in \{t_2, \dots, t_k\}, \\
 Dz(t) + Ez(t-1) - Acz(t-2) + Ac\delta^2 z(t+1) \\
 = (\delta^2 - a_2\delta^2)(x_2(t) - s) - \delta(x_2(t-1) - s), \quad t = 1, \dots, T-1, \\
 t, t-1 \in \{t_2, \dots, t_k\}, \\
 Fz(t) + (A^2c + 1)z(t-1) + Ac\delta z(t+1) = (\delta - a_2\delta)(x_2(t) - s) \\
 - x_2(t-1) + s, \quad t = 1, \dots, T-1, \\
 t \in \{t_1, t_2, \dots, t_k\}, t-1 \notin \{t_1, t_2, \dots, t_k\}, \\
 \frac{a_2\delta}{2}z(t) + z(t-1) = -a_2\delta(x_2(t) - s) - x_2(t-1) + s, \\
 t = T, T \notin \{t_1, t_2, \dots, t_k\}, T-1 \notin \{t_1, t_2, \dots, t_k\}, \\
 \frac{a_2\delta^2}{2}z(t) + (c + \delta)z(t-1) - Acz(t-2) = -a_2\delta^2(x_2(t) - s) \\
 - x_2(t-1) + s, \quad t = T, T \notin \{t_1, t_2, \dots, t_k\}, T-1 \in \{t_2, \dots, t_k\}, \\
 z(t) + x_2(t) - s = 0, \quad t = T, T-1 \notin \{t_1, t_2, \dots, t_k\}, \\
 c(z(t) - Az(t-1)) + \delta(z(t) + x_2(t) - s) = 0, \\
 t = T, T-1 \in \{t_1, t_2, \dots, t_k\}, \\
 x_2(t+1) = x_2(t) + \frac{a_2}{2}z(t), t = 0, \dots, T-1,
 \end{array} \right. \quad (2.6)$$

$$zde z^*(t) = x_1^*(t) - x_2^*(t), u$$

$$A = 1 - \frac{a_1 + a_2}{2},$$

$$B = \frac{a_2\delta^2}{2} - c\delta - \delta^2,$$

$$C = Ac\delta - c - \delta,$$

$$D = \frac{a_2\delta^2}{2} - Ac\delta - c\delta - A^2c\delta^2 - \delta^2,$$

$$E = Ac\delta + c + A^2c\delta + \delta,$$

$$F = \frac{a_2\delta}{2} - Ac - \delta - A^2c\delta.$$

Доказательство. Введем новую переменную $z(t)$ следующим образом:

$$z(t) = x_1(t) - x_2(t), t = 0, \dots, T.$$

Из уравнений динамики (2.1), (2.2) и (2.3), принимая во внимание выражение $z(t)$, мы получаем новые уравнения динамики:

$$z(t+1) = Az(t) + u(t), \quad t \in \{t_1, t_2, \dots, t_k\}, \quad (2.7)$$

$$z(t+1) = Az(t), \quad t \notin \{t_1, t_2, \dots, t_k\},$$

$$x_2(t+1) = x_2(t) + \frac{a_2}{2}z(t), \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (2.8)$$

с начальными условиями

$$z(0) = x_1^0 - x_2^0, \quad x_2(0) = x_2^0,$$

где $A = 1 - \frac{a_1 + a_2}{2}$.

Находим выражение для $u(t)$ из (2.7) и получаем

$$u(t) = z(t+1) - Az(t), \quad t \in \{t_1, t_2, \dots, t_k\}. \quad (2.9)$$

Подставляя эти выражения в $\sum_{t=0}^T \delta^t g_t(x(t), x(t+1))$, мы можем переписать функционал в следующей форме:

$$J(z, x_2) = (x_1(0) - s)^2 + (x_2(0) - s)^2 + \sum_{j=1}^k \delta^{t_j} \left[c(z(t_j + 1) - Az(t_j))^2 \right] \\ + \sum_{t=1}^T \delta^t \left[(z(t) + x_2(t) - s)^2 + (x_2(t) - s)^2 \right].$$

Для минимизации $J(z, x_2)$ при условиях, заданных уравнениями (2.8) и (2.9), запишем функцию Лагранжа

$$L(z, x_2, k) = J(z, x_2) + \sum_{t=0}^{T-1} k_t \left(x_2(t+1) - x_2(t) - \frac{a_2}{2} z(t) \right).$$

Условия оптимальности первого порядка следующие: $\frac{\partial L(z, x_2, k)}{\partial z(t)} = 0, t = 1, \dots, T$,
и $\frac{\partial L(z, x_2, k)}{\partial x_2(t)} = 0, t = 1, \dots, T$.

Находим производные и получаем

$$\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial z(t)} = \delta^t 2(z(t) + x_2(t) - s), t = 1, \dots, T-1, t, t-1 \notin \{t_1, t_2, \dots, t_k\},$$

$$\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial z(t)} = \delta^{t-1} 2c(z(t) - Az(t-1)) + \delta^t 2(z(t) + x_2(t) - s),$$

$$t \notin \{t_1, t_2, \dots, t_k\}, t-1 \in \{t_1, t_2, \dots, t_k\},$$

$$\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial z(t)} = \delta^{t-1} 2c(z(t) - Az(t-1)) - \delta^t 2Ac(z(t+1) - Az(t))$$

$$+ \delta^t 2(z(t) + x_2(t) - s), t, t-1 \in \{t_1, t_2, \dots, t_k\},$$

$$\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial z(t)} = -\delta^t 2Ac(z(t+1) - Az(t)) + \delta^t 2(z(t) + x_2(t) - s),$$

$$t \in \{t_1, t_2, \dots, t_k\}, t-1 \notin \{t_1, t_2, \dots, t_k\},$$

$$\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial z(t)} = \delta^t 2(z(t) + x_2(t) - s), t = T, t-1 \notin \{t_1, t_2, \dots, t_k\},$$

$$\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial z(t)} = \delta^{t-1} 2c(z(t) - Az(t-1)) + \delta^t 2(z(t) + x_2(t) - s),$$

$$t = T, t-1 \in \{t_1, t_2, \dots, t_k\},$$

$$\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial x_2(t)} = \delta^t [2(z(t) + x_2(t) - s) + 2(x_2(t) - s)], \quad t = 1, \dots, T.$$

Переписываем систему условий первого порядка в следующей форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} z(t) + x_2(t) - s = \frac{a_2}{4} k_t \delta^{-t}, \quad t = 1, \dots, T-1, \\ t, t-1 \notin \{t_1, t_2, \dots, t_k\}, \\ c(z(t) - Az(t-1)) + \delta(z(t) + x_2(t) - s) = \frac{a_2}{4} k_t \delta^{-t+1}, \\ t \notin \{t_1, t_2, \dots, t_k\}, t-1 \in \{t_1, t_2, \dots, t_k\}, \\ \frac{c}{\delta}(z(t) - Az(t-1)) - Ac(z(t+1) - Az(t)) + z(t) + x_2(t) - s \\ = \frac{a_2}{4} k_t \delta^{-t}, \quad t, t-1 \in \{t_1, t_2, \dots, t_k\}, \\ -Ac(z(t+1) - Az(t)) + z(t) + x_2(t) - s = \frac{a_2}{4} k_t \delta^{-t}, \\ t \in \{t_1, t_2, \dots, t_k\}, t-1 \notin \{t_1, t_2, \dots, t_k\}, \\ z(t) + x_2(t) - s = 0, \quad t = T, t-1 \notin \{t_1, t_2, \dots, t_k\}, \\ c(z(t) - Az(t-1)) + \delta(z(t) + x_2(t) - s) = 0, \\ t = T, t-1 \in \{t_1, t_2, \dots, t_k\}, \\ \delta^t [2z(t) + 4(x_2(t) - s)] + k_{t-1} - k_t = 0, \quad t = 1, \dots, T-1, \\ \delta^t [2z(t) + 4(x_2(t) - s)] + k_{t-1} = 0, \quad t = T, \end{array} \right. \quad (2.10)$$

с начальными условиями $z(0) = x_1^0 - x_2^0$, $x_2(0) = x_2^0$.

Исключив k_t из системы (2.10), получаем систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{a_2\delta}{2} - \delta\right) z(t) + z(t-1) = (\delta - a_2\delta)(x_2(t) - s) - x_2(t-1) + s, \\ t = 1, \dots, T-1, \quad t, t-1 \notin \{t_1, t_2, \dots, t_k\}, \\ Bz(t) + Cz(t-1) - Acz(t-2) = (\delta^2 - a_2\delta^2)(x_2(t) - s) - \delta(x_2(t-1) - s), \\ t = 1, \dots, T-1, \quad t \notin \{t_1, t_2, \dots, t_k\}, t-1 \in \{t_2, \dots, t_k\}, \\ Dz(t) + Ez(t-1) - Acz(t-2) + Ac\delta^2 z(t+1) \\ = (\delta^2 - a_2\delta^2)(x_2(t) - s) - \delta(x_2(t-1) - s), \quad t = 1, \dots, T-1, \\ t, t-1 \in \{t_2, \dots, t_k\}, \\ Fz(t) + (A^2c + 1)z(t-1) + Ac\delta z(t+1) = (\delta - a_2\delta)(x_2(t) - s) \\ - x_2(t-1) + s, \quad t = 1, \dots, T-1, t \in \{t_1, t_2, \dots, t_k\}, t-1 \notin \{t_1, t_2, \dots, t_k\}, \\ \frac{a_2\delta}{2}z(t) + z(t-1) = -a_2\delta(x_2(t) - s) - x_2(t-1) + s, \\ t = T, T \notin \{t_1, t_2, \dots, t_k\}, T-1 \notin \{t_1, t_2, \dots, t_k\}, \\ \frac{a_2\delta^2}{2}z(t) + (c + \delta)z(t-1) - Acz(t-2) = -a_2\delta^2(x_2(t) - s) - x_2(t-1) + s, \\ t = T, T \notin \{t_1, t_2, \dots, t_k\}, T-1 \in \{t_2, \dots, t_k\}, \\ z(t) + x_2(t) - s = 0, \quad t = T, T-1 \notin \{t_1, t_2, \dots, t_k\}, \\ c(z(t) - Az(t-1)) + \delta(z(t) + x_2(t) - s) = 0, \quad t = T, T-1 \in \{t_1, t_2, \dots, t_k\}, \end{array} \right.$$

где $B = \frac{a_2\delta^2}{2} - c\delta - \delta^2$, $C = Ac\delta - c - \delta$, $D = \frac{a_2\delta^2}{2} - Ac\delta - c\delta - A^2c\delta^2 - \delta^2$,
 $E = Ac\delta + c + A^2c\delta + \delta$, $F = \frac{a_2\delta}{2} - Ac - \delta - A^2c\delta$.

Теорема доказана. □

2.2 Случай выбора игроком моментов влияния и валидации мнений агентов в одинаковые моменты времени

Рассмотрим простую социальную сеть, т. е. двухагентную динамическую систему мнений. Характерной чертой сети является то, что существует игрок, отличный от агентов, который выбирает моменты валидации мнений агентов

1 и 2 и влияет на мнение агента 1 в эти моменты. Переменными состояниями являются мнения агентов $x_i(t) \in R$ в момент времени $t \in [0, T]$, $i = 1, 2$. Управляющей переменной, то есть стратегией влияния игрока, является интенсивность влияния $u(t) \in R$. Во-первых, предполагаем, что игрок выбирает множество моментов влияния и валидации мнений U , $U \subset \{1, 2, \dots, T - 1\}$. Сначала мы решаем задачу оптимального управления для заданного набора U , затем позволяем игроку выбрать набор U оптимально (минимизируя издержки). Пусть задано количество элементов k в множестве U , и $k < T$. Используем следующие обозначения:

- $x_i(t)$, $i = 1, 2$: мнение агента i в момент времени $t \in [0, T]$;
- $u(t)$: влияние игрока на мнение агента 1 в момент времени $t \in [0, T - 1]$;
- $U = \{t_1, \dots, t_k \mid 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq T - 1\}$: набор моментов времени, в которые игрок влияет (выбирает управление) на мнения агента 1 и валидирует мнения агентов.

Динамика мнений агентов определяется следующими уравнениями:

$$x_1(t+1) = x_1(t) + a_1 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_1(t) \right) + u(t), \quad t \in U, \quad (2.11)$$

$$x_1(t+1) = x_1(t) + a_1 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_1(t) \right), \quad t \notin U, \quad (2.12)$$

$$x_2(t+1) = x_2(t) + a_2 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_2(t) \right), \quad t = 0, \dots, T - 1 \quad (2.13)$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0. \quad (2.14)$$

В приведенных выше уравнениях $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ обозначают убеждения агентов 1 и 2 относительно среднего мнения общества, соответственно.

Динамика мнений агентов описывает следующую идею:

1. Когда t принадлежит множеству U , агент 1 обновляет своё мнение согласно уравнению (2.11). На формирование мнения в следующий момент времени будут влиять текущее мнение агента 1, текущее среднее мнение общества и управление игрока в текущий момент времени.
2. Когда t не принадлежит множеству U , агент 1 обновляет своё мнение согласно уравнению (2.12). На формирование мнения в следующий момент времени будут влиять текущее мнение агента 1, текущее среднее мнение общества, но не управление игрока.
3. Когда $t \in 0, \dots, T - 1$, агент 2 обновляет своё мнение согласно уравнению (2.13). На формирование мнения в следующий момент времени будут влиять текущее мнение агента 2, текущее среднее мнение общества, игрок не влияет на агента 2 напрямую.

Целевое мнение игрока равно $s \in \mathbb{R}$. Игрок стремится минимизировать свои затраты:

$$J(u) = \sum_{j=1}^k \delta^{t_j} \left((x_1(t_j) - s)^2 + (x_2(t_j) - s)^2 + cu^2(t_j) \right) + \delta^T \left((x_1(T) - s)^2 + (x_2(T) - s)^2 \right), \quad (2.15)$$

где $\delta \in (0, 1]$ — коэффициент дисконтирования, а $c > 0$ — стоимость единицы влияния.

Таким образом, задачу линейно-квадратичной оптимизации с заданным множеством U можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} \text{минимизировать (2.15)} \\ \text{при условии, что } u \text{ удовлетворяет (2.11), (2.12) и (2.13).} \end{cases} \quad (2.16)$$

Метод уравнений Эйлера дает необходимые условия (см., например, [17, 37, 38]). Применяем метод уравнений Эйлера для нахождения оптимальной стратегии игрока как и в работе [63]. Тот же метод используется в [30, 31] для нахождения оптимального управления в задаче динамики мнений.

Theorem 2.2. Пусть $\{u^*(t) : t = t_1, t_2, \dots, t_k\}$ — оптимальная стратегия при минимизации функционала (2.15) с учетом уравнений динамики состояния (2.11), (2.12) и (2.13) с начальными условиями (2.14), а $\{(x_1^*(t), x_2^*(t)) : t = 0, \dots, T\}$ — соответствующая траектория состояния. Заданы моменты времени $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq T - 1$, тогда оптимальная стратегия $u^*(t)$, $t = t_1, t_2, \dots, t_k$ определяется как

$$u^*(t) = z^*(t+1) - Az^*(t),$$

и соответствующая оптимальная траектория состояния $(x_1^*(t), x_2^*(t))$, $t = 1, \dots, T$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} z(t+1) = Az(t), \quad t = 1, \dots, T-1, t, t-1 \notin U, \\ \delta cz(t) - (c + Ac\delta)z(t-1) + Acz(t-2) = 0, \quad t \notin U, t-1 \in U, \\ Bz(t) + Cz(t-1) + Ac\delta z(t+1) - \frac{Ac}{\delta}z(t-2) \\ \quad = (\delta - a_2\delta)(x_2(t) - s) - x_2(t-1) + s, \quad t, t-1 \in \{t_2, \dots, t_k\}, \\ Dz(t) + (1 + A^2c)z(t-1) + Ac\delta z(t+1) = (\delta - a_2\delta)(x_2(t) - s) \\ \quad - x_2(t-1) + s, \quad t \in U, t-1 \notin U, \\ (c + \delta)z(t) - Acz(t-1) + \delta(x_2(t) - s) = 0, \quad t = T, t-1 \in U, \\ z(t) + x_2(t) - s = 0, \quad t = T, t-1 \notin U, \\ \frac{a_2\delta^2}{2}z(t) + cz(t-1) - Acz(t-2) = a_2\delta^2(x_2(t) - s), \\ \quad t = T, t-1 \in \{t_2, \dots, t_k\}, \\ z(t) + 2(x_2(t) - s) = 0, \quad t = T, t-1 \notin U, \\ x_2(t+1) = x_2(t) + \frac{a_2}{2}z(t), \quad t = 1, \dots, T-1, \end{array} \right. \quad (2.17)$$

где $z^*(t) = x_1^*(t) - x_2^*(t)$, $A = 1 - \frac{a_1+a_2}{2}$, $B = \frac{a_2\delta}{2} - c - A^2c\delta - \delta - Ac$, $C = Ac - \frac{c}{\delta} - A^2c - 1$, $D = \frac{a_2\delta}{2} - A^2c\delta - \delta - Ac$.

Доказательство. Введем новую переменную $z(t)$:

$$z(t) = x_1(t) - x_2(t), \quad t = 0, \dots, T.$$

Из уравнений динамики (2.11), (2.12), принимая во внимание выражение $z(t)$, получаем новые уравнения динамики состояния:

$$z(t+1) = Az(t) + u(t), \quad t \in U, \quad (2.18)$$

$$z(t+1) = Az(t), \quad t \notin U,$$

$$x_2(t+1) = x_2(t) + \frac{a_2}{2}z(t), \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (2.19)$$

с начальными условиями

$$z(0) = x_1^0 - x_2^0, \quad x_2(0) = x_2^0,$$

где $A = 1 - \frac{a_1+a_2}{2}$.

Находим выражение для $u(t)$ из (2.18) и получаем

$$u(t) = z(t+1) - Az(t), \quad t \in \{t_1, t_2, \dots, t_k\}, \quad (2.20)$$

Подставив эти выражения в функционал, мы можем переписать его в следующей форме:

$$J(z, x_2) = \sum_{j=1}^k \delta^{t_j} \left[(z(t_j) + x_2(t_j) - s)^2 + (x_2(t_j) - s)^2 + c(z(t_j+1) - Az(t_j))^2 \right] \\ + \delta^T \left[(z(T) + x_2(T) - s)^2 + (x_2(T) - s)^2 \right].$$

Чтобы минимизировать $J(z, x_2)$ при (2.18) и (2.20), запишем функцию Лагранжа

$$L(z, x_2, l) = J(z, x_2) + \sum_{t=1}^{T-1} l_t \left(x_2(t+1) - x_2(t) - \frac{a_2}{2}z(t) \right),$$

где $l = (l_1, \dots, l_{T-1})$.

Условия оптимальности первого порядка: $\frac{\partial L(z, x_2, l)}{\partial z(t)} = 0, t = 1, \dots, T$ и $\frac{\partial L(z, x_2, l)}{\partial x_2(t)} = 0, t = 1, \dots, T$.

Сначала находим производные и получаем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial z(t)} &= 0, \quad t = 1, \dots, T-1, t, t-1 \notin U, \\
\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial z(t)} &= \delta^{t-1} 2c(z(t) - Az(t-1)), \quad t, \notin U, t-1 \in U, \\
\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial z(t)} &= \delta^{t-1} 2c(z(t) - Az(t-1)) - \delta^t 2Ac(z(t+1) - Az(t)) \\
&\quad + \delta^t 2(z(t) + x_2(t) - s), \quad t, t-1 \in U, \\
\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial z(t)} &= -\delta^t 2Ac(z(t+1) - Az(t)) + \delta^t 2(z(t) + x_2(t) - s), \\
&\quad t \in U, t-1 \notin U \\
\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial z(t)} &= \delta^{t-1} 2c(z(t) - Az(t-1)) + \delta^t 2(z(t) + x_2(t) - s), \\
&\quad t = T, t-1 \in U, \\
\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial z(t)} &= \delta^t 2(z(t) + x_2(t) - s), \quad t = T, t-1 \notin U, \\
\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial x_2(t)} &= 0, \quad t = 1, \dots, T-1, t \notin U, \\
\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial x_2(t)} &= \delta^t [2(z(t) + x_2(t) - s) + 2(x_2(t) - s)], \quad t \in U, \\
\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial x_2(t)} &= \delta^t [2(z(t) + x_2(t) - s) + 2(x_2(t) - s)], \quad t = T,
\end{aligned}$$

Запишем систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} l_t = 0, \quad t = 1, \dots, T-1, t, t-1 \notin U, \\ c(z(t) - A * z(t-1)) = \frac{a_2}{4} l_t \delta^{-t+1}, \quad t \notin U, t-1 \in U, \\ \left(\frac{c}{\delta} + A^2 c + 1\right) z(t) - \frac{Ac}{\delta} z(t-1) - Acz(t+1) + x_2(t) - s \\ \quad = \frac{a_2}{4} l_t \delta^{-t}, \quad t, t-1 \in U, \\ (A^2 c + 1) z(t) - Acz(t+1) + x_2(t) - s = \frac{a_2}{4} l_t \delta^{-t}, \\ \quad t \in U, t-1 \notin U, \\ (c + \delta) z(t) - Acz(t-1) + \delta(x_2(t) - s) = 0, \quad t = T, t-1 \in U, \\ z(t) + x_2(t) - s = 0, \quad t = T, t-1 \notin U, \\ l_{t-1} - l_t = 0, \quad t = 1, \dots, T-1, t \notin U, \\ \delta^t [2z(t) + 4(x_2(t) - s)] + l_{t-1} - l_t = 0, \quad t \in U, \\ \delta^t [2z(t) + 4(x_2(t) - s)] + l_{t-1} = 0, \quad t = T, \end{array} \right. \quad (2.21)$$

с начальными условиями $z(0) = x_1^0 - x_2^0$, $x_2(0) = x_2^0$.

Исключая l_t из системы (2.21), в конечном итоге получаем систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} z(t+1) = Az(t), \quad t = 1, \dots, T-1, t, t-1 \notin U, \\ \delta cz(t) - (c + Ac\delta) z(t-1) + Acz(t-2) = 0, \quad t \notin U, t-1 \in U \\ Bz(t) + Cz(t-1) + Ac\delta z(t+1) - \frac{Ac}{\delta} z(t-2) = (\delta - a_2\delta)(x_2(t) - s) \\ \quad - x_2(t-1) + s, \quad t, t-1 \in \{t_2, \dots, t_k\}, \\ Dz(t) + (1 + A^2c) z(t-1) + Ac\delta z(t+1) = (\delta - a_2\delta)(x_2(t) - s) \\ \quad - x_2(t-1) + s, \quad t \in U, t-1 \notin U, \\ (c + \delta) z(t) - Acz(t-1) + \delta(x_2(t) - s) = 0, \quad t = T, t-1 \in U, \\ z(t) + x_2(t) - s = 0, \quad t = T, t-1 \notin U, \\ \frac{a_2\delta^2}{2} z(t) + cz(t-1) - Acz(t-2) = a_2\delta^2(x_2(t) - s), \\ \quad t = T, t-1 \in \{t_2, \dots, t_k\}, \\ z(t) + 2(x_2(t) - s) = 0, \quad t = T, t-1 \notin U, \end{array} \right.$$

где $B = \frac{a_2\delta}{2} - c - A^2c\delta - \delta - Ac$, $C = Ac - \frac{c}{\delta} - A^2c - 1$, $D = \frac{a_2\delta}{2} - A^2c\delta - \delta - Ac$.

Теорема доказана. □

Система, данная в теореме 2.2, представляет собой необходимые условия для задачи оптимального управления.

Замечание 2.1. В Теореме 2.2, при заданном наборе U , решение системы (2.17) дает оптимальное управление и соответствующую оптимальную траекторию состояния. Когда набор U не задан игроку, он вторым шагом решает задачу оптимизации, рассматривая все возможные наборы U , сравнивая издержки, соответствующие этим возможным наборам, чтобы получить минимальные издержки. Таким образом, набор U , соответствующий минимальным затратам, является оптимальным.

2.3 Случай различных моментов влияния и валидации мнений

Рассмотрим двухагентную динамическую систему мнений, в которой игрок может выбирать только различные множества моментов влияния и валидации мнений. Предположим, что для игрока даны два множества моментов времени: моменты влияния M и моменты валидации мнений N . Предполагаем, что игрок делит множество всех моментов времени $\{0, 1, \dots, T\}$ на два непересекающихся подмножества: (i) когда он влияет на агента, множество M , и (ii) когда он валидирует мнения агентов, множество N . Следовательно, $t \in \{0, 1, \dots, T-1, T\} = M \cup N$, где $M = \{m_1, m_2, \dots, m_p\}$, и $0 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_p \leq T-1$ с $p < T$. Пусть N будет множеством $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$, $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k \leq T$ с $k < T$, и $M \cap N = \emptyset$. Обозначения следующие:

- $x_i(t)$: мнение агента i в момент времени $t \in [0, T]$, $i = 1, 2$;

- $u(t)$: уровень влияния игрока на мнение агента 1 в момент времени $t \in [0, T - 1]$;
- $M = \{m_1, m_2, \dots, m_p\}$: множество моментов влияния или управления игрока, $p < T$;
- $N = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$: множество моментов валидации мнений, $k < T$.

Динамика мнений агентов определяется следующими уравнениями:

$$x_1(t+1) = x_1(t) + a_1 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_1(t) \right) + u(t), \quad t \in M, \quad (2.22)$$

$$x_1(t+1) = x_1(t) + a_1 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_1(t) \right), \quad t \notin M, \quad (2.23)$$

$$x_2(t+1) = x_2(t) + a_2 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_2(t) \right), \quad t = 0, \dots, T - 1 \quad (2.24)$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0. \quad (2.25)$$

В приведенных выше уравнениях, $a_1 > 0, a_2 > 0$ обозначают представления агентов 1 и 2 о среднем общественном мнении соответственно.

Динамика мнений агентов удовлетворяет следующим условиям:

1. Когда t принадлежит M , агент 1 обновляет свое мнение в соответствии с уравнением (2.22). Мнение агента 1, среднее общественное мнение и стратегия игрока в предыдущий момент времени будут влиять на формирование мнения в текущий момент.
2. Когда t принадлежит N , агент 1 обновляет свое мнение в соответствии с уравнением (2.23). Мнение агента 1 и среднее общественное мнение в предыдущий момент времени будут влиять на формирование мнения в текущий момент.

3. Когда $t \in \{0, \dots, T - 1\}$, агент 2 обновляет свое мнение в соответствии с уравнением (2.24) в любой момент времени. Мнение агента 2 и среднее общественное мнение в предыдущий момент времени будут влиять на формирование мнения в текущий момент, так как агент 2 не подвержен влиянию игрока.

Целевое мнение игрока равно $s \in R$. Игрок стремится минимизировать свои затраты:

$$J(u) = \sum_{i=1}^p \delta^{m_i} (cu^2(m_i)) + \sum_{j=1}^k \delta^{n_j} \left((x_1(n_j) - s)^2 + (x_2(n_j) - s)^2 \right) + \delta^T \left((x_1(T) - s)^2 + (x_2(T) - s)^2 \right), \quad (2.26)$$

где $\delta \in (0, 1]$ — дисконтирующий коэффициент, а $c > 0$ — затраты игрока на единицу влияния.

Таким образом, задача линейно-квадратичной оптимизации может быть переписана следующим образом:

$$\begin{cases} \text{минимизировать (2.26)} \\ \text{при условии, что } u, \text{ удовлетворяет (2.22), (2.23) и (2.24).} \end{cases} \quad (2.27)$$

Theorem 2.3. Пусть $\{u^*(t) : t = m_1, m_2, \dots, m_p\}$ — оптимальная стратегия при минимизации функционала (2.26) при начальных условиях (2.25), уравнениях динамики состояния (2.22), (2.23) и (2.24), а $\{(x_1^*(t), x_2^*(t)) : t = 0, \dots, T\}$ — соответствующая траектория состояния. Заданы множества моментов времени M и N . Тогда оптимальная стратегия $u^*(t)$, $t \in M$ определяется как

$$u^*(t) = z^*(t + 1) - Az^*(t),$$

и соответствующая оптимальная траектория состояния $(x_1^*(t), x_2^*(t))$, $t =$

$1, \dots, T$, удовлетворяют системе уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} Bz(t) + Ac\delta z(t+1) + Cz(t-1) - \frac{Ac}{\delta}z(t-2) = 0, \\ t \in M, \quad t = m_i, i = 2, \dots, p, \\ (\frac{a_2\delta}{2} - \delta)z(t) + z(t-1) = (\delta - a_2\delta)(x_2(t) - s) - x_2(t) + s, \\ t \in N, \\ (Ac - \frac{a_2\delta}{2})z(t) - (\frac{c}{\delta} + A^2c)z(t-1) + \frac{Ac}{\delta}z(t-2) \\ = a_2\delta(x_2(t) - s), \quad t = T, t-1 \in M, \quad t = m_i, i = 2, \dots, p, \\ -\frac{a_2\delta}{2}z(t) - z(t-1) = a_2\delta(x_2(t) - s) + x_2(t) - s, \\ t = T, t-1 \in N, \\ (c + \delta)z(t) - Acz(t-1) + \delta(x_2(t) - s) = 0, \quad t = T, t-1 \in M, \\ z(t) + x_2(t) - s = 0, \quad t = T, t-1 \in N, \\ x_2(t+1) = x_2(t) + \frac{a_2}{2}z(t), \quad t = 1, \dots, T-1, \end{array} \right. \quad (2.28)$$

где $z^*(t) = x_1^*(t) - x_2^*(t)$, $A = 1 - \frac{a_1+a_2}{2}$, $B = -(Ac - c - A^2c\delta)$, $C = \frac{c}{\delta} + A^2c + Ac$.

Доказательство. Введем новую переменную $z(t)$ следующим образом:

$$z(t) = x_1(t) - x_2(t), \quad t = 0, \dots, T.$$

Из уравнений состояния (2.22), (2.23) и (2.24), принимая во внимание выражение $z(t)$, получаем новые уравнения состояния:

$$z(t+1) = Az(t) + u(t), \quad t \in M, \quad (2.29)$$

$$z(t+1) = Az(t), \quad t \notin M,$$

$$x_2(t+1) = x_2(t) + \frac{a_2}{2}z(t), \quad (2.30)$$

с начальными условиями

$$z(0) = x_1^0 - x_2^0, \quad x_2(0) = x_2^0,$$

где $A = 1 - \frac{a_1+a_2}{2}$.

Находим выражение для $u(t)$ из (2.22) и получаем

$$u(t) = z(t+1) - Az(t), t \in M. \quad (2.31)$$

Подставив эти выражения в функционал, можно переписать его в следующей форме:

$$\begin{aligned} J(z, x_2) = & \sum_{i=1}^p \delta^{m_i} \left[c(z(m_i+1) - Az(m_i))^2 \right] \\ & + \sum_{j=1}^k \delta^{n_j} \left[(z(n_j) + x_2(n_j) - s)^2 + (x_2(n_j) - s)^2 \right] \\ & + \delta^T \left[(z(T) + x_2(T) - s)^2 + (x_2(T) - s)^2 \right]. \end{aligned}$$

Чтобы минимизировать $J(z, x_2)$ при заданных уравнениях (2.24) и (2.31), запишем функцию Лагранжа

$$L(z, x_2, k) = J(z, x_2) + \sum_{t=1}^{T-1} k_t \left(x_2(t+1) - x_2(t) - \frac{a_2}{2} z(t) \right).$$

где $k = (k_1, \dots, k_{T-1})$. Условия оптимальности первого порядка: $\frac{\partial L(z, x_2, k)}{\partial z(t)} = 0, t = 1, \dots, T$ и $\frac{\partial L(z, x_2, k)}{\partial x_2(t)} = 0, t = 1, \dots, T$.

Находим производные и получаем

$$\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial z(t)} = \delta^{t-1} 2c(z(t) - Az(t-1)) - \delta^t 2Ac(z(t+1) - Az(t)), \quad t \in M,$$

$$\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial z(t)} = \delta^t 2(z(t) + x_2(t) - s), \quad t \in N,$$

$$\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial z(t)} = \delta^{t-1} 2c(z(t) - Az(t-1)) + \delta^t 2(z(t) + x_2(t) - s),$$

$$t = T, t-1 \in M,$$

$$\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial z(t)} = \delta^t 2(z(t) + x_2(t) - s), \quad t = T, t-1 \in N,$$

$$\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial x_2(t)} = 0, \quad t \in M,$$

$$\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial x_2(t)} = \delta^t [2(z(t) + x_2(t) - s) + 2(x_2(t) - s)], \quad t \in N,$$

$$\frac{\partial J(z, x_2)}{\partial x_2(t)} = \delta^t [2(z(t) + x_2(t) - s) + 2(x_2(t) - s)], \quad t = T.$$

Записываем систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{c}{\delta} + A^2c \right) z(t) - \frac{Ac}{\delta} z(t-1) - Acz(t+1) = \frac{a_2}{4} k_t \delta^{-t}, \quad t \in M, \\ z(t) + x_2(t) - s = \frac{a_2}{4} k_t \delta^{-t}, \quad t \in N, \\ (c + \delta) z(t) - Acz(t-1) + \delta(x_2(t) - s) = 0, \quad t = T, t-1 \in M, \\ z(t) + x_2(t) - s = 0, \quad t = T, t-1 \in N, \\ k_{t-1} - k_t = 0, \quad t \in M, \\ \delta^t [2z(t) + 4(x_2(t) - s)] + k_{t-1} - k_t = 0, \quad t \in N, \\ \delta^t [2z(t) + 4(x_2(t) - s)] + k_{t-1} = 0, \quad t = T, \end{array} \right. \quad (2.32)$$

с начальными условиями $z(0) = x_1^0 - x_2^0$, $x_2(0) = x_2^0$.

Исключая k_t из системы (2.32), получаем систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} Bz(t) + Ac\delta z(t+1) + Cz(t-1) - \frac{Ac}{\delta} z(t-2) = 0, \\ t \in M, \quad t = m_i, i = 2, \dots, p, \\ \left(\frac{a_2\delta}{2} - \delta \right) z(t) + z(t-1) = (\delta - a_2\delta)(x_2(t) - s) - x_2(t) + s, \quad t \in N, \\ \left(Ac - \frac{a_2\delta}{2} \right) z(t) - \left(\frac{c}{\delta} + A^2c \right) z(t-1) + \frac{Ac}{\delta} z(t-2) = a_2\delta(x_2(t) - s), \\ t = T, t-1 \in M, \quad t = m_i, i = 2, \dots, p, \\ -\frac{a_2\delta}{2} z(t) - z(t-1) = a_2\delta(x_2(t) - s) + x_2(t) - s, \quad t = T, t-1 \in N, \\ (c + \delta) z(t) - Acz(t-1) + \delta(x_2(t) - s) = 0, \quad t = T, t-1 \in M, \\ z(t) + x_2(t) - s = 0, \quad t = T, t-1 \in N, \end{array} \right.$$

где $B = -(Ac - c - A^2c\delta)$, $C = \frac{c}{\delta} + A^2c + Ac$.

Теорема доказана. □

Замечание 2.2. В теореме 2.3 при заданных множествах M и N , решение системы (2.28) дает оптимальное управление и соответствующую оптимальную траекторию состояния. Если множества M и N не заданы, игрок может найти их оптимальным способом, рассмотрев все возможные множества N (после этого M определяется однозначно) и сравнив затраты, соответствующие всем этим множества для нахождения минимальных

издержек. Следовательно, множества M и N , соответствующий минимальным издержкам, является оптимальным.

2.4 Численное моделирование

2.4.1 Численный пример для Раздела 2.1

Пусть $a_1 = 0.2$, $a_2 = 0.9$, $\delta = 1$, $c = 0.8$ и начальные мнения агентов есть $x_1(0) = 0.7$, $x_2(0) = 0.2$. Целевое мнение игрока равно $s = 0.5$. Также предположим, что k равно 3. Для $T = 10$ реализуем алгоритм и получим, что минимальные затраты игрока достигаются при множестве моментов влияния или управления $\{0, 8, 9\}$. Значения оптимальных траекторий мнений агентов и оптимальной траектории управления приведены в таблице 2.1. Оптимальное значение функционала (2.5) равно 0.1511.

Таблица 2.1: Оптимальные траектории управления и состояния.

t	$t_1 = 0$	1	2	3	4	5
$x_1(t)$	0.7000	0.5193	0.5084	0.5036	0.5016	0.5007
$x_2(t)$	0.2000	0.4250	0.4674	0.4858	0.4939	0.4973
$z(t)$	0.5000	0.0943	0.0409	0.0178	0.0077	0.0034
$u(t)$	-0.1307					
t	6	7	$t_2 = 8$	$t_3 = 9$	10	
$x_1(t)$	0.5003	0.5001	0.5001	0.5000	0.5000	
$x_2(t)$	0.4988	0.4995	0.4998	0.4999	0.5000	
$z(t)$	0.0015	0.0006	0.0003	0.0001	0.00005	
$u(t)$			-0.000007	-0.000006		

Оптимальная траектория мнений (для обоих агентов 1 и 2) и траектория управлений игрока на представлены рис. 2.1 и 2.2 соответственно.

Действуя оптимально, игрок выбирает влиять на агента 1 в моменты 0, 8 и

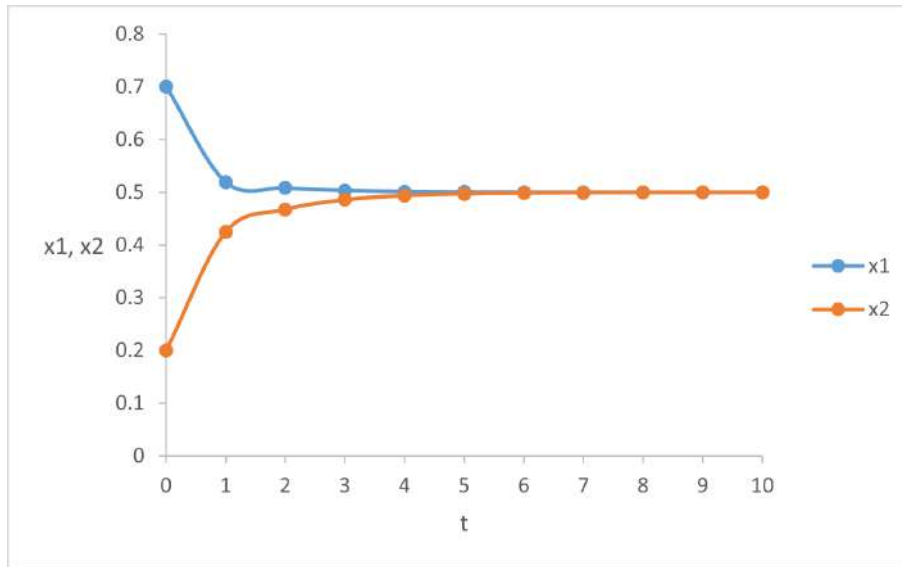


Рис. 2.1: Оптимальные траектории состояний (синий — $x_1(t)$, красный — $x_2(t)$).

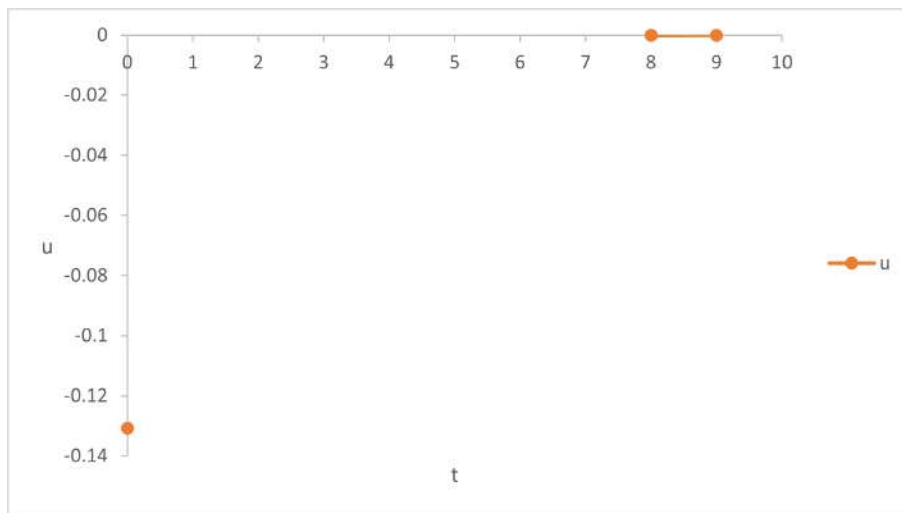


Рис. 2.2: Оптимальная траектория управления $u(t)$.

9. Напомним, что игрок валидирует мнения обоих агентов в каждый момент времени. Расчеты показывают, что этот набор моментов влияния является оптимальным, т. е. множество моментов времени $\{0, 8, 9\}$ минимизирует его общие затраты, которые составляют 0.1511. Легко заметить, глядя на рис. 2.1, что после момента времени 4 мнения обоих агентов становятся очень близкими к целевому мнению $s = 0.5$.

2.4.2 Численное моделирование для раздела 2.2

Рассмотрим 11-шаговую задачу с $T = 10$ (моменты времени $0, \dots, 10$). Пусть $k = 3$. Параметры следующие:

$$a_1 = 0.4, a_2 = 0.5, \delta = 1, c = 0.7, s = 0.5.$$

В сети есть 2 агента. Начальное состояние мнений агентов $x(0) = (0.2, 0.8)$. Убеждения агента 1 и агента 2 о среднем общественном мнении равны $a_1 = 0.4$ и $a_2 = 0.5$ соответственно. Коэффициент дисконтирования равен $\delta = 1$. Удельные затраты на единицу влияния игрока равны $c = 0.7$. Его целевое мнение равно $s = 0.5$.

Таблица 2.2: Оптимальные траектории управления и состояния.

t	0	1	2	3	4	5
$x_1(t)$	0.2000	0.3930	0.4444	0.4727	0.4882	0.4968
$x_2(t)$	0.8000	0.6500	0.5858	0.5504	0.5310	0.5203
$z(t)$	-0.6000	-0.2570	-0.1413	-0.0777	-0.0428	-0.0235
$u(t)$						
t	$t_1 = 6^a$	$t_2 = 7^a$	$t_3 = 8^a$	9	10	
$x_1(t)$	0.4987	0.4955	0.4929	0.4901	0.5000	
$x_2(t)$	0.5144	0.5105	0.5067	0.5033	0.5000	
$z(t)$	-0.0157	-0.0150	-0.0138	-0.0132	0	
$u(t)$	-0.0063	-0.0056	-0.0056			

^a Игрок управляет мнением агента 1 и валидирует мнения всех агентов в эти три моменты времени, чтобы минимизировать издержки.

По теореме 2.2 выписываем необходимые условия и решаем систему (2.17). Минимальные издержки игрока получаются, когда множество влияния и валидации мнений агентов есть $\{6, 7, 8\}$. Этот набор выбран оптимально из 120 наборов. Значения оптимальных траекторий мнений агентов и оптималь-

ной траектории управления приведены в таблице 2.2. Оптимальное значение функционала (2.15) равно 0.000507.

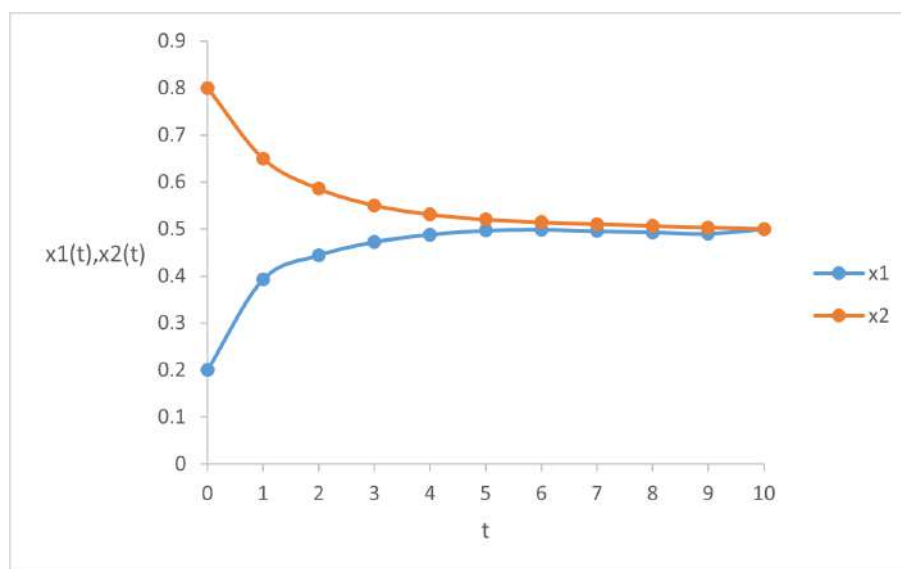


Рис. 2.3: Оптимальные траектории состояний (синий — $x_1(t)$, красный — $x_2(t)$).

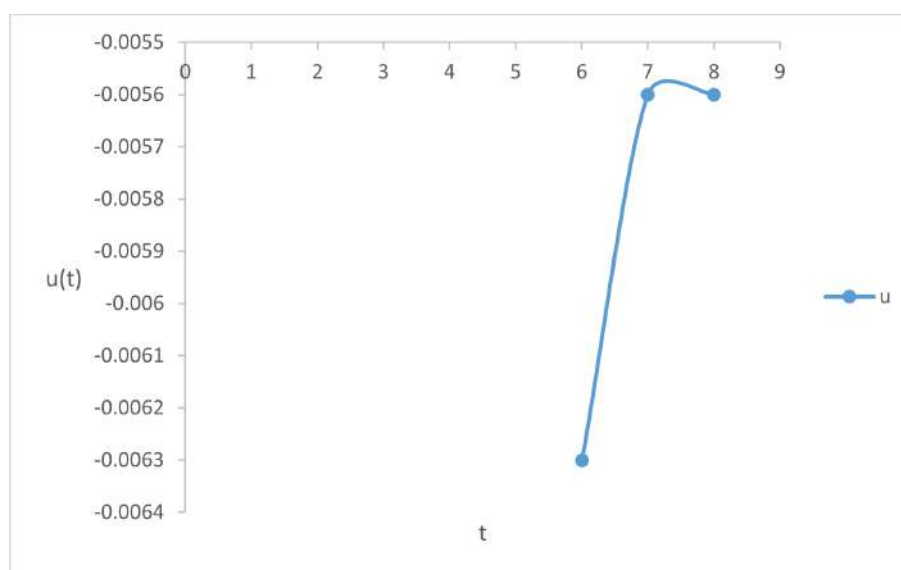


Рис. 2.4: Оптимальная траектория управления $u(t)$.

Мнения агентов стабилизируются со временем. Игрок контролирует мнение агента 1. Оптимальные траектории состояний агентов показаны на рис. 2.3. Оптимальная траектория управления представлена на рис. 2.4.

На рис. 2.3 мы видим, что игрок выбирает управление агентом и валидацию мнений агентов в моменты 6, 7 и 8, что минимизирует его издержки, которые

равны 0.000507. После момента 5 мнения агентов почти достигают целевого мнения $s = 0.5$.

Минимальные издержки соответствуют “лучшему” результату (оптимальному значению издержек), и мы также можем проверить, намного ли эти издержки меньше издержки в “худшем” результате (когда моменты времени выбираются так, чтобы иметь максимальные из минимальных затрат, это можно назвать наихудшим сценарием). Максимальные затраты среди всех оптимальных решений можно рассчитать таким же образом. Максимальные затраты игрока составляют 2.07173297, и они получены, когда множество моментов времени влияния и валидации мнений равно $\{1, 3, 5\}$. Сравнивая разрыв между “худшими” и “лучшими” результатами, т. е. $\frac{J_{max} - J_{min}}{J_{max}} \cdot 100\% = 99,98\%$, мы можем заметить, что если игрок оптимизирует, следуя процедуре, предложенной в работе, он может сократить почти все свои затраты, почти доведя их до нулевого значения.

Замечание 2.3. Мы вычисляем множество всех возможных моментов времени S_T^k способами. В примере при $T = 10$ игрок выбирает три момента времени для влияния на мнение агента, т. е. $S_{10}^3 = 120$. Для нахождения оптимального решения задачи оптимизации нам необходимо решить 120 систем, приведенных в теореме 2.2.

2.4.3 Пример для раздела 2.3

Также предположим, что k равно 3, как и в предыдущем разделе. Пусть параметры будут следующими:

$$a_1 = 0.2, a_2 = 0.6, \delta = 1, c = 0.7, s = 0.5,$$

$$x_1(0) = 0.3, x_2(0) = 0.9, T = 10.$$

По теореме 2.3 нам необходимо решить систему (2.28). Получено, что мини-

мальные издержки игрока достигаются, если выбрано множество моментов влияния или управления таковым: $\{0, 1, 9\}$. Значения оптимальных мнений агентов и оптимальная траектория управления приведены в таблице 2.3. Оптимальное значение функционала (2.26) равно 0.034872.

Таблица 2.3: Оптимальные траектории управления и состояния.

t	$t_1 = 0^a$	$t_2 = 1^a$	2	3	4	5
$x_1(t)$	0.3000	0.4312	0.4588	0.4759	0.4868	0.4943
$x_2(t)$	0.9000	0.7200	0.6334	0.5810	0.5495	0.5307
$z(t)$	-0.6000	-0.2888	-0.1745	-0.1051	-0.0627	-0.0364
$u(t)$	0.0712	-0.0012				
t	6	7	8	$t_3 = 9^a$	10	
$x_1(t)$	0.5003	0.5064	0.5141	0.5059	0.5027	
$x_2(t)$	0.5198	0.5139	0.5117	0.5124	0.5104	
$z(t)$	-0.0195	-0.0075	0.0024	-0.0065	-0.0077	
$u(t)$				-0.0039		

^a Игрок минимизирует издержки, влияя на мнение агента 1 в эти три момента времени.

Мнения агентов «стабилизируются» со временем. Игрок контролирует мнение агента 1. Оптимальные траектории состояний представлены на рис. 2.5. Оптимальная траектория управления показана на рис. 2.6.

Из рис. 2.5 мы видим, что игрок влияет на агента в моменты времени 0, 1 и 9 и валидирует мнения агентов в оставшиеся периоды, при этом достигается минимум его затрат, которые составляют 0.034872. После момента времени 5 мнения агентов почти достигают целевого мнения $s = 0.5$.

Мы используем ту же идею, что и в примере 2.4.2, чтобы подчеркнуть, что теорема 2.3 также эффективна для снижения затрат игрока. Максимальные затраты игрока (наихудший сценарий) составляют 44.0362762, и они достигаются, когда множество моментов влияния и валидации мнений равно

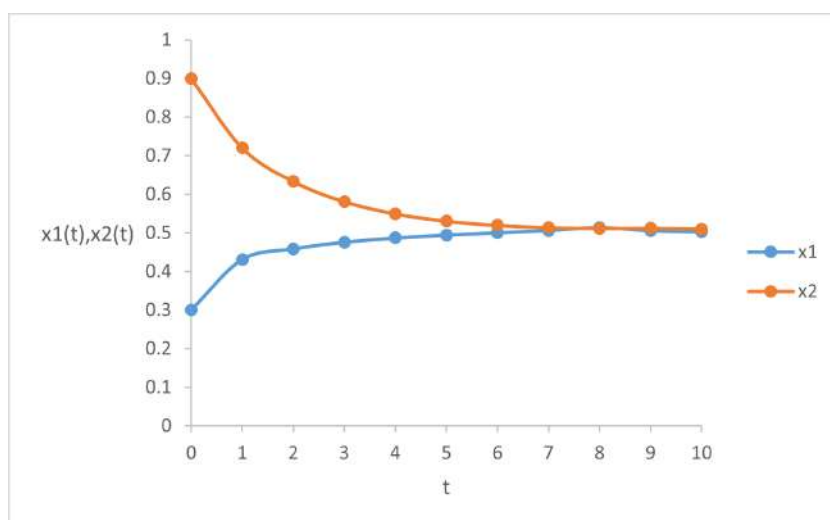


Рис. 2.5: Оптимальные траектории состояний (синий — $x_1(t)$, красный — $x_2(t)$).

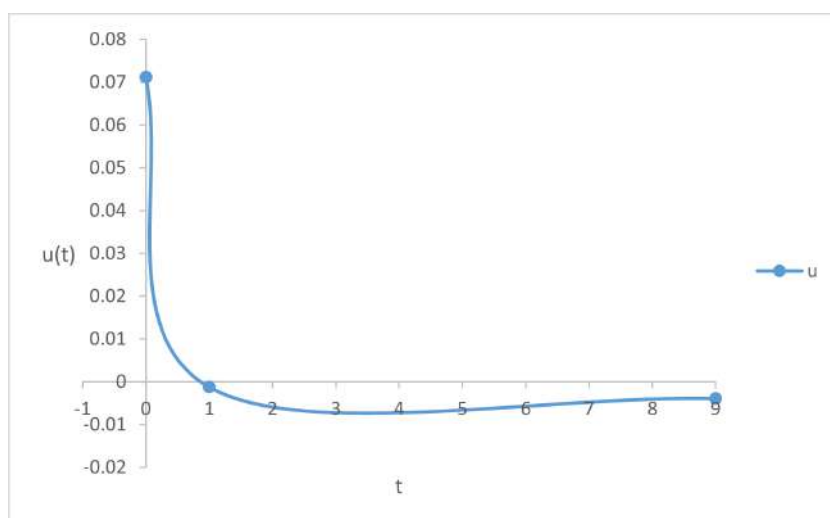


Рис. 2.6: Оптимальная траектория управления $u(t)$.

{3, 4, 6}. Сравнивая разрыв между «худшим» и «лучшим» сценариями, получаем $\frac{J_{max} - J_{min}}{J_{max}} \cdot 100\% = 99.92\%$. Следовательно, игрок может свести почти все свои издержки к нулю, используя оптимальное управление, полученное из теоремы 2.3, и выбирая множество моментов влияния оптимальным образом.

Можно отметить, что для этого случая (этого раздела) численного моделирования издержки игрока больше, чем для предыдущего случая (раздел 2.2), и, кроме того, наборы управления для этих двух случаев различны. Когда у игрока есть возможность контролировать мнение агента одновременно

с влиянием на его мнение, то он предпочитает делать это в конце временного интервала. Во втором случае он сначала влияет на мнение агента в начале временного интервала, а затем только валидирует мнения агентов и, наконец, влияет на агента в конце временного интервала при $t = 9$.

2.5 Заключение к главе 2

В этой главе представлены три математические модели динамики мнений в небольших социальных группах в многоагентном случае с наличием игрока или лица, принимающего решения. В этих моделях цель игрока — приблизить общественное мнение к целевому, минимизируя затраты, затем игрок применяет подход оптимального выбора «правильных моментов» для влияния на агента, тем самым минимизируя затраты. Первая модель характеризуется тем, что игрок может влиять только на одного агента в системе и может выбирать моменты влияния в ограниченном количестве. Найдены необходимые условия оптимального решения задачи при минимизации затрат игрока. В численном моделировании показано, как оптимально находить множество моментов влияния, выбранных игроком для минимизации затрат.

Далее смоделировано еще два случая, когда у игрока есть ограничения на множество моментов влияния: 1) игрок валидирует мнения агентов и влияет на мнение одного агента одновременно, и 2) игрок валидирует мнения агентов и влияет на мнение агента в разное время, без пересечений этих моментов. Эти две идеи позволяют игрокам выбирать влияние более эффективно. В рамках численного моделирования показано, как выбирать оптимальное множество моментов и оптимальное управление для игрока. Модели, представленные в этой главе, также могут быть обобщены на большее количество агентов и игроков.

Глава 3

Динамика мнений в небольших социальных группах с двумя центрами влияния

3.1 Случай, когда два игрока валидируют мнения агентов в терминальный момент времени

Предполагаем, что есть два влиятельных лица или игрока, и они напрямую влияют на агента 1 и агента 2 соответственно. Игроки имеют одинаковые коэффициенты дисконтирования, но они различаются по своим затратам на единицу интенсивности влияния (c_1 и c_2) и целевым уровням мнений (s_1 и s_2). Уравнения динамики состояний для мнений агентов 1 и 2 имеют вид

$$x_1(t+1) = x_1(t) + a_1 \left(\frac{x_1(t)+x_2(t)}{2} - x_1(t) \right) + u_1(t), \quad (3.1)$$

$$x_2(t+1) = x_2(t) + a_2 \left(\frac{x_1(t)+x_2(t)}{2} - x_2(t) \right) + u_2(t) \quad (3.2)$$

с начальным условием

$$x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0. \quad (3.3)$$

Игроки 1 и 2 стремятся минимизировать свои функционалы:

$$J_1(u_1, u_2) = \sum_{t=0}^{T-1} \delta^t (c_1 u_1^2(t)) + \delta^T \left((x_1(T) - s_1)^2 + (x_2(T) - s_1)^2 \right), \quad (3.4)$$

$$J_2(u_1, u_2) = \sum_{t=0}^{T-1} \delta^t (c_2 u_2^2(t)) + \delta^T \left((x_1(T) - s_2)^2 + (x_2(T) - s_2)^2 \right), \quad (3.5)$$

соответственно, где $c_i > 0$ - затраты игрока i на единицу интенсивности влияния.

Определим игру двух лиц с множеством стратегий игроков U_1, U_2 , где $U_j = (u_j(t) \in \mathbb{R} : t = 0, \dots, T-1)$, $j = 1, 2$, функциями затрат игроков J_1, J_2 , определенных формулами (3.4) и (3.5) при условии уравнений динамики состояния (3.1) и (3.2) с начальным состоянием $x(0) = (x_1(0), x_2(0)) = (x_1^0, x_2^0)$. Игра принадлежит к классу линейно-квадратичных игр.

Следующая теорема дает необходимые условия равновесия по Нэшу для описанной выше игры.

Theorem 3.1. Пусть $\{(u_1, u_2), u_i = (u_i(t) : t = 0, \dots, T-1), i = 1, 2\}$ - равновесие по Нэшу в описанной выше игре, тогда равновесная стратегия определяется по формуле:

$$u_i(t) = x_i(t+1) - \left(1 - \frac{a_i}{2}\right) x_i(t) - \frac{a_i}{2} x_j(t), \quad (3.6)$$

и $\{(x_1(t), x_2(t)) : t = 0, \dots, T\}$ - соответствующая равновесию траектория состояния с начальным условием $x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0$, они удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} -a_i c_i \left(x_i(t+1) - \left(1 - \frac{a_i}{2}\right) x_i(t) - \frac{a_i}{2} x_j(t) \right) \\ = \left(1 - \frac{a_j}{2}\right) \hat{k}_t^i - \frac{\hat{k}_{t-1}^i}{\delta}, \quad t = 2, \dots, T-1, \\ c_i \left(x_i(t) - \left(1 - \frac{a_i}{2}\right) x_i(t-1) - \frac{a_i}{2} x_j(t-1) \right) \\ + \delta (x_i(t) - s_i) = 0, \quad t = T, \\ x_j(t) = s_i - \frac{1}{2\delta} \hat{k}_{t-1}^i, \quad t = T, \end{cases} \quad (3.7)$$

где $i, j = 1, 2, i \neq j$ и

$$\hat{k}_t^i = \frac{4}{a_j \delta} \left[\left(c_i + \delta c_i \left(1 - \frac{a_i}{2} \right)^2 \right) x_i(t) - c_i \left(1 - \frac{a_i}{2} \right) x_i(t-1) - \delta c_i \left(1 - \frac{a_i}{2} \right) x_i(t+1) - \frac{c_i a_i}{2} x_j(t-1) + \frac{\delta c_i a_i}{2} \left(1 - \frac{a_i}{2} \right) x_j(t) \right],$$

$t = 1, \dots, T-1$ с учетом уравнений динамики (3.1) и (3.2) и начального состояния $(x_1(0), x_2(0)) = (x_1^0, x_2^0)$.

Доказательство. Зафиксируем $u_2(t), t = 0, \dots, T-1$ и найдем наилучший ответ игрока 1. Используем метод уравнений Эйлера для нахождения равновесия по Нэшу в игре. Сначала находим выражения $u_1(t)$ из уравнения (3.1) как функции от x_1 и x_2 и $u_2(t)$ из уравнения (3.2) как функции от x_1 и x_2 :

$$u_1(t) = x_1(t+1) - \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) x_1(t) - \frac{a_1}{2} x_2(t).$$

Цель первого игрока — минимизировать

$$J_1(x_1, x_2, u_2) = \sum_{t=0}^{T-1} \delta^t \left(c_1 \left(x_1(t+1) - \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) x_1(t) - \frac{a_1}{2} x_2(t) \right)^2 \right) + \delta^T \left((x_1(T) - s_1)^2 + (x_2(T) - s_1)^2 \right),$$

при условии (3.2). Запишем функцию Лагранжа

$$L_1(x_1, x_2, k^1) = J_1(x_1, x_2, u_2) + \sum_{t=0}^{T-1} k_t^1 \left(x_2(t+1) - \left(1 - \frac{a_2}{2} \right) x_2(t) - \frac{a_2}{2} x_1(t) - u_2(t) \right),$$

где $k^1 = \{k_t^1, t = 0, \dots, T-1\}$.

Найдя производные и решая уравнения: $\frac{\partial L_1(x_1, x_2, k^1)}{\partial x_1(t)} = 0$ и $\frac{\partial L_1(x_1, x_2, k^1)}{\partial x_2(t)} = 0, t = 1, \dots, T$, получаем соответствующие системы:

$$\begin{cases} \left(c_1 + \delta c_1 \left(1 - \frac{a_1}{2} \right)^2 \right) x_1(t) - c_1 \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) x_1(t-1) - \delta c_1 \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) x_1(t+1) - \frac{c_1 a_1}{2} x_2(t-1) + \frac{\delta c_1 a_1}{2} \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) x_2(t) \\ = \frac{a_2}{4} k_t^1 \delta^{-(t-1)}, \quad t = 1, \dots, T-1, \\ c_1 \left(x_1(t) - \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) x_1(t-1) - \frac{a_1}{2} x_2(t-1) \right) + \delta \left(x_1(t) - s_1 \right) = 0, \quad t = T, \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} -a_1 c_1 (x_1(t+1) - (1 - \frac{a_1}{2}) x_1(t) - \frac{a_1}{2} x_2(t)) \\ = ((1 - \frac{a_2}{2}) k_t^1 - k_{t-1}^1) \delta^{-t}, t = 1, \dots, T-1, \\ x_2(t) - s_1 = -\frac{1}{2} k_{t-1}^1 \delta^{-t}, t = T. \end{cases} \quad (3.9)$$

Из первого уравнения системы (3.8) получаем:

$$\begin{aligned} k_t^1 &= \frac{4}{a_2} \delta^{t-1} \left[\left(c_1 + \delta c_1 \left(1 - \frac{a_1}{2} \right)^2 \right) x_1(t) - c_1 \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) x_1(t-1) \right. \\ &\quad \left. \delta c_1 \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) x_1(t+1) - \frac{c_1 a_1}{2} x_2(t-1) + \frac{\delta c_1 a_1}{2} \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) x_2(t) \right], \\ &t = 1, \dots, T-1. \end{aligned}$$

Обозначив $\hat{k}_t^1 = k_t^1 \delta^{-t}$ и подставив это в систему (3.9) и учитывая второе уравнение в системе (3.8), получаем систему уравнений для определения наилучшего ответа игрока 1:

$$\begin{cases} -a_1 c_1 (x_1(t+1) - (1 - \frac{a_1}{2}) x_1(t) - \frac{a_1}{2} x_2(t)) \\ = (1 - \frac{a_2}{2}) \hat{k}_t^1 - \frac{\hat{k}_{t-1}^1}{\delta}, t = 2, \dots, T-1, \\ c_1 (x_1(t) - (1 - \frac{a_1}{2}) x_1(t-1) - \frac{a_1}{2} x_2(t-1)) \\ + \delta (x_i(t) - s_i) = 0, t = T, \\ x_2(t) = s_1 - \frac{1}{2\delta} \hat{k}_{t-1}^1, t = T, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{k}_t^1 &= \frac{4}{a_2 \delta} \left[\left(c_1 + \delta c_1 \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) \right) x_1(t) - c_1 \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) x_1(t-1) \right. \\ &\quad \left. - \delta c_1 \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) x_1(t+1) - \frac{c_1 a_1}{2} x_2(t-1) + \frac{\delta c_1 a_1}{2} \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) x_2(t) \right], \\ &t = 1, \dots, T-1. \end{aligned}$$

Определяем наилучший ответ игрока 2 таким же образом.

Зафиксируем $u_1(t), t = 0, \dots, T-1$ и найдем наилучший ответ игрока 2.

Используем метод уравнений Эйлера для нахождения равновесия по Нэшу в описанной игре. Сначала мы находим выражения $u_2(t)$ из уравнения (3.2)

как функции от x_1 и x_2 и $u_1(t)$ из уравнения (3.1) как функции от x_1 и x_2 :

$$u_2(t) = x_2(t+1) - \left(1 - \frac{a_2}{2}\right) x_2(t) - \frac{a_2}{2} x_1(t).$$

Цель второго игрока — минимизировать

$$J_2(u_1, x_1, x_2) = \sum_{t=0}^{T-1} \delta^t \left(c_2 \left(x_2(t+1) - \left(1 - \frac{a_2}{2}\right) x_2(t) - \frac{a_2}{2} x_1(t) \right)^2 \right) + \delta^T \left((x_1(T) - s_2)^2 + (x_2(T) - s_2)^2 \right),$$

при условии (3.12). Запишем функцию Лагранжа

$$L_2(x_1, x_2, k^2) = J_2(u_1, x_1, x_2) + \sum_{t=0}^{T-1} k_t^2 \left(x_1(t+1) - \left(1 - \frac{a_1}{2}\right) x_1(t) - \frac{a_1}{2} x_2(t) - u_1(t) \right),$$

где $k^2 = \{k_t^2, t = 0, \dots, T-1\}$.

Найдя производные и решая уравнения: $\frac{\partial L_2(x_1, x_2, k^2)}{\partial x_1(t)} = 0$ и $\frac{\partial L_2(x_1, x_2, k^2)}{\partial x_2(t)} = 0, t = 1, \dots, T$, получаем соответствующие системы:

$$\begin{cases} -a_2 c_2 \left(x_2(t+1) - \left(1 - \frac{a_2}{2}\right) x_2(t) - \frac{a_2}{2} x_1(t) \right) \\ = \left(\left(1 - \frac{a_1}{2}\right) k_t^2 - k_{t-1}^2 \right) \delta^{-t}, t = 1, \dots, T-1, \\ x_1(t) - s_2 = -\frac{1}{2} k_{t-1}^2 \delta^{-t}, t = T, \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\begin{cases} \left(c_2 + \delta c_2 \left(1 - \frac{a_2}{2}\right)^2 \right) x_2(t) - c_2 \left(1 - \frac{a_2}{2}\right) x_2(t-1) \\ - \delta c_2 \left(1 - \frac{a_2}{2}\right) x_2(t+1) - \frac{c_2 a_2}{2} x_1(t-1) + \frac{\delta c_2 a_2}{2} \left(1 - \frac{a_2}{2}\right) x_1(t) \\ = \frac{a_1}{4} k_t^2 \delta^{-(t-1)}, t = 1, \dots, T-1, \\ c_2 \left(x_2(t) - \left(1 - \frac{a_2}{2}\right) x_2(t-1) - \frac{a_2}{2} x_2(t-1) \right) \\ + \delta \left(x_2(t) - s_2 \right) = 0, t = T. \end{cases} \quad (3.11)$$

Из первого уравнения системы (3.11) получаем

$$k_t^2 = \frac{4}{a_1} \delta^{t-1} \left[\left(c_2 + \delta c_2 \left(1 - \frac{a_2}{2}\right)^2 \right) x_2(t) - c_2 \left(1 - \frac{a_2}{2}\right) x_2(t-1) - \delta c_2 \left(1 - \frac{a_2}{2}\right) x_2(t+1) - \frac{c_2 a_2}{2} x_1(t-1) + \frac{\delta c_2 a_2}{2} \left(1 - \frac{a_2}{2}\right) x_1(t) \right],$$

$$t = 1, \dots, T-1.$$

Обозначив $\hat{k}_t^2 = k_t^2 \delta^{-t}$ и подставив это в систему (3.10) и учитывая второе уравнение в системе (3.11), получаем систему уравнений для определения наилучшего ответа игрока 2:

$$\begin{cases} -a_2 c_2 (x_2(t+1) - (1 - \frac{a_2}{2}) x_2(t) - \frac{a_2}{2} x_1(t)) \\ = (1 - \frac{a_1}{2}) \hat{k}_t^2 - \frac{\hat{k}_{t-1}^2}{\delta}, \quad t = 2, \dots, T-1, \\ c_2 (x_2(t) - (1 - \frac{a_2}{2}) x_2(t-1) - \frac{a_2}{2} x_1(t-1)) + \delta (x_2(t) - s_2) = 0, \quad t = T \\ x_1(t) = s_2 - \frac{1}{2\delta} \hat{k}_{t-1}^2, \quad t = T, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{k}_t^2 = \frac{4}{a_1 \delta} \left[\left(c_2 + \delta c_2 \left(1 - \frac{a_2}{2} \right)^2 \right) x_2(t) - c_2 \left(1 - \frac{a_2}{2} \right) x_2(t-1) \right. \\ \left. - \delta c_2 \left(1 - \frac{a_2}{2} \right) x_2(t+1) - \frac{c_2 a_2}{2} x_1(t-1) + \frac{\delta c_2 a_2}{2} \left(1 - \frac{a_2}{2} \right) x_1(t) \right], \\ t = 1, \dots, T-1. \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

3.2 Случай наличия у игроков одинакового набора моментов валидации мнений агентов

На основе вышеприведенной модели предлагается рассмотреть модифицированную модель с 2 игроками. Предположим, что есть два игрока, и они напрямую влияют на агента 1 и агента 2 соответственно. Игроки имеют одинаковые коэффициенты дисконтирования, но они различаются по своим затратам на единицу интенсивности влияния (c_1 и c_2) и целевыми мнениями (s_1 и s_2). Уравнения динамики состояний для мнений агентов 1 и 2 имеют вид

$$x_1(t+1) = x_1(t) + a_1 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_1(t) \right) + u_1(t), \quad (3.12)$$

$$x_2(t+1) = x_2(t) + a_2 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_2(t) \right) + u_2(t) \quad (3.13)$$

с начальным условием

$$x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0. \quad (3.14)$$

По сравнению с предыдущим разделом, игроки 1 и 2 могут выбирать моменты валидации мнений агентов, и эти наборы одинаковы для обоих игроков. Игроки готовы минимизировать функционалы:

$$J_1(u_1, u_2) = \sum_{t=0}^{T-1} \delta^t (c_1 u_1^2(t)) + \sum_{j=1}^k \delta^{t_j} \left((x_1(t_j) - s_1)^2 + (x_2(t_j) - s_1)^2 \right) + \delta^T \left((x_1(T) - s_1)^2 + (x_2(T) - s_1)^2 \right), \quad (3.15)$$

$$J_2(u_1, u_2) = \sum_{t=0}^{T-1} \delta^t (c_2 u_2^2(t)) + \sum_{j=1}^k \delta^{t_j} \left((x_1(t_j) - s_2)^2 + (x_2(t_j) - s_2)^2 \right) + \delta^T \left((x_1(T) - s_2)^2 + (x_2(T) - s_2)^2 \right) \quad (3.16)$$

соответственно, где $c_i > 0$ — затраты игрока i на единицу интенсивности влияния, $s_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2$.

Мы можем определить игру двух игроков с множеством стратегий игроков U_1, U_2 , где $U_j = (u_j(t) \in \mathbb{R} : t = 0, \dots, T-1), j = 1, 2$, функциями затрат игроков J_1, J_2 , определяемыми формулами (3.15) и (3.16), уравнениями динамики (3.12) и (3.13) с начальными состояниями $x(0) = (x_1(0), x_2(0)) = (x_1^0, x_2^0)$. Игра относится к классу линейно-квадратичных игр. Приведем необходимые условия для равновесия по Нэшу для случая, когда набор моментов валидации задается множеством: $\{1 \leq t_1 < \dots < t_k \leq T-1\}$.

Theorem 3.2. Пусть $\{(u_1, u_2), u_i = (u_i(t) : t = 0, \dots, T-1), i = 1, 2\}$ является равновесием по Нэшу в игре, описанной выше в этом разделе, тогда равновесие по Нэшу определяется как:

$$u_i(t) = x_i(t+1) - \left(1 - \frac{a_i}{2}\right) x_i(t) - \frac{a_i}{2} x_j(t), \quad (3.17)$$

и $\{(x_1(t), x_2(t)) : t = 0, \dots, T\}$ будет траекторией состояния, соответствующей этому равновесию с начальным условием $x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0$, тогда

они удовлетворяют системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} -a_i c_i (x_i(t+1) - (1 - \frac{a_i}{2}) x_i(t) - \frac{a_i}{2} x_j(t)) = (1 - \frac{a_j}{2}) \hat{k}_t^i - \frac{\hat{k}_{t-1}^i}{\delta}, \\ t = 2, \dots, T-1, \\ -a_i c_i (x_i(t+1) - (1 - \frac{a_i}{2}) x_i(t) - \frac{a_i}{2} x_j(t)) - 2(x_j(t) - s_i) \\ = (1 - \frac{a_j}{2}) \hat{k}_t^i - \frac{\hat{k}_{t-1}^i}{\delta}, \quad t = t_j, j = 2, \dots, k, \\ c_i (x_i(t) - (1 - \frac{a_i}{2}) x_i(t-1) - \frac{a_i}{2} x_j(t-1)) \\ + \delta (x_i(t) - s_i) = 0, \quad t = T, \\ x_j(t) = s_i - \frac{1}{2\delta} \hat{k}_{t-1}^i, \quad t = T, \end{array} \right. \quad (3.18)$$

где $i, j = 1, 2, i \neq j$ и

$$\begin{aligned} \hat{k}_t^i &= \frac{4}{a_j \delta} \left[\left(c_i + \delta c_i \left(1 - \frac{a_i}{2} \right)^2 \right) x_i(t) - c_i \left(1 - \frac{a_i}{2} \right) x_i(t-1) \right. \\ &\quad \left. - \delta c_i \left(1 - \frac{a_i}{2} \right) x_i(t+1) - \frac{c_i a_i}{2} x_j(t-1) + \frac{\delta c_i a_i}{2} \left(1 - \frac{a_i}{2} \right) x_j(t) \right], \\ &t = 1, \dots, T-1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{k}_t^i &= \frac{4}{a_j \delta} \left[\left(c_i + \delta c_i \left(1 - \frac{a_i}{2} \right)^2 \right) x_i(t) - c_i \left(1 - \frac{a_i}{2} \right) x_i(t-1) \right. \\ &\quad \left. - \delta c_i \left(1 - \frac{a_i}{2} \right) x_i(t+1) - \frac{c_i a_i}{2} x_j(t-1) + \frac{\delta c_i a_i}{2} \left(1 - \frac{a_i}{2} \right) x_j(t) \right. \\ &\quad \left. + \delta (x_i(t) - s_i) \right], \quad t = t_j, j = 1, \dots, k, \end{aligned}$$

учитывая уравнения динамики (3.12) и (3.13) и начальное состояние $(x_1(0), x_2(0)) = (x_1^0, x_2^0)$.

Доказательство. Зафиксируем $u_2(t), t = 0, \dots, T-1$ и найдем наилучший ответ игрока 1. Используем подход уравнений Эйлера для нахождения равновесия по Нэшау в описанной игре. Сначала находим выражения $u_1(t)$ из уравнения состояния (3.12) как функцию x_1 и x_2 и $u_2(t)$ из уравнения состояния (3.13) как функцию x_1 и x_2 :

$$u_1(t) = x_1(t+1) - \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) x_1(t) - \frac{a_1}{2} x_2(t).$$

Цель первого игрока — минимизировать

$$\begin{aligned}
J_1(x_1, x_2, u_2) &= \sum_{t=0}^{T-1} \delta^t \left(c_1 \left(x_1(t+1) - \left(1 - \frac{a_1}{2}\right) x_1(t) - \frac{a_1}{2} x_2(t) \right)^2 \right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^k \delta^{t_j} \left((x_1(t_j) - s_1)^2 + (x_2(t_j) - s_1)^2 \right) \\
&\quad + \delta^T \left((x_1(T) - s_1)^2 + (x_2(T) - s_1)^2 \right),
\end{aligned}$$

при условии (3.13). Запишем функцию Лагранжа

$$\begin{aligned}
L_1(x_1, x_2, k^1) &= J_1(x_1, x_2, u_2) + \sum_{t=0}^{T-1} k_t^1 \left(x_2(t+1) - \left(1 - \frac{a_2}{2}\right) x_2(t) \right. \\
&\quad \left. - \frac{a_2}{2} x_1(t) - u_2(t) \right),
\end{aligned}$$

где $k^1 = \{k_t^1, t = 0, \dots, T-1\}$.

Находя производные и решая уравнения: $\frac{\partial L_1(x_1, x_2, k^1)}{\partial x_1(t)} = 0$ и $\frac{\partial L_1(x_1, x_2, k^1)}{\partial x_2(t)} = 0, t = 1, \dots, T$, получаем соответствующие системы:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\left(c_1 + \delta c_1 \left(1 - \frac{a_1}{2}\right)^2 \right) x_1(t) - c_1 \left(1 - \frac{a_1}{2}\right) x_1(t-1) \\
\quad - \delta c_1 \left(1 - \frac{a_1}{2}\right) x_1(t+1) - \frac{c_1 a_1}{2} x_2(t-1) + \frac{\delta c_1 a_1}{2} \left(1 - \frac{a_1}{2}\right) x_2(t) \\
\quad = \frac{a_2}{4} k_t^1 \delta^{-(t-1)}, \quad t = 1, \dots, T-1, t \neq t_j, \\
\left(c_1 + \delta c_1 \left(1 - \frac{a_1}{2}\right)^2 \right) x_1(t) - c_1 \left(1 - \frac{a_1}{2}\right) x_1(t-1) \\
\quad - \delta c_1 \left(1 - \frac{a_1}{2}\right) x_1(t+1) - \frac{c_1 a_1}{2} x_2(t-1) + \frac{\delta c_1 a_1}{2} \left(1 - \frac{a_1}{2}\right) x_2(t) \\
\quad + \delta (x_1(t) - s_1) = \frac{a_2}{4} k_t^1 \delta^{-(t-1)}, \quad t = t_j, j = 1, \dots, k, \\
c_1 (x_1(t) - \left(1 - \frac{a_1}{2}\right) x_1(t-1) - \frac{a_1}{2} x_2(t-1)) \\
\quad + \delta (x_1(t) - s_1) = 0, \quad t = T,
\end{array} \right. \quad (3.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
-a_1 c_1 (x_1(t+1) - \left(1 - \frac{a_1}{2}\right) x_1(t) - \frac{a_1}{2} x_2(t)) \\
\quad = \left(\left(1 - \frac{a_2}{2}\right) k_t^1 - k_{t-1}^1 \right) \delta^{-t}, \quad t = 1, \dots, T-1, \\
-a_1 c_1 (x_1(t+1) - \left(1 - \frac{a_1}{2}\right) x_1(t) - \frac{a_1}{2} x_2(t)) + 2(x_2(t) - s_1) \\
\quad = \left(\left(1 - \frac{a_2}{2}\right) k_t^1 - k_{t-1}^1 \right) \delta^{-t}, \quad t = t_j, j = 1, \dots, k, \\
x_2(t) - s_1 = -\frac{1}{2} k_{t-1}^1 \delta^{-t}, \quad t = T.
\end{array} \right. \quad (3.20)$$

Из первого уравнения системы (3.19) получаем

$$k_t^1 = \frac{4}{a_2} \delta^{t-1} \left[\left(c_1 + \delta c_1 \left(1 - \frac{a_1}{2} \right)^2 \right) x_1(t) - c_1 \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) x_1(t-1) \right. \\ \left. - \delta c_1 \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) x_1(t+1) - \frac{c_1 a_1}{2} x_2(t-1) + \frac{\delta c_1 a_1}{2} \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) x_2(t) \right],$$

$$t = 1, \dots, T-1, t \neq t_j,$$

$$k_t^1 = \frac{4}{a_2} \delta^{t-1} \left[\left(c_1 + \delta c_1 \left(1 - \frac{a_1}{2} \right)^2 \right) x_1(t) - c_1 \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) x_1(t-1) \right. \\ \left. - \delta c_1 \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) x_1(t+1) - \frac{c_1 a_1}{2} x_2(t-1) \right. \\ \left. + \frac{\delta c_1 a_1}{2} \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) x_2(t) + \delta (x_1(t) - s_1) \right], \quad t = t_j, j = 1, \dots, k.$$

Обозначая $\hat{k}_t^1 = k_t^1 \delta^{-t}$ и подставляя его в систему (3.20) и принимая во внимание второе уравнение в системе (3.19), получаем систему уравнений для определения наилучшего ответа игрока 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} -a_1 c_1 (x_1(t+1) - (1 - \frac{a_1}{2}) x_1(t) - \frac{a_1}{2} x_2(t)) = (1 - \frac{a_2}{2}) \hat{k}_t^1 - \frac{\hat{k}_{t-1}^1}{\delta}, \\ t = 1, \dots, T-1, t \neq t_j, \\ -a_1 c_1 (x_1(t+1) - (1 - \frac{a_1}{2}) x_1(t) - \frac{a_1}{2} x_2(t)) + 2(x_2(t) - s_1) \\ = (1 - \frac{a_2}{2}) \hat{k}_t^1 - \frac{\hat{k}_{t-1}^1}{\delta}, \quad t = t_j, j = 1, \dots, k, \\ x_2(t) - s_1 = -\frac{1}{2\delta} \hat{k}_{t-1}^1, \quad t = T, \\ c_1 (x_1(t) - (1 - \frac{a_1}{2}) x_1(t-1) - \frac{a_1}{2} x_2(t-1)) + \delta (x_1(t) - s_1) = 0, t = T, \end{array} \right.$$

где

$$\hat{k}_t^1 = \frac{4}{a_2 \delta} \left[\left(c_1 + \delta c_1 \left(1 - \frac{a_1}{2} \right)^2 \right) x_1(t) - c_1 \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) x_1(t-1) \right. \\ \left. - \delta c_1 \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) x_1(t+1) - \frac{c_1 a_1}{2} x_2(t-1) + \frac{\delta c_1 a_1}{2} \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) x_2(t) \right],$$

$$t = 1, \dots, T-1, t \neq t_j,$$

$$\hat{k}_t^1 = \frac{4}{a_2 \delta} \left[\left(c_1 + \delta c_1 \left(1 - \frac{a_1}{2} \right)^2 \right) x_1(t) - c_1 \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) x_1(t-1) \right. \\ \left. - \delta c_1 \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) x_1(t+1) - \frac{c_1 a_1}{2} x_2(t-1) \right. \\ \left. + \frac{\delta c_1 a_1}{2} \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) x_2(t) + \delta (x_1(t) - s_1) \right], \quad t = t_j, j = 1, \dots, k.$$

Теперь определим наилучший ответ игрока 2 аналогичным образом.

Зафиксируем $u_1(t), t = 0, \dots, T - 1$ и найдем наилучший ответ игрока 2. Используем подход уравнений Эйлера для нахождения равновесия по Нэшу в описанной игре. Сначала находим выражения $u_2(t)$ из уравнения (3.13) как функцию x_1 и x_2 и $u_1(t)$ из уравнения (3.12) как функцию x_1 и x_2 :

$$u_2(t) = x_2(t + 1) - \left(1 - \frac{a_2}{2}\right) x_2(t) - \frac{a_2}{2} x_1(t).$$

Цель второго игрока — минимизировать

$$\begin{aligned} J_2(u_1, x_1, x_2) &= \sum_{t=0}^{T-1} \delta^t \left(c_2 \left(x_2(t + 1) - \left(1 - \frac{a_2}{2}\right) x_2(t) - \frac{a_2}{2} x_1(t) \right)^2 \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^k \delta^{t_j} \left((x_1(t_j) - s_2)^2 + (x_2(t_j) - s_2)^2 \right) \\ &\quad + \delta^T \left((x_1(T) - s_2)^2 + (x_2(T) - s_2)^2 \right), \end{aligned}$$

при условии (3.12). Запишем функцию Лагранжа

$$\begin{aligned} L_2(x_1, x_2, k^2) &= J_2(u_1, x_1, x_2) + \sum_{t=0}^{T-1} k_t^2 \left(x_1(t + 1) - \left(1 - \frac{a_1}{2}\right) x_1(t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_1}{2} x_2(t) - u_1(t) \right), \end{aligned}$$

где $k^2 = \{k_t^2, t = 0, \dots, T - 1\}$.

Находя производные и решая уравнения: $\frac{\partial L_2(x_1, x_2, k^2)}{\partial x_1(t)} = 0$ и $\frac{\partial L_2(x_1, x_2, k^2)}{\partial x_2(t)} = 0, t = 1, \dots, T$, получаем соответствующие системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} -a_2 c_2 \left(x_2(t + 1) - \left(1 - \frac{a_2}{2}\right) x_2(t) - \frac{a_2}{2} x_1(t) \right) \\ \quad = \left(\left(1 - \frac{a_1}{2}\right) k_t^2 - k_{t-1}^2 \right) \delta^{-t}, \quad t = 1, \dots, T - 1, t \neq t_j, \\ -a_2 c_2 \left(x_2(t + 1) - \left(1 - \frac{a_2}{2}\right) x_2(t) - \frac{a_2}{2} x_1(t) \right) + 2(x_1(t) - s_2) \\ \quad = \left(\left(1 - \frac{a_1}{2}\right) k_t^2 - k_{t-1}^2 \right) \delta^{-t}, \quad t = t_j, j = 1, \dots, k, \\ x_2(t) - s_2 = -\frac{1}{2} k_{t-1}^2 \delta^{-t}, \quad t = T, \end{array} \right. \quad (3.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\left(c_2 + \delta c_2 \left(1 - \frac{a_2}{2} \right)^2 \right) x_2(t) - c_2 \left(1 - \frac{a_2}{2} \right) x_2(t-1) \\
- \delta c_2 \left(1 - \frac{a_2}{2} \right) x_2(t+1) - \frac{c_2 a_2}{2} x_1(t-1) + \frac{\delta c_2 a_2}{2} \left(1 - \frac{a_2}{2} \right) x_1(t) \\
= \frac{a_1}{4} k_t^2 \delta^{-(t-1)}, \quad t = 1, \dots, T-1, t \neq t_j, \\
\left(c_2 + \delta c_2 \left(1 - \frac{a_2}{2} \right)^2 \right) x_2(t) - c_2 \left(1 - \frac{a_2}{2} \right) x_2(t-1) \\
- \delta c_2 \left(1 - \frac{a_2}{2} \right) x_2(t+1) - \frac{c_2 a_2}{2} x_1(t-1) + \frac{\delta c_2 a_2}{2} \left(1 - \frac{a_2}{2} \right) x_1(t) \\
+ \delta (x_2(t) - s_2) = \frac{a_1}{4} k_t^2 \delta^{-(t-1)}, \quad t = t_j, j = 1, \dots, k, \\
c_2 (x_2(t) - \left(1 - \frac{a_2}{2} \right) x_2(t-1) - \frac{a_2}{2} x_2(t-1)) \\
+ \delta (x_1(t) - s_2) = 0, \quad t = T.
\end{array} \right. \quad (3.22)$$

Из первого уравнения системы (3.22) получаем

$$k_t^2 = \frac{4}{a_1} \delta^{t-1} \left[\left(c_2 + \delta c_2 \left(1 - \frac{a_2}{2} \right)^2 \right) x_2(t) - c_2 \left(1 - \frac{a_2}{2} \right) x_2(t-1) \right. \\
\left. - \delta c_2 \left(1 - \frac{a_2}{2} \right) x_2(t+1) - \frac{c_2 a_2}{2} x_1(t-1) + \frac{\delta c_2 a_2}{2} \left(1 - \frac{a_2}{2} \right) x_1(t) \right], \\
t = 1, \dots, T-1, t \neq t_j,$$

$$k_t^2 = \frac{4}{a_1} \delta^{t-1} \left[\left(c_2 + \delta c_2 \left(1 - \frac{a_2}{2} \right)^2 \right) x_2(t) - c_2 \left(1 - \frac{a_2}{2} \right) x_2(t-1) \right. \\
\left. - \delta c_2 \left(1 - \frac{a_2}{2} \right) x_2(t+1) - \frac{c_2 a_2}{2} x_1(t-1) + \frac{\delta c_2 a_2}{2} \left(1 - \frac{a_2}{2} \right) x_1(t) \right. \\
\left. + \delta (x_2(t) - s_2) \right], \quad t = t_j, j = 1, \dots, k.$$

Обозначая $\hat{k}_t^2 = k_t^2 \delta^{-t}$ и подставляя его в систему (3.21) и принимая во внимание второе уравнение в системе (3.22), получаем систему уравнений для определения наилучшего ответа игрока 2:

$$\left\{ \begin{array}{l}
-a_2 c_2 (x_2(t+1) - \left(1 - \frac{a_2}{2} \right) x_2(t) - \frac{a_2}{2} x_1(t)) = \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) \hat{k}_t^2 - \frac{\hat{k}_{t-1}^2}{\delta}, \\
t = 2, \dots, T-1, t \neq t_j, \\
-a_2 c_2 (x_2(t+1) - \left(1 - \frac{a_2}{2} \right) x_2(t) - \frac{a_2}{2} x_1(t)) + 2(x_1(t) - s_2) \\
= \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) \hat{k}_t^2 - \frac{\hat{k}_{t-1}^2}{\delta}, \quad t = t_j, j = 2, \dots, k, \\
x_2(t) - s_2 = -\frac{1}{2\delta} \hat{k}_{t-1}^2, \quad t = T,
\end{array} \right.$$

где

$$\hat{k}_t^2 = \frac{4}{a_1 \delta} \left[\left(c_2 + \delta c_2 \left(1 - \frac{a_2}{2} \right)^2 \right) x_2(t) - c_2 \left(1 - \frac{a_2}{2} \right) x_2(t-1) \right. \\ \left. - \delta c_2 \left(1 - \frac{a_2}{2} \right) x_2(t+1) - \frac{c_2 a_2}{2} x_1(t-1) + \frac{\delta c_2 a_2}{2} \left(1 - \frac{a_2}{2} \right) x_1(t) \right], \\ t = 1, \dots, T-1, t \neq t_j,$$

$$\hat{k}_t^2 = \frac{4}{a_1 \delta} \left[\left(c_2 + \delta c_2 \left(1 - \frac{a_2}{2} \right)^2 \right) x_2(t) - c_2 \left(1 - \frac{a_2}{2} \right) x_2(t-1) \right. \\ \left. - \delta c_2 \left(1 - \frac{a_2}{2} \right) x_2(t+1) - \frac{c_2 a_2}{2} x_1(t-1) + \frac{\delta c_2 a_2}{2} \left(1 - \frac{a_2}{2} \right) x_1(t) \right. \\ \left. + \delta (x_2(t) - s_2) \right], \quad t = t_j, j = 1, \dots, k.$$

Теорема доказана. □

3.3 Случай выбора двумя игроками разных наборов моментов времени для управления мнениями агентов

В этом разделе предлагаем следующую модель: в небольшой социальной сети мнения агентов представлены как $x_i(t)$ в момент времени t , где i - номер агента. Предположим, что есть два игрока, которые напрямую влияют на мнения агентов 1 и 2 соответственно, а уровень влияния обозначен как $u_j(t)$, j - номер игрока. Множества V_1, V_2 , где $V_j = \{t_1^j, \dots, t_k^j\}$, $j = 1, 2$, являются множествами периодов, в которых игроки контролируют мнения агентов, и число элементов k в множестве V_j задано. Предполагаем, что k одинаково для обоих игроков, но множества V_1 и V_2 могут быть разными. Определим игру двух лиц конкуренции за мнения агентов с множеством управлений игроков U_1, U_2 , где $U_j = (u_j(t) \in \mathbb{R} \mid t \in V_j)$, $j = 1, 2$. Игроки имеют одинаковый коэффициент дисконтирования, но их уровни влияния на единицу стоимости и целевые мнения различны. Обобщим обозначения:

- $x_i(t), i = 1, 2$: мнение агента i в момент времени $t \in \{0, 1, \dots, T\}$;
- $u_j(t), j = 1, 2$: игрок 1 влияет на мнение агента 1 с помощью $u_1(t), t \in V_1$, игрок 2 влияет на мнение агента 2 с помощью $u_2(t)$ в момент времени $t \in V_2$;
- $V_j = \{t_1^j, \dots, t_k^j \mid 0 \leq t_1^j < t_2^j < \dots < t_k^j \leq T-1\}, j = 1, 2$: набор периодов, когда игрок j контролирует мнение соответствующего агента;
- $U_j = (u_j(t) \in R \mid t \in V_j), j = 1, 2$: множества управляющих переменных игроков.

Небольшая социальная сеть, которую мы исследуем, представлена на рис. 3.1.

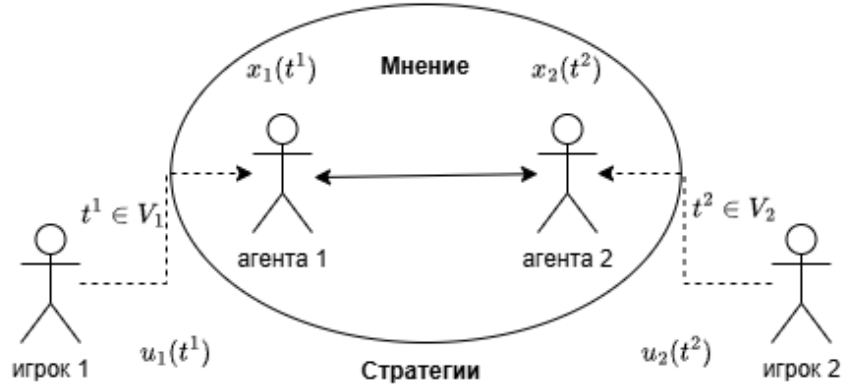


Рис. 3.1: Небольшая социальная сеть.

Динамика мнений агентов определяется следующими уравнениями:

$$x_1(t+1) = x_1(t) + a_1 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_1(t) \right) + u_1(t), \quad t \in V_1, \quad (3.23)$$

$$x_1(t+1) = x_1(t) + a_1 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_1(t) \right), \quad t \notin V_1, \quad (3.24)$$

$$x_2(t+1) = x_2(t) + a_2 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_2(t) \right) + u_2(t), \quad t \in V_2, \quad (3.25)$$

$$x_2(t+1) = x_2(t) + a_2 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_2(t) \right), \quad t \notin V_2, \quad (3.26)$$

с начальным условием

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0.$$

В уравнениях (3.23)–(3.26), $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ обозначают убеждения агента 1 и 2 о среднем общественном мнении, соответственно.

Целевые мнения игроков — s_1 и $s_2 \in \mathbb{R}$. Игроки 1 и 2 стремятся минимизировать функционалы:

$$J_1(u_1, u_2) = \sum_{t_i \in V_1} \delta^{t_i} (c_1 u_1^2(t_i)) + \sum_{t=0}^T \delta^t \left((x_1(t) - s_1)^2 + (x_2(t) - s_1)^2 \right),$$

$$J_2(u_1, u_2) = \sum_{t_i \in V_2} \delta^{t_i} (c_2 u_2^2(t_i)) + \sum_{t=0}^T \delta^t \left((x_1(t) - s_2)^2 + (x_2(t) - s_2)^2 \right),$$

где $\delta \in (0, 1]$ — коэффициент дисконтирования, а $c_j > 0$ — стоимость влияния на единицу влияния для игрока j .

Theorem 3.3. Пусть $\{(u_1^*, u_2^*), u_j = (u_j(t) \mid t \in V_j), j = 1, 2\}$ — равновесие по Нэшу в описанной выше игре в этом разделе, и $\{(x_1^*(t), x_2^*(t)) : t = 0, \dots, T\}$ — траектория состояния, соответствующая этому равновесию с начальным условием $x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0$, тогда они удовлетворяют системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(t) = \frac{\delta}{2c_1} \lambda_1^1(t+1), \quad t \in V_1, \\ \lambda_1^1(t+1) = \frac{2}{\delta(2-a_1)} \left[2(x_1(t) - s_1) - \lambda_1^1(t) - \lambda_1^2(t+1) \frac{a_2\delta}{2} \right], \quad t = 0, \dots, T-1, \\ \lambda_1^2(t+1) = \frac{2}{\delta(2-a_2)} \left[2(x_2(t) - s_1) - \lambda_1^1(t+1) \frac{a_1\delta}{2} - \lambda_1^2(t) \right], \quad t = 0, \dots, T-1, \\ \lambda_1^1(T) = 2(x_1(T) - s_1), \\ \lambda_1^2(T) = 2(x_2(T) - s_1), \\ u_2(t) = \frac{\delta}{2c_2} \lambda_2^2(t+1), \quad t \in V_2, \\ \lambda_2^1(t+1) = \frac{2}{\delta(2-a_1)} \left[2(x_1(t) - s_2) - \lambda_2^1(t) - \lambda_2^2(t+1) \frac{a_2\delta}{2} \right], \quad t = 0, \dots, T-1, \\ \lambda_2^2(t+1) = \frac{2}{\delta(2-a_2)} \left[2(x_2(t) - s_2) - \lambda_2^1(t+1) \frac{a_1\delta}{2} - \lambda_2^2(t) \right], \quad t = 0, \dots, T-1, \\ \lambda_2^1(T) = 2(x_1(T) - s_2), \\ \lambda_2^2(T) = 2(x_2(T) - s_2), \end{array} \right.$$

учитывая уравнения состояния (3.23)–(3.26) и начальное состояние $(x_1(0), x_2(0)) = (x_1^0, x_2^0)$.

Доказательство. Находим пару стратегий (u_1^*, u_2^*) , которая является равновесием по Нэшу в описанной выше игре. Находим равновесие в класс программных стратегий, используя принцип максимума Понтрягина. Гамильтониан игрока 1 имеет вид:

$$\begin{aligned} H_1^1(x_1(t), x_2(t), \lambda_1^1(t+1), \lambda_1^2(t+1), u_1(t), u_2(t), t) \\ = c_1 u_1^2(t) + (x_1(t) - s_1)^2 + (x_2(t) - s_1)^2 \\ + \delta \lambda_1^1(t+1) \left(x_1(t+1) - x_1(t) - a_1 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_1(t) \right) - u_1(t) \right) \\ + \delta \lambda_1^2(t+1) \left(x_2(t+1) - x_2(t) - a_2 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_2(t) \right) - u_2(t) \right), \end{aligned}$$

для любого $t \in V_1$, и он принимает форму

$$\begin{aligned} H_1^2(x_1(t), x_2(t), \lambda_1^1(t+1), \lambda_1^2(t+1), t) \\ = (x_1(t) - s_1)^2 + (x_2(t) - s_1)^2 \\ + \delta \lambda_1^1(t+1) \left(x_1(t+1) - x_1(t) - a_1 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_1(t) \right) \right) \\ + \delta \lambda_1^2(t+1) \left(x_2(t+1) - x_2(t) - a_2 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_2(t) \right) \right), \end{aligned}$$

для любого $t \notin V_1$.

Находя производные, $\frac{\partial H_1^1(t)}{\partial u_1(t)} = 0$, $t \in V_1$, $\lambda_1^1(t) = \frac{\partial H_1^1(t)}{\partial x_1(t)} = \frac{\partial H_1^2(t)}{\partial x_1(t)}$ и $\lambda_1^2(t) = \frac{\partial H_1^1(t)}{\partial x_2(t)} = \frac{\partial H_1^2(t)}{\partial x_2(t)}$, $t = 1, \dots, T-1$, мы получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1^1(t)}{\partial u_1(t)} &= 2c_1 u_1(t) - \delta \lambda_1^1(t+1) = 0, \quad t \in V_1, \\ \lambda_1^1(t) &= \frac{\partial H_1^1(t)}{\partial x_1(t)} = \frac{\partial H_1^2(t)}{\partial x_1(t)} \\ &= 2(x_1(t) - s_1) - \delta \lambda_1^1(t+1) \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) - \delta \lambda_1^2(t+1) \frac{a_2}{2}, \\ &t = 1, \dots, T-1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1^2(t) &= \frac{\partial H_1^1(t)}{\partial x_2(t)} = \frac{\partial H_1^2(t)}{\partial x_2(t)} \\
&= 2(x_2(t) - s_1) - \delta\lambda_1^1(t+1)\frac{a_1}{2} - \delta\lambda_1^2(t+1)\left(1 - \frac{a_2}{2}\right), \\
&\quad t = 1, \dots, T-1, \\
\lambda_1^1(T) &= \frac{\partial \left((x_1(T) - s_1)^2 + (x_2(T) - s_1)^2 \right)}{\partial x_1(T)} = 2(x_1(T) - s_1), \\
\lambda_1^2(T) &= \frac{\partial \left((x_1(T) - s_1)^2 + (x_2(T) - s_1)^2 \right)}{\partial x_2(T)} = 2(x_2(T) - s_1).
\end{aligned}$$

Ее можно переписать следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l}
u_1(t) = \frac{\delta}{2c_1}\lambda_1^1(t+1), \quad t \in V_1, \\
\lambda_1^1(t+1) = \frac{2}{\delta(2-a_1)} \left[2(x_1(t) - s_1) - \lambda_1^1(t) - \lambda_1^2(t+1)\frac{a_2\delta}{2} \right], \\
\quad t = 0, \dots, T-1, \\
\lambda_1^2(t+1) = \frac{2}{\delta(2-a_2)} \left[2(x_2(t) - s_1) - \lambda_1^1(t+1)\frac{a_1\delta}{2} - \lambda_1^2(t) \right], \\
\quad t = 0, \dots, T-1, \\
\lambda_1^1(T) = 2(x_1(T) - s_1), \\
\lambda_1^2(T) = 2(x_2(T) - s_1).
\end{array} \right. \quad (3.27)$$

Из последних четырех уравнений системы (3.27) получаем выражения для $\lambda_1^1(t)$ и $\lambda_1^2(t)$ как функции от x_1 и x_2 , $t = 0, \dots, T$. Подставляем эти выражения для $\lambda_1^1(t)$ и $\lambda_1^2(t)$ в первое уравнение системы (3.27), если t принадлежит V_1 . Получаем выражение для u_1 как функции от x_1 и x_2 . Подставив новое выражение для u_1 в уравнение (3.23), мы получаем новое уравнение состояния $x_1(t+1)$ как функцию от x_1 и x_2 .

Затем мы записываем Гамильтониан игрока 2:

$$\begin{aligned}
& H_2^1(x_1(t), x_2(t), \lambda_2^1(t+1), \lambda_2^2(t+1), u_1(t), u_2(t), t) \\
&= c_2 u_2^2(t) + (x_1(t) - s_2)^2 + (x_2(t) - s_2)^2 \\
&+ \delta \lambda_2^1(t+1) \left(x_1(t+1) - x_1(t) - a_1 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_1(t) \right) - u_1(t) \right) \\
&+ \delta \lambda_2^2(t+1) \left(x_2(t+1) - x_2(t) - a_2 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_2(t) \right) - u_2(t) \right),
\end{aligned}$$

для любого $t \in V_2$, и

$$\begin{aligned}
& H_2^2(x_1(t), x_2(t), \lambda_2^1(t+1), \lambda_2^2(t+1), t) \\
&= (x_1(t) - s_2)^2 + (x_2(t) - s_2)^2 \\
&+ \delta \lambda_2^1(t+1) \left(x_1(t+1) - x_1(t) - a_1 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_1(t) \right) \right) \\
&+ \delta \lambda_2^2(t+1) \left(x_2(t+1) - x_2(t) - a_2 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_2(t) \right) \right),
\end{aligned}$$

для любого $t \notin V_2$.

Находя производные, $\frac{\partial H_2^1(t)}{\partial u_2(t)} = 0$, $t \in V_2$, $\lambda_2^1(t) = \frac{\partial H_2^1(t)}{\partial x_1(t)} = \frac{\partial H_2^2(t)}{\partial x_1(t)}$ и $\lambda_2^2(t) = \frac{\partial H_2^1(t)}{\partial x_2(t)} = \frac{\partial H_2^2(t)}{\partial x_2(t)}$, $t = 1, \dots, T-1$, мы получаем систему:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_2^1(t)}{\partial u_2(t)} &= 2c_2 u_2(t) - \delta \lambda_2^2(t+1) = 0, \quad t \in V_2, \\
\lambda_2^1(t) &= \frac{\partial H_2^1(t)}{\partial x_1(t)} = \frac{\partial H_2^2(t)}{\partial x_1(t)} \\
&= 2(x_1(t) - s_2) - \delta \lambda_2^1(t+1) \left(1 - \frac{a_1}{2} \right) - \delta \lambda_2^2(t+1) \frac{a_2}{2}, \\
& \quad t = 1, \dots, T-1, \\
\lambda_2^2(t) &= \frac{\partial H_2^1(t)}{\partial x_2(t)} = \frac{\partial H_2^2(t)}{\partial x_2(t)} \\
&= 2(x_2(t) - s_2) - \delta \lambda_2^1(t+1) \frac{a_1}{2} - \delta \lambda_2^2(t+1) \left(1 - \frac{a_2}{2} \right), \\
& \quad t = 1, \dots, T-1,
\end{aligned}$$

$$\lambda_2^1(T) = \frac{\partial \left((x_1(T) - s_2)^2 + (x_2(T) - s_2)^2 \right)}{\partial x_1(T)} = 2(x_1(T) - s_2),$$

$$\lambda_2^2(T) = \frac{\partial \left((x_1(T) - s_2)^2 + (x_2(T) - s_2)^2 \right)}{\partial x_2(T)} = 2(x_2(T) - s_2).$$

Наконец, мы переписываем систему следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2(t) = \frac{\delta}{2c_2} \lambda_2^2(t+1), \quad t \in V_2, \\ \lambda_2^1(t+1) = \frac{2}{\delta(2-a_1)} \left[2(x_1(t) - s_2) - \lambda_2^1(t) - \lambda_2^2(t+1) \frac{a_2\delta}{2} \right], \\ \quad t = 0, \dots, T-1, \\ \lambda_2^2(t+1) = \frac{2}{\delta(2-a_2)} \left[2(x_2(t) - s_2) - \lambda_2^1(t+1) \frac{a_1\delta}{2} - \lambda_2^2(t) \right], \\ \quad t = 0, \dots, T-1, \\ \lambda_2^1(T) = 2(x_1(T) - s_2), \\ \lambda_2^2(T) = 2(x_2(T) - s_2). \end{array} \right. \quad (3.28)$$

Мы используем ту же идею, что и выше, чтобы найти новое уравнение состояния $x_2(t+1)$ как функцию от x_1 и x_2 . Учитывая уравнения состояния (3.24) и (3.26), мы можем найти равновесные траектории состояний агентов 1 и 2 в соответствии с начальными условиями $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$. Также находятся равновесные траектории стратегий игроков 1 и 2. Объединив две системы (3.27) и (3.28), мы завершаем доказательство. \square

Замечание 3.1. *В теореме 3.3 равновесие по Нэшу находится при предположении, что заданы наборы моментов времени V_1 и V_2 , когда игроки 1 и 2 выбирают свои управления. Эти наборы могут быть разными для игроков. Если мы рассмотрим задачу выбора этих наборов с точки зрения оптимизации, то нам нужно найти все возможные комбинации k моментов времени для заданного числа k , и найти равновесие по Нэшу для любой такой пары наборов V_1 и V_2 . Более того, некоторая пара наборов может быть предпочтительной (с точки зрения минимизации затрат) для одного игрока, а другая пара может быть предпочтительной для другого игрока.*

Поэтому мы могли бы найти оптимальные по Парето наборы V_1 и V_2 такие, что никакая другая пара наборов не может дать по крайней мере те же затраты для обоих игроков и строго меньшие затраты хотя бы для одного игрока. Продемонстрируем, как находить такие Парето-оптимальные множества V_1 и V_2 для числовых примеров, приведенных в разделе 3.4.2.

3.4 Численное моделирование

3.4.1 Примеры для раздела 3.1

Пример 3.1. Пусть $a_1 = 0.3, a_2 = 0.6, \delta = 1, c_1 = 8, c_2 = 7$ и начальные мнения будут $x_1(0) = 0.7, x_2(0) = 0.6$. Для $T = 10$ и целевых мнений $s_1 = 0.3, s_2 = 0.1$, равновесное состояние и траектории управления представлены в таблице 3.1. Равновесные издержки для игроков 1 и 2 составляют 0.125 и 1.305 соответственно. Равновесное состояние и траектории управлений

Таблица 3.1: Равновесное состояние и траектории управления

t	0	1	2	3	4	5
$x_1(t)$	0.7	0.7129	0.6337	0.5663	0.5087	0.4591
$x_2(t)$	0.6	0.6372	0.4532	0.3245	0.2343	0.1712
$u_1(t)$	0.0279	-0.0678	-0.0403	-0.0213	-0.0084	0.0002
$u_2(t)$	0.0072	-0.2067	-0.1829	-0.1627	-0.1454	-0.1305
t	6	7	8	9	10	
$x_1(t)$	0.4161	0.3777	0.3419	0.3057	0.2643	
$x_2(t)$	0.1271	0.0962	0.0745	0.0594	0.0489	
$u_1(t)$	0.0050	0.0064	0.0040	-0.0045		
$u_2(t)$	-0.1176	-0.1062	-0.0953	-0.0844		

приведены на рис. 3.2 и 3.3.

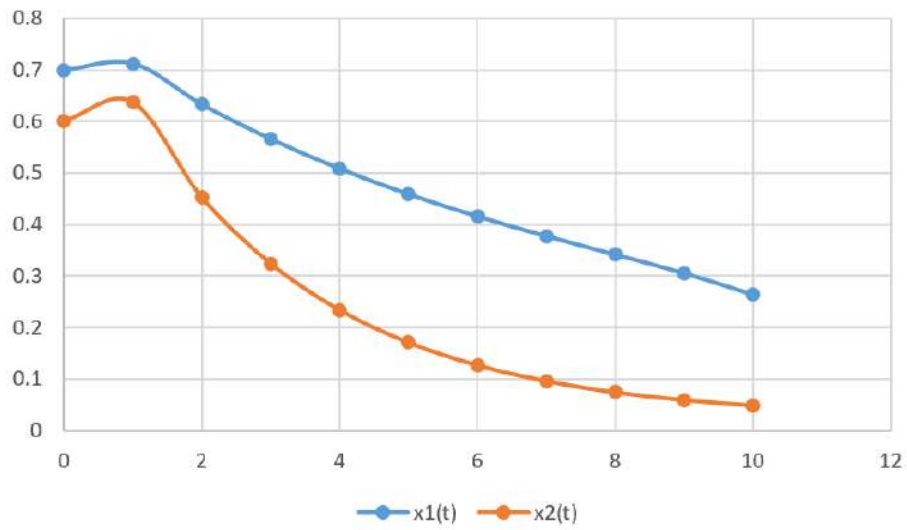


Рис. 3.2: Траектории состояний (синий — $x_1(t)$, красный — $x_2(t)$).

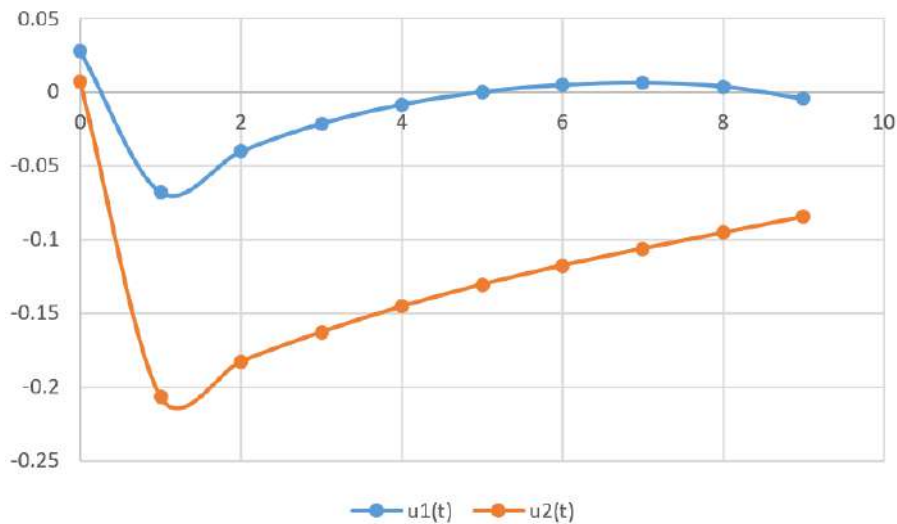
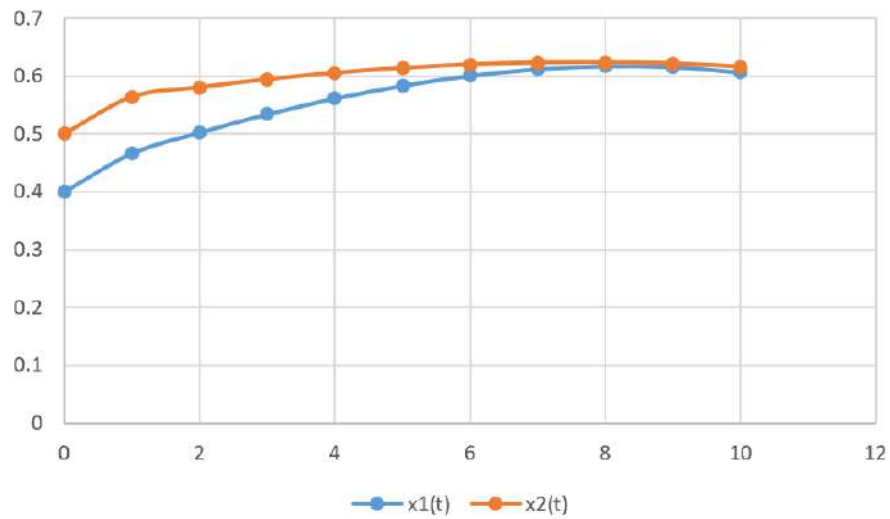


Рис. 3.3: Траектории управлений (синяя — $u_1(t)$, красная — $u_2(t)$).

Пример 3.2. Пусть $a_1 = 0.1, a_2 = 0.2, \delta = 1, c_1 = 9, c_2 = 5$ и начальные мнения будут $x_1(0) = 0.4, x_2(0) = 0.5$. Для $T = 10$ и целевых мнений $s_1 = 0.8, s_2 = 0.9$, равновесное состояние и траектории управления представлены в таблице 3.2. Равновесные издержки игроков 1 и 2 составляют 0.134 и 0.203 соответственно. Мы также вводим равновесное состояние и траектории управления на рис. 3.4 и 3.5.

Таблица 3.2: Равновесные состояния и траектории управления

t	0	1	2	3	4	5
$x_1(t)$	0.4	0.4665	0.5025	0.5343	0.5615	0.5838
$x_2(t)$	0.5	0.5638	0.5803	0.5941	0.6053	0.6138
$u_1(t)$	0.0615	0.0311	0.0279	0.0242	0.0201	0.0157
$u_2(t)$	0.0738	0.0262	0.0216	0.0172	0.0129	0.0090
t	6	7	8	9	10	
$x_1(t)$	0.601	0.6125	0.6178	0.6162	0.6069	
$x_2(t)$	0.6198	0.6232	0.6238	0.6215	0.6161	
$u_1(t)$	0.0106	0.0048	-0.0019	-0.0096		
$u_2(t)$	0.0053	0.0017	-0.0017	-0.0049		

Рис. 3.4: Траектории состояний (синий — $x_1(t)$, красный — $x_2(t)$).

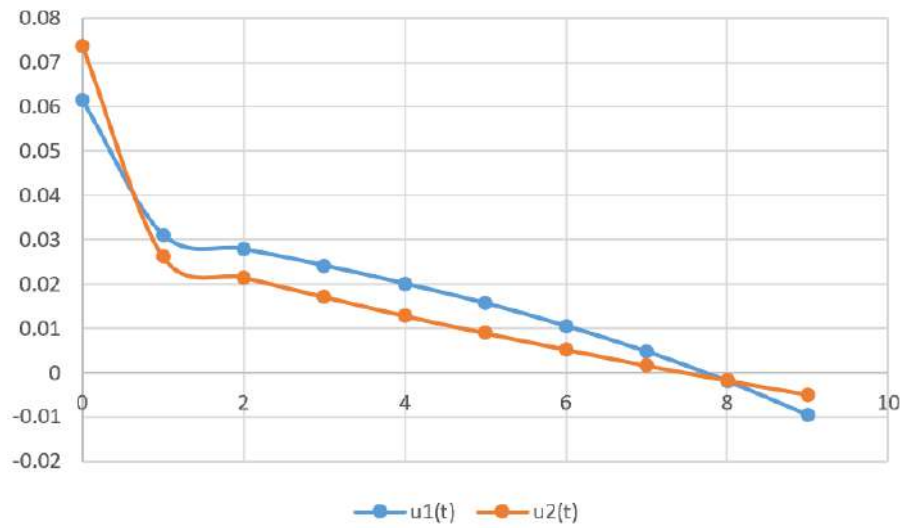


Рис. 3.5: Траектории управлений (синий — $u_1(t)$, красный — $u_2(t)$).

Пример 3.3. Пусть $a_1 = 0.2, a_2 = 0.1, \delta = 1, c_1 = 8, c_2 = 4$ и начальные мнения будут $x_1(0) = 0.8, x_2(0) = 0.2$. Для временного горизонта $T = 10$ и целевых мнений $s_1 = 0.3, s_2 = 0.8$, равновесное состояние и траектории управления представлены в Таблице 3.3. Равновесные издержки для игроков 1 и 2 составляют 0.350 и 0.641 соответственно. Равновесное состояние и

Таблица 3.3: Равновесное состояние и траектории управления

t	0	1	2	3	4	5
$x_1(t)$	0.8	0.7489	0.6824	0.6218	0.5666	0.516
$x_2(t)$	0.2	0.3459	0.4392	0.5218	0.593	0.6522
$u_1(t)$	0.0089	-0.0262	-0.03628	-0.0452	-0.05324	-0.06022
$u_2(t)$	0.1159	0.07315	0.07044	0.0662	0.06052	0.05311
t	6	7	8	9	10	
$x_1(t)$	0.4694	0.4262	0.3858	0.3478	0.3116	
$x_2(t)$	0.6985	0.7307	0.7475	0.7473	0.7279	
$u_1(t)$	-0.06611	-0.07085	-0.07417	-0.07615		
$u_2(t)$	0.043655	0.032025	0.017885	0.000575		

траектории управлений представлены на рис. 3.6 и 3.7.

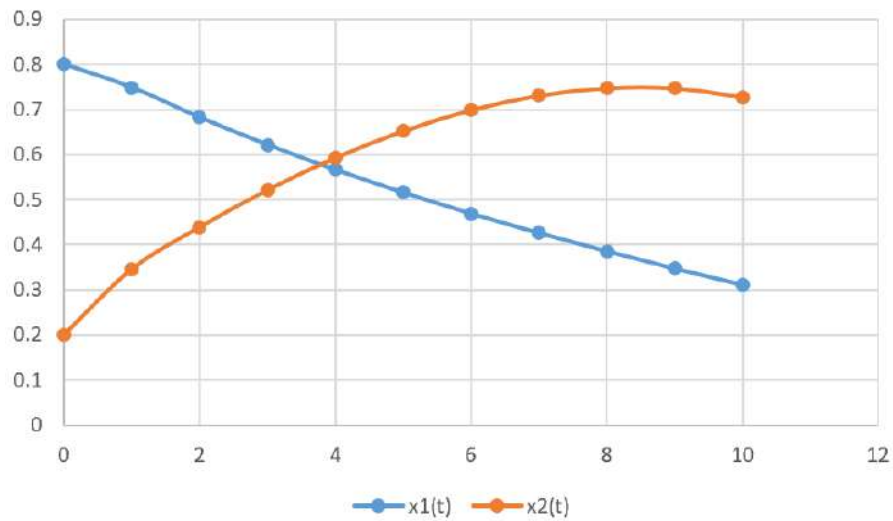


Рис. 3.6: Траектории состояний (синий — $x_1(t)$, красный — $x_2(t)$).

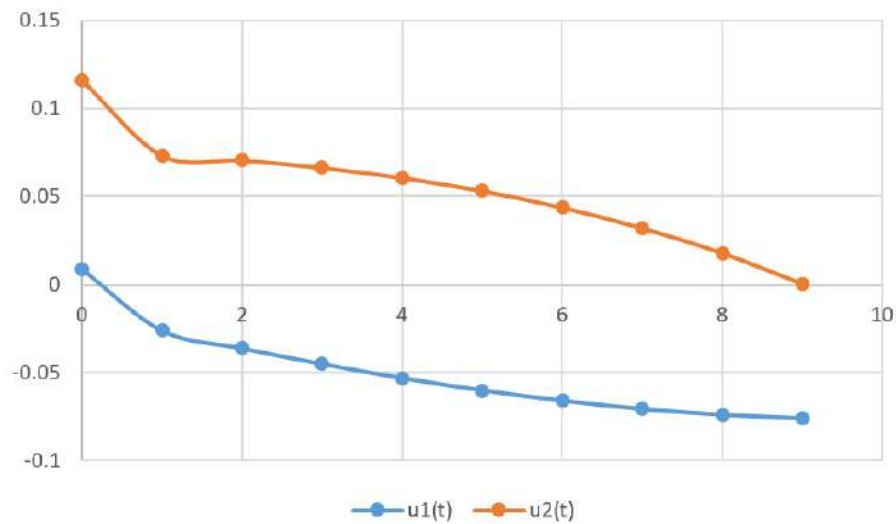


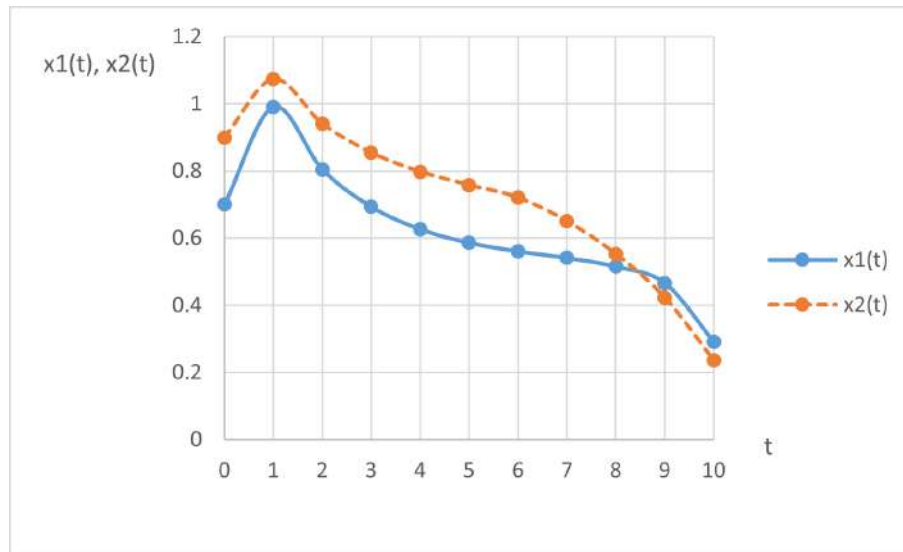
Рис. 3.7: Траектории управлений игроков в равновесии (синий — $u_1(t)$, красный — $u_2(t)$).

3.4.2 Численные примеры для раздела 3.2

Пример 3.4. Рассмотрим следующий пример. Пусть параметры игры следующие: $a_1 = 0.8, a_2 = 0.7, \delta = 1, c_1 = 0.7, c_2 = 0.9$, а начальные мнения $x_1(0) = 0.7, x_2(0) = 0.9$. Пусть $T = 10$, а целевые мнения равны $s_1 = 0.3, s_2 = 0.2$. Равновесные издержки игроков 1 и 2 равны 1.3684 и 1.1657 соответственно. Траектории равновесного состояния и управлений представлены на рис. 3.8 и 3.9.

Таблица 3.4: Траектории равновесного по Нэшу состояния и управлений игроков

t	0	1	2	3	4	5
$x_1(t)$	0.7000	0.9906	0.805	0.6936	0.6266	0.5862
$x_2(t)$	0.9000	1.0733	0.9409	0.8547	0.7979	0.7581
$u_1(t)$	-0.7800	-0.4293	-0.3764	-0.3419	-0.3192	-0.3033
$u_2(t)$	0.2533	0.2969	0.2901	0.2851	0.2794	0.2658
t	6	7	8	9	10	
$x_1(t)$	0.5608	0.5409	0.5151	0.4662	0.2917	
$x_2(t)$	0.7207	0.6501	0.5520	0.4222	0.2353	
$u_1(t)$	-0.2883	-0.2600	-0.2208	-0.1689		
$u_2(t)$	0.2177	0.1619	0.0910	-0.0181		

Рис. 3.8: Траектории равновесного состояния, моменты валидации: 7, 8, 9 (сплошная — $x_1(t)$, пунктирная — $x_2(t)$).

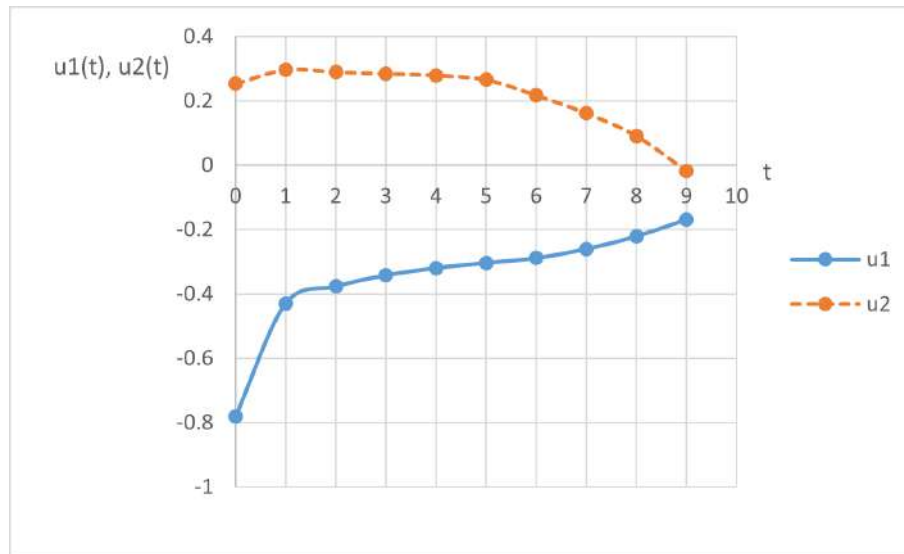


Рис. 3.9: Траектории управлений (сплошная — $u_1(t)$, пунктирная — $u_2(t)$).

3.4.3 Численные примеры для раздела 3.3

Пример 3.5. Пусть $T = 9$, а $k = 2$ — количество моментов времени, в которых игроки влияют на агентов. Параметры следующие:

$$a_1 = 0.7, \quad a_2 = 0.5, \quad \delta = 1, \quad c_1 = 0.4, \quad c_2 = 0.6, \quad s_1 = 0.6, \quad s_2 = 0.6,$$

$$x_1(0) = 0.9, \quad x_2(0) = 0.1.$$

Начальное состояние мнений двух агентов $x(0) = (0.9, 0.1)$. Убеждения агентов 1 и 2 относительно среднего общественного мнения равны $a_1 = 0.7$, $a_2 = 0.5$ соответственно. Фактор дисконтирования: $\delta = 1$. Удельные издержки влияния равны $c_1 = 0.4$, $c_2 = 0.6$ для игрока 1 и игрока 2 соответственно. Их целевые мнения есть $s_1 = 0.6$, $s_2 = 0.6$. Находим равновесие по Нэшу для любых возможных наборов V_1 и V_2 , состоящих из двух моментов. Получаем, что для наборов $V_1 = \{2, 5\}$ и $V_2 = \{0, 2\}$ оба игрока имеют наименьшие издержки в равновесии по Нэшу по сравнению со всеми другими равновесиями по Нэшу. Итак, эта пара множеств V_1 и V_2 является оптимальной по Парето. Охарактеризуем это равновесие, описывая равновесные стратегии и траектории состояний (см. таблицу 3.5). Равновесные

издержки игроков 1 и 2 составляют 0.3845 и 0.3963 соответственно.

Таблица 3.5: Управления в равновесии по Нэшу и траектории состояний, $V_1 = \{2, 5\}$ и $V_2 = \{0, 2\}$

t	$t_2^1 = 0$	1	$t_1^1 = t_2^2 = 2$	3	4
$x_1(t)$	0.9000	0.6200	0.5577	0.7001	0.6074
$x_2(t)$	0.1000	0.4420	0.3943	0.4352	0.5014
$u_1(t)$			0.1117		
$u_2(t)$	0.1515		0.0745		
t	$t_1^2 = 5$	6	7	8	9
$x_1(t)$	0.5703	0.5410	0.5401	0.5398	0.5396
$x_2(t)$	0.5279	0.5385	0.5391	0.5394	0.5395
$u_1(t)$	-0.0242				
$u_2(t)$					

Мнения агентов со временем сходятся к целевым мнениям. Траектории равновесного состояния и управления показаны на рис. 3.10 и 3.11 соответственно.

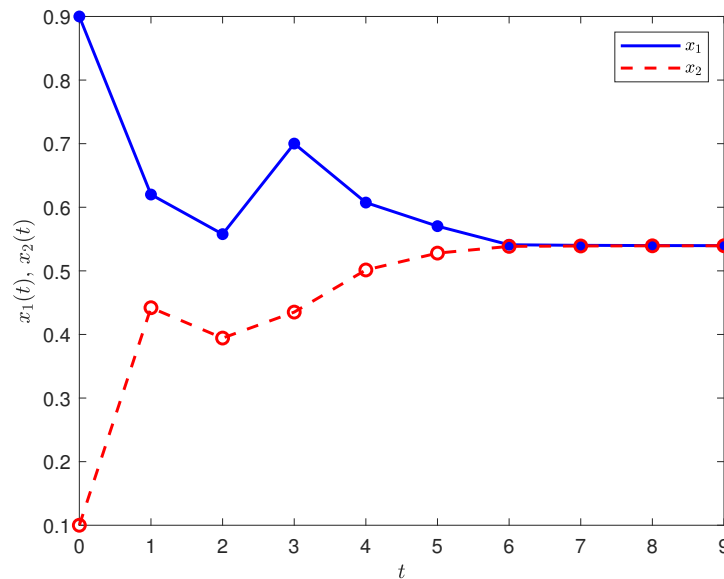


Рис. 3.10: Траектории равновесного состояния (сплошная — $x_1(t)$, пунктирная — $x_2(t)$).

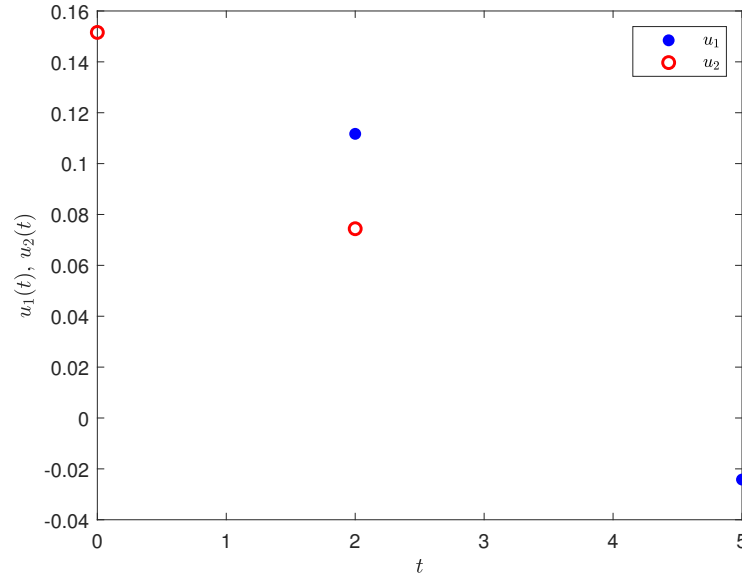


Рис. 3.11: Траектории управлений в равновесии (сплошные — $u_1(t)$, пунктирные — $u_2(t)$).

В этом сценарии мы видим, что среди всех равновесий по Нэшу при выборе V_1 и V_2 минимальные издержки для обоих игроков достигаются при равновесии по Нэшу с $V_1 = \{2, 5\}$ и $V_2 = \{0, 2\}$.

Замечание 3.2. Мы вычисляем множество всех возможных наборов V_1 и V_2 , и C_T^k — количество наборов для каждого игрока. Когда $T = 9$, и игроки выбирают два момента времени, чтобы влиять на мнение агентов, то $C_9^2 = 36$. Учитывая, что у двух игроков могут быть разные наборы моментов времени, количество всех возможных комбинаций составляет $36 \cdot 36 = 1296$. Чтобы найти равновесие по Нэшу, необходимо решить 1296 систем, приведенных в теореме 3.3, чтобы найти оптимальные по Парето равновесные издержки.

Пример 3.6. Пусть $T = 8$ (периоды $0, \dots, 8$), а $k = 3$ — количество периодов, в течение которых игроки влияют на агентов. Параметры следующие:

$$a_1 = 0.1, \quad a_2 = 0.7, \quad \delta = 1, \quad c_1 = 0.4, \quad c_2 = 0.6, \quad s_1 = 0.2, \quad s_2 = 0.1,$$

$$x_1(0) = 0.7, \quad x_2(0) = 0.9.$$

Убеждения агента 1 и агента 2 в среднем общественном мнении равны $a_1 = 0.1$, $a_2 = 0.7$ соответственно. Фактор дисконтирования составляет $\delta = 1$. Удельные издержки влияния составляют $c_1 = 0.4$, $c_2 = 0.6$ для игрока 1 и 2 соответственно. Их целевые мнения равны $s_1 = 0.2$, $s_2 = 0.1$. Рассмотрим все возможные наборы V_1 и V_2 , состоящие из трех периодов, когда игроки могут влиять на мнения агентов. Напоминаем, что эти наборы могут быть разными. В этом примере мы обнаруживаем, что разные равновесия по Нэшу, т. е. разные комбинации наборов V_1 и V_2 , дают наименьшие издержки разным игрокам. Следовательно, множество пар V_1 и V_2 состоит из двух элементов. Опишем оба равновесия, когда (i) $V_1 = \{0, 5, 7\}$ и $V_2 = \{0, 4, 5\}$ и (ii) $V_1 = \{0, 1, 2\}$ и $V_2 = \{0, 2, 7\}$. Игрок 1 предпочитает случай (i), а игрок 2 предпочитает случай (ii). Сначала охарактеризуем равновесие по Нэшу для $V_1 = \{0, 5, 7\}$ и $V_2 = \{0, 4, 5\}$ (см. таблицу 3.6). Равновесные издержки игроков 1 и 2 составляют 0.9491 и 1.4566 соответственно.

Таблица 3.6: Стратегии равновесия по Нэшу и равновесные состояния, $V_1 = \{0, 5, 7\}$ и $V_2 = \{0, 4, 5\}$

t	$t_1^1 = t_2^1 = 0$	1	2	3	$t_2^2 = 4$
$x_1(t)$	0.7000	0.1584	0.1698	0.1766	0.1807
$x_2(t)$	0.9000	0.3855	0.3060	0.2583	0.2297
$u_1(t)$	-0.5516				
$u_2(t)$	-0.4445				-0.1421
t	$t_1^2 = t_2^3 = 5$	6	$t_1^3 = 7$	8	
$x_1(t)$	0.1831	0.1747	0.1812	0.2100	
$x_2(t)$	0.0704	0.3047	0.2592	0.2319	
$u_1(t)$	-0.0029		0.0249		
$u_2(t)$	0.1948				

Таблица 3.7: Стратегии равновесия по Нэшу и равновесные состояния, $V_1 = \{0, 1, 2\}$ и $V_2 = \{0, 2, 7\}$

t	$t_1^1 = t_2^1 = 0$	$t_1^2 = 1$	$t_1^3 = t_2^2 = 2$	3	4
$x_1(t)$	0.7000	0.0130	0.2241	0.1555	0.1520
$x_2(t)$	0.9000	0.2885	0.1921	0.0842	0.1092
$u_1(t)$	-0.6970	0.1973	-0.0670		
$u_2(t)$	-0.5415		-0.1191		
t	5	6	$t_2^3 = 7$	8	
$x_1(t)$	0.1498	0.1486	0.1478	0.1473	
$x_2(t)$	0.1241	0.1331	0.1385	0.2206	
$u_1(t)$					
$u_2(t)$			0.0789		

Мнения агентов со временем становятся ближе к целевым мнениям (см. рис. 3.12). Траектории равновесного состояния и траектории управления показаны на рис. 3.12 и 3.14 соответственно.

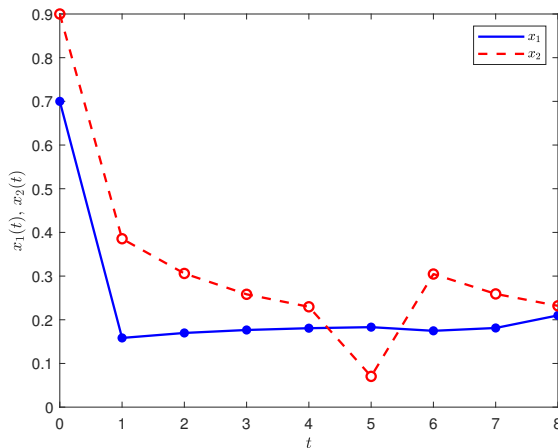


Рис. 3.12: Траектории равновесного состояния, $V_1 = \{0, 5, 7\}$ и $V_2 = \{0, 4, 5\}$ (сплошная — $x_1(t)$, пунктирная — $x_2(t)$)

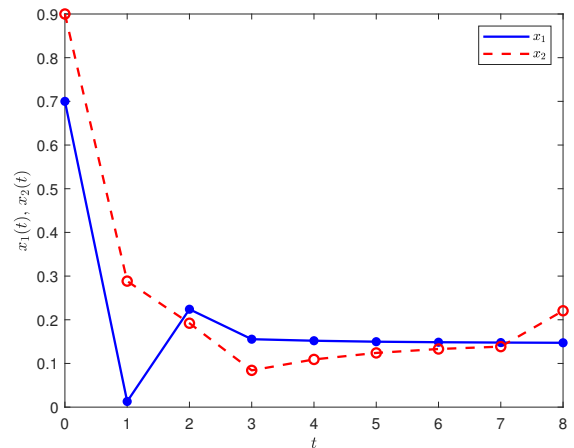


Рис. 3.13: Траектории равновесного состояния, $V_1 = \{0, 1, 2\}$ и $V_2 = \{0, 2, 7\}$ (сплошная — $x_1(t)$, пунктирная — $x_2(t)$)

Во-вторых, охарактеризуем равновесие по Нэшу для случая, когда $V_1 =$

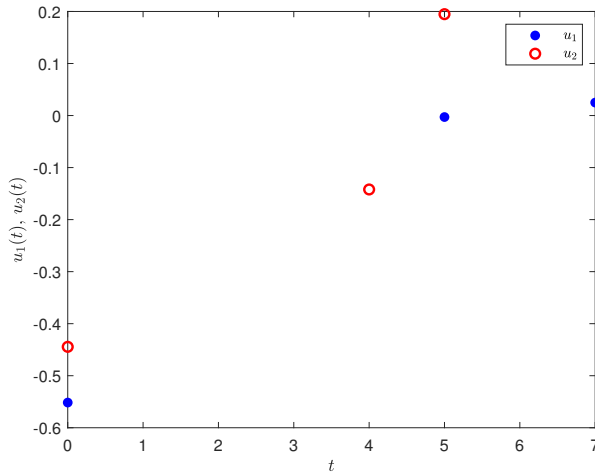


Рис. 3.14: Траектории управления, $V_1 = \{0, 5, 7\}$ и $V_2 = \{0, 4, 5\}$ (сплошная — $u_1(t)$, пунктирная — $u_2(t)$)

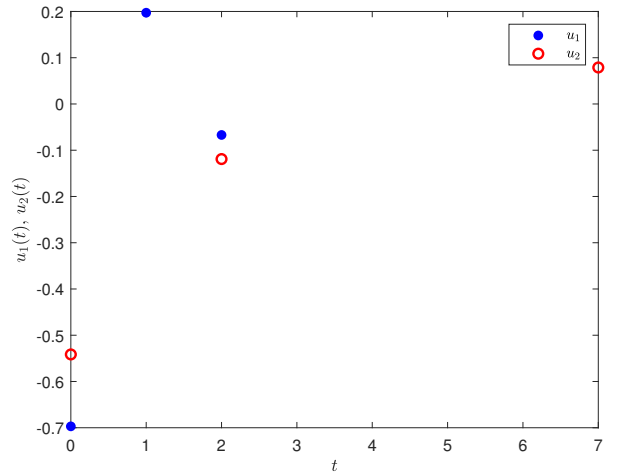


Рис. 3.15: Траектории управления, $V_1 = \{0, 1, 2\}$ и $V_2 = \{0, 2, 7\}$ (сплошная — $u_1(t)$, пунктирная — $u_2(t)$)

$\{0, 1, 2\}$ и $V_2 = \{0, 2, 7\}$, что предпочтительнее для игрока 2. Равновесные издержки игроков 1 и 2 составляют 1.0462 и 1.2884 соответственно. Значения равновесного состояния и управления приведены в таблице 3.7, и они представлены на рис. 3.13 и 3.15.

Для того чтобы изучить два равновесия по Нэшу и различия в издержках игроков, проведем сравнительный анализ таблицы 3.8.

Таблица 3.8: Сравнение двух равновесий по Нэшу

Игроки	V , equil. 1	Затраты	V , equil. 2	Издержки	Индекс
Игрок 1	$\{0, 5, 7\}$	0.9491*	$\{0, 1, 2\}$	1.0462	10.23%
Игрок 2	$\{0, 4, 5\}$	1.4566	$\{0, 2, 7\}$	1.2884*	13.05%

В таблице 3.8 затраты, отмеченные звездочкой, минимальны для соответствующего игрока. Чтобы оценить разницу между двумя равновесиями по Нэшу, мы используем следующий индекс для игрока 1:

$$\frac{J_1(\text{equil}_2) - J_1^*(\text{equil}_1)}{J_1^*(\text{equil}_1)} \cdot 100\% = 10.23\%,$$

где под equil_1 и equil_2 мы понимаем равновесия по Нэшу с множествами

$V_1 = \{0, 5, 7\}$, $V_2 = \{0, 4, 5\}$ и $V_1 = \{0, 1, 2\}$, $V_2 = \{0, 2, 7\}$, соответственно. Значение 10.23% не очень велико, оно показывает, что во втором равновесии по Нэшу уменьшение затрат игрока 1 не слишком велико по сравнению с первым равновесием по Нэшу. Аналогично, для игрока 2 индекс, сравнивающий два равновесия по Нэшу, равен

$$\frac{J_2(\text{equil}_1) - J_2^*(\text{equil}_2)}{J_2^*(\text{equil}_2)} \cdot 100\% = 13.05\%.$$

Нетрудно заметить, что игрок 2 тоже не несет больших издержек в первом равновесии по Нэшу по сравнению со вторым.

Подводя итог, теорема 3.3 дает необходимые условия для равновесия по Нэшу в игре, когда периоды управления фиксированы. Как мы показали выше, некоторое равновесие может быть предпочтительным для одного игрока, но не для другого. В этом случае, если у игроков есть возможность выбирать наборы V_1 и V_2 , когда они контролируют агентов, между игроками может возникнуть конфликт интересов. Мы не обсуждаем, как можно выбрать одно из равновесий по Нэшу, но его можно смоделировать как переговорный процесс.

3.5 Заключение к главе 3

В этой главе предложены три модели динамики мнений с двумя центрами влияния (игроками). Рассматриваются два случая: во-первых, игроки валидируют мнения агентов только в последний момент времени; во-вторых, игроки находят оптимальные моменты валидации мнений, выбрав фиксированное количество периодов k . В выбранные моменты игрок учитывает разницу между мнением агента и общественно желаемым мнением. Мнения всех членов социальной сети зависят от среднего мнения всех членов этой сети. Находим равновесие по Нэшу в случае двух центров и равновесный набор моментов

валидации, которые выбирают игроки. Для нахождения равновесия по Нэшу используется метод уравнений Эйлера.

Последняя модель динамики мнений, представленная в этой главе, в которой мнения агентов находятся под влиянием игроков, такова, что игроки готовы минимизировать свои издержки, представленные суммой квадратов расстояний мнений агентов от желаемого мнения и квадратичных функций управления. Главной особенностью модели является то, что игроки могут влиять на мнения агентов в ограниченном количестве моментов времени. Находим равновесие по Нэшу в игре, где задано число таких периодов, и оно одинаково для обоих игроков, но множества моментов времени могут быть разными для игроков. Также находим Парето-оптимальные множества таких моментов времени при численном моделировании.

Заключение

Диссертация посвящена моделированию динамики мнений в небольших социальных сетях с различными типами ограничений. Рассматривая совместно динамику мнений, некооперативные игры и задачи оптимизации, в работе анализируется изменение мнений членов социальной сети со временем под некоторым внешним влиянием, которое также ограничено. Исследование разделено на три основные части: изучение действия различных режимов выбора значимых моментов времени для валидации мнений агентов в сети для достижения целевого мнения (глава 1); выбор различных режимов влияния на мнения агентов при наличии у игроков ограничения на количество таких моментов (глава 2); нахождение необходимых условий для равновесия по Нэшу в игре конкуренции за мнения агентов, при минимизации игроками своих издержек в линейно-квадратичной форме (глава 3).

Основные результаты работы следующие:

1. В главе 1 представлены модели динамики мнений с различными сценариями ограничений на поведение игроков в небольших социальных сетях. Рассмотрены следующие ограничения: 1) игрок предполагает, что мнение агента в терминальный момент является значимым включает его в свой функционал, никакие другие мнения (в другие моменты времени) не учитываются в функционале; 2) игрок может выбрать множество моментов времени, чтобы включить их в набор значимых мнений, т.е. в функционал. Для всех моделей главы 1 формулируются задачи опти-

мизации для случая с одним игроком. Находятся необходимые условия для оптимальных стратегий. Проводится серия численных экспериментов для проверки результатов и выводов о влиянии параметров на оптимальные стратегии. Численные эксперименты показали, что увеличение числа моментов валидации снижает затраты игрока, и если момент валидации является оптимальным для заданного числа таких моментов, то он также будет оптимальным, если число моментов валидации увеличивается (см. [30, 31, 33]).

2. В главе 2 представлены модели динамики мнений с различными сценариями ограничений на стратегию управления игрока в небольших социальных сетях. Ограничения следующие: 1) игрок может управлять мнениями агентов или валидировать их, но эти два действия не могут быть выполнены одновременно; 2) игрок может выбирать моменты времени, когда он влияет на мнения агентов и одновременно валидирует их, и мощность этого множества моментов ограничена; 3) игрок может выбирать множество моментов влияния на мнения агентов, но они должны отличаться от моментов времени из валидации. Для всех этих моделей сформулированы задачи оптимизации и получены необходимые условия для оптимальных стратегий. Стоит отметить, что при численном моделировании наборы управлений различны для трех случаев. Численное моделирование показывает, что при возможности игрока валидировать мнение агента и влиять на него, он предпочитает делать это в конце временного интервала. В первом и третьем случаях он сначала управляет мнением агента (в начале временного интервала), затем только валидирует его и, наконец, влияет на мнение агента в конце временного интервала (см. [32, 34]).

3. В главе 3 рассматриваются модели динамики мнений в небольших сетях с двумя игроками и изучается конкуренция за общественное мнение при ограничениях на количество моментов валидации или моментов влияния на мнения агентов. В этой главе рассматриваются три основных сценария: 1) игроки валидируют мнения агентов только в терминальный момент времени; 2) игроки могут выбирать множество моментов времени с ограничением на размер этого множества, которое одинаково для обоих игроков; 3) данное множество может быть разным для игроков. Найдены необходимые условия для равновесий по Нэшу для всех сценариев, когда цели игроков заключаются в минимизации линейно-квадратичных издержек. Определены оптимальные по Парето множества моментов валидации и влияния на мнения агентов посредством численного моделирования (см. [29, 35]).

Можно сделать вывод, что все задачи, сформулированные в диссертационной работе, выполнены, а цели полностью достигнуты.

Литература

- [1] Achdou Y., Camilli F., Capuzzo-Dolcetta I. Mean field games: numerical methods for the planning problem // SIAM Journal on Control and Optimization. 2012. Vol. 50. N. 1. P. 77-109.
- [2] Albi G., Almi S., Morandotti M., Solombrino F. Mean-field selective optimal control via transient leadership // Applied Mathematics & Optimization. 2022. Vol. 85. N. 2. P. 1–44.
- [3] Albi G., Pareschi L., Zanella M. On the optimal control of opinion dynamics on evolving networks // IP Conference on System Modeling and Optimization. Springer, Cham. 2015. P. 58-67.
- [4] Arthur D., Motwani R., Sharma A. Pricing strategies for viral marketing on social networks // International workshop on internet and network economics. Springer, Berlin, Heidelberg. 2009. P. 101-112.
- [5] Auletta V., Fanelli A., Ferraioli D. Consensus in opinion formation processes in fully evolving environments // Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence. 2019. Vol. 33. N. 01. P. 6022-6029.
- [6] Banez R. A., Gao H., Li L., Yang C., Han Z., Poor H. V. Modeling and analysis of opinion dynamics in social networks using multiple-population mean field games // IEEE Transactions on Signal and Information Processing over Networks. 2022. Vol. 8. P. 301-316.

- [7] Barabanov I. N., Korgin N. A., Novikov D. A., Chkhartishvili A. G. Dynamic models of informational control in social networks // Automation & Remote Control. 2010. Vol. 71. N. 11.
- [8] Bauso D., Pesenti R. Mean field linear quadratic games with set up costs // Dynamic Games and Applications. 2013. Vol. 3. P. 89-104.
- [9] Bauso D., Tembine H., Başar T. Robust mean field games with application to production of an exhaustible resource // IFAC Proceedings Volumes. 2012. Vol. 45. N.13. P. 454-459.
- [10] Bauso D., Tembine H., Basar T. Opinion Dynamics in Social Networks through Mean-Field Games // SIAM Journal on Control and Optimization. 2016. Vol. 54. N. 6. P. 3225-3257.
- [11] Berger R. L. A necessary and sufficient condition for reaching a consensus using DeGroot's method // Journal of the American Statistical Association. 1981. Vol. 76. N. 374. P. 415-418.
- [12] Bindel D., Kleinberg J., Oren S. How bad is forming your own opinion? // Games and Economic Behavior. 2015. Vol. 92. P. 248-265.
- [13] Carnes T., Nagarajan C., Wild S. M., van Zuylen A. Maximizing influence in a competitive social network: a follower's perspective // Proceedings of the ninth international conference on Electronic commerce. 2007. P. 351-360.
- [14] Clifford P., Sudbury A. A model for spatial conflict // Biometrika. 1973. Vol. 60. N. 3. P. 581-588.
- [15] Cox J. T. Coalescing random walks and voter model consensus times on the torus in \mathbb{Z}^d // The Annals of Probability. 1989. P. 1333-1366.

- [16] Das A., Gollapudi S., Munagala K. Modeling opinion dynamics in social networks // In Proceedings of the 7th ACM international conference on Web search and data mining. 2014. P. 403-412.
- [17] Dechert D. Optimal control problems from second-order difference equations // Journal of Economic Theory. 1978. Vol. 19. N. 1. P. 50-63.
- [18] Deffuant G., Neau D., Amblard F., Weisbuch G. Mixing beliefs among interacting agents // Advances in Complex Systems. 2000. Vol. 3. N. 01n04. P. 87-98.
- [19] DeGroot M. H. Reaching a consensus // Journal of the American Statistical association. 1974. Vol. 69. N. 345. P. 118-121.
- [20] Dittmer J. C. Consensus formation under bounded confidence // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2001. Vol. 47. N. 7. P. 4615-4621.
- [21] Dorri A., Kanhere S. S., Jurdak R. Multi-agent systems: A survey // IEEE Access. 2018. Vol. 6. P. 28573-28593.
- [22] Elliott R., Li X., Ni Y. H. Discrete time mean-field stochastic linear-quadratic optimal control problems // Automatica. 2013. Vol. 49. N. 11. P. 3222-3233.
- [23] Fornasier M., Solombrino F. Mean-field optimal control // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2014. Vol. 20. P. 4. P. 1123-1152.
- [24] Fotakis D., Palyvos-Giannas D., Skoulakis S. Opinion Dynamics with Local Interactions // Proceedings of the Twenty-Fifth International Joint Conference on Artificial Intelligence. 2016. P. 279-285.
- [25] French Jr J. R. A formal theory of social power // Psychological review. 1956. Vol. 63. N. 3. P. 181.

- [26] Friedkin N. E., Johnsen E. C. Social influence and opinions // Journal of mathematical sociology. 1990. Vol. 15. N. 3-4. P. 193-206.
- [27] Funkhouser G. R. The issues of the sixties: An exploratory study in the dynamics of public opinion // Public Opinion Quarterly. 1973. Vol. 37. N. 1. P. 62-75.
- [28] Galam S. Minority opinion spreading in random geometry // The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems. 2002. Vol.25. P. 403-406.
- [29] Gao J. Two-player opinion control game with limited observation moments // Control Processes and Stability. 2022. Vol. 9. N. 1. P. 464-468.
- [30] Gao J., Parilina E. M. Opinion Control Problem with Average-Oriented Opinion Dynamics and Limited Observation Moments // Contributions to Game Theory and Management. 2021. Vol. 14. P. 103-112.
- [31] Gao J., Parilina E. M. Average-oriented opinion dynamics with the last moment of observation // Control Processes and Stability. 2021. V. 8, N. 1. P. 505-509.
- [32] Gao J., Parilina E. M. Optimal control in a multiagent opinion dynamic system // Contributions to Game Theory and Management. 2022. Vol. 15. P. 51-59.
- [33] Gao J., Parilina E. M. Opinion dynamics in multiagent systems with optimal choice of opinion verification moments // Doklady Mathematics, 2023. Vol. 108. Suppl. 1. P. S75-S85.
- [34] Gao J. Controlled opinion formation in multiagent systems with constraints on control set // In: Petrosyan, L.A., Mazalov, V., Zenkevich, N.A. (eds)

- Frontiers of Dynamic Games. GTA 2022. Trends in Mathematics. Birkhäuser, Cham. 2024. P. 27-42.
- [35] Gao J. Competition on agents' opinions in average-oriented opinion small dynamic systems with limited number of controls // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2024. Vol. 20. N. 3. P. 402-413.
- [36] Gionis A., Terzi E., Tsaparas P. Opinion maximization in social networks // Proceedings of the 2013 SIAM international conference on data mining. Society for Industrial and Applied Mathematics. 2013. P. 387-395.
- [37] González-Sánchez D., Hernández-Lerma O. On the Euler equation approach to discrete-time nonstationary optimal control problems // Journal of Dynamics and Games. 2014. Vol. 1. N. 1. P. 57.
- [38] González-Sánchez D., Hernández-Lerma O. Discrete-time stochastic control and dynamic potential games: the Euler–Equation approach // Chap. 2. Springer International Publishing: Cham, Switzerland. 2013.
- [39] Goyal M., Chatterjee D., Karamchandani N., Manjunath D. Maintaining ferment // Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control. 2019. P. 5217-5222.
- [40] Goyal S., Kearns M. Competitive contagion in networks // In Proceedings of the forty-fourth annual ACM symposium on Theory of computing. 2012. P. 759-774.
- [41] Goyal M., Manjunath D. Opinion control competition in a social network // 2020 International Conference on COMMunication Systems and NETWORKS, COMSNETS 2020. P. 306-313.

- [42] Guéant O., Lasry J. M., Lions P. L. Mean field games and oil production // The Economics of Sustainable Development. 2010.
- [43] Haurie A., Krawczyk J. B., Zaccour G. Games and dynamic games // World Scientific Publishing Company. 2012.
- [44] He Q., Fang H., Zhang J., Wang X. Dynamic opinion maximization in social networks // IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering. 2021. Vol. 35. N. 1. P. 350-361.
- [45] He G., Ruan H., Wu Y., Liu J. Opinion dynamics with competitive relationship and switching topologies // IEEE Access. 2021. Vol. 9. P. 3016-3025.
- [46] Hegselmann R., Krause U. Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis, and simulation // Journal of artificial societies and social simulation. 2002. Vol. 5. N. 3.
- [47] Holley R. A., Liggett T. M. Ergodic theorems for weakly interacting infinite systems and the voter model // The annals of probability. 1975. P. 643-663.
- [48] Ignaciuk P., Bartoszewicz A. Linear-quadratic optimal control strategy for periodic-review inventory systems // Automatica. 2010. Vol. 46. N. 12. P. 1982-1993.
- [49] Jiang H., Mazalov V. V., Gao H., Wang C. Opinion Dynamics Control in a Social Network with a Communication Structure // Dynamic Games and Applications. 2021.
- [50] Jond H. B., Yıldız A. A game approach to multi-dimensional opinion dynamics in social networks with stubborn strategist agents // European Journal of Control. 2024. Vol. 75. P. 100941.

- [51] Kareeva Y., Sedakov A. A., Zhen M. Influence in social networks with stubborn agents: from competition to bargaining // Applied Mathematics and Computation. 2023. Vol. 444. P. 127790.
- [52] Lang N., Zha Q., Wang L. Competitive targeted marketing in social networks with switching topology: Seed selection and consensus shaping // Information Fusion. 2023. Vol. 95. P. 355-371.
- [53] Lasry J. M., Lions P. L. Mean field games // Japanese journal of mathematics. 2007. Vol. 2. N. 1. P. 229-260.
- [54] León Medina F. J. Endogenous changes in public opinion dynamics // Journal of Artificial Societies and Social Simulation. 2019. Vol. 22. N. 2. P. 4.
- [55] Li L., Fan Y., Zeng A., Di Z. Binary opinion dynamics on signed networks based on Ising model // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2019. Vol. 525. P. 433-442.
- [56] Liang Y., Wang B. Robust mean field social optimal control with applications to opinion dynamics // 2019 IEEE 15th International Conference on Control and Automation (ICCA). 2019. P. 1079-1084.
- [57] Liu X., Kong X., Yu P. S. Active opinion maximization in social networks // Proceedings of the 24th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery & Data Mining. 2018. P. 1840-1849.
- [58] Liu X., Li Y., Zhang W. Stochastic linear quadratic optimal control with constraint for discrete-time systems // Applied Mathematics and Computation. 2014. Vol. 228. P. 264-270.
- [59] Liu Y., Liu J., Wu K. Cost-effective competition on social networks: a multi-objective optimization perspective // Information Sciences. 2023. Vol. 620. P. 31-46.

- [60] Mandel A., Venel X. Dynamic competition over social networks // *European Journal of Operational Research*. 2020. Vol. 280. N. 2. P. 597-608.
- [61] Mazalov V. V., Dorofeeva Y. A., Parilina E. M. Opinion control in a team with complete and incomplete communication // *Contributions to Game Theory and Management*. 2020. Vol. 13. P. 324-334.
- [62] Mazalov V., Parilina E. Game of competition for opinion with two centers of influence // *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*. 2019. Vol. 11548. P. 673–684.
- [63] Mazalov V., Parilina E. The Euler-Equation Approach in Average-Oriented Opinion Dynamics // *Mathematics*. 2020. Vol. 8. N. 3. P. 355.
- [64] Monica S., Bergenti F. Analytic Study of Opinion Dynamics in Multi-Agent Systems with Two Classes of Agents // *CEUR Workshop Proceedings*. 2016. Vol. 1664. P. 17-22.
- [65] Ni Y. H., Elliott, R., Li, X. Discrete-time mean-field Stochastic linear-quadratic optimal control problems, II: Infinite horizon case // *Automatica*. 2015. Vol. 57. P. 65-77.
- [66] Niazi M. U. B. A noncooperative dynamic game model of opinion dynamics in multilayer social networks // *Bilkent Universitesi (Turkey)*. 2017.
- [67] Niazi M. U. B., Özgüler A. B. A differential game model of opinion dynamics: Accord and discord as Nash equilibria // *Dynamic Games and Applications*. 2021. Vol. 11. P. 137-160.
- [68] Niazi M. U. B., Özgüler A. B., Yildiz A. Consensus as a Nash equilibrium of a dynamic game // *2016 12th International Conference on Signal-Image Technology & Internet-Based Systems (SITIS)*. 2016. P. 365-372.

- [69] Noah F., Eugene J. Social influence networks and opinion change // *Advances in Group Processes*. 1999. Vol. 16. P.1-29.
- [70] Presutti E., Spohn H. Hydrodynamics of the voter model // *The Annals of Probability*. 1983. Vol. 11. N. 4. P. 867-875.
- [71] Rogov M. A., Sedakov A. A. Coordinated Influence on the Opinions of Social Network Members // *Automation and Remote Control*. 2020. Vol. 81. N. 3. P. 528-547.
- [72] Sedakov A. A., Zhen M. Opinion dynamics game in a social network with two influence nodes // *Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta, Prikladnaya Matematika, Informatika, Protsessy Upravleniya*. 2019. Vol. 15. N. 1. P. 118-125.
- [73] Smug D., Sornette D., Ashwin P. A generalized 2d-dynamical mean-field ising model with a rich set of bifurcations (inspired and applied to financial crises) // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2018. Vol. 28. N. 04. P. 1830010.
- [74] Sznajd-Weron K., Sznajd J. Opinion evolution in closed community // *International Journal of Modern Physics C*. 2000. Vol. 11. N. 6. P. 1157-1165.
- [75] Veetaseveera J., Varma V. S., Morărescu I. C. A Dynamic Game Formulation for Control of Opinion Dynamics over Social Networks // *International Conference on Network Games, Control and Optimization*. Springer, Cham. 2021. P. 252-260.
- [76] Wang M., Liang D., Xu Z. Consensus achievement strategy of opinion dynamics based on deep reinforcement learning with time constraint // *Journal of the Operational Research Society*. 2021. P. 1-15.

- [77] Wang C., Mazalov V. V., Gao H. Opinion Dynamics Control and Consensus in a Social Network // Automation and Remote Control. 2021. Vol. 82. N. 6. P. 1107-1117.
- [78] Yu J., Wang Y., Li J., Shen H., Cheng X. Analysis of competitive information dissemination in social network based on evolutionary game model // 2012 Second International Conference on Cloud and Green Computing. 2012. P. 748-753.

Приложение

Методы исследования

Метод уравнений Эйлера

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ и $U \subset \mathbb{R}^m$ — пространство состояний и множество управлений соответственно. Заданное начальное состояние $x_0 \in X$, состояние системы изменяется согласно динамике:

$$x(t+1) = f_t(x(t), u(t)), t = 0, 1, \dots, T-1. \quad (3.29)$$

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти управление $u(t) \in U$, максимизирующее функционал:

$$\sum_{t=0}^T \delta^t r_t(x(t), u(t)) \quad (3.30)$$

с учетом уравнений динамики состояния (3.29) и заданного начального условия $x(0) = x_0$, где $r_t(x(t), u(t))$ является функцией выигрыша или затрат игрока.

Можно переформулировать эту задачу в терминах траектории состояния $x(t)$. Предположим, что можно выразить $u(t)$ из уравнения (3.29) как функцию $x(t)$ и $x(t+1)$, скажем $u(t) = q(x(t), x(t+1))$. Поэтому можно переписать функционал (3.30) в следующей форме:

$$\sum_{t=0}^T \delta^t g_t(x(t), x(t+1)), \quad (3.31)$$

где $g_t(x(t), x(t+1)) = r_t(x(t), q(x(t), x(t+1)))$, $t = 0, 1, \dots, T-1$. Метод уравнений Эйлера дает необходимые условия (см. [17, 37, 38]) для оптимальной траектории $x^*(t)$:

$$\frac{\partial g_{t-1}(x^*(t-1), x^*(t))}{\partial y} + \delta \frac{\partial g_t(x^*(t), x^*(t+1))}{\partial x} = 0, \quad t = 1, \dots, T-1. \quad (3.32)$$

Можно заметить, что рассматриваемые в диссертации игры относятся к классу линейно-квадратичных игр. Мы будем применять метод уравнений Эйлера для нахождения оптимальных стратегий в динамических играх с динамикой мнений, ориентированной на средние значения (см. [63]).

Принцип максимума Понтрягина

Этот раздел написан по книге [43].

Определение 3.1. *Многошаговая игра двух лиц определяется с конечной продолжительностью определяется следующими функциями полезности (или функциями затрат) и уравнениями динамики состояния:*

$$J_j = \sum_{t=0}^{T-1} g_j(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t), t) + S_j(\mathbf{x}(T)), \quad \text{для } j = 1, 2, \quad (3.33)$$

$$\mathbf{u}_j(t) \in U_j, \quad (3.34)$$

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t), t), \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \quad (3.35)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0. \quad (3.36)$$

Если игра решается в классе программных стратегий, то каждый игрок, наблюдая начальное состояние x_0 , выбирает допустимую последовательность управлений $\tilde{\mathbf{u}}_j^T = (\mathbf{u}_j(0), \dots, \mathbf{u}_j(T-1))$, $j = 1, 2$. Это создает, начиная с начальной позиции $(0, \mathbf{x}^0)$, траекторию состояния $\tilde{\mathbf{x}}^T$.

Можно использовать метод оптимального управления, основанный на принципе максимума Понтрягина, чтобы охарактеризовать равновесие по Нэшу

в классе программных стратегий. Для этого определим гамильтониан для каждого игрока j следующим образом:

$$H_j(\mathbf{p}_j(t+1), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t), t) \equiv \\ g_j(\mathbf{x}(t+1), \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t), t) + \mathbf{p}_j(t+1)' \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t), t),$$

где $\mathbf{p}_j(t)$ — сопряженный вектор в \mathbb{R}^n и $'$ обозначает транспонирование вектора $\mathbf{p}_j(t+1)$ в скалярном произведении.

Assumption 3.1. *Предположим, что $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ и $g_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ непрерывно дифференцируемы по состоянию \mathbf{x} и непрерывны по управлениям \mathbf{u} для каждого $t = 0, \dots, T-1$ и $S_j(\mathbf{x})$ непрерывно дифференцируемо по \mathbf{x} . Предположим, что для каждого j, U_j является компактным и выпуклым. Также предположим, что для каждого t, \mathbf{x} , функция $H_j(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{-j}, t)$ является вогнутой по \mathbf{u}_j .*

Тогда $\forall j; \forall j$ сформулировать следующую лемму, которая предоставляет необходимые условия, которым должны удовлетворять равновесия в в классе программных стратегий:

Lemma 3.1. *При предположении 3.1, если $\tilde{\mathbf{u}}^*$ является парой программных управлений равновесия по Нэшу, порождающей траекторию $\tilde{\mathbf{x}}^*$ из начального состояния \mathbf{x}^0 для игры (3.33), (3.35), то существуют функции времени $\mathbf{p}_j(\cdot)$ со значениями в \mathbb{R}^n , такие что выполняются следующие соотношения:*

$$\mathbf{u}_j^*(t) = \arg \max_{\mathbf{u}_j(t) \in U_j} H_j(\mathbf{p}_j(t+1), \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}_j(t), \mathbf{u}_{-j}^*(t), t), \\ \mathbf{p}_j(t)' = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} H_j(\mathbf{p}_j(t+1), \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}_1^*(t), \mathbf{u}_2^*(t), t), \\ \mathbf{p}_j(T)' = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(T)} S_j(\mathbf{x}^*(T)), j = 1, 2.$$

Доказательство. См. [43].

□