

## ОТЗЫВ

научного руководителя Жабко Алексея Петровича на диссертацию **Алисейко Алексея Николаевича** «Математические методы анализа и синтеза систем с запаздывающим аргументом», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика»

**Актуальность темы диссертации.** Многие математические модели динамических процессов и явлений, возникающих в физике, химии, технике, экономике, медицине и других дисциплинах описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнениями в частных производных. При более детальном исследовании оказывается, что недостаточно ограничиться рассмотрением моделей, в которых будущее состояние системы определяется текущим состоянием и не зависит от ее прошлого. Более того, в некоторых системах исключить зависимость от прошлого оказывается принципиально невозможным. Например, в управляемых системах с обратной связью между моментом измерения регулируемой величины и моментом выработки сигнала управления проходит некоторое время.

С середины 50-х годов прошлого столетия все большее и большее число работ посвящается исследованиям систем уравнений с последействием. С тех пор и по настоящее время интенсивно развивается общая теория дифференциально-разностных систем уравнений, методы качественного анализа свойств решений таких систем и построение численных схем реализации разработанных методов. В диссертационной работе А.Н. Алисейко рассматриваются новые классы систем с запаздыванием, для которых возможно точное нахождение матриц Ляпунова и построение теории, аналогичной известной теории для систем с одним запаздыванием. Далее в диссертации предлагается вариант распространения метода функционалов Ляпунова—Красовского на управляемые системы с запаздыванием и получение экспоненциальных оценок решений таких систем. Диссертационная работа завершается разработкой конструктивных методов нахождения матриц Ляпунова для систем с запаздыванием общего вида без ограничения на случай их экспоненциальной устойчивости. С учетом вышесказанного, тема диссертационного исследования является **актуальной**.

**Новизна полученных результатов.** В своей диссертационной работе А.Н. Алисейко для решения поставленных задач по анализу новых классов систем дифференциально-разностных уравнений использовал, а при необходимости модернизировал, адекватные методы, разработанные для систем с одним запаздыванием. В итоге были получены следующие новые результаты:

- конструктивный метод нахождения матриц Ляпунова для систем с распределенным запаздыванием и экспоненциальным ядром;
- подход к анализу устойчивости систем с распределенным запаздыванием путем их преобразования к системам с одним запаздыванием;



- построение функционалов Ляпунова—Красовского полного типа для систем с запаздыванием в управлении, и нахождение экспоненциальных оценок решений таких систем;
- конструктивный метод построения матриц Ляпунова для систем с кусочно-постоянным ядром;
- конструктивный метод приближенного вычисления матриц Ляпунова для произвольных линейных стационарных систем с запаздыванием.

**Достоверность полученных результатов.** Все результаты диссертации приведены в виде строгих математических утверждений и примеров, иллюстрирующих применение этих утверждений. Их достоверность и непротиворечивость гарантируется строгостью применяемых математических методов доказательств, совпадением полученных результатов с известными результатами во всех исследованных ранее частных случаях.

Результаты работы докладывались на научных конференциях: 47-я международная научная конференция аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» факультета ПМ-ПУ СПбГУ (Санкт-Петербург, 2016), «XIII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2019)» (Москва, ИПУ РАН, 2019) и «15th IFAC Workshop on Time Delay Systems» (Синая, Румыния, 2019). Основные результаты диссертации были опубликованы в работах [1, 14–17]. Из них статья [1] опубликована в рецензируемом журнале из списка ВАК, а статьи [14–17] в иностранных журналах, входящих в наукометрические базы Scopus и Web of Science.

**Значимость для науки и практики полученных автором результатов.**

Теоретическая значимость результатов диссертации заключается в развитии метода функционалов Ляпунова—Красовского для нового класса дифференциально-разностных систем уравнений, построении нового класса систем, для которых возможно нахождение матрицы Ляпунова в конечном виде и распространении метода функционалов Ляпунова—Красовского на управляемые системы с запаздыванием.

Практическая значимость диссертации заключается в том, что разработанные конструктивные методы и алгоритмы могут быть использованы при анализе динамических свойств биологических, механических, химических и др. процессов, а также любых управляемых систем с обратной связью.

**Оценка содержания и оформления диссертации.** Работа объемом 121 страница состоит из введения, шести глав, заключения, двух приложений, списка литературы из 68 наименований, 7 рисунков и 1 таблицы.

*Во введении обосновывается актуальность диссертационного исследования, выполнен подробный литературный обзор по теме исследования, сформулированы решаемые задачи и используемые методы. Далее приводится теоретическая и практическая значимость полученных результатов, а также описывается краткое содержание работы.*

*В первой главе диссертационной работы приводится краткая сводка известных результатов, используемых в последующих главах. В параграфах 1.1 и 1.2 вводятся основные понятия для линейных систем с запаздыванием, в параграфе 1.3 излагается*



метод функционалов Ляпунова—Красовского полного типа, а в параграфе 1.4 вводится понятие матрицы Ляпунова. В параграфе 1.5 приводится обзор методов нахождения матриц Ляпунова для систем с одним запаздыванием, а в параграфе 1.6 даются определение и основные свойства произведения и суммы Кронекера.

Вторая глава диссертации посвящена проблеме нахождения матриц Ляпунова для систем с распределенным запаздыванием и экспоненциальным ядром. Для подобных систем в параграфе 2.2 предлагаются новые граничные условия для вспомогательной системы линейных дифференциальных уравнений без запаздывания, которая может быть использована для определения матрицы Ляпунова. В параграфе 2.3 описывается конструктивный способ решения вспомогательной граничной задачи, а в параграфе 2.4 доказывается, что существование и единственность матрицы Ляпунова равносильна существованию и единственности решения данной граничной задачи. Эти результаты иллюстрируются в параграфе 2.5.

В третьей главе рассматривается подход к нахождению матриц Ляпунова для систем с распределенным запаздыванием и экспоненциальным ядром путем введения дополнительных переменных и трансформации их в системы большей размерности с одним запаздыванием. В параграфе 3.1 выводятся соотношения между решениями, характеристическими функциями и фундаментальными матрицами исходной и расширенной систем. Исследованию связи между матрицами Ляпунова двух систем посвящен параграф 3.2. В параграфах 3.3 и 3.4 исследуются дополнительные свойства, возникающие при предположении о выполнении условия Ляпунова и при наличии экспоненциальной устойчивости, соответственно. В параграфе 3.5 приводятся примеры систем, которые допускают матрицу Ляпунова, но при этом для расширенной системы матрицы Ляпунова не существует.

Четвертая глава посвящена линейным управляемым системам с запаздыванием в управлении. В параграфе 4.1 предлагается функционал Ляпунова—Красовского для систем, замкнутых стабилизирующим управлением. В параграфе 4.2 эти функционалы используются для нахождения экспоненциальных оценок решений таких систем. Глава завершается иллюстрирующим примером в параграфе 4.3.

Пятая глава посвящена проблеме нахождения матриц Ляпунова для систем с распределенным запаздыванием и кусочно-постоянным ядром. В параграфе 5.2 рассматривается вспомогательная граничная задача, которая может быть использована для построения матрицы Ляпунова подобных систем. В параграфе 5.3 вопрос решения этой граничной задачи сводится к нахождению решения системы линейных алгебраических уравнений. Параграф 5.4 посвящен доказательству того, что граничная задача имеет единственное решение тогда и только тогда, когда существует единственная матрица Ляпунова. Завершает главу пример использования граничной задачи для нахождения критического значения запаздывания в параграфе 5.5.

В шестой главе ставится вопрос о непрерывной зависимости матриц Ляпунова от правых частей уравнений с запаздыванием. В параграфе 6.1 для описания правых частей



рассматриваемых систем вводится пространство нормализованных матричных функций ограниченной вариации и формулируется основная теорема о сходимости матриц Ляпунова при сходимости правых частей. Доказательство этого результата разбито на две части и приводится в параграфах 6.2 и 6.3. Вопрос непрерывной зависимости матриц Ляпунова от правых частей систем в зависимости от топологии на функциях ограниченной вариации обсуждается в параграфе 6.4. Последний параграф 6.5 иллюстрирует описываемый подход на примере.

В заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы.

В приложении А приводится реализация алгоритма нахождения матриц Ляпунова для систем с распределенным запаздыванием и экспоненциальным ядром, описанных в главе 2. Реализация метода построения матриц Ляпунова для систем с распределенным запаздыванием и кусочно-постоянным ядром, представленных в главе 5, приведена в приложении Б.

Отметим, что оформление диссертационной работы полностью соответствует ГОСТу, изложение материала логически последовательно и ясно изложено, а каждая глава сопровождается иллюстративным примером.

По объему и актуальности выполненных исследований, новизне и практической значимости, количеству публикаций диссертация Алисейко Алексея Николаевича «Математические методы анализа и синтеза систем с запаздывающим аргументом» удовлетворяет требованиям, установленным Приказом от 01.09.2016 № 6821.1 «О порядке присуждения ученых степеней в Санкт-Петербургском государственном университете», а соискатель **Алисейко Алексей Николаевич** заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика». Пункты 9 и 11 указанного Порядка диссертантом не нарушены.

Заслуженный работник Высшей школы  
Российской Федерации,  
Почетный профессор Санкт-Петербургского  
государственного университета,  
доктор физико-математических наук,  
профессор по кафедре теории управления,  
профессор кафедры Теории управления,  
заведующий кафедрой Теории управления СПбГУ

Жабко Алексей Петрович

18 октября 2022 г.



18.10.2022

