ОТЗЫВ
НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ

о диссертации Анастасии Юрьевны Улицкой
"Точные неравенства теории приближения
пространствами сдвигов",

представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Диссертация А. Ю. Улицкой посвящена экстремальным задачам теории приближения в пространствах квадратично суммируемых функций на периоде, на отрезке и на вещественной оси. Решенные в работе экстремальные задачи можно отнести к двум типам. Пусть задан класс функций W.

1. Для заданного приближающего подпространства найти точное значение приближения класса W данным подпространством.

2. Среди всех приближающих подпространств из заданной совокупности найти экстремальные, то есть те, которые приближают W наилучшим образом.

К первому типу относятся точные неравенства для приближений классов функций пространствами сдвигов, а ко второму — описание экстремальных подпространств сдвигов.

В первой главе рассматриваются периодические функции. Хорошо известна точная оценка наилучшего приближения 2π-периодической функции $f \in W_2^{(r)}$ тригонометрическими многочленами порядка меньше n по L_2-норме:

$$E_n(f)_2 \leqslant \frac{1}{n^r}\|f^{(r)}\|_2. \tag{1}$$

Неравенство точно даже в смысле теории поперечников, то есть константу $\frac{1}{n^r}$ в правой части нельзя уменьшить на рассматриваемом классе функций, даже если перейти к приближению любым другим подпространством размерности $2n-1$ или $2n$. Это неравенство легко доказывается с помощью равенства Парсеваля. Пространство тригонометрических многочленов — не единственное экстремальное подпространство: аналогичное неравенство известно и для приближений пространствами сплайнов, но доказывалось другим способом, с помощью соотношений двойственности.

Естественными обобщениями соболевских классов служат классы сверток с фиксированным ядром G. Известны поперечники классов сверток и экстремальность подпространств линейных комбинаций комплексных экспонент, показатели которых определенным образом зависят от ядра свертки. Эти факты содержатся в известной монографии А. Пинкуса, посвященной поперечникам; первый результат такого типа принадлежит А. Н. Колмогорову.

В диссертации описаны все экстремальные приближающие подпространства сдвигов, то есть подпространства, порожденные равноотстоящими сдвигами одной функции B. Кроме того, указан широкий класс других экстремальных подпространств. Результат о соболевских классах получается отсюда как частный случай для сверток с ядрами Бернулли.

Пространства сдвигов играют большую роль в теории аппроксимации и ее приложениях, и интерес к ним в последнее время возрос. Так, пространства тригонометрических многочленов, целых функций конечной степени и сплайнов порождаются сдвигами ядра Дирихле, синк-функции и B-сплайна.

Результаты А. Ю. Улицкой в рассматриваемом вопросе весьма общие и практически исчерпывают проблему.

Необходимые и достаточные условия формулируются в терминах коэффициентов Фурье функций B и G. Из этой совокупности условий все кроме одного имеют технический характер типа обращения или необращения некоторых коэффициентов в ноль. Их проверка для конкретных ядер тривиальна. Остается одно ключевое условие, имеющее вид неотрицательности суммы некоторого ряда. Далее даются относительно легко проверяемые достаточные условия выполнения этого неравенства, в которых роли функций B и G разделены. Это позволяет привести обширную серию примеров ядер и подпространств, удовлетворяющих условиям основной теоремы.

Во второй главе рассматриваются соболевские классы функций, заданных на отрезке. Для справедливости неравенств вида (1) приближаемые функции подчиняют тем или иным краевым условиям; таким же условиям должны удовлетворять и приближающие функции. Известны поперечники соболевских классов и экстремальность подпространств тригонометрических многочленов; эти подпространства зависят от вида краевых условий. В недавних работах М. Флоатера и Э. Санде были указаны некоторые экстремальные подпространства сплайнов.

С помощью периодического продолжения оказалось возможным свести задачу к периодическому случаю и воспользоваться результатами первой главы. Тем самым полностью описаны все те экстремальные приближающие подпространства, которые получаются из соответствующей периодической задачи. В частности, найдены экстремальные подпространства сплайнов, как указанные ранее предшественниками, так и новые.

В третьей главе рассматривается тот же круг задач, что и в первой, но в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ функций, заданных на вещественной оси. Аналогами понятий размерности и поперечника в этом случае служат понятия средней размерности и среднего поперечника.

Ставится задача об экстремальных подпространствах приближений классов обобщенных сверток, то есть классов функций, задающихся мультипликаторами в терминах преобразований Фурье. Таковы, в частности, классы сверток с суммируемыми ядрами. Средние поперечники классов сверток известны; они были найдены в работах В. М. Тихомирова, Г. Г. Магарил-Ильяева и К. Ю. Осипенко. Известные экстремальные подпространства, помимо подпространств сплайнов для соболевских классов, состоят из функций, преобразование Фурье которых обнуляется вне некоторого множества.

В диссертации А. Ю. Улицкая получила серию точных неравенств вида (1) для приближений классов обобщенных сверток пространствами сдвигов. При некоторых естественных ограничениях на скорость убывания функции B известно, что пространства сдвигов имеют нужную среднюю размерность.

Тем самым и здесь результаты имеют окончательный характер: описаны все приближающие подпространства, реализующие точную постоянную в смысле средних поперечников и порожденные равноотстоящими сдвигами одной функции. Кроме того, указан широкий класс других экстремальных подпространств и найдены средние поперечники классов обобщенных сверток. Необходимые и достаточные условия формулируются в терминах преобразований Фурье. Далее выводятся легко проверяемые достаточные условия, которые имеют тот же вид, что и в периодическом случае.

До работ А. Ю. Улицкой задачи об экстремальных подпространствах в такой общности не только не решались, но даже не ставились.

В диссертации А. Ю. Улицкой получены новые важные и интересные результаты. Работа показывает, что диссертантка владеет методами теории приближения функций, вещественного, комплексного и функционального анализа, теории экстремальных задач. Она продемонстрировала высокую технику, самостоятельность, изобретательность и настойчивость в решении трудных задач и хорошее знание научной литературы.

Считаю, что А. Ю. Улицкая достойна присуждения ей степени кандидата физико-математических наук.

10.05.2025

доктор физико-математических наук, доцент, профессор СПбГУ — О. Л. Виноградов

Подпись руки Виноградова Олега Леонидовича удостоверяю

Начальник отд 2 УК

Владимирова Т.И.

10.05.2025

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный университет»
(СПбГУ)
ИНН 7801002274