

ОТЗЫВ

научного оппонента на диссертацию
СЕМЕНОВА АНДРЕЯ ВЯЧЕСЛАВОВИЧА
"Геометрия симметрических пространств"
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 1.1.5 –
"Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика"

Представленная работа посвящена важной, интересной и актуальной теме исследования геометрии симметрических пространств. Симметрические пространства являются одним из основополагающих объектов, лежащих на стыке геометрии и алгебры. Они были введены и подробно изучены Эли Картаном в середине 1930-х годов. Он же впоследствии получил классификацию симметрических пространств. Эта работа основана, в частности, на том факте, что каждое симметрическое пространство может быть представлено как однородное пространство вида G/K , где G группа Ли, K ее подгруппа. В работе А.Семенова изучается геометрия симметрических пространств типов **EIII** и **EVI**. Эти пространства тесно связаны с группами типа E_6 и E_7 и их подгруппами.

Симметрические пространства над полями комплексных и вещественных чисел неразрывно связаны с римановыми многообразиями и дифференциальной геометрией. Именно в этом контексте они играют важную геометрическую роль. Такой случай будем называть классическим, с ним связана классическая теория симметрических пространств. С другой стороны, симметрические пространства могут быть определены над любым полем характеристики отличной от 2. В этом случае они связаны с инволюциями на простых алгебраических группах и, следовательно, с алгебрами, позволяющими в общем случае реализовать группы различных типов.

В середине 60-х годов Б.Розенфельд предложил некоторую общую идею рассмотрения внутренней геометрической структуры симметрических пространств. В этом контексте основополагающими работами стали результаты Винберга и Ацумы, в которых они, в частности, вычислили число прямых, проходящих через две заданные точки, для пространств **EIII**, **EVI** и **EVII**. Следует отметить, что это было сделано в классической ситуации, и, соответственно, методы доказательства были в значительной степени аналитическими.

Таким образом, изучение аналогичных проблем для произвольного поля является актуальным открытым вопросом и основным мотивом диссертации А.Семенова. В случае расщепимых групп результаты о взаимном расположении точек и прямых в случае общего положения восходят к работам Фельдкампа и Спрингера. Таким образом, основным объектом исследования является случай общих (анизотропных) алгебраических групп, а основным рабочим инструментом являются связанные с ними неассоциативные алгебры и инволюции. Поэтому йордановым алгебрам, кватернионным алгебрам, алгебрам Кэли,

Альберта, Брауна и их обобщениям в работе А.Семенова уделяется особое внимание.

Центральным результатом диссертации является классификация геометрических конфигураций для случая **EII**, для произвольного поля характеристики отличной от 2 и 3, и для случая **EVI** над произвольным полем нулевой характеристики (при этом алгебраическая группа предполагается анизотропной). Эти результаты изложены в Теореме 3.4.1 и в Теореме 4.4.1. Полученные теоремы обобщают классические результаты Ацумы на широкий круг полей. Следует отметить, что работа А.Семенова отличается большой долей элегантности, он избегает существенного объема громоздких вычислений, используя взамен весьма точно и изобретательно подобранные алгебраические объекты и методы. На меня особое впечатление произвела связь с микровесовыми торами и микровесовыми модулями типа E_6 , работа с которыми даже в расщепимом случае требует вычислений с диаграммами Хассе. Здесь же работа с параболиками естественно включается в общую схему рассуждений.

Каждое из симметрических пространств требует своего подхода для исследования геометрии. В доказательстве для случая **EII** используются вычисления в алгебре Альберта и работа геометрического характера с применением фильтрации Меркульева-Черноусова. Случай **EVI** связан с группами типа E_7 . В этом случае доказательство использует понятие сбалансированной симплектической тернарной алгебры, с одной стороны, и тройной системы Ли – с другой. Основную роль при этом играет конструкция Титса-Кантора-Кёхера и рассмотренная Гарibalди идея гифта.

Кроме центральной темы геометрии симметрических пространств, мне также хочется остановиться на главе 2 диссертации. В этой главе доказывается теорема о том, что присоединенная абсолютно простая алгебраическая группа внутреннего типа является группой автоморфизмов соответствующего специального проектора центрально простой алгебры. Эта теорема идеологически стоит в ряду с такими результатами, как теорема Андре Вейля о характеризации присоединенных классических групп в качестве групп автоморфизмов центрально простых алгебр с инволюцией, теорема Гарibalди по отношению к характеризации исключительных групп типа E_7 и, конечно, опубликованная в Анналах теорема Гордеева-Попова. Следует отметить, что Теорема 2.2.5 имеет также связь с теоремой Лихтенштейна, которая по существу определяет уравнения на векторы, лежащие в орбите старшего веса представления абсолютно простой алгебры Ли.

Суммируя все высказанное, диссертация на тему «Геометрия симметрических пространств» соответствует основным требованиям, установленным Приказом от 19.11.2021 № 11181/1 «О порядке присуждения ученых степеней в Санкт-Петербургском государственном университете», соискатель Семенов Андрей Вячеславович несомненно заслуживает присуждения ученой степени кандидата наук по научной специальности 1.1.5 – "Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика".

Евгений Плоткин
Член Диссертационного Совета
Профессор Университета Бар Илан,
Израиль

30.12.2022