

ОТЗЫВ

члена диссертационного совета на диссертацию Семенова Андрея Вячеславовича на тему «Геометрия симметрических пространств», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по научной специальности

1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Представленная диссертация посвящена исследованию алгебраических многообразий над не обязательно алгебраически замкнутыми полями с определенными ограничениями на характеристику поля. Изучаются однородные пространства полупростых линейных алгебраических групп, в первую очередь симметрические пространства простых исключительных групп, а также структуры коммутативных алгебраических моноидов на аффинных пространствах небольшой размерности.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. В первой главе соискатель напоминает основные определения и факты, которые потребуются ему в дальнейшем. Здесь излагаются предварительные сведения об алгебраических группах и их подгруппах (микровесовые торы, параболические подгруппы), алгебрах Ли и операторе Казимира, йордановых алгебрах, алгебрах Альберта и Брауна, структурируемых алгебрах и тройных системах Фрейденталя, сужении Вейля и индексе Дынкина, приводится краткое описание метода спуска Галуа и реализации исключительных групп E_6 и E_7 .

Во второй главе получен один из основных результатов работы. А именно, доказано, что над полем нулевой характеристики присоединенная абсолютно простая алгебраическая группа внутреннего типа может быть реализована как группа автоморфизмов некоторого специального проектора центральной простой алгебры (теорема 2.2.5). Здесь же дано новое доказательство теоремы Лихтенштейна (теорема 2.2.2) о явном виде уравнений, задающих замыкание орбиты старшего вектора в пространстве неприводимого представления абсолютно простой алгебраической группы. После перехода к проективизации пространства представления этот результат позволяет найти явное задание проективных однородных пространств соответствующей абсолютно простой группы.

Дальнейшие результаты диссертации состоят в полном описании конфигураций пар точек и пар прямых на симметрических однородных пространствах типов EIII и EVI с помощью алгебр и подалгебр, в терминах которых можно реализовать соответствующие простые исключительные линейные алгебраические группы и их однородные пространства. Из однородности пространства следует, что все точки на нем равноправны, тогда как пары точек на таком пространстве могут находиться как в общем, так и в специальном положении. Естественно поставить вопрос о том, сколько прямых на симметрическом однородном пространстве проходит через пару точек в общем положении и через пару точек в специальном положении. Ряд результатов в этом направлении был получен в работах К.Ацумы (1985) и Э.Б.Винберга (2005). Среди прочего эти авторы показали, что над полями комплексных и вещественных чисел через две точки общего положения на симметрическом пространстве типа EVIII проходит 135 прямых. Одна из основных целей данной диссертации – обобщить результаты Ацумы и Винберга на случай симметрических пространств над существенно более широким классом полей. Соответствующие результаты изложены в третьей и четвертой главах диссертации, см. теорему 3.4.1 и теорему 4.4.1.

Наконец, пятая глава диссертации посвящена классификации структур коммутативных алгебраических моноидов на аффинных пространствах размерности не выше трех над произвольным полем нулевой характеристики. В работе С.Брагина, Ю.Зайцевой и автора настоящего отзыва (2020) такая классификация была получена над алгебраическими замкнутыми полями нулевой характеристики. Используя спуск Галуа и вычисление групп автоморфизмов построенных в нашей работе моноидов, в диссертации предложено обобщение этих результатов на незамкнутые поля (теорема 5.3.1 и теорема 5.4.3). Важно отметить, что классификация над незамкнутыми полями получается на удивление естественной и обозримой. Особенно красивые ответы получены над полем действительных (следствие 5.4.4) и рациональных (следствие 5.4.5) чисел.

Результаты диссертации относятся к актуальным областям современной математики, они являются новыми, снабжены подробными доказательствами и опубликованы в ведущих российских и международных математических журналах (две работы в *Journal of Algebra* и одна работа в «Алгебре и анализе»). В диссертации использован ряд оригинальных идей и техник, которые могут найти применение при решении и других задач из данной области. Так в заключении к диссертации соискатель приводит список направлений для дальнейшей работы и обобщений полученных результатов.

Особо хочется отметить широчайшую математическую эрудицию диссидентанта. Для получения описанных выше результатов используется множество весьма сложных методов из самых разных областей математики, включая структурную теорию алгебраических групп, теорию групп и алгебр Ли, теорию представлений, ассоциативную и неассоциативную алгебру, язык теории категорий, схемы и функторы, а также другие понятия и техники современной алгебраической геометрии и гомологической алгебры. Успешное применение этих методов демонстрирует, что диссидентант является профессиональным математиком очень высокого уровня.

В то же время у меня есть ряд замечаний к стилю изложения и оформлению диссидентационной работы. На мой взгляд, лаконичное название «Геометрия симметрических пространств» является слишком общим для данной кандидатской диссертации. Фраза в начале третьей главы «Цель этой главы состоит в том, чтобы вычислить и полностью описать геометрию симметрического пространства типа ЕШ...» невольно приводит к риторическому вопросу о том, что есть геометрия и как ее можно вычислить.

Введение к работе написано слишком технично, и едва ли математик, не являющийся специалистом в данной области, сможет на основе введения понять, в чем состоят результаты работы. Следует либо избегать использования во введении узкоспециальных терминов, либо объяснить смысл этих терминов. Первая глава, посвященная основным определениям и фактам, составляет по объему около четверти всей работы, но при этом определение симметрического пространства впервые появляется лишь в начале третьей главы (определение 3.1.2). Более того, ключевым для диссидентации объектам – симметрическим пространствам типов ЕШ и ЕVI – посвящены отдельные разделы, см. раздел 3.2 и раздел 4.2, соответственно. Однако ни в этих разделах, ни перед ними найти явные определения соответствующих симметрических пространств мне не удалось.

Важно, чтобы формулировки основных результатов были максимально четкими и самодостаточными, т.е. они должны включать все необходимые обозначения и предположения, или эти обозначения и предположения были быть явно сформулированы перед формулировками результатов. На мой взгляд, формулировка, например, теоремы 4.4.1 далека от этого требования.

Почему в первой части формулировки теоремы 2.2.2 речь идет об абсолютно простой алгебре Ли, а далее речь идет о группе? Зачем была нужна алгебра? Почему во введении в качестве положений, выносимых на защиту, указаны пять утверждений (стр. 13), а в заключении (стр. 81) их уже четыре? На странице 30 в строке 10 написано «... некоторое представление V алгебры Ли...». Речь идет о пространстве представления?

Термин «аффинный алгебраический монOID», использованный в формулировке последнего основного положения, выносимого на защиту, является неудачным – аффинное пространство автоматически является аффинным многообразием. При этом здесь не отражено, что получена классификация коммутативных алгебраических моноидов. Также неудачными представляются термины «тройной продукт Фрейденталя» (определение 1.6.11) и «кватернионный гифт» (раздел 4.1.2). Периодически возникает конфликт обозначений. Например, буква В обозначает и подгруппу Бореля (раздел 1.4), и алгебру Брауна (раздел 1.8).

Текст диссертации содержит определенное число опечаток. К сожалению, они есть даже в формулировках основных положений на стр. 13 – «что что» в первом положении и «в терминах в терминах» в четвертом положении. Отметим также «на на» в определении 1.2.5, «замыкание оля» во второй строке раздела 1.1, «некоторый алгеброй» в середине страницы 25, «посчитать» сразу после замечания 12, «специальному» на странице 49, и ряд других.

При этом указанные недочеты изложения и обнаруженные опечатки не влияют на математическое содержание и полноту доказательств полученных результатов.

Диссертация Семенова Андрея Вячеславовича на тему «Геометрия симметрических пространств» соответствует основным требованиям, установленным Приказом от 19.11.2021 № 11181/1 «О порядке присуждения ученых степеней в Санкт-Петербургском государственном университете», и соискатель Семенов Андрей Вячеславович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по научной специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика. Нарушения пунктов 9 и 11 указанного Порядка в диссертации не установлены.

Член диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, профессор,
декан факультета компьютерных наук
Национального исследовательского университета «Высшая Школа Экономики»



Аржанцев Иван Владимирович

Подпись за
Прокопенко
Спец. по перс.
27.12.2022.