ОТЗЫВ

научного оппонента на диссертацию

Гвоздевского Павла Борисовича

"Надгруппы подсистемных подгрупп"

представленную на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

по специальности 1.1.5 –

"Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика"

Представленная работа посвящена важной, интересной и актуальной теме изучения структурной теории групп Шевалле над кольцами. Более точно, в диссертации изучаются надгруппы больших подгрупп групп Шевалле над кольцами, принадлежащие Ашбахеровским классам C_1 и C_2.

Такие большие подгруппы носят название subsystem subgroups - подсистемные подгруппы. Они определяются вложениями систем корней, а именно пусть $\Delta \subset \Phi$ вложение систем корней. Это вложение определяет регулярное вложение групп Шевалле $G(\Delta, R)$ в $G(\Phi, R)$ над произвольным коммутативным кольцом R с 1. Нас интересует описание надгрупп $E(\Delta, R)$ в $G(\Phi, R)$.

Начнем с нескольких общих слов по поводу этой задачи.Основой всего служит известная классификация Ашбахера. Она утверждает, что максимальная подгруппа конечной классической группы попадает либо в один из 8 явно определенных классов $C_1 - C_8$ больших подгрупп, либо в класс S почти простых групп в неприводимом представлении (Invent.Math, 1984). В этих терминах позднее была получена классификация максимальных подгрупп в группах типа Ли над конечными полями (Ашбахер, Либек, Зейтц и др.), а затем и над произвольным алгебраически замкнутым полем. Имеется множество обобщений на произвольные поля, на полулокальные кольца, на поля специального типа, на арифметические кольца, и так далее. Н.А. Вавилов в 80-х предложил рассматривать классы Ашбашера для произвольных групп Шевалле над кольцами. Это было связано с описанием определенных подгрупп классических групп в работах Боревича- Вавилова и с понятием сети идеалов, возникшим еще в 76-м году в работе З.И.Боревича.

Среди всех классов Ашбахера надгруппы подсистемных подгрупп играют особую роль. Фактически, с них все начиналось, и к 90-м годам благодаря работам Н.А.Вавилова ситуация в классических группах над кольцами полностью прояснилась. При некоторых ограничениях можно утвержадать что для произвольной надгруппы H существует сеть идеалов σ такая, что имеется сэндвич $E(\sigma) \leq H \leq N(\sigma)$. В итоге, в работе Степанова-Вавилова (2008) была сформулирована следующая проблема (Проблема 7)

Problem 1. Описать подгруппы исключительных групп $G(\Phi, R)$, содержащие регулярно вложенную подгруппу $E(\Delta, R)$, $\Delta \subset \Phi$, в предположении, что Δ достаточно велика.

Напомним, что подсистемы неприводимых систем корней классифицированы в классических работах Бореля, де Зибенталя и Дынкина. Их таблицы и нормализаторы в группе Вейля приведены у Р.Картера. В важной работе Вавилова-Щеголева (2012) указаны пары (Δ, Σ), для которых описание подсистемных надгрупп представляется реалистичной задачей, намечены естественные ограничения на системы корней и на кольцо, и в явном виде сформулированы проблемы. Фактически, в представленной диссертации реализуется основная часть этой программы и универсальным образом решаются многие из поставленных в 2012 году трех десятков открытых проблем. Нет никакого сомнения, что это является существенным вкладом в развитие структурной теории групп Шевалле над кольцами.

Работа состоит из трех глав. Первая глава посвящена важному определению тандема и развитию метода вычислений параллельно в группе Шевалле и в соответствующей алгебре Ли. Эта идея дает возможность развить единообразный подход к основной проблеме. Во второй главе доказывается центральный результат об описании надгрупп подсистемных подгрупп для групп с простыми связями, то есть для случаев ADE. Третья глава описывает структуры сэндвичей заданных сетями идеалов.

Несомненной кульминацией работы является следующая принципиальная теорема:

Theorem 2. *Пусть Φ система корней типа ADE. Пусть $\Delta \leq \Phi$ удовлетворяет условию $(*)$. Пусть R коммутативное кольцо и выполнены условия $(**)$ или $(***)$. Тогда для произвольной надгруппы $E(\Delta, R) \leq H \leq G(\Phi, R)$ существует уровень σ такой, что имеется сэндвич $E(\sigma) \leq H \leq S(\sigma)$.*

Здесь подгруппа $S(\sigma)$ очень близка к нормализатору $E(\sigma)$, "уровень"заменяет понятие уровня введенное в работе Вавилова-Щеголова (2012), а условия со звездочками - некоторые технические условия, которые диктуются логикой задачи. В любом случае эта теорема дает ответ сразу на все 29 проблем сформулированных десять лет назад в работе Вавилова-Щеголева!

Отметим, что частным случаем вводимого понятия уровня является более простое понятие сети идеалов. В том случае когда уровни задаются сетями идеалов можно описать структуру сэндвича, а именно можно описать все надгруппы между $E(\sigma)$ и $S(\sigma)$. Доказывается, что естественно определяемая элементарная сетевая подгруппа является нормальным делителем в $S(\sigma)$. Затем доказываются несколько теорем описывающих K_1 аналог для сетевых подгрупп.

Напомним, что в приведенной выше терминологии фигурируют так называемые большие подгруппы. Что это такое? В случае подсистемных подгрупп это подгруппы в которых решетка надрупп допускает разумное, стандартное в определенном смысле описание. В этом смысле, структура сэндвича для решетки надгрупп для достаточно большой подсистемной подгруппы и есть стандартное описание. Автор уточняет это понятие и распространяет его на более широкий круг вложений, при этом сэндвичи не обязательно базирутся на сетях идеалов, а на более хитром об'екте, называемом уровнем.

Следует сказать что на пути доказательства основных теорем автор преодолевает массу технических проблем, обходит множество подводных камней, вводит целую систему новых понятий. Другими словами, за формульной лапидарностью полученных результатов кроется виртуозное владение техникой вычислений в группах Шевалле и широкий спектр идей позволяющих сохранить ожидаемый стандарт результатов за счет умелых ограничений на кольцо, на вложение систем корней, и на обобщение базисных определений.

Очевидно, что в перспективе данной работы лежат результаты для произвольных вложений систем корней, а именно те вложения с кратными связями, которые поддаются контролю.

Суммируя все вышесказанное, диссертация на тему «Надгруппы подсистемных подгрупп» соответствует основным требованиям, установленным Приказом от 19.11.2021 № 11181/1 «О порядке присуждения ученых степеней в Санкт-Петербургском государственном университете», соискатель Гвоздевский Павел Борисович несомненно заслуживает присуждения ученой степени кандидата наук по научной специальности 1.1.5 – "Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика".

Евгений Плоткин
Член Диссертационного Совета
Профессор Университета Бар Илан,
Израиль

20.03.2023