

ОТЗЫВ

члена диссертационного совета Мельникова Александра Викторовича на диссертацию Смирнова Сергея Николаевича на тему «Гарантированный детерминистский подход к математическому моделированию финансовых рынков», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Актуальность темы диссертации Смирнова С.Н. подтверждается растущим интересом к направлению математических финансов, называемому робастным. Оно стало интенсивно развиваться в последнее время после работы Бушара и Нютца 2015 года (в диссертации — ссылка номер 105) и приобрело в данной диссертации теоретико-игровую интерпретацию. Предложенный автором подход содержит введение смешанных стратегий рынка в динамической игре хеджера — продавца опциона против рынка. Это позволяет использовать игровое равновесие, справедливое при весьма общих условиях, для получения результатов, схожих со свойством дуальности при стандартной вероятностной постановке задачи ценообразования и хеджирования обязательств по проданному опциону.

В развиваемом автором гарантированном детерминистском подходе (сокращено ГДП) используется нестандартное описание поведения рынка рискованных активов, изначально не опирающееся на вероятно-статистические методы. Динамика рынка с дискретным временем задается посредством описания неопределенности в виде априорно заданного компактнозначного отображения: вектор приращений (дисконтированных) цен рискованных активов лежит в компакте, зависящем от предыстории цен. Торговые ограничения задаются посредством многозначного отображения: вектор, описывающий структуру портфеля (количества рискованных активов) должен лежать в множестве, зависящем от предыстории цен. При этом нулевой вектор, когда все средства инвестированы в безрисковый актив, лежит в этом множестве. Основная проблематика в диссертации связывается с суперхеджированием опционов американского типа, который задается динамическими функциями выплат вплоть до исполнения опциона (см. 11 из 12 главы). Отметим, опционы европейского типа получаются как частный случай, а исследование опционов “Rainbow”, т.е. когда функции выплат зависят от нескольких рискованных активов, приводит к эффектам, не проявляющимся в одномерном случае.

Подход автора состоит в систематическом использовании уравнений Беллмана-Айзека для цены суперхеджирования (в диссертации — целевой функции), которые справедливы при более общих предположениях, чем при классической вероятностной постановке задачи. По существу, не предполагается также условий измеримости и безарбитражности рынка, что обычно определенным образом формализуется для получения экономически осмысленных результатов конкретных моделей.

Понятие безарбитражности допускает много формализаций, причем далеко не очевидно, какая именно является правильной для выбранной постановки задачи. В диссертации рассматриваются три вида безарбитражности — отсутствие арбитражных возможностей

(NDAO), отсутствие гарантированного арбитража (NDSA) и отсутствие гарантированного арбитража с неограниченной прибылью (NDSAUP). Условие NDAO влечет условие NDSA, которое, в свою очередь, влечет NDSAUP. Для указанных понятий безарбитражности установлены геометрические критерии, в терминах выпуклой оболочки множеств, где лежат приращения цен и множеств, определяемыми торговыми ограничениями (полярный конус или барьерный конус). Из экономических соображений автором предложен принцип неопределенности (монотонности) безарбитражности, который позволяет в рамках рассматриваемого детерминистского подхода производить выбор того или иного вида безарбитражности: условия NDSA и NDSAUP удовлетворяют этому принципу, а условие NDAO, характерное для вероятностной постановки задачи — нет. По существу, данное обстоятельство разграничивает эти два подхода, детерминистский и вероятностный.

К важным новым понятиям, введенным и исследованным в диссертации, относится робастность безарбитражности для характеристики структурной устойчивости модели. По своему экономическому смыслу торговые ограничения задаются точно, а описание динамики цен носит приближенный характер. Поэтому возникает вопрос о сохранении того или иного свойства безарбитражности при малых возмущениях компактов, в которых лежат приращения цен. Малость возмущений при этом формализуется при помощи метрики Помпею-Хаусдорфа. Соответствующие робастные виды безарбитражности обозначаются в диссертации соответственно через RNDAO, RNDSA и RNDSAUP и для них найдены геометрические критерии.

Следующим новым направлением исследований, предложенным в диссертации является анализ свойств “гладкости” целевых функций (т.е. решений уравнений Беллмана-Айзекса), таких как полунепрерывность, непрерывность и липшицевость. Наиболее важным результатом является теорема о достаточных условиях непрерывности целевой функции. Получена оценка модуля непрерывности целевых функций в виде рекуррентных неравенств, что используется далее для оценки точности аппроксимации модели при численном решении задачи суперхеджирования. При этом с помощью построения контрпримера устанавливается важность структурной устойчивости модели для непрерывности целевых функций.

Введение смешанного расширения — класса смешанных стратегий рынка, удовлетворяющего двум естественным свойствам: содержащего чистые стратегии (в виде мер Дирака) и с носителями, не выходящими за пределы известной информации о поведении цен (задающимися упомянутыми выше многозначными отображениями), позволяет перейти к уравнениям Беллмана-Айзекса со смешанными стратегиями рынка. При этом достигается гибкая формулировка достаточных условий игрового равновесия, так как в игровом равновесии в играх с нулевой суммой (теорема Кнезера 1952 года, ссылка номер 183) обычно имеется асимметрия относительно условий, касающихся двух игроков. Серьезным достоинством ГДП является то обстоятельство, что наиболее неблагоприятные смешанные стратегии рынка достигаются при весьма общих условиях.

В случае игрового равновесия задача ценообразования отделяется от задачи хеджирования и состоит в решении уравнений Беллмана. Автором предлагается пошаговый двухэтапный метод решения этих уравнений. На первом этапе торговые ограничения не используются, а задача сводится к построению вогнутой оболочки функции. Это целесообразно, когда исследуется поведение целевых функций в зависимости от выбора различных торговых ограничений. Второй этап состоит в максимизации вогнутой функции на выпуклом множестве. При этом, простые рассуждения приводят к однозначному выводу, что именно условие NDSAUP является правильной формализацией безарбитражности в контексте ГДП. Специфика поведения наиболее неблагоприятных смешанных стратегий рынка

может быть объяснена при помощи классической проблемы моментов. Оказывается, достаточно рассматривать распределения, сосредоточенные в конечном числе точек, не превосходящего количества рискованных и безрисковых активов. Для вероятностной постановки в книге Фёлмера и Шида (ссылка номер 15) для объяснения этого факта привлекается иной математический инструментарий, называемый границей Шоке.

Автором исследовано поведение оптимальных (наиболее неблагоприятных) стратегий рынка. При тех предположениях, которые обеспечивают непрерывность целевых функций, установлена полунепрерывность сверху многозначных отображений, ставящих в соответствие предыстории цен класс оптимальных смешанных стратегий, или же оптимальных, сосредоточенные в конечном числе точек, не превосходящего общего количества активов. При более общих предположениях доказано существование измеримых селекторов, тем самым наличие переходного ядра с мерами из класса оптимальных смешанных стратегий, сосредоточенных в конечном числе точек, не превосходящего общего количества активов. В рамках обобщенной модели с выпуклыми функциями выплат целевые функции оказываются выпуклыми и существует оптимальная смешанная стратегия, сосредоточенная в крайних точках выпуклых компактов, описывающих динамику цен.

Для вероятностного описания динамики цен разумно считать, исходя из экономических соображений, что условные распределения цен при известной предыстории должны зависеть от этой предыстории непрерывным образом. При формализации модели, опирающейся на конструкцию Ионеску Тулча и использующую слабую топологию в пространстве мер, такое свойство переходных ядер называют феллеровским. Для задачи суперхеджирования при сопоставлении ГДП и вероятностного подхода, необходимо использовать носители условных распределений цен при известной предыстории цен. Возникает вопрос, при каких условиях на многозначные отображения, описывающие динамику цен в рамках ГДП допускают существование феллеровских переходных ядер с такими же носителями условных распределений цен при заданной предыстории цен. Найдено необходимое и достаточное условие, заключающееся в полунепрерывности снизу соответствующих многозначных отображений.

Для случая отсутствия торговых ограничений исследован вопрос о соотношении цены суперхеджирования для ГДП и вероятностного подхода при условии сопоставимости моделей, т.е. когда носители условных распределений цен совпадают с заданными компактозначными отображениями, задающими детерминистскую динамику цен. При весьма общих условиях вероятностная цена суперхеджирования не превосходит детерминистскую почти наверное, причем имеются простые примеры, где неравенство строгое. Доказано, что при тех предположениях, которые обеспечивают непрерывность целевых функций, вероятностная цена суперхеджирования совпадает с детерминистской почти наверное. Автором также найдены конструктивные оценки близости вероятностных моделей для различных вероятностных метрик, включая метрику Прохорова, гарантирующие структурную устойчивость, т.е. робастное условие отсутствия арбитражных возможностей RNDAO.

Еще одним важным вопросом, решаемым в диссертации, является построение численных методов, предназначенных для решения задачи суперхеджирования, допускающих прозрачную интерпретацию и позволяющих получить гарантированную оценку точности приближённого решения. С этой целью автором введен порог структурной устойчивости, описывающий максимальную величину возмущения модели (в метрике Помпею-Хаусдорфа), гарантированно не приводящий к потере безарбитражности. Получено геометрическое представление этой величины и ряд полезных неравенств, которые применяются далее при оценке погрешности аппроксимации модели. Эта погрешность

конструктивно оценивается для широкого класса моделей — когда торговые ограничения задаются множествами, представимыми в виде разложения Моцкина, т.е. представимых в виде суммы Минковского замкнутого выпуклого конуса и компактного множества. При этом структурная устойчивость модели является существенным условием для равномерной (по предыстории цен) аппроксимации — построен соответствующий контрпример. Приводить ряд соображений, касающихся построения адекватных способов построения численного решения задачи суперхеджирования. Предлагается в качестве аппроксимирующей модели выбрать компакты, описывающие поведение цен в виде конечных множеств — подмножеств достаточно плотной решетки, близких к исходным в метрике Помпею-Хаусдорфа. При этом задача возникающая на первом из двух этапов для каждого шага решения уравнений Беллмана состоит в численном построении вогнутой оболочки целевой функции из предыдущей шага. Эта задача сводится к построению выпуклой оболочки некоторого конечного множества, что хорошо изучено в вычислительной геометрии. Для решения этой задачи выбран алгоритм Quickhull, хорошо себя зарекомендовавший для решения задач малой размерности и обычно используемый на практике для опционов “Rainbow” для небольшого числа базовых активов. На этой основе построен комплекс программ и проведены численные эксперименты для специально подобранных модельных примеров, показывающих эффективность предложенных численных методов.

В диссертации приведено также исследование, касающееся качественных свойств решения задачи суперхеджирования для простейшего опциона с разрывной функцией выплат — бинарного опциона европейского стиля, для случая отсутствия торговых ограничений. Целевая функция даже в таком случае оказывается достаточно сложной. Показано, что для опциона “call” целевая функция монотонно неубывает, является кусочно-выпуклой, кусочно-рациональной также непрерывной всюду, кроме одной точки. Это позволило построить “полуявное” решение и на этой основе предложить численный алгоритм, использующий символьные вычисления.

В последней главе диссертации рассматривается еще одна важная для практики задача — маржирование портфеля опционов и фьючерсов на срочном рынке. Построение метода расчета требований к уровню обеспечения таких портфелей (определения депозитной маржи), основанного как на учете риска портфеля, так и стратегии дефолт-менеджмента (урегулирования дефицита обеспечения) оказывается возможным на основе ГДП с использованием стратегии фьючерсной коррекции. Такая возможность была обоснована Смирновым С.Н. и соавторами в изобретении, заявленном в 2002 г. и зарегистрированном в 2004 г. (в диссертации — ссылка номер 55). Идея изобретения проиллюстрирована на конкретной реализации, представленной в диссертации. Исследованы качественные свойства соответствующих уравнений Беллмана-Айзекса, такие как свойство субаддитивности депозитной маржи, получены оценки констант Липшица, позволяющие решать задачу с гарантированной точностью. Создан программный комплекс и проведены численные эксперименты, позволяющие проанализировать свойства решений, важные с практической точки зрения.

Отметим следующие замечания, не являющиеся принципиальными и не влияющие на общее позитивное впечатление от работы.

1. Несложный анализ теоремы о достаточных условиях справедливости уравнений Беллмана-Айзекса (Теорема 1.2.1) позволяет заключить, что, на самом деле, неотрицательность цен в доказательстве этого утверждения не используется.

2. В диссертации имеются опечатки. Например, на стр. 261 в тексте на шестой строке используется знак интеграла вместо принятого обозначения внутренней множества;

аналогичная опечатка встречается на стр. 262. На стр 305 имеется некорректная ссылка во втором абзаце снизу. По смыслу текста, здесь должна быть аббревиатура RNDSA.

Достоверность научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, не вызывает сомнений, о чем свидетельствуют многочисленные выступления автора на российских и международных конференциях и семинарах, а также публикации в рецензируемых научных журналах, цитируемых в базах данных Scopus и WoS. Их обоснованность обеспечена строгими математическими доказательствами всех утверждений и успешными численными экспериментами на основе разработанных комплексов программ. Можно констатировать, что Смирновым С. Н. разработан оригинальный подход, названный в диссертации гарантированным детерминистским, позволивший создать новые математические методы моделирования финансовых рынков, ориентированные на анализ качественных свойств модели и численное решение важнейшей задачи современных математических финансов — проблемы суперхеджирования. Кроме того, этот подход и соответствующие математические методы также применимы для решения важной прикладной задачи — маржирования портфелей опционов и фьючерсов на срочном рынке, необходимой для построения системы управления рисками центрального контрагента. Разработаны, обоснованы и протестированы на модельных примерах новые эффективные вычислительные методы решения задач суперхеджирования и маржирования, позволяющие гарантированно оценивать точность решения. Вычислительные эксперименты проводились при помощи комплекса проблемно-ориентированных программ, в котором реализованы предложенные эффективные численные методы и алгоритмы решения задачи суперхеджирования. Таким образом, на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение.

Диссертация Смирнова Сергея Николаевича на тему: «Гарантированный детерминистский подход к математическому моделированию финансовых рынков» соответствует основным требованиям, установленным Приказом от 19.11.2021 № 11181/1 «О порядке присуждения ученых степеней в Санкт-Петербургском государственном университете», соискатель Смирнов Сергей Николаевич заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Нарушения пунктов 9 и 11 указанного Порядка в диссертации не обнаружены.

Член диссертационного совета,
Доктор физико-математических наук,
Профессор Университета Альверты


Мельников А.В.

03 июня 2023 года