ОТЗЫВ
председателя диссертационного совета Малафеева Олега Алексеевича
на диссертацию Смирнова Сергея Николаевича
на тему «Гарантированный детерминистский подход
к математическому моделированию финансовых рынков»,
представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук
по специальности 1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ.

Тема диссертации является актуальной: основная задача, рассматриваемая в настоящей работе — задача суперхеджирования (суперрепликации), относится к одному из центральных вопросов современных математических финансов. Первый численный метод решения задачи суперхеджирования, позволяющий оценивать погрешность приближенного решения, был предложен автором диссертации.

В диссертации развивается гарантированный детерминистский подход построения моделей рынка, альтернативный вероятностному. Автор ввел ряд новых понятий и принципов, формализовал и исследовал соответствующие свойства математических моделей. Полученные результаты обоснованы, сформулированы в виде теорем, предложений, лемм, замечаний и строго доказаны. Достоверность их подтверждается как публикациями автора, опубликованными в 21 статье и в одном изобретении (из них 13 опубликованы в рецензируемых изданиях, цитируемых в базах данных Scopus, WoS и RSCI), так и выступлениями на международных и российских конференциях и семинарах. В соавторстве выполнено 4 статьи и изобретение, результаты которых получены при определяющем участии автора диссертации; вклад соавторов четко описан во введении.

В контексте рассматриваемых в диссертации задач, под хеджированием понимаются действия продавца опциона, получившего премию и принявшего на себя обязательства по определяемым контрактом выплатам, величина которых в начальный момент неизвестна и определяется эволюцией цен в будущем. Для того, чтобы ограничить возникшие риски и исполнить свои обязательства, продавец опциона (называемый в диссертации «хеджером») проводит целенаправленные операции на рынке с момента продажи опциона до его экспирации. Суперхеджирование — разновидность хеджирования, когда происходит гарантированное покрытие обязательств продавца опциона.

Задача суперхеджирования в диссертации рассматривается для американского опциона — когда его владелец имеет право исполнения в любой момент вплоть до экспирации (окончания срока действия) контракта. Конкретный опцион задается при помощи функций (возможных) выплат, зависящих от истории цен, для каждого момента времени вплоть до экспирации.

В главе 1 представлена математическая модель финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюцией цен и дискретным временем, с одним безрисковым активом и несколькими рисковыми. Неопределенность дисконтированных цен рисковых активов описывается при помощи априорной информации о возможных приращениях цен. Предположение о характере доступной информации, описывающей поведение цен, состоит в том, что векторы приращений цен лежат в заданных замкнутых множествах , зависящих от предыстории цен. Тем самым динамика рынка задается при помощи многозначных отображений. Торговые ограничения, описывающие допустимую структуру портфеля, касаются рисковых активов, и также описываются при помощи многозначных отображений.

Автор называет целевой функцией в заданный момент времени числовую функцию с аргументом, представляющим собой (известную к этому моменту) предысторию цен, значение которой — точная нижняя грань такой стоимости портфеля «хеджера» в этот момент времени, что имеется допустимая хеджирующая стратегия, которая гарантировано обеспечивает исполнение текущих и будущих обязательств, возникающих в отношении возможных выплат по американскому опциону.

Отличительной чертой гарантированного детерминистского подхода является теоретико-игровая интерпретация. Уравнения Беллмана–Айзекса для функции Беллмана – Айзекса выводятся при помощи стандартных рассуждений динамического программирования.

В конце главы обсуждается, как постановка задачи динамического программирования может быть модифицирована в случае торговых ограничений на безрисковый актив, а также в случае ограничений, возникающих при маржинальной торговле рисковыми активами (т. е. с ограничениями на долю заемных бумаг в портфеле).

Глава 2 посвящена формализации и анализу свойств безарбитражности в рамках рассматриваемой математической модели финансового рынка.

Безарбитражность означает отсутствие на финансовом рынке арбитража, понимаемого в смысле, требующем уточнения. В диссертации рассматриваются три способа формализации безарбитражности — условие отсутствия арбитражных возможностей (NDAO), являющееся общепринятым для моделей стохастической динамики рыночных цен и две новых формализации безарбитражности — условие отсутствия гарантированного арбитража (NDSA), оно слабее, чем NDAO и условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью (NDSAUP),оно слабее, чем NDSA. Установлены критерии безарбитражности геометрического характера для условия NDSA и NDSAUP

Из экономических соображений автором предложен принцип неопределенности в отношении безарбитражности: при фиксированных торговых ограничениях, если для исходной модели выполняется условие безарбитражности, то оно же должно выполняться и для модели с более бедной информацией о динамике цен. В рамках развиваемого автором подхода, принцип неопределенности в отношении безарбитражности выполняется для NDSA и NDSAUP, однако, вообще говоря, не выполняется для NDAO без дополнительных предположений.

Одним из важных понятий, введенных в диссертации, является структурная устойчивость модели рынка. Торговые ограничения, задаваемые многозначными отображениями, известны точно; в противоположность этому, описание неопределенности движения цен, на практике носит приблизительный характер. Корректность постановки задачи поэтому связана со структурной устойчивостью модели : фундаментальные свойства модели, в данном случае — та или иная формализация безарбитражности рынка, должны сохраняться при достаточно малых возмущениях компактов, в которых лежат приращения цен. Близость этих компактов понимается в смысле хаусдорфовой метрики. Установлены различные геометрические критерии для грубых условий безарбитражности.

В главе 3 изучаются свойства полунепрерывности, непрерывности и липшицевости решений уравнений Беллмана–Айзекса, которые определяются соответствующими свойствами полунепрерывности, непрерывности и липшицевости функций выплат, а также многозначных отображений, задающих соответственно априорную информацию о приращениях цен и торговые ограничения.

К полезным результатам, можно отнести условия компактности множества возможных траекторий (достаточно полунепрерывности сверху компактозначных отображений, описывающих динамику цен). Поэтому если, кроме того, функции выплат полунепрерывны сверху, то они ограничены сверху на множестве возможных траекторий (что используется при выводе уравнения Беллмана–Айзекса). Если, в дополнение к этому, многозначные отображения, описывающие торговые ограничения, полунепрерывны снизу, то функции Беллмана –Айзекса функции полунепрерывны сверху.

Основным результатом главы является теорема об условиях непрерывности функций Беллмана –Айзекса: достаточно непрерывности функций выплат; непрерывности компактозначных отображений, описывающих динамику цен; полунепрерывности снизу и замкнутости многозначных отображений, описывающих торговые ограничения, а также выполнения грубого условия отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью (RNDSAUP). Построен пример, показывающий существенность условия структурной устойчивости для непрерывности функций Беллмана –Айзекса.

Глава 4 развивает тему главы 3 и уточняет ее посредством оценки модуля непрерывности целевых функций в форме рекуррентных неравенств, справедливых при тех же условиях, что и для основной теоремы главы 3 (о непрерывности целевых функций); полученный результат дает альтернативное конструктивного характера доказательство этой теоремы. Рекуррентные неравенства приобретают особо простую форму в случае липшицевой непрерывности компактозначных отображений, описывающих динамику цен, а также липшицевости функций выплат по опциону.

В главе 5 в уравнения Беллмана–Айзекса вводятся смешанные стратегии рынка вместо чистых стратегий. Такой подход является новым. Оказывается, что класс вероятностей, описывающих поведение рынка, возникает в рамках постановки задачи суперхеджирования естественным образом, в виде определенного класса смешанных стратегий рынка. В качестве такого класса выбрано смешанное расширение класса стратегий рынка: с одной стороны, носители распределений приращений цен должны содержаться в компактах, описывающих динамику цен в исходной модели, а с другой стороны, меры Дирака (сосредоточенные в одной точке) должны входить в этот класс — они могут быть отождествлены с чистыми стратегиями..

На каждом шаге, при заданной предыстории цен, возникает игра с нулевой суммой: один игрок (хеджер) стремится минимизировать резервы на покрытие возможных выплат в будущем по взятому на себя обусловленному обязательству по проданному опциону, выбирая чистую допустимую стратегию, в то время как другой игрок (рынок) выбирает наиболее неблагоприятный для хеджера сценарий в виде смешанной стратегии (условного распределения приращений цен).

Интерес к существованию равновесия объясняется существенным упрощением задачи суперхеджирования: в этом случае задачу ценообразования удается отделить от задачи хеджирования — стратегии хеджера более не фигурируют в уравнениях для функций Беллмана -Айзекса, которые теперь естественно называть уравнениями Беллмана. Дополнительно предполагая выпуклость смешанного расширения класса стратегий рынка, представлено несколько результатов, касающихся достаточных условий для существования равновесия в игре, получающихся использованием классической теоремы Кнезера.

Глава 6 посвящена формализации свойства реалистичности модели финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюцией цен и его критерию.

Реалистичными стохастическими сценариями поведения рынка предлагается считать распределения стохастического процесса с дискретным временем, описывающего эволюцию цен, для которых условные распределения текущей цены непрерывно (в слабой топологии) зависят от предыстории цен. Другими словами, для стохастической модели динамики цен, для каждого момента времени, переходные ядра, отвечающие условным распределениям цены при известной предыстории цен, обладают феллеровским свойством.

В контексте развиваемого автором детерминистского подхода предложена следующая формализация реалистичности модели. Модель финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюцией цен, задаваемая многозначными отображениями с замкнутыми значениями описывающими возможные значения цены в текущий момент времени при известной предыстории цен, считается реалистичной, если найдутся смешанные стратегии с феллеровскими переходными ядрами, носители которых совпадают с соответствующими многозначными отображениями, описывающими детерминистскую динамику цен.

Основным результатом данной главы является теорема, устанавливающая, что для реалистичности модели финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюцией цен необходимо и достаточно, чтобы многозначные отображения, описывающие детерминистскую динамику цен, были полунепрерывны снизу.

В главе 7 предлагается двухэтапный метод решения уравнений Беллмана для рассматриваемых моделей).

Если в модели имеет место гарантированный арбитраж с неограниченной прибылью, то хеджирование обусловленного обязательства по проданному опциону теряет экономический смысл, а рациональное поведение хеджера состоит в реализации арбитража. Поэтому, если имеет место равновесие, достаточно рассмотреть случай отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью (NDSAUP).

Для каждого временного шага последовательно решается в обратном времени задача нахождения функции Беллмана –Айзекса. Для фиксированной предыстории решение задачи разбивается на два этапа

Этап 1. Решается задача условной оптимизации: при дополнительном ограничении — заданном значении барицентра распределения приращений цен для стратегии рынка из смешанного расширения (для которого имеет место теоретико-игровое равновесие), максимизируется интеграл от целевой функции на текущем шаге, т. е. находится решение проблемы моментов специального вида, что равносильно нахождению вогнутой оболочки функции Беллмана–Айзекса на текущем шаге. Заданное значение барицентра варьируется по всей выпуклой оболочке компакта, в котором лежат приращения цен.

Этап 2. Решается задача (безусловной) максимизации по переменной, равной барицентру, лежащему в выпуклой оболочке компакта (в котором лежат приращения цен), для числовой функции, равной разности вогнутой оболочки целевой функции на текущем шаге (полученной на первом этапе) и опорной функции множества, описывающего торговые ограничения на текущем шаге; эта функция является вогнутой.

Существование решения гарантируется выполнением условия отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью (NDSAUP). Из общей теории, относящейся к проблеме моментов, вытекает, что решение задачи достаточно искать в классе распределений, сосредоточенных не более чем в конечным числе точек, равном общему количеству активов (число рисковых активов плюс один безрисковый).

В главе 8 изучаются свойства многозначных отображений, ставящих в соответствие предыстории цен класс оптимальных смешанных стратегий рынка

При условиях, гарантирующих непрерывность целевых функций, получены условия полунепрерывности сверху этих многозначных отображений, а также многозначных отображений, ставящих в соответствие предыстории цен класс оптимальных смешанных стратегий рынка, сосредоточенных не более чем в конечным числе точек, равном общему количеству активов.

При более общих условиях получена теорема о седловой точке и существовании переходного ядра — измеримого по Борелю селектора для многозначного отображения, с аргументом из множества возможных траекторий цен и со значениями, равными соответствующему классу оптимальных смешанных стратегий рынка, сосредоточенных не более чем в конечным числе точек, равном общему количеству активов, — что является основным результатом главы.

В главе 9 исследуется соотношение детерминистской и вероятностной постановки задачи суперхеджирования при отсутствии торговых ограничений, роль структурной устойчивости, а также сохранение свойства структурной устойчивости для близких вероятностных моделей.

Рассматриваются такие вероятностные модели, для которых носители условных распределений приращений цен совпадают с заданными многозначными отображениями, возникающими при описании динамики цен в рамках детерминистской постановки задачи. Показано, что при выполнении условия отсутствия арбитражных возможностей и весьма общих условиях измеримости целевых функции для детерминистской постановки задачи, решение задачи ценообразования для вероятностной постановки задачи суперхеджирования не превосходит почти наверное решения соответствующей задачи для детерминистской постановки задачи.

Основным результатом данной главы является теорема о совпадении решений задачи суперхеджирования для детерминистской и вероятностной постановки задачи при условиях, гарантирующих непрерывность целевых функций Беллмана –Айзекса в частном случае отсутствия торговых ограничений, т.е. если выполнено грубое условие отсутствия арбитражных возможностей RNDAO, функции выплат непрерывны, компактозначные отображения, задающие динамику, непрерывны в хаусдорфовой метрике Кроме того, в этой главе устанавливается для случая отсутствия торговых ограничений, на каком расстоянии между условными распределениями цен сохраняется структурная устойчивость (грубое условие отсутствия арбитражных возможностей).

Глава 10 является центральной в диссертации — все ее результаты связаны с численным решением задачи с заданной оценкой точности. Определяется порог структурной устойчивости, изучается чувствительность модели к малым возмущениям компактов, описывающих неопределенность приращений цен рисковых активов. Обосновывается выбор адекватных численных методов и описывается численный эксперимент на модельных примерах.

В условиях безарбитражности фигурирует всегда выпуклая оболочка компактов, описывающих динамику цен. Поэтому для описания близости компактов разумно использовать полуметрику на классе непустых компактных подмножеств, равную расстоянию в хаусдорфовой метрике между выпуклыми оболочками этих компактов. В предположении, что для исходной модели выполняется грубое условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью (RNDSAUP), вводится порог структурной устойчивости модели в заданный момент времени, при известной предыстории цен — максимальное положительное число (которое может принимать значение плюс бесконечность), такое, что если полуметрика между компактами, описывающими динамику цен исходной и возмущенной моделей, меньше данного положительного числа, то выполняется условие безарбитражности NDSAUP (а значит и RNDSAUP).

Получен результат, касающийся чувствительности модели, в предположениях, несколько более сильных, чем условия, гарантирующие непрерывность функций Беллмана –Айзекса. Усилено требование к множеству, описывающему торговые ограничения на текущем шаге, а именно, предполагается, что оно представимо в виде разложения Моцкина, т.е. представимого в виде суммы Минковского компактного множества и замкнутого выпуклого конуса (зависящих от предыстории цен), причем соответствующее компактозначное отображение предполагается непрерывным. Также усилено грубое условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью (RNDSAUP) — наложены определенные требования, касающиеся ограниченности снизу порога структурной устойчивости. При этих условиях получена равномерная оценка погрешности приближенного решении уравнений Беллмана–Айзекса для возмущенной модели, в которой, в частности, фигурируют модули непрерывности функции Беллмана –Айзекса для исходной модели. Как следствие, при стремлении к нулю равномерной (по предыстории цен) погрешности аппроксимации компактозначных отображений, описывающих динамику цен, решение уравнений Беллмана–Айзекса для возмущенной модели равномерно приближается к соответствующему решению исходной модели.

Для решения задачи суперхеджирования в рамках гарантированного детерминистского подхода с использованием двухэтапного способа, предложенного в Главе 7, возникает необходимость выбора подходящих численных алгоритмов построения вогнутой оболочки функции, а также максимизации вогнутой функции на выпуклом множестве. Автор привлекает для этой цели соображения, учитывающие специфику решаемой задачи и делает вывод, что для получения адекватного численного алгоритма достаточно выбрать субоптимальное покрытие для случая, когда точки лежат на решетке в многомерном евклидовом пространстве.   В диссертации предложено производить аппроксимацию компактов, описывающих динамику цен исходной модели компактами из конечного числа точек, лежащих на выбранной решетке. Результаты о чувствительности модели позволяет оценивать точность этой аппроксимации. Использование порога структурной устойчивости позволяет выбрать такую точность аппроксимации, что грубое условие безарбитражности будет сохраняться и для приближенной модели. Построение вогнутой оболочки неотрицательной функции, заданной на конечном множестве, сводится к эквивалентной задаче — к построению выпуклой оболочки множества с удвоенным количеством точек в пространстве с размерностью на единицу выше.

Проведенные диссертантом расчеты показали эффективность предложенного им численного метода решения задачи суперхеджирования.

В главе 11 исследуется решение уравнений Беллмана–Айзекса для конкретной задачи ценообразования — для бинарного опциона европейского типа, в рамках модели Колокольцова динамики цен (для рынка с отсутствием торговых ограничений). Получен ряд свойств решений, таких как монотонность, непрерывность всюду, кроме одной точки, кусочная выпуклость и рациональность. Предложен алгоритм с использованием символьных вычислений, при помощи которого проведен численный анализ. На этой основе (численно) были выявлены новые свойства решения уравнений Беллмана .

В главе 12 описывается система маржирования портфеля из опционов и фьючерсов на срочном рынке, основанная на детерминистском гарантированном подходе — с гарантированным финансовым результатом дефолт-менеджмента (действий центрального контрагента по урегулированию дефицита обеспечения участника клиринга, не исполнившего свои обязательства, посредством проведения целенаправленных операций на рынке с портфелем этого участника клиринга). Такой метод построения системы маржирования впервые был предложен в изобретении, инициированном автором диссертации и соавторами, зарегистрированном в 2004 году.

Математическая модель маржирования, т.е. способа определения требуемого уровня депозитной маржи (гарантийного обеспечения) строится с использованием идеологии гарантированного детерминистского подхода к суперхеджированию: из экономического смысла задачи выводятся уравнения Беллмана–Айзекса. Идея вышеупомянутого изобретения иллюстрируется на примере рынка европейских опционов на фьючерс. Можно интерпретировать данную проблему как специальную задачу суперхеджирования для европейского опциона с функцией выплат, равной возможным потерям по портфелю, дискретной целочисленной стратегией хеджирования фьючерсами, с транзакционными издержками по сделкам с фьючерсами, рассматривая количество средств на счете как безрисковый актив с торговым ограничением — запретом овердрафта (задолженности на счете).

Доказано свойство субаддитивности маржи, которое является непременным требованием к системе маржирования. Получены оценки констант Липшица для решений уравнения Беллмана–Айзекса, позволяющие оценивать точность решения. Разработан комплекс программ и проведены вычислительные эксперимента, показывающие работоспособность предложенного метода маржирования.

К диссертации имеются следующие замечания.

1. В диссертации имеются отдельные опечатки. Так, например, на стр. 17 в пункте 6) словосочетание «при отсутствии торговых ограничений» повторяется дважды (по ошибке).

2. На стр. 295 в третьем абзаце после слов «для определения хеджирующей стратегии» следовало бы уточнить — «при наличии торговых ограничений», т.е. исключить случай отсутствия торговых ограничений (что, по-видимому, автор и имел в виду).

3. Представляло бы интерес показать типичность структурно устойчивых моделей рынка в некотором смысле (например, в смысле категории), что требует, разумеется, определенной формализации.

Приведенные замечания не умаляют значимость полученных соискателем результатов.

Представленная работа является законченной научно-квалификационной работой, в которой разработаны новые математические методы моделирования финансовых рынков, позволившие ввести и исследовать новые качественные свойства моделей. На этой основе впервые построены, обоснованы и протестированы в ходе вычислительных экспериментов эффективные вычислительные методы решения задачи суперхеджирования. Предложенные численные методы и алгоритмы реализованы в виде комплексов проблемно-ориентированных программ. Таким образом, на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение.

Диссертация Смирнова Сергея Николаевича на тему «Гарантированный детерминистский подход к математическому моделированию финансовых рынков» соответствует всем критериям, установленным порядком присуждения ученых степеней в Санкт-Петербургском государственном университете, а соискатель заслуживает присвоения ученой степени доктора физико-математических наук по научной специальности 1.2.2. — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Член диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой
моделирования социально-экономических систем
Санкт-Петербургского государственного университета О. А. Малафеев

6 июня 2023 г.