

Отзыв члена диссертационного совета Колокольцова Василия Никитича на диссертацию Смирнова С.Н. на тему «Гарантированный детерминистский подход к математическому моделированию финансовых рынков», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

В диссертации Смирнова развивается нетрадиционный, а именно теоретико-игровой, подход к моделированию и расчету суперхеджирования и суперрепликации производных финансовых инструментов, в первую очередь Американских опционов достаточно общего вида, зависящих от нескольких акций, то есть так называемых радужных или цветных опционов.

Остановимся подробнее на содержании диссертации.

В главе 1 вводятся основные объекты исследования и основное рекуррентное соотношение (дискретное уравнение Беллмана-Айзекса) для (супер) хеджирующей цены и стратегии продавца опциона, вводятся основные обозначения и предположения модели, описывающей динамику цен американо-американского опциона как игры продавца опциона с природой (или, в данном случае, с рынком).

Глава 2 посвящена различным условиям безарбитражности (важнейшему понятию теории финансовых рынков) и их грубости (робастности) относительно возмущений компактов, определяющих стратегию природы, то есть возможную динамику цен. Стоит отметить Теорему 2.2.1 о монотонности безарбитражности и Теорему 2.4.2, утверждающую, что центральное условие безарбитражности равносильно трансверсальности пересечения выпуклых замыканий торговых ограничений и компактов, определяющих стратегию природы.

Глава 3 посвящена свойствам непрерывности и полунепрерывности решений. Здесь основным результатом является Теорема 3.2.2, утверждающая непрерывность решений (как многозначных отображений, определяющих множества максимизаторов) при условии грубой безарбитражности и непрерывности торговых ограничений.

Глава 4 усиливает результаты предыдущей главы, предлагая условия Липшицевой непрерывности решений (как многозначных отображений, то есть в метриках типа Хаусдорфа) и оценки модулей непрерывности. Достаточно нетривиальные результаты глав 2 – 4 представляют из себя техническую основу дальнейших исследований -- основных результатов, полученных далее.

Глава 5, одна из важнейших в работе, посвящена игровому равновесию в смешанных стратегиях, при различных предположениях о классах мер, расширяющих первоначальную игру в чистых стратегиях. В частности, рассматриваются расширения, определяемые всеми конечными линейными комбинациями мер Дирака, и конечными комбинациями не более чем $n+1$ мер Дирака, где n -- это число рисков активов на рынке. Основной результат - это условия существования цены игры, в смысле возможности переставить максимум и минимум в основном рекуррентном соотношении, для расширений в смешанных стратегиях. Этот результат возникает как следствие общей теоремы Кнезера и свойств непрерывности решений, доказанных ранее. Второй результат - это сведение игрового рекуррентного соотношения (минимакса) к чисто марковскому за счет явного вычисления минимума. Это возможно благодаря линейной зависимости дохода от управления хеджера. В случае отсутствия торговых ограничений минимаксное выражение сводится к максимуму интегралов функции дохода по риск-нейтральным мерам (что, кстати, является результатом, полученным независимо рецензентом).

Глава 6 посвящена довольно тонкой теории вложения вероятностной модели в детерминистскую с помощью Феллеровских ядер с переходными вероятностями, у которых носители совпадают с изначально заданными образами многозначных отображений, задающих возможные стратегии продавца опциона и природы. Этот результат важен для сравнения теоретико-игрового подхода к ценообразованию, развитого в диссертации, со стандартным вероятностным подходом.

В главе 7 предлагается двухэтапный алгоритм оптимизации, реализующий вычисления оптимальных стратегий и оптимального дохода. На первом шаге идет максимизация по мерам с фиксированным барицентром, а затем проводится максимизация по этому барицентру (то есть уже не по мерам, а по векторному параметру). Как оказывается, второй этап - это максимизация вогнутой функции на выпуклом

множестве. В случае отсутствия торговых ограничений барицентр фиксирован, так что второго этапа не нужно. По-существу здесь происходит старт основного достижения диссертации - построения, причем практически впервые, эффективных численных методов вычислений хеджирующих цен радужных опционов, что уже в полной мере развивается в главе 10.

Глава 8 посвящена непрерывности многозначных отображений максимизаторов со значениями в смешанных стратегиях. Основные результаты здесь – это Теорема 8.1.1 (об этой непрерывности) и Теорема 8.2.1 о существовании измеримых селекторов многозначных максимизаторов. Также в разделе 8.4 получено важное свойство сохранения выпуклости при переходе от шага к шагу (инвариантность выпуклых функций при применении оператора Беллмана) в моделях определенного типа. А в разделе 8.5 приведен пример нарушения непрерывности решений за счет нарушения структурной устойчивости, и приведены дополнительные условия непрерывности.

В Глава 9 дается аккуратное сравнение детерминистской и вероятностной постановки. Доказывается, что детерминистская оптимальная функция всегда доминирует вероятностную, и даются естественные условия (в терминах устойчивости модели), гарантирующие совпадение этих оптимальных функций.

В Глава 10 приводится детальное обсуждение основного достижения диссертации -- построение эффективного численного алгоритма вычисления хеджирующей цены Американского опциона. При этом вводится важное понятие порога структурной устойчивости и доказываются точные оценки погрешности численного метода. Основное предположение, допускающее эффективные оценки погрешности, состоит в том, что торговые ограничения полунепрерывны и представляются в виде разложения Моцкина (грубо говоря, суммы конуса и непрерывного многозначного отображения). Раздел 10.4 посвящен выбору конкретных численных методов в рамках двухэтапного способа для решения задачи ценообразования при суперхеджировании. Именно, возникает необходимость выбора подходящих численных алгоритмов построения вогнутой оболочки функции на первом этапе, а также максимизации вогнутой функции на выпуклом множестве на втором этапе. Оптимальное решение задачи сводится к построению оптимального покрытия

множества, на котором ищется гарантированное приближение, т. е. к нахождению конечного множества с заданным количеством точек, минимизирующего отклонение Помпею покрываемого множества от этого конечного множества. Важным моментом для построения численных процедур является также возможность отделение задачи хеджирования от задачи ценообразования.

Глава 11 посвящена важному классу опционов -- бинарным опционам. На этом классе удачно демонстрируются все возможности предложенного метода численного ценообразования.

В главе 12 излагается еще одно важнейшее достижение диссертации (на которое был получен патент) -- построение алгоритма вычисления депозитной маржи (или гарантированного обеспечения) клиринговой компанией, обслуживающей проведение торгов на рынке опционов. В предложенной модели построение маржи возникает как некий вариант суперхеджирования. В частности, выводится основное рекуррентное уравнение 12.4.6 (или в более удобном виде 12.4.7) для целевой функции, обеспечивающей наличие достаточного депозита для выполнения долговых обязательств. Ее значения и задают по-существу депозитную маржу. Далее доказывается важный результат о субаддитивности этой маржи, что и должно быть свойством всякой разумной меры риска.

Актуальность работы связана с большим интересом международного научного сообщества к проблеме суперхеджирования и, в частности, к численным процедурам вычисления суперхеджирующих цен и стратегий, чему и посвящена данная работа.

Новизна работы совершенно очевидна. Все основные результаты, отмеченные выше, получены автором самостоятельно или в сотрудичестве с его аспирантами.

Достоверность работы подтверждается многочисленными выступлениями соискателя на Российских и международных научных конференциях, наличием изобретения и 21 печатной работы в серьезных международных и Российских журналах.

Замечания. В работе имеются опечатки. Местами изложение весьма тяжеловесно и нелегко читается. В частности, вводится большое количество сокращенных обозначений, которые трудно держать в голове. Кроме того, по моему мнению, соискатель иногда неоправданно

увлекается англицизмами, например, при регулярном использовании термина «релевантный». Впрочем, этого трудно избежать, ибо основная литература по финансовой математике написана на английском языке.

Приведенные замечания не снижают общего положительного впечатления от работы.

Диссертация Смирнова является весомым вкладом в развитие методов математического моделирования финансовых рынков. Диссертация соответствует всем критериям, установленным Порядком присуждения ученой степени доктора наук в Санкт-Петербургском государственном университете, включая критерий, установленный пунктом 11 настоящего порядка, а соискатель заслуживает присвоения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.2.2. -- Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Член диссертационного совета, доктор физико-математических наук,
профессор кафедры Моделирования социально-экономических систем
факультета Прикладной математики и процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета



В.Н. Колокольцов

04.06.2023