

ОТЗЫВ

члена диссертационного совета Гущина Александра Александровича о диссертации Смирнова Сергея Николаевича на тему “Гарантированный детерминистский подход к математическому моделированию финансовых рынков”, представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.2.2 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация С. Н. Смирнова представляет собой фундаментальное научное исследование, относящееся к теме математического моделирования финансовых рынков. В работе последовательно, начиная с определений, развивается подход, называемый автором гарантированным детерминистским, в рамках которого возникает обширный класс моделей финансового рынка с дискретным временем. Изначально в таких моделях не используется вероятность, а неопределенность движения цен описывается при помощи априорно заданных сценариев — считается известным, что вектора дисконтированных цен рискованных активов (предполагается наличие одного безрискового актива) лежат в компактах, зависящих от предыстории цен. Такая постановка задачи впервые, насколько мне известно, была предложена в работах В. Н. Колокольцова, но в них не рассматривались торговые ограничения, играющие существенную роль в исследованиях С. Н. Смирнова. В частности, торговые ограничения необходимо учитывать при формализации свойств безарбитражности рынка.

Основной в диссертации является задача суперхеджирования. Для этой задачи получены уравнения Беллмана–Айзекса для целевых функций, которые можно интерпретировать как минимальные резервы для гарантированного покрытия обязательств продавца опциона (“хеджера”) на каждом временном шаге. Эти уравнения соответствуют экономическому смыслу задачи, имеют теоретико-игровую интерпретацию и, что особенно привлекательно, отличаются простотой и большой общностью. В этом плане автору удалось достичь соответствия эстетическому критерию фон Неймана: модель должна

быть довольно простой по отношению к тому, насколько значительно ею описываемое (соответствующая цитата имеется в эпиграфе к работе).

Большой интерес к проблеме суперхеджирования в современной литературе по математическим финансам подтверждает *актуальность избранной темы*. Формально исследования автора можно отнести к новому направлению, интенсивно развивающемуся после работы Бушара и Нутса 2015 года ([96] в списке литературы), а именно, к потраекторному подходу. Однако, диссертация отличается от других работ в этом направлении оригинальностью методов, используемых автором, полученным новым результатам, а также, в особенности, теоретико-игровой интерпретацией.

Представляют значительный научный интерес ряд *новых* результатов и идей автора. Отметим введенные автором два новых вида безарбитражности — отсутствие гарантированного арбитража (NDSA) и отсутствие гарантированного арбитража с неограниченной прибылью (NDSAUP); последнее является более слабым условием и в то же время наиболее адекватным в рамках рассматриваемого автором подхода. Получены геометрические критерии для этих условий безарбитражности. Имеет смысл особо выделить предложенную автором концепцию структурной устойчивости (называемую также принципом грубости) моделей финансового рынка. Торговые ограничения обычно задаются точно, а динамику цен следует считать заданной приближенно (в результате калибровки модели по рыночным данным, а также, возможно, с учетом субъективных мнений трейдеров). Естественным требованием к модели должно быть сохранение фундаментального экономического свойства модели — безарбитражности (понимаемой в определенном смысле) при малых возмущениях динамики рынка. Предложена формализация данного принципа и получены геометрические критерии. Оказалось, что структурная устойчивость является существенным условием непрерывности целевых функций а также для равномерной (по предыстории цен) близости целевых функций при равномерной (по предыстории цен) аппроксимации компактозначных отображений, описывающих динамику цен. Весьма полезным явилось понятие порога структур-

ной устойчивости. Получены явные выражения и свойство непрерывности для неограниченных торговых ограничений, что применяется при оценке точности предложенного численного метода, наряду с оценками модуля непрерывности целевых функций, полученных при условиях обеспечивающих непрерывность целевых функций. Подчеркнем, что понятие структурной устойчивости и ее порога имеет смысл и для вероятностных моделей. В работе получены оценки порога структурной устойчивости для трех различных вероятностных метрик.

Новым и важным, несмотря на простоту с математической точки зрения, является введение смешанного расширения стратегий рынка. Оказывается, игровое равновесие позволяет неожиданно просто получить ключевые результаты, которые в традиционной вероятностной теории называют дуальными. В связи с этим представляют особый интерес достаточные условия существования седловой точки на каждом временном шаге в динамической игре “хеджера” и “рынка” и борелевски измеримого переходного ядра для оптимальных (наиболее неблагоприятных) смешанных стратегий “рынка”, сосредоточенных в конечном числе точек, не превосходящим общее число активов.

Главным достижением работы следует считать впервые предложенный численный метод решения задачи суперхеджирования для широкого класса моделей, причем с гарантированной оценкой точности приближенного решения. Идея метода состоит в приближении динамики исходной модели при помощи другой подобной модели, близкой к исходной, но устроенной проще в том смысле, что она допускает естественное численное решение. С этой целью компакты, описывающие динамику цен, аппроксимируются конечными множествами, близкими в метрике Помпею-Хаусдорфа. Порог структурной устойчивости используется для того, чтобы близость была достаточной для сохранения безарбитражности приближенной модели. На каждом временном шаге решается двухэтапная задача. На первом этапе решается проблема моментов, равносильная построению вогнутой огибающей целевой функции; эта задача сводится к стандартной задаче вычислительной геометрии — построению выпуклой оболочки конечного множества. На втором этапе решается

задача максимизации вогнутой функции. При этом, если максимум достигается (что выполняется при весьма общих условиях), то им будет барицентр оптимальной смешанной стратегии “рынка”, и знания его значения, при наличии торговых ограничений, достаточно для определения оптимальной хеджирующей стратегии. Благодаря результатам о достаточных условиях совпадения решений задачи суперхеджирования для гарантированного детерминистского подхода и согласованной стохастической модели (при отсутствии торговых ограничений), эти численные методы применимы и для решения задачи суперхеджирования в вероятностной постановке.

Все математические утверждения в диссертации сформулированы в виде теорем или предложений и снабжены строгими доказательствами. Кроме того, вводимые автором новые понятия, такие как структурная устойчивость модели и ее реалистичность, или же принципы — например, принцип неопределенности (монотонности) для безарбитражности обоснованы с экономической точки зрения. Предложенные численные методы протестированы в ходе вычислительных экспериментов. Тем самым, в работе обеспечена *должная степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций.*

Публикации автора в рецензируемых изданиях, в том числе цитируемых в международных базах данных Scopus и WoS, а также выступления на конференциях и семинарах, как международных, так и российских, свидетельствуют о *достоверности* полученных результатов.

В качестве замечания можно указать наличие опечаток, причем не только в тексте, но и в формулах. Например, на странице 190 в обозначении для липшицевой нормы пропущен символ функции. Замечу также, что статья [204] в списке литературы на момент подачи диссертации в диссертационный совет СПбГУ уже вышла в журнале, что не отражено. Эти замечания, однако, не являются принципиальным и не снижают положительного впечатления от работы.

Таким образом, диссертация С. Н. Смирнова является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, касаю-

щиеся теории и численных методов математического моделирования финансовых рынков, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение. Диссертационная работа Смирнова Сергея Николаевича на тему “Гарантированный детерминистский подход к математическому моделированию финансовых рынков” соответствует основным требованиям, установленным Приказом от 19.11.2021 № 11181/1 “О порядке присуждения ученых степеней в Санкт-Петербургском государственном университете”, а соискатель Смирнов Сергей Николаевич заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Нарушения пунктов 9 и 11 указанного Порядка в диссертации не обнаружены.

6 июня 2023 г.

Член диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, снс
ведущий научный сотрудник

Математического института им. В. А. Стеклова РАН А. А. Гущин
E-mail: gushchin@mi-ras.ru

Подпись А.А. Гущина заверено
Ученый секретарь МИАН



СА Батка рив