О Т З Ы В
члена диссертационного совета,
профессора РАН, доктора физико-математических наук
Александра Игоревича Буфетова
на диссертационную работу Мозоляко Павла Александровича
«Дискретные модели граничного поведения гармонических функций»,
представленную на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук
по специальности 1.1.1 «Вещественный, комплексный
и функциональный анализ»

Гармонический анализ берёт своё начало у самых истоков нашей науки — как замечает Норберт Винер, «The first beginnings of Fourier series theory may be regarded as very ancient, for the musical theories of Pythagoras have already in them elements which later investigations have shown to be of trigonometric nature». Астрономическая теория Клавдия Птолемея в современных терминах сводится к приближению периодической функции тригонометрическим полиномом. Следующий шаг теории сделан в Санкт-Петербурге: в 1729 году Эйлер ставит проблему экстраполяции функции по её значениям в целых точках. Ответ на вопрос Эйлера даст в 1933 году в Москве Котельников.

Преобразование Лапласа начал изучать тоже Эйлер в Санкт-Петербурге, немного позже, в 1737 году, в работе «De Constructione Aequationum» (Comm. Acad. Sci. Petrop. 9 (1737), 85–97). Эйлеру принадлежит, насколько я знаю, первое уравнение математической физики — носящее его имя уравнение движения идеальной жидкости. Заметим, что нелинейное уравнение появляется раньше линейных: рассматривая линейное приближение своего уравнения, Эйлер получает так называемое «уравнение Лапласа». Так рождается теория гармонических функций.

Диссертация П. А. Мозоляко «Дискретные модели граничного поведения гармонических функций» посвящена, таким образом, одному из самых классических разделов анализа — теории граничного поведения гармонических функций. Сравнительно недавно, среди прочего, в связи со знаменитыми работами Макарова, резко возрос интерес к так называемым дискретным моделям гармонических функций. Этот рост интереса в значительной мере связан с вероятностными приложениями. Исследование дискретных аналогов гармонических функций, которому посвящена диссертация П. А. Мозоляко, — одно из самых современных и перспективных направлений гармонического анализа. Перейдём к разбору основных результатов диссертации.

Диссертация П. А. Мозоляко открывается исследованием дискретных аналогов классических мер Карлесона. П. А. Мозоляко исследует весовой оператор Харди, действующий в пространстве квадратично-интегрируемых функций на графе по отношению к специально выбранной мере. Оператору Харди с заданными мерой μ и весом w сопоставляется набор констант — среди них константа вложения Карлесона $[w,\mu]_{CE}$, субъёмкостная константа $[w,\mu]_{SC}$, наследственная константа Карлесона $[w,\mu]_{HC}$, константа Карлесона $[w,\mu]_{C}$, box-константа $[w,\mu]_{B}$. Эти константы задаются как минимальные константы, для которых одна «мера» любого множества не превосходит другой «меры» этого множества, умноженной на эту константу. Например, субъёмкостная константа — это минимальное K, для которого неравенство $\mu(E) \leq K\,\mathrm{Cap}_w(E)$ справедливо для любого подмножества $E \subset \overline{T}^d$.

Эти константы удовлетворяют определённым неравенствам. В случае размерности

№ 33-06-1617 от 01.12.2023

$d = 1$ такие неравенства получены Назаровым, Трейлем и Вольбергом в знаменитой работе, основанной на методе функций Беллмана. Рассуждения диссертации дают требуемые неравенства также и для $d = 2$ и $d = 3$ (теорема I.1): если вес w имеет структуру произведения, то

$$[w,\mu]_B \gtrsim [w,\mu]_C \gtrsim [w,\mu]_{HC} \gtrsim [w,\mu]_{CE}, \quad [w,\mu]_{SC} \gtrsim [w,\mu]_{CE}.$$

Другой результат первой части (теорема I.5) предъявляет необходимые и достаточные условия для того, чтобы оператор вложения пространства Харди d-мерного полидиска с данным вектором параметров $\vec{s}$, близким к $(1,\dots,1)$, в пространство L^2 с некоторой мерой ν был ограниченным. Условия формулируются в терминах неравенств на интегралы по этой мере от карлесоновых тентов диадических параллелепипедов.

Среди результатов второй части отметим необходимое и достаточное условие принадлежности гармонической в полупространстве $\mathbb{R}^{d+1}_+$ функции пространствам h^0_w и h^∞_w (теорема I.10). Условие формулируется в терминах асимптотики всплеск-разложений, когда их номер N стремится к бесконечности.

Ещё одно утверждение, теорема I.11, позволяет переформулировать условие принадлежности гармонической в полупространстве $\mathbb{R}^{d+1}_+$ функции пространству h^∞_w, заменив в его определении ядро Пуассона на любую достаточно гладкую аппроксимативную единицу

Также в этой части получены следующие результаты об a-разделённых разностях при $a \in (0,1)$: для непрерывной функции f на прямой положим

$$\mathrm{D}_a f(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{|h|^a};$$

тогда (теорема I.16) существует a-гёльдеровская функция, для которой при почти всех $x \in \mathbb{R}$

$$\limsup_{h\to 0^+} \mathrm{D}_a f(x,h) > 0 \quad \text{и} \quad \liminf_{h\to 0^+} \mathrm{D}_a f(x,h) = 0.$$

Более того, второе условие можно усилить (теорема I.17): для некоторой последовательности $h'_k \to 0^+$ верно

$$\lim_{k\to+\infty} \mathrm{D}_1 f(x,h'_k) \le 1.$$

В третьей части отметим теорему I.20, утверждающую, что функция f, гармоническая и положительная в области $\Omega \subset \mathbb{R}^{d+1}$ с C^2-гладкой границей, имеет сверхплотное на $S = \partial\Omega$ множество точек x с конечной нормальной вариацией: если n_x — внутренняя нормаль в точке x, то интеграл

$$\int_0^\varepsilon \left| \frac{d}{dt} f(x + tn_x) \right| dt$$

сходится. Здесь ε настолько мало, чтобы $x + tn_x \in \Omega$ при $t \in (0,\varepsilon]$. Наконец, сверхплотность означает, что это множество, пересечённое с любой окрестностью $B(\xi, r)$ любой точки ξ границы, имеет хаусдорфову размерность d.

Перейдём к разбору недостатков диссертации. В условии (I.27b) теоремы I.5 неясна связь между множеством E и стоящим в правой части неравенства параллелепипедом Q. Автор использует, неудачный, на мой взгляд, термин «политор»; прямое произведение окружностей по-русски называется «тор». Перед формулировкой теоремы I.10 следовало бы напомнить определения пространств h^∞_w и h^0_w. Указанные недостатки не влияют на общую положительную оценку работы.

Диссертация П. А. Мозоляко является видным достижением в области гармонического анализа. Все результаты диссертации опубликованы в ведущих общематематических и специализированных журналах. Они хорошо известны специалистам и активно цитируются.

Нарушения пунктов 9, 11 Порядка присуждения Санкт-Петербургским государственным университетом ученой степени доктора наук соискателем ученой степени не установлены. Диссертация Мозоляко Павла Александровича «Дискретные модели граничного поведения гармонических функций» соответствует основным требованиям, установленным приказом №11181/1 от 19.11.2021 «О порядке присуждения ученых степеней в Санкт-Петербургском государственном университете», а соискатель Мозоляко Павел Александрович заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Член диссертационного совета,
Профессор РАН, доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник
отдела дифференциальных уравнений
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

____________ А. И. Буфетов

119991, Москва, ул. Губкина, д. 8
Тел. +7 (495) 984 81 41, доб. 37-75
E-mail: bufetov@mi-ras.ru

Подпись А.И. Буфетова заверяю

Копия верна:
Заведующий отделом кадров МИАН
Усачева О.Г.

ОТДЕЛ КАДРОВ